C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1095–1099

Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

Invariance spectrale des algèbres d'opérateurs pseudodifférentiels

Robert Lauter [a], Bertrand Monthubert [b], Victor Nistor [c]

[a] Universität Mainz, Fachbereich 17-Mathematik, 55099 Mainz, Germany

[b] Laboratoire Emile Picard, Université Paul Sabatier (UFR MIG), 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France

[c] Pennsylvania State University, Math. Dept., University Park, PA 16802, USA

Reçu le 2 avril 2002 ; accepté le 8 avril 2002

Note présentée par Alain Connes.

Résumé Nous construisons et étudions plusieurs algèbres d'opérateurs pseudodifférentiels qui sont stables par calcul fonctionnel holomorphe. Nous obtenons ainsi une meilleure compréhension de la structure des inverses d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques sur certaines variétés non-compactes. Nous obtenons également des propriétés de décroissance pour les solutions de ces opérateurs. ***Pour citer cet article : R. Lauter et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1095–1099.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Spectral invariance of algebras of pseudodifferential operators

Abstract We construct and study several algebras of pseudodifferential operators that are closed under holomorphic functional calculus. This leads to a better understanding of the structure of inverses of elliptic pseudodifferential operators on certain non-compact manifolds. It also leads to decay properties for the solutions of these operators. ***To cite this article: R. Lauter et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1095–1099.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Being closed under holomorphic functional calculus is an important (but not always fulfilled) property for an algebra of pseudodifferential operators, as it implies, for instance, that the parametrix of a Fredholm operator lies in the algebra itself. In certain cases (e.g., for Melrose's b-pseudodifferential calculus on manifolds with corners), it is necessary to enlarge the algebra to obtain this property. In this Note, we present several results leading to the construction of such algebras.

Let $\mathcal{B}$ be a unital Banach algebra, and $\varphi : A \to \mathcal{B}$ be a morphism of algebras, which we assume to preserve the unit if A has one. Then A is called *locally spectral invariant with respect to* φ, if there exists $\varepsilon > 0$ such that we have $(e + \varphi(x))^{-1} \in \mathbb{C} + \varphi(A)$ for all $x \in A$ with $\|\varphi(x)\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$. Recall that if A is a subalgebra of $\mathcal{B}$, it is said to be *spectrally invariant* in $\mathcal{B}$ provided that $(\mathbb{C}e + A) \cap \mathcal{B}^{-1} = (\mathbb{C}e + A)^{-1}$. Recall further that a symmetric Fréchet subalgebra $A \subseteq \mathcal{B}$ of a unital C^*-algebra $\mathcal{B}$ is said to be a Ψ^**-algebra* if A is spectrally invariant in $\mathcal{B}$ [3].

Adresses e-mail : lauter@mathematik.uni-mainz.de (R. Lauter); monthube@picard.ups-tlse.fr (B. Monthubert); nistor@math.psu.edu (V. Nistor).

S1631-073X(02)02393-2/FLA

We have the following result. If $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{B}$ is a proper, closed two-sided ideal in $\mathcal{B}$, and $I \subseteq A$ is a two-sided ideal in A with $I \subseteq \mathcal{J}$ and dense, then A is spectrally invariant in $\mathcal{B}$ provided that $\mathbb{C}e \oplus I$ is spectrally invariant in $\mathbb{C}e \oplus \mathcal{J}$, and $\varphi^{-1}((B/\mathcal{J})^{-1}) = (A/I)^{-1}$.

Let $\mathcal{G}$ be a continuous family groupoid, and $\Psi^{\infty,0}(\mathcal{G})$ be the algebra of pseudodifferential operators on $\mathcal{G}$ [5]. Let $\mathcal{J} := C_r^*(\mathcal{G}) = \overline{\Psi^{-\infty,0}(\mathcal{G})}^{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, and $\mathcal{B} := \mathfrak{A}_r(\mathcal{G}) = \overline{\Psi^{0,0}(\mathcal{G})}^{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, where $\mathcal{H}$ stands for the Hilbert space $\int_M^{\oplus} \mathrm{L}^2(\mathcal{G}_x; r^*\mathcal{D}^{1/2})\,\mathrm{d}\nu(x)$ with respect to a positive, smooth density $\nu \in \mathcal{C}^\infty(M,\Omega)$ and $\mathcal{D}^{1/2}$ is the bundle of half-densities on M.

