

# Παραμετρική επισκόπηση του Συνόλου Ανάδρασης Κορυφών

Κωνσταντίνος-Νικόλαος Χατζηκοκολάκης  
AL1.19.0005

## Τριμελής Επιτροπή:

Αρχοντία Χ. Γιαννοπούλου, Τμήμα Πληροφορικής &  
Τηλεπικοινωνιών, Ε.Κ.Π.Α.  
Βασίλειος Ζησιμόπουλος, Τμήμα Πληροφορικής &  
Τηλεπικοινωνιών, Ε.Κ.Π.Α.  
Δημήτριος Ζώρος, Εξωτερικός συνεργάτης Α.Α.ΜΑ.

## Επιβλέπουσα:

Αρχοντία Χ. Γιαννοπούλου, Επίκουρη  
Καθηγήτρια,  
Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών,  
Ε.Κ.Π.Α.

Λογική και Διακριτά  
Μαθηματικά - 2016  
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα  
«Λογική και Διακριτά  
Μαθηματικά»



Στην παρούσα εργασία μελετώνται πυρήνες και παραμετρικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ τόσο για κατευθυνόμενα όσο και για μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Στο πρόβλημα αυτό σκοπός μας είναι η διαγραφή το πολύ  $k$  κορυφών ενός γραφήματος  $G$  ώστε το γράφημα που θα προκύψει να είναι άκυκλο. Το πρόβλημα αυτό είναι NP-Hard, οπότε η έρευνα έχει στραφεί σε εναλλακτικούς τρόπους για την επίλυσή του (προσεγγιστικοί αλγόριθμοι, ευριστικές μέθοδοι, κ.ά.). Ένας από τους τρόπους αυτούς είναι με παραμετρικούς αλγόριθμους, στους οποίους επικεντρώνεται η παρούσα εργασία.

Στα μη κατευθυνόμενα γραφήματα υπάρχει πυρήνας μεγέθους  $O(k^2)$  για την γενική περίπτωση. Στα κατευθυνόμενα γραφήματα είναι ανοιχτό πρόβλημα η ύπαρξη πυρήνα πολωνυμικού μεγέθους για την γενική περίπτωση, ωστόσο στην παρούσα εργασία μελετάται η περίπτωση που η παράμετρος στο πρόβλημά μας είναι το Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών για το αντίστοιχο μη κατευθυνόμενο γράφημα, που έχει πυρήνα μεγέθους  $O(k^4)$ .

Όσον αφορά τους αλγόριθμους για τα μη κατευθυνόμενα γραφήματα, κυρίως χρησιμοποιούνται συνδυαστικά επιχειρήματα για την εύρεση της πολυπλοκότητάς τους, ενώ σε μια περίπτωση χρησιμοποιήκε πρόγραμμα σε Python για κάποιους υπολογισμούς. Για τα κατευθυνόμενα γραφήματα, χρησιμοποιούνται εργαλεία της θεωρίας γραφημάτων όπως οι τομές και οι διαχωριστές ενώ χρησιμοποιούνται και κάποιες πιο αφηρημένες δομές που ονομάζονται  $\epsilon$ -δομές για την εύρεση συνόλου ανάδρασης. Η πολυπλοκότητα των αλγορίθμων αυτών προκύπτει πάλι με συνδυαστικά επιχειρήματα.

Το ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ είναι ένα εκτενώς μελετημένο πρόβλημα στην Παραμετρική Πολυπλοκότητα με πληθώρα εφαρμογών στα Λειτουργικά Συστήματα [27], στην κατασκευή κυκλωμάτων VLSI [17] αλλά και στην εύρεση γονιδίων που ευθύνονται για τον καρκίνο [22] και ανήκει σε μια μεγαλύτερη κατηγορία προβλημάτων που αφορούν Σύνολα Ανάδρασης. Παρόμοιο πρόβλημα είναι το ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΤΟΞΩΝ το οποίο επίσης λύνεται με τους αλγόριθμους για το ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας προέρχονται από την παράγραφο 9.1 του βιβλίου [9] καθώς και από τις εργασίες [3, 18, 21, 7, 23].

Ο αναγνώστης αναμένεται να είναι εξοικειωμένος με βασικές έννοιες θεωρίας γραφημάτων, αλγορίθμων, υπολογιστικής και παραμετρικής πολυπλοκότητας.

**Λέξεις κλειδιά:** Παραμετρικοί αλγόριθμοι, παραμετρική πολυπλοκότητα, αλγόριθμοι, γραφήματα, σύνολο ανάδρασης κορυφών, κύκλοι, ελάχιστη τομή, διανύσματα διακλάδωσης,  $\epsilon$ -δομές, αναγωγές, NP-πλήρες.



## ABSTRACT

On this thesis we study kernels and parameterized algorithms for the FEEDBACK VERTEX SET problem for directed and undirected graphs. In this problem we want to delete at most  $k$  vertices from a graph  $G$  to make it acyclic. This problem is NP-Hard, so the research is focused on alternative ways of solving the problem (e.g. approximation algorithms, heuristics, etc.). Another way is via parameterized algorithms, and this is the scope of this thesis.

On undirected graphs there is a kernel of size  $O(k^2)$  for a general instance. On directed graphs the existence of a polynomial kernel for general instances is an open problem. On this thesis we study the case when the problem is parameterized by the FEEDBACK VERTEX SET of the corresponding undirected graph, which has kernel of size  $O(k^4)$ .

The algorithms for the undirected graphs make use of combinatorial arguments to find their complexity, and there is a case which used a Python program to find the complexity of the algorithm. For directed graphs, the algorithms make use of tools from graph theory (e.g. cuts, separators) and in some cases they use some more abstract structures, such as  $\epsilon$ -structures. The complexity of the algorithms for the directed feedback vertex set is based again on combinatorial arguments.

The FEEDBACK VERTEX SET is a well studied problem in Parameterized Complexity with many applications on Operational Systems [27], VLSI design [17] and in the search of genes that cause cancer [22] and it belongs to a bigger class of problems that searches for Feedback Sets. Similar is the FEEDBACK ART SET problem which we can also solve with the algorithms for the FEEDBACK VERTEX SET. The results in this thesis are from the paragraph 9.1 of the book [9] and the papers [3, 18, 21, 7, 23].

The reader should be familiar with basic notions of graph theory, algorithms, computational and parameterized complexity.

**Keywords:** Parameterized algorithms, parameterized complexity, algorithms, graphs, feedback vertex set, cycles, minimum cut, branching vectors,  $\epsilon$ -structures, reduction, NP-Hard.



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσά μου, Αρχοντία Χ. Γιαννοπούλου, για όλη τη βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Οι συμβουλές της, η καθοδήγησή της και οι συζητήσεις που είχαμε με βοήθησαν πάρα πολύ ώστε να αποκτήσει αυτή η εργασία την τελική της μορφή αλλά και να εμπλουτίσω τον τρόπο σκέψης μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, Βασίλειο Ζησιμόπουλο και Δημήτρη Ζώρο, για όσα έμαθα στα μαθήματά τους αλλά και που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής για την εργασία μου. Από το Α.Λ.ΜΑ. θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον καθηγητή Δημήτριο Μ. Θηλυκό για όλα τα εναύσματα, μαθηματικά και μη, που έλαβα από αυτόν.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου από το Πανεπιστήμιο Πειραιά, Ιωάννη Τασούλα και Κωνσταντίνο Μανέ χάρη στη βοήθεια των οποίων μπήκα στο Α.Λ.ΜΑ. και γράφω τώρα αυτό το κείμενο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και την οικογένεια μου για όλη την στήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.





<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Γενικές πληροφορίες . . . . .	1
1.2	Παραμετρικά βατοί αλγόριθμοι . . . . .	1
1.3	Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών . . . . .	2
1.4	Το θεώρημα των Robertson-Seymour . . . . .	3
1.5	Αποτελέσματα για το απλό Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών . . . . .	4
1.6	Αποτελέσματα για το κατευθυνόμενο Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών . . . . .	5
1.7	Επιπλέον προβλήματα συνόλου ανάδρασης . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Πυρήνας για μη κατευθυνόμενα γραφήματα</b>	<b>7</b>
2.1	Θεώρημα Gallai και ταιριάσματα . . . . .	9
2.2	Λουλούδια . . . . .	12
2.3	2-Δήμμα επέκτασης . . . . .	13
2.4	Τετραγωνικός πυρήνας . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Πυρήνας για κατευθυνόμενα γραφήματα</b>	<b>19</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	19
3.2	Ανάλυση του πυρήνα . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Αλγόριθμος για μη κατευθυνόμενα γραφήματα</b>	<b>27</b>
4.1	Ορισμοί . . . . .	27
4.2	Αλγόριθμος και συνάρτηση δυναμικού . . . . .	27
4.3	Ανάλυση του αλγορίθμου . . . . .	30
4.4	Ένας επιπλέον αλγόριθμος . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Τομές, διαχωριστές και κατευθυνόμενο Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών</b>	<b>35</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	35
5.2	Αλγόριθμος λοξού διαχωριστή . . . . .	36
5.3	Διαμέριση σε άκυκλα κατευθυνόμενα γραφήματα . . . . .	41
5.4	Κατευθυνόμενο σύνολο ανάδρασης κορυφών . . . . .	43

<b>6 Το πρόβλημα της Q-Διαγραφής</b>	<b>47</b>
6.1 Ορισμός . . . . .	47
6.2 Σύνολο διαγραφής και $\epsilon$ -δομές . . . . .	47
6.3 Ο FPT αλγόριθμος . . . . .	48
6.4 Κατευθυνόμενο Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών . . . . .	52
<b>7 Συμπεράσματα</b>	<b>53</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>55</b>



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 Γενικές πληροφορίες

Το 1972, ο Karр παρουσίασε στην εργασία του "Reducibility Among Combinatorial Problems, [19]" έναν κατάλογο από 21 προβλήματα συνδυαστικής, θεωρίας γραφημάτων και λογικής μεταξύ άλλων τα οποία είναι NP-πλήρη, όπως και το πρόβλημα ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑ (SAT), το οποίο αποδείχθηκε ότι είναι NP-πλήρες το 1971 από τον Cook [8]. Τα προβλήματα αυτά, προκειμένου να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, πρέπει είτε να περιοριστούν σε ειδικές περιπτώσεις είτε να λυθούν προσεγγιστικά, δηλαδή να αρκεστούμε σε μια μη βέλτιστη λύση. Ένας κατάλογος NP-πλήρων προβλημάτων βρίσκεται στον σύνδεσμο [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_NP-complete\\_problems](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems), ωστόσο ο συνολικός αριθμός NP-πλήρων προβλημάτων είναι πολύ μεγαλύτερος από αυτόν που υπάρχει στον παραπάνω σύνδεσμο.

Οι Downey και Fellows ξεκίνησαν το 1999 να μελετούν υπολογιστικά προβλήματα με παραμέτρους για την είσοδο και την έξοδό τους. Τα προβλήματα αυτά, για τα οποία η παράμετρος, έστω  $k$ , είναι σταθερή ονομάζονται παραμετρικά προβλήματα. Με τη χρήση παραμέτρων, τα NP-πλήρη προβλήματα μπορούν να ταξινομηθούν ως προς την παραμετρική πολυπλοκότητά τους. Έτσι, έχουμε ένα εργαλείο που τα κατατάσσει σε διαφορετικά επίπεδα ανάλογα με τη δυσκολία τους να λυθούν παραμετρικά. Σε ένα πρόβλημα θεωρίας γραφημάτων η παράμετρος  $k$  μπορεί να είναι ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος, ο χρωματικός του αριθμός κ.ά..

Η θεωρία που ασχολείται με αυτά τα προβλήματα ονομάζεται Παραμετρική Πολυπλοκότητα, και στόχος της είναι να μελετήσει και να κατατάξει ως προς τη δυσκολία τους τα παραμετροποιημένα υπολογιστικά προβλήματα. Μερικές καλές πηγές για παραμετρικούς αλγόριθμους και πολυπλοκότητα είναι το βιβλίο Parameterized Algorithms των Cygan κ.ά. ([9]) καθώς και το βιβλίο Kernelization: Theory of Parameterized Preprocessing των Fomin κ.ά. ([16]).

### 1.2 Παραμετρικά βατοί αλγόριθμοι

Ένα είδος παραμετρικών αλγορίθμων που μελετάται στη βιβλιογραφία είναι οι παραμετρικά βατοί αλγόριθμοι (fixed parameterized tractable algorithms) ή για συντομία

FPT. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι εκθετικοί ως προς την παράμετρο  $k$  αλλά πολυωνυμικοί ως προς το μέγεθος της εισόδου του προβλήματος που μελετάται.

**Ορισμός 1.1.** Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα είναι μια γλώσσα  $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ , όπου το αλφάβητο  $\Sigma$  είναι σταθερό και πεπερασμένο. Για ένα στιγμιότυπο  $I = (x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ , το  $k$  ονομάζεται παράμετρος του προβλήματος.

Στη Θεωρία Πολυπλοκότητας, τα προβλήματα ταξινομούνται σε κλάσεις ανάλογα με τη δυσκολία επίλυσης ή αναπαράστασής τους οπότε τα προβλήματα που ανήκουν στην ίδια κλάση έχουν την ίδια δυσκολία. Για παράδειγμα, στην Υπολογιστική Πολυπλοκότητα τα προβλήματα ταξινομούνται σύμφωνα με τον χώρο ή τον χρόνο που χρειάζονται για να λυθούν, ενώ στην Περιγραφική τα προβλήματα ταξινομούνται βάσει του τύπου λογικής (πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια κ.λπ.) που χρειάζονται για να αναπαρασταθούν. Για την Παραμετρική Πολυπλοκότητα, όπως αναφέρθηκε ήδη, τα προβλήματα ταξινομούνται ως προς τη δυσκολία επίλυσής τους βάσει παραμέτρων.

**Ορισμός 1.2.** Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα  $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ , καλείται παραμετρικά βατό (FPT) αν υπάρχει αλγόριθμος  $A$ , μια υπολογίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , και μια σταθερά  $c$  τέτοια ώστε δοθέντος ενός στιγμιότυπου  $I \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ , ο αλγόριθμος  $A$  να αποφασίζει επιτυχώς αν  $I \in L$  σε χρόνο τάξης  $f(k)|I|^c$ . Η κλάση πολυπλοκότητας που περιέχει όλους αυτούς τους αλγορίθμους ονομάζεται FPT.

**Ορισμός 1.3.** Έστω  $L$  ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα και  $\Sigma$  το αλφάβητό του. Μια πυρηνοποίηση (ή προεπεξεργασία) για το  $L$  είναι ένας αλγόριθμος ο οποίος για οποιοδήποτε  $I \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$  δίνει ως έξοδο σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς  $|I|$  ένα  $I'$  τέτοιο ώστε:  $I \in L \Leftrightarrow I' \in L$ , με  $|I'| \leq h(k)$ , όπου  $h$  υπολογίσιμη συνάρτηση. Η συνάρτηση  $h$  σχετίζεται με το μέγεθος του πυρήνα, και όταν αυτή είναι πολυωνυμική, λέμε ότι έχουμε έναν πολυωνυμικό πυρήνα.

Με άλλα λόγια, πυρηνοποίηση είναι η διαδικασία η οποία μετασχηματίζει σε πολυωνυμικό χρόνο την είσοδο ενός προβλήματος σε μια απλούστερη είσοδο. Με τον τρόπο αυτό, το μετασχηματισμένο πρόβλημα θα μπορεί να λυθεί πιο γρήγορα από το αρχικό.

**Ορισμός 1.4.** Η προεπεξεργασία ενός στιγμιότυπου γίνεται μέσω κανόνων αναγωγής. Ένα στιγμιότυπο το οποίο δεν επιδέχεται περαιτέρω προεξεργασία θα ονομάζεται ανηγμένο (reduced).

**Λήμμα 1.5.** Αν ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα  $L$  είναι FPT, τότε επιδέχεται πυρηνοποίηση.

**Παρατήρηση 1.6.** Η ύπαρξη FPT αλγόριθμου για ένα πρόβλημα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το πρόβλημα θα έχει πυρήνα πολυωνυμικού μεγέθους. Η ύπαρξη FPT αλγορίθμου μας δείχνει μόνο ότι υπάρχει πυρήνας, δίχως να μας δίνει κάποια πληροφορία για το μέγεθός του.

Στα παρακάτω, για την πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου θα χρησιμοποιούνται εναλλάξ οι συμβολισμοί  $O(\cdot)$  και  $O^*(\cdot)$ . Στον δεύτερο συμβολισμό, αγνοούνται για συντομία οι πολυωνυμικοί όροι.

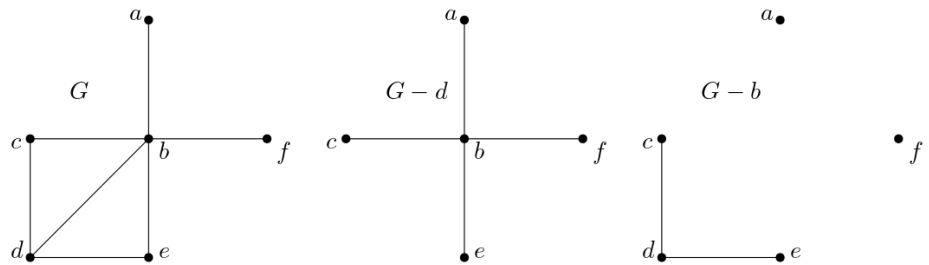
### 1.3 Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί το πρόβλημα ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ ή για συντομία ΣΑΚ (FEEDBACK VERTEX SET ή για συντομία FVS). Το ΣΑΚ ενός γραφήματος  $G$  αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών η αφαίρεση των οποίων καθιστούν το

$G$  άκυκλο. Με την αφαίρεση μιας κορυφής εννοούμε τη διαγραφή της από το γράφημα  $G$  μαζί με όλες τις προσπίπτουσες σε αυτήν ακμές. Ισοδύναμα, κάθε σύνολο ανάδρασης κορυφών περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή από κάθε κύκλο του γραφήματος  $G$ . Ο αυστηρός ορισμός του προβλήματος είναι ο εξής:

ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ

- **Είσοδος:** Ένα γράφημα  $G = (V, E)$ , με ή χωρίς κατευθύνσεις και ένας ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει σύνολο  $X \subseteq V$ , με  $|X| \leq k$  για το οποίο όταν όλες οι κορυφές του  $X$  και οι προσπίπτουσες ακμές τους διαγραφούν από το  $G$ , το γράφημα που απομένει να είναι άκυκλο;



Σχήμα 1.1: Παράδειγμα ΣΑΚ μεγέθους 1. Τα σύνολα  $\{b\}$  και  $\{d\}$  είναι ΣΑΚ για το  $G$ .

Η εύρεση ενός ελαχίστου συνόλου ανάδρασης κορυφών ενός γραφήματος είναι NP-πλήρες πρόβλημα και έχει εφαρμογές στην σχεδίαση VLSI κυκλωμάτων [17], στα λειτουργικά συστήματα [27], στην εύρεση γονιδίων που ευθύνονται για τον καρκίνο [22] κ.λπ.. Επιπλέον, προβλήματα όπως ο ισομορφισμός γραφήματος και η αναδιαμόρφωση μονοπατιού, παρότι NP-δύσκολα, λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο σε γραφήματα με φραγμένο μέγεθος συνόλου ανάδρασης κορυφών [12].

Το σύνολο ανάδρασης κορυφών είναι NP-πλήρες τόσο για κατευθυνόμενα όσο και για μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Πιο συγκεκριμένα, είναι NP-πλήρες ακόμα και για γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4 όπως θα δειχθεί παρακάτω. Πέραν των παραμετρικών αλγορίθμων που θα μελετηθούν στην παρούσα εργασία, σημαντική είναι και η ύπαρξη ενός 2-προσεγγιστικού αλγορίθμου (δηλαδή αλγορίθμος του οποίου το σύνολο ανάδρασης κορυφών που επιστρέφει έχει μέγεθος το πολύ διπλάσιο της βέλτιστης λύσης) για το σύνολο ανάδρασης κορυφών. Η χρήση προσεγγιστικών αλγορίθμων μας βοηθάει στη σχεδίαση FPT αλγορίθμων ([23]). Τέλος, εκτός από τους παραμετρικούς και τους προσεγγιστικούς αλγόριθμους, μια λύση του προβλήματος μπορεί να βρεθεί και με πιθανοτικούς αλγόριθμους ([9, 10]).

### 1.4 Το θεώρημα των Robertson-Seymour

Στην ανάπτυξη της θεωρίας της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας έχει παίξει ρόλο και το θεώρημα Graph Minor των Robertson και Seymour, η απόδειξη του οποίου διήρκησε από το 1983 ως το 2004 και είναι πάνω από 500 σελίδες σε έκταση. Προτού

αποδειχθεί, ονομαζόταν εικασία του Wagner.

**Θεώρημα 1.7** (Robertson-Seymour). Η κλάση όλων των γραφημάτων είναι καλή-οιωνεί-διάταξη (well-quasi-ordered) ως προς τη σχέση ελάσσονος. Με άλλα λόγια, σε οποιαδήποτε άπειρη οικογένεια γραφημάτων, υπάρχουν δύο γραφήματα για τα οποία ισχύει ότι το ένα είναι έλασσον (δηλαδή έχει προέλθει από αφαιρέσεις κορυφών, αφαιρέσεις ακμών ή συνθλίψεις ακμών) του άλλου.

**Θεώρημα 1.8.** Υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση  $f$  και αλγόριθμος τέτοιος, ώστε για δοθέντα γραφήματα  $G, H$ , να ελέγχει σε χρόνο  $f(H)|V(G)|^3$  αν  $H \leq_m G$ .

**Πρόταση 1.9.** Έστω  $G$  ένα γράφημα,  $X \subseteq V(G)$  ένα σύνολο ανάδρασης κορυφών του  $G$  και έστω  $H$  ένα έλασσον του  $G$ . Τότε, υπάρχει ένα σύνολο ανάδρασης κορυφών του  $H$  με μέγεθος το πολύ  $|X|$ .

Από τα παραπάνω, προκύπτει η ύπαρξη FPT αλγορίθμου για το σύνολο ανάδρασης κορυφών.

## 1.5 Αποτελέσματα για το απλό Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθεται μια συλλογή αποτελεσμάτων που αφορούν το ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ. Τα αποτελέσματα αφορούν χρόνους εκτέλεσης FPT αλγορίθμων ή μέγεθος πυρήνα για το ΣΑΚ. Αρχικά δίνεται ένας επιπλέον ορισμός, αυτός του τουρνουά:

**Ορισμός 1.10.** Ως τουρνουά ([9, 13]) ορίζεται ένα πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα (κλίκα) στο οποίο όλες του οι ακμές έχουν κατεύθυνση.

Επιπλέον, στο τυχαιοποιημένο ΣΑΚ ([9, 10]) οι αλγόριθμοι που αναφέρονται κάνουν χρήση πιθανοτικών μεθόδων (σε αντίθεση με τους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους που μελετώνται στην παρούσα εργασία). Επιπλέον, όσον αφορά τον αλγόριθμο στην εργασία [10], για να δουλέψει χρειάζεται να του δοθεί σαν είσοδος ένα γράφημα  $G$  αλλά και μια δεντροαποσύνθεση (tree decomposition) μεγέθους το πολύ  $t$ .

Είδος ΣΑΚ	Χρόνος εκτέλεσης/Μέγεθος πυρήνα	Παραπομπή
ΣΑΚ	Πολυωνυμικός αλγόριθμος αν $\Delta = 3$	[9]
ΣΑΚ	Τετραγωνικός πυρήνας	[9]
ΣΑΚ	Κυβικός πυρήνας	[4]
ΣΑΚ	Πυρήνας μεγέθους $\Delta k$	[16]
ΣΑΚ	$O^*(3.460^k)$	[18]
ΣΑΚ	$O^*(3.592^k)$	[21]
ΣΑΚ	2-προσεγγιστικός αλγόριθμος	[2]
Διακεκριμένο ΣΑΚ	$O^*(\phi^{2k})$	[9]
Διακεκριμένο ΣΑΚ	$O^*(4^k)$	[9]
Τυχαιοποιημένο ΣΑΚ	$O^*(4^k)$	[9]
Τυχαιοποιημένο ΣΑΚ	$O^*(3^t)$ , αν $tw(G) \leq t$	[10]
Επίπεδο ΣΑΚ	Γραμμικός πυρήνας	[16]
ΣΑΚ σε τουρνουά	$O^*(2^k)$	[9]
ΣΑΚ σε τουρνουά	$O(2^k k^5 + n^3)$	[12]
ΣΑΚ σε τουρνουά με βάρη	$O(2^k n^2 (\log \log n + k))$	[12]

## 1.6 Αποτελέσματα για το κατευθυνόμενο Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθεται μια συλλογή αποτελεσμάτων που εστιάζει στο ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ. Συνοπτικά, για αρκετά χρόνια ήταν ανοιχτό πρόβλημα το αν υπάρχει FPT αλγόριθμος για αυτό το πρόβλημα ([13]). Πλέον, ανοιχτό είναι το πρόβλημα για το αν στην γενική περίπτωση γίνεται να έχουμε πυρήνα πολυωνυμικού μεγέθους. Τα κάτωθι αποτελέσματα αφορούν πολυωνυμικούς πυρήνες σε ειδικές περιπτώσεις, όπου τα γραφήματα έχουν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Προτού όμως δοθούν τα αποτελέσματα αυτά, πρέπει να οριστούν κάποιες έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν. Οι έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν αφορούν το έξω-δέντρο (out-tree) και το έξω-δάσος (out-forest) ([25, 1]) καθώς και το γράφημα παράλληλων μονοπατιών (directed pumpkin) ([24]).

**Ορισμός 1.11.** Ένα γράφημα λέγεται έξω-δέντρο όταν κάθε κορυφή έχει έσω-βαθμό (in-degree) το πολύ 1 και το αντίστοιχο μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι δέντρο, ενώ λέγεται έξω-δάσος όταν αποτελείται από διακεκριμένα έξω-δέντρα.

**Ορισμός 1.12.** Ένα γράφημα λέγεται γράφημα παράλληλων μονοπατιών όταν αποτελείται από δύο διακεκριμένες κορυφές  $s, t$  που είναι αντίστοιχα πηγή και προορισμός (source, sink) οι οποίες συνδέονται με κορυφοδιακεκριμένα μονοπάτια όπου κάθε κορυφή έχει έσω-βαθμό και έξω-βαθμό (out-degree) ακριβώς 1.

