C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 849–854

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Un analogue d'un théorème de Hardy pour la transformation de Dunkl

Léonard Gallardo [a], Khalifa Trimèche [b]

[a] Faculté des sciences, Département de mathématiques, parc de Grandmont, 37200 Tours, France

[b] Faculté des sciences de Tunis, Département de mathématiques, campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisie

Reçu le 8 mars 2002 ; accepté le 15 mars 2002

Note présentée par Jean-Michel Bony.

Résumé On donne dans cette Note une généralisation d'un théorème de Hardy pour la transformation de Dunkl $\mathcal{F}_D$ sur $\mathbf{R}^d$. Plus précisément, pour toutes les valeurs de $a > 0$, $b > 0$ et $p, q \in [1, +\infty]$, on détermine les fonctions mesurables f telles que $\mathrm{e}^{a\|x\|^2} f \in \mathrm{L}_k^p(\mathbf{R}^d)$ et $\mathrm{e}^{b\|y\|^2}\mathcal{F}_D(f) \in \mathrm{L}_k^q(\mathbf{R}^d)$, où les $\mathrm{L}_k^p(\mathbf{R}^d)$ sont les espaces L^p associés à la transformation de Dunkl. ***Pour citer cet article : L. Gallardo, K. Trimèche, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 849–854.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

An analogue of Hardy's theorem for the Dunkl transform

Abstract In this Note we give a generalization of Hardy's theorem for the Dunkl transform $\mathcal{F}_D$ on $\mathbf{R}^d$. More precisely, for all $a > 0$, $b > 0$ and $p, q \in [1, +\infty]$, we determine the measurable functions f such that $\mathrm{e}^{a\|x\|^2} f \in \mathrm{L}_k^p(\mathbf{R}^d)$ and $\mathrm{e}^{b\|y\|^2}\mathcal{F}_D(f) \in \mathrm{L}_k^q(\mathbf{R}^d)$, where $\mathrm{L}_k^p(\mathbf{R}^d)$ are the L^p spaces associated with the Dunkl transform. ***To cite this article: L. Gallardo, K. Trimèche, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 849–854.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

We consider $\mathbf{R}^d$ provided with the usual scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and the Euclidian norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Let R_+ be a positive root system in $\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ and k a multiplicity function in the sense of Dunkl's theory. The associated weight function is given by

$$\omega_k(x) = \prod_{\alpha\in R_+} \left|\langle\alpha, x\rangle\right|^{2k(\alpha)}.$$

The space of pth-integrable ($1 \leqslant p < +\infty$) (resp. essentially bounded) functions on $\mathbf{R}^d$ with respect to the measure $\omega_k(x)\,\mathrm{d}x$, is denoted by $\mathrm{L}_k^p(\mathbf{R}^d)$ (resp. $\mathrm{L}_k^\infty(\mathbf{R}^d)$) and the associated norms by $\|\cdot\|_{k,p}$ (resp. $\|\cdot\|_{k,\infty}$). The Dunkl transform of a function $f \in \mathrm{L}_k^1(\mathbf{R}^d)$ is given by

$$\forall y \in \mathbf{R}^d, \quad \mathcal{F}_D(f)(y) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)K(x, -\mathrm{i}y)\omega_k(x)\,\mathrm{d}x,$$

Adresses e-mail : gallardo@univ-tours.fr (L. Gallardo); Khlifa.Trimeche@fst.rnu.tn (K. Trimèche).

S1631-073X(02)02361-0/FLA

where K is the Dunkl kernel. We obtain the following results.

THEOREM 0.1. – *Suppose* $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ *and at least one of them is finite and let* f *be a measurable function on* $\mathbf{R}^d$ *such that*

$$\left\|\mathrm{e}^{a\|x\|^2} f\right\|_{k,p} < +\infty \quad \textit{and} \quad \left\|\mathrm{e}^{b\|y\|^2} \mathcal{F}_D(f)\right\|_{k,q} < +\infty,$$

for some constants $a > 0$ *and* $b > 0$. *Then if* $ab \geqslant \frac{1}{4}$, *we have* $f = 0$ *almost everywhere. If* $ab < \frac{1}{4}$, *for all* $\delta \in]a, \frac{1}{4b}[$, *the functions of the form* $f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{-\delta\|x\|^2}$, *where* P *is an arbitrary polynomial on* $\mathbf{R}^d$ *satisfy the precedent conditions.*

