C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 199–204

Topologie différentielle/*Differential Topology*

Une nouvelle définition de l'invariant de Casson

Bernard Perron

Université de Bourgogne, Laboratoire de topologie, UMR 5584 du CNRS, 9, avenue Alain Savary, BP 47870, 21078 Dijon cedex, France

Reçu le 24 octobre 2001 ; accepté le 31 octobre 2001

Note présentée par Etienne Ghys.

Résumé Dans [4], en s'inspirant de [2], on a défini un invariant $\Delta(f) \in \mathbb{Q}$, pour tout $f \in \mathcal{M}_{g,1}$, le groupe modulaire d'une surface compacte, connexe, orientée, à bord connexe, de genre g. Pour $f \in \mathcal{T}_{g,1}$ (un certain sous-groupe du groupe de Torelli), on a montré dans [4], en utilisant la formule de chirurgie de Casson, que $\Delta(f)$ coïncide avec l'invariant de Casson [1] de la sphère d'homologie entière M_f, obtenue en recollant deux corps d'anses par f. Le but de cette Note est de montrer directement (i.e. sans référence à Casson) que $\Delta(f)$, pour $f \in \mathcal{T}_{g,1}$, ne dépend que de la 3-variété M_f. La formule de chirurgie, qui est l'un des points difficiles chez Casson, résulte pratiquement de la définition de $\Delta(f)$. ***Pour citer cet article : B. Perron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 199–204.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A new definition of the Casson invariant

Abstract In [4], following [2], we have defined an invariant $\Delta(f) \in \mathbb{Q}$, for any $f \in \mathcal{M}_{g,1}$, the mapping class group of a compact, connected, oriented surface with connected boundary, genus g. For $f \in \mathcal{T}_{g,1}$ (a certain subgroup of the Torelli group), we have shown in [4], using Casson surgery formula, that $\Delta(f)$ coïncides with the Casson invariant [1] of the homology sphere M_f, obtained by gluing two handlebodies along f. The purpose of this Note is to prove directly (i.e., without reference to Casson) that $\Delta(f)$, for $f \in \mathcal{T}_{g,1}$, depends only on M_f. The surgery formula, which is a difficult point in Casson version, follows almost immediatly from the definition of $\Delta(f)$. ***To cite this article: B. Perron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 199–204.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let $S_{g,1}$ be a compact, connected, oriented surface of genus g, with connected boundary and $\mathcal{M}_{g,1}$ its mapping class group, i.e., the group of isotopy classes of homeomorphisms of $S_{g,1}$, which are identity on the boundary.

In [4], following [2], we have defined an invariant $\Delta(f) = -\frac{1}{12}\theta_0(A_2''(f)) + \frac{1}{24}d(f) \in \mathbb{Q}$, for any $f \in \mathcal{M}_{g,1}$, where θ_0 and d are maps defined in [2] (resp. in Lemma 4.4 and & 6) and A_2'' $(= \sigma \circ A_2'$ with the notations of [4]) is related to the second Johnson homomorphism.

We have shown in ([4], Corollary 2.3), using Casson surgery formula, that for $f \in \mathcal{T}_{g,1}$ (a certain subgroup of the Torelli group of $S_{g,1}$), $\Delta(f)$ coïncides with the Casson invariant of M_f, the $\mathbb{Z}$-homology

Adresse e-mail : perron@topolog.u-bourgogne.fr (B. Perron).

S1631-073X(02)02208-2/FLA

sphere obtained by gluing two handlebodies of genus g along f. So $\Delta(f)$ depends only on M_f (as remark by Morita [2], Proposition 2.3, any $\mathbb{Z}$-homology sphere is obtained by this way).