**Ορισμός 1.13.** Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $D$  θα λέμε ότι ένα σύνολο  $M \subseteq V(D)$  λέγεται  $\eta$ -modulator δεντροπλάτους αν το γράφημα  $D - M$  έχει δεντροπλάτος το πολύ  $\eta$ .

Το δεντροπλάτος (treewidth) ενός γραφήματος είναι ένα μέτρο του κατά πόσο ένα γράφημα απέχει από το να είναι δέντρο. Για περισσότερες (και πιο φορμαλιστικές) λεπτομέρειες για το δεντροπλάτος, δύο συνήθεις πηγές είναι το βιβλίο Graph Theory του Diestel ([14]) και το βιβλίο Parameterized Algorithms των Cygan κ.ά. ([9]).

Είδος αποτελέσματος	Χρόνος εκτέλεσης/Μέγεθος πυρήνα	Παραπομπή
Αλγόριθμος	$O((k+1)!4^k k^3 n(n+m))$	[9]
Αλγόριθμος	$O(k!4^k k^4 nm)$	[7]
Αλγόριθμος	$O(k!4^k k^5 (n+m))$	[23]
Πυρήνας	$k^3$ (έσω-δέντρα)	[25]
Πυρήνας	$k^3$ (έξω-δάση)	[25]
Πυρήνας	$k^2$ (έξω-δάση)	[1]
Πυρήνας	$k^{18}$ (γραφήματα παράλληλων μονοπατιών)	[25]
Πυρήνας	$k^3$ (γραφήματα παράλληλων μονοπατιών)	[1]
Πυρήνας	$(kl)^{O(\eta^2)}$ (γραφήματα με $\eta$ -modulator)	[24]

## 1.7 Επιπλέον προβλήματα συνόλου ανάδρασης

Τα προβλήματα συνόλου ανάδρασης έχουν μελετηθεί αρκετά στη βιβλιογραφία, πράγμα που τα καθιστά αρκετά δημοφιλή. Παρότι στην παρούσα εργασία δίνεται έμφαση αποκλειστικά στο ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ, αναφέρεται η ύπαρξη μερικών



ακόμα παρόμοιων προβλημάτων συνόλου ανάδρασης. Τα προβλήματα συνόλου ανάδρασης αφορούν είτε την διαγραφή κορυφών είτε την διαγραφή ακμών από ένα γράφημα το οποίο μπορεί να έχει βάρη στις κορυφές ή τις ακμές του και να είναι κατευθυνόμενο. Σε ορισμένες εργασίες της βιβλιογραφίας δεν μελετάται αυτούσιο το ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ αλλά κάποιο πρόβλημα πιο γενικό το οποίο έχει εφαρμογή σε αυτό όπως π.χ. το Q-DELETION. Ένα εξίσου μελετημένο πρόβλημα είναι το πρόβλημα ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΤΟΞΩΝ (FEEDBACK ARC SET, FAS)([15]) στο οποίο αντί να διαγράφονται κορυφές από ένα γράφημα, διαγράφονται τόξα.

ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΤΟΞΩΝ

- **Είσοδος:** Ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$  και ένας ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει σύνολο  $X \subseteq E$ , με  $|X| \leq k$  για το οποίο το γράφημα  $G' = (V, E \setminus X)$  να είναι άκυκλο;

**Παρατήρηση 1.14.** Μπορούμε να κάνουμε αναγωγή από το πρόβλημα ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΤΟΞΩΝ στο ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ και αντίστροφα, συνεπώς ένας αλγόριθμος που λύνει το ένα από τα δύο αυτά προβλήματα, μπορεί μέσω αναγωγής να λύσει και το άλλο.

Στις περιπτώσεις που έχουμε γραφήματα με βάρη, δεν μας ενδιαφέρει πλέον ο αριθμός των κορυφών ή των ακμών που θα διαγραφούν αλλά το συνολικό τους βάρος. Όσον αφορά τα γραφήματα με βάρη στις κορυφές τους, το σχετικό πρόβλημα ονομάζεται ΒΕΒΑΡΗΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ (WEIGHTED FEEDBACK VERTEX SET, WFVS) ([6]).

ΒΕΒΑΡΗΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ

- **Είσοδος:** Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  με βάρη στις κορυφές του και ένας ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει σύνολο  $X \subseteq V$ , όπου το συνολικό βάρος των κορυφών του  $X$  να είναι το πολύ  $k$  τέτοιο ώστε το  $G - X$  να είναι άκυκλο;

Αντίστοιχο είναι και το πρόβλημα για ακμές με βάρη:

ΒΕΒΑΡΗΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΤΟΞΩΝ

- **Είσοδος:** Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  με βάρη στα τόξα του και ένας ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει σύνολο  $X \subseteq E$ , όπου το συνολικό βάρος των τόξων του  $X$  να είναι το πολύ  $k$  τέτοιο ώστε το  $G - X$  να είναι άκυκλο;

Τα προαναφερθέντα προβλήματα είναι τα πιο γενικά Σύνολα Ανάδρασης, ενώ εκτός αυτών υπάρχουν και διάφορες παραλλαγές και ειδικότερες περιπτώσεις στην βιβλιογραφία.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΠΥΡΗΝΑΣ ΓΙΑ ΜΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδειχθεί η ύπαρξη τετραγωνικού πυρήνα για το πρόβλημα ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ. Αρχικά αναφέρονται πέντε βασικοί κανόνες αναγωγής, ενώ σταδιακά θα αναφέρονται και νέοι κανόνες.

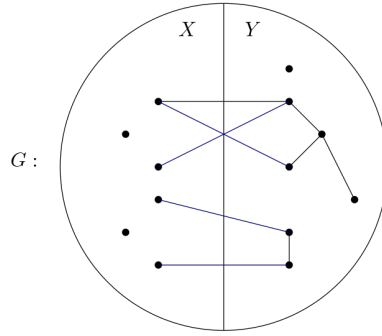
1. Για κάθε κορυφή η οποία έχει βρόχο, αφαιρούμε την εκάστοτε κορυφή και μειώνουμε την παράμετρο  $k$  κατά 1.
2. Για κάθε ακμή με πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 2, αφαιρούμε όσες ακμές χρειάζεται ώστε να έχει πολλαπλότητα ακριβώς 2.
3. Αφαιρούμε κάθε κορυφή βαθμού 0 ή 1.
4. Κάνουμε διάλυση κάθε κορυφής βαθμού 2.
5. Εάν  $k < 0$ , τότε έχουμε να κάνουμε με αρνητικό στιγμιότυπο.

Οι κανόνες αυτοί εφαρμόζονται επαναληπτικά από τον πρώτο μέχρι τον τελευταίο, μέχρις ότου να μην εφαρμόζεται κανένας. Όλοι οι παραπάνω κανόνες εφαρμόζονται σε πολυωνυμικό χρόνο. Συνεπώς, λόγω των παραπάνω κανόνων προκύπτει ότι τα γραφήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε δεν θα έχουν βρόχους, θα έχουν ακμές πολλαπλότητας το πολύ 2, και ο ελάχιστος βαθμός κορυφής θα είναι ίσος με 3.

Το παρακάτω λήμμα είναι το πρώτο βήμα για ένα άνω φράγμα του μεγέθους του πυρήνα.

**Λήμμα 2.1.** Αν ένα γράφημα έχει ελάχιστο βαθμό 3, μέγιστο βαθμό  $d$  και ΣΑΚ μεγέθους το πολύ  $k$ , τότε  $|V(G)| \leq (d + 1)k$  και  $|E(G)| \leq 2dk$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $X$  το ΣΑΚ,  $Y = V(G) \setminus X$  και  $F$  το σύνολο των ακμών με το ένα άκρο στο σύνολο  $X$  και το άλλο άκρο στο σύνολο  $Y$ . Θα υπολογίσουμε το μέγεθος του συνόλου  $F$  συγκριτικά με τα σύνολα  $X, Y$ . Παρατηρούμε ότι  $|F| \leq d|X|$ . Επιπλέον, το γράφημα  $G \setminus X = G[Y]$  είναι δάσος, οπότε  $|E(G[Y])| < |Y|$ .



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα για το λήμμα 2.1. Με μπλε οι ακμές του συνόλου  $F$ .

Από το λήμμα της χειραψίας, γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{v \in Y} d_{G[Y]}(v) = 2|E(G[Y])| < 2|Y| \Rightarrow \frac{1}{|Y|} \sum_{v \in Y} d_{G[Y]}(v) < 2.$$

Συνεπώς το  $G[Y]$  έχει μέσο βαθμό μικρότερο του 2. Επιπλέον

$$\sum_{v \in Y} d_G(v) = \sum_{v \in Y} |N(v) \cap X| + \sum_{v \in Y} |N(v) \cap Y|.$$

Για τις γειτονικές κορυφές του  $X$  έχουμε ότι

$$\sum_{v \in Y} |N(v) \cap X| \leq |F|,$$

ενώ για τις γειτονικές κορυφές του  $Y$  έχουμε ότι

$$\sum_{v \in Y} |N(v) \cap Y| < \sum_{v \in Y} d_{G[Y]}(v) < 2|Y|.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{v \in Y} d_G(v) = \sum_{v \in Y} |N(v) \cap X| + \sum_{v \in Y} |N(v) \cap Y| < |F| + 2|Y|.$$

Καθώς το  $G$  έχει ελάχιστο βαθμό 3, ισχύει ότι  $\sum_{v \in Y} d_G(v) \geq 3|Y|$ , άρα  $3|Y| < |F| + 2|Y|$ , οπότε  $|Y| < |F| \leq d|X|$ . Επιπλέον, αφού οι κορυφές του αρχικού γραφήματος  $G$  διαμερίζονται στα σύνολα  $X, Y$ , ισχύει ότι  $|V(G)| = |X| + |Y| < |X| + d|X| \leq (d+1)|X| \leq (d+1)k$ .

Όσον αφορά τις ακμές του  $G$ , γνωρίζουμε αφενός ότι το  $X$  έχει το πολύ  $d|X|$  προσπίπτουσες ακμές και αφετέρου ότι το  $G[Y]$  είναι δάσος οπότε έχει λιγότερες από  $|Y|$  ακμές εξ ορισμού. Οπότε,  $|E(G)| < d|X| + |Y| < 2d|X| \leq 2dk$ .  $\square$

Από το παραπάνω λήμμα, προκύπτει ένας νέος κανόνας αναγωγής:

6. Αν  $|V(G)| \geq (d+1)k$  ή  $|E(G)| \geq 2dk$ , τότε έχουμε να κάνουμε με αρνητικό στιγμιότυπο.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ έχει πυρήνα μεγέθους  $O(kd)$ , όπου  $d$  είναι ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος. Στη συνέχεια θα μελετηθούν κάποιοι επιπλέον κανόνες αναγωγής που θα μειώσουν το μέγεθος του πυρήνα σε  $O(k^2)$ .

## 2.1 Θεώρημα Gallai και ταιριάσματα

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετηθεί το θεώρημα Gallai το οποίο αφορά κορυφοδιακεκριμένα μονοπάτια σε γραφήματα, ενώ θα γίνει σύνδεση μεταξύ κορυφοδιακεκριμένων μονοπατιών και ταιριασμάτων σε ένα γράφημα. Η γενίκευση του θεωρήματος Gallai σε κατευθυνόμενα γραφήματα υπάρχει στην εργασία [20].

**Θεώρημα 2.2** (Gallai). Έστω  $G$  ένα απλό γράφημα,  $T \subseteq V(G)$  και ακέραιος  $s$ . Τότε, μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να:

1. βρούμε μια οικογένεια  $s + 1$  κορυφοδιακεκριμένων ανά  $2$   $T$ -μονοπατιών
2. ή να αποφανθούμε τη μη ύπαρξη τέτοιας οικογένειας και να βρούμε ένα σύνολο  $B$  με  $2s$  το πολύ κορυφές, για το οποίο το γράφημα  $G \setminus B$  να μην έχει καμία συνεκτική συνιστώσα με πάνω από μία κορυφή στο  $T$ .

Στην δεύτερη περίπτωση, το σύνολο  $B$  ονομάζεται σύνολο αφής (hitting set) για το  $T$ . Προκειμένου να αποδειχθεί το παραπάνω θεώρημα θα χρειαστεί πρώτα να αποδειχθούν κάποια λήμματα. Αρχικά, το δοθέν γράφημα  $G$  μετατρέπεται σε ένα γράφημα  $H$  ως εξής:

1.  $V(H) = T \cup \{x^1, x^2 : x \in V(G) \setminus T\}$ , δηλαδή φτιάχνουμε ένα αντίγραφο κάθε κορυφής  $x \in V(G) \setminus T$ .
2.  $E(H) = E(G[T]) \cup \{ux^i : i \in \{1, 2\}, u \in T, x \in V(G) \setminus T, ux \in E(G)\} \cup \{x^i x^j : i, j \in \{1, 2\}, x, y \in V(G) \setminus T, xy \in E(G)\} \cup \{x^1 x^2 : x \in V(G) \setminus T\}$ .

Βάσει των παραπάνω αλλαγών που έγιναν στο γράφημα  $G$ , η σύνδεση μεταξύ κορυφοδιακεκριμένων  $T$  μονοπατιών στο  $G$  και ταιριάσματος στο  $H$  είναι η εξής:

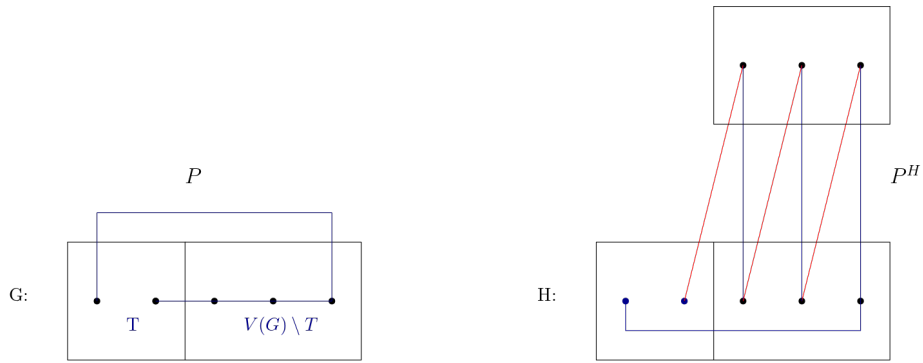
**Λήμμα 2.3.** Για οποιονδήποτε μη αρνητικό ακέραιο  $s$ , υπάρχουν  $s$  κορυφοδιακεκριμένα ανά δύο  $T$ -μονοπάτια στο  $G$  αν και μόνο αν υπάρχει ταιρίασμα στο  $H$  μεγέθους  $s + |V(G) \setminus T|$ .

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Έστω  $P'$  μια οικογένεια από κορυφοδιακεκριμένα  $T$ -μονοπάτια στο  $G$ . Υποθέτουμε ότι σε κάθε τέτοιο μονοπάτι μόνο τα άκρα του είναι στο  $T$ . Ορίζουμε για κάθε  $P \in P'$  ένα μονοπάτι  $P^H$  ως εξής: Αν  $P = \{u, x_1, x_2, \dots, x_{|P|-1}, w\}$  τότε  $P^H = \{u, x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \dots, w\}$ , επεκτείνουμε δηλαδή το μονοπάτι  $P$  με τρόπο τέτοιο, ώστε να διατηρήσει τα άκρα του αλλά να περνάει από όλες τις κορυφές του  $H$ .

Έστω τώρα ταιρίασμα  $M_0 = \{x^1 x^2 : x \in V(G) \setminus T\}$  μεγέθους  $|V(G) \setminus T|$ . Προφανώς κάθε δεύτερη ακμή ενός μονοπατιού  $P^H$  ανήκει στο  $M_0$ , αφού το μονοπάτι ξεκινάει με ακμή που δεν ανήκει στο  $M_0$  και μετά εναλλάσσεται μεταξύ κορυφών του  $V(G) \setminus T$  και του αντιγράφου του. Ορίζουμε  $E_0(P^H) := E(P^H) \cap M_0$  και  $E_1(P^H) := E(P^H) \setminus M_0$ . Προφανώς ισχύει ότι  $E_0(P^H) + 1 = E_1(P^H)$ . Έστω ταιρίασμα  $M := M_0$ . Για κάθε  $P \in P'$ , αντικαθιστούμε τις ακμές του  $P$  που ανήκουν στο  $E_0$  με ακμές από το  $E_1$ . Τελικά, το  $M$  θα είναι ταιρίασμα στο  $H$  και θα ισχύει ότι  $|M| = |M_0| + |P'| = |V(G) \setminus T| + |P'|$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $M$  ταιρίασμα μεγέθους  $s + |V(G) \setminus T| = s + |M_0|$  στο  $H$  και έστω η συμμετρική διαφορά  $M_0 \Delta M$  (δηλαδή η ένωση των  $M_0, M$ , χωρίς τα κοινά τους στοιχεία). Το γράφημα  $(V(G), M_0 \Delta M)$  έχει κορυφές βαθμού το πολύ 2, συνεπώς αποτελείται

από μονοπάτια και κύκλους όπου οι ακμές των  $M_0, M$  εμφανίζονται εναλλάξ σε αυτά. Επίσης για να έχει μια συνεκτική συνιστώσα περισσότερες ακμές στο  $M$  θα πρέπει να ξεκινάει και να τελειώνει σε κορυφή του  $M$ . Επιπλέον, αφού  $|M| - |M_0| = s$ , συμπεραίνουμε ότι έχουμε τουλάχιστον  $s$  κορυφοδιακεκριμένα μονοπάτια. Έστω  $Q$  ένα τέτοιο μονοπάτι. Το μονοπάτι αυτό ξεκινάει και τελειώνει σε κορυφή του συνόλου  $T$  χωρίς καμία ενδιάμεση κορυφή του να ανήκει στο  $T$ . Έστω  $Q^G$  ένα μονοπάτι που προκύπτει από το  $Q$  διατηρώντας ίδια άκρα με αυτά του  $Q$ , και για κάθε ακμή της μορφής  $x^1x^2$  στο  $Q$ , προσθέτουμε την κορυφή  $x$  στο  $Q^G$ . Άρα  $Q^G$  είναι  $T$ -μονοπάτι στο  $G$ . Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για  $s$  μονοπάτια προκύπτει το ζητούμενο.  $\square$



Σχήμα 2.2: Μονοπάτι  $P$  και  $P^H$ . Με κόκκινο οι ακμές του ταιριάσματος.

Συνεπώς, από τα παραπάνω, προκύπτει η σύνδεση των  $T$ -μονοπατιών και των ταιριασμάτων αφενός, αλλά και ένας αλγοριθμικός τρόπος να υπολογίσουμε τον μέγιστο αριθμό  $T$ -μονοπατιών βρίσκοντας ένα μέγιστο ταίριασμα αφετέρου.

**Πρόταση 2.4** (Ο τύπος των Tutte-Berge). Έστω  $\nu(H)$  το μέγεθος ενός μεγίστου ταιριασματος σε ένα γράφημα  $H$  και  $odd(H - S)$  ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών με περιττό αριθμό κορυφών στο γράφημα  $H - S$  όπου  $S \subseteq V(H)$ . Τότε:

$$|V(H)| - 2\nu(H) = \max_{S \subseteq V(H)} odd(H - S) - |S|$$

**Παρατήρηση 2.5.** Η παραπάνω σχέση μας δείχνει τη σύνδεση μεταξύ μεγίστου ταιριασματος και αριθμού συνεκτικών συνιστωσών σε ένα γράφημα  $H$ .

**Ορισμός 2.6.** Έστω γράφημα  $H$ . Ορίζουμε το έλλειμμα (deficiency) ενός συνόλου  $S$  ως εξής:  $df(S) = odd(H - S) - |S|$ .

**Θεώρημα 2.7** (Mader). Έστω  $X \subseteq V(G)$  και  $C(X)$  οι συνεκτικές συνιστώσες του  $G - X$ . Τότε ορίζεται η παρακάτω ποσότητα  $\xi(X) := |X| + \sum_{C \in C(X)} \left\lfloor \frac{|C \cap T|}{2} \right\rfloor$ .

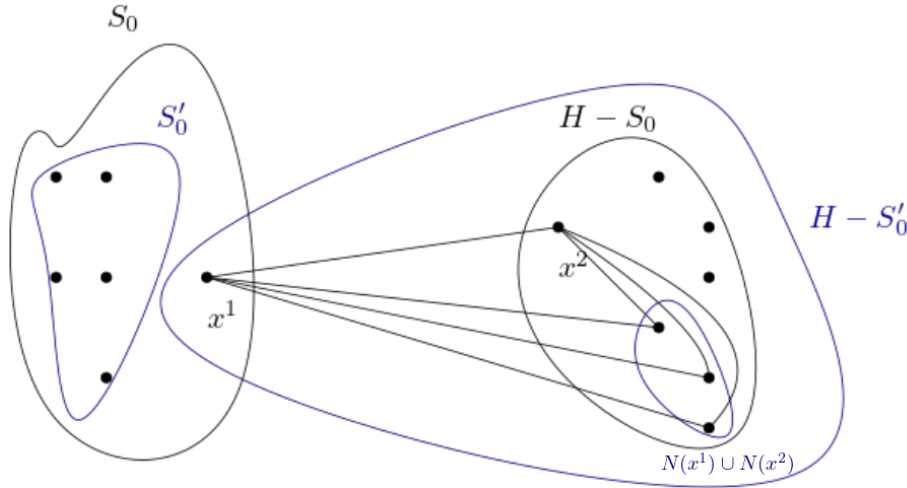
Η ποσότητα  $\xi(X)$  θα μας βοηθήσει να φράξουμε τον αριθμό κορυφοδιακεκριμένων  $T$ -μονοπατιών στο  $G$ .

**Παρατήρηση 2.8.** Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $X \subseteq V(G)$  ισχύει ότι κάθε  $T$ -μονοπάτι στο  $G$  είτε περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή του  $X$  είτε περιέχεται ολόκληρο σε μια συνεκτική συνιστώσα του  $C(X)$ . Συνεπώς, στην πρώτη περίπτωση έχουμε το πολύ  $|X|$  κορυφοδιακεκριμένα  $T$ -μονοπάτια, ενώ για τη δεύτερη το πολύ  $\lfloor |C \cap T|/2 \rfloor$ .

**Λήμμα 2.9.** Ο μέγιστος αριθμός κορυφοδιακεκριμένων  $T$ -μονοπατιών στο  $G$  είναι ίσος με  $\min_{X \subseteq V(G)} \xi(X)$ . Επιπλέον, μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να βρούμε ένα  $W$  τέτοιο ώστε  $\xi(W) = \min_{X \subseteq V(G)} \xi(X)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $S \subseteq V(H)$  και έστω  $S_0$  με το μέγιστο δυνατό έλλειμμα. Προφανώς ισχύει ότι  $df(S_0) = |V(H)| - 2\nu(H)$ .

Έστω ότι για κάποιο  $x \in V(G) \setminus T$ , το σύνολο  $S_0$  περιέχει είτε την  $x^1$  είτε την  $x^2$ , και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι περιέχει την  $x^1$ . Έστω  $S'_0 = S_0 \setminus \{x^1\}$ . Επειδή οι κορυφές  $x^1, x^2$  είναι δίδυμες στο  $H$  έχουν ίδια γειτονιά, άρα οι γείτονες της  $x^1$  είτε ανήκουν στο  $S_0$  (για να είναι στην ίδια συνιστώσα τα  $x^1, x^2$ ) είτε στην συνεκτική συνιστώσα του  $H - S_0$  που περιέχει την  $x^2$ . Παρατηρούμε ότι οι συνεκτικές συνιστώσες των  $H - S_0$  και  $H - S'_0$  διαφέρουν μόνο κατά ένα στοιχείο (αυτό που περιέχει την  $x^2$ ). Αν το  $H - S_0$  έχει άρτιο (αντίστοιχα περιττό) αριθμό συνεκτικών συνιστωσών και μετακινήσουμε την  $x^1$  στο  $H - S_0$  τότε ισχύει ότι  $odd(H - S'_0) = odd(H - S_0) + 1$  (αντίστοιχα  $odd(H - S'_0) = odd(H - S_0) - 1$ ). Άρα  $odd(H - S'_0) \geq odd(H - S_0) - 1$ . Επιπλέον,  $|S'_0| = |S_0| - 1$ , άρα  $df(S'_0) \geq df(S_0)$ . Άρα μπορούμε αντί



Σχήμα 2.3: Συνιστώσες γραφήματος για το λήμμα 2.9.

του συνόλου  $S_0$  να διαλέξουμε το σύνολο  $S'_0$ . Συνεπώς, είτε  $x^1, x^2 \in S_0$  είτε  $x^1, x^2 \notin S_0$ . Έστω  $W^{\bar{T}} = \{x \in V(G) \setminus T : x^1, x^2 \in S_0\}$ ,  $W^T = S_0 \cap T$  και  $W = W^{\bar{T}} \cup W^T$ . Θα δειχθεί ότι υπάρχει μια οικογένεια από  $\xi(W)$  κορυφοδιακεκριμένα  $T$ -μονοπάτια στο  $G$ . Αφού  $x^1, x^2$  είτε ανήκουν είτε δεν ανήκουν στο  $S_0$  και τα δύο, κάθε συνεκτική συνιστώσα του  $H - S_0$  έχει περιττό αριθμό κορυφών αν και μόνο αν έχει περιττό αριθμό κορυφών στο  $T$ . Επίσης, οι συνεκτικές συνιστώσες του  $H - S_0$  είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τις συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος  $G - W$ , συνεπώς ισχύει ότι

$$\sum_{C \in C(W)} \left( \frac{|C \cap T|}{2} - \lfloor \frac{|C \cap T|}{2} \rfloor \right) = \frac{odd(H - S)}{2}.$$

Επιπλέον,  $\sum_{C \in \mathcal{C}(W)} |C \cap T| = |T \setminus W|$  και  $df(S_0) = |V(H)| - 2\nu(H)$ . Οπότε, προκύπτει ότι  $\xi(W) = |W| + \sum_{C \in \mathcal{C}(W)} \lfloor \frac{|C \cap T|}{2} \rfloor = \nu(H) - |V(G) \setminus T|$ .  $\square$

Το σύνολο  $W$  που υπολογίστηκε παραπάνω σχεδόν πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Gallai. Ωστόσο δεν γνωρίζουμε κατά πόσο κάθε συνεκτική συνιστώσα του  $G - W$  περιέχει το πολύ μία κορυφή του  $T$  ή όχι. Για να εξασφαλιστεί αυτό, θα πρέπει να γίνει το εξής: Έστω αρχικά ότι  $B := W$ . Για κάθε συνεκτική συνιστώσα  $C$  του  $G - W$  η οποία περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή του  $T$ , υπολογίζεται η τομή  $C \cap T$  και προστίθενται στο  $B$  όλες οι κορυφές του  $C \cap T$  εκτός από μία. Παρατηρούμε ότι

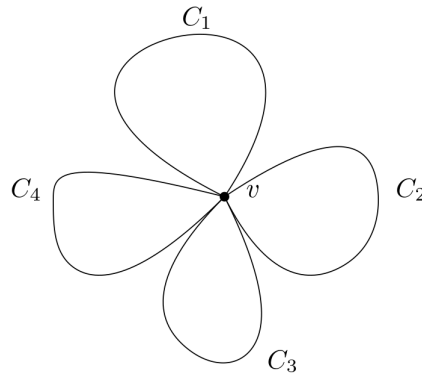
$$|B| = |W| + \sum_{\substack{C \in \mathcal{C}(W) \\ |C \cap T| \geq 1}} (|C \cap T| - 1) \leq |W| + 2 \sum_{C \in \mathcal{C}(W)} \left\lfloor \frac{|C \cap T|}{2} \right\rfloor \leq 2\xi(W).$$

Αφού  $|B| \leq 2\xi(W)$ , το μέγεθος του συνόλου  $B$  είναι το πολύ δύο φορές το μέγεθος της οικογένειας κορυφοδιακεκριμένων  $T$ -μονοπατιών, οπότε πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Gallai. Συνεπώς το θεώρημα Gallai αποδείχθηκε.