THEOREM 0.1. – *Let $I \subset \mathcal{J}$ be a subspace such that $I = I^*$, I is a left- and right-$\Psi^{0,0}(\mathcal{G})$-module containing $\Psi^{-\infty,0}(\mathcal{G})$ and locally spectrally invariant in $\mathcal{J}$. Let $A := \Psi^{0,0}(\mathcal{G}) + I$. Then*

$$(\mathbb{C}\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + A) \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})^{-1} = (\mathbb{C}\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + A)^{-1}.$$

In particular, if A is a Fréchet algebra, then A is a Ψ^*-algebra containing $\Psi^{0,0}(\mathcal{G})$.

PROPOSITION 0.2. – *If each fiber $\mathcal{G}_x$ (for $x \in M$) is a manifold of bounded geometry, then there exists a Ψ^*-algebra $\mathcal{A}_1$ containing $\Psi^{0,0}(\mathcal{G})$ as a dense subalgebra such that each $P \in \mathcal{A}_1$ is given by a $\mathcal{G}$-invariant family $(P_x)_{x\in M}$ of pseudodifferential operators P_x on $\mathcal{G}_x$.*

It is natural to look for algebras which are closed under holomorphic functional calculus and consist of pseudodifferential operators in an appropriate sense. This is achievable in the case of a compact manifold with boundary X, using the results above for the c_{n+1}-calculus. The groupoid of the c_{n+1}-calculus (for $n \geqslant 1$) is $\Gamma_{n+1} := \{(u,v,\mu) \in X \times X \times \mathbb{R} \mid \mu\rho(u)^n\rho(v)^n = \rho(u)^n - \rho(v)^n\}$ where ρ is a boundary defining function for X.

THEOREM 0.3. – *Let X be a compact manifold with connected boundary, and $n \geqslant 1$. Then there exists an algebra $\mathcal{I}$ of smooth kernels on X, i.e., an algebra contained in $\mathrm{C}^\infty(\Gamma_{n+1}(X)) \cap \mathrm{C}^*(\Gamma_{n+1}(X))$, that is a Ψ^*-algebra and contains $\Psi^{-\infty}(\Gamma_n(X))$. Moreover, $\mathcal{A} := \Psi^0(\Gamma_{n+1}(X)) + \mathcal{I}$ is a Ψ^*-algebra as well. If $P \in \mathcal{A}$ is Fredholm, then its parametrix Q is also in $\mathcal{A}$ and hence it has as kernel a distribution on $\Gamma_{n+1}(X)$ that is conormal to X. Also, if $P\xi = 0$, then $\xi \in x^l H^m(X)$, for any $l, m \in \mathbb{Z}$.*

Another approach is via the Schwartz space of a continuous family groupoid.

DEFINITION 0.4. – Let $\mathcal{G}$ be a Hausdorff continuous family groupoid endowed with a continuous function $\phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ such that: $\phi(g_1g_2) \leqslant \phi(g_1) + \phi(g_2)$, $\forall g \in \mathcal{G}, \phi(g^{-1}) = \phi(g)$, ϕ is proper, and $\exists c, N, \forall x \in \mathcal{G}^{(0)}, \forall r \in \mathbb{R}_+, \mu_x(\phi^{-1}([0,r])) \leqslant c(r^N + 1)$. Then the Schwartz space of $\mathcal{G}$ with respect to ϕ is