The purpose of this Note is to show directly (i.e., without reference to Casson) that $\Delta(f)$ (for $f \in \mathcal{T}_{g,1}$) depends only on M_f. This amounts to show that $\Delta(f)$ is invariant by the two Reidemeister–Singer operations (*see* [2] & 2 for example): stabilization and equivalence. Recall that two elements $f, g \in \mathcal{M}_{g,1}$ are equivalent if there exist homeomorphisms $\xi \in \mathcal{N}'_{g,1}$, $\eta \in \mathcal{N}_{g,1}$ such that $f = \xi g \eta$, where $\mathcal{N}_{g,1}$ (resp., $\mathcal{N}'_{g,1}$) is the subgroup of $\mathcal{M}_{g,1}$ consisting of homeomorphisms of $S_{g,1}$ extending to the handlebody H_g bounded by the standard embedding of $S_{g,1}$ in $\mathbb{R}^3$ (resp., to $H'_g = \overline{(\mathbb{R}^3 \cup \infty) - H_g}$). This is done by lenghty but elementary computations, using properties of θ_0, d, A''_2. On the other hand, the surgery formula in Casson version which is hard to prove and use as a "black box" a difficult theorem of Newstead (*see* [1]), follows almost immediatly from the definition of $\Delta(f)$. This gives an independant point of view of Casson invariant.

The invariance of Δ under stabilization follows from the definition of Δ. A key step in proving the invariance of Δ under equivalence is to show that $\Delta(\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}) = 0$, where $\mathcal{I}_{g,1}$ is the Torelli subgroup of $S_{g,1}$, together with the fact that Δ restricted to $\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}$ is a homomorphism. To do this, we exhibit a (infinite) set of generators of $\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}$, which are in fact all conjugated (by a certain finitly generated subgroup $\mathcal{G}$ of $\mathcal{N}_{g,1}$) to a finite set of elements of $\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}$. This uses only classical arguments such as Suzuki finite set of generators of $\mathcal{N}_{g,1}$ [8], Steinberg presentation of the linear group $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$ [3].

Introduction

Soit $S_{g,1}$ (resp. S_g) une surface compacte, connexe, orientée, de genre g avec une composante de bord (resp. sans bord). Désignons par $\mathcal{M}_{g,1}$ (resp. $\mathcal{M}_g$) son groupe modulaire, c'est-à-dire le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes égaux à l'identité sur le bord (resp. préservant l'orientation). On a des applications naturelles :

$$\mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{\overline{(\,)}} \mathcal{M}_g \xrightarrow{B_0} \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$$

(où $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ désigne le groupe symplectique des matrices $2g \times 2g$ à coefficients entiers) définies de la façon suivante : considérant $S_{g,1}$ comme une sous-variété de S_g (telle que $\overline{S_g - S_{g,1}}$ est homéomorphe à un disque), on prolonge $f \in \mathcal{M}_{g,1}$ par l'identité sur le disque. Pour $\bar{f} \in \mathcal{M}_g$, $B_0(\bar{f})$ est l'isomorphisme induit sur $H = H_1(S_{g,1}; \mathbb{Z}) \cong H_1(S_g, \mathbb{Z})$, muni de la forme symplectique d'intersection.

Notons $\mathcal{I}_{g,1}$ ($= \mathcal{M}(2)$ avec les notations de [4]) le groupe de Torelli de $S_{g,1}$, c'est-à-dire le groupe des (classes d'isotopie) homéomorphismes de $S_{g,1}$, induisant l'identité sur H. On désigne par $\mathcal{T}_{g,1}$ ($= \mathcal{M}(3)$ avec les notations de [4]) le sous-groupe normal de $\mathcal{M}_{g,1}$, engendré par les twists de Dehn le long de cercles plongés dans $S_{g,1}$ et homologues à 0.