## 2.2 Λουλούδια

Προκειμένου να συνεχιστεί η απόδειξη για τον πυρήνα του ΣΑΚ, θα πρέπει να γίνει χρήση της έννοιας του λουλουδιού. Η έννοια του λουλουδιού ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 2.10** (Λουλούδι). Έστω γράφημα  $G$  που αποτελείται από μια οικογένεια διακεκριμένων κύκλων  $C_1, C_2, \dots$  με μία μόνο κοινή κορυφή  $v$ , δηλαδή να ισχύει ότι  $C_i \cap C_j = \{v\}$ , για  $i \neq j$ . Τότε το  $G$  ονομάζεται λουλούδι με πυρήνα  $v$  και πέταλα την οικογένεια  $C_1, C_2, \dots$



Σχήμα 2.4: Παράδειγμα λουλουδιού με πυρήνα  $v$  και τέσσερα πέταλα.

Έχοντας εισάγει τον ορισμό του λουλουδιού μπορεί τώρα να προστεθεί ένας ακόμα κανόνας αναγωγής:

7. Αν υπάρχει κορυφή  $v \in V(G)$  και λουλούδι με πυρήνα την κορυφή  $v$  και πάνω από  $k$  πέταλα, διαγράφουμε την  $v$  και μειώνουμε το  $k$  κατά 1.

Παρότι ο παραπάνω κανόνας είναι διαισθητικά ορθός, κρύβει το εξής πρόβλημα: Πρέπει ο έλεγχος ύπαρξης ενός τέτοιου λουλουδιού να μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο. Για να γίνει αυτό, μπορεί να γίνει χρήση του θεωρήματος Gallai. Τα κορυφοδιακεκριμένα μονοπάτια που βρίσκει το θεώρημα αυτό στην πρώτη περίπτωση, αν έχουν ως άκρα κορυφές γειτονικές σε μια άλλη κορυφή  $v$ , τότε θα έχουμε βρει λουλούδι.

Έστω  $vx$  μια διπλή ακμή στο  $G$ . Τότε, σε ένα λουλούδι του  $G$  με πυρήνα την κορυφή  $v$  μπορούμε να θεωρήσουμε την ακμή  $vx$  ως πέταλο. Έστω  $D$  το σύνολο των κορυφών  $x$  του  $G$  για τις οποίες η ακμή  $vx$  είναι διπλή και έστω  $\hat{G} := G \setminus D$ .

Αν ισχύει ότι  $|D| > k$  τότε θα γινόταν εφαρμογή του κανόνα αναγωγής 7, συνεπώς έχουμε ότι  $|D| \leq k$ .

**Παρατήρηση 2.11.** Η ύπαρξη λουλουδιού μεγέθους  $s \geq |D|$  με πυρήνα  $v$  στο  $G$  είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη λουλουδιού μεγέθους  $s - |D|$  στο  $\hat{G}$ .

Με βάση τα παραπάνω, μπορεί να γίνει εφαρμογή του θεωρήματος Gallai στο  $\hat{G} \setminus \{v\}$  και να θεωρηθεί ότι  $T = N_{\hat{G}}(v)$  και  $s = k - |D|$ . Προφανώς, τα  $T$ -μονοπάτια στο  $\hat{G} \setminus \{v\}$  είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τους κύκλους στο  $\hat{G}$  που περνάνε από τη  $v$ . Επομένως, από το θεώρημα Gallai μπορούμε να πάρουμε ένα λουλούδι με  $k - |D| + 1$  πέταλα και πυρήνα  $v$  στο  $\hat{G}$  ή να αποφανθούμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο λουλούδι και να βρούμε ένα σύνολο μεγέθους  $2k - 2|D|$  που τέμνει όλους τους κύκλους του  $\hat{G}$  που περνάνε από τη  $v$ .

Συνεπώς, στην πρώτη περίπτωση, έχουμε από το θεώρημα Gallai τα  $k + 1$  πέταλα στο  $G$ , οπότε θα εφαρμοστεί ο κανόνας αναγωγής 7. Στη δεύτερη περίπτωση θα έχουμε ένα σύνολο  $B$  το οποίο τέμνει τους κύκλους του  $\hat{G}$  που περνάνε από τη  $v$ . Έστω τώρα ότι  $Z = B \cup D$ . Τότε έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 2.12.** Αν  $v \in V(G)$  και δεν υπάρχει λουλούδι με πυρήνα  $v$  και παραπάνω από  $k$  πέταλα στο  $G$ , μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να υπολογίσουμε ένα  $Z \subseteq V(G) \setminus \{v\}$  με τις εξής ιδιότητες: Το  $Z$  τέμνει κάθε κύκλο που περνάει από τη  $v$ ,  $|Z| \leq 2k$  και υπάρχουν το πολύ  $2k$  ακμές με ένα άκρο τη  $v$  και με το άλλο άκρο στο  $Z$ .

*Απόδειξη.* Εξ ορισμού έχουμε ότι  $|B| \leq 2k - 2|D|$ . Επιπλέον,  $|Z| = |B \cup D| \leq |B| + |D| \leq (2k - 2|D|) + |D| = 2k - |D| \leq 2k$ . Επιπλέον, εξ ορισμού κάθε  $u \in D$  έχει ακριβώς δύο ακμές  $uw$  στο  $G$ , ενώ για κάθε  $w \in B$  υπάρχει το πολύ μία ακμή  $uw$ , συνεπώς έχουμε το πολύ  $2|D| + 1(2k - 2|D|) = 2k$  ακμές.  $\square$

Στο εξής θεωρούμε αφενός ότι ο κανόνας αναγωγής 7 δεν εφαρμόζεται άλλο και ότι η  $v$  έχει βαθμό τουλάχιστον  $ck$ , για κάποιο μεγάλο  $c$ . Για το σκοπό του παρόντος, θα θεωρήσουμε ότι  $c = 7$ , οπότε για τη  $v$  ισχύει ότι  $d(v) \geq 7k$ .

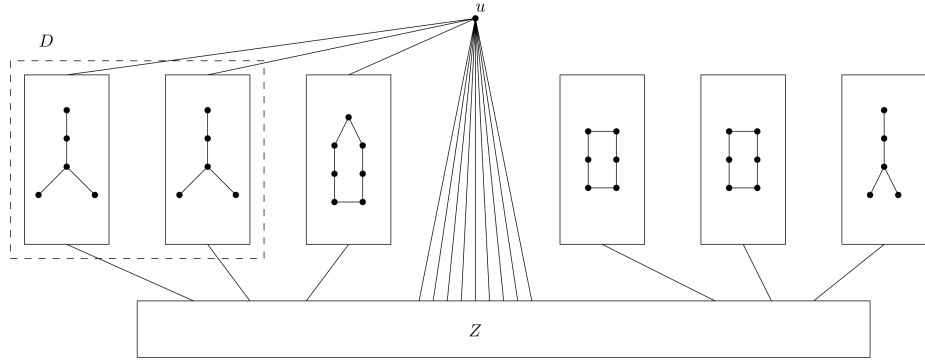
Δεδομένου ότι στην γενική περίπτωση ένα γράφημα μπορεί να έχει παραπάνω από μία συνεκτική συνιστώσα, ένας κανόνας αναγωγής που προκύπτει είναι ο εξής:

8. Αν πάνω από  $k$  συνιστώσες του  $G$  έχουν κύκλο, τότε έχουμε ένα όχι στιγμιότυπο.

### 2.3 2-Λήμμα επέκτασης

**Λήμμα 2.13.** Έστω  $C$  η οικογένεια συνεκτικών συνιστωσών του  $G \setminus (\{v\} \cup Z)$ . Υπάρχουν τουλάχιστον  $4k$  συνιστώσες του  $C$  που είναι δέντρα και είναι συνδεδεμένα με τη  $v$  με ακριβώς μία ακμή.



Σχήμα 2.5: Το γράφημα  $G$  με το σύνολο  $Z$ .

*Απόδειξη.* Έχουμε υποθέσει ότι  $d = d(v) \geq 7k$  και επιπλέον υπάρχουν το πολύ  $2k$  ακμές που προσπίπτουν στην  $v$  και σε μια κορυφή του  $Z$ . Συνεπώς υπάρχουν  $5k$  συνεκτικές συνιστώσες του  $C$  που είναι συνδεδεμένες με τη  $v$  με ακριβώς μία ακμή. Αν ο κανόνας αναγωγής 8 δεν μπορεί να εφαρμοστεί άλλο, τότε έχουμε ότι το πολύ  $k$  από αυτές περιέχουν κύκλους. Συνεπώς, το πολύ  $4k$  από αυτές έχουν την επιθυμητή ιδιότητα.  $\square$

**Παρατήρηση 2.14.** Από το παραπάνω λήμμα συμπεραίνουμε ότι στο  $G \setminus (\{v\} \cup Z)$  ένα μεγάλο μέρος των συνεκτικών συνιστωσών θα είναι δέντρα, διότι σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε αρνητικό στιγμιότυπο.

Έστω  $D'$  η οικογένεια συνεκτικών συνιστωσών του  $C$  η οποία πληροί τις προϋποθέσεις του λήμματος 2.13, δηλαδή, για κάθε  $A \in D'$  το  $G[A]$  είναι δέντρο και υπάρχει μία ακμή μεταξύ της  $v$  και του  $A$ . Θα κατασκευαστεί ένα διμερές γράφημα  $H_v$  ως εξής: Η μια συνιστώσα είναι η  $Z$  και η άλλη η  $D'$ . Προφανώς μια ακμή ενώνει μια  $z \in Z$  με ένα  $A \in D'$  αν και μόνο αν υπάρχει η αντίστοιχη ακμή στο  $G$ . Αφού η αναγωγή 3 (αφαίρεση κορυφών βαθμού 0 και 1) δεν εφαρμόζεται και το  $G[A]$  συνδέεται με τη  $v$  με μια μόνο κορυφή προκύπτει ότι μερικές κορυφές σε κάποιο  $A \in D'$  συνδέονται με το  $Z$ . Επίσης καμία κορυφή του  $D'$  δεν είναι απομονωμένη. Επιπλέον,  $|Z| \leq 2k - |D|$  (από λήμμα 2.12) και  $|D'| \geq 4k$  (από λήμμα 2.13). Συνεπώς μπορεί να γίνει εφαρμογή του λήμματος επέκτασης (2.4, [9]) για  $q = 2$ .

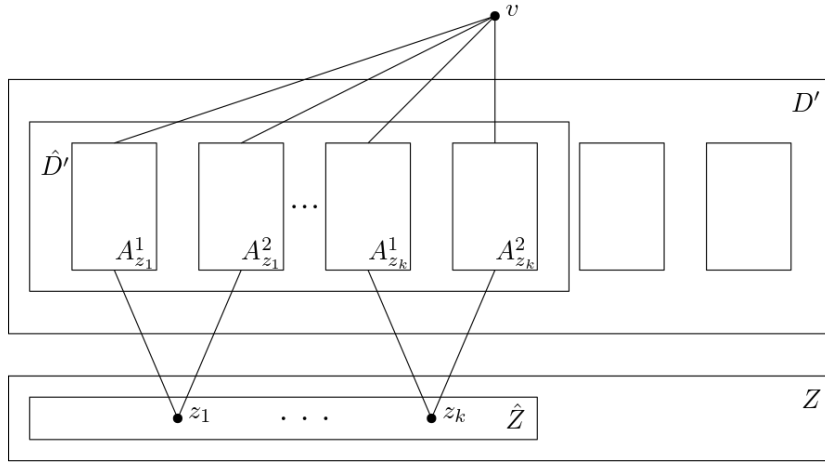
**Λήμμα 2.15** (2-λήμμα επέκτασης). Μπορούμε να υπολογίσουμε ένα  $\emptyset \neq \widehat{Z} \subseteq Z$  και μια οικογένεια  $\widehat{D}' \subseteq D'$  για τα οποία ισχύουν ότι:

- $N_{H_v}(\widehat{D}') = \widehat{Z}$  δηλαδή  $N_G(\bigcup \widehat{D}') = \widehat{Z} \cup \{v\}$ .
- Κάθε  $z \in \widehat{Z}$  έχει δύο ιδιωτικές<sup>1</sup> συνιστώσες  $A_z^1, A_z^2 \in \widehat{D}'$ , για τις οποίες ισχύει ότι  $z \in N_G(A_z^1)$  και ότι  $z \in N_G(A_z^2)$ .

Προτού δοθεί ο επόμενος κανόνας αναγωγής, χρειάζεται να δειχθεί το παρακάτω λήμμα το οποίο συσχετίζει την κορυφή  $v$  και το σύνολο  $\widehat{Z}$  στα ΣΑΚ:

**Λήμμα 2.16.** Για οποιοδήποτε σύνολο ανάδρασης κορυφών  $X$  του  $G$  το οποίο δεν περιέχει τη  $v$ , υπάρχει σύνολο ανάδρασης κορυφών  $X'$  στο  $G$  με  $|X'| \leq |X|$  και  $\widehat{Z} \subseteq X'$ .

<sup>1</sup>Οι συνιστώσες  $A_z^1, A_z^2$  είναι διαφορετικές για κάθε  $z \in \widehat{Z}$ .



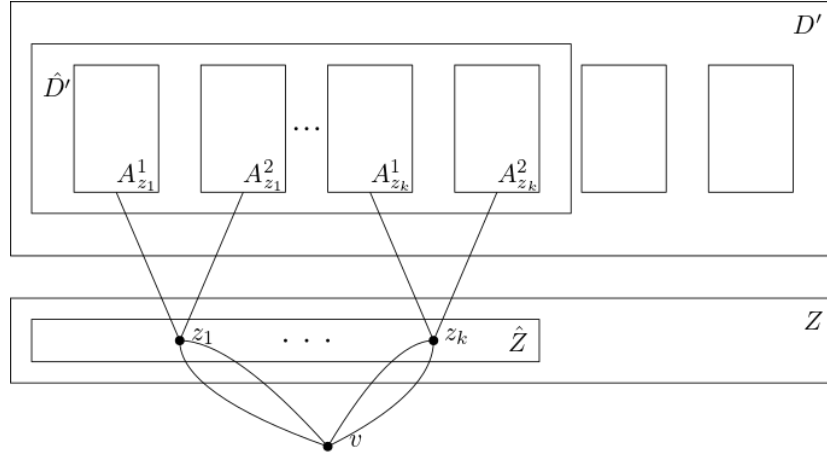
Σχήμα 2.6: Τα σύνολα  $\widehat{D}', \widehat{Z}$  μετά το 2-λήμμα επέκτασης.

*Απόδειξη.* Έστω  $X$  ένα σύνολο ανάδρασης κορυφών στο  $G$  που δεν περιέχει τη  $v$  και έστω  $X' = (X \setminus \cup \widehat{D}') \cup \widehat{Z}$ . Αρχικά θα δειχθεί ότι το  $X'$  είναι επίσης σύνολο ανάδρασης κορυφών στο  $G$ . Έστω  $C$  ένας οποιοσδήποτε κύκλος του  $G$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Η μία είναι ο κύκλος να μην τέμνει το  $\widehat{D}'$ , και η άλλη να τέμνει ένα  $A \in \widehat{D}'$ . Στην πρώτη περίπτωση, η κορυφή του  $X$  που τέμνει τον  $C$  θα ανήκει και στο  $X'$ . Στην δεύτερη περίπτωση, επειδή το  $G[A]$  είναι δέντρο και  $N_G(A) \subseteq \widehat{Z} \cup \{v\}$  και υπάρχει ακριβώς μία ακμή μεταξύ  $A$  και  $v$ , τότε ο κύκλος  $C$  θα πρέπει να περνάει από μια τουλάχιστον κορυφή του  $\widehat{Z}$ , η οποία συμπεριλαμβάνεται στο  $X'$ . Άρα ο κύκλος αυτός χτυπάει το  $X'$  και άρα είναι σύνολο ανάδρασης κορυφών στο  $G$ . Τώρα μένει να φράξουμε το μέγεθος του  $X'$ . Για οποιοδήποτε  $z \in Z$ , έστω  $C_z$  ο κύκλος που ξεκινάει από τη  $v$ , περνάει από τη  $A_z^1$  για να φτάσει στη  $z$  και πάει πίσω στη  $v$  μέσω της  $A_z^2$ . Η οικογένεια κύκλων  $\{C_z : z \in \widehat{Z}\}$  είναι λουλούδι με πυρήνα τη  $v$  και πέταλο κάθε  $C_z$  (αφού τα  $A_z$  είναι ιδιωτικά). Επομένως, καθώς  $v \notin X$ , το  $X$  πρέπει να περιέχει τουλάχιστον  $\widehat{Z}$  κορυφές από το σύνολο  $\widehat{Z} \cup \widehat{D}'$ , οπότε  $|X'| \leq |X|$ .  $\square$

Παρότι το παραπάνω λήμμα μας δείχνει ότι μπορεί να επιλεγθεί είτε η κορυφή  $v$  είτε τα σύνολα της  $\widehat{Z}$  στην λύση, υπάρχει και σε αυτήν την περίπτωση ένα πρόβλημα: Αν θέλουμε έναν FPT αλγόριθμο, τότε η λύση του αλγόριθμου θα προχωρήσει αναδρομικά και θα έχει μια διακλάδωση με δύο περιπτώσεις. Στη μία θα έχει την κορυφή  $v$  στην λύση και στην άλλη θα έχει τα σύνολα της  $\widehat{Z}$ . Στην περίπτωση όμως που κάνουμε πυρηνοποίηση, πρέπει να διασφαλίσουμε πως όλες οι αναγωγές είναι εκτελέσιμες σε πολυωνυμικό χρόνο. Ενώ θα μπορούσε να γίνει διαγραφή των συνόλων του  $\widehat{D}'$  που περιέχουν τους κύκλους που συμμετέχουν η  $v$  και τα σύνολα της  $\widehat{Z}$ , αυτό θα άλλαζε την δομή του γραφήματος και δεν γνωρίζουμε αν παίζουν κάποιο ρόλο στους υπόλοιπους κύκλους του γραφήματος. Συνεπώς, είναι πιο συνετό να αλλαχθεί η δομή των ακμών στους κύκλους που προαναφέρθηκαν. Για να γίνει αυτό, θα χρειαστεί ο επόμενος κλάδος αναγωγής:

9. Διαγράφουμε όλες τις ακμές μεταξύ  $v$  και  $\cup \widehat{D}'$ , και κάνουμε τη  $v$  γείτονα κάθε κορυφής  $z \in \widehat{Z}$  με διπλή ακμή. Έστω  $G'$  το γράφημα που προκύπτει.

Έχοντας εισάγει τον παραπάνω κανόνα αναγωγής, θα πρέπει ναδειχθεί ότι δεν επηρεάζει τη λύση στο πρόβλημα (δηλαδή ότι το σύνολο ανάδρασης κορυφών παραμένει ίδιο) και ότι απλοποιεί το δοθέν γράφημα.



Σχήμα 2.7: Το γράφημα  $G'$  μετά την εφαρμογή του κανόνα αναγωγής 9.

**Λήμμα 2.17.** Το ελάχιστο μέγεθος συνόλου ανάδρασης κορυφών στα  $G, G'$  είναι το ίδιο.

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Έστω  $X$  ένα ελάχιστο σύνολο ανάδρασης κορυφών στο  $G$ . Γνωρίζουμε ότι  $v \in X$  ή  $\hat{Z} \subseteq X$ . Επιπλέον  $G \setminus \{v\} = G' \setminus \{v\}$ , αφού όλοι οι μετασχηματισμοί που κάναμε αφορούσαν την κορυφή  $v$  και  $G' \setminus \hat{Z} \subseteq G \setminus \hat{Z}$ . Άρα,  $G' \setminus X \subseteq G \setminus X$  και το  $X$  είναι σύνολο ανάδρασης κορυφών του  $G'$ .

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $X$  ένα σύνολο ανάδρασης κορυφών του  $G'$ . Επειδή η κορυφή  $v$  είναι συνδεδεμένη με κάθε  $z \in \hat{Z}$  με διπλή ακμή, έχουμε ότι  $v \in X$  ή  $\hat{Z} \subseteq X$ . Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι  $G \setminus \{v\} = G' \setminus \{v\}$  και άρα το  $X$  είναι σύνολο ανάδρασης κορυφών του  $G$ . Για την δεύτερη περίπτωση, κάθε κύκλος στο  $G \setminus X$  πρέπει να περνάει από μια ακμή που συνδέει τη  $v$  με ένα  $A \in \hat{D}'$ . Κάθε τέτοιος κύκλος όμως θα πρέπει να περνάει από μια κορυφή του  $\hat{Z}$ , άτοπο αφού  $\hat{Z} \subseteq X$ .  $\square$

Αυτό που μένει ναδειχθεί είναι ότι ο κανόνας αναγωγής 9 πράγματι απλοποιεί το γράφημα ή το αφήνει ως έχει και αφετέρου ότι μπορεί να εφαρμοστεί για πολυωνυμικό πλήθος επαναλήψεων.

**Πρόταση 2.18.** Ο κανόνας αναγωγής 9 απλοποιεί το δοθέν γράφημα.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τη συνάρτηση δυναμικού (potential function)  $\phi(G) = 2|V(G)| + |E_{-2}(G)|$ , όπου  $|E_{-2}(G)|$  το σύνολο όλων των βρόχων και των ακμών του  $G$  εκτός των διπλών ακμών. Θαδειχθεί ότι η συνάρτηση αυτή φθίνει όσο εφαρμόζονται κανόνες αναγωγής στο  $G$ . Εκτός των κανόνων 4 και 9, για τους υπόλοιπους κανόνες η συνάρτηση  $\phi$  είτε φθίνει είτε μένει ως έχει, αφού πρόκειται για κανόνες που είτε αφαιρούν κορυφές/ακμές από το γράφημα είτε αποφαινόνται για τη μη ύπαρξη συνόλου ανάδρασης κορυφών. Για τον κανόνα 9, αφαιρείται ένα μη κενό σύνολο ακμών από το  $G$  οπότε η ποσότητα  $|E_{-2}(G)|$  ελαττώνεται ενώ παράλληλα οι διπλές ακμές που προστίθενται στο  $G$  δεν προσμετρώνται κάπου. Για τον κανόνα 4, η περίπτωση που μας ενδιαφέρει

είναι η σύνθλιψη μιας ακμής πολλαπλότητας 2. Έστω  $G'$  το γράφημα που προκύπτει μετά την εφαρμογή του κανόνα αναγωγής. Παρατηρούμε ότι προκύπτει ένας επιπλέον βρόχος στο  $G'$ , αλλά θα έχει μια κορυφή λιγότερη, συνεπώς  $|E_{-2}(G')| = |E_{-2}(G)| - 1$  και  $|V(G')| = |V(G)| - 1$ , άρα  $\phi(G') = \phi(G) - 1$ , οπότε πράγματι το γράφημα πάντα απλοποιείται μετά την εφαρμογή των κανόνων αναγωγής. Επιπλέον, επειδή η  $\phi$  εξαρτάται από τη δομή του  $G$ , το πλήθος των αναγωγών που μπορούν να εφαρμοστούν είναι πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος του  $G$ .  $\square$

## 2.4 Τετραγωνικός πυρήνας

Έχοντας αποδείξει όλα τα παραπάνω, μπορεί να δειχθεί ότι το Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών πράγματι έχει πυρήνα τετραγωνικού μεγέθους.

**Θεώρημα 2.19.** Υπάρχει τετραγωνικός πυρήνας για το Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών.

*Απόδειξη.* Έστω  $(G, k)$  ένα ανηγμένο στιγμιότυπο για το ΣΑΚ. Έχει δειχθεί ότι και οι 9 αυτοί κανόνες εκτελούνται σε πολυωνυμικό χρόνο και ότι πράγματι μειώνουν το μέγεθος του στιγμιότυπού του ΣΑΚ. Επιπλέον, το ΣΑΚ έχει πυρήνα μεγέθους  $O(kd)$  λόγω του κανόνα αναγωγής 6 και έχουμε θεωρήσει ότι  $d \leq 7k$ . Οπότε  $O(kd) = O(k^2)$ , συνεπώς το ΣΑΚ έχει τετραγωνικό πυρήνα.  $\square$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΠΥΡΗΝΑΣ ΓΙΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

#### 3.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, η εύρεση πυρήνα πολυωνυμικού μεγέθους για το κατευθυνόμενο ΣΑΚ παραμένει ανοιχτό πρόβλημα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δειχθεί ότι το κατευθυνόμενο ΣΑΚ με παράμετρο το ΣΑΚ του αντίστοιχου μη κατευθυνόμενου γραφήματος έχει πυρήνα μεγέθους  $O(k^4)$ . Το πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ[ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ]

- **Είσοδος:** Κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$ , σύνολο ανάδρασης  $F$  για το αντίστοιχο μη κατευθυνόμενο γράφημα και ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $|F|$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει ΣΑΚ για το  $G$  μεγέθους το πολύ  $k$ ;

Η γενική ιδέα της απόδειξης είναι ότι αφού εφαρμόσουμε κάποιους κανόνες αναγωγής στο γράφημα που μας δίνεται, μετράμε το πλήθος των κορυφών του γραφήματος που έχουν βαθμό 0, 1, 2, ή  $\geq 3$  αντίστοιχα. Για να γίνει αυτό, θα γίνει χρήση εννοιών που αφορούν (κορυφοδιακεκριμένα) μονοπάτια, όπως έγινε και στην περίπτωση του πυρήνα για τα μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

Με παρόμοιο τρόπο, μετρώντας τον αριθμό κορυφών ανάλογα με τον βαθμό τους, μπορεί να αποδειχθεί ότι το απλό ΣΑΚ έχει πυρήνα  $O(k^3)$  στη γενική περίπτωση ([16]).