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathcal{G},\phi) = \Big\{ f \in \mathcal{C}_0\big(G,\Omega^{1/2}\big),\ \forall d \in \mathbb{N},\ \forall v_1,\ldots,v_d \in \mathcal{C}\big(A(\mathcal{G})\big),\ \forall i \leqslant d,\\ v_1\cdots v_i \cdot f \cdot v_{i+1}\cdots v_d \in \mathcal{C}_0\big(\mathcal{G},\Omega^{1/2}\big) \text{ and } \sup_{g\in\mathcal{G}} \big|v_1\cdots v_i \cdot f \cdot v_{i+1}\cdots v_d(g)\big| \big(1+\phi(g)\big)^k < \infty \Big\}.\end{aligned}$$

THEOREM 0.5. – *The Schwartz space of $\mathcal{G}$ with respect to ϕ, $\mathcal{S}(\mathcal{G},\phi)$, is a subalgebra of $C_r^*(\mathcal{G})$ that is closed under holomorphic functional calculus.*

1. Introduction

La stabilité par calcul fonctionnel holomorphe est une propriété importante (mais pas toujours remplie) pour une algèbre d'opérateurs pseudodifférentiels, car elle assure, par exemple, que la parametrix d'un opérateur de Fredholm est elle aussi dans l'algèbre. De telles algèbres interviennent naturellement en théorie de l'indice, notamment dans les méthodes développées par Connes [1,2].

Or dans certains cas (e.g. pour le *b*-calcul pseudo-différentiel sur une variété à coins de Melrose, *voir* [6]), il est nécessaire d'élargir l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiel pour en obtenir une qui soit stable par calcul fonctionnel holomorphe. Dans cette Note, nous présentons plusieurs résultats permettant d'obtenir de telles algèbres.

2. Stabilité par calcul fonctionnel holomorphe et extensions

Afin de construire des algèbres d'opérateurs pseudo-différentiel stables par calcul fonctionnel holomorphe, nous pouvons utiliser des constructions d'idéaux stables par calcul fonctionnel holomorphe contenant les opérateurs régularisants. Pour cela, il est nécessaire d'étudier les incidences des suites exactes courtes sur la notion de stabilité par calcul fonctionnel holomorphe.

DÉFINITION 2.1. – Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach d'unité e, et $\varphi : A \to \mathcal{B}$ un morphisme d'algèbres préservant l'unité si A en est munie. Alors A est dite *localement spectralement invariante relativement à* φ, si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\big(e + \varphi(x)\big)^{-1} \in \mathbb{C} + \varphi(A)$$

pour tout $x \in A$ tel que $\|\varphi(x)\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$. En outre, si A est unitale et $\varphi^{-1}(\mathcal{B}^{-1}) = A^{-1}$, alors A est dite *spectralement invariante relativement à* φ. Si de plus il existe une involution et une topologie de Fréchet $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ sur $\mathcal{A}$ rendant le plongement $\iota : (\mathcal{A}, \mathcal{T}_{\mathcal{A}}) \hookrightarrow (\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ continu, alors $\mathcal{A}$ est appelée une Ψ^*-*algèbre* [3].

THÉORÈME 2.2. – *Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach unitaire, $A \subseteq \mathcal{B}$ une sous-algèbre contenant l'unité de $\mathcal{B}$, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{B}$ un idéal bilatère fermé et propre, et $I \subseteq A$ un idéal bilatère tel que $I \subseteq \mathcal{J}$; soit $\varphi : A/I \to \mathcal{B}/\mathcal{J} : a + I \mapsto a + \mathcal{J}$ l'application induite. Alors*

(1) *Si $I \subseteq \mathcal{J}$ est dense, si I est localement spectralement invariante dans $\mathcal{J}$ et si A/I est spectralement invariante relativement à φ, alors A est localement spectralement invariante dans $\mathcal{B}$.*
(2) *Si $I \subseteq \mathcal{J}$ est dense, et si A est localement spectralement invariante dans $\mathcal{B}$, alors A/I est localement spectralement invariante relativement à φ. Si de plus A est dense dans $\mathcal{B}$, alors A/I est spectralement invariante relativement à φ.*
(3) *Si A est localement spectralement invariante dans $\mathcal{B}$, alors I l'est dans $\mathcal{J}$.*
(4) *Si φ est injective et $\varphi(A/I)$ est dense dans $\mathcal{B}/\mathcal{J}$, alors A/I est spectralement invariante relativement à φ si et seulement si elle est localement spectralement invariante relativement à φ.*

