

Εθνικό και Καποδιστριακό πανεπιστήμιο Αθηνών και
Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. Δημόκριτος



Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών
Σωματιδίων

Υπολογισμός της εντροπίας διεμπλοκής σε
συστήματα ταλαντωτών και στη θεωρία
πεδίου

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Παπαγρηγορίου Ευάγγελος

Κύριος Επιβλέπων: Σπανός Βασίλειος

Αθήνα, Ιούνιος 2018

Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης



Βασική Φυσική Με Ειδίκευση στην Πυρηνική Φυσική
και Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Υπολογισμός της εντροπίας διεμπλοκής σε
συστήματα ταλαντωτών και στη θεωρία
πεδίου

Παπαρηγορίου Ευάγγελος

A.M.: 201626

Τριμελής επιτροπή

Σπανός Βασίλειος

Αξενίδης Μίνως

Φλωράτος Εμμανουήλ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Μίνω Αξενίδη και Εμμανουήλ Φλωράτο όπως και τους Γιώργο Πάστρα και Δημήτρη Κατσινή για τις πολύτιμες συζητήσεις και την βοήθεια που προσέφεραν, ώστε να εκπονηθεί αυτή η διπλωματική.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία διαπραγματευόμαστε το θέμα της εντροπίας διεμπλοκής σε συστήματα συζευγμένων ταλαντωτών και σε βαθμωτή θεωρία πεδίου. Ξεκινάμε αναλύοντας την έννοια της κβαντικής διεμπλοκής και ένα μέτρο της, την εντροπία διεμπλοκής. Έπειτα, βρίσκουμε την εντροπία διεμπλοκής σε συστήματα 2 και N συζευγμένων ταλαντωτών με σκοπό να γενικευθούν αυτά τα αποτελέσματα στη θεωρία πεδίου. Στη συνέχεια βρίσκουμε την εντροπία διεμπλοκής στη θεωρία πεδίου και δείχνουμε ότι η κύρια συνεισφορά σε αυτήν είναι ανάλογη του εμβαδού της διαχωριστικής επιφάνειας που ορίζει τα δύο υπό μελέτη διεμπλεγμένα υποσυστήματα. Έπειτα μελετάμε ένα τριχοτομημένο σύστημα και βρίσκουμε ότι και σε αυτό η κύρια συνεισφορά στην εντροπία διεμπλοκής είναι ένας όρος εμβαδού, του οποίου ο συντελεστής είναι ο ίδιος με αυτόν του διχοτομημένου συστήματος που μελετήσαμε προηγουμένως. Μετά βρίσκουμε αριθμητικά τους όρους υποδεέστερης τάξης στο τριχοτομημένο σύστημα στις $2+1$ διαστάσεις, προκειμένου να επιβεβαιώσουμε μία βασική ιδιότητα της εντροπίας διεμπλοκής, την ισχυρή υποαθροιστικότητα. Τέλος, αναφέρουμε κάποιες μελλοντικές προεκτάσεις που μπορούν να έχουν αυτά τα θέματα.

Calculation of the entropy entanglement with systems of oscillators and in field theory

Abstract

In this thesis, we study entanglement entropy in systems of coupled harmonic oscillators and in scalar field theory. First we introduce the notion of quantum entanglement and a measure of it, namely the entanglement entropy. Then, we calculate entanglement entropy in systems of 2 and N coupled harmonic oscillators in order to generalize these results in field theory. Later, we calculate the entanglement entropy in field theory and show that the main contribution to it is proportional to the area of the separating surface that defines the two entangled subsystems under study. After that we investigate a tripartite system in $2 + 1$ dimensions and find that the main contribution to entanglement entropy is again an area law term whose coefficient is identical to that of the bipartite system which we studied earlier. Finally, we numerically calculate the subleading terms in the tripartite system in order to verify a fundamental property of entanglement entropy, namely the strong subadditivity. We also discuss some possible extensions of this work.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
1.1	Τελεστής πυκνότητας	7
1.2	Ανηγμένος πίνακας πυκνότητας και διεμπλοκή	8
2	Εντροπία διεμπλοκής N συζευγμένων ταλαντωτών	12
2.1	Εύρεση της εντροπίας διεμπλοκής στην περίπτωση των 2 συζευγμένων ταλαντωτών	12
2.2	Εντροπία διεμπλοκής σ' ένα σύστημα N συζευγμένων ταλαντωτών	15
3	Εύρεση της εντροπίας διεμπλοκής στη βαθμωτή θεωρία πεδίου	18
3.1	Υπολογισμός εντροπίας διεμπλοκής σε μία θεωρία πεδίου	18
3.2	Εντροπία διεμπλοκής του συμπληρωματικού υποσυστήματος	23
3.3	Εντροπία διεμπλοκής σε θεωρία πεδίου στις $2 + 1$ διαστάσεις	26
4	Αριθμητικοί υπολογισμοί σε τριχοτομημένο σύστημα	29
4.1	Συσχέτιση του area law σε διχοτομημένο και τριχοτομημένο σύστημα	29
4.2	Υποδεέστερης τάξης όροι στο τριχοτομημένο σύστημα	30
4.3	Ισχυρή υποαθροιστικότητα σ' ένα τριχοτομημένο σύστημα	36
5	Συμπεράσματα και μελλοντικές προεκτάσεις	38
A'	Φάσμα του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας	39
B'	Κώδικας Matlab	41
B'.1	Ο κώδικας από τον οποίο κάναμε τον υπολογισμό της εντροπίας στις $3 + 1$ διαστάσεις	41
B'.2	Κώδικας για δαχτυλίδι	43
B'.3	Κώδικας που δείχνουμε την ισχύ της strong subadditivity της εντροπίας	45

1 Εισαγωγή

1.1 Τελεστής πυκνότητας

Στην κβαντομηχανική η κατάσταση ενός συστήματος περιγράφεται από ένα κανονικοποιημένο διανύσμα στο χώρο Hilbert και συμβολίζεται με $|\Psi\rangle$. Αυτή η κατάσταση περιέχει όλη την πληροφορία για όλα τα παρατηρήσιμα του συστήματος. Η μέση τιμή των μετρησίμων δίνεται από τη σχέση

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle. \quad (1.1)$$

Η κατάσταση εξελίσσεται χρονικά μέσω ενός μοναδιαίου τελεστή, $U = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$, όπου H είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος, η οποία είναι ο γεννήτορας των χρονικών μεταθέσεων.

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} |\Psi(0)\rangle. \quad (1.2)$$

Τα κβαντομηχανικά συστήματα μπορούν να περιγραφούν, όταν δεν έχουμε πλήρη γνώση για τη κατάσταση του συστήματος, μέσω ενός τελεστή που λέγεται τελεστής πυκνότητας (density operator) ο οποίος είναι ο

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (1.3)$$

όπου p_i η πιθανότητα το σύστημα να είναι στην κατάσταση $|\Psi_i\rangle$. Όταν γνωρίζουμε πλήρως την κατάσταση, ο τελεστής πυκνότητας είναι

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi| \quad (1.4)$$

και λέμε ότι έχουμε μία "καθαρή κατάσταση", σε αντίθετη περίπτωση λέμε ότι έχουμε "μεικτή κατάσταση". Ο τελεστής πυκνότητας ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\rho = \rho^\dagger$
2. $\text{Tr} \rho = 1$
3. $\langle \Psi | \rho | \Psi \rangle \geq 0$

Η (1) είναι προφανής. Η (2) αποδεικνύεται ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho &= \sum_i p_i \text{Tr} |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \\ &= \sum_i p_i = 1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Η ιδιότητα (3) αποδεικνύεται ως εξής

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \rho | \Phi \rangle &= \sum_i p_i \langle \Phi | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \Phi \rangle \\ &= \sum_i p_i |\langle \Phi | \Psi_i \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

από τις ιδιότητες (1)-(3) βλέπουμε πως οι ιδιοτιμές του τελεστή πυκνότητας παίρνουν τιμές στο διάστημα $[0,1]$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό για τη μέση τιμή ενός μετρησίμου που είχαμε δώσει πριν βρισκόμαστε ότι αυτή μπορεί να υπολογιστεί από τον τελεστή πυκνότητας ως εξής

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \text{Tr} \hat{A} \hat{\rho}.$$

Τέλος, ο πίνακας πυκνότητας εξελίσσεται στο χρόνο μέσω της εξίσωσης

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]. \quad (1.7)$$

Περαιτέρω ανάλυση πάνω στους τελεστές πυκνότητας μπορεί να βρει κανείς στις αναφορές [8], [9], [3].

1.2 Ανηγγέμενος πίνακας πυκνότητας και διεμπλοκή

Ας υποθέσουμε πως μελετάμε ένα σύνθετο χβαντικό σύστημα και θέλουμε να μετρήσουμε τα παρατηρήσιμα ενός υποσυστήματος. Ακόμα, και αν το ολικό σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση, εν γένει δεν υπάρχει κυματοσυνάρτηση που να περιγράφει τα υποσυστήματα. Αναγκαστικά αυτά περιγράφονται από έναν τελεστή πυκνότητας που ονομάζεται ανηγμένος τελεστής πυκνότητας και ορίζεται

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}, \quad \rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}. \quad (1.8)$$

Από τον ανηγμένο τελεστή πυκνότητας μπορούμε να πάρουμε όση πληροφορία είναι διαθέσιμη για τη μέση τιμή ενός τελεστή που δρα μόνο στο υποσύστημα που μελετάμε. Ας γράψουμε την κατάσταση $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} C_{ij} |\phi_i\rangle_A \otimes |\theta_j\rangle_B$, όπου $|\phi_i\rangle$ και $|\theta_j\rangle$ ορίζουν μία ορθοκανονική βάση στον χώρο Hilbert των υποσυστημάτων A και B αντίστοιχα. Ο πίνακας πυκνότητας γράφεται

$$\rho_{AB} = \sum_{i,j,k,l} C_{kl}^* C_{ij} |\phi_i\rangle_A \langle \phi_k| \otimes |\theta_j\rangle_B \langle \theta_l|. \quad (1.9)$$

Η μέση τιμή ενός παρατηρήσιμου που δρα μόνο στον υπόχωρο A είναι

$$\begin{aligned} \langle \hat{M}_A \rangle &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{M}_A) \\ &= \sum_{i,j,k,l} C_{kl}^* C_{ij} \text{Tr}(({}_A \langle \phi_k| \otimes_B \langle \theta_l| (\hat{M}_A \otimes \hat{I}_B) (|\phi_i\rangle_A \otimes |\theta_j\rangle_B)) \\ &= \sum_{i,j,k,l} C_{kl}^* C_{ij} \text{Tr}({}_A \langle \phi_k| \hat{M}_A |\phi_i\rangle_A \langle \theta_l| \hat{I}_B |\theta_j\rangle_B) \\ &= \sum_{ijk} C_{kj}^* C_{ij} \text{Tr}_A \langle \phi_k| \hat{M}_A |\phi_i\rangle_A \\ &= \text{Tr} \hat{\rho}_A \hat{M}_A. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Βλέπουμε ότι μέσω του ανηγμένου πίνακα πυκνότητας μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για ένα μετρήσιμο που δρα στο ένα από τα δύο υποσυστήματα, με τον ίδιο τρόπο που ανακτούμε τη μέση τιμή ενός μετρήσιμου από τον τελεστή πυκνότητας.

Μέσω του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας μπορούμε να καταλάβουμε πότε ένα σύστημα είναι διεμπλεγμένο. Έστω ότι έχουμε την κατάσταση

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_A \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_B = |\Psi\rangle_A \otimes |\Psi\rangle_B \quad (1.11)$$

Ο τελεστής πυκνότητας του συνολικού συστήματος είναι

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A \langle\uparrow| + |\uparrow\rangle_A \langle\downarrow| + |\downarrow\rangle_A \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|) \\ &\otimes \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_B \langle\uparrow| + |\uparrow\rangle_B \langle\downarrow| + |\downarrow\rangle_B \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_B \langle\downarrow|). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ο τελεστής πυκνότητας μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B, \quad (1.13)$$

όπου $\rho_A = |\Psi\rangle_A \langle\Psi|$ και $\rho_B = |\Psi\rangle_B \langle\Psi|$. Από την προηγούμενη σχέση βλέπουμε ότι το σύστημα δεν είναι διεμπλεγμένο γιατί αν κάνουμε μέτρηση σ' ένα υποσύστημα, τότε, δεν αλλάζει η μορφή του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας του άλλου. Επίσης, οι ιδιοτιμές των πινάκων ρ_A και ρ_B είναι 0 και 1.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την ακόλουθη κατάσταση

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B). \quad (1.14)$$

Οι μετρήσεις στα δύο υποσυστήματα είναι συσχετισμένα στο μέγιστο βαθμό. Ο ανηγμένος πίνακας πυκνότητας για το υποσύστημα A είναι

$$\rho_A = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|) \quad (1.15)$$

και για το υποσύστημα B

$$\rho_B = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_B \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_B \langle\downarrow|). \quad (1.16)$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας πυκνότητας δεν μπορεί να γραφτεί όπως αυτός της σχέσης (1.13), οπότε λέμε πως το σύστημα είναι διεμπλεγμένο. Οι ιδιοτιμές των τελεστών ρ_A και ρ_B είναι $\{1/2, 1/2\}$ και η πιθανότητα για να βρούμε το σπιν είτε του A είτε του B υποσυστήματος πάνω ή κάτω είναι, επίσης, $1/2$. Αντίθετα με την προηγούμενη περίπτωση όπου μία μέτρηση σ' ένα υποσύστημα δεν επηρεάζει τη μέτρηση στο άλλο υποσύστημα, σ' αυτό το παράδειγμα αν κάνουμε μέτρηση σ' ένα από τα δύο υποσυστήματα, τότε, επηρεάζουμε τις μετρήσεις στο άλλο υποσύστημα. Αυτό το φαινόμενο το ονομάζουμε κβαντική διεμπλοκή. Αυτά τα παραδείγματα υποδεικνύουν πως δεν υπάρχει κάποιο κλασικό ανάλογο της διεμπλοκής στην κλασική μηχανική και είναι μία αμιγώς κβαντική ιδιότητα.