Dans [4] on a défini une application $A_2 : \mathcal{M}_{g,1} \mapsto (\overset{2}{\otimes} H) \otimes H \otimes H$, qui restreinte à $\mathcal{T}_{g,1}$, est un homomorphisme. Cette application A_2 est étroitement liée à l'homomorphisme de Johnson τ_3 de [2]. Pour $f \in \mathcal{T}_{g,1}$, il est montré dans [4] que l'image de $A'_2 = \pi \circ A_2/\mathcal{T}_{g,1} : \mathcal{T}_{g,1} \xrightarrow{A_2} (\overset{2}{\otimes} H) \otimes H \otimes H \xrightarrow{\pi} (\overset{2}{\wedge}) \otimes H \otimes H$ est contenue dans le sous-groupe T engendré par $(a \wedge b) \otimes (a \wedge b)$ et $a \wedge b \leftrightarrow c \wedge d = (a \wedge b) \otimes (c \wedge d) + (c \wedge d) \otimes (a \wedge b)$ pour tout $a, b, c, d \in H$ (quand $c \wedge d$ appartient à $H \otimes H$, il est par définition égal à $c \otimes d - d \otimes c$).

Soit $\sigma : \overset{2}{\wedge} H \otimes H \otimes H \to T$ l'homomorphisme défini par :

$$\sigma\big((a \wedge b) \otimes (c \otimes d)\big) = a \wedge b \leftrightarrow c \wedge d.$$

Alors $\sigma/T = 4\,\mathrm{id}_T$. On pose alors $A''_2 = \sigma \circ \pi \circ A_2 : \mathcal{M}_{g,1} \to T$.

Morita, dans ([2], lemme 4.4 et & 5), a défini un homomorphisme $\theta_0 : T \mapsto \mathbb{Z}$, et une application $d : \mathcal{M}_{g,1} \mapsto \mathbb{Z}$. On pose alors, pour tout $f \in \mathcal{M}_{g,1}$:

$$\Delta(f) = -\frac{1}{12}\theta_0\big(A_2''(f)\big) + \frac{1}{24}d(f) \in \mathbb{Q}.$$

(Morita, dans [2], a une formule apparentée à celle-ci, mais définie uniquement pour $f \in \mathcal{T}_{g,1}$.)

Considérons S_g (contenant $S_{g,1}$) plongée de façon standard dans $\mathbb{R}^3$. Soit H (resp. $H' = \mathbb{R}^3 \cup \infty - \overset{\circ}{H}$) le corps d'anses bordé par $S_g \subset \mathbb{R}^3$.

Alors, pour tout $f \in \mathcal{M}_{g,1}$, notons M_f la 3-variété obtenue en recollant H à H' par l'homéomorphisme : $\bar{f} : \partial H \to \partial H'$. Il est facile de voir que si $f \in \mathcal{I}_{g,1}$, alors M_f est une sphère d'homologie entière (notée dans la suite $\mathbb{Z}SH$). Morita [2] a noté que toute $\mathbb{Z}SH$ est homéomorphe à M_f pour un $f \in \mathcal{T}_{g,1}$.

On a une flèche naturelle $\mathcal{I}_{g,1} \to \mathcal{I}_{g+1,1}$ (stabilisation ou opération *RSI* ; *RS* pour Reidemeister–Singer). En adaptant un théorème de Reidemeister–Singer [5] à la classe des $\mathbb{Z}SH$, on peut montrer ([2], théorème 2.2, proposition 2.3) que si $\varphi \in \mathcal{I}_{g',1}$ et $\psi \in \mathcal{I}_{g'',1}$ donnent des $\mathbb{Z}SH$ homéomorphes, alors, quitte à stabiliser φ et ψ dans un $\mathcal{I}_{g,1}$ ($g \geqslant g', g''$), il existe $\xi \in \mathcal{N}'_{g,1}$, $\eta \in \mathcal{N}_{g,1}$ tels que :

$$\mathit{RSII} \quad \varphi = \xi\psi\eta$$

où $\mathcal{N}_{g,1}$ (resp. $\mathcal{N}'_{g,1}$) désigne le sous-groupe de $\mathcal{M}_{g,1}$ constitué des homéomorphismes qui s'étendent au corps d'anses H (resp. H').

Dans ([4], corollaire 2.3), inspiré par [2], on a démontré la :

PROPOSITION 0. – *Pour $f \in \mathcal{T}_{g,1}$, $\Delta(f) = \lambda(M_f)$ où λ désigne l'invariant de Casson de la $\mathbb{Z}SH$ M_f* (voir [1] *pour une définition de l'invariant de Casson*).