#### 3.2 Ανάλυση του πυρήνα

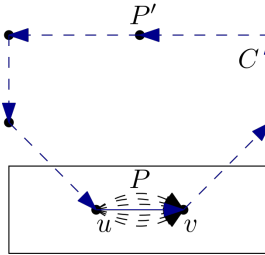
Προτού δοθούν οι κανόνες αναγωγής που θα οδηγήσουν στην ύπαρξη πυρήνα μεγέθους  $k^4$ , αναφέρονται τα εξής: Θα συμβολίζεται ως  $\bar{D}$  το αντίστοιχο μη κατευθυνόμενο γράφημα που έχει προκύψει από ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $D$ , ενώ θα συμβολίζεται ως  $S$  ένα ΣΑΚ για το  $\bar{D}$  που έχει προκύψει από τον 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο που αναφέρθηκε στο 1ο κεφάλαιο. Προφανώς ισχύει ότι  $|S| \leq 2k$ . Επίσης συμβολίζουμε με  $N^+(l)$  μιας κορυφής  $l \in D$  τους έξω-γείτονές της (out-degree). Αντίστοιχα συμβο-

λίζουμε με  $N^-(l)$  τους έσω-γειτονες (in-degree). Οι πρώτοι κανόνες αναγωγής είναι οι παρακάτω:

1. Αφαιρούμε όλες τις πηγές και τους προορισμούς από το  $D$ .
2. Αν  $N^+(l) = \{p\}$  ή  $N^-(l) = \{p\}$ , για κάποια κορυφή  $l \in D$ , κάνουμε σύνθλιψη του τόξου αυτού και ονομάζουμε  $l^*$  την κορυφή που προκύπτει.
3. Έστω  $u, v \in S$ , όχι απαραίτητα διαφορετικές, για τις οποίες υπάρχουν τουλάχιστον  $k + 1$  κορυφοδιακεκριμένα  $u - v$  μονοπάτια στο  $S$ . Τότε:  
 Αν  $u \neq v$  και  $(u, v) \notin E(D)$ , προσθέτουμε τόξο από την  $u$  στην  $v$ , ενώ αν  $u = v$ , έχουμε βρόχο και άρα διαγράφουμε την  $u$  και μειώνουμε την παράμετρο κατά 1.

Ο πρώτος κανόνας είναι προφανώς ορθός γιατί καμία κορυφή που έχει τόξα μόνο από ή προς αυτήν δεν γίνεται να συνεισφέρει σε κύκλο, ενώ αν μια κορυφή έχει μόνο έναν γείτονα ή θα ανήκουν και οι δύο κορυφές σε κύκλο ή καμία. Ο τρίτος κανόνας είναι πιο σύνθετος και χρειάζεται απόδειξη.

*Απόδειξη κανόνα 3.* Έστω  $u, v \in S$ , και έστω  $D'$  το γράφημα που προκύπτει μετά την εφαρμογή του κανόνα αναγωγής 3. Αν  $u = v$  προφανώς η κορυφή αυτή πρέπει να αφαιρεθεί από το  $D$  για να είναι άκυκλο, οπότε ο κανόνας ισχύει τετριμμένα. Αν  $u \neq v$ , θα δείξουμε ότι ένα σύνολο  $S'$  είναι ΣΑΚ μεγέθους το πολύ  $k$  για το  $D$  αν και μόνο αν είναι και για το  $D'$ . Το αντίστροφο είναι προφανές αφού το  $D$  είναι υπογράφημα του  $D'$ . Για το ευθύ, έστω ότι το  $S'$  δεν είναι ΣΑΚ στο  $D'$  αλλά είναι για το  $D$ , και άρα το  $D' \setminus S'$  θα έχει κύκλο, έστω  $C$ , ο οποίος περιέχει το τόξο  $(u, v)$ . Εφόσον  $C$  κύκλος και εφόσον περιέχει το τόξο  $(u, v)$ , σημαίνει ότι υπάρχει μονοπάτι από την  $v$  στην  $u$ . Παράλληλα όμως υπάρχουν τουλάχιστον  $k + 1$  κορυφοδιακεκριμένα μονοπάτια  $u - v$  στο  $S$  και  $|S'| \leq k$ , άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι  $u - v$  στο  $D \setminus S'$ , άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι το  $S'$  είναι ΣΑΚ για το  $D$ .  $\square$

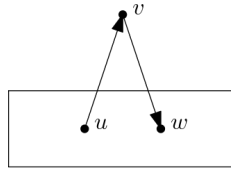


Σχήμα 3.1: Ο κύκλος στην απόδειξη του κανόνα αναγωγής 3.

Στη συνέχεια, θα χρειαστούμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 3.1.** Έστω  $u, v$  ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών του  $S$ .

- Αν  $u \neq v$ , θα λέμε το τόξο  $(u, v)$  τόξο δυναμικού (potential arc) στο  $D[S]$ .
- Αν  $u \neq v$  και  $(u, v) \notin D$  τότε λέμε το  $(u, v)$  όχι-τόξο (non-arc).
- Αν  $u = v$  τότε λέμε το  $(u, v)$  βρόχο.
- Θα λέμε ότι μια κορυφή  $v \in D \setminus S$  συνεισφέρει σε ένα τόξο δυναμικού ή βρόχο αν  $(u, v) \in E(D)$  και  $(v, w) \in E(D)$ .



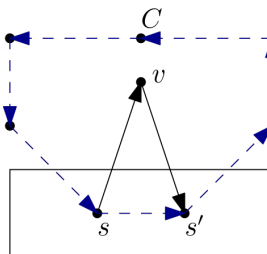
Σχήμα 3.2: Κορυφή  $v$  που συνεισφέρει σε τόξο  $(u, w)$ .

**Παρατήρηση 3.2.** Λόγω του κανόνα αναγωγής 3, υπάρχουν το πολύ  $k$  κορυφοδιακεκριμένα  $u - v$  μονοπάτια στο  $D$ , είτε αν  $u = v$  είτε αν  $u \neq v$ . Συνεπώς για κάθε όχι-τόξο ή βρόχο υπάρχουν το πολύ  $k$  κορυφές που συνεισφέρουν στο τόξο  $(u, v)$ . Επιπλέον αφού το  $S$  έχει το πολύ  $2 \binom{k}{2} = k(k-1)$  ζεύγη κορυφών, υπάρχουν το πολύ  $k^2(k-1)$  κορυφές στο  $D \setminus S$  που συνεισφέρουν σε όχι-τόξο του  $D[S]$  και το πολύ  $k^2$  κορυφές στο  $D \setminus S$  που συνεισφέρουν σε βρόχο του  $D[S]$ .

Έστω  $A = D \setminus S$  και έστω  $A_i$  το σύνολο των κορυφών βαθμού  $i$ . Αυτό που θα γίνει παρακάτω είναι ότι θα βρεθεί ένα άνω φράγμα στο πλήθος των κορυφών βαθμού  $0, 1, 2, \geq 3$ . Η μεθοδολογία απόδειξης είναι η ίδια παντού, θα υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει κύκλος στο  $D \setminus S'$  (όπου  $S'$  ΣΑΚ μεγέθους το πολύ  $k$ ) αλλά υπάρχει κύκλος στο  $D \setminus S$  και θα καταλήγουμε σε άτοπο τροποποιώντας αυτόν τον κύκλο. Δεδομένου ότι έχουμε ήδη ένα άνω φράγμα για τις κορυφές βαθμού 0 που συνεισφέρουν σε βρόχους του  $D[S]$ , έστω  $A'_0$  οι υπόλοιπες κορυφές του  $A_0$ , για το πλήθος των οποίων θα δειχθεί ένα άνω φράγμα παρακάτω. Για να γίνει αυτό, θα χρειαστεί ο παρακάτω κανόνας αναγωγής:

4. Αν  $v \in A'_0$  δεν συνεισφέρει σε όχι-τόξο του  $D[S]$ , διαγράφουμε την  $v$ .

*Απόδειξη κανόνα 4.* Έστω  $D'$  το γράφημα που προκύπτει μετά την εφαρμογή του κανόνα αναγωγής 4. Θα δειχθεί ότι  $S'$  ΣΑΚ στο  $D$  αν και μόνο αν  $S'$  ΣΑΚ στο  $D'$ . Το ευθύ είναι προφανές αφού το  $D'$  είναι υπογράφημα του  $D$ . Για το αντίστροφο έστω ότι το  $S'$  είναι ΣΑΚ μεγέθους το πολύ  $k$  για το  $D'$  αλλά όχι για το  $D$ . Τότε θα υπάρχει κύκλος  $C$  στο  $D \setminus S'$  ο οποίος περιέχει την  $v$  και δύο τόξα  $(s, v), (v, s')$  για  $s, s' \in S$ . Αφού η  $v$  δεν συνεισφέρει σε όχι-τόξο του  $D[S]$ , εξ ορισμού το  $D$  έχει τόξο  $(s, s')$  και άρα στον κύκλο  $C$  αντικαθιστούμε το μονοπάτι  $(s, v, s')$  με το τόξο  $(s, s')$ , άρα έχουμε κύκλο στο  $D' \setminus S'$ , άτοπο.  $\square$



Σχήμα 3.3: Ο κύκλος στην απόδειξη του κανόνα αναγωγής 4.

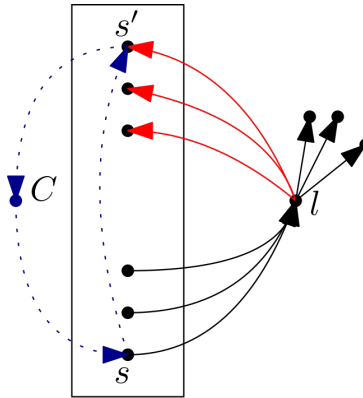


**Παρατήρηση 3.3.** Κάθε κορυφή του  $A'_0$  συνεισφέρει σε όχι-τόξο του  $D[S]$ , συνεπώς  $|A'_0| \leq k^2(k-1)$  λόγω της παρατήρησης 3.2.

Παρακάτω, θα δοθεί ένα άνω φράγμα για τις κορυφές του  $A_1$ . Όπως και για το  $A_0$ , θα ασχοληθούμε με κορυφές που δεν συνεισφέρουν σε βρόχους. Έστω  $A'_1$  το σύνολο αυτών των κορυφών. Λόγω της παρατήρησης 3.2 κάθε κορυφή του  $D$  έχει τουλάχιστον μια γειτονική κορυφή από και προς αυτήν και αφού δεν συνεισφέρει σε βρόχους, έχει τουλάχιστον μια γειτονική κορυφή από και προς το  $S$ , με τις κορυφές αυτές να είναι διαφορετικές. Για να βρεθεί ένα άνω φράγμα του πλήθους των κορυφών του  $A'_1$  θα χρειαστεί ο παρακάτω κανόνας αναγωγής:

5. Αν μια κορυφή  $l \in A'_1$  δεν συνεισφέρει σε όχι-τόξο του  $D[S]$  τότε, αν η  $l$  είναι πηγή (αντίστοιχα προορισμός) στο  $D \setminus S$  τότε διαγράφουμε όλα τα τόξα από την  $l$  στο  $S$  (αντίστοιχα από το  $S$  στην  $l$ ).

*Απόδειξη κανόνα 5.* Θα δειχθεί μόνο η μία περίπτωση, καθώς είναι εντελώς αντίστοιχη με την άλλη. Έστω  $D'$  το γράφημα που προκύπτει μετά την εφαρμογή του κανόνα αναγωγής 5. Θα δειχθεί ότι  $S'$  είναι ΣΑΚ μεγέθους το πολύ  $k$  για το  $D$  αν και μόνο αν είναι και για το  $D'$ . Το ευθύ είναι προφανές αφού το  $D'$  είναι υπογράφημα του  $D$ . Για το αντίστροφο, έστω ότι το  $S'$  είναι ΣΑΚ για το  $D'$  αλλά όχι για το  $D$ . Συνεπώς, υπάρχει κύκλος  $C$  στο  $D \setminus S'$  ο οποίος περιέχει τουλάχιστον ένα τόξο από την  $l$  σε μια κορυφή του  $S$ , έστω  $s'$ . Η  $l$  έχει εισερχόμενα τόξα μόνο από το  $S$ , οπότε ο κύκλος θα έχει μια ακμή από μια κορυφή  $s$  στην  $l$ . Ωστόσο η  $l$  δεν συνεισφέρει σε όχι-τόξα του  $D[S]$  και άρα  $(s, s') \in E(D)$ . Συνεπώς, το μονοπάτι  $(s', s)$  του  $C$  μαζί με το τόξο  $(s, s')$  δημιουργούν κύκλο στο  $D' \setminus S'$ , άτοπο.  $\square$



Σχήμα 3.4: Σχήμα για τον κανόνα αναγωγής 5. Με κόκκινο τα προς διαγραφή τόξα.

**Παρατήρηση 3.4.** Κάθε κορυφή του  $A'_1$  συνεισφέρει σε όχι-τόξο του  $D[S]$ , άρα  $|A'_1| \leq k^2(k-1)$ .

Δεδομένου ότι το  $\overline{D \setminus S}$  είναι δάσος και επειδή ο αριθμός των κορυφών βαθμού τουλάχιστον 3 σε ένα δάσος είναι το πολύ όσα τα φύλλα του -2, προκύπτει το εξής.

**Παρατήρηση 3.5.** Ισχύει ότι  $|A_{\geq 3}| \leq k^2(k-1) + k^2 - 2 = k^3 - 2$ .

Έχοντας φράξει το πλήθος των κορυφών βαθμού 0, 1, και  $\geq 3$  το μόνο που μένει είναι το φράγμα για τις κορυφές βαθμού 2.

**Ορισμός 3.6.** Έστω  $v \in A_2$ . Θα λέμε την  $v$  πηγή (προορισμό) αν τα δύο τόξα του  $D \setminus S$  που είναι γειτονικά στη  $v$  είναι και τα δύο τόξα από (προς) την  $v$ . Αλλιώς, θα λέμε την  $v$  ισορροπημένη κορυφή.

Παρατηρούμε ότι λόγω της 3.2, κάθε ισορροπημένη κορυφή στο  $D \setminus S$  έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο  $S$ , αφού διαφορετικά θα μπορούσε να γίνει εφαρμογή του κανόνα αναγωγής 2. Επιπλέον, το ίδιο ισχύει και για τις κορυφές που είναι πηγές ή προορισμούς, καθώς θα μπορούσε να γίνει εφαρμογή του κανόνα αναγωγής 1. Αυτό μας οδηγεί στην παρακάτω παρατήρηση:

**Παρατήρηση 3.7.** Λόγω της 3.2, κάθε κορυφή στο  $A_2$  έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο  $S$ .

**Ορισμός 3.8.** Έστω  $P = (v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, v_r)$  ένα μεγιστικό μονοπάτι στο  $D \setminus S$  για το οποίο οι κορυφές  $(v_2, \dots, v_{r-1})$  (εσωτερικές κορυφές του  $P$ ) ανήκουν στο  $A_2$ . Τότε θα λέμε ότι το  $P$  είναι τμήμα μονοπατιού (path segment) στο  $D \setminus S$ . Αν επιπλέον ένα τουλάχιστον από τα άκρα του δεν ανήκουν στο  $A_2$  θα το λέμε εξωτερικό τμήμα μονοπατιού (outer path segment), ενώ θα το λέμε εσωτερικό τμήμα μονοπατιού (inner path segment) σε αντίθετη περίπτωση.

Αυτό που θα γίνει παρακάτω είναι ότι με κατάλληλες αναγωγές, θα δοθεί ένα φράγμα για τον αριθμό τμημάτων μονοπατιού στο  $D \setminus S$ . Θα συμβολίζουμε ως  $ps(G)$ ,  $ops(G)$ ,  $ips(G)$  τα τμήματα/εξωτερικά τμήματα/εσωτερικά τμήματα μονοπατιού σε ένα γράφημα  $G$  αντίστοιχα.

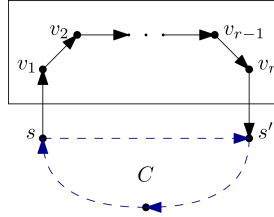
**Πόρισμα 3.9.** Έστω  $G$  το γράφημα που προκύπτει αν από το  $\overline{D}$  διαγράψουμε τις κορυφές του  $S$  και κατόπιν κάνουμε σύνθλιψη όσες ακμές είναι γειτονικές με τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού 2. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των εξωτερικών τμημάτων μονοπατιού στο  $D \setminus S$  είναι το πολύ διπλάσιος των ακμών του  $G$ , αφού για κάθε ακμή του  $G$  ή το ένα ή και τα δύο του άκρα θα ανήκουν στο  $A_2$ . Άρα  $|ops(D \setminus S)| \leq 2|E(G)|$ . Επιπλέον, αφού το  $G$  είναι δάσος χωρίς κορυφές βαθμού 2, ισχύει εξ ορισμού ότι ο αριθμός των ακμών του είναι ίσος με τον αριθμό των φύλλων του συν των αριθμό των όχι-φύλλων στο  $G$  μείον 1 (αφού κάθε κορυφή του  $G$  είτε είναι είτε δεν είναι φύλλο), άρα,  $|ops(D \setminus S)| \leq 2|E(G)| = 2(|A_1| + |A_{\geq 3}| - 1) = 4k^3 - 2k^2 - 6$ .

**Ορισμός 3.10.** Θα λέμε ότι ένα τμήμα μονοπατιού  $P = (v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, v_r)$  συνεισφέρει σε ένα τόξο  $(s, s')$  του  $D[S]$  αν υπάρχουν  $i, j$  με  $1 \leq i \leq j \leq r$  για τα οποία τα τόξα  $(s, v_i), (v_j, s') \in E(D)$ . Αντίστοιχα για βρόχο αν υπάρχουν τα τόξα  $(s, v_i), (v_j, s)$ .

6. Αν ένα εσωτερικό τμήμα μονοπατιού δεν συνεισφέρει σε όχι-τόξο ή βρόχο του  $D[S]$  διαγράφουμε όλες τις εσωτερικές του κορυφές.

*Απόδειξη κανόνα 6.* Έστω  $P$  το μονοπάτι και έστω  $D'$  το γράφημα που προκύπτει μετά την εφαρμογή του κανόνα αναγωγής 6. Θα δειχθεί ότι ένα  $S'$  είναι ΣΑΚ για το  $D$  αν και μόνο αν είναι και για το  $D'$ . Το ευθύ είναι προφανές, αφού το  $D'$  είναι υπογράφημα του  $D$ . Για το αντίστροφο, έστω ότι το  $S'$  είναι ΣΑΚ μεγέθους το πολύ  $k$  για το  $D'$  αλλά όχι για το  $D$ . Συνεπώς, θα υπάρχει κύκλος  $C$  στο  $D \setminus S'$  ο οποίος περιέχει τουλάχιστον

μία εσωτερική κορυφή του  $P$ . Το μονοπάτι  $P$  μπορεί διατρεχθεί από τον κύκλο  $C$  μόνο μέσω κορυφών του  $S$  (αφού το  $P$  είναι μεγιστικό και ανήκει στο  $D \setminus S$ ) οπότε υπάρχει μονοπάτι του  $C$  που μπαίνει στο  $P$  από μια κορυφή  $s$  και βγαίνει από μια κορυφή  $s'$ , οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους αφού το  $P$  δεν συνεισφέρει σε όχι-τόξο ή βρόχο. Συνεπώς η διαδρομή  $(s, \dots, s')$  στο μονοπάτι  $P$  μπορεί να αντικατασταθεί από το τόξο  $(s, s')$ , και άρα υπάρχει κύκλος στο  $D' \setminus S'$ , άτοπο.  $\square$



Σχήμα 3.5: Ο κύκλος στην απόδειξη του κανόνα αναγωγής 6.

**Παρατήρηση 3.11.** Κάθε εσωτερικό τμήμα μονοπατιού συνεισφέρει τουλάχιστον σε ένα όχι-τόξο ή βρόχο του  $D[S]$ .

Γνωρίζουμε ότι κάθε ζεύγος από εσωτερικά τμήματα μονοπατιού που συνεισφέρουν σε όχι-τόξο ή βρόχο  $(s, s')$  στο  $D[S]$  συνεισφέρουν και στον αριθμό από διακεκριμένα μονοπάτια μεταξύ των κορυφών  $s, s'$  στο  $D$  κατά τουλάχιστον 1. Επιπλέον, από παρατήρηση 3.2 έχουμε τουλάχιστον  $k + k = 2k$  εσωτερικά τμήματα μονοπατιού που συνεισφέρουν στο  $(s, s')$ . Αφού το  $S$  έχει το πολύ  $k$  κορυφές και το πολύ  $k(k-1)$  διατεταγμένα ζεύγη κορυφών οπότε υπάρχουν το πολύ  $2k^2(k-1) + 2k^2$  εσωτερικά τμήματα μονοπατιού στο  $D \setminus S$ , δηλαδή ισχύει ότι  $|ips(D \setminus S)| \leq 2k^2(k-1) + 2k^2$ .

**Παρατήρηση 3.12.** Από τα παραπάνω,  $|ps(D \setminus S)| = |ips(D \setminus S)| + |ops(D \setminus S)| \leq 6k^3 - 2k^2 - 6$ .

**Ορισμός 3.13.** Έστω  $s \in S$  και  $P = (v_1, \dots, v_r)$  ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι στο  $D \setminus S$  για το οποίο οι εσωτερικές του κορυφές ανήκουν στο  $A_2$  και ισχύουν τα εξής:

- $(s, v_1) \in E(D)$  και  $(s, v_r) \in E(D)$  και η  $v_1$  είναι ισορροπημένη κορυφή στο  $A_2$
- για κάθε  $i$  με  $1 < i < r$  ισχύει ότι  $(s, v_i) \notin E(D)$ .

Τότε το  $P$  ονομάζεται έξω-τμήμα (out-segment) για την  $s$ . Επιπλέον θα λέμε ότι το  $P$  συνεισφέρει σε όχι-τόξο ή βρόχο  $(s, s')$  στο  $D[S]$  αν υπάρχει  $1 \leq i < r$  τέτοιο ώστε  $(v_i, s') \in E(D)$  για κάποιο  $s' \in S$ .

7. Έστω  $s \in S$  και  $P = (v_1, \dots, v_r)$  ένα έξω-τμήμα για την  $s$ . Αν το  $P$  δεν συνεισφέρει σε όχι-τόξο ή βρόχο του  $D[S]$ , διαγράφουμε το τόξο  $(s, v_1)$ .

*Απόδειξη κανόνα 7.* Έστω  $D'$  το γράφημα που προκύπτει μετά την εφαρμογή του κανόνα αναγωγής 7. Θα δειχθεί ότι ένα  $S'$  είναι ΣΑΚ για το  $D$  αν και μόνο αν είναι και για το  $D'$ . Το ευθύ προφανώς ισχύει αφού το  $D'$  είναι υπογράφημα του  $D$ . Για το αντίστροφο, έστω ότι στο  $S'$  είναι ΣΑΚ μεγέθους το πολύ  $k$  για το  $D'$  αλλά όχι για το  $D$ . Τότε υπάρχει κύκλος στο  $D \setminus S'$  ο οποίος περιέχει το τόξο  $(s, v_1)$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις για την πορεία του κύκλου μετά την κορυφή  $v_1$ .

- Περ. 1 Ο κύκλος φτάνει στην  $s$ , διανύει το  $P$  μέχρι μια κορυφή  $v_i$  με  $1 \leq i < r$ . Τότε ο κύκλος αυτός διανύει το  $P$  από την  $v_1$  μέχρι μια  $v_i$  και κατόπιν πάει σε μια κορυφή  $s' \in S$ . Το  $P$  δεν συνεισφέρει σε όχι-τόξο ή βρόχο οπότε  $s \neq s'$  και άρα αντικαθιστούμε το μονοπάτι  $(s, v_1, \dots, v_i, s')$  με το τόξο  $(s, s')$  και καταλήγουμε σε άτοπο.
- Περ. 2 Ο κύκλος διανύει όλο το  $P$ . Σε αυτήν την περίπτωση, αντίστοιχα με την προηγούμενη, αντικαθιστούμε το μονοπάτι  $(s, v_1, \dots, v_r, s')$  με το τόξο  $(s, s')$  και καταλήγουμε σε άτοπο.

□

**Παρατήρηση 3.14.** Για κάθε  $s \in S$ , υπάρχουν το πολύ  $k^2$  έξω-τμήματα για την  $s$ .

*Απόδειξη.* Λόγω του κανόνα 7, κάθε έξω-τμήμα συνεισφέρει σε τουλάχιστον ένα όχι-τόξο ή βρόχο του  $D[S]$ . Επιπλέον, κάθε έξω-τμήμα του  $s$  που συνεισφέρει σε όχι-τόξο ή βρόχο, συνεισφέρει και κατά 1 στον αριθμό των εσωτερικώς κορυφοδιακεκριμένων μονοπατιών  $s - s'$ . Επίσης, λόγω της παρατήρησης 3.2 το πολύ  $k$  έξω-τμήματα του  $s$  στο  $D \setminus S$  συνεισφέρουν στο  $(s, s')$ . Επιπλέον, κάθε κορυφή  $s$  περιέχεται το πολύ σε ένα βρόχο (για την ίδια την  $s$ ) ή σε το πολύ  $k - 1$  (για  $s' \neq s$ ) όχι-τόξα του  $D[S]$ , συνεπώς υπάρχουν το πολύ  $k(k - 1) + k = k^2$  έξω-τμήματα για την  $s$ . □

**Παρατήρηση 3.15.** Ισχύει ότι  $|A_2| \leq 12k^4 - 2k^3 - 12k$ .

*Απόδειξη.* Αρχικά, παρατηρούμε ότι κάθε κορυφή του  $A_2$  βρίσκεται σε τμήμα μονοπατιού. Επιπλέον, κάθε έξω-γείτονας μιας κορυφής  $s$  σε ένα τμήμα μονοπατιού μπορεί να συσχετιστεί είτε με το ίδιο το τμήμα μονοπατιού αν ο γείτονας είναι μοναδικός ή με ένα έξω-τμήμα αν υπάρχουν παραπάνω από ένας έξω-γείτονες από την  $s$  προς ένα τμήμα μονοπατιού. Συνεπώς, ο αριθμός των έξω-γειτόνων της  $s$  στο  $A_2$  είναι το πολύ ο αριθμός των τμημάτων μονοπατιών συν τον αριθμό των έξω-τμημάτων για την  $s$ . Συνεπώς, η έξω γειτονιά μιας κορυφής  $s$  έχει το πολύ  $6k^2(k - 1) + 4k^2 - 6 + k^2 = 6k^3 - k^2 - 6$  κορυφές. Το ίδιο ισχύει και για την έσω-γειτονιά λόγω συμμετρικότητας, αφού οι κορυφές του  $A_2$  είναι ισορροπημένες. Τέλος, για όλο το  $s$  το άνω φράγμα στο πλήθος γειτόνων με την  $A_2$  είναι  $2k(6k^3 - k^2 - 6) = 12k^4 - 2k^3 - 12k$ . □

Έχοντας δείξει όλα τα παραπάνω, φτάνουμε στο τελικό αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 3.16.** Το πρόβλημα ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ [ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ] επιδέχεται πυρήνα μεγέθους  $O(k^4)$ .