3. Applications aux algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels

Nous considérons maintenant des algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels sur des groupoïdes longitudinalement lisses. De nombreux exemples de calculs pseudo-différentiels sont contenus dans ce cadre (calcul pseudo-différentiel sur les variétés lisses, les groupes de Lie, les feuilletages, les variétés à coins...). Plus précisément un groupoïde longitudinalement lisse est un groupoïde localement compact muni d'un atlas tel que toute carte Ω est homéomorphe à deux ouverts de $\mathbb{R}^k \times \mathcal{G}^{(0)}$, $T_d \times U_d$ et $T_r \times U_r$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& T_r \times U_r \arrow[dl] & & \Omega \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "d"] & & T_d \times U_d \arrow[dr] & \\
U_r & & r(\Omega) \arrow[ll, "="'] & & d(\Omega) \arrow[rr, "="] & & U_d
\end{tikzcd} \tag{1}$$

et chaque changement de coordonnées est donné par une application $(t, u) \mapsto (\phi(t, u), u)$ où ϕ est de classe $\mathcal{C}^{\infty,0}$, i.e. $u \mapsto \phi(., u)$ est continue de U_* dans $\mathcal{C}^{\infty}(T_*, T_*')$, $* = d, r$. De plus, on impose que la composition et l'inversion soient $\mathcal{C}^{\infty,0}$. On supposera dans la suite, pour simplifier, que $M := \mathcal{G}^{(0)}$ est compact.

L'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 sur $\mathcal{G}$, définie dans [5], est notée $\Psi^{0,0}(\mathcal{G})$. Elle contient un idéal d'opérateurs régularisants, $\Psi^{-\infty,0}(\mathcal{G})$. Ces algèbres sont des sous-algèbres denses des C^*-algèbres $\mathfrak{A}_r(\mathcal{G})$ et $C_r^*(\mathcal{G})$.

Soit $\mathcal{J} := C_r^*(\mathcal{G}) = \overline{\Psi^{-\infty,0}(\mathcal{G})}^{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ et $\mathcal{B} := \mathfrak{A}_r(\mathcal{G}) = \overline{\Psi^{0,0}(\mathcal{G})}^{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

THÉORÈME 3.1. – *Soit $I \subset \mathcal{J}$ un sous-espace tel que $I = I^*$, I est un $\Psi^{0,0}(\mathcal{G})$-module à gauche et à droite contenant $\Psi^{-\infty,0}(\mathcal{G})$ et localement spectralement invariant dans $\mathcal{J}$. Soit $A := \Psi^{0,0}(\mathcal{G}) + I$. Alors*

$$(\mathbb{C}\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + A) \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})^{-1} = (\mathbb{C}\mathrm{id}_{\mathcal{H}} + A)^{-1}.$$

En particulier, si A est une algèbre de Fréchet, alors A est une Ψ^*-algèbre contenant $\Psi^{0,0}(\mathcal{G})$.

Sous certaines conditions, l'existence d'une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels stable par calcul fonctionnel holomorphe est assurée :

PROPOSITION 3.2. – *Si chaque fibre $\mathcal{G}_x$ (pour $x \in M$) est une variété de géométrie bornée, alors il existe une Ψ^*-algèbre dont $\Psi^{0,0}(\mathcal{G})$ est une sous-algèbre dense et telle que chaque élément est donné par une famille $\mathcal{G}$-invariante $(P_x)_{x\in M}$ d'opérateurs pseudo-defférentiels P_x sur $\mathcal{G}_x$.*

4. Cas des variétés à coins

Soit X une variété à coins. Plusieurs groupoïdes ont été construits [5,7,8], dont les calculs pseudo-différentiels associés coïncident avec le b-calcul et les c_{n+1}-calculs (si $n = 1$, on parle du *cusp*-calcul defini par Melrose). Ces groupoïdes peuvent être définis pour toute variété à coins, même si les hyperfaces ne sont pas plongées.