Υπάρχουν αυστηρότερα κριτήρια τα οποία καθορίζουν πότε ένας τελεστής πυκνότητας είναι διαχωρίσιμος και πότε δεν είναι. Η πρώτη προσπάθεια έγινε από τον Peres [10] το 1996 και διορθώθηκε από τους Horodecki [11] το 1996. Για παράδειγμα όταν το ολικό σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση τότε είναι μη διεμπλεγμένο όταν και τα υποσυστήματα βρίσκονται σε καθαρή κατάσταση και, επομένως, το ίχνος του τετραγώνου του τελεστή πυκνότητας είναι ίσο με 1, $\text{Tr } \rho_{red}^2 = 1$. Αλλιώς είναι μικρότερο του 1.

Είναι χρήσιμο να ποσοτικοποιήσουμε την χβαντική διεμπλοκή εισάγωντας ένα μέτρο της. Τα παραπάνω παραδείγματα υποδεινούν ότι τουλάχιστον όταν το ολικό σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση, το πόσο διεμπλεγμέν είναι τα υποσυστήματα έχει αποτυπωθεί στο πόσο διεσπαρμένες είναι οι ιδιοτιμές του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας. Συνεπώς, ένα κατάλληλο μέτρο της διεμπλοκής είναι η εντροπία Shannon εφαρμοσμένη πάνω στο φάσμα του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας.

$$S = - \text{Tr } \rho_A \log \rho_A. \quad (1.17)$$

Αυτή η εντροπία ονομάζεται εντροπία διεμπλοκής. Για μία ‘καθαρή’ κατάσταση του υποσυστήματος η εντροπία διεμπλοκής είναι, προφανώς, 0, και είναι μέγιστη όταν όλες οι πιθανές καταστάσεις μπορούν να προκύψουν με την ίδια πιθανότητα μετά από μία μέτρηση. Δηλαδή όταν

$$\rho = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

και η εντροπία γίνεται

$$S = \log N. \quad (1.19)$$

Αφού ορίσαμε την εντροπία διεμπλοκής συνεχίζουμε παραθέτοντας κάποιες βασικές ιδιότητες της, που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

Η εντροπία διεμπλοκής έχει τις ακόλουθες 3 ιδιότητες:

1. $S(A) = S(A^c)$, συμπληρωματικότητα (complementarity), όπου A^c είναι το συμπληρωματικό υποσύστημα του A . Αυτή η ιδιότητα ισχύει όταν το ολικό σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση και δείχνει ότι αν ολοκληρώσουμε ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του ενός υποσυστήματος και βρούμε την εντροπία διεμπλοκής αυτή είναι ίδια με αυτή που θα βρίσκαμε στην περίπτωση, όπου είχαμε ολοκληρώσει ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του συμπληρωματικού υποσυστήματος.
2. $S(A \cup B) \leq S(A) + S(B)$, υποαθροιστικότητα (subadditivity). Δηλαδή, αν έχουμε ένα διχοτομημένο (bipartite) σύστημα, η εντροπία του συνολικού συστήματος είναι μικρότερη ή ίση με το άθροισμα της εντροπίας του κάθε υποσυστήματος. Η ισότητα ισχύει όταν τα υποσυστήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους.
3. Έστω, ότι τριχοτομούμε το ολικό σύστημα στα υποσυστήματα A , B και C . Προφανώς το ολικό σύστημα είναι $A \cup B \cup C$. Ισχύει η ανισότητα $S(A \cup B \cup C) + S(B) \leq S(A \cup B) + S(B \cup C)$, η οποία λέγεται ισχυρή υποαθροιστικότητα (strong subadditivity). Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για κυκλικές μεταθέσεις των A , B και C .

Μπορεί ο ανηγμένος τελεστής πυκνότητας να φαίνεται ότι είναι ένα αντικείμενο αντίστοιχης περιπλοκότητας με τον τελεστή πυκνότητας, στην πραγματικότητα είναι πολύ πιο περίπλοκο και ο βασικός λόγος είναι ότ περιγράφει ένα ανοιχτό σύστημα. Αυτό είναι εμφανές στη χρονική εξέλιξη του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας. Η χρονική εξέλιξη του τελεστή πυκνότητας είναι μοναδιακή και περιγράφεται από την εξίσωση (1.7). Αντίθετα αυτό δεν συμβαίνει στον ανηγμένο τελεστή πυκνότητας, του οποίου η χρονική εξέλιξη είναι ιο περίπλοκη

διότι περιγράφει ένα ανοιχτό κβαντικό σύστημα και, επομένως, το περιβάλλον αυτού μπορεί κατά κάποιο τρόπο να κάνει μετρήσεις στο υπό μελέτη υποσύστημα. Η εξέλιξη του υποσυστήματος \mathcal{H}_A περιγράφεται, εν γένει, από έναν υπερτελεστή (superoperator). Ένας υπερτελεστής έχει μία αναπαράσταση Krauss

$$\rho \rightarrow \mathcal{S}(\rho) = \sum_{\mu} M_{\mu} \rho M_{\mu}^{\dagger}, \quad (1.20)$$

όπου

$$\sum_{\mu} M_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} = 1.$$

Αν οι χαρακτηριστικοί χρόνοι ενός ανοικτού κβαντικού συστήματος είναι μεγάλοι σε σχέση με τον χρόνο που το περιβάλλον οδηγεί το κβαντικό σύστημα σε κλασικό, τότε η εξέλιξη είναι τοπική στο χρόνο (Μαρκοβιανή προσέγγιση). Η εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται από έναν υπερτελεστή που γράφεται στην ακόλουθη μορφή

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}[\rho] = -i[H, \rho] + \sum_{\mu} \left(L_{\mu} \rho L_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \rho - \frac{1}{2} \rho L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right). \quad (1.21)$$

Πέραν της Μαρκοβιανής προσέγγισης η εξέλιξη του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας δεν είναι τοπική στο χρόνο και κατά συνέπεια δεν περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση, αλλά από μια πολύ πιο περίπλοκη ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση.

2 Εντροπία διεμπλοκής N συζευγμένων ταλαντωτών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες που αναλύσαμε στην εισαγωγή για να βρούμε την εντροπία διεμπλοκής, αρχικά, σε ένα σύστημα 2 συζευγμένων ταλαντωτών και μετά σε N συζευγμένους ταλαντωτές. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε πως το συνολικό σύστημα βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση και, επομένως, και σε καθαρή κατάσταση. Το αποτέλεσμα στο σύστημα των N ταλαντωτών θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για να βρούμε την εντροπία διεμπλοκής στη θεωρία πεδίου.

2.1 Εύρεση της εντροπίας διεμπλοκής στην περίπτωση των 2 συζευγμένων ταλαντωτών

Η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος 2 αρμονικά συζευγμένων ταλαντωτών είναι

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + k_0 (x_1^2 + x_2^2) + k_1 (x_1 - x_2)^2). \quad (2.1)$$

Από τη σχέση (2.1) μπορούμε να δούμε ότι η δυναμική ενέργεια γράφεται στη μορφή $V = 1/2 x^T K x$ με $x^T = (x_1 \ x_2)$ και

$$K = \begin{pmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_0 + k_1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα K για να μπορέσουμε να τον διαγωνοποιήσουμε. Οι ιδιοτιμές βρίσκονται ως ακολούθως

$$\det |V - \lambda I| = \det \begin{pmatrix} k_0 + k_1 - \lambda & -k_1 \\ -k_1 & k_0 + k_1 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι

$$\lambda_1 = k_0, \quad \lambda_2 = k_0 + 2k_1. \quad (2.4)$$

Οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι $\omega_+^2 = \lambda_1$ και $\omega_-^2 = \lambda_2$. Έχοντας βρει τις ιδιοτιμές του πίνακα, θα βρούμε τις ιδιοσυναρτήσεις του. Για την πρώτη ιδιοτιμή, η οποία είναι $\lambda_1 = k_0$, έχουμε

$$\begin{pmatrix} k_0 + k_1 - k_0 & -k_1 \\ -k_1 & k_0 + k_1 - k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow k_1 a - k_1 b = 0. \quad (2.5)$$

Έτσι, το πρώτο ιδιοάνυσμα που προκύπτει είναι

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Κάνοντας την ίδια διαδικασία αλλά για την δεύτερη ιδιοτιμή, μπορεί να βρεθεί και το δεύτερο ιδιοάνυσμα του πίνακα, το οποίο είναι

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Ο πίνακας K διαγωνοποιείται μέσω ενός ορθογώνιου πίνακα U , ο οποίος έχει ως στήλες τα ιδιοανύσματα του πίνακα K , μέσω της σχέσης $V_D = U^T V U$. Αυτός ο ορθογώνιος πίνακας είναι ο

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Οι συντεταγμένες που διαγωνοποιούν τον πίνακα δυναμικής ενέργειας είναι οι

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow x_{\pm} &= \frac{x_1 \pm x_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ως προς τις συντεταγμένες x_+ και x_- η Χαμιλτονιανή γράφεται ως

$$H = \frac{1}{2} (p_+^2 + p_-^2 + \omega_+ x_+^2 + \omega_- x_-^2) \quad (2.10)$$

και έχει τη μορφή δύο αποσυζευγμένων ταλαντωτών. Αυτοί οι ταλαντωτές αντιπροσωπεύουν τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και η θέση τους εξαρτάται από τη θέση και των δύο φυσικών ταλαντωτών. Στη μορφή αυτή είναι εύκολο να γράψουμε τη κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος

$$\Psi_0(x_+, x_-) = \left(\frac{\omega_+ \omega_-}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{(-\frac{1}{2}(\omega_+ x_+^2 + \omega_- x_-^2))}. \quad (2.11)$$

Επειδή θέλουμε να ορίσουμε ως υποσύστημα A έναν από τους δύο φυσικούς ταλαντωτές, θα επαναφέρουμε τις συντεταγμένες του αρχικού συστήματος

$$\Psi_0(x_1, x_2) = \frac{(\omega_+ \omega_-)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}((\omega_+ + \omega_-)(x_1^2 + x_2^2) + 2(\omega_+ - \omega_-)x_1 x_2)}. \quad (2.12)$$

Ο τελεστής πυκνότητας για τη θεμελιώδη κατάσταση

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= \Psi(x_1, x_2) \Psi_0^*(x'_1, x'_2) \\ &= \frac{(\omega_+ \omega_-)^{\frac{1}{2}}}{\pi} e^{-\frac{1}{4}((\omega_+ + \omega_-)(x_1^2 + x_2^2))} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{4}((\omega_+ + \omega_-)(x_2^2 + x_2'^2) + 2(\omega_+ - \omega_-)(x_1^2 x_2^2 + x_1'^2 x_2'^2))}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Για να βρεθεί η εντροπία διεμπλοκής πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς τους βαθμούς ελευθερίας ενός εκ των δύο υποσυστημάτων. Στο συγκεκριμένο σημείο έχουμε επιλέξει να ολοκληρώσουμε ως προς τους τους βαθμούς ελευθερίας του ταλαντωτή 2.

$$\rho_1(x, x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \frac{(\omega_+ \omega_-)^{\frac{1}{2}}}{\pi} e^{-\frac{1}{4}((\omega_+ + \omega_-)(x_1^2 + x_1'^2) + 2(\omega_+ + \omega_-)x_2^2 + 2(\omega_+ - \omega_-)(x_1^2 + x_1'^2)x_2^2)}. \quad (2.14)$$

Παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα είναι Γκαουσιανό, έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο, γνωστό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (2.15)$$

Μετά την ολοκλήρωση προκύπτει ο ανηγμένος τελεστής πυκνότητας

$$\rho_1(x, x') = \sqrt{\frac{2\omega_+\omega_-}{\pi(\omega_+ + \omega_-)}} e^{-\frac{1}{4}(\omega_+ + \omega_-)(x^2 + x'^2) + \frac{(\omega_+^2 + \omega_-^2 - 2\omega_+\omega_-)(x^2 + x'^2 + 2xx')}{8(\omega_+ + \omega_-)}}. \quad (2.16)$$

Η μορφή που προκύπτει μετά την ολοκλήρωση είναι

$$\rho_1(x, x') = \sqrt{\frac{2\omega_+\omega_-}{\pi(\omega_+ + \omega_-)}} e^{-\frac{\omega_+^2 + \omega_-^2 + 6\omega_+\omega_-}{8}(x^2 + x'^2) + \frac{(\omega_+ - \omega_-)^2}{4(\omega_+ + \omega_-)}xx'}. \quad (2.17)$$

Ορίζουμε

$$\gamma = \frac{\omega_+^2 + \omega_-^2 + 6\omega_+\omega_-}{4}, \quad \zeta = \frac{(\omega_+ - \omega_-)^2}{4(\omega_+ + \omega_-)}. \quad (2.18)$$

Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους ορισμούς ο ανηγμένος τελεστής πυκνότητας μπορεί να γραφεί ως

$$\rho_1(x, x') = \sqrt{\frac{\gamma - \zeta}{\pi}} e^{-\frac{\gamma}{2}(x^2 + x'^2) + \zeta xx'}. \quad (2.19)$$

Την εντροπία διεμπλοκής μπορούμε να τη βρούμε από τον τύπο (1.17). Για τη χρήση του τύπου αυτό απαιτείται η εύρεση των ιδιοτιμών του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας. Αυτό το κάνουμε βρίσκοντας τις ιδιοκαταστάσεις του. Η έκφραση (2.19) είναι μία γενικευμένη Γκαουσιανή και, επομένως, οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να γραφούν συναρτήσει των πολυωνύμων Hermite

$$f_n(x) = H_n(\sqrt{a}x) e^{-\frac{ax^2}{2}}, \quad a = \sqrt{\gamma^2 - \zeta^2}. \quad (2.20)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας, βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του (παράρτημα A) οι οποίες είναι

$$p_n = (1 - \xi^2) \xi^{2n}, \quad (2.21)$$

όπου $\xi^2 = \frac{\zeta}{\gamma + \alpha}$ Ο ανηγμένος τελεστής πυκνότητας μπορεί να γραφεί

$$\rho_1(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \xi^2) \xi^{2n} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} H_n(\sqrt{\alpha}x) e^{-\alpha \frac{x'^2}{2}} H_n(\sqrt{\alpha}x'). \quad (2.22)$$

Η εντροπία διεμπλοκής του συστήματος είναι

$$S = - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \log p_n$$

$$S = - \log(1 - \xi^2) - \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} \log \xi^2. \quad (2.23)$$