Il s'ensuit que $\Delta(f)$ est invariant par les opérations *RSI* et *RSII*.

Le but de cette Note est de montrer directement l'invariance de $\Delta(f)$ par les opérations *RSI* et *RSII* (c'est-à-dire sans référence à Casson). C'est la proposition A ci-dessous. La proposition *B*, dont la démonstration découle presque immédiatement de la définition de Δ, donne la formule de chirurgie sur un nœud et un entrelacs bord (*voir* [1], propositions 1.3.3 et 4.9).

Remarque. – Dans l'approche originale de Casson, le fait que ce soit un invariant de $\mathbb{Z}SH$ est plus ou moins élémentaire (dès qu'on a la définition du futur invariant). Par contre la formule de chirurgie, qui permet de faire des calculs explicites, est beaucoup plus difficile à démontrer : la démonstration utilise en particulier un théorème profond de Newstead sur les représentations d'un groupe libre dans SU(2) (*voir* [1]). Concernant Δ, la situation est inversée : les formules de chirurgie découlent pratiquement de la définition mais la démonstration de l'invariance requiert des calculs longs et fastidieux, bien qu'élémentaires. L'outil le plus sophistiqué qu'on utilise est la présentation (de Steinberg) par générateurs et relations du groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ ([3], corollaire 10.3).

PROPOSITION A. – *$\Delta(f)$, pour $f \in \mathcal{T}_{g,1}$, est invariant par les opérations RSI et RSII.*

Pour une $\mathbb{Z}SH$, Σ, posons $\tilde{\lambda}(\Sigma) = \Delta(f)$, pour un $f \in \mathcal{T}_{g,1}$, tel que $\Sigma \cong M_f$. Soit $L = \{k_1, \ldots, k_n\}$ un entrelacs dans Σ ; notons $\Sigma + L = \Sigma + k_1 + \cdots + k_n$ la $\mathbb{Z}SH$ obtenue de Σ par chirurgie sur L, avec coefficient $1/_{-1}$ (*voir* & 9-G de [6]).

PROPOSITION B. –

(i) *Si k est un nœud dans une $\mathbb{Z}SH$ Σ alors* :

$$\tilde{\lambda}(\Sigma + k) = \tilde{\lambda}(\Sigma) - \frac{1}{2}\Delta_k''(1),$$

où $\Delta_k(t)$ *est le polynôme d'Alexander normalisé de* $k \subset \Sigma$ (voir [1], *Appendice A*).

(ii) *Si* $L = (k, \ell)$ *est un entrelacs bord* (*i.e.* k *et* ℓ *bordent des surfaces de Seifert disjointes*) *alors* :

$$\tilde{\lambda}(\Sigma + k + \ell) = \tilde{\lambda}(\Sigma + k) + \tilde{\lambda}(\Sigma + \ell) - \tilde{\lambda}(\Sigma).$$

Esquisse de preuve de la proposition A. – L'invariance de Δ par stabilisation est évidente de par la définition. Il reste à prouver que $\Delta(f) = \Delta(g)$, pour $f, g \in \mathcal{T}_{g,1}$, tels que $f = \xi g \eta$, $\xi \in \mathcal{N}'_{g,1}$, $\eta \in \mathcal{N}'_{g,1}$.

La démonstration du lemme suivant est facile.

LEMME 1. –
(1) $\Delta \mid \mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1} \mapsto \mathbb{Q}$ (*resp.* $\Delta \mid \mathcal{N}'_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1} \to \mathbb{Q}$) *est un homomorphisme.*
(2) $\Delta \mid \mathcal{T}_{g,1}$ *est invariant par RSII si* $\Delta(\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}) = 0$.

Remarque. – On voit facilement que $\Delta(\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}) = 0$ est équivalent à $\Delta(\mathcal{N}'_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}) = 0$.