Dans le cas simple d'une variété à bord X, munie d'une fonction de définition du bord ρ, le groupoïde du b-calcul, $\Gamma_1(X)$, est isomorphe à $\{(x, y, \lambda) \in X \times X \times \mathbb{R}_+^* \mid \rho(x) = \lambda\rho(y)\}$. Le groupoïde du c_{n+1}-calcul, $\Gamma_{n+1}(X)$, par ailleurs, est isomorphe à $\{(u, v, \mu) \in X \times X \times \mathbb{R} \mid \mu\rho(u)^n\rho(v)^n = \rho(u)^n - \rho(v)^n\}$.

THÉORÈME 4.1. – *Soit X une variété à bord compacte, dont le bord est connexe. Alors il existe une algèbre de noyaux lisses sur X pour le c_{n+1}-calcul ($n \geqslant 1$), c'est-à-dire une sous-algèbre $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}^\infty(\Gamma_{n+1}(X))$ contenant $\Psi^{-\infty}(\Gamma_{n+1}(X))$, et qui soit une Ψ^*-algèbre. L'algèbre $\mathcal{A} := \Psi^0(\Gamma_{n+1}(X)) + \mathcal{I}$ est aussi une Ψ^*-algèbre. Par conséquent, le noyau d'une parametrix Q d'un opérateur de Fredholm $P \in \mathcal{A}$ est conormal à X et toute solution de $P\xi = 0$ est telle que $\xi \in x^l H^m(X)$, pour tous $l, m \in \mathbb{Z}$.*

Pour cela, soit $I := \dot{\mathcal{C}}^\infty(X \times X)$ l'espace des fonctions lisses sur $X \times X$ qui s'annullent à tout ordre sur l'ensemble des hyperfaces de $X \times X$. Par ailleurs, soit $\mathcal{A} := \mathcal{S}(\partial M \times \partial M \times [0, \infty))$, alors il existe une action à croissance polynomiale de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$ permettant de définir l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. En utilisant une fonction lisse $\phi \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty))$, telle que $\phi(x) = 1$ au voisinage de 0, et $\phi(x) = 0$ si $x \geqslant 1$, on peut définir $\mathfrak{A} = \phi\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{A})\phi + I \subset C^*(\Gamma_{n+1}(M))$; les résultats précédents permmettent de prouver que c'est une algèbre de noyaux lisses sur X. Pour démontrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre, on étudie $\mathcal{A}/x^\infty\mathcal{A}$ qui est isomorphe à l'algèbre des séries formelles $\mathcal{B}_0[[t^{-1/n}]]$, où $\mathcal{B}_0 = \Psi^\infty(\partial X \times \mathbb{R})^{\mathbb{R}} + \mathcal{S}(\mathbb{R}, \Psi^{-\infty}(\partial X))$ et $[t^{-1/n}, P] \simeq \sum_{k=1}^{\infty} C_{-1/n}^k ad_t^k(P) t^{-1/n-k}$, pour $C_l^k = l(l-1)\cdots(l-k+1)/k!$ et $ad_t(P) = [t, P]$. Ici $t^{-1/n}$ correspond à x qui définit ∂X.

5. L'espace de Schwartz d'un groupoïde longitudinalement lisse

Dans certains cas, il est possible de définir un espace de Schwartz associé à un groupoïde longitudinalemet lisse, qui est stable par calcul fonctionnel holomorphe.

DÉFINITION 5.1. – Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde longitudinalement lisse de Hausdorff, et μ un système de Haar sur $\mathcal{G}$. Une fonction longueur à croissance polynomiale sur $\mathcal{G}$ est une fonction continue $\phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ telle que :
(1) $\phi(g_1g_2) \leqslant \phi(g_1) + \phi(g_2)$,
(2) $\forall g \in \mathcal{G}, \phi(g^{-1}) = \phi(g)$,
(3) ϕ est propre,
(4) $\exists c, N, \forall x \in \mathcal{G}^{(0)}, \forall r \in \mathbb{R}_+, \mu_x(\phi^{-1}([0, r]) \leqslant c(r^N + 1)$.