2.2 Εντροπία διεμπλοκής σ' ένα σύστημα N συζευγμένων ταλαντωτών

Γενικεύοντας την παραπάνω διαδικασία που εφαρμόσαμε στην περίπτωση των 2 συζευγμένων ταλαντωτών, θα προσπαθήσουμε να βρούμε την εντροπία διεμπλοκής σε ένα σύστημα N συζευγμένων ταλαντωτών. Η Χαμιλτονιανή για N αρμονικά συζευγμένους ταλαντωτές είναι

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i,j} x_i K_{ij} x_j. \quad (2.24)$$

Ο πίνακας K είναι συμμετρικός και έχει θετικές ιδιοτιμές, όπως απαιτείται για την ευστάθεια του συστήματος. Η κυματοσυνάρτηση του συστήματος, αφού γράψουμε τη Χαμιλτονιανή στο σύστημα συντεταγμένων όπου όλοι οι ταλαντωτές είναι αποσυζευγμένοι μεταξύ τους (κανονικές συντεταγμένες), είναι η ακόλουθη

$$\Psi_0(x_1, \dots, x_N) = \prod_i \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{\frac{N}{4}} e^{-\frac{1}{2}\omega_i \tilde{x}_i^2}, \quad (2.25)$$

όπου $\tilde{x} = Ux$ και ο πίνακας U είναι ο πίνακας που διαγωνοποιεί τη Χαμιλτονιανή. Ορίζουμε $\Omega_D = K_D^{\frac{1}{2}}$, όπου $K = U^T K_D U$. Ο πίνακας Ω ορίζεται από τη σχέση $\Omega = U^T \Omega_D U$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους κατάστασης γράφεται

$$\Psi_0(x_1, \dots, x_N) = \frac{(\det \Omega_D)^{\frac{N}{4}}}{\pi^{\frac{N}{4}}} e^{-\frac{1}{2}x^T \Omega x}. \quad (2.26)$$

Ο πίνακας πυκνότητας για το συνολικό σύστημα γράφεται ως

$$\rho(x_1, \dots, x_N; x'_1, \dots, x'_N) = \frac{(\det \Omega_D)^{\frac{N}{2}}}{\pi^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x^T \Omega x + x'^T \Omega x')}. \quad (2.27)$$

Ορίζουμε υποσύστημα A του ταλαντωτές με δείκτη $i = 1, \dots, n$ και υποσύστημα B τους ταλαντωτές με δείκτη $i = n + 1, \dots, N$. Για να ολοκληρώσουμε ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του υποσυστήματος, γράφουμε τον πίνακα Ω σε μορφή block

$$\Omega = \begin{pmatrix} (W_1)_{n \times n} & (W_2)_{n \times N-n} \\ (W_2^T)_{N-n \times n} & (W_3)_{N-n \times N-n} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Οι διαστάσεις των πινάκων είναι για τον W_1 , W_2 και W_3 είναι $n \times n$, $n \times (N - n)$ και $(N - n) \times (N - n)$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα Ω ο τελεστής πυκνότητας γράφεται

$$\begin{aligned} \rho(x_1, \dots, x_N; x'_1, \dots, x'_N) &= \frac{(\det \Omega)^{\frac{N}{2}}}{\pi^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x_n^T W_1 x_n + x_n^T W_2 x_{N-n})} \\ &\times e^{\frac{1}{2}(+x_{N-n}^T W_2^T x_n + x_{N-n}^T W_3 x_{N-n})} \\ &\times e^{-\frac{1}{2}(x_n'^T W_1 x_n')} \\ &\times e^{\frac{1}{2}(+x_n'^T W_2 x_{N-n}' + x_{N-n}'^T W_2^T x_n' + x_{N-n}'^T W_3 x_{N-n}')}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Χρησιμοποιούμε το παρακάτω Γκαουσιανό ολοκλήρωμα

$$\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_i e^{-\vec{x}^T A \vec{x} - Bx} = \sqrt{\frac{\pi^N}{\det A}} e^{\frac{1}{4} B^T A^{-1} B}, \quad (2.30)$$

προκύπτει

$$\begin{aligned} \rho_B(x_{n+1}, \dots, x_N; x_{n+1}, \dots, x'_N) &= \pi^{\frac{-N+n}{2}} \sqrt{\frac{\det \Omega}{\det W_1}} e^{\frac{1}{4} x W_2^T W_1^{-1} W_2 x} \\ &\times e^{+\frac{1}{4} x' W_2^T W_1^{-1} W_2 x' - \frac{1}{2} x^T W_3 x} \\ &\times e^{\frac{1}{4} x' W_2^T W_1^{-1} W_2 x + \frac{1}{4} x' W_2^T W_1^{-1} W_2 x' - \frac{1}{2} x'^T W_3 x'}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Αν παρατηρήσουμε πως ο πίνακας Ω μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\Omega = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ W_2^T & I_{N-n \times N-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W_1^{-1} W_2 \\ 0 & W_3 - W_2^T W_1^{-1} W_2 \end{pmatrix},$$

ο λόγος των οριζουσών της σχέσης (2.32) μπορεί να γραφεί

$$\frac{\det \Omega}{\det W_1} = \det(W_3 - W_2^T W_1^{-1} W_2).$$

Έτσι, ο ανηγμένος πίνακας πυκνότητας γίνεται

$$\begin{aligned} \rho_B(x_{n+1}, \dots, x_N; x_{n+1}, \dots, x'_N) &= \pi^{\frac{-N+n}{2}} \sqrt{\det(W_3 - W_2^T W_1^{-1} W_2)} e^{\frac{1}{4} x^T W_2^T W_1^{-1} W_2 x} \\ &\times e^{+\frac{1}{4} x'^T W_2^T W_1^{-1} W_2 x' - \frac{1}{2} x^T W_3 x} \\ &\times e^{\frac{1}{4} x' W_2^T W_1^{-1} W_2 x + \frac{1}{4} x' W_2^T W_1^{-1} W_2 x' - \frac{1}{2} x'^T W_3 x'}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ορίζουμε $\zeta = \frac{1}{2} W_2^T W_1^{-1} W_2$ και $\gamma = W_3 - \zeta$. Ορίζουμε, επίσης, $\vec{y} = \gamma_D^{\frac{1}{2}} V \vec{x}$. Γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές αθροίζουν στη μονάδα, έτσι δεν μας χρειάζεται να είμαστε προσεκτικοί με το νορμαλισμό του ρ αφού ο $\rho(x, x')$ και ο $\det G\rho(Gx, Gx')$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Ο ανηγμένος τελεστής πυκνότητας γράφεται

$$\rho_B \propto e^{-\frac{1}{2}(y^2 + y'^2) + y^T V^T \gamma_D^{\frac{1}{2}} \zeta \gamma_D^{\frac{1}{2}} V y'}. \quad (2.33)$$

Ως ρ_B έχουμε γράψει τον ανηγμένο τελεστή πυκνότητας του υποσυστήματος B . Ορίζουμε $y = W^{-1} z$ και παίρνουμε

$$\rho_B(x_{n+1}, \dots, x_N; x'_{n+1}, \dots, x'_N) = C \prod_{i=n+1}^N e^{-\frac{1}{2}(z_i^2 + z'_i)^2 + \zeta'_i z_i z'_i}. \quad (2.34)$$

Το σύστημα αποκτά την ακόλουθη μορφή

$$\rho_B(x_{n+1}, \dots, x_N; x'_{n+1}, \dots, x'_N) = \rho(z_{n+1}; z'_{n+1}) \otimes \dots \otimes \rho(z_N; z'_N) \quad (2.35)$$

Ο νορμαλισμός του πίνακα πυκνότητας απαιτεί $C = 1$. Είναι εμφανές πως ο ανηγμένος τελεστής πυκνότητας γραφεται ως ταυυστικό γινόμενο των ανηγμένων πινάκων πυκνότητας

των $N-n$ εν δυνάμει τοπικών ταλαντωτών. Για να βρούμε τις ιδιοτιμές κάνουμε μία σύγκριση με τις ιδιοτιμές που είχαμε στην περίπτωση των 2 συζευγμένων ταλαντωτών, αν πάρουμε $\gamma \rightarrow 1$ και $\zeta \rightarrow \zeta_i$. Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι οι

$$p_i = \xi_i^2(1 - \xi_i^2) \quad (2.36)$$

όπου ξ_i^2 είναι

$$\xi_i^2 = \frac{\zeta_i'}{1 + \sqrt{1 - (\zeta_i')^2}}. \quad (2.37)$$

Η εντροπία διεμπλοκής είναι

$$\begin{aligned} S &= - \sum_i p_i \log p_i \\ &= - \sum_i \left(\log(1 - \xi_i^2) + \frac{\xi_i^2}{1 - \xi_i^2} \log \xi_i^2 \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Έχοντας κάνει αυτήν την ανάλυση για τους N ταλαντωτές, συνεχίζουμε στην εύρεση της εντροπίας διεμπλοκής στη θεωρία πεδίου.

3 Εύρεση της εντροπίας διεμπλοκής στη βαθμωτή θεωρία πεδίου

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα θεωρήσουμε μία βαθμωτή θεωρία πεδίου και ως υποσύστημα A τους βαθμούς ελευθερίας εντός σφαίρας ακτίνας R . Θα δείξουμε αριθμητικά πως η εντροπία διεμπλοκής είναι ανάλογη της επιφάνειας της σφαίρας. Κάποιος θα μπορούσε να ρωτήσει γιατί να μην εξαρτάται από τον όγκο, όπως και η θερμοκή εντροπία, η οποία είναι ένα εκτατικό μέγεθος. Για την εντροπία διεμπλοκής δεν θα μπορούσε να ισχύει αυτό όπως δείχνει το ακόλουθο αντεπιχείρημα: έστω ότι έχουμε μία σφαίρα ακτίνας R . Η εντροπία διεμπλοκής είτε ολοκληρώσουμε ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του εσωτερικού της σφαίρας, είτε ολοκληρώσουμε ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του εξωτερικού της σφαίρας, πρέπει να είναι ίδια λόγω της ιδιότητας της συμπληρωματικότητας, αφού το σύστημα θεωρούμε πως είναι σε καθαρή κατάσταση. Το μόνο κοινό που έχει το εσωτερικό και εξωτερικό της σφαίρας είναι η σφαίρα η ίδια. Άρα, γίνεται αντιληπτό πως η εντροπία πρέπει να εξαρτάται από το σύνορο των δύο υποχώρων. Αυτό το επιχείρημα είναι μία ένδειξη ότι πρέπει να βρούμε πως η εντροπία είναι ανάλογη της επιφάνειας της σφαίρας ($S \propto A$). Αυτή η συμπεριφορά είναι ενδιαφέρουσα γιατί προσομοιάζει τη συμπεριφορά της εντροπίας της μαύρης τρύπας, όπως τη βρήκαν οι Bekenstein [4] και Hawking [6]. Αυτό κινητοποιεί τη συζήτηση κατά πόσο μπορεί να ερμηνευτεί η τελευταία ως εντροπία διεμπλοκής ή αν υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ τους.

3.1 Υπολογισμός εντροπίας διεμπλοκής σε μία θεωρία πεδίου

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου κεφαλαίου για τους N συζευγμένους ταλαντωτές, θα προσπαθήσουμε να βρούμε την εντροπία διεμπλοκής στην ελεύθερη βαθμωτή θεωρία πεδίου. Η Χαμιλτονιανή της τελευταίας είναι

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\pi(x)^2 + (\nabla\phi(x))^2 + \mu^2), \quad (3.1)$$

όπου m η μάζα του πεδίου. Το πεδίο ϕ και η συζυγής ορμή του π ικανοποιούν τις κανονικές σχέσεις μετάθεσης

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}').$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε την εντροπία διεμπλοκής, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των πεπερασμένων ταλαντωτών πρέπει να κάνουμε διακριτοποίηση στα πεδία. Σαν ένα πρώτο βήμα αναπτύσσουμε σε σφαιρικές αρμονικές. Εισάγουμε τα μερικά κύματα

$$\phi_{lm}(r) = r \int d\Omega Y_{lm}(\theta, \phi) \phi(\vec{x}), \quad (3.2)$$

$$\pi_{lm}(r) = r \int d\Omega Y_{lm}(\theta, \phi) \pi(\vec{x}). \quad (3.3)$$

Τότε, οι σχέσεις μετάθεσης των πεδίων ϕ_{lm} , π_{lm} είναι

$$[\phi_{lm}(r), \pi_{l'm'}(r')] = i\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}\delta(r - r'). \quad (3.4)$$

Η Χαμιλτονιανή του συστήματος γράφεται

$$H = \sum_{l,m} H_{lm} = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \int_0^\infty dr \left(\pi_{lm}(r)^2 + x^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi_{lm}(r)}{r} \right) \right)^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \phi_{lm}^2(r) + \mu^2 \right). \quad (3.5)$$

Μετά την ανάπτυξη σε σφαιρικές αρμονικές έχει μείνει συνεχής μόνο η ακτινική συντεταγμένη. Για να μετατρέψουμε το σύστημα σε ένα σύστημα N ταλαντωτών, θεωρούμε σφαίρες ακτίνας πολλαπλάσιας ενός στοιχειώδους μήκους a , $r = na$ και $n = 1, \dots, N$, διακριτοποιώντας την ακτινική συντεταγμένη. Η διακριτοποίηση αυτή εισαγάγει όρια αποκοπής στο υπέρυθρο και στο υπεριώδες ίσα με $R_{IR} = Na$ και $R_{UV} = a$ αντίστοιχα. Για να βρούμε την διακριτή Χαμιλτονιανή από τη συνεχή πρέπει να κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$r \rightarrow ja \quad (3.6)$$

$$\phi_{lm}(r) \rightarrow \phi_{lm,j} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi(r)}{r} \right) \rightarrow \frac{\phi_{lm,j+1}}{j+1} - \frac{\phi_{lm,j}}{j} \quad (3.8)$$

και η Χαμιλτονιανή παίρνει τη μορφή

$$H = \sum_{l,m} H_{lm},$$

$$\text{όπου } H_{lm} = \frac{1}{2a} \sum_{j=1}^N \left(\pi_{lm,j}^2 + \left(j + \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{\phi_{lm,j+1}}{j+1} + \frac{\phi_{lm,j}}{j} \right)^2 + \frac{l(l+1)}{j^2} \phi_{lm,j}^2 + \mu^2 a^2 \right). \quad (3.9)$$

Η (3.9) είναι Χαμιλτονιανή διακριτού πλήθους ταλαντωτών. Η εντροπία είναι $S(n, N) = \sum_{l,m} S_{lm}(n, N)$, όπου S_{lm} είναι η εντροπία της H_{lm} η οποία περιγράφει N συζευγμένους ταλαντωτές, μπορεί η εντροπία να γραφεί σε αυτή τη μορφή γιατί δεν έχουμε ζεύξη ϕ_{lm} με διαφορετικά l, m . Επειδή η Χαμιλτονιανή δεν έχει άμεση εξάρτηση από το m , η εντροπία θα είναι με τη σειρά της ανεξάρτητη του m , έτσι, γίνεται $S = \sum_l (2l+1) S_l(n, N)$. Θεωρώντας N ταλαντωτές με ίδιο l, m , ο πίνακας K_{ij} είναι

$$K_{ij} = \left(\left(\frac{i + \frac{1}{2}}{i} \right)^2 + \left(\frac{i - \frac{1}{2}}{i} \right)^2 (1 - \delta_{i1}) + \frac{l(l+1)}{i^2} + \mu^2 a^2 \right) \delta_{ij} - \frac{(i + \frac{1}{2})^2}{i(i+1)} \delta_{i+1,j} - \frac{(j + \frac{1}{2})^2}{j(j+1)} \delta_{i,j+1}. \quad (3.10)$$

Θέλουμε να καταλάβουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_l (2l+1) S_l$ για $l \gg N$. Από την εξίσωση (3.10) βλέπουμε ότι για $l \gg N$ οι διαγώνιοι όροι είναι κυρίαρχοι. Γι' αυτό θα προσπαθήσουμε να βρούμε προσεγγιστικές μεθόδους για τον υπολογισμό της εντροπίας, όπως έγινε στο [17]. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό, θα σχεφτούμε τον πίνακα K_{ij} σαν διαγώνιο πίνακα με μη-διαγώνια στοιχεία πολύ μικρότερης τάξης αναλογικά με τα διαγώνια.

Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία διαταραχών, αν δούμε τα μη-διαγώνια στοιχεία ως διαταραχές ενός διαγώνιου πίνακα. Γράφουμε

$$K = K_0 + \lambda\eta, \quad \lambda \propto \frac{1}{l(l+1)}. \quad (3.11)$$

Ως $\lambda\eta$ έχουμε βάλει τα μη διαγώνια στοιχεία. Ο πίνακας Ω είναι

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \sqrt{K_{ij}}, \\ \Omega_{ij} &= (\Omega_0)_{ij} + \lambda\epsilon_{ij} + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Με

$$\epsilon_{ij} = \frac{i + \frac{1}{2}}{\sqrt{i(i+1)}} \frac{1}{\Omega_i + \Omega_{i+1}} \delta_{i+1,j} + \frac{j + \frac{1}{2}}{\sqrt{j(j+1)}} \frac{1}{\Omega_j + \Omega_{j+1}} \delta_{i,j+1}. \quad (3.13)$$

Ο πίνακας W_1 έχει διαγώνια στοιχεία, έτσι, έχουμε

$$W_1 = W_1^{(0)} + \lambda W_1^{(1)} + \dots \quad (3.14)$$

Ο πίνακας W_2 αποτελείται από μη διαγώνια στοιχεία γι' αυτό αναπτύσσεται ως εξής

$$W_2 = \lambda W_2^{(0)} + \lambda^2 W_2^{(1)} + \dots \quad (3.15)$$

Τέλος, ο πίνακας W_3 έχει διαγώνια στοιχεία και μπορεί να αναπτυχθεί όπως φαίνεται παρακάτω

$$W_3 = W_3^{(0)} + \lambda W_3^{(1)} + \dots \quad (3.16)$$

Αυτό που θα κάνουμε τώρα είναι να βρούμε τους πίνακες ζ και γ που γράψαμε νωρίτερα

$$\zeta = \frac{1}{2} W_2^T W_1^{-1} W_2 \quad (3.17)$$

$$\zeta_0 = \frac{\epsilon_n^2}{2\Omega_n}, \quad (3.18)$$

όπου

$$\epsilon_n = \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}} \frac{1}{\Omega_n + \Omega_{n+1}}. \quad (3.19)$$

Ο γ πίνακας είναι

$$\gamma = W_3 - \zeta \quad (3.20)$$

$$\gamma_D = V\gamma V^T. \quad (3.21)$$

Ο πίνακας V αναπτύσσεται ως

$$V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \dots \quad (3.22)$$

και έχουμε

$$\gamma = W_3 - \zeta = \Omega_0 + \lambda\epsilon + \dots, \quad (3.23)$$

$$\gamma_D = V\gamma V^T,$$

$$(\Omega_{n+i} + \dots)\delta_{ij} = (V_0 + \lambda V_1 + \dots)(\Omega + \lambda\epsilon_0 + \dots)(V_0^T + \lambda V_1^T + \dots), \quad (3.24)$$

$$V_0^2 \Omega_0 = \Omega_0,$$

$$\Rightarrow V_0 = I. \quad (3.25)$$

Θα υπολογίσουμε τον πίνακα ζ'

$$\begin{aligned} \zeta' &= \gamma_D^{-\frac{1}{2}} V \zeta V^T \gamma_D^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\gamma_D^{-\frac{1}{2}})_0 \zeta_0 (\gamma_D^{-\frac{1}{2}})_0 \\ \Rightarrow \zeta'_0 &= \frac{\epsilon_n^2}{2\Omega_n \Omega_{n+1}} \delta_{i,1} \delta_{j,1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Οι ποσότητες ξ είναι

$$\xi = \frac{\zeta'}{1 + \sqrt{1 - \zeta'^2}} \approx \frac{\zeta'}{2}. \quad (3.27)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \Omega_n \Omega_{n+1} &= \left(\sqrt{2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2} \right) \left(\sqrt{2 + \frac{l(l+1)}{(n+1)^2} + \mu^2 a^2} \right) \\ &\approx \left(\sqrt{2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} (\Omega_n + \Omega_{n+1})^2 &\approx \left(2\sqrt{4 + \frac{l(l+1)}{n^2} + 2\mu^2 a^2} \right)^2 \\ &\approx 4 \left(\sqrt{2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Τα ζ' είναι

$$\zeta' \approx \frac{1}{8K_n^2} \quad (3.30)$$

Η μορφή των ξ είναι

$$\xi_n = \frac{1}{16K_n^2} = \frac{1}{16 \left(2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2 \right)^2}. \quad (3.31)$$

Η εντροπία για $l \gg N$ γίνεται

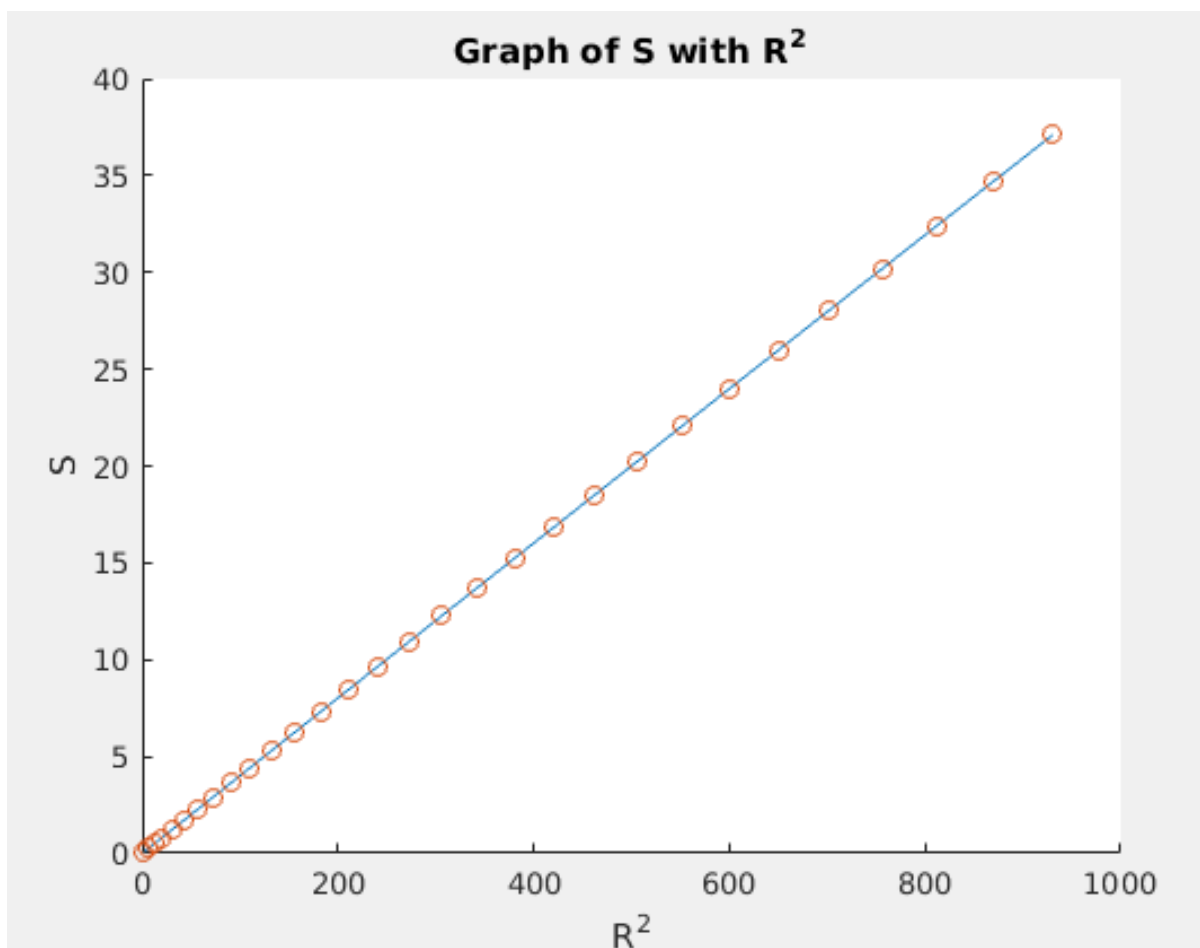
$$S_l \approx \xi_l(n)(1 - \log(\xi_l(n))) \approx \frac{1}{16K_n^2}(1 - \log \frac{1}{16K_n^2})$$

$$\approx \frac{1}{16 \left(2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2\right)^2} \left(1 - \log \frac{1}{16 \left(2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2\right)^2}\right). \quad (3.32)$$

Για $l \gg N$ η S_l είναι

$$S_l \propto \frac{\log l}{l^4}. \quad (3.33)$$

Άρα η σειρά $\sum_l (2l+1)S_l$ συγκλίνει και μπορούμε να προχωρήσουμε κάνοντας τον αριθμητικό υπολογισμό της εντροπίας, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.10) και κάνοντας την ανάλυση που κάναμε αριθμητικά για σταθερή μάζα και παίρνοντας $a \rightarrow 0$. Για να γίνει όλο αυτό βάλουμε ένα όριο αποκοπής στα l αρκούντως μεγάλο ώστε να συγκλίνει επαρκώς η σειρά. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα της εντροπίας διεμπλοκής συναρτήσει με το $R^2 = (n + \frac{1}{2})^2$



Σχήμα 1: Διάγραμμα του S με το $R^2 = (n + \frac{1}{2})^2$

Η ευθεία γραμμή μπορεί να προσεγγιστεί από την ευθεία που βλέπουμε στη σχέση (3.35)

$$S = 0.2943MR^2. \quad (3.34)$$

Έτσι, επιβεβαιώθηκε ο area law.

3.2 Εντροπία διεμπλοκής του συμπληρωματικού υποσυστήματος

Αντί να ολοκληρώσουμε ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του υποσυστήματος που θεωρήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του συμπληρωματικού υποσυστήματος και να δούμε αν η εντροπία είναι ίδια στις δύο περιπτώσεις, όπως αναμένουμε λόγω της πρώτης ιδιότητας της εντροπίας που αναφέρθηκε στην εισαγωγή, την ιδιότητα της συμπληρωματικότητας. Αυτό θα γίνει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που έγινε και στην προηγούμενη ενότητα. Ο πίνακας πυκνότητας του συνολικού συστήματος είναι ο

$$\begin{aligned} \rho(x_1, \dots, x_N; x'_1, \dots, x'_N) &= \frac{(\det \Omega)^{\frac{N}{2}}}{\pi^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x_n^T W_1 x_n + x_n^T W_2 x_{N-n})} \\ &\quad e^{\frac{1}{2}(+x_{N-n}^T W_2^T x_n + x_{N-n}^T W_3 x_{N-n})} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2}(x_n^T W_1 x'_n + x_n^T W_2 x'_{N-n} + x_{N-n} W_2^T x'_n)} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2}x'_{N-n} W_3 x'_{N-n}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Χρησιμοποιούμε το Γκαουσιανό ολοκλήρωμα

$$\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_i e^{-\vec{x}^T A \vec{x} - Bx} = \sqrt{\frac{\pi^N}{\det A}} e^{\frac{1}{4} B^T A^{-1} B}. \quad (3.36)$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_{red}(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x'_n) &= \pi^{\frac{-n}{2}} \sqrt{\frac{\det \Omega}{\det W_3}} e^{\frac{1}{4} x^T W_2 W_3^{-1} W_2^T x} \\ &\quad \times e^{+\frac{1}{4} x' W_2 W_3^{-1} W_2^T x' - \frac{1}{2} x W_1 x} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{4} x' W_2 W_3^{-1} W_2^T x + \frac{1}{4} x' W_2 W_3^{-1} W_2^T x'} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2} x' W_1 x'}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Στη σχέση που προέκυψε ολοκληρώσαμε ως προς τις συντεταγμένες $\{x_{n+1}, \dots, x_N\}$ σε αντίθεση με τη σχέση (2.29), όπου είχαμε ολοκληρώσει ως προς τα $\{x_1, \dots, x_n\}$. Ορίζουμε τους πίνακες $\zeta = \frac{1}{2} W_2 W_3^{-1} W_2^T$, τον πίνακα ζ πριν τον είχαμε ορίσει ως $\zeta = 1/2 W_2^T W_1^{-1} W_2$ και $\alpha = W_1 - \zeta$, όπως ορίζουμε $y = \alpha_D^{\frac{1}{2}} V x$.