THEOREM 0.2. – *Let* f *be a measurable function on* $\mathbf{R}^d$ *such that*

$$\left|f(x)\right| \leqslant M\,\mathrm{e}^{-a\|x\|^2} \quad \textit{a.e.} \quad \textit{and} \quad \left|\mathcal{F}_D(f)(y)\right| \leqslant M\,\mathrm{e}^{-b\|y\|^2} \quad \textit{a.e.},$$

for some constants $a > 0$, $b > 0$ *and* $M > 0$. *Then if* $ab > \frac{1}{4}$, $f = 0$ *a.e. If* $ab = \frac{1}{4}$, f *is a constant multiple of* $\mathrm{e}^{-a\|x\|^2}$. *If* $ab < \frac{1}{4}$, *there are infinitely many functions* f *satisfying the precedent conditions.*

1. Introduction

Un théorème célèbre de Hardy [7] montre qu'une fonction f sur $\mathbf{R}$ mesurable et sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ ne peuvent pas être simultanément à « décroissance très rapide ». Plus précisement si $|f(x)| \leqslant C\,\mathrm{e}^{-ax^2}$ et $|\widehat{f}(y)| \leqslant C\,\mathrm{e}^{-by^2}$ pour des constantes $C > 0$, $a > 0$ et $b > 0$, alors $f = 0$ presque partout si $ab > \frac{1}{4}$ et il existe des f non nulles si $ab \leqslant \frac{1}{4}$. Une version L^p de ce résultat obtenue par Cowling et Price [3] affirme que pour p et q dans $[1, +\infty]$, l'un des deux étant fini, si $\|\mathrm{e}^{ax^2} f\|_p < +\infty$ et $\|\mathrm{e}^{by^2} \widehat{f}\|_q < +\infty$ alors $f = 0$ presque partout si $ab \geqslant \frac{1}{4}$. Des généralisations de ce résultat au cas du groupe d'Heisenberg et du groupe des déplacements ont été établies dans [1] et [6]. Le but de cette Note est de donner un analogue du théorème de Cowling et Price pour la transformation de Dunkl sur $\mathbf{R}^d$. Cette transformation est associée à des opérateurs aux dérivées partielles et aux différences correspondant à un groupe fini de réflexions de l'espace euclidien $\mathbf{R}^d$. Ces opérateurs se sont révélés être un outil très utile dans l'étude des fonctions spéciales associées à un système de racines [5,8] et ils jouent un rôle important dans la description en Mécanique quantique des modèles exactement résolubles de Calogero–Moser–Sutherland [9,10].

2. Généralités

On munit $\mathbf{R}^d$ du produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Pour $\alpha \in \mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ on note H_α l'hyperplan orthogonal à α et σ_α la réflexion par rapport à H_α.

On appelle système de racines un sous-ensemble R de $\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ tel que $R \cap \mathbf{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$ et $\sigma_\alpha R = R$ pour tout $\alpha \in R$. On note W le groupe fini engendré par les réflexions $\sigma_\alpha, \alpha \in R$, et pour $\beta \in \mathbf{R}^d \backslash \bigcup_{\alpha\in R} H_\alpha$, on fixe un sous-système positif $R_+ = \{\alpha \in R;\ \langle\alpha, \beta\rangle > 0\}$.

Une fonction $k : R \to \mathbf{C}$ invariante par W est appelée fonction de multiplicité. L'indice du système de racines R est alors défini par $\gamma = \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)$ et la fonction poids est la fonction W-invariante et homogène de degré 2γ définie sur $\mathbf{R}^d$ par

$$\omega_k(x) = \prod_{\alpha\in R_+} \left|\langle\alpha, x\rangle\right|^{2k(\alpha)}. \tag{1}$$

Les opérateurs de Dunkl T_j, $j = 1, \ldots, d$, sur $\mathbf{R}^d$ associés à W et k sont définis pour toute fonction f de classe C^1 sur $\mathbf{R}^d$ par

$$T_j f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)\alpha_j \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle \alpha, x\rangle}. \tag{2}$$

Dans le cas où $k \equiv 0$, les T_j se réduisent aux opérateurs dérivées partielles par rapport à x_j. Dans ce qui suit on suppose que $k \geqslant 0$.