Étant donné un cercle plongé dans $S_{g,1}$, on note $D(c)$ le twist de Dehn le long de c. On définit alors les éléments suivants de $\mathcal{M}_{g,1}$:

$$\begin{aligned}
&\psi_{ij} = D(u_{ij}) D(x_i)^{-1} D(y_j)^{-1} \quad \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant g,\\
&\psi_{ji} = D(u'_{ij}) D(x_j)^{-1} D(y_i)^{-1} \quad \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant g,\\
&\phi_{ij} = D(v_{ij}) D(y_i)^{-1} D(y_j)^{-1} \quad \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant g,\\
&\phi_{ii} = D(y_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant g,\\
&w_1 = \big(D(x_1) D(y_1)\big)^3,
\end{aligned}$$

où $u_{ij}, u'_{ij}, v_{ij}, x_i, y_i$ sont les cercles décrits par la figure 1. Il est facile de voir que ϕ_{ij} et w_1 appartiennent à $\mathcal{N}_{g,1}$, tandis que $\psi_{ij} \in \mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{N}'_{g,1}$. On note $\mathcal{G}$ le sous-groupe de $\mathcal{N}_{g,1}$ engendré par $\{\phi_{ij}, \psi_{k\ell}, w_1;\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant g,\ 1 \leqslant k,\ \ell \leqslant g,\ k \neq \ell\}$.

Notant $\mathcal{N}_g^* = B_0(\mathcal{N}_{g,1}) \subset \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, il est facile de voir que $B_0(\mathcal{G}) = \mathcal{N}_g^*$. En utilisant le fait que $\mathcal{N}_g^*$ est isomorphe au produit semi-direct de $S\mathcal{M}_g(\mathbb{Z})$ (le groupe additif des matrices $g \times g$ symétriques) par $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$ et la présentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$ ([3], corollaire 10.3) on peut démontrer le :

LEMME 2. – $\mathcal{G} \cap \mathcal{I}_{g,1}$ *est le sous-groupe de* $\mathcal{G}$ *normalement engendré par les éléments suivants* ($[a, b]$ *désigne le commutateur* $aba^{-1}b^{-1}$) :
(1) $[\phi_{ij}, \phi_{k\ell}]$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant g$, $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant g$.
(2) $[\psi'_{ij}, \psi'_{k\ell}]$, i, j, k, ℓ *tous différents*, $\in \{1, \ldots, g\}$, *où* $\psi'_{ij} = \psi_{ij}^{-1}$ *si* $i < j$ *et* $\psi'_{ij} = \psi_{ij}$ *si* $i > j$.
(3) $[\psi'_{ij}, \psi'_{jk}]\, \psi'^{-1}_{ik}$, $i \neq k, i, j, k \in \{1, \ldots, g\}$.
(4) $w_1\, \psi_{1j}^{-1} w_1 \psi_{1j}^{-1}$, $1 < j \leqslant g$.

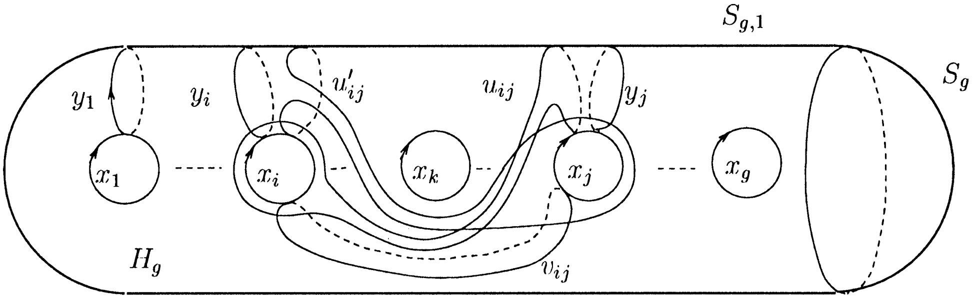

Figure 1.