$$\rho_{red} \propto e^{-\frac{1}{2}(y^2 + y'^2) + y^T V^T \alpha_D^{\frac{1}{2}} \zeta \alpha_D^{\frac{1}{2}} V y'}. \quad (3.38)$$

Πάλι ορίζουμε $y = W^{-1} z$ και έχουμε

$$\rho_{out}(x_{n+1}, \dots, x_N; x'_{n+1}, \dots, x'_N) \propto \prod_{i=n+1}^N e^{-\frac{1}{2}(z_i^2 + (z'_i)^2) + \zeta'_i z_i z'_i}. \quad (3.39)$$

Βλέπουμε ότι ο τελεστής πυκνότητας που προκύπτει είναι

$$\rho_{out}(x_{n+1}, \dots, x_N; x'_{n+1}, \dots, x'_N) \propto \rho(z_{n+1}; z'_{n+1}) \otimes \dots \otimes \rho(z_N; z'_N). \quad (3.40)$$

Συγκρίνουμε, πάλι, τη μορφή του πίνακα πυκνότητας με αυτήν των 2 συζευγμένων ταλαντωτών και παρατηρούμε ότι $\gamma \rightarrow 1$ και $\zeta \rightarrow \zeta'_i$. Σε αυτήν την περίπτωση οι ιδιοτιμές γίνονται

$$\xi_i = \frac{\zeta'_i}{1 + \sqrt{1 - (\zeta'_i)^2}}. \quad (3.41)$$

Οι πίνακες K, W_1, W_2 και W_3 είναι οι ίδιοι που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Η ανάπτυξη των πινάκων είναι ίδια με πριν. Οι διαφορές που προκύπτουν είναι στον πίνακα ζ και στον πίνακα α . Η ανάλυση της μορφής τους φαίνεται παρακάτω.

$$\zeta = \frac{1}{2} W_2 W_3^{-1} W_2^T \quad (3.42)$$

$$\zeta_0 = \frac{\epsilon^2}{2\Omega_{n+i}}. \quad (3.43)$$

Ο α είναι

$$\alpha = W_1 - \zeta \quad (3.44)$$

$$\alpha_D = V\alpha V^T. \quad (3.45)$$

Ο πίνακας V αναπτύσσεται πάλι

$$V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \dots \quad (3.46)$$

και έχουμε

$$\alpha = W_1 - \zeta = \Omega_0 + \lambda\epsilon + \dots \quad (3.47)$$

$$\alpha_D = V\alpha V^T$$

$$(\Omega_i + \dots)\delta_{ij} = (V_0 + \lambda V_1 + \dots)(\Omega_0 + \lambda\epsilon + \dots)(V_0^T + \lambda V_1^T + \dots) \quad (3.48)$$

$$V_0^2 \Omega_0 = \Omega_0$$

$$\Rightarrow V_0 = I. \quad (3.49)$$

Τώρα, υπολογίζουμε το πίνακα ζ' .

$$\begin{aligned} \zeta' &= \alpha_D^{-\frac{1}{2}} V \zeta V^T \alpha_D^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\alpha_D^{-\frac{1}{2}})_0 \zeta_0 (\alpha_D^{-\frac{1}{2}})_0 \\ \zeta'_0 &= \frac{\epsilon_n^2}{2\Omega_n \Omega_{n+1}} \delta_{i,1} \delta_{j,1}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Όπου

$$\epsilon = \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}} \frac{1}{\Omega_n + \Omega_{n+1}}. \quad (3.51)$$

Οι ποσότητες ξ είναι

$$\xi = \frac{\zeta'}{1 + \sqrt{1 - \zeta'^2}} \approx \frac{\zeta'}{2}. \quad (3.52)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \Omega_n \Omega_{n+1} &= \left(\sqrt{2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + m^2 a^2} \right) \left(\sqrt{2 + \frac{l(l+1)}{(n+1)^2} + \mu^2 a^2} \right) \\ &\approx \left(\sqrt{2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} (\Omega_n + \Omega_{n+1})^2 &\approx \left(2 \sqrt{4 + \frac{l(l+1)}{n^2} + 2\mu^2 a^2} \right)^2 \\ &\approx 4 \left(\sqrt{2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Τα ζ' είναι

$$\zeta' \approx \frac{1}{8K_n^2} \quad (3.55)$$

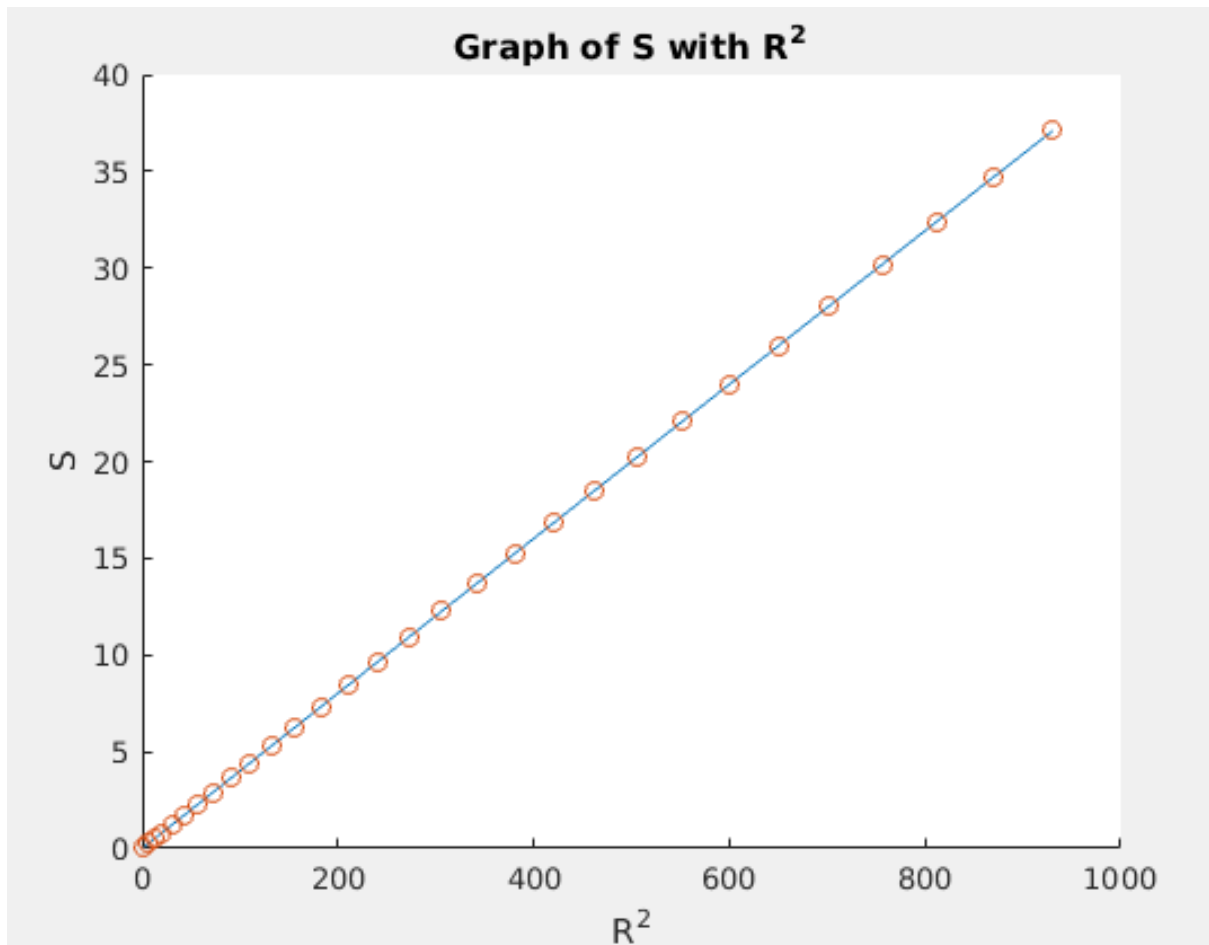
Η μορφή των ξ είναι

$$\xi_n = \frac{1}{16K_n^2} = \frac{1}{16 \left(2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + m^2 a^2 \right)^2}. \quad (3.56)$$

Η εντροπία για $l \gg N$ γίνεται

$$\begin{aligned} S_l &\approx \xi_l(n) (1 - \log(\xi_l(n))) \approx \frac{1}{16K_n^2} \left(1 - \log \frac{1}{16K_n^2} \right) \\ &\approx \frac{1}{16 \left(2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2 \right)^2} \left(1 - \log \frac{1}{16 \left(2 + \frac{l(l+1)}{n^2} + \mu^2 a^2 \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Το διάγραμμα όταν ολοκληρώσουμε ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του συμπληρωματικού υποχώρου είναι



Σχήμα 2: Διάγραμμα του S με το $R^2 = (n + \frac{1}{2})^2$ αφού έχουμε κάνει ολοκλήρωση ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του συμπληρωματικού υποχώρου

Βλέπουμε πως η εντροπία είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις, όπως ακριβώς περιμέναμε λόγω της ιδιότητας της συμπληρωματικότητας.

3.3 Εντροπία διεμπλοκής σε θεωρία πεδίου στις 2 + 1 διαστάσεις

Σε αυτή την ενότητα θα βρούμε την εντροπία σε με διδιάστατη θεωρία πεδίου. Ο τρόπος που γίνεται είναι παρόμοιος με αυτό που κάναμε στις 3+1 διαστάσεις. Θα διακριτοποιήσουμε τα πεδία ϕ . Αρχικά, αναπτύσσουμε τα πεδία στις κυκλικές αρμονικές και η Χαμιλτονιανή γίνεται

$$H = \sum_l \frac{1}{2} \int dr \left(\pi_l(r)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi_l(r)}{\sqrt{r}} \right) \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} \phi_l^2(r) + \mu^2 \phi_l^2 \right). \quad (3.58)$$

Για να διακριτοποιήσουμε την ακτινική συνιστώσα εισάγουμε ένα πλέγμα από κύκλους αντί για σφαίρες

$$H = \sum_l H_l = \frac{1}{2a} \sum_l \sum_{j=1}^N \left(\pi_{lm,j}^2 + \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\phi_{lm,j+1}}{\sqrt{j+1}} + \frac{\phi_{lm,j}}{\sqrt{j}} \right)^2 - \frac{l^2}{j^2} \phi_{lm,j}^2 + \mu^2 a^2 \right) \quad (3.59)$$

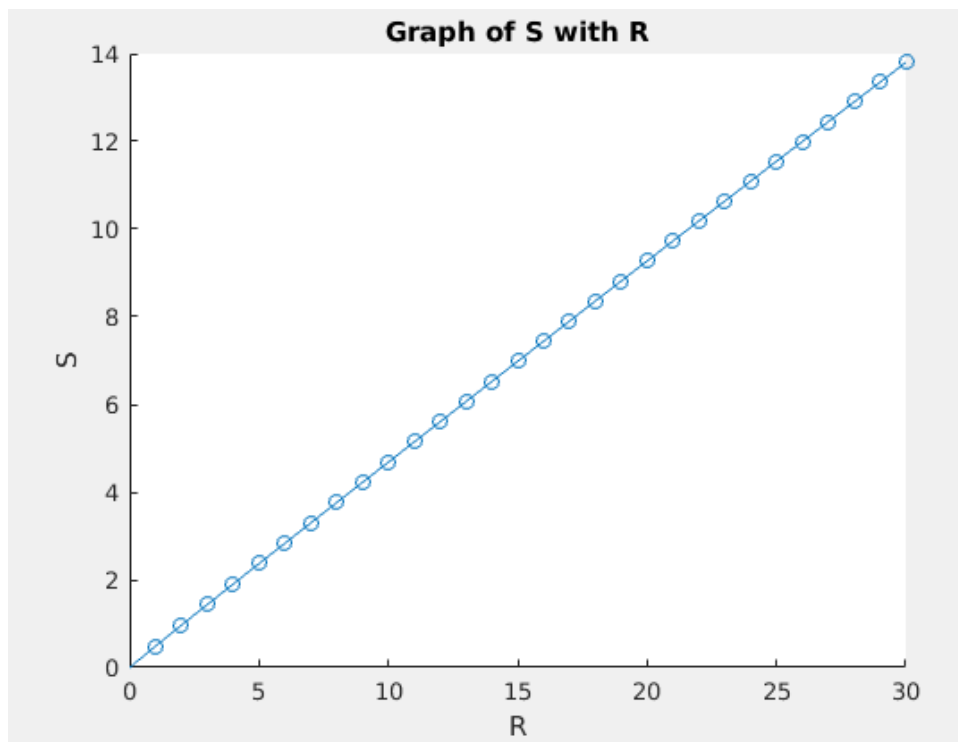
Η εντροπία σε αυτή την περίπτωση θα δίνεται από τον τύπο

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} S_l(n). \quad (3.60)$$

Βλέπουμε πως δεν έχουμε άθροιση ως προς τα m όπως στις 3 διαστάσεις (υπάρχει εξάρτηση μόνο από μία γωνία και, όχι, από 2 όπως στις 3 διαστάσεις) και γι' αυτό λείπει ο παράγοντας $2l + 1$. Ο πίνακας K γίνεται

$$K_{ij} = \left(\left(\frac{i + \frac{1}{2}}{i} \right) + \left(\frac{i - \frac{1}{2}}{i} \right) (1 - \delta_{i1}) + \frac{l^2}{i^2} + \mu^2 a^2 \right) \delta_{ij} - \frac{(i + \frac{1}{2})}{\sqrt{i(i+1)}} \delta_{i+1,j} - \frac{(j + \frac{1}{2})}{\sqrt{j(j+1)}} \delta_{i,j+1}. \quad (3.61)$$

Η ανάλυση για τον υπολογισμό της εντροπίας είναι η ίδια με πριν. Το διάγραμμα της εντροπίας συναρτήσει της ακτίνας ($R = n + \frac{1}{2}$) φαίνεται παρακάτω.

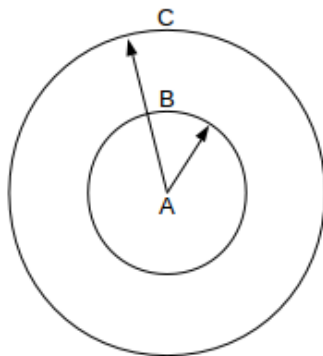


Σχήμα 3: Διάγραμμα του S με το $R = n + \frac{1}{2}$

Η ευθεία του διαγράμματος προσεγγίζεται από την ευθεία $S = 0.4586MR$. Συμπεραίνουμε πως προκύπτει ο area law και στις δύο διαστάσεις. Αν $a \rightarrow 0$, τότε, η εντροπία διεμπλοκής αποκλίνει. Δείξαμε πως η εντροπία είναι ανάλογη του εμβαδού της σφαίρας και κατ' αυτή την έννοια προσομοιάζει την εντροπία μελανών οπών.