Pour tout $y \in \mathbf{R}^d$, le système $T_j u(x) = y_j u(x)$, $j = 1, \ldots, d$, avec $u(0) = 1$, admet une unique solution notée $K(x, y)$ qui est appelée noyau de Dunkl. Ce noyau est symétrique, invariant par W, admet un unique prolongement holomorphe à $\mathbf{C}^d \times \mathbf{C}^d$ [4,5] et vérifie

$$\left|D_z^\nu K(x, z)\right| \leqslant \|x\|^{|\nu|} \exp\bigl(\|x\| \|\operatorname{Re} z\|\bigr), \tag{3}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $z \in \mathbf{C}^d$, $\nu \in \mathbf{N}^d$ et où D_z^ν désigne la dérivée partielle par rapport à $z = (z_1, \ldots, z_d)$ correspondant au multiindice ν. On note $\mathrm{L}_k^p(\mathbf{R}^d)$, $p \in [1, +\infty]$, l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^d$ telles que

$$\begin{aligned} \|f\|_{k,p} &= \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left|f(x)\right|^p \omega_k(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} < +\infty \quad \text{si } 1 \leqslant p < +\infty, \\ \|f\|_{k,\infty} &= \operatorname*{sup\,ess}_{x \in \mathbf{R}^d} \left|f(x)\right| < +\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

La transformée de Dunkl d'une fonction $f \in \mathrm{L}_k^1(\mathbf{R})$ est définie par :

$$\mathcal{F}_D(f)(y) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x) K(x, -\mathrm{i}y) \omega_k(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

On notera qu'elle coïncide avec la transformation de Fourier classique si $k \equiv 0$. Nous renvoyons à [4] et [5] pour les propriétés complètes de cette transformation. En particulier si $f \in \mathrm{L}_k^1(\mathbf{R}^d)$ et $\mathcal{F}_D(f) \in \mathrm{L}_k^1(\mathbf{R}^d)$, on a la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{C_k^2}{2^{2\gamma+d}} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}_D(f)(y) K(x, \mathrm{i}y) \omega_k(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{p.p.}, \tag{6}$$

où $C_k = (\int_{\mathbf{R}^d} \exp(-\|x\|^2) \omega_k(x)\,\mathrm{d}x)^{-1}$.

3. L'opérateur de transmutation dual de Dunkl

On considère l'opérateur de transmutation dual de Dunkl ${}^tV$ vérifiant pour tout $y \in \mathbf{R}^d$ et tout $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ (espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^d$ à support compact),

$${}^tV(T_j f)(y) = \frac{\partial}{\partial y_j} {}^tV(f)(y), \quad j = 1, \ldots, d$$

(*voir* [14]). Cet opérateur qui est un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ sur lui même est donné par

$${}^tV(f)(y) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\nu_y(x), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d), \tag{7}$$

où pour tout $y \in \mathbf{R}^d$, ν_y est une mesure positive sur $\mathbf{R}^d$ dont le support est inclus dans $\{x \in \mathbf{R}^d;\ \|x\| \geqslant \|y\|\}$ (*voir* [14]).

PROPOSITION 3.1. – *Soit* $f \in \mathrm{L}_k^1(\mathbf{R}^d)$. *La fonction donnée par* (7) *est définie pour presque tout* $y \in \mathbf{R}^d$ (*par rapport à la mesure de Lebesgue*), *appartient à* $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d, \mathrm{d}x)$ *et on a*

$$\mathcal{F}_D(f) = \mathcal{F} o^t V(f), \tag{8}$$

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier classique sur $\mathbf{R}^d$ donnée par

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{d}x, \quad \text{pour } g \in \mathrm{L}^1\big(\mathbf{R}^d, \mathrm{d}x\big).$$

Démonstration. – On montre que la famille de mesures $(\nu_y)_{y\in\mathbf{R}^d}$ est vaguement continue et est intégrable pour la mesure de Lebesgue. Le résultat découle alors du théorème d'intégration des mesures de Bourbaki ([2], p. 26).