*Απόδειξη.* Έχοντας φράξει πλέον τον αριθμό των κορυφών βαθμού 0, 1, 2,  $\geq 3$ , παρατηρούμε ότι ο πυρήνας έχει μέγεθος  $k^2 + |A'_0| + |A'_1| + |A_2| + |A_{\geq 3}| + |S| = O(k^4)$ . □



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΜΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

### 4.1 Ορισμοί

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθεί ένας FPT αλγόριθμος ([18]) για την εξής παραλλαγή του ΣΑΚ:

ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ

- **Είσοδος:** Πολυγράφημα  $G = (V, E)$ , χωρίς κατευθύνσεις, σύνολο  $F \subseteq V$  από κορυφές που δεν μπορούμε να διαγράψουμε και ένας ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει σύνολο  $X \subseteq V \setminus F$ , με  $|X| \leq k$  για το οποίο όταν όλες οι κορυφές του  $X$  και οι προσπίπτουσες ακμές τους διαγραφούν από το  $G$ , το γράφημα που απομένει να είναι άκυκλο;

Για το παρόν κεφάλαιο, ορίζουμε  $d(u) := |N(u)|$  και  $D = \max_{v \in V \setminus F} d(v)$ .

### 4.2 Αλγόριθμος και συνάρτηση δυναμικού

Κάποιοι από τους κανόνες αναγωγής που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο βρίσκουν εφαρμογή και για την δημιουργία FPT αλγορίθμων για το ΣΑΚ. Έχουμε τους εξής κανόνες αναγωγής:

1. Αφαιρούμε κάθε κορυφή βαθμού 0 ή 1.
2. Αν υπάρχει κορυφή  $u \notin F$  για την οποία  $G[F \cup \{u\}]$  περιέχει κύκλο, διαγράφουμε την  $u$  και μειώνουμε την παράμετρο  $k$  κατά 1.
3. Αν υπάρχει κορυφή  $v$  βαθμού 2, κάνουμε διάλυση της  $v$ .

4. Για κάθε ακμή με πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 2, αφαιρούμε όσες ακμές χρειάζεται ώστε να έχει πολλαπλότητα ακριβώς 2.
5. Αν υπάρχει κορυφή  $u \notin F$  γειτονική με διπλή ακμή  $uw$  με  $d(w) \leq 3$ , διαγράφουμε τη  $u$  και μειώνουμε την παράμετρο  $k$  κατά 1.
6. Αν  $D \leq 3$ , κάνουμε αναγωγή το πρόβλημά μας στο ταίριασμα μητροειδών (matroid matching) και το λύνουμε σε πολυωνυμικό χρόνο [5].
7. (Κανόνας κλαδέματος) Αν  $k < 0$  ή  $kD - \sum_{v \in F} (d(v) - 2) < 0$ , τότε έχουμε να κάνουμε με αρνητικό στιγμιότυπο.
8. (Κανόνας διακλάδωσης) Διαλέγουμε μια κορυφή  $u \in V \setminus F$  μεγίστου βαθμού  $D$ . Θέτουμε  $U := N(u) \cap F$  και έστω  $G'$  το γράφημα που προκύπτει αν συνθλίψουμε το σύνολο  $U \cup \{u\}$  σε μία κορυφή, έστω  $u'$ . Τότε, έχουμε δύο περιπτώσεις:  $(G - u, F, k - 1)$  και  $(G', F - U + u', k)$ .

Συνεπώς, ο αλγόριθμος για την επίλυση του ΣΑΚ σε ένα ανηγμένο στιγμιότυπο βασίζεται στον κανόνα κλαδέματος και στον κανόνα διακλάδωσης και άρα η πολυπλοκότητά του εξαρτάται άμεσα από αυτούς τους δύο κανόνες. Όσον αφορά τον κανόνα αναγωγής 6 και τα μητροειδή, στο θεώρημα 6 της εργασίας [21] παρουσιάζεται μια σύντομη απόδειξη που συνδέει τα μητροειδή με το ΣΑΚ. Η ορθότητα των κανόνων 1, 3 και 4 αναλύεται στο προηγούμενο κεφάλαιο ενώ η ορθότητα των κανόνων 2, 6 και 8 είναι προφανής. Για τον κανόνα 5, αφού η  $uw$  είναι διπλή ακμή κάθε ΣΑΚ θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον τη μία από τις δύο. Η  $w$  όμως έχει το πολύ άλλη μία γειτονική κορυφή εκτός της  $u$ , άρα κάθε κύκλος που περιέχει την  $w$  περιέχει και την  $u$ . Άρα, πάντα υπάρχει ένα ελάχιστο ΣΑΚ που περιέχει τη  $u$ .

**Παρατήρηση 4.1.** Μετά την εφαρμογή και του κανόνα αναγωγής 5, το  $G$  έχει ελάχιστο βαθμό 3, δεν έχει διπλές ακμές γειτονικές στις κορυφές του συνόλου  $F$  και επιπλέον, για κάθε κορυφή  $u \notin F$ , το  $G - u$  έχει ελάχιστο βαθμό 2, ενώ  $D \geq 4$ .

Μένει να επιχειρηματολογήσουμε για τον κανόνα του κλαδέματος. Έχουμε τα εξής:

**Λήμμα 4.2.** Αν το  $G$  έχει ελάχιστο βαθμό 2 και ισχύει ότι  $kD - \sum_{v \in F} (d(v) - 2) < 0$ , τότε δεν υπάρχει ΣΑΚ μεγέθους το πολύ  $k$ .

*Απόδειξη.* Θα δειχθεί το αντίθετο. Έστω  $S$  ένα τέτοιο ΣΑΚ. Τότε,

$$\begin{aligned}
 kD - \sum_{v \in F} (d(v) - 2) &\geq \sum_{v \in S} d(v) - \sum_{v \in V \setminus S} (d(v) - 2) \\
 &= \sum_{v \in S} d(v) - \sum_{v \in V \setminus S} d(v) + 2|V \setminus S| \\
 &= 2|E(S)| - 2|E(V \setminus S)| + 2|V \setminus S| \\
 &\geq -2|E(V \setminus S)| + 2|V \setminus S| \\
 &\geq 0,
 \end{aligned}$$

αφού  $V \setminus S$  είναι δάσος, και άρα το λήμμα ισχύει.  $\square$

**Λήμμα 4.3.** Έστω  $v_1, v_2, \dots$  οι κορυφές εκτός του συνόλου  $V \setminus F$  σε μη-αύξουσα σειρά των βαθμών τους στο  $G$ . Αν το  $G$  έχει ελάχιστο βαθμό 2 και  $k d(v_1) - \sum_{v \in F} (d(v) - 2) < 0$ , τότε  $|E| - \sum_{i=1}^k d(v_i) \geq |V| - k$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  και έστω  $kd(v_1) - \sum_{v \in F} (d(v) - 2) < 0$ . Τότε,

$$\begin{aligned} 2 \left( |V| - k - |E| + \sum_{v \in S} d(v) \right) &= \sum_{v \in S} d(v) - \left( 2|E| - \sum_{v \in S} d(v) - 2(|V| - k) \right) \\ &= \sum_{v \in S} d(v) - \left( \sum_{v \in V} d(v) - \sum_{v \in S} d(v) - 2(|V| - k) \right) \\ &= \sum_{v \in S} d(v) - \sum_{v \in V \setminus S} (d(v) - 2) \\ &\leq kd(v_1) - \sum_{v \in F} (d(v) - 2) \\ &< 0. \end{aligned}$$

□

Για να συνεχιστεί η ανάλυση του αλγορίθμου, θα πρέπει να οριστούν κάποιες παράμετροι που θα βοηθήσουν στη συνέχεια. Έστω  $0 \leq a \leq 1$  και  $\beta_d$  που ικανοποιούν την συνθήκη  $0 = \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots$

**Ορισμός 4.4.** Ορίζουμε  $\mu(G, F, k) := k - \frac{a}{D} \sum_{v \in F} (d(v) - 2) + \sum_{v \in F} \beta_{d(v)}$  με αρχική συνθήκη  $\mu(G, \emptyset, k) = k$ .

Η  $\mu$  είναι συνάρτηση δυναμικού, όπως η συνάρτηση  $\phi$  στο προηγούμενο κεφάλαιο. Παρατηρούμε ότι όταν  $F = \emptyset$  η συνάρτηση δυναμικού και η παράμετρος του προβλήματος ταυτίζονται.

**Λήμμα 4.5.** Μετά την εφαρμογή του κανόνα κλαδέματος, έχουμε ότι  $\mu(G, F, k) \geq 0$ .

*Απόδειξη.* Πράγματι, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mu(G, F, k) &= k - \frac{a}{D} \sum_{v \in F} (d(v) - 2) + \sum_{v \in F} \beta_{d(v)} \\ &= k - ak + ak - \frac{a}{D} \sum_{v \in F} (d(v) - 2) + \sum_{v \in F} \beta_{d(v)} \\ &= (1 - a)k + \frac{a}{D} \left( kD - \sum_{v \in F} (d(v) - 2) \right) + \sum_{v \in F} \beta_{d(v)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει ότι  $\mu(G, F, k) \geq 0$ .

□

**Λήμμα 4.6.** Η εφαρμογή των κανόνων αναγωγής δεν αυξάνει την τιμή της συνάρτησης  $\mu$ .

*Απόδειξη.* Οι ενδιαφέρουσες περιπτώσεις αφορούν αφενός τις αναγωγές 1, 2 και 5 και αφετέρου την αναγωγή 8.

Διαγράφοντας μια ακμή  $uw$  για την οποία ισχύει ότι  $u \notin F$  και  $w \in F$ , η  $\mu$  μειώνεται κατά  $\frac{a}{D} - (\beta_{d(w)} - \beta_{d(w)-1}) \leq \frac{a}{D} \leq \frac{1}{D}$ . Επιπλέον, κατά την εφαρμογή των κανόνων αναγωγής, ο αριθμός των διαγραφών είναι το πολύ  $D$  (όσο είναι δηλαδή ο μέγιστος βαθμός στο  $G$ ). Η παράμετρος  $k$  μειώνεται κατά 1, συνεπώς η  $\mu$  μειώνεται κατά  $-1 + D \frac{1}{D} \leq 0$ . Όσον αφορά τον κανόνα διακλάδωσης, έστω  $f := |U|$  και  $d := \{d_1, \dots, d_f\}$



το πολυσύνολο των βαθμών των κορυφών του  $U$ . Για την κορυφή  $u'$  ισχύει ότι  $d' := D + \sum_{i=1}^f (d_i - 2)$  (αφαιρούμε 2 γιατί έχουμε διπλομετρήσει τις ακμές μεταξύ  $u$  και  $F$  που δεν υπάρχουν πλέον λόγω της σύνθλιψης). Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Delta_1(D, d) &= \mu(G, F, k) - \mu(G - u, F, k - 1) \\ &= 1 - f \frac{a}{D} + \sum_{i=1}^f (\beta_{d_i} - \beta_{d_i-1})\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\Delta_2(D, d) &= \mu(G, F, k) - \mu(G', F - U + u', k) \\ &= -\frac{a}{D} \left( \sum_{i=1}^f (d_i - 2) - (d' - 2) \right) + \sum_{i=1}^f \beta_{d_i} - \beta_{d'} \\ &= a - 2\frac{a}{D} + \sum_{i=1}^f b_{d_i} - \beta_{d'}\end{aligned}$$

□

Αν  $c^{-\Delta_1(D, d)} + c^{-\Delta_2(D, d)} \leq 1$  ισχύει για οποιοδήποτε  $(D, d)$  για κάποιο  $c > 1$ , ο χρόνος του αλγορίθμου είναι  $O^*(c^k)$ . Παρακάτω θα δειχθεί ότι η καλύτερη τιμή για το  $c$  είναι  $c = 3.460$ .

### 4.3 Ανάλυση του αλγορίθμου

Για την υλοποίηση του αλγορίθμου, θα δοθούν συγκεκριμένες τιμές για τις διάφορες παραμέτρους του προβλήματος. Αν τεθεί  $a = \log_4 \frac{8}{3} \sim 0.7075$ ,  $\beta_d = \frac{1}{2} \log_4 \frac{3}{2}$  για κάθε  $d \geq 3$  και  $c = 4$ , τότε ισχύει ότι  $D \geq 4$  και

$$\begin{aligned}c^{-\Delta_1(D, d)} &\leq 4^{-1 + \frac{f}{D} \log_4 \frac{8}{3}} \leq \frac{1}{4} \min \left( \frac{8}{3}, \left( \frac{8}{3} \right)^{\frac{f}{4}} \right), \\ c^{-\Delta_2(D, d)} &\leq 4^{(\frac{2}{D} - 1) \log_4 \frac{8}{3} + (1-f) \frac{1}{2} \log_4 \frac{3}{2}} \leq \left( \frac{3}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1-f}{2}}.\end{aligned}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι,

$$c^{-\Delta_1(D, d)} + c^{-\Delta_2(D, d)} \leq \begin{cases} \frac{1}{4} + \left( \frac{3}{8} \right)^{1/2} \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} = 1 & (f = 0), \\ \frac{1}{4} \left( \frac{8}{3} \right)^{1/4} + \left( \frac{3}{8} \right)^{1/2} < 0.932 & (f = 1), \\ \frac{1}{4} \left( \frac{8}{3} \right)^{2/4} + \left( \frac{3}{8} \right)^{1/2} \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} < 0.909 & (f = 2), \\ \frac{1}{4} \left( \frac{8}{3} \right)^{3/4} + \left( \frac{3}{8} \right)^{1/2} \left( \frac{2}{3} \right) < 0.930 & (f = 3), \\ \frac{1}{4} \left( \frac{8}{3} \right) + \left( \frac{3}{8} \right)^{1/2} \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} = 1 & (f \geq 4). \end{cases}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι  $c^{-\Delta_1(D, d)} + c^{-\Delta_2(D, d)} \leq 1$ .

**Παρατήρηση 4.7.** Παρατηρούμε επίσης ότι, αφού για  $f \geq 4$  η τιμή του αθροίσματος  $c^{-\Delta_1(D,d)} + c^{-\Delta_2(D,d)}$  εξαρτάται μόνο από την τιμή της  $(\frac{3}{2})^{\frac{1-f}{2}} = (\frac{2}{3})^{\frac{f-1}{2}}$ , οι μοναδικές τιμές για τις οποίες  $c^{-\Delta_1(D,d)} + c^{-\Delta_2(D,d)} = 1$  είναι αν  $f = 0$  ή αν  $f = 4$ .

Με βάση τις παρακάτω τιμές:  $\alpha = 0.922863, c = 3.460$  και  
 $b_1 = 0.000000, b_2 = 0.000000, b_3 = 0.114038, b_4 = 0.186479, b_5 = 0.238143,$   
 $b_6 = 0.277239, b_7 = 0.308030, b_8 = 0.332974, b_9 = 0.353536, b_{10} = 0.370540,$   
 $b_{11} = 0.384771, b_{12} = 0.396884, b_{13} = 0.408715, b_{14} = 0.418855, b_{15} = 0.427643,$   
 $b_{16} = 0.435333, b_{17} = 0.442118, b_{18} = 0.448149, b_{19} = 0.453544, b_{20} = 0.458401,$   
 $b_{21} = 0.462794, b_{22} = 0.466788, b_{23} = 0.470435, b_{24} = 0.473778, b_{25} = 0.476853,$   
 $b_{26} = 0.479691, b_{27} = 0.482320, b_{28} = 0.484760, b_{29} = 0.487032, b_{\geq 30} = 0.489153$   
 μπορεί να δειχθεί το ακόλουθο:

**Λήμμα 4.8.** Ισχύει ότι  $c^{-\Delta_1(D,d)} + c^{-\Delta_2(D,d)} \leq 1$  για κάθε  $(D, d)$  με  $D \geq 4$ .

*Απόδειξη.* Έστω ότι για κάποιο  $j$  ισχύει ότι  $d_j \geq 32$ . Αφού (από τα προηγούμενα) ισχύει ότι  $\beta_d = \beta_{30}$  για κάθε  $d \geq 30$ , και αφού  $d' = D + \sum_i (d_i - 2) \geq D + (d_j - 2) \geq 31$  ισχύει, το να μειωθεί η τιμή του  $d_j$  κατά 1 δεν θα αλλάξει την τιμή των  $\Delta_1, \Delta_2$ . Συνεπώς, θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση που ισχύει ότι  $d_i \leq 31$ . Θα προχωρήσουμε με επαγωγή. Αρχικά, για  $D = 4$  ισχύει ότι  $c^{-\Delta_1(4,d)} + c^{-\Delta_2(4,d)} \leq 1$ . Έστω τώρα ότι η ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε  $(D - 1, d)$ . Θα δειχθεί ότι ισχύει και για  $(D, d)$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, μία για  $f < D$  και μία για  $f = D$ .

Για  $f < D$ , έχουμε ότι  $\Delta_1(D, d) \geq \Delta_1(D - 1, d)$ . Επιπλέον,

$$\Delta_2(D, d) = \Delta_2(D - 1, d) - 2\frac{a}{D} - \beta_{d'} + 2\frac{a}{D-1} + \beta_{d'-1}.$$

Όμως,

$$-2\frac{a}{D} - \beta_{d'} + 2\frac{a}{D-1} + \beta_{d'-1} \geq 0$$

για κάθε  $(D, d')$  με  $5 \leq D \leq d' \leq 31$ , οπότε

$$\Delta_2(D, d) \geq \Delta_2(D - 1, d).$$

Συνεπώς,

$$c^{-\Delta_1(D,d)} + c^{-\Delta_2(D,d)} \leq c^{-\Delta_1(D-1,d)} + c^{-\Delta_2(D-1,d)} \leq 1.$$

Για  $f = D$ , θέτουμε  $d' := \{d_1, \dots, d_{f-1}\}$ . Έχουμε ότι

$$\Delta_1(D, d) = \Delta_1(D - 1, d') + \beta_{d_f} - \beta_{d_f-1} \geq \Delta_1(D - 1, d')$$

και

$$\begin{aligned} \Delta_2(D, d) &= \Delta_2(D - 1, d') - 2\frac{a}{D} + 2\frac{a}{D-1} + \beta_{d_f} - \beta_{d'} + \beta_{d'-d_f+2} \\ &\geq \Delta_2(D - 1, d') + \beta_{d_f} - \beta_{d'} + \beta_{d'-d_f+2}. \end{aligned}$$

Επιπλέον,  $\beta_{d_f} - \beta_{d'} + \beta_{d'-d_f+2} \geq 0$  για κάθε  $(d', d_f)$  με  $3 \leq d_f < d' \leq 31$ .

Οπότε,

$$\Delta_2(D, d) \geq \Delta_2(D - 1, d').$$

Συνεπώς,

$$c^{-\Delta_1(D,d)} + c^{-\Delta_2(D,d)} \leq c^{-\Delta_1(D-1,d')} + c^{-\Delta_2(D-1,d')} \leq 1.$$

□

**Θεώρημα 4.9.** Τελικά, από το λήμμα 4.8 προκύπτει ότι το σύνολο ανάδρασης κορυφών επιλύεται σε χρόνο  $O^*(3.460^k)$ .

## 4.4 Ένας επιπλέον αλγόριθμος

Στην εργασία ([21]) παρουσιάζεται ένας ακόμα αλγόριθμος για το ΣΑΚ σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Παρότι ο αλγόριθμος αυτός είναι πιο αργός από αυτόν που ήδη παρουσιάστηκε καθώς χρειάζεται χρόνο  $O^*(3.592^k)$ , δίνεται η βασική του ιδέα. Για να επιτευχθεί αυτό το φράγμα, θα γίνει αναγωγή από το ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ το οποίο ορίζεται ως εξής:

ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ

- **Είσοδος:** Γράφημα  $G$ , διαμέριση των κορυφών του σε σύνολα  $U, D$  για τα οποία ισχύει ότι  $G[V], G[U]$  είναι δάση, και ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει  $X \subseteq V$  μεγέθους το πολύ  $k$  τέτοιο ώστε το  $G \setminus X$  να είναι δάσος;

Τα στιγμιότυπα για το παρόν πρόβλημα είναι της μορφής  $I = (G, U, D, k)$ . Ορίζουμε συνάρτηση δυναμικού  $\mu(I) = k(I) + l(I) - t(I)$ , όπου  $k(I) = k$ ,  $t(I)$  το πλήθος των τεντών<sup>1</sup> στο  $G$  και  $l(I)$  το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του  $G[U]$ . Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να πάρουμε μια λύση για το απλό ΣΑΚ έχοντας μια λύση για το διακεκριμένο ΣΑΚ με χρήση της τεχνικής της επαναληπτικής συμπίεσης (iterative compression).

**Θεώρημα 4.10.** Το ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ για στιγμιότυπο  $I$  λύνεται σε χρόνο  $O^*(\phi^{\max\{0, \mu(I)\}})$  και πολυωνυμικό χώρο.

Παραθέτουμε το παραπάνω θεώρημα χωρίς απόδειξη, καθώς είναι χρήσιμο για να αποδειχθεί το επόμενο θεώρημα:

**Θεώρημα 4.11.** Το ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ με παράμετρο  $k$  λύνεται σε χρόνο  $O^*(3.619^k)$  και πολυωνυμικό χώρο.

*Απόδειξη.* Έστω  $v_1, \dots, v_n$  οι κορυφές του  $G$ , και έστω  $V_i = \{v_1, \dots, v_i\}$ . Συμβολίζουμε, χάριν συντομίας,  $G_i = G[V_i]$ . Θα λύσουμε το ΣΑΚ για τα στιγμιότυπα  $(G_i, k)$ ,  $i \in [n]$ . Αν για κάποιο  $i$  έχουμε αρνητικό στιγμιότυπο, τότε και το αρχικό στιγμιότυπο για το  $G$  είναι επίσης αρνητικό. Επιπλέον, όταν  $i \leq k + 1$  το πρόβλημα έχει τετριμμένη λύση. Θα δειχθεί πως λύνουμε το πρόβλημα για ένα στιγμιότυπο  $(G_i, k)$  όταν έχουμε μια λύση για το στιγμιότυπο  $(G_{i-1}, k)$ . Έστω  $X_{i-1}$  ένα ΣΑΚ για το στιγμιότυπο  $(G_{i-1}, k)$  και έστω  $Z = X_{i-1} \cup v_i$  και  $D = V_{i-1} \setminus X_{i-1}$ . Εξ ορισμού του  $X_{i-1}$  το  $G[D]$  είναι δάσος. Επιπλέον, για κάθε  $Y \subseteq Z$  για τα οποία  $G[Z \setminus Y]$  είναι δάσος, ορίζουμε  $U = Z \setminus Y$  και χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του θεωρήματος 4.10 για το ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ στο στιγμιότυπο  $I_Y = (G_i \setminus Y, U, D, k - |Y|)$ . Επιπλέον, για το στιγμιότυπο αυτό ισχύει ότι  $l(I_Y) < |U| = |Z \setminus Y| \leq k + 1 - |Y|$ , όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει γιατί το  $G[U]$  θα έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη συνεκτική συνιστώσα. Οπότε ισχύει ότι  $\mu(I_Y) \leq 2(k - |Y|)$ , και ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι  $O^*(\sum_{Y \subseteq Z} \phi^{2(k-|Y|)}) = O^*((2 + \phi)^k) = O^*(3.619^k)$ .  $\square$

<sup>1</sup>Μια κορυφή  $v$  λέγεται τέντα όταν βρίσκεται στο  $D$ , δεν συνδέεται με καμία άλλη κορυφή στο  $D$  και έχει ακριβώς 3 γείτονες στο  $U$ .

Οι συγγραφείς της εργασίας ([21]) προκειμένου να μειώσουν την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου για το ΣΑΚ από  $O^*(3.619^k)$  σε  $O^*(3.592^k)$  εισήγαγαν μια πληθώρα κανόνων αναγωγής που βασίζονται στην δομή των κορυφών που ανήκουν στο σύνολο  $D$ . Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου υπολογίστηκε με τη μέθοδο των διανυσμάτων διακλάδωσης (branching vectors) μέσω ενός Python προγράμματος.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΤΟΜΕΣ, ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ

### 5.1 Εισαγωγή

Για την ανάπτυξη αλγορίθμων που αφορούν το σύνολο ανάδρασης κορυφών σε κατευθυνόμενα γραφήματα θα χρειαστούν οι έννοιες του διαχωριστή και της τομής. Έστω  $(S_l) = [S_1, \dots, S_l]$ ,  $(T_l) = [T_1, \dots, T_l]$  δύο οικογένειες συνόλων κορυφών μεγέθους  $l$  σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$ . Τότε το πρόβλημα ΛΟΞΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΗΣ ορίζεται ως εξής:

ΛΟΞΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΗΣ

- **Είσοδος:** Κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ , οικογένειες συνόλων  $(S_l)$ ,  $(T_l)$ , και ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει  $X \subseteq V - \bigcup_{i=1}^l (S_i \cup T_i)$  μεγέθους το πολύ  $k$  τέτοιο ώστε για κάθε  $i, j$  για τα οποία ισχύει  $l \geq i \geq j \geq 1$  δεν υπάρχει μονοπάτι από το  $S_i$  στο  $T_j$  στο  $G - X$ .