4 Αριθμητικοί υπολογισμοί σε τριχοτομημένο σύστημα

Στα προηγούμενα κεφάλαια υπολογίσαμε την εντροπία διεμπλοκής στη θεωρία πεδίου μέσω αριθμητικών υπολογισμών θεωρώντας ένα διχοτομημένο σύστημα. Για τις $2+1$ διαστάσεις χρησιμοποιήσαμε τον αλγόριθμο (Παράρτημα Β.2) για να κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς στο τριχοτομημένο (tripartite) σύστημα το οποίο θεωρούμε πως αρχικά βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση.



Σχήμα 4: Διχοτομημένο σύστημα

Αρχικά, υπολογίζουμε τον συντελεστή του area law. Έπειτα, δείχνουμε την ισχύ της ισχυρής υποαθροιστικότητας στο τριχοτομημένο σύστημα. Πριν το κάνουμε αυτό, χρειάζεται να υπολογίσουμε τους όρους υποδεέστερης τάξης που προκύπτουν στο ανάπτυγμα της εντροπίας διεμπλοκής για μεγάλες ακτίνες, το ανάπτυγμα της εντροπίας διεμπλοκής σε αυτή την περίπτωση είναι $S = kA + \text{όροι υποδεέστερης τάξης}$, και θέλουμε να δούμε την εξάρτηση αυτών των όρων από των λόγο των αποστάσεων που θεωρούμε, $\lambda = R_1/R_2$ με $R_1 = n_1 a$, μικρή ακτίνα του σχήματος \mathfrak{S} , και $R_2 = n_2 a$, μεγάλη ακτίνα του σχήματος \mathfrak{S} .

4.1 Συσχέτιση του area law σε διχοτομημένο και τριχοτομημένο σύστημα

Τώρα, υπολογίζουμε αριθμητικά τον συντελεστή του area law στο τριχοτομημένο σύστημα. Αυτό που κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την εντροπία διεμπλοκής για το υποσύστημα B . Στο διχοτομημένο σύστημα είχαμε

$$\begin{aligned} S_{a.l.} &= c_{bip} n \\ \Rightarrow S_{a.l.} &= c_{bip} \frac{L}{2\pi a} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Για το τριχοτομημένο σύστημα έχουμε ότι $L = 2\pi a(n_1 + n_1/\lambda)$ και

$$\begin{aligned} S_{a.l.} &= c_{trip} n_1 = c_{trip} \frac{L}{2\pi a(1 + \frac{1}{\lambda})} \\ \text{Αν } k_{bip} &= k_{trip} \Rightarrow c_{bip} = \frac{c_{trip}}{1 + \frac{1}{\lambda}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Παρακάτω φαίνεται και ο πίνακας που δείχνει τις τιμές c_{trip} , $(1 + 1/\lambda)c_{bip}$.

$m = 0$		
λ	c_{trip}	$(1 + 1/\lambda)c_{bip}$
1/5	2.532558	2.7516
1/4	2.161035	2.293
2/7	1.986572	2.0637
1/3	1.822930	1.8344
3/8	1.674845	1.68153
2/5	1.620440	1.6051
3/7	1.576206	1.5287
1/2	1.455296	1.3758
4/7	1.339894	1.26115
3/5	1.300548	1.2229
2/3	1.238057	1.1465
3/4	1.198935	1.0700
4/5	1.173503	1.03185

Πίνακας 1: Πίνακας που δείχνει πως συσχετίζεται ο area law του τριχοτομημένου με το διχοτομημένο σύστημα για $\mu = 0$

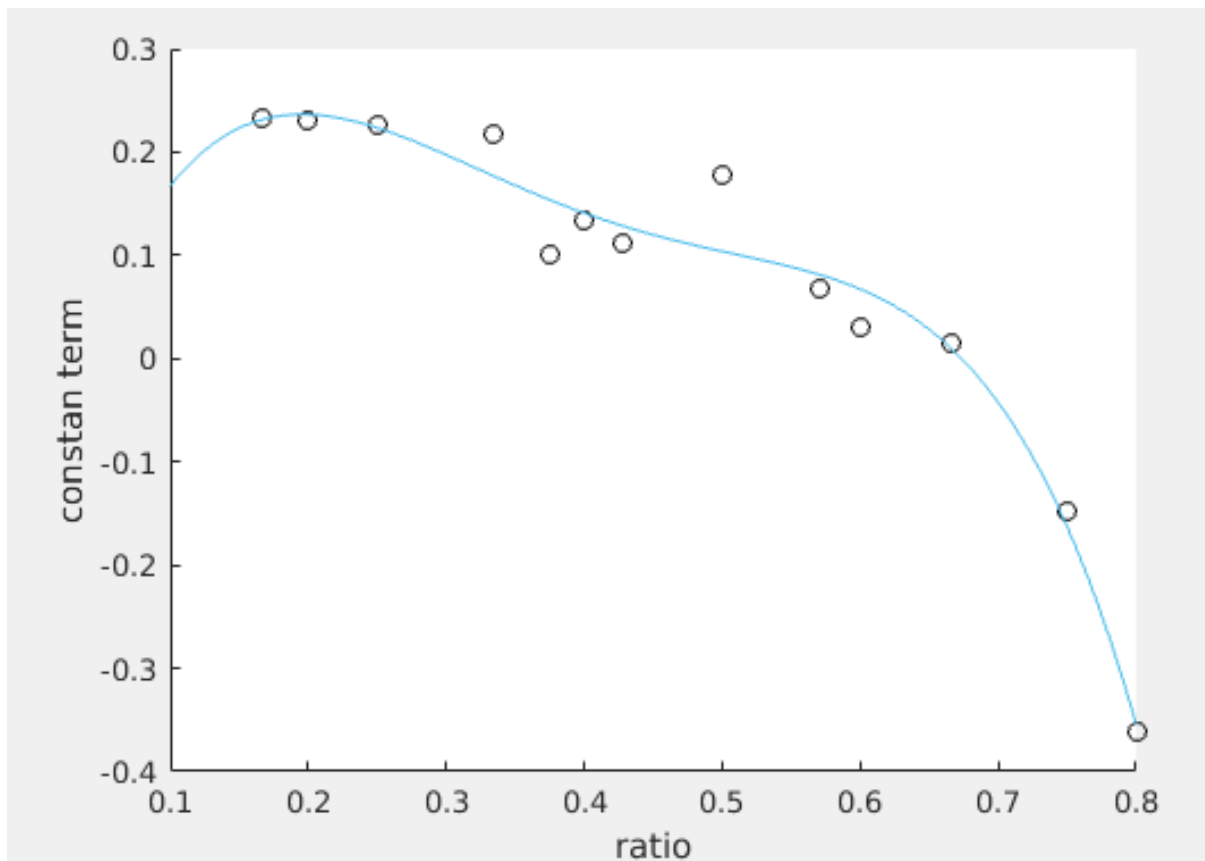
Παρατηρούμε πως υπάρχουν κάποιες διαφορές στις δύο τιμές, αυτό γίνεται γιατί παίρνουμε λόγους αποστάσεων και όταν υπολογίζουμε την ακτίνα $R_2 = \text{den}$ βγαίνουν ακέραιοι αριθμοί ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε τους αριθμητικούς υπολογισμούς, με αποτέλεσμα να παίρνουμε τα ακέραια τους μέρη για την απόσταση R_2 για τον υπολογισμό της εντροπίας. Ακόμη, βλέπουμε πως όσο μικρότεροι είναι οι λόγοι τόσο μεγαλύτερες αποκλίσεις έχουν οι δύο τιμές, αυτό συμβαίνει γιατί παίρνουμε λιγότερα σημεία στον υπολογισμό του τριχοτομημένου συστήματος με αποτέλεσμα να μην έχουμε καλή ακρίβεια.

4.2 Υποδεέστερης τάξης όροι στο τριχοτομημένο σύστημα

Η εύρεση των όρων υποδεέστερης τάξης στο τριχοτομημένο βρέθηκαν αριθμητικά χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που βρίσκεται στο παράρτημα B.2, με σκοπό να βρούμε την εντροπία όταν έχουμε κάνει ολοκλήρωση ως προς τους βαθμούς ελευθερίας δύο υποσυστημάτων. Παρακάτω, παρατίθενται τα διαγράμματα των όρων υποδεέστερης τάξης που βρέθηκαν συναρτήσει των λόγων των αποστάσεων που θεωρήσαμε πως έχουν οι χώροι των οποίων τους βαθμούς ελευθερίας ολοκληρώσαμε και έχουν βρεθεί για κάποιες τιμές που δώσαμε στη μάζα. Για $m = 0.5$ οι τιμές που προκύπτουν φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα και το διάγραμμα των όρων υποδεέστερης τάξης συναρτήσεων των λόγων των αποστάσεων φαίνεται στο σχήμα 4.

$m = 0.5$	
λόγος ακτινών	όροι υποδεέστερης τάξης
1/6	0.232482
1/5	0.231199
1/4	0.227323
2/7	0.149914
1/3	0.217562
3/8	0.101050
2/5	0.133559
3/7	0.111788
1/2	0.177926
4/7	0.067472
3/5	0.030044
2/3	0.014805
3/4	-0.147722
4/5	-0.361876

Πίνακας 2: Πίνακας των subleading terms για $m = 0.5$

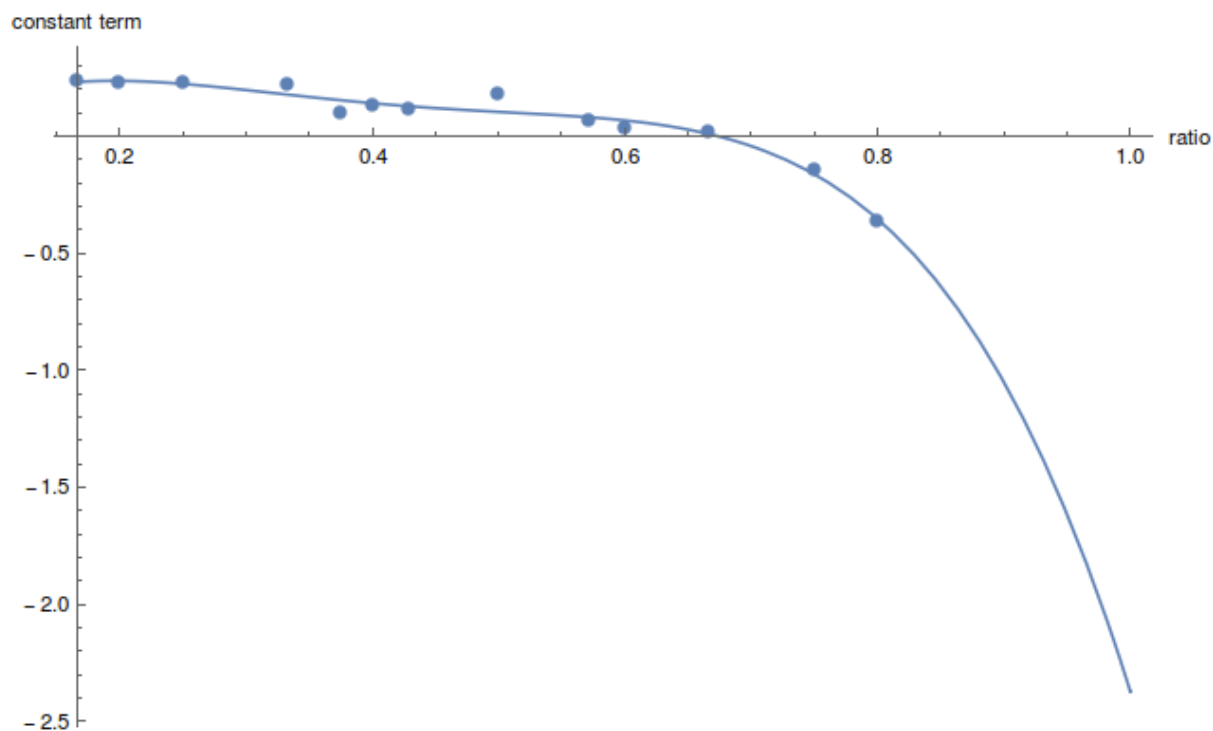


Σχήμα 5: Διάγραμμα των όρων υποδεέστερης τάξης με τον λόγο απόστάσεων για $m = 0.5$

Για $m = 1$

$m = 1$	
λόγος ακτινών	όροι υποδεέστερης τάξης
1/6	0.136004
1/5	0.135136
1/4	0.132803
2/7	0.088607
1/3	0.127815
3/8	0.061131
2/5	0.080183
3/7	0.067977
1/2	0.106998
4/7	0.045667
3/5	0.026065
2/3	0.023283
3/4	-0.044196
4/5	-0.131333