4. Une version L^p des théorèmes de Phragmén–Lindelöf

La démonstration du théorème principal donné au paragraphe cinq, utilise les deux lemmes suivants de variable complexe qu'on démontre à partir de [13], p. 578.

LEMME 4.1. – *Soit h une fonction entière sur $\mathbf{C}^d$ telle que*

$$\forall z \in \mathbf{C}^d, \quad \big|h(z)\big| \leqslant C \prod_{j=1}^{d} \mathrm{e}^{a(\operatorname{Re} z_j)^2}, \tag{9}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad \big|h(x)\big| \leqslant C, \tag{10}$$

pour certaines constantes $a > 0$ et $C > 0$. Alors h est constante sur $\mathbf{C}^d$.

LEMME 4.2. – *Soit $p \in [1, +\infty[$ et h une fonction entière sur $\mathbf{C}^d$. On suppose*
(i) *il existe $j \in \{1, \ldots, d\}$, tels que*

$$\forall z \in \mathbf{C}^d, \quad \big|h(z)\big| \leqslant M(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_d)\, \mathrm{e}^{a(\operatorname{Re} z_j)^2}; \tag{11}$$

(ii) $\|h_{|\mathbf{R}^d}\|_{k,p} < +\infty$,
pour une certaine constante $a > 0$ et M une fonction positive sur $\mathbf{C}^d$. Alors $h \equiv 0$.

5. Une version L^p du théorème de Hardy

Le lemme qui suit donne des propriétés de la transformation de Dunkl utiles dans la preuve du théorème de Hardy.

LEMME 5.1. – *Soit $p \in [1, +\infty]$ et f une fonction mesurable sur $\mathbf{R}^d$ telle que $\|e^{a\|x\|^2} f\|_{k,p} < +\infty$, pour un certain $a > 0$. Alors la fonction $\mathcal{F}_D(f)$ sur $\mathbf{C}^d$ définie par*

$$\mathcal{F}_D(f)(z) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x) K(x, -\mathrm{i}z)\omega_k(x)\, \mathrm{d}x \tag{12}$$

est bien définie, entière sur $\mathbf{C}^d$ et pour tous $\xi \in \mathbf{R}^d$ et $\eta \in \mathbf{R}^d$ on a

$$\big|\mathcal{F}_D(f)(\xi + \mathrm{i}\eta)\big| \leqslant C \exp\left(\frac{\|\eta\|^2}{4a}\right) \tag{13}$$

pour une constante $C > 0$.

Démonstration. – Le résultat découle de l'inégalité de Hölder, des relations (3), (8) et des propriétés de l'opérateur ${}^tV$.

THÉORÈME 5.2. – *On suppose $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ dont l'un au moins est fini et soit f une fonction mesurable sur $\mathbf{R}^d$ telle que*

$$\big\|\mathrm{e}^{a\|x\|^2} f\big\|_{k,p} < +\infty \quad \text{et} \quad \big\|\mathrm{e}^{b\|y\|^2} \mathcal{F}_D(f)\big\|_{k,q} < +\infty, \tag{14}$$

pour des constantes $a > 0$ et $b > 0$.

Alors si $ab \geqslant \frac{1}{4}$, *on a* $f = 0$ *presque partout. Si* $ab < \frac{1}{4}$, *pour tout* $\delta \in]a, \frac{1}{4b}[$, *les fonctions de la forme* $f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{-\delta\|x\|^2}$, *où* P *est un polynôme arbitraire sur* $\mathbf{R}^d$, *satisfont les conditions* (14).

Démonstration. – On considère la fonction h définie sur $\mathbf{C}^d$ par

$$h(z) = \left(\prod_{j=1}^{d} \exp\left(\frac{z_j^2}{4a}\right)\right)\mathcal{F}_D(f)(z). \tag{15}$$

D'après le Lemme 5.1, cette fonction est entière et vérifie

$$\left|h(\xi + \mathrm{i}\eta)\right| \leqslant C \exp\left(\frac{\|\xi\|^2}{4a}\right) \quad \left(\xi, \eta \in \mathbf{R}^d\right). \tag{16}$$

Pour tout $q \in [1, +\infty]$, la condition $ab > \frac{1}{4}$ implique

$$\|h_{|\mathbf{R}^d}\|_{k,q} \leqslant \left\|\mathrm{e}^{b\|y\|^2}\mathcal{F}_D(f)\right\|_{k,q} < +\infty. \tag{17}$$