DÉFINITION 5.2. – Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde longitudinalement lisse de Hausdorff muni d'une fonction longueur à croissance polynomiale ϕ. L'espace de Schwartz associé à $\mathcal{G}$ relativement à ϕ est

$$\mathcal{S}(\mathcal{G},\phi)=\Big\{f\in\mathcal{C}_0\big(G,\Omega^{1/2}\big),\ \forall d\in\mathbb{N},\ \forall v_1,\ldots,v_d\in\mathcal{C}\big(A(\mathcal{G})\big),\ \forall i\leqslant d,$$
$$v_1\cdots v_i\cdot f\cdot v_{i+1}\cdots v_d\in\mathcal{C}_0\big(\mathcal{G},\Omega^{1/2}\big)\ \text{et}\ \sup_{g\in\mathcal{G}}\big|v_1\cdots v_i\cdot f\cdot v_{i+1}\cdots v_d(g)\big|\big(1+\phi(g)\big)^k<\infty\Big\}.$$

THÉORÈME 5.3. – *L'espace de Schwartz de $\mathcal{G}$ relativement à ϕ, $\mathcal{S}(\mathcal{G},\phi)$, est une sous-algèbre de $C_r^*(\mathcal{G})$ stable par calcul fonctionnel holomorphe.*

La démonstration est inspirée des méthodes de Vincent Lafforgue [4]. Grâce au Théorème 2.2, on a également le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.4. – *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde longitudinalement lisse, et ϕ une fonction longueur à croissance polynomiale. Soit $\Psi_s^0(\mathcal{G}) := \Psi^0(\mathcal{G}) + \mathcal{S}(\mathcal{G},\phi)$. Alors $\Psi_s^0(\mathcal{G})$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe. De plus, si $P\in\Psi_s^0(\mathcal{G})$ est un opérateur de Fredholm, alors il admet une parametrix $Q\in\Psi_s^0(\mathcal{G})$.*

Dans le cas des variétés à coins compactes, on peut facilement définir de tels espaces de Schwartz. Ainsi, dans le cas du b-calcul sur une variété à coins, avec $\Gamma_1(X)\simeq\{(x,y,\lambda)\in X\times X\times\mathbb{R}_+^*\mid\rho(x)=\lambda\rho(y)\}$, la fonction $\phi_1(x,y,\lambda)=|\log(\lambda)|$ est une fonction longueur à croissance polynomiale. Dans le cas du c_{n+1}-calcul, avec $\Gamma_{n+1}(X)\simeq\{(u,v,\mu)\in X\times X\times\mathbb{R}\mid\mu\rho(u)^n\rho(v)^n=\rho(u)^n-\rho(v)^n\}$, la fonction $\phi_n(u,v,\mu)=|\mu|$ est une fonction longueur à croissance polynomiale.

Références bibliographiques

[1] A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'integration, in : Algèbres d'opérateurs, Lecture Notes in Math., Vol. 725, Springer-Verlag, 1979, pp. 19–143.
[2] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, New York, 1994.
[3] B. Gramsch, Relative Inversion in der Störungstheorie von Operatoren und Ψ-Algebren, Math. Ann. 269 (1984) 27–71.
[4] V. Lafforgue, KK-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum–Connes, Thèse de l'université Paris 11, 1999.
[5] R. Lauter, B. Monthubert, V. Nistor, Pseudodifferential analysis on continuous family groupoids, Documenta Math. 5 (2000) 625–655.
[6] R.B. Melrose, The Atiyah–Patodi–Singer Index Theorem, A.K. Peters, Wellesley, MA, 1993.
[7] B. Monthubert, Pseudodifferential calculus on manifolds with corners and groupoids, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (10) (1999) 2871–2881.
[8] V. Nistor, A. Weinstein, P. Xu, Pseudodifferential operators on groupoids, Pacific J. Math. 189 (1999) 117–152.