Πίνακας 3: Πίνακας των όρων υποδεέστερης τάξης για $m = 1$

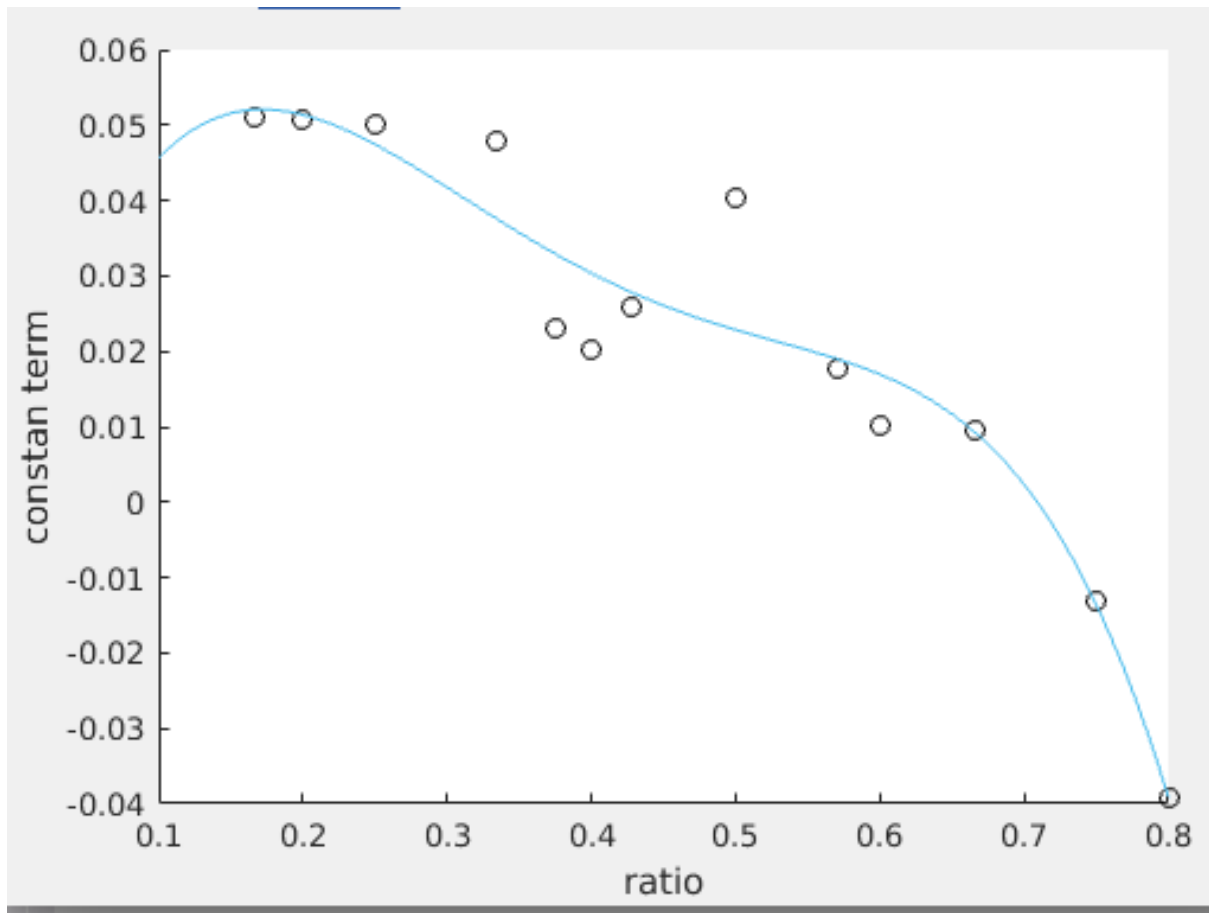


Σχήμα 6: Διάγραμμα των όρων υποδεέστερης τάξης με τον λόγο απόστάσεων για $m = 1$

Για $m = 2$

$m = 2$	
λόγος ακτινών	όροι υποδέστερης τάξης
1/6	0.051084
1/5	0.050747
1/4	0.049964
2/7	0.033365
1/3	0.048023
3/8	0.023143
2/5	0.020276
3/7	0.025735
1/2	0.040359
4/7	0.017555
3/5	0.010313
2/3	0.009602
3/4	-0.013055
4/5	-0.039073

Πίνακας 4: Πίνακας των όρων υποδέστερης τάξης για $m = 2$

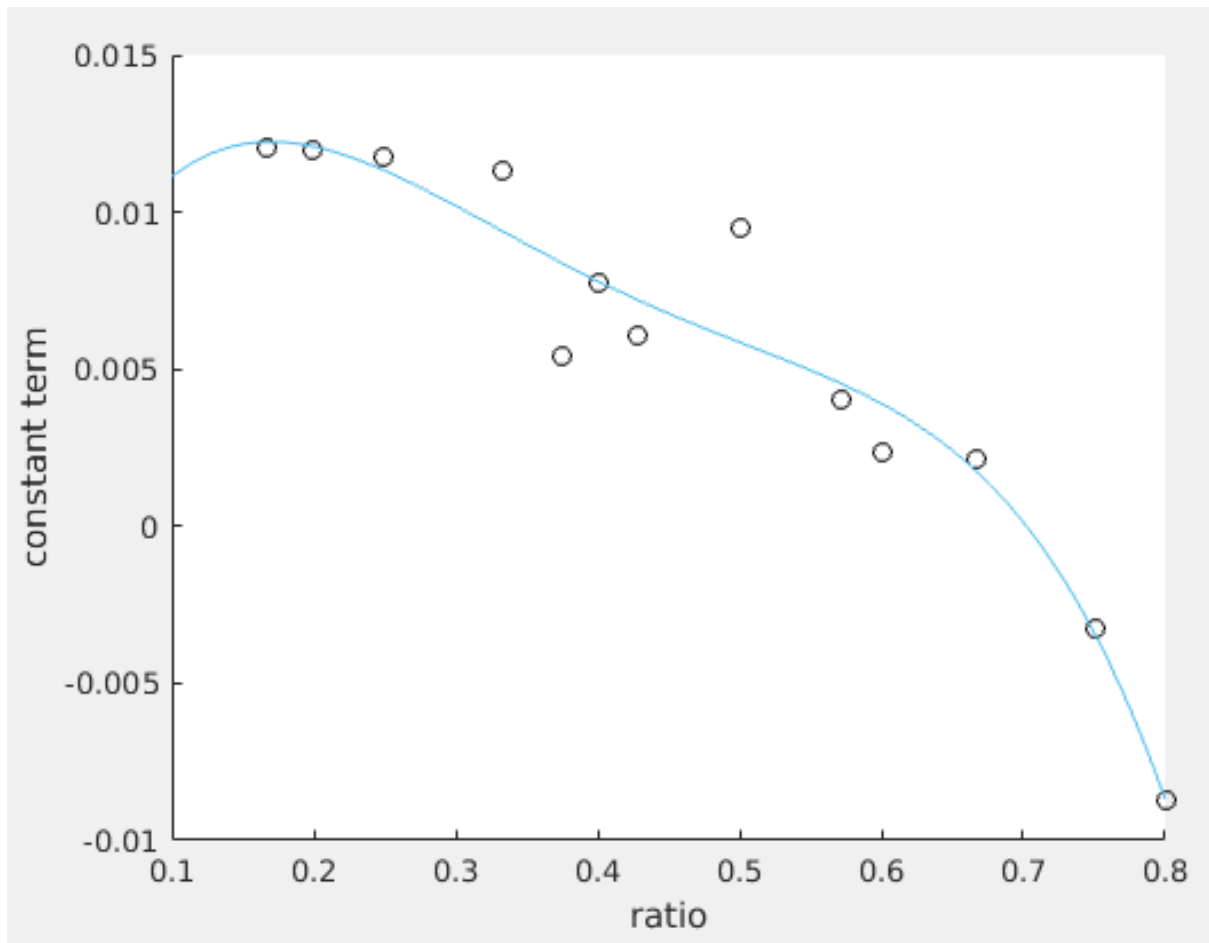


Σχήμα 7: Διάγραμμα των όρων υποδεέστερης τάξης με τον λόγο απόστάσεων για $m = 2$

Τέλος, για $m = 4$

$m = 4$	
λόγος ακτινών	όροι υποδέστερης τάξης
1/6	0.012071
1/5	0.011989
1/4	0.011777
2/7	0.007874
1/3	0.011330
3/8	0.005443
2/5	0.007722
3/7	0.006042
1/2	0.009480
4/7	0.004064
3/5	0.002342
2/3	0.002121
3/4	-0.003227
4/5	-0.008749

Πίνακας 5: Πίνακας των όρων υποδεέστερης τάξης για $m = 4$



Σχήμα 8: Διάγραμμα των όρων υποδεέστερης τάξης με τον λόγο αποστάσεων για $m = 4$

Τα διαγράμματα υποδεικνύουν πως ο σταθερός όρος παρουσιάζει μία εξάρτηση από το λόγο των αποστάσεων και βλέπουμε πως ανεξαρτήτως της μάζας που εισάγουμε, ο τρόπος εξάρτησης είναι ίδιος και φαίνεται από την μορφή τους. Στα παραπάνω διαγράμματα στον άξονα x έχουμε λόγους αποστάσεων και ως αποστάσεις έχουμε πάρει σημεία πάνω στο πλέγμα και όχι σε κάποιο ενδιάμεσο διάστημα, γι' αυτό βλέπουμε πως η μορφή όλων των διαγραμμάτων είναι παρόμοια. Η μορφή των διαγραμμάτων μοιάζει με αυτό που προκύπτει στην ολογραφία, όπου στις $2 + 1$ διαστάσεις προκύπτουν οι κατανοοειδείς [12].

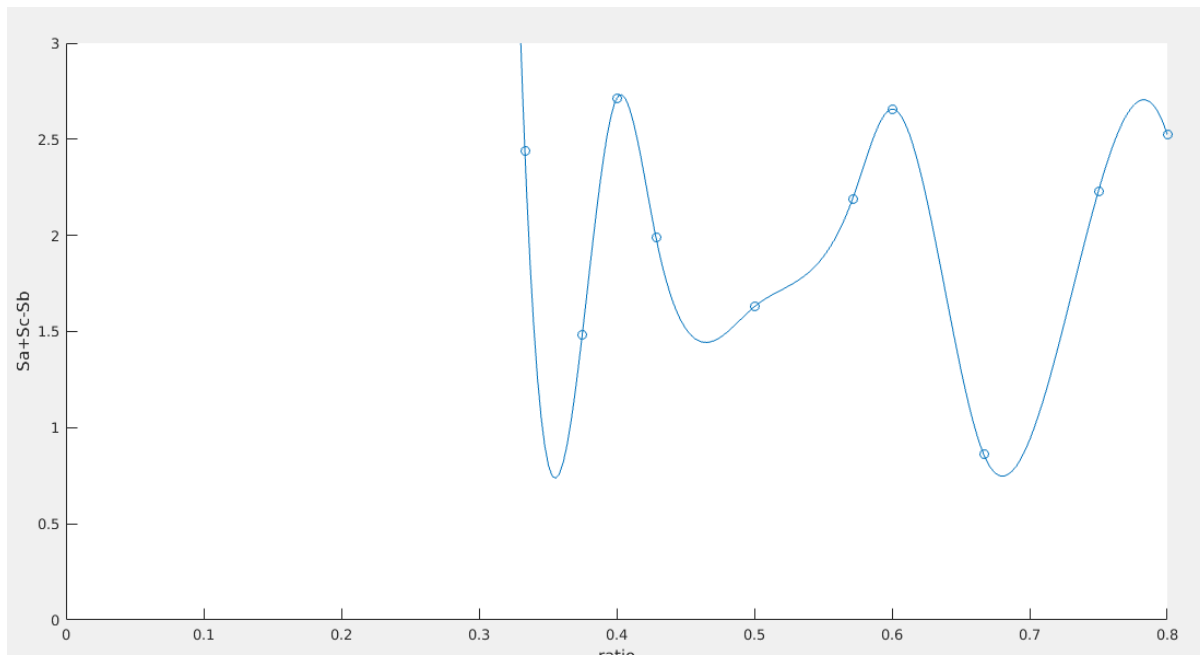
4.3 Ισχυρή υποαθροιστικότητα σ' ένα τριχοτομημένο σύστημα

Αφού βρήκαμε πως μεταβάλλονται οι όροι υποδεέστερης τάξης ανάλογα με τον λόγο των αποστάσεων, μπορούμε να συνεχίσουμε στην επιβεβαίωση της ισχύος της ισχυρής υποαθροιστικότητας. Στην εισαγωγή μιλήσαμε για μία ιδιότητα της εντροπίας την ισχυρή υποαθροιστικότητα η οποία είναι $S(A \cup B \cup C) + S(B) \leq S(A \cup B) + S(B \cup C)$, όμως, το ολικό σύστημα έχουμε θεωρήσει πως είναι σε καθαρή κατάσταση οπότε $S(A \cup B \cup C) = 0$ και $S(A \cup B) = S(C)$ λόγω της συμπληρωματικότητας, ακόμη, ισχύει ότι $S(C \cup B) = S(A)$. Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε αριθμητικά ότι $0 < -S(B) + S(A) + S(C)$. Ο area law δεν συνεισφέρει γιατί είναι ανάλογος του αθροίσματος των ακτινών των κύκλων των οποίων

τους βαθμούς ελευθερίας έχουμε ολοκληρώσει

$$S_{a.l.}(A) + S_{a.l.}(C) - S_{a.l.}(B) = AR_1 + AR_2 - A(R_1 + R_2) = 0. \quad (4.3)$$

Έτσι, βλέπουμε πως στη σχέση οι μόνοι όροι που συνεισφέρουν είναι οι όροι υποδεέστερης τάξης. Το διάγραμμα που προκύπτει είναι



Σχήμα 9: Αριθμητική επαλήθευση της strong subadditivity $m = 0$

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι στο σύστημα που έχουμε, ισχύει η ισχυρή υποαθροιστικότητα.

5 Συμπεράσματα και μελλοντικές προεκτάσεις

Εν συντομία αυτό που κάναμε ήταν να μελετήσουμε την εντροπία διεμπλοκής σε διακριτοποιημένη θεωρία πεδίου. Για να την υπολογίσουμε ξεκινήσαμε αναφέροντας την κβαντική διεμπλοκή και ένα μέτρο της, την εντροπία διεμπλοκής. Έπειτα, δείξαμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την εντροπία διεμπλοκής σε σύστημα N συζευγμένων ταλαντωτών στη θεμελιώδη κατάσταση, με σκοπό να χρησιμοποιήσουμε αυτά τ' αποτελέσματα στη θεωρία πεδίου. Συνεχίσαμε δείχνοντας στη θεωρία πεδίου πως προκύπτει η εξάρτηση της εντροπίας από την επιφάνεια του χώρου του οποίου τους βαθμούς ελευθερίας ολοκληρώσαμε. Δείξαμε το αποτέλεσμα αυτό γραφικά για τις 3 αλλά και τις 2 διαστάσεις, αφού θεωρήσαμε πως το σύστημα ήταν διατεταγμένο σ' ένα πλέγμα από σφαίρες. Δείξαμε και την συμπληρωματικότητα της εντροπίας, αφού βρήκαμε την εντροπία ολοκληρώνοντας ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του εξωτερικού υποχώρου και αυτό έγινε στις 3 διαστάσεις. Στις δύο διαστάσεις βρήκαμε τον συντελεστή του area law και στην περίπτωση που είχαμε ένα τριχοτομημένο σύστημα και δείξαμε πως ο συντελεστής του area law του τριχοτομημένου και του διχοτομημένου συστήματος είναι ίδιοι, αυτό δείχνει πως ο area law εμφανίζει κάποια συσχέτιση με την τοπικότητα της θεωρίας πεδίου. Εκεί, βρήκαμε και τον όρο υποδεέστερης τάξης που δείχνει πως αλλάζει ανάλογα με τον λόγο των δύο αποστάσεων των χώρων των οποίων τους βαθμούς ελευθερίας ολοκληρώσαμε και ο τρόπος που αλλάζει μοιάζει με αυτόν που προκύπτει από την ολογραφία. Τον υπολογισμό των όρων υποδεέστερης τάξης τον κάναμε προκειμένου να δείξουμε πως ισχύει η ιδιότητα της ισχυρής υποαθροιστικότητας της εντροπίας διεμπλοκής στο τριχοτομημένο σύστημα.