(5) $w_1\psi_{j1}w_1\psi_{j1}$, $1 < j \leqslant g$.
(6) $[\psi'_{k\ell}, \phi_{ij}]$, $k \neq i$, $k \neq j$, $i, j, k, \ell \in \{1, \ldots, g\}$.
(7) $[\psi'_{i\ell}, \phi_{ij}]\phi_{j\ell}$, $i < j$, $i \neq \ell$, $i, j, \ell \in \{1, \ldots, g\}$.
(8) $[\psi'_{j\ell}, \phi_{ij}]\phi_{i\ell}$, $i < j$, $j \neq \ell$, $i, j, \ell \in \{1, \ldots, g\}$.
(9) $[\psi'_{ij}, \phi_{ij}]\phi^2_{jj}$, $1 \leqslant i < j \leqslant g$.
(10) $[\psi'_{i\ell}, \phi_{ii}]\phi_{i\ell}\phi^{-1}_{\ell\ell}$, $1 \leqslant i \neq \ell \leqslant g$.
(11) $w_1\phi_{1j}w_1\phi_{1j}$, $1 < j \leqslant g$.
(12) $w_1\phi_{11}w_1^{-1}\phi_{11}^{-1}$.
(13) w_1^2.
(14) $(\psi_{12}\psi_{21}\psi_{12})^4$.

Soit ρ (resp. ρ_{12}) la rotation d'angle $2\pi/_g$ (resp. l'échange des deux premières anses) de $S_{g,1}$ définie par Suzuki [8], qui appartient à $\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{N}'_{g,1}$. Il est connu ([2], lemme 2.5), que l'image de $\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}$ par le premier homomorphisme de Johnson (A_1 dans les notations de [4], τ_2 dans les notations de [2]) est le sous-groupe de $\overset{3}{\wedge} H$ engendré par l'orbite des cinq éléments suivants de $\overset{3}{\wedge} H$, sous l'action du sous-groupe de $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ engendré par $B_0(\rho)$, $B_0(\rho_{12})$:

$$\alpha_1 = a_1 \wedge a_2 \wedge b_1, \quad \alpha_2 = a_1 \wedge b_1 \wedge b_2, \quad \alpha_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge b_3, \quad \alpha_4 = a_1 \wedge b_2 \wedge b_3, \quad \alpha_5 = b_1 \wedge b_2 \wedge b_3.$$

Dans ([4], & & 3.3.1 à 3.3.5), on a défini des éléments spécifiques $\eta_1, \ldots, \eta_5$ de $\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}$, tels que $A_1(\eta_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Pour $\varphi \in \mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}$, notons $\mathcal{T}(\varphi) \in \mathcal{T}_{g,1}$ la composition $\varphi \circ \eta$, où η est un produit de conjugués de η_i par des éléments du sous-groupe de $\mathcal{N}_{g,1}$ engendré par ρ et ρ_{12}, tel que $A_1(\eta) = -A_1(\varphi)$ (évidemment un tel η n'est pas unique).

Rappelons encore que Suzuki [8] a montré que $\mathcal{N}_{g,1}$ est engendré par ρ, ρ_{12}, w_1, ϕ_{12}, ψ_{12}, ϕ_{11}.

On a alors la :

PROPOSITION 3. – *$\mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}$ est engendré par les conjugués par tous les éléments de $\mathcal{N}_{g,1}$ des éléments suivants* :

(a) $\mathcal{T}(i)$, $i = 1, 2, \ldots, 14$, *où* (i) *désigne les éléments de $\mathcal{G} \cap \mathcal{I}_{g,1}$ donnés par le lemme* 2.
(b) $\mathcal{T}(\rho g_1^{-1})$, $\mathcal{T}(\rho_{12} g_2^{-1})$, *où g_1 (resp. g_2) est un élément de $\mathcal{G}$ tel que $B_0(\rho) = B_0(g_1)$ (resp. $B_0(\rho_{12}) = B(g_2)$).*
(c) η_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$ *(définis plus haut).*

Remarque. – Soit $\eta \in \mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}$. Pour montrer que $\Delta(n\eta n^{-1}) = 0$, quelque soit $n \in \mathcal{N}_{g,1}$, il suffit de montrer que $\Delta(g\eta g^{-1}) = 0$ pour tout $g \in \mathcal{G}$. En effet soit $g \in \mathcal{G}$ tel que $B_0(g) = B_0(n)$; donc $ng^{-1} \in \mathcal{N}_{g,1} \cap \mathcal{I}_{g,1}$. On a donc $\Delta(n\eta n^{-1}) = \Delta((ng^{-1})g\eta g^{-1}\ (ng^{-1})^{-1}) = \Delta(g\eta g^{-1})$ d'après le lemme 1.