Si $ab > \frac{1}{4}$ et $p, q \in [1, +\infty]$ ou si $ab = \frac{1}{4}$ et $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty[$ les Lemmes 4.1 et 4.2 donnent le résultat. Si $ab = \frac{1}{4}$, $p \in [1, +\infty[$ et $q = +\infty$, la relation (8), les propriétés de ${}^tV$ et [6], p. 66, impliquent le résultat. Si $ab < \frac{1}{4}$ et si $f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{-\delta\|x\|^2}$ où P est un polynôme, en utilisant les polynômes d'Hermite généralisés associés aux opérateurs de Dunkl (*voir* [11]), on montre que $\mathcal{F}_D(f)(y) = Q(y)\exp(-\frac{1}{4\delta}\|y\|^2)$ où Q est un autre polynôme sur $\mathbf{R}^d$ et le résultat en découle.

6. L'analogue du Théorème de Hardy classique

THÉORÈME 6.1. – *Soit* f *une fonction mesurable sur* $\mathbf{R}^d$ *telle que*

$$\left|f(x)\right| \leqslant M\,\mathrm{e}^{-a\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \left|\mathcal{F}_D(f)(y)\right| \leqslant M\,\mathrm{e}^{-b\|y\|^2}, \tag{18}$$

pour presque tout $x, y \in \mathbf{R}^d$ *et pour certaines constantes* $a > 0$, $b > 0$ *et* $M > 0$. *Alors si* $ab > \frac{1}{4}$, $f = 0$ *presque partout, si* $ab = \frac{1}{4}$ *alors* f *est égale à* $\mathrm{e}^{-a\|x\|^2}$ *à une constante multiplicative près et si* $ab < \frac{1}{4}$, *il existe une infinité de fonctions non nulles vérifiant les conditions* (18).

Démonstration. – Si $ab \neq \frac{1}{4}$, la démonstration du Théorème 5.2 qui est valable aussi pour $p = q = +\infty$ donne le résultat. Si $ab = \frac{1}{4}$ on obtient le résultat en utilisant la relation (8), les propriétés de l'opérateur ${}^tV$ et [12], p. 137.

Références bibliographiques

[1] K.R. Bagchi, S.C. Swagato, Uncertainty principles like Hardy's theorem on some Lie groups, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 65 (1999) 239–302.
[2] N. Bourbaki, Éléments de mathématiques, Fascicule XXI. Intégration des mesures, Chapitre 5, Hermann, Paris, 1967.
[3] M.G. Cowling, J.F. Price, Generalizations of Heisenberg inequality, in: Lecture Notes in Math., Vol. 992, Springer, Berlin, 1983, pp. 443–449.
[4] M.F.E. De Jeu, The Dunkl transform, Invent. Math. 113 (1993) 147–162.
[5] C.F. Dunkl, Hankel transforms associated to finite reflection groups, Contemp. Math. 138 (1992) 123–138.
[6] M. Eguchi, S. Koizumi, K. Kumahara, An L^p version of the Hardy theorem for the motion group, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 68 (2000) 55–67.
[7] G.H. Hardy, A theorem concerning Fourier transform, J. London Math. Soc. 8 (1933) 227–231.
[8] G.J. Heckman, An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam, Invent. Math. 103 (1991) 341–350.
[9] K. Hikami, Dunkl operators formalism for quantum many-body problems associated with classical root systems, J. Phys. Soc. Japan 65 (1996) 394–401.

[10] L. Lapointe, L. Vinet, Exact operator solution of the Calogero–Sutherland model, Comm. Math. Phys. 178 (1996) 425–452.
[11] M. Rösler, Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators, Comm. Math. Phys. 192 (1998) 519–542.
[12] A. Sitaram, M. Sundari, S. Thangavelu, Uncertainty principles on certain Lie groups, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 105 (1995) 135–151.
[13] E.C. Titchmarsh, The Theory of Functions, 2nd edn., Oxford University Press, 1939.
[14] K. Trimèche, The Dunkl intertwining operator on spaces of functions and distributions and integral representation of its dual, Integral transforms and special functions, a paraître.