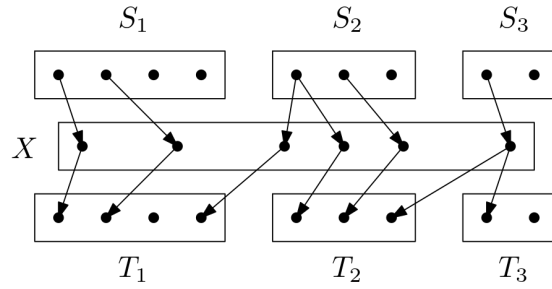
**Παράδειγμα 5.1.** Στο σχήμα 5.1 το σύνολο  $X$  είναι λοξός διαχωριστής για τις οικογένειες  $(S_3)$ ,  $(T_3)$ .

**Ορισμός 5.2.** Έστω  $u, v$  δύο κορυφές ενός γραφήματος  $G$ . Ονομάζουμε τομή ένα σύνολο κορυφών του  $G$  η αφαίρεση του οποίου διαγράφει όλα τα μονοπάτια μεταξύ των  $u, v$ . Αν μια τομή είναι και ελάχιστη, τότε ονομάζεται ελάχιστη τομή (min cut).

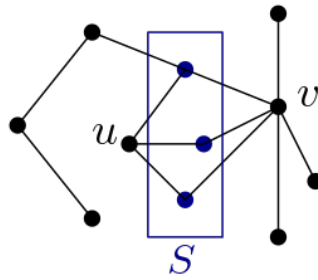
**Παράδειγμα 5.3.** Στο σχήμα 5.2 το σύνολο  $S$  είναι (ελάχιστη) τομή για τις κορυφές  $u, v$ .

**Ορισμός 5.4.** Αν  $l = 1$  τότε ένας λοξός διαχωριστής για τα σύνολα  $S_1, T_1$  είναι επίσης μια τομή (cut) των  $S_1, T_1$ .

**Ορισμός 5.5.** Οι κορυφές του  $G$  που δεν ανήκουν στο σύνολο  $\bigcup_{i=1}^l (S_i \cup T_i)$  ονομάζονται μη-τερματικές κορυφές.



Σχήμα 5.1: Παράδειγμα λοξού διαχωριστή  $X$  για τις οικογένειες  $(S_3), (T_3)$ .



Σχήμα 5.2: Παράδειγμα τομής  $S$  των κορυφών  $u, v$ .

**Λήμμα 5.6.** Υπάρχει αλγόριθμος με πολυπλοκότητα  $O(kn^2)$  ο οποίος για δύο σύνολα κορυφών  $S, T$  ενός κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  και παράμετρο  $k$  είτε κατασκευάζει μια ελάχιστη τομή από το  $S$  στο  $T$  με μέγεθος το πολύ  $k$  είτε απαντάει αρνητικά στην ύπαρξη τέτοιας τομής.

Η απόδειξη του λήμματος παραλείπεται καθώς ξεφεύγει από τα όρια της παρούσας εργασίας. Ωστόσο, περισσότερα για αυτό μπορούν να βρεθούν στο κεφάλαιο 10 του [26] καθώς και στο κεφάλαιο 8 του [9]. Χάριν απλότητας θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω περιορισμοί. Παρότι δεν είναι αναγκαίοι, απλοποιούν τις αποδείξεις που θα ακολουθήσουν χωρίς όμως να περιορίζουν το προς επίλυση πρόβλημα. Αν δοθέντος ενός στιγμιοτύπου  $(G, (S_i), (T_i), k)$  ισχύουν τα παρακάτω:

1. όλα τα σύνολα των οικογενειών  $(S_i), (T_i)$  είναι ανά δύο διακεκριμένα,
2. από την οικογένεια  $(S_i)$  μόνο το  $S_i$  μπορεί να έχει εισερχόμενες ακμές,
3. από την οικογένεια  $(T_i)$  κανένα σύνολο δεν έχει εξερχόμενες ακμές,

τότε υπάρχει αλγόριθμος για την εύρεση ενός λοξού διαχωριστή είτε επιστρέφει έναν λοξό διαχωριστή μεγέθους το πολύ  $k$  είτε απαντάει αρνητικά. Ο αλγόριθμος αυτός θα ορισθεί παρακάτω.

## 5.2 Αλγόριθμος λοξού διαχωριστή

**Ορισμός 5.7.** Ορίζουμε  $T_{all} = \bigcup_{i=1}^l T_i$ .

Για το πρόβλημα ΛΟΞΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΗΣ έχουμε τους εξής κανόνες αναγωγής:

1. Αν δεν υπάρχει μονοπάτι από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  το μέγεθος της ελάχιστης τομής από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  είναι μηδέν, οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε το  $S_l$  και να λύσουμε το πρόβλημα για το στιγμιότυπο  $(G, (S_{l-1}), (T_{l-1}), k)$ .
2. Αν υπάρχει απευθείας ακμή από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  τότε έχουμε να κάνουμε με αρνητικό στιγμιότυπο.
3. Αν υπάρχει μια μη τερματική κορυφή  $w$ , ακμή από το  $S_l$  στην  $w$  και ακμή από την  $w$  στο  $T_{all}$  τότε εισάγουμε την  $w$  στην λύση και μειώνουμε την παράμετρο  $k$  κατά ένα.

**Ορισμός 5.8.** Έστω  $u_0$  μια κορυφή του  $G$ . Αν υπάρχει ακμή από το  $S_l$  στην  $u_0$  αλλά δεν υπάρχει ακμή από την  $u_0$  στο  $G$  τότε θα λέμε ότι η  $u_0$  είναι μια  $S_l$ -επεκτεταμένη κορυφή. Επιπλέον, θα συμβολίζουμε  $S'_l = S_l \cup u_0$ .

Λόγω των παραπάνω κανόνων αναγωγής, συμπεραίνουμε ότι σε ένα ανηγμένο στιγμιότυπο η ελάχιστη τομή από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  θα έχει μέγεθος μεγαλύτερο του 0 και ότι θα υπάρχει μία  $S_l$ -επεκτεταμένη κορυφή.

**Λήμμα 5.9.** Έστω  $X \subseteq V(G)$ . Το  $X$  είναι λοξός διαχωριστής για τα  $(S_l), (T_l)$  αν και μόνο αν είναι λοξός διαχωριστής για τα  $(S'_l), (T_l)$ .

Από το παραπάνω λήμμα προκύπτουν τα δύο εξής πορίσματα:

**Πόρισμα 5.10.** Ένας διαχωριστής για τα  $(S'_l), (T_l)$  είναι και διαχωριστής για τα  $(S_l), (T_l)$ .

Το επόμενο θεώρημα είναι χρήσιμο για την κατασκευή του αναδρομικού αλγόριθμου επίλυσης του προβλήματος ΛΟΞΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΗΣ.

**Πόρισμα 5.11.** Το μέγεθος μιας ελάχιστης τομής από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  έχει μέγεθος τουλάχιστον όσο μιας ελάχιστης τομής από το  $S'_l$  στο  $T_{all}$ .

**Θεώρημα 5.12.** Αν οι ελάχιστες τομές από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  και από το  $S'_l$  στο  $T_{all}$  έχουν ίδιο μέγεθος τότε τα  $(S_l), (T_l)$  έχουν λοξό διαχωριστή μεγέθους του πολύ  $k$  αν και μόνο αν τα  $(S'_l), (T_l)$  έχουν λοξό διαχωριστή μεγέθους το πολύ  $k$ .

*Απόδειξη.* ( $\Leftarrow$ ) Αν τα  $(S'_l), (T_l)$  έχουν λοξό διαχωριστή  $X$  μεγέθους το πολύ  $k$  τότε το  $X$  είναι λοξός διαχωριστής και για τα  $(S_l), (T_l)$ .

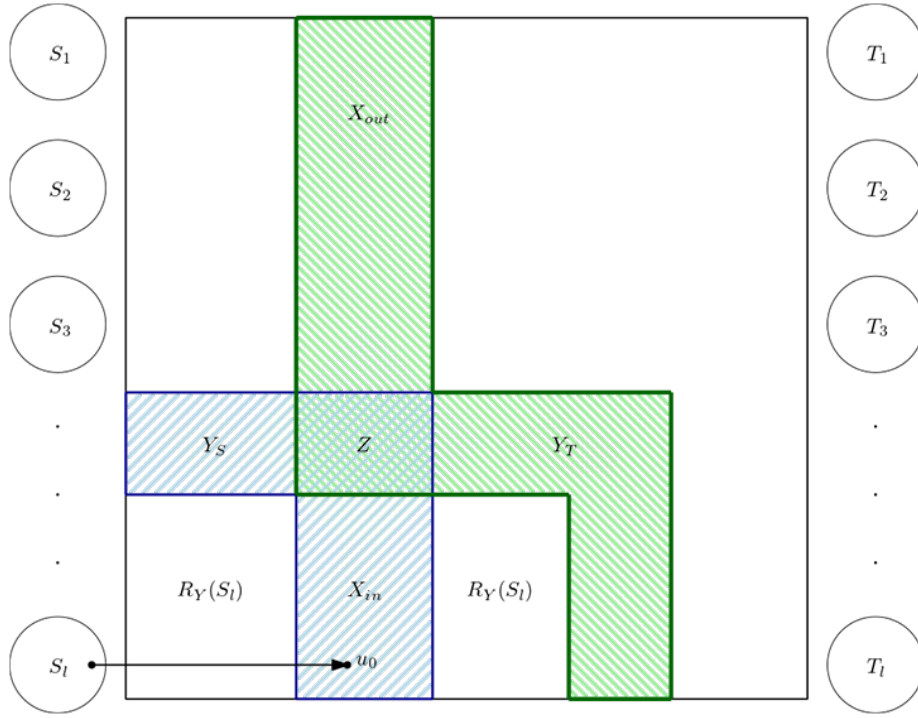
( $\Rightarrow$ ) Έστω  $X$  ένας διαχωριστής μεγέθους το πολύ  $k$  για τα  $(S_l), (T_l)$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις για το αν ο διαχωριστής περιέχει ή όχι την  $S_l$ -επεκτεταμένη κορυφή  $u_0$ . Αν το  $X$  δεν περιέχει την  $u_0$ , τότε λόγω του παραπάνω λήμματος το  $X$  είναι λοξός διαχωριστής και για τα  $(S'_l), (T_l)$ . Αν το  $X$  περιέχει την  $u_0$  θα βρούμε ένα σύνολο  $X'$  που δεν περιέχει την  $u_0$  και θα δειχθεί ότι  $|X'| \leq |X|$  και ότι το  $X'$  είναι λοξός διαχωριστής για τα  $(S_l), (T_l)$ . Η ιδέα της απόδειξης είναι ότι θα αλλαχθούν κάποια στοιχεία του ελάχιστου διαχωριστή  $X$  με κάποια της ελάχιστης τομής  $Y$ , ώστε τελικά να βρεθεί το ζητούμενο σύνολο. Έστω μια ελάχιστη τομή από το  $S'_l$  στο  $T_{all}$ . Εξ ορισμού το  $Y$  περιέχει μόνο μη-τερματικές κορυφές και δεν περιέχει την  $u_0$ . Προφανώς το  $Y$  είναι τομή και από το  $S_l$  στο  $T_{all}$ , οπότε είναι και ελάχιστη τομή λόγω υπόθεσης. Έστω  $R_Y(S_l)$  το σύνολο των κορυφών  $v$  για τις οποίες είτε  $v \in S_l$  στο  $G - Y$  είτε υπάρχει μονοπάτι από το  $S_l$  στην  $v$  στο γράφημα  $G - Y$ . Προφανώς  $u_0 \in R_Y(S_l)$ . Για την συνέχεια της απόδειξης, θα διαχωρίσουμε τα  $X, Y$  σε τρία διακεκριμένα υποσύνολα το καθένα. Βοηθητικά, δίνεται το σχήμα 5.3 του γραφήματος.



Έστω τα σύνολα  $Z = X \cap Y$ ,  $X_{in} = X \cup R_Y(S_l)$ ,  $X_{out} = X - (X_{in} \cup Z)$ . Προφανώς  $X = Z \cup X_{in} \cup X_{out}$ , ενώ τα  $Z$ ,  $X_{in}$ ,  $X_{out}$  είναι ανά δύο διακεκριμένα αφού το  $Y$  και το  $R_Y(S_l)$  δεν έχουν κοινά στοιχεία, καθώς το  $R_Y(S_l)$  αφορά κορυφές στο  $G - Y$ . Επιπλέον, έστω  $Y_T$  οι κορυφές  $v \in Y$  για τις οποίες υπάρχει μονοπάτι από τη  $v$  στο  $T_{all}$  στο  $G - X$ . Εξ ορισμού  $Y_T \cap Z = \emptyset$  αφού  $Z \subseteq X$  και  $Y_T \subseteq G - X$ . Έστω  $Y_S = Y_T - (Y_T \cup Z)$ . Προφανώς  $Y = Y_S \cup Y_T \cup Z$ . Θα δειχθεί ότι το  $Y' = Y_S \cup Z \cup X_{in}$  (χρωματισμένο με μπλε στο παρακάτω σχήμα) είναι επίσης τομή από το  $S_l$  στο  $T_{all}$ . Έστω ότι δεν είναι, άρα θα υπάρχει μονοπάτι  $P_1$  από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  στο  $G - Y'$ . Αφού το  $Y$  είναι τομή από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  το  $P_1$  θα περιέχει κορυφές του  $Y$ . Έστω  $w$  η πρώτη κορυφή του  $P_1$  που ανήκει στο  $Y$ . Τότε, αφού  $Y' = Y_S \cup Z \cup X_{in}$ , ισχύει ότι  $w \in Y_T$ . Επιπλέον, έστω  $P'_1$  το υπομονοπάτι του  $P_1$  από το  $S_l$  μέχρι την προηγούμενη κορυφή από την  $w$ . Το  $P'_1$  ανήκει εξ ολοκλήρου στο  $R_Y(S_l)$  αφού το  $P_1$  δεν έχει κοινές κορυφές με τα σύνολα  $Y_S$ ,  $Z$  και αφού εξ ορισμού δεν περιέχει κορυφές από τα σύνολα  $X_{in}$ ,  $Z$ . Επίσης δεν περιέχει ούτε κορυφές του  $X_{out}$ , αφού αυτό δεν έχει κοινές κορυφές με το  $R_Y(S_l)$ , οπότε το  $P'_1$  δεν περιέχει καμία κορυφή του  $X$ . Επιπλέον αφού το  $Y_T$  αποτελείται από τις κορυφές  $v \in Y$  για τις οποίες υπάρχει μονοπάτι από τη  $v$  στο  $T_{all}$  στο  $G - X$  και αφού  $w \in Y_T$  υπάρχει μονοπάτι  $P''_1$  από την  $w$  στο  $T_{all}$ , άρα η ένωση των  $P'_1$ ,  $P''_1$  είναι μονοπάτι από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  στο  $G - X$ , άτοπο, αφού το  $X$  είναι λοξός διαχωριστής για τα  $(S_l)$ ,  $(T_l)$ . Άρα  $Y'$  είναι τομή από το  $S_l$  στο  $T_{all}$ . Αφού  $Y$  είναι ελάχιστη τομή από το  $S_l$  στο  $T_{all}$ , τότε  $|Y| \leq |Y'|$  και άρα  $|Y_T| \leq |X_{in}|$ . Έστω  $X' = X_{out} \cup Z \cup Y_T$  (χρωματισμένο με πράσινο στο σχήμα). Το  $X'$  εξ ορισμού περιέχει μόνο μη τερματικές κορυφές ενώ  $|X'| \leq |X|$  αφού  $|Y_T| \leq |X_{in}|$ , και επιπλέον το  $X'$  δεν περιέχει τη  $u_0$  αφού  $u_0 \in X_{in}$ . Οπότε αν αποδειχθεί ότι το  $X'$  είναι λοξός διαχωριστής μεγέθους το πολύ  $k$  για τα  $(S_l)$ ,  $(T_l)$ , θα είναι και για τα  $(S'_l)$ ,  $(T_l)$ . Έστω  $R_Y(T_{all})$  οι κορυφές  $v$  για τις οποίες είτε  $v \in T_{all}$  είτε υπάρχει μονοπάτι από τη  $v$  στο  $T_{all}$  στο  $G - Y$ . Έστω ότι το  $X'$  δεν είναι λοξός διαχωριστής για τα  $(S_l)$ ,  $(T_l)$ . Τότε υπάρχει μονοπάτι  $P_2$  στο  $G - X'$  από το  $S_i$  στο  $T_j$  για  $i \geq j$  με τις εξής ιδιότητες:

1. Το  $P_2$  περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή στο  $R_Y(S_l)$ . Αφού το  $X$  είναι διαχωριστής, το  $P_2$  περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή στο  $X$ . Έστω  $w_1$  αυτή η κορυφή. Όμως, επειδή το  $P_2$  ανήκει στο  $G - X'$ , αναγκαστικά ισχύει ότι  $w_1 \in X_{in} \subseteq R_Y(S_l)$ .
2. Το  $P_2$  περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή στο  $Y_S$ . Λόγω της (1), ισχύει ότι  $w_1 \in R_Y(S_l)$ . Από την κορυφή  $w_1$  μέχρι το  $T_{all}$  στο  $P_2$ , υπάρχει κορυφή  $w_2 \in Y$ , καθώς το  $Y$  είναι τομή από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  ενώ υπάρχει μονοπάτι από την  $S_l$  στην  $w_1$  στο  $G - Y$ . Αφού  $P_2 \subseteq G - X'$ , προκύπτει ότι  $w_2 \in Y_S$ .
3. Η τελευταία κορυφή του  $P_2$  ανήκει στο  $R_Y(T_{all})$ .

Λόγω των ιδιοτήτων 2 και 3 το  $P_2$  περιέχει μια κορυφή που δεν ανήκει στο  $R_Y(T_{all})$  ενώ η τελευταία του κορυφή ανήκει στο  $R_Y(T_{all})$ , οπότε θα υπάρχει μια κορυφή  $w$  η οποία δεν ανήκει στο  $R_Y(T_{all})$  αλλά όλες οι επόμενες της στο  $P_2$  θα ανήκουν στο  $R_Y(T_{all})$ . Όμως, μετά την  $w$ , καμία κορυφή δεν γίνεται να ανήκει στο  $X$  γιατί τότε αναγκαστικά θα ανήκει στο  $X_{in}$  (αφού το  $P_2$  ανήκει στο  $G - X'$ ) και άρα θα ανήκει στο  $R_Y(T_{all})$ . Επιπλέον η  $w$  θα πρέπει να ανήκει στο  $Y$  (ώστε να μην ανήκει στο  $R_Y(T_{all})$ ) και άρα στο  $Y_S$  (αφού το  $P_2$  ανήκει στο  $G - X'$ ). Όμως το  $P_2$  για να πηγαίνει από την  $w$  στο  $T_{all}$  πρέπει να ανήκει στο  $X$  και όχι στο  $Y_S$ , άρα έχουμε άτοπο. Άρα και το  $X'$  είναι λοξός διαχωριστής για τα  $(S_l)$ ,  $(T_l)$  ενώ επιπλέον  $|X'| \leq k$ . Άρα  $X'$  είναι λοξός διαχωριστής και για τα  $(S'_l)$ ,  $(T_l)$ .  $\square$



Σχήμα 5.3: Σχηματική απεικόνιση του γραφήματος του θεωρήματος 5.12.

Παρακάτω δίνεται σε ψευδοκώδικα ο αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα του λοξού διαχωριστή.

---

**Algorithm 1**  $SMC(G, (S_l), (T_l), k)$

---

- 1: **Είσοδος:** Στιγμότητα  $(G, (S_l), (T_l), k)$ .
  - 2: **Έξοδος:** Λοξός διαχωριστής μεγέθους το πολύ  $k$  ή αρνητική απάντηση.
  - 3: **if**  $l = 1$  **then** λύσε το πρόβλημα σε χρόνο  $O(kn^2)$ .
  - 4: **if** ο κανόνας αναγωγής 2 έχει εφαρμογή ή  $k < 0$  **then** επέστρεψε όχι.
  - 5: **if** ο κανόνας αναγωγής 1 έχει εφαρμογή **then**  $SMC(G, (S_{l-1}), (T_{l-1}), k)$ .
  - 6: **if** ο κανόνας αναγωγής 3 έχει εφαρμογή σε μια κορυφή  $w$  **then**
  - 7:     επέστρεψε  $w \cup SMC(G - w, (S_l), (T_l), k - 1)$ .
  - 8: Διάλεξε μια  $S_l$ -επεκτεταμένη κορυφή  $u_0$  και θέσε  $S'_l = S_l \cup u_0$ .
  - 9: Έστω  $m$  το μέγεθος της ελάχιστης κοπής από το  $S_l$  στο  $T_{all}$ .
  - 10: **if**  $m > k$  **then** επέστρεψε όχι.
  - 11: Έστω  $m'$  το μέγεθος της ελάχιστης κοπής από το  $S'_l$  στο  $T_{all}$ .
  - 12: **if**  $m = m'$  **then**
  - 13:     επέστρεψε  $SMC(G, (S'_l), (T_l), k)$
  - 14: **else**  $X = \{u_0\} \cup SMC(G - u_0, (S_l), (T_l), k - 1)$ .
  - 15:     **if**  $X \neq \text{"No"}$  **then** επέστρεψε  $X$ .
  - 16:     **else** επέστρεψε  $SMC(G, (S'_l), (T_l), k)$ .
-

Ο παραπάνω αλγόριθμος λύνει ορθά το πρόβλημα ΛΟΞΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΗΣ. Η απόδειξη έχει χωριστεί σε δύο μέρη (ορθότητα και πολυπλοκότητα) μιας και γίνεται αρκετά αναλυτικά.

**Θεώρημα 5.13.** Ο αλγόριθμος 1 λύνει ορθά το πρόβλημα ΛΟΞΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΗΣ.

*Απόδειξη.* Προφανώς αν  $l = 1$  τότε η λύση είναι μια ελάχιστη τομή που μπορεί να βρεθεί σε χρόνο  $O(kn^2)$ . Επιπλέον, αν ο αλγόριθμος φτάσει στο βήμα 7 τότε το προς επίλυση στιγμιότυπο θα είναι ανηγμένο και θα ισχύουν τα εξής: Λόγω του κανόνα 1 θα υπάρχει μονοπάτι από μια  $v \in S_l$  σε μια  $w \notin S_l$  και λόγω του κανόνα 2  $w \notin T_{all}$ . Επίσης  $w \notin S_i, i < l$ , οπότε η  $w$  είναι μη τερματική κορυφή. Τέλος, λόγω του κανόνα 3 δεν υπάρχει ακμή από την  $w$  στο  $T_{all}$  οπότε η  $w$  είναι  $S_l$ -επεκτεταμένη κορυφή και άρα στο βήμα 8 ο αλγόριθμος SMC θα βρίσκει πάντα μια τέτοια κορυφή. Σε περίπτωση που το  $m$  (μέγεθος ελάχιστης τομής από το  $S_l$  στο  $T_{all}$ ) είναι μεγαλύτερο από το  $k$ , τότε προφανώς δεν έχουμε λύση, καθώς η λύση αυτή θα απαιτούσε παραπάνω από  $k$  κορυφές. Αν οι ελάχιστες τομές από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  και από το  $S'_l$  στο  $T_{all}$  έχουν το ίδιο μέγεθος τότε καλείται αναδρομικά ο αλγόριθμος με είσοδο  $(G, (S'_l), (T_l), k)$ , λόγω του θεωρήματος 5.12. Αν οι δύο αυτές τομές έχουν διαφορετικό μέγεθος τότε ο αλγόριθμος βάζει την  $S_l$ -επεκτεταμένη κορυφή (που βρήκε στο βήμα 8)  $u_0$  στη λύση, μειώνει την παράμετρο κατά 1 και ψάχνει λύση στο  $G - u_0$ . Αν δεν βρει λύση, τότε λόγω του 5.9 καλείται αναδρομικά ο αλγόριθμος SMC για είσοδο  $(G, (S'_l), (T_l), k)$ . Συνεπώς ο αλγόριθμος 1 είναι ορθός.  $\square$

**Θεώρημα 5.14.** Ο αλγόριθμος 1 λύνει το πρόβλημα ΛΟΞΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΗΣ σε χρόνο  $O(4^k kn^3)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $T$  το δέντρο αναδρομής του αλγορίθμου 1 και έστω  $D(k, m)$  ο αριθμός των φύλλων στο στον αλγόριθμο  $SMC(G, (S_l), (T_l), k)$  και  $m$  το μέγεθος της ελάχιστης τομής από το  $S_l$  στο  $T_{all}$ . Τότε, από τα βήματα 14-16 του αλγορίθμου προκύπτει η εξής αναδρομική σχέση:  $D(k, m) \leq D(k-1, m_1) + D(k, m_2)$ , όπου  $m_1, m_2$  το μέγεθος της ελάχιστης τομής από το  $S_l$  στο  $T_{all}$  στο  $G - u_0$  και από το  $S'_l$  στο  $T_{all}$  στο  $G$  αντίστοιχα. Προφανώς για το  $m_1$  ισχύει ότι  $m-1 \leq m_1 \leq m$ , αφού έχει αφαιρεθεί μία κορυφή από το  $G$  ενώ για το  $m_2$ , λόγω του πορίσματος 5.11 ισχύει ότι  $m_2 \geq m+1$  (αφού πρέπει να ληφθεί υπόψιν και η  $u_0$ ). Έστω συνάρτηση δυναμικού  $t = 2k - m$ , θα δειχθεί με επαγωγή στο μέγεθος της  $t$  ότι  $D(k, m) \leq 2^{2k-m}$ . Αρχικά, όσον αφορά την  $t$  κανένα από τα βήματα του αλγορίθμου δεν αυξάνει το μέγεθος της. Συγκεκριμένα μόνο τα βήματα 5, 6 και 16 αλλάζουν την τιμή της  $t$  αλλά κανένα από αυτά δεν την αυξάνει. Προφανώς  $t \geq 0$ , και επιπλέον για  $k = m = 0$  ο αλγόριθμος λύνει απευθείας το πρόβλημα και  $D(0, 0) = 1$ , οπότε έχουμε την βάση της επαγωγής. Για το επαγωγικό βήμα, παρατηρούμε ότι  $t_1 = 2(k-1) - m_1 \leq 2k - m - 1$  και  $t_2 = 2k - m_2 \leq 2k - m - 1$ . Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι  $D(k, m) \leq D(k-1, m_1) + D(k, m_2) \leq 2^{2(k-1)-m_1} + 2^{2k-m_2} \leq 2^{2k-m}$ . Επιπλέον,  $D(k, m) \leq 2^{2k-m} \leq 4^k$ . Ο χρόνος για την εκτέλεση του αλγορίθμου είναι  $O(kn^2)$  λόγω του αλγορίθμου εύρεσης ελάχιστης τομής, ενώ ο αλγόριθμος θα έχει το πολύ  $O(n)$  αναδρομικές κλήσεις (όπου είτε τα ζεύγη των  $S_l, T_l$  μειώνονται κατά 1 είτε αφαιρείται μια κορυφή από το  $G$ ), και άρα η συνολική πολυπλοκότητα είναι  $O(4^k kn^3)$ .  $\square$

### 5.3 Διαμέριση σε άκυκλα κατευθυνόμενα γραφήματα

Με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο, θα λυθεί ένα άλλο πρόβλημα, αυτό της διαμέρισης σε άκυκλα κατευθυνόμενα γραφήματα. Υπενθυμίζεται ότι δύο σύνολα  $D_1, D_2$  αποτελούν διαμέριση των κορυφών ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  όταν ισχύει ότι  $D_1 \cup D_2 = V$  και  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ .

Το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΑΚΥΚΛΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ορίζεται ως εξής:

ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΑΚΥΚΛΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

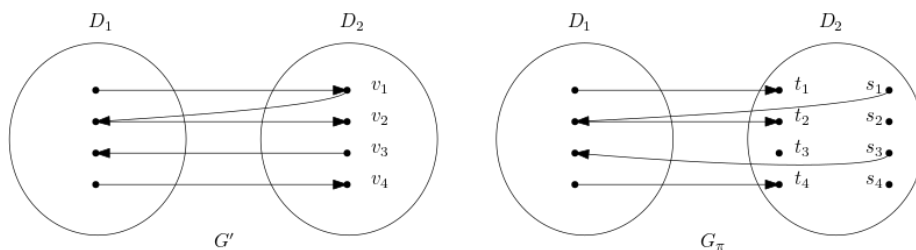
- **Είσοδος:** Κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$ , διαμέριση  $(D_1, D_2)$ , και ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει ΣΑΚ  $X \subseteq D_1$  μεγέθους το πολύ  $k$  στο  $G$ ;

**Ορισμός 5.15.** Θα συμβολίζουμε με  $\pi$  μια τοπολογική διάταξη των κορυφών του  $G[D_2]$ . Καθώς το  $G[D_2]$  είναι άκυκλο οι κορυφές του μπορούν πάντα να διαταχθούν τοπολογικά, ενώ επιπλέον αν το  $G[D_2]$  έχει  $h$  κορυφές, προφανώς υπάρχουν  $h!$  διαφορετικές τοπολογικές διατάξεις των κορυφών του (μία για κάθε μετάθεση των κορυφών του  $D_2$ ).

Στηριζόμενοι στην τοπολογική διάταξη  $\pi$  θα φτιάξουμε ένα στιγμιότυπο για το πρόβλημα του λοξού διαχωριστή ως εξής:

1. Έστω  $G'$  το γράφημα που προκύπτει από το  $G$  αν διαγραφούν όλες οι ακμές που ανήκουν στο  $G[D_2]$ .
2. Κάθε κορυφή  $v_i$  του  $G[D_2]$  αντικαθίσταται από ένα ζεύγος  $(s_i, t_i)$ . Κάθε εισερχόμενη ακμή σε μια  $v_i$  θα πηγαίνει στην αντίστοιχη  $t_i$  και κάθε εξερχόμενη ακμή από μια  $v_i$  θα εξέρχεται από την αντίστοιχη  $s_i$ . Έστω  $G_\pi$  το γράφημα που προκύπτει.

Με βάση το γράφημα  $G_\pi$ , παρατηρούμε ότι οι κορυφές  $s_i$  δεν έχουν εισερχόμενες ακμές ενώ οι  $t_i$  δεν έχουν εξερχόμενες ακμές οπότε πράγματι το  $G_\pi$  μαζί με τις οικογένειες  $(s_h), (t_h)$  είναι στιγμιότυπο για το πρόβλημα ΛΟΞΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΗΣ. Συνεπώς θα συμβολίζουμε ως  $(s_h), (t_h)$  τις οικογένειες συνόλων  $[s_1, s_2, \dots, s_h], [t_1, t_2, \dots, t_h]$  αντίστοιχα.

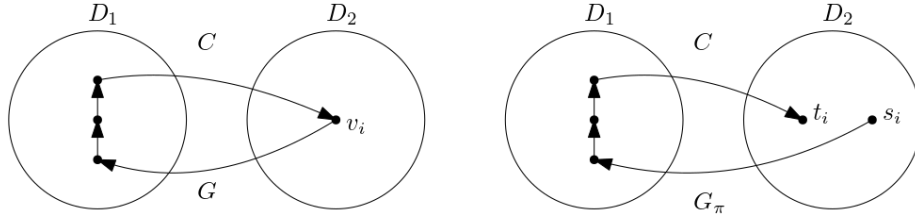


Σχήμα 5.4: Παράδειγμα μετατροπής ενός γραφήματος  $G'$  στο αντίστοιχο  $G_\pi$ .

**Θεώρημα 5.16.** Έστω  $(G, D_1, D_2, k)$  ένα στιγμιότυπο του προβλήματος ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΑΚΥΚΛΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ και έστω  $X$  ένα  $D_1$ -ΣΑΚ για το  $G$ . Τότε υπάρχει τοπολογική διάταξη  $\pi$  των κορυφών του  $G[D_2]$  για την οποία το στιγμιότυπο  $(G, (s_h), (t_h), k)$  μαζί με την  $\pi$  έχει τις εξής ιδιότητες: το  $X$  είναι λοξός διαχωριστής για τα  $(s_h), (t_h)$  και κάθε λοξός διαχωριστής για τα  $(s_h), (t_h)$  στο  $G_\pi$  είναι  $D_1$ -ΣΑΚ στο  $G$ .

*Απόδειξη.* Προφανώς το  $G - X$  είναι άκυκλο και άρα οι κορυφές του μπορούν να διαταχθούν τοπολογικά. Έστω  $\pi'$  η τοπολογική διάταξη των κορυφών του  $G - X$ . Προφανώς αν από την  $\pi'$  αφαιρεθούν όσες κορυφές ανήκουν στο  $D_1$  τότε θα έχουμε μια τοπολογική διάταξη  $\pi$  των κορυφών του  $D_2$ . Θα δειχθεί ότι η  $\pi$  μαζί με το στιγμιότυπο  $(G, (s_h), (t_h), k)$  ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος. Έστω ότι το  $X$  δεν είναι λοξός διαχωριστής για το  $G_\pi$ . Τότε θα υπάρχει μονοπάτι  $P$  στο  $G_\pi - X$  το οποίο ξεκινάει από μια κορυφή  $s_i$  και καταλήγει σε μια κορυφή  $t_j$  με  $i \geq j$ . Εξ ορισμού των  $(s_h), (t_h)$  για τις εισερχόμενες και τις εξερχόμενες ακμές τους προκύπτει ότι όλες οι εσωτερικές ακμές του  $P$  ανήκουν στο  $D_1$ . Συνεπώς το μονοπάτι  $P$  αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι  $P'$  στο  $G - X$  το οποίο ξεκινάει από μια κορυφή  $v_i$  και καταλήγει σε μια κορυφή  $v_j$  με  $i \geq j$  και όλες οι εσωτερικές κορυφές του  $P'$  περνάνε από το  $D_1$ . Αυτό δεν γίνεται, καθώς αν  $i = j$  έχουμε κύκλο ενώ αν  $i > j$  η  $\pi$  δεν θα είναι τοπολογική διάταξη, άτοπο. Άρα το  $X$  είναι λοξός διαχωριστής για το  $G_\pi$ . Τώρα μένει να δειχθεί ότι κάθε λοξός διαχωριστής  $X'$  στο  $G - \pi$  είναι και  $D_1$ -ΣΑΚ στο  $G$ . Αφού το  $X'$  αποτελείται μόνο από μη τερματικές κορυφές, ισχύει ότι  $X' \subseteq D_1$ . Έστω ότι το  $X'$  δεν είναι  $D_1$ -ΣΑΚ στο  $G - X'$ . Τότε υπάρχει κύκλος  $C$  στο  $G - X'$ , και αφού τα  $G[D_1], G[D_2]$  είναι άκυκλα, ο κύκλος θα έχει κορυφές και στο  $D_1$  και στο  $D_2$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις:

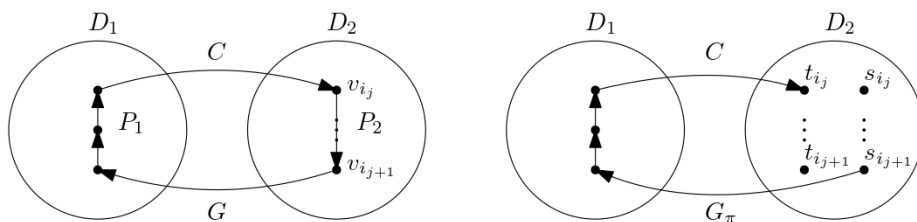
Αν ο  $C$  έχει μόνο μια κορυφή στο  $D_2$  όπως στο σχήμα 5.5, τότε στο  $G_\pi$  ο  $C$  θα ξεκινάει από μια κορυφή  $s_i$  και θα φτάνει σε μια  $t_i$  όπως φαίνεται στο σχήμα, άτοπο αφού το  $X'$  είναι λοξός διαχωριστής για τα  $(s_h), (t_h)$ .



Σχήμα 5.5: Παράδειγμα κύκλου με μία μόνο κορυφή στο  $D_2$ .

Αν ο  $C$  έχει παραπάνω από μία κορυφές στο  $D_2$  όπως στο σχήμα 5.6 τότε ο κύκλος θα περνάει από μια κορυφή  $v_{i_j}$  και θα πηγαίνει σε μια κορυφή  $v_{i_{j+1}}$  με  $i_j > i_{j+1}$ . Έστω  $P_1, P_2$  τα μονοπάτια του  $C$  που αποτελούνται από τις κορυφές που ανήκουν στο  $D_1$  και το  $D_2$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι για το ζεύγος κορυφών  $v_{i_j}, v_{i_{j+1}}$  του  $P_2$  μπορούμε να φτάσουμε από την  $v_{i_{j+1}}$  στην  $v_{i_j}$  διατρέχοντας το μονοπάτι  $P_1$ . Αντίστοιχα, για το γράφημα  $G_\pi$ , το παραπάνω μονοπάτι αντιστοιχεί σε μονοπάτι από την κορυφή  $s_{i_j}$  στην κορυφή  $t_{i_{j+1}}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αυτό όμως οδηγεί σε άτοπο γιατί  $i_j > i_{j+1}$  και  $X'$  είναι λοξός διαχωριστής για τα  $(s_h), (t_h)$ .  $\square$

Παρακάτω δίνεται ο αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΑΚΥΚΛΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται εξ ολοκλήρου στον αλ-



Σχήμα 5.6: Παράδειγμα κύκλου με παραπάνω από μία κορυφή στο  $D_2$ .

γόριθμο εύρεσης λοξού διαχωριστή, και από αυτόν προκύπτει η πολυπλοκότητά του. Συνεπώς, αν βελτιωθεί η πολυπλοκότητα του αλγόριθμου εύρεσης λοξού διαχωριστή, θα βελτιωθεί και η πολυπλοκότητα για το πρόβλημα της διαμέρισης σε άκυκλα κατευθυνόμενα γραφήματα.

---

**Algorithm 2**  $DBF(G, D_1, D_2, k)$

---

- 1: **Είσοδος:** Στιγμιότυπο  $(G, D_1, D_2, k)$ .
  - 2: **Έξοδος:** ΣΑΚ για το  $D_1$  μεγέθους το πολύ  $k$  ή αρνητική απάντηση.
  - 3: **for** κάθε τοπολογική διάταξη  $\pi$  **do**
  - 4:     Δημιούργησε στιγμιότυπο  $(G_\pi, (s_h), (t_h), k)$  από το  $(G, D_1, D_2, k)$  και την  $\pi$ .
  - 5:      $X = SMC(G_\pi, (s_h), (t_h), k)$ .
  - 6:     **if**  $X$  ΣΑΚ για το  $D_1$  και  $|X| \leq k$  **then** επέστρεψε  $X$ , τελείωσε την εκτέλεση του αλγορίθμου.
  - 7: Επέστρεψε όχι.
- 

**Θεώρημα 5.17.** Ο αλγόριθμος 2 λύνει ορθά το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΑΚΥΚΛΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ σε χρόνο  $O(4^k kn^3 h!)$ , όπου  $h$  ο αριθμός κορυφών του συνόλου  $D_2$ .

*Απόδειξη.* Το πλήθος των τοπολογικών διατάξεων των κορυφών του  $D_2$  για το βήμα 3 είναι προφανώς  $h!$ . Το βήμα 5 τρέχει τον αλγόριθμο 1 άρα έχει πολυπλοκότητα  $O(4^k kn^3)$ . Συνεπώς ο αλγόριθμος 2 έχει πολυπλοκότητα  $O(4^k kn^3 h!)$ . Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος είτε επιστρέφει ένα ΣΑΚ  $X$  μεγέθους το πολύ  $k$ , εφόσον υπάρχει, είτε απαντάει όχι. Συνεπώς ο αλγόριθμος είναι ορθός.  $\square$

## 5.4 Κατευθυνόμενο σύνολο ανάδρασης κορυφών

Το πρόβλημα που θα μελετηθεί σε αυτήν την παράγραφο, ώστε να δοθεί ο τελικός αλγόριθμος για το κατευθυνόμενο σύνολο ανάδρασης κορυφών, λέγεται αναγωγή στο κατευθυνόμενο σύνολο ανάδρασης κορυφών και ορίζεται ως εξής:

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ

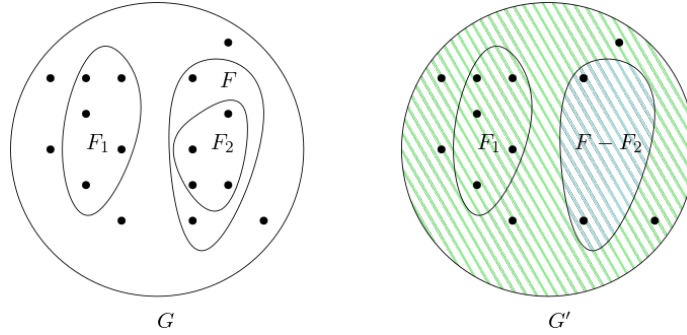
- **Είσοδος:** Κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ , ΣΑΚ  $F$  μεγέθους  $k + 1$ , και ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει ΣΑΚ μεγέθους το πολύ  $k$  για το  $G$ ;

**Λήμμα 5.18.** Το πρόβλημα ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ λύνεται ορθά σε χρόνο  $O(n^3 4^k k^3 k!)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $G = (V, E)$  η είσοδος για το πρόβλημα και έστω  $F$  ένα ΣΑΚ μεγέθους  $k + 1$ . Παρατηρούμε ότι κάθε ΣΑΚ  $F'$  του  $G$  με μέγεθος  $k$  μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα  $F_1, F_2$ , διακεκριμένα μεταξύ τους, για τα οποία ισχύει ότι  $|F_2| = j, F_2 \subseteq F$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7. Παρατηρούμε ότι αφού τα  $F, F_2$  είναι ΣΑΚ και  $F_2 \subseteq F$  το γράφημα  $G[F - F_2]$  είναι άκυκλο, ενώ το  $F_1$  θα έχει μέγεθος το πολύ  $k - j$ . Συνεπώς, αυτό που μένει να γίνει είναι να επιλεγούν όλα τα υποσύνολα μεγέθους  $j$  του  $F$  για τα οποία  $G[F - F_2]$  είναι άκυκλο και για αυτά να βρεθεί ένα σύνολο μεγέθους το πολύ  $k - j$  στο  $G - F$  για το οποίο  $F_1 \cup F_2$  είναι ΣΑΚ στο  $G$ . Συνεπώς, αυτό που ψάχνουμε είναι ένα σύνολο  $F_1 \subseteq V - F$  μεγέθους το πολύ  $k - j$  το οποίο είναι ΣΑΚ για το  $V - F$ . Προφανώς το  $G - F$  είναι άκυκλο αφού  $F$  είναι ΣΑΚ στο  $G$ , ενώ επίσης το  $G[F - F_2]$  είναι επίσης άκυκλο. Συνεπώς έχουμε μια διαμέριση  $(V - F, F - F_2)$  των κορυφών του  $G' = G - F_2$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7. Συνεπώς το ζητούμενο  $F_1$  μπορεί να κατασκευαστεί από τον αλγόριθμο 2 με είσοδο  $(G', V - F, F - F_2, k - j)$ . Ισχύει ότι  $|F - F_2| = k + 1 - j$ , οπότε υπάρχουν  $(k + 1 - j)!$  τοπολογικές διατάξεις των κορυφών του  $G[F - F_2]$ , ενώ η παράμετρος είναι  $k - j$ , συνεπώς ο αλγόριθμος 2 τρέχει σε χρόνο  $O(4^{k-j} (k - j)n^3 (k + 1 - j)!)$ .

Επιπλέον, για το σύνολο  $F_2$  έχουμε  $\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j}$  επιλογές, και άρα ο συνολικός χρόνος

του αλγορίθμου είναι  $\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} O(4^{k-j} (k - j)n^3 (k + 1 - j)!) = O(n^3 4^k k^3 k!)$ .  $\square$



Σχήμα 5.7: Διαμέριση συνόλου  $F'$  αριστερά και στιγμιότυπο για τον αλγόριθμο 2 δεξιά.

**Θεώρημα 5.19.** Το πρόβλημα ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ λύνεται σε χρόνο  $O(n^4 4^k k^3 k!)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $(G, k)$  το στιγμιότυπο προς επίλυση. Έστω  $V_0$  ένα σύνολο  $k + 1$  κορυφών του  $G$  και έστω  $F_0$  ένα ΣΑΚ  $k$  κορυφών για το  $G_0 = G[V_0]$ . Προφανώς οποιοδήποτε  $F_0$  είναι ΣΑΚ του  $G_0$ . Έστω  $V - V_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-k-1}\}$ ,  $V_i = V_0 \cup \{v_1, \dots, v_k\}$  και  $G_i = G[V_i]$ . Έστω ότι για  $0 \leq i < n - k - 1$  έχουμε φτιάξει ένα ΣΑΚ  $F_i$  για το  $G_i$  μεγέθους ακριβώς  $k$  (αν κάποιο  $F_i$  προκύψει μικρότερο τότε προσθέτουμε κορυφές ώστε να έχει ακριβώς  $k$ ). Έστω τώρα  $F'_{i+1} = F_i + v_{i+1}$ . Παρατηρούμε ότι  $G_{i+1} - F'_{i+1} = G_i + v_{i+1} - (F_i + v_{i+1}) = G_i - F_i$  και  $F_i$  είναι ΣΑΚ του  $G_i$ , άρα και το  $F'_{i+1}$  είναι ΣΑΚ του  $G_{i+1}$ , συνεπώς το στιγμιότυπο  $(G_{i+1}, F'_{i+1}, k)$

είναι στιγμιότυπο για το πρόβλημα της αναγωγής. Τελικά, καλείται ο αλγόριθμος 2 με είσοδο  $(G_{i+1}, F'_{i+1}, k)$  και είτε θα λάβουμε μια λύση είτε θα λάβουμε αρνητική απάντηση. Για την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου, έχουμε  $O(n)$  κλήσεις του αλγορίθμου 2 οπότε η τελική πολυπλοκότητα είναι  $O(n^4 4^k k^3 k!)$ .  $\square$

**Παρατήρηση 5.20.** Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου 2 μπορεί να μειωθεί αν γίνει χρήση προσεγγιστικών αλγορίθμων. Πιο συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι για κατευθυνόμενα γραφήματα υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος ο οποίος δοθέντος ενός γραφήματος  $G$ , βρίσκει ένα ΣΑΚ μεγέθους  $O(k \log k \log \log k)$  για το  $G$  σε χρόνο  $O(n^{4.376} \log^2 n)$ . Με βάση αυτά, μπορούμε να γίνει χρήση του αλγορίθμου που περιγράφεται στο θεώρημα 5.19 θέτοντας  $G_0 = G - (F - F_0)$  (όπου  $F$  το ΣΑΚ που βρίσκει ο προσεγγιστικός αλγόριθμος) και συνεχίζοντας ακριβώς όπως στο 5.19. Τελικά, ο αλγόριθμος θα έχει πολυπλοκότητα  $O(n^3 4^k k^4 k! \log k \log \log k + n^{4.376} \log^2 n)$ . Δεδομένου ότι ο προσεγγιστικός αλγόριθμος κάνει χρήση πολλαπλασιασμού πινάκων, η τελική πολυπλοκότητα μπορεί να μειωθεί περαιτέρω αν στο μέλλον βρεθεί γρηγορότερος αλγόριθμος για τον πολλαπλασιασμό πινάκων.





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ Q-ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ

### 6.1 Ορισμός

Στο προηγούμενο κομμάτι της εργασίας μελετήθηκε το ΣΑΚ για μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκταθούμε περισσότερο, καθώς θα μελετηθούν τεχνικές που αφορούν ΣΑΚ για κατευθυνόμενα γραφήματα. Ο ορισμός του προβλήματος είναι ο εξής:

ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ ΣΕ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

- **Είσοδος:** Ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$  και ένας ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει σύνολο  $X \subseteq V$ , με  $|X| \leq k$  για το οποίο όταν όλες οι κορυφές του  $X$  και οι προσπίπτουσες ακμές τους διαγραφούν από το  $G$ , το γράφημα που απομένει να είναι άκυκλο;

Το πρόβλημα αυτό έχει επίσης θεωρηθεί πολύ σημαντικό για την Παραμετρική Πολυπλοκότητα και το αν επιδέχεται FPT αλγόριθμο παρέμεινε ανοιχτό για πάνω από μία δεκαετία. Ο πρώτος FPT αλγόριθμος ([7]) είχε πολυπλοκότητα  $O(4^k k! k^4 n^4)$ , ωστόσο ο αλγόριθμος που θα παρουσιαστεί είναι αυτός της εργασίας ([23]) στην οποία το φράγμα βελτιώθηκε σε  $O(k! 4^k k^5 (n + m))$ .

### 6.2 Σύνολο διαγραφής και $\epsilon$ -δομές

Αντί για αυτούσιο το κατευθυνόμενο ΣΑΚ, στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθεί ένα γενικότερο πρόβλημα, το Q-ΔΙΑΓΡΑΦΗ( $\epsilon$ ). Το πρόβλημα αυτό είναι πιο γενικό αλλά εφαρμόζεται στο κατευθυνόμενο ΣΑΚ.

**Ορισμός 6.1.** Μια  $\epsilon$ -δομή είναι μια πλειάδα (tuple) όπου το πρώτο της όρισμα είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $D$  και τα υπόλοιπα είναι σχέσεις  $(R_1, \dots, R_l)$  με το πολύ  $\epsilon$  μεταβλητές (arity), για  $\epsilon \in \mathbb{N}$ . Δύο  $\epsilon$ -δομές, έστω  $Q_1, Q_2$  με  $Q_1 = (D_1, R_1, \dots, R_l)$  και  $Q_2 = (D_2, R'_1, \dots, R'_l)$  θα λέμε ότι είναι του ίδιου τύπου αν για κάθε  $i \in [l]$  οι  $R_i$  και  $R'_i$  έχουν τον ίδιο αριθμό μεταβλητών. Το μέγεθος μιας  $\epsilon$ -δομής  $Q$  συμβολίζεται

ως  $|Q|$  και ισούται με  $|Q| = m + n + \epsilon \sum_{i=1}^l |R_i|$ , όπου  $m, n$  ο αριθμός ακμών και κορυφών του γραφήματος  $D$ , αντίστοιχα.

Παρακάτω δίνονται κάποιοι απαραίτητοι ορισμοί, ώστε να μπορεί να δοθεί ο αυστηρός ορισμός του προβλήματος  $\mathcal{Q}$ -ΔΙΑΓΡΑΦΗ( $\epsilon$ ).

**Ορισμός 6.2.** Έστω  $\mathcal{Q}$  μια οικογένεια  $\epsilon$ -δομών και έστω σύνολο  $X \subseteq V(D)$ . Ορίζουμε  $D_X = D[X]$ . Επίσης ορίζουμε την επαγόμενη δομή  $Q[X] = (D[X], R_{1|X}, \dots, R_{l|X})$  όπου με  $R_{i|X}$  συμβολίζουμε την  $R_i$  όταν αυτή είναι περιορισμένη στο  $V(D_X)$ . Επιπλέον ορίζουμε ως  $Q - X$  την υποδομή  $Q[V(D) \setminus X]$ .

**Ορισμός 6.3.** Έστω  $\mathcal{Q}$  μια οικογένεια  $\epsilon$ -δομών. Θα λέμε ότι η  $\mathcal{Q}$  είναι κληρονομική αν για κάθε  $Q \in \mathcal{Q}$ , κάθε επαγόμενη υποδομή της  $Q$  ανήκει επίσης στην οικογένεια  $\mathcal{Q}$ . Θα λέμε ότι μια οικογένεια  $\mathcal{Q}$  είναι αναγνωρίσιμη σε γραμμικό χρόνο αν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος με είσοδο μια  $\epsilon$ -δομή  $Q$  τρέχει σε γραμμικό χρόνο και αποφασίζει αν  $Q \in \mathcal{Q}$  ή όχι. Επίσης θα λέμε ότι η  $\mathcal{Q}$  είναι άκαμπτη όταν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Για κάθε  $\epsilon$ -δομή  $Q$ , αν το γράφημα  $D$  δεν έχει τόξα τότε  $Q \in \mathcal{Q}$ .
2. Ισχύει ότι  $Q \in \mathcal{Q}$  αν και μόνο αν για κάθε ισχυρά συνεκτική συνιστώσα  $C$  του γραφήματος  $D$  η επαγόμενη υποδομή  $Q[C] \in \mathcal{Q}$ .