Done pour montrer la proposition A, d'après le lemme 1, il suffit de montrer que Δ s'annule sur les conjugués par les éléments de $\mathcal{G}$ de $\mathcal{T}(i)$, $i = 1, 2, \ldots, 14$, $\mathcal{T}(\rho g_1^{-1})$, $\mathcal{T}(\rho_{12} g_2^{-1})$ et η_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Pour $\alpha = \mathcal{T}(i)$, $\mathcal{T}(\rho g_1^{-1})$, $\mathcal{T}(\rho_{12} g_2^{-1})$ (qui appartiennent à $\mathcal{T}_{g,1}$), il suffit, en utilisant les propriétés de Δ, de montrer que $\Delta(\alpha) = 0$ et $\theta_0\ (\lambda\, A''_2(\alpha)) = \theta_0(A''_2(\alpha))$, pour tout $\lambda \in \mathcal{N}^*_g$.

Pour η_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, on utilise le fait que $\Delta(\eta_i) = 0$ (démontré dans [4], & 3) et une induction sur la longueur de $g \in \mathcal{G}$, exprimé à l'aide des générateurs de $\mathcal{G}$.

Preuve de la proposition B. – Soit Σ une $\mathbb{Z}SH$ et $k \subset \Sigma$ un nœud. On peut trouver une surface de Heegard $S_g \subset \Sigma$ telle que $k \subset S_g$ et k borde dans S_g une sous-surface ([7], lemme 17.1). Soit $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$ tel que $\Sigma \simeq M_\varphi$. II est connu ([2], lemme 3.4) que $\Sigma + k \simeq M_{\varphi \circ D(k)}$ et donc $\tilde{\lambda}(\Sigma + k) = \Delta(\varphi \circ D(k)) = \Delta(\varphi) + \Delta(D(k))$, d'après l'additivité de Δ sur $\mathcal{T}_{g,1}$. D'après ([2], proposition 3.2 et 4.5), $\Delta(D(k)) = -\frac{1}{2}\Delta''_{k \subset S^3}(1)$, où k est vu dans S^3, après avoir plongé S_g de façon standard dans S^3. Puisque

$\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$, $\Delta_{k\subset S^3}(t) = \Delta_{k\subset\Sigma}(t)$ d'après la démonstration de la proposition 3.5 de [2]. La démonstration du point (ii) de la proposition B est analogue.

Remarque. – Les résultats de [2] et [4] qu'on utilise ici sont indépendants du fait que $\Delta(f)$ est égal à l'invariant de Casson de M_f.

Références bibliographiques

[1] L. Guillou, A. Marin, Notes sur l'invariant de Casson des sphères d'homologie de dimension trois, L'Enseignement Mathématique 38 (3–4) (1992) 233–290.
[2] S. Morita, Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles I, Topology 28 (1989) 305–323.
[3] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-theory, Ann. of Math. Studies, Vol. 72, Princeton University Press, 1971.
[4] B. Perron, Johnson's and Morita's results on the mapping class group revisited. Part I: Elementary constructions of Morita's extensions. Part II: On the Casson's invariant, Preprint Université de Bourgogne, Novembre 2000–Mars 2001.
[5] K. Reidemeister, Zur dreidimensionalen Topologie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9 (1933) 189–194.
[6] D. Rolfsen, Knots and Links, Berkeley, 1976.
[7] N. Saveliev, Lectures on the Topology of 3-Manifolds, De Gruyter Textbook, 1999.
[8] S. Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, Canad. J. Math. 29 (1977) 111–124.