Στο τέλος του κεφαλαίου, θα δειχθεί πως οι  $\epsilon$ -δομές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να αντιστοιχιστούν με το κατευθυνόμενο σύνολο ανάδρασης κορυφών. Τα δύο προβλήματα που θα μας απασχολήσουν, είναι τα εξής:

$\mathcal{Q}$ -ΔΙΑΓΡΑΦΗ( $\epsilon$ )

- **Είσοδος:** Μία  $\epsilon$ -δομή και ένας ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει σύνολο  $X \subseteq V$ , με  $|X| \leq k$  έτσι ώστε  $Q - X \in \mathcal{Q}$ ;

ΣΥΜΠΙΕΣΜΕΝΗ  $\mathcal{Q}$ -ΔΙΑΓΡΑΦΗ( $\epsilon$ )

- **Είσοδος:** Μία  $\epsilon$ -δομή, σύνολο κορυφών  $W$  τέτοιο ώστε  $Q - W \in \mathcal{Q}$  και ένας ακέραιος  $k$ .
- **Παράμετρος:**  $k + |W|$ .
- **Ερώτηση:** Υπάρχει σύνολο  $X \subseteq V$ , με  $|X| \leq k$  έτσι ώστε  $Q - X \in \mathcal{Q}$ ;

Το δεύτερο πρόβλημα χρησιμοποιεί στην είσοδο μια προσεγγιστική λύση (την  $W$ ) προκειμένου να λύσει το πρόβλημα. Το σύνολο  $X$  ονομάζεται σύνολο διαγραφής της  $Q$  για την οικογένεια  $\mathcal{Q}$ .

## 6.3 Ο FPT αλγόριθμος

Αρχικά, δίνεται χωρίς απόδειξη ένα βασικό λήμμα για τον FPT αλγόριθμο του παρόντος κεφαλαίου.

**Λήμμα 6.4.** Έστω  $\epsilon \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{Q}$  αναγνωρίσιμη σε γραμμικό χρόνο, κληρονομική και άκαμπτη οικογένεια  $\epsilon$ -δομών. Υπάρχει αλγόριθμος που με είσοδο  $Q \notin \mathcal{Q}$ , με το γράφημα  $D$  να είναι ισχυρά συνεκτικό, κορυφές  $u, v$  και  $p \in \mathbb{N}$ , τρέχει σε χρόνο  $O(p^2|Q|)$  και

αποφασίζει για τη μη ύπαρξη  $u - v$  διαχωριστή στο  $D$  μεγέθους το πολύ  $p$  ή επιστρέφει ένα σύνολο  $S$  με το πολύ  $2p + 2$  κορυφές για το οποίο ισχύει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:

1.  $Q - S \in \mathcal{Q}$ .
2. Το γράφημα  $D - S$  έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες, καθεμία από τις οποίες ενάγουν μια υποδομή της  $Q$  η οποία δεν ανήκει στην  $\mathcal{Q}$ .
3. Οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του  $D - S$  μπορούν να διαμεριστούν σε 2 σύνολα που ενάγουν υποδομές  $Q_1, Q_2$  της  $Q$  για τις οποίες ισχύει ότι  $Q_1 \notin \mathcal{Q}$  και  $|Q_2| \leq \frac{|Q|}{2}$ .
4. Αν η  $Q$  έχει σύνολο διαγραφής μεγέθους το πολύ  $p$  στην  $\mathcal{Q}$  τότε το  $Q - S$  έχει σύνολο διαγραφής μεγέθους το πολύ  $p - 1$  στην  $\mathcal{Q}$ .

**Θεώρημα 6.5.** Με δεδομένα τα εξής:

1. Ένα  $\epsilon \in \mathbb{N}$ , μία οικογένεια  $\epsilon$ -δομών  $\mathcal{Q}$  αναγνωρίσιμη σε γραμμικό χρόνο, κληρονομική και άκαμπτη.
2. Ένα  $\gamma \in \mathbb{N}$ ,  $d \in (1, \infty)$  και μία συνάρτηση  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  τέτοια ώστε  $f(t) \geq t$  και  $f(t - 1) \leq \frac{f(t)}{d}$  για κάθε  $t \in \mathbb{N}$ .
3. Έναν αλγόριθμο  $A$  για το πρόβλημα ΣΥΜΠΙΕΣΜΕΝΗ  $Q$ -ΔΙΑΓΡΑΦΗ( $\epsilon$ ) ο οποίος τρέχει σε χρόνο  $O(f(k)k|Q|^\gamma)$ . Ο αλγόριθμος  $A$ , είναι ο αλγόριθμος του θεωρήματος 5.19 από το προηγούμενο κεφάλαιο, στην περίπτωση που κάνει χρήση προσεγγιστικής λύσης.
4. Έναν αλγόριθμο  $B$  ο οποίος με είσοδο  $Q \notin \mathcal{Q}$  τρέχει σε χρόνο  $O(|Q|)$  και επιστρέφει δύο κορυφές  $u, v$  για τις οποίες κάθε σύνολο διαγραφής του  $Q$  διακεκριμένο από τις  $u, v$  είναι διαχωριστής του  $u - v$  στο  $D$ .

Υπάρχει αλγόριθμος  $\Gamma$  που με είσοδο  $Q \in \mathcal{Q}$  και τους αλγόριθμους  $A$  και  $B$  τρέχει σε χρόνο  $O(f(k)k|Q|^\gamma)$  και είτε υπολογίζει ένα  $X$  μεγέθους το πολύ  $k$  τέτοιο ώστε  $Q - X \in \mathcal{Q}$  είτε απαντάει αρνητικά για την ύπαρξη ενός τέτοιου συνόλου.

*Απόδειξη.* Αρχικά το γράφημα  $D$  διασπάται σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες. Οι συνιστώσες που θα προκύψουν διατηρούνται μόνο αν ενάγουν υποδομές που δεν υπήρχαν από πριν στην  $\mathcal{Q}$ . Υποθέτουμε ότι το  $D$  δεν έχει τετριμμένες συνεκτικές συνιστώσες και είναι μη κενό ενώ επιπλέον υποθέτουμε ότι  $Q \notin \mathcal{Q}$ . Συνεπώς  $|Q| \geq 3$  και  $m \geq n \geq 3$ . Επίσης υποθέτουμε ότι  $k \geq 1$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις για την συνεκτικότητα του  $D$ :

Αν το  $D$  δεν είναι ισχυρά συνεκτικό τότε επιλέγεται τυχαία μια συνιστώσα του και ορίζεται ως  $C$  το σύνολο των κορυφών αυτής της συνιστώσας. Ο αλγόριθμος  $\Gamma$  καλείται για τα στιγμιότυπα  $(Q[C], k - 1)$ ,  $(Q - C, k - 1)$ . Αν για οποιοδήποτε από τα δύο έχουμε αρνητικό στιγμιότυπο, τότε η απάντηση είναι όχι και για το αρχικό πρόβλημα καθώς η λύση πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή από κάθε σύνολο διαγραφής του  $Q$  για την  $\mathcal{Q}$ . Αν όχι, τότε ο αλγόριθμος  $\Gamma$  επιστρέφει δύο σύνολα  $X_1, X_2$  μεγέθους το πολύ  $k - 1$  τα οποία είναι σύνολα διαγραφής για το  $Q[C]$  και το  $Q - C$  αντίστοιχα. Κατόπιν, τρέχει ο αλγόριθμος  $A$  με είσοδο  $(Q, k, W = X_1 \cup X_2)$ .

Αν το  $D$  είναι ισχυρά συνεκτικό τότε ο αλγόριθμος  $\Gamma$  τρέχει τον αλγόριθμο  $B$  στο  $Q$  ώστε να υπολογίσει ένα ζευγάρι κορυφών  $u, v$  για το οποίο κάθε σύνολο διαγραφής του  $Q$  για την  $Q$  το οποίο δεν περιέχει τις  $u, v$  να χτυπάει όλα τα  $u - v$  μονοπάτια στο  $D$ . Έπειτα τρέχει τον αλγόριθμο του παραπάνω λήμματος με είσοδο  $(Q, u, v, p = k)$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Είτε ο αλγόριθμος του λήμματος επιστρέφει ως λύση ένα σύνολο  $S$  μεγέθους το πολύ  $2k + 2 \leq 3k$  το οποίο ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του παραπάνω λήμματος, είτε αποφασίζει ότι δεν υπάρχει διαχωριστής των  $u, v$  οπότε το  $S$  θα πρέπει να περιέχει τις κορυφές  $u, v$ . Και στις δύο περιπτώσεις ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του παραπάνω λήμματος. Επίσης επειδή είναι τετριμμένος ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας των προϋποθέσεων του παραπάνω λήμματος, αν το  $S$  δεν ικανοποιεί τις πρώτες τρεις τότε αναγκαστικά θα ικανοποιεί την τέταρτη. Επιπλέον ελέγχουμε τις προϋποθέσεις μία προς μία από την πρώτη προς την τελευταία.

- Προϋπ. 1: **Ισχύει ότι  $Q - S \in \mathcal{Q}$ .** Ο αλγόριθμος  $\Gamma$  τρέχει τον  $A$  με είσοδο  $(Q, k, W = S)$  ώστε να λάβει αρνητική απάντηση ή ένα σύνολο διαγραφής στην  $Q$  για την  $Q$ .
- Προϋπ. 2: **Το γράφημα  $D - S$  έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες, καθεμία από τις οποίες ενάγουν μια υποδομή της  $Q$  η οποία δεν ανήκει στην  $Q$ .** Έστω  $C$  μια τέτοια συνιστώσα. Έστω  $C$  μια τέτοια συνιστώσα του  $D - S$ . Γνωρίζουμε ότι κάθε σύνολο διαγραφής θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή από το σύνολο  $C$  και από το  $D - (S \cup C)$ . Συνεπώς ο αλγόριθμος  $\Gamma$  τρέχει για τα στιγμιότυπα  $(Q[C], k - 1)$ ,  $(Q - (S \cup C), k - 1)$  και είτε απαντάει αρνητικά είτε λαμβάνει ως απάντηση δύο σύνολα  $X_1, X_2$  που είναι λύσεις για τα  $Q[C], Q - (S \cup C)$  αντίστοιχα και κατόπιν τρέχει τον αλγόριθμο  $A$  με είσοδο  $(Q, k, W = X_1 \cup X_2 \cup S)$ .
- Προϋπ. 3: **Οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του  $D - S$  μπορούν να διαμεριστούν σε 2 σύνολα που ενάγουν υποδομές  $Q_1, Q_2$  της  $Q$  για τις οποίες ισχύει ότι  $Q_1 \notin \mathcal{Q}$  και  $|Q_2| \leq \frac{|Q|}{2}$ .** Αφού είμαστε στην προϋπόθεση 3, αυτό σημαίνει ότι οι προηγούμενες δύο δεν ισχύουν, δηλαδή το  $S$  δεν είναι σύνολο διαγραφής της  $Q$  για την  $Q$  και το  $D - S$  έχει το πολύ μία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα. Άρα ακριβώς μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα  $C$  ενάγει μια δομή  $Q \notin \mathcal{Q}$  και έχει μέγεθος το πολύ  $\frac{|Q|}{2}$ . Κατόπιν τρέχει ο αλγόριθμος  $\Gamma$  για το στιγμιότυπο  $(Q[C], k)$ . Αν απαντήσει αρνητικά τότε το  $Q$  δεν έχει σύνολο διαγραφής, αλλιώς επιστρέφει ένα σύνολο διαγραφής και τρέχει τον αλγόριθμο  $A$  με είσοδο  $(Q, k, W = S \cup X)$ .
- Προϋπ. 4: **Αν η  $Q$  έχει σύνολο διαγραφής μεγέθους το πολύ  $p$  στην  $Q$  τότε το  $Q - S$  έχει σύνολο διαγραφής μεγέθους το πολύ  $p - 1$  στην  $Q$ .** Ο αλγόριθμος  $\Gamma$  τρέχει για το στιγμιότυπο  $(Q - S, k - 1)$  και ή επιστρέφει μία λύση  $X$  ή δίνει αρνητική απάντηση. Αν επιστρέφει λύση, τότε τρέχουμε τον αλγόριθμο  $A$  με είσοδο  $(Q, k, W = S \cup X)$ , όπου  $|W| \leq 4k$ .

Η ορθότητα του αλγορίθμου προκύπτει από το γεγονός ότι σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου είτε το  $k$  είτε το μέγεθος του  $Q$  μειώνεται, οπότε επαγωγικά προκύπτει ότι ο αλγόριθμος θα τερματίσει.  $\square$

Παρακάτω θα γίνει ανάλυση του χρόνου εκτέλεσης του παραπάνω αλγορίθμου. Έστω σταθερές  $a, b$  για τις οποίες ισχύουν τα εξής: Η σταθερά  $a$  αφορά τον αλγόριθμο  $A$  ο οποίος τρέχει σε χρόνο  $af(k)|Q|^\gamma|W|$  ενώ η σταθερά  $B$  αφορά το υπόλοιπο κομμάτι του αλγορίθμου ο οποίος τρέχει σε χρόνο  $bk^2|Q|$ . Επιπλέον στηριζόμε-

νοι στις σταθερές  $a, b$ , έχουμε και μια σταθερά  $\mu$  για την οποία πρέπει να ισχύει ότι  $\mu \geq \max \left\{ 20a, 20b, \frac{10ad}{d-1}, \frac{2bd}{d-1} \right\}$ .

**Πρόταση 6.6.** Ισχύει ότι  $T(|Q|, k) \leq \mu f(k)k|Q|^\gamma$ .

*Απόδειξη.* Θα γίνει επαγωγή στην ποσότητα  $|Q|+k$ . Για την βάση της επαγωγής έχουμε ότι αν  $k = 0$  η κάθε ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του  $D$  ενάγει μία υποδομή  $Q$  που προϋπήρχε στην  $Q$  τότε ο χρόνος εκτέλεσης εξαρτάται από το  $\mu$ . Σε διαφορετική περίπτωση, έστω  $Q_1 = (Q[C], k-1)$  και  $Q_2 = (Q-C, k-1)$ . Προφανώς ισχύει ότι  $|Q_1| + |Q_2| \leq |Q|$  και έστω ότι ο αλγόριθμος  $\Gamma$  τρέχει για τα στιγμιότυπα  $Q_1, Q_2$ . Τότε, ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης θα είναι

$$\begin{aligned} & bk^2|Q| + T(|Q_1|, k-1) + T(|Q_2|, k-1) + af(k)|Q|^\gamma 2k \\ & \leq \frac{d-1}{2d} \mu f(k)k|Q|^\gamma + \mu f(k-1)(k-1)|Q|^\gamma + \frac{d-1}{2d} \mu f(k)k|Q|^\gamma \\ & \leq \frac{d-1}{2d} \mu f(k)k|Q|^\gamma + \mu \frac{f(k)}{d} k|Q|^\gamma + \frac{d-1}{2d} \mu f(k)k|Q|^\gamma \\ & \leq \mu f(k)k|Q|^\gamma \left( \frac{d-1}{2d} + \frac{d-1}{2d} + \frac{1}{d} \right) \\ & \leq \mu f(k)k|Q|^\gamma. \end{aligned}$$

Προϋπ. 1: Για  $a = b = \frac{\mu}{20}$  έχουμε ότι

$$bk^2|Q| + af(k)|Q|^\gamma 3k \leq \mu f(k)k|Q|^\gamma.$$

Προϋπ. 2: Για  $a = \frac{d-1}{2d}$  και  $b = \frac{d-1}{10d}$  έχουμε ότι

$$bk^2|Q| + T(|Q_1|, k-1) + T(|Q_2|, k-1) + af(k)|Q|^\gamma 5k \leq \mu f(k)k|Q|^\gamma.$$

Προϋπ. 3: Για  $a = b = \frac{\mu}{20}$  έχουμε ότι

$$bk^2|Q| + \left( \frac{|Q|}{2}, k \right) + af(k)|Q|^\gamma 4k \leq \mu f(k)k|Q|^\gamma.$$

Προϋπ. 4: Για  $a = \frac{d-1}{2d}$  και  $b = \frac{d-1}{8d}$  έχουμε ότι

$$bk^2|Q| + (|Q|, k) + af(k)|Q|^\gamma 4k \leq \mu f(k)k|Q|^\gamma.$$

Συνεπώς ισχύει πράγματι ότι  $T(|Q|, k) \leq \mu f(k)k|Q|^\gamma$  σε όλες τις περιπτώσεις.  $\square$

Τελικά, από τα παραπάνω, θέτοντας  $f(k) = 4^k k! k^4$  (από τον αλγόριθμο 5.19) ο παραπάνω αλγόριθμος τρέχει σε χρόνο  $O(f(k)(n+m)|W|) = O(k! 4^k k^5 (n+m))$ .

## 6.4 Κατευθυνόμενο Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών

Έχοντας αναφέρει όλα τα παραπάνω, συνοψίζεται η εφαρμογή στην επίλυση του κατευθυνόμενου συνόλου ανάδρασης κορυφών.

Αρχικά, στον αλγόριθμο A αντιστοιχίζεται ο αλγόριθμος του θεωρήματος 5.19 από το προηγούμενο κεφάλαιο, στην περίπτωση που κάνει χρήση προσεγγιστικής λύσης. Ο αλγόριθμος B απλοποιείται ως εξής: Θέλουμε, δεδομένου ενός κατευθυνόμενου κύκλου να διαλέξει μια οποιαδήποτε ακμή του. Προφανώς, η αφαίρεση μιας ακμής από έναν κατευθυνόμενο κύκλο είναι και διαχωριστής των άκρων της ακμής αυτής. Όσον αφορά τον κορμό του προβλήματος, θέτουμε  $\epsilon = 1$  και το προς επίλυση πρόβλημα είναι το σύνολο ανάδρασης κορυφών, δηλαδή  $\mathcal{Q}$ -ΔΙΑΓΡΑΦΗ(1)  $\equiv$  ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ. Η οικογένεια  $\mathcal{Q}$  αντιστοιχεί στην κλάση όλων των άκυκλων κατευθυνόμενων γραφημάτων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν αφενός πυρήνες και αφετέρου τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή FPT αλγορίθμων για το πρόβλημα ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΚΟΡΥΦΩΝ. Παρότι τα προβλήματα που μελετήθηκαν ήταν ίδια μεταξύ τους με μόνη διαφορά την ύπαρξη ή μη κατευθύνσεων στις ακμές των γραφημάτων, οι τρόποι προσέγγισης τους διαφέρουν κατά πολύ.

Όσον αφορά τα μη κατευθυνόμενα γραφήματα, αρχικά μελετήθηκε η μέθοδος για την εύρεση πυρήνα τετραγωνικού μεγέθους. Η μέθοδος για την εύρεση αυτού του πυρήνα ήταν η απλοποίηση όσων κορυφών έχουν μεγάλο βαθμό μέσω λουλουδιών και συνόλων αφής. Έπειτα, μελετήθηκαν δύο αλγόριθμοι, ο ένας εκ των οποίων είχε αρκετές τεχνικές λεπτομέρειες και έγινε χρήση προγραμμάτων για την εύρεση κατάλληλων τιμών στις διάφορες μεταβλητές του προβλήματος ώστε να βελτιωθεί το μέχρι τότε καλύτερο φράγμα πολυπλοκότητας σε  $O^*(3.460^k)$ .

Όσον αφορά τα κατευθυνόμενα γραφήματα, μελετήθηκε ο πυρήνας μιας ειδικής περίπτωσης, αυτής που σαν παράμετρο στο πρόβλημα λαμβάνουμε στο ΣΑΚ του αντίστοιχου μη κατευθυνόμενου γραφήματος. Για το αλγοριθμικό σκέλος, γίνεται χρήση εννοιών από τη θεωρία γραφημάτων ή και πιο αφηρημένων εννοιών προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα, χωρίς όμως οι αποδείξεις να γίνονται με τη βοήθεια υπολογιστή. Η πολυπλοκότητα του πιο γρήγορου αλγόριθμου είναι  $O(k!4^k k^5(n+m))$ .

Ανοιχτό παραμένει το πρόβλημα για το αν υπάρχει πυρήνας πολυωνυμικού μεγέθους για την γενική περίπτωση των κατευθυνόμενων γραφημάτων. Ανοιχτό παραμένει και το πρόβλημα για το αν γίνεται οι FPT αλγόριθμοι για το ΣΑΚ σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα να χρησιμοποιηθούν (με κατάλληλες προσαρμογές) και για την εύρεση ΣΑΚ σε κατευθυνόμενα γραφήματα.



---

- [1] Akanksha Agrawal, Saket Saurabh, Roohani Sharma, Meirav Zehavi. 2016. **Kernels for Deletion to Classes of Acyclic Digraphs**. <http://dx.doi.org/10.4230/LIPIcs.ISAAC.2016.6>
- [2] Vineet Bafna, Piotr Berman, Toshihiro Fujito. 1999. **A 2-Approximation Algorithm for the Undirected Feedback Vertex Set Problem**. *SIAM J. Discrete Math.* 12, 289-297. <https://doi.org/10.1137/S0895480196305124>
- [3] Benjamin Bergougnoux, Eduard Eiben, Robert Ganian, Sebastian Ordyniak, M. S. Ramanujan. 2020. **Towards a Polynomial Kernel for Directed Feedback Vertex Set**. <https://doi.org/10.1007/s00453-020-00777-5>
- [4] Hans L. Bodlaender. 2007. **A Cubic Kernel for Feedback Vertex Set**. In: Thomas W., Weil P. (eds) *STACS 2007*. *STACS 2007. Lecture Notes in Computer Science*, vol 4393. Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-70918-3\\_28](https://doi.org/10.1007/978-3-540-70918-3_28)
- [5] Yixin Cao, Jianer Chen, Yang Liu. 2010. **On feedback vertex set new measure and new structures**. <https://arxiv.org/abs/1004.1672>
- [6] Jianer Chen, Fedor V. Fomin, Yang Liu, Songjian Lua, Yngve Villanger. 2008. **Improved algorithms for feedback vertex set problems**. <https://doi.org/10.1016/j.jcss.2008.05.002>
- [7] Jianer Chen, Yang Liu, Songjian Lu, Barry O'sullivan, Igor Razgon. 2008. **A fixed-parameter algorithm for the directed feedback vertex set problem**. *J. ACM* 55, 5, Article 21 (October 2008), 19 pages. <https://doi.org/10.1145/1411509.1411511>
- [8] Stephen A. Cook. 1971. **The Complexity of Theorem-Proving Procedures**.
- [9] Marek Cygan, Fedor V. Fomin, Łukasz Kowalik, Daniel Lokshantov, Dániel Marx, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, and Saket Saurabh. 2015. **Parameterized algorithms**. Springer.
- [10] Marek Cygan, Jesper Nederlof, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, Johan van Rooij, Jakub Onufry Wojtaszczyk. 2011. **Solving connectivity problems**

- parameterized by treewidth in single exponential time.** <https://doi.org/10.1109/FOCS.2011.23>
- [11] Marek Cygan, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, Jakub Onufry Wojtaszczyk. 2018. **Subset feedback vertex set is fixed-parameter tractable.** [https://doi.org/10.1007/978-3-642-22006-7\\_38](https://doi.org/10.1007/978-3-642-22006-7_38)
- [12] Michael Dom, Jiong Guo, Falk Hüffner, Rolf Niedermeier, Anke Truß. 2006. **Fixed-Parameter Tractability Results for Feedback Set Problems in Tournaments.** [https://doi.org/10.1007/11758471\\_31](https://doi.org/10.1007/11758471_31)
- [13] Rod G. Downey, Michael R. Fellows. 1995. **Fixed-parameter tractability and completeness II: On completeness for W[1]**, Theoretical Computer Science, Volume 141, Issues 1–2, 1995, Pages 109-131, [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(94\)00097-3](https://doi.org/10.1016/0304-3975(94)00097-3).
- [14] Reinhard Diestel. 2010. **Graph Theory**, (4th ed.). Springer-Verlag.
- [15] Paola Festa, Panos M. Pardalos, Mauricio G. C. Resende. 1999. **Feedback Set Problems. Handbook of Combinatorial Optimization.** Springer, Boston, MA. [https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3023-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3023-4_4)
- [16] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Saket Saurabh, Meirav Zehavi. 2019. **Kernelization: Theory of Parameterized Preprocessing.** Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781107415157>
- [17] Anand V. Hudli, Raghu V. Hudli. 1994. **Finding small feedback vertex sets for VLSI circuits.** Microprocessors and Microsystems, Volume 18, Issue 7, Pages 393-400, ISSN 0141-9331, [https://doi.org/10.1016/0141-9331\(94\)90067-1](https://doi.org/10.1016/0141-9331(94)90067-1).
- [18] Yoichi Iwata, Yusuke Kobayashi. 2021. **Improved Analysis of Highest-Degree Branching for Feedback Vertex Set.** Algorithmica. <https://doi.org/10.1007/s00453-021-00815-w>
- [19] Richard Karp. 1972. **Reducibility Among Combinatorial Problems.**
- [20] Matthias Kriesell. 2005. **Disjoint A-paths in digraphs.** <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2005.03.001>
- [21] Tomasz Kociumaka, Marcin Pilipczuk. 2014. **Faster deterministic Feedback Vertex Set.** Information Processing Letters. 114. 556. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2014.05.001>
- [22] Ruiming Li, Chun-Yu Lin, Wei-Feng Guo, Tatsuya Akutsu. 2021. **Weighted minimum feedback vertex sets and implementation in human cancer genes detection.** BMC Bioinformatics 22, 143. <https://doi.org/10.1186/s12859-021-04062-2>.
- [23] Daniel Lokshtanov, M. S. Ramanujan, Saket Saurabh. 2016. **A Linear Time Parameterized Algorithm for Directed Feedback Vertex Set.** <https://arxiv.org/abs/1609.04347>

- [24] Daniel Lokshantov, M. S. Ramanujan, Saket Saurabh, Roohani Sharma, Meirav Zehavi. 2019. **Wannabe Bounded Treewidth Graphs Admit a Polynomial Kernel for DFVS**. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-24766-9\\_38](https://doi.org/10.1007/978-3-030-24766-9_38)
- [25] Matthias Mnich, Erik Jan van Leeuwen. 2016. **Polynomial kernels for deletion to classes of acyclic digraphs**. <https://doi.org/10.1016/j.disopt.2017.02.002>
- [26] Alexander Schrijver. 2003. **Combinatorial Optimization Polyhedra and Efficiency**. Springer Berlin Heidelberg.
- [27] Abraham Silberschatz, Peter Baer Galvin, Greg Gagne. 2008. **Operating System Concepts** (8th ed.). John Wiley & Sons.