Ποιες μπορούν να είναι οι μελλοντικές ερευνητικές προεκτάσεις;

- Ενδιαφέρουσες γενικεύσεις περιλαμβάνουν τη χρήση ενός πεδίου βαθμίδας ή φερμιονικού πεδίου αντί για βαθμωτού, ώστε να δούμε τι μπορεί να προκύψει σε αυτή την περίπτωση. Επίσης, θα μπορούσαμε να μελετήσουμε τη θεωρία πεδίου σε καμπυλομένους χωροχρόνους, όπως dS ή AdS που έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην ολογραφία και στην κβαντική βαρύτητα.
- Ένα σημαντικό βήμα θα είναι να καταφέρουμε να εξηγήσουμε την ομοιότητα που προκύπτει στην μορφή των διαγραμμάτων των subleading όρων στο tripartite σύστημα με αντίστοιχα αποτελέσματα στην ολογραφία.
- Μελλοντικά θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την εντροπία διεμπλοκής σε διεγερμένες καταστάσεις, εκτός από τη θεμελιώδη κατάσταση που έχουν γίνει οι υπολογισμοί, αυτό είναι κάτι το οποίο θα μπορούσε να επιτευχθεί με μεγαλύτερη ευκολία μέσω των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής.

A' Φάσμα του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας

Χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Hermite ως ιδιοσυναρτήσεις του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας θα βρούμε τις ιδιοτιμές του. Αυτό γίνεται όπως φαίνεται παρακάτω

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \sqrt{\frac{\gamma - \zeta}{\pi}} e^{-\frac{\gamma}{2}(x^2+x'^2) + \zeta x x'} H_n(\sqrt{a}x) e^{-\frac{ax^2}{2}}. \quad (A'.1)$$

Ορίζουμε $y = \sqrt{a}x$ και έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{\gamma - \zeta}{\pi}} e^{-\frac{\gamma}{2a}(y^2+y'^2) + \frac{\zeta}{a} y y'} H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}}. \quad (A'.2)$$

Μετά από τη συμπλήρωση των τετραγώνων έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \sqrt{\frac{\gamma - \zeta}{\pi a}} e^{-\frac{\gamma + \alpha}{2a}(y' - \frac{\zeta}{\gamma + \alpha} y)^2 - \frac{y^2}{2}} H_n(y'). \quad (A'.3)$$

Επίσης, ορίζουμε $z = -\sqrt{\frac{\gamma + \alpha}{2a}}(y' - \frac{\zeta}{\gamma + \alpha} y)$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') &= \sqrt{\frac{\gamma - \zeta}{\pi a}} \sqrt{\frac{2a}{\gamma + \alpha}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \\ &\quad \times H_n\left(\sqrt{\frac{2a}{\gamma + \alpha}} z + \frac{y}{\gamma + \alpha} y\right). \end{aligned} \quad (A'.4)$$

Υπάρχει η ακόλουθη σχέση για τα πολυώνυμα Hermite

$$H_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k(x) (2y)^{n-k}. \quad (A'.5)$$

Χρησιμοποιώντας την (A'.5), συνεχίζουμε για να βρούμε τις ιδιοτιμές της

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') &= \sqrt{\frac{\gamma - \zeta}{\pi}} \sqrt{\frac{2}{\gamma + \alpha}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k\left(\sqrt{\frac{2a}{\gamma + \alpha}} z\right) \left(\frac{\zeta y}{\gamma + \alpha}\right)^{n-k}. \end{aligned} \quad (A'.6)$$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των πολυωνύμων Hermite

$$H_n(cx) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c^{n-2i} (c^2 - 1)^i \binom{n}{2i} \frac{(2i)!}{i!} H_{n-2i}(x). \quad (A'.7)$$

Παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') &= \sqrt{\frac{\gamma - \zeta}{\pi}} \sqrt{\frac{2}{\gamma + \alpha}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \\ &\quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\sqrt{\frac{2a}{\gamma + \alpha}}\right)^{n-2i} \left(\frac{2a}{\gamma + \alpha} - 1\right)^i \times \\ &\quad \times \binom{n}{2i} \frac{(2i)!}{i!} H_{k-2i}(z) \left(\frac{\zeta y}{\gamma + \alpha}\right)^{n-k}. \end{aligned} \quad (A'.8)$$

Έχοντας γνώση της σχέσης ορθογωνιότητας των πολυωνύμων, που είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}. \quad (\text{A'.9})$$

Με την βοήθεια της παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') &= \sqrt{\frac{\gamma - \zeta}{\pi}} \sqrt{\frac{2}{\gamma + \alpha}} e^{-\frac{y'^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \times \\ &\times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma + \alpha}}^{n-2i} \left(\frac{2\alpha}{\gamma + \alpha} - 1 \right)^2 \times \\ &\times \binom{n}{2i} \frac{(2i)!}{i!} H_{k-2i}(z) H_0(z) \left(\frac{\zeta y}{\gamma + \alpha} \right)^{n-k}. \end{aligned} \quad (\text{A'.10})$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (A'.9), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') &= \sqrt{\frac{\gamma - \zeta}{\pi}} \sqrt{\frac{2}{\gamma + \alpha}} e^{-\frac{y'^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \times \\ &\times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma + \alpha}}^{n-2i} \left(\frac{2\alpha}{\gamma + \alpha} - 1 \right)^2 \times \\ &\times \binom{k}{2i} \frac{(2i)!}{i!} \sqrt{\pi} \delta_{k-2i,0} \left(\frac{2\zeta y}{\gamma + \alpha} \right)^{n-k}. \end{aligned} \quad (\text{A'.11})$$

Μετά την αντικατάσταση $k = 2m$ και $0 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') &= \sqrt{\frac{2(\gamma - \zeta)}{\gamma + \alpha}} e^{-\frac{y'^2}{2}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} \sum_{i=0}^m \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma + \alpha}} \right)^{2m-2i} \\ &\times \left(\frac{\alpha - \gamma}{\gamma + \alpha} \right)^i \binom{2m}{2i} \delta_{2m-2i,0} \left(\frac{2\zeta y}{\gamma + \alpha} \right)^{n-2m}. \end{aligned} \quad (\text{A'.12})$$

Τέλος, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \rho(x, x') f_n(x') = \left(1 - \frac{\zeta}{\gamma + \alpha} \right) \left(\frac{\zeta}{\gamma + \alpha} \right)^n e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} H_n(\sqrt{\alpha} x). \quad (\text{A'.13})$$

Καταλήγουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι

$$p_n = (1 - \xi^2) \xi^{2n}. \quad (\text{A'.14})$$

B' Κώδικας Matlab

B'.1 Ο κώδικας από τον οποίο κάναμε τον υπολογισμό της εντροπίας στις $3+1$ διαστάσεις

```
clear all; clc; clearvars;
tic
N= 60;
m= 0;
lmax= 2000;
nmin= 1;
nmax= 30;
entr=[nmin:nmax];
for n=nmin:nmax
entropy1=[0:lmax];
for l= 0 : lmax
ind=[1:N];
ind2=[1:N-1];
for i=1 : N
ind(i)=2+(l*(l+1)+1/2)/(i^2)+m;
end
for i=1 : N-1
ind2(i)=-i*((i+1/2)^2)/(i*(i+1));
end
K=diag(ind,0)+diag(ind2,1)+diag(ind2,-1);
omega=sqrtm(K);
A=omega(1:n,1:n);
B=omega(1:n,n+1:N);
C=omega(n+1:N,n+1:N);
b=(transpose(B)*(A\B))/2;
g=C-b;
betas=real(eig(g\b));
xi=XI(betas);
sum=0;
for i= 1 : N-n
sum = sum + entropy(xi(i));
end
entropy1(l+1)=sum;
end
ent=0;
for l=0:lmax
ent=ent+(2*l+1)*entropy1(l+1);
end
entr(n)=ent;
end
x=[nmin:nmax]
```

```
x=(x+1/2);  
R=x.^2;  
plot(R,Entr,'-')  
plot(R,Entr,'o')  
title('Graph of S with R')  
xlabel('R')  
ylabel('S')
```

B'.2 Κώδικας για δαχτυλίδι

```
clear all;clc;clearvars;
tic
fid = fopen('annulus1_2.4.1.txt','w');
N=60;
m=4;
lmax=5*8192;
rat=1/2;
n1=N/10+1;
n2=fix(n1/rat);
k=0;
while n2<7*N/10
    if mod(n2,1)==0
        k=k+1;
        cases(k)=n1;
        n1=n1+1;
        n2=fix(n1/rat);
    end
    casenum=k;
end

for k=1 : casenum
    torent(k)=0;
end
for l=0:lmax
    for q=1:casenum
        n1=cases(q);
        n2=fix(cases(q)/rat);
        n=n2-n1;
        for i=1:N
            j=mod(i-1+n1,N)+1;
            ind(i)=2+l^2/(j^2)+m^2;
        end
        for i=1:N-1
            j=mod(i-1+n1,N)+1;
            ind1(i)=-(j+1/2)/sqrt((j)*(j+1));
        end
        K=diag(ind,0)+diag(ind1,1)+diag(ind1,-1);
        K(N-n1+1,N-n1)=0;
        K(N-n1,N-n1+1)=0;
        Kp=-(N-n1+1/2)/sqrt((N-n1-1)*(N-n1));
        K(1,N)=Kp;
        K(N,1)=Kp;
        omega=sqrtm(K);
        A=omega(1:n,1:n);
    end
end
```

```

B=omega(1:n,n+1:N);
C=omega(n+1:N,n+1:N);
beta=(transpose(B)*(A\B))/2;
gamma=C-beta;
betas=real(eig(gamma\beta));
xi=XI(betas);
ent=0;
for j=1:(N-n)
    ent=ent+entropy(xi(j));
end
if l==0
    torent(q)=torent(q)+ent;
else
    torent(q)=torent(q)+2*ent;
end
end
if mod(log2(l),1)==0
    p=0;
    f=0;
    g=0;
    h=0;
    sub=0;
    for z= 1:q
        p=p+(cases(z)).^2;
        f=f+(cases(z));
        g=g+(cases(z))*torent(z);
        h=h+torent(z);
        sub=sub+1;
    end
    M=[p f; f sub]
    Q=[g ; h]
    W=M\Q;
    W1=W(1,1);
    W2=W(2,1);
    fprintf(fid,' l=%f W1=%f W2=%f \n',l,W1,W2);
end
end
fclose(fid);
toc

```

B'.3 Κώδικας που δείχνουμε την ισχύ της strong subadditivity της εντροπίας

```
clear all;clc;clearvars;
tic
fid = fopen('subadditivity2.5.txt','w');
N=60;
m=0;
lmax=3*8192;
rat=2/5;
n1=5;
n2=fix(n1/rat);
k=0;
while n2<6*N/10+2
    k=k+1;
    cases(k)=n1;
    n1=n1+1;
    n2=fix(n1/rat);
    casenum=k;
end

for k=1 : casenum
    totent(k)=0;
    totent1(k)=0;
    totent2(k)=0;
end
for l=0:lmax
    for q=1:casenum
        n1=cases(q);
        n2=fix(cases(q)/rat);
        n=n2-n1;
        for i=1:N
            ind(i)=2+l^2/(i^2)+m^2;
        end
        for i=1:N-1
            ind1(i)=-(j+1/2)/sqrt((i)*(i+1));
        end
        K=diag(ind,0)+diag(ind1,1)+diag(ind1,-1);
        omega=sqrtm(K);
        A=omega(1:n1,1:n1);
        B=omega(1:n1,n1+1:N);
        C=omega(n1+1:N,n1+1:N);
        beta=(transpose(B)*(A\B))/2;
        gamma=C-beta;
        betas=real(eig(gamma\beta));
        xi=XI(betas);
    end
end
```

```

ent=0;
for j=1:(N-n1)
    ent=ent+entropy(xi(j));
end
if l==0
    torent(q)=torent(q)+ent;
else
    torent(q)=torent(q)+2*ent;
end
    if mod(log2(l),1)==0
p=0;
f=0;
g=0;
h=0;
sub1=0;
for z= 5:n1
    p=p+(z).^2;
    f=f+(z);
    g=g+(z)*(torent(z-4));
    h=h+(torent(z-4));
    sub1=sub1+1;
end
M=[p f ; f sub1]
Q=[g ; h]
S=M\Q;
Sa=S(2,1);
end
    omega=sqrtm(K);
A1=omega(1:n2,1:n2);
B1=omega(1:n2,n2+1:N);
C1=omega(n2+1:N,n2+1:N);
beta1=(transpose(B1)*(A1\B1))/2;
gamma1=C1-beta1;
betas1=real(eig(gamma1\beta1));
xi1=XI(betas1);
ent1=0;
        for j=1:(N-n2)
            ent1=ent1+entropy(xi1(j));
        end
    if l==0
        torent1(q)=torent1(q)+ent;
    else
        torent1(q)=torent1(q)+2*ent;
    end
        if mod(log2(l),1)==0
p=0;

```



```

f=0;
g=0;
h=0;
sub1=0;
for z= 5:n1
    p=p+(z) . ^ 2;
    f=f+(z);
    g=g+(z)*( totent1 (z-4));
    h=h+(totent1 (z-4));
    sub1=sub1+1;
end
M=[p f; f sub1]
Q=[g ; h]
S1=M\Q;
Sc=S1 (2 ,1);
end
for i=1:N
    j=mod(i-1+n1 ,N)+1;
    ind2(i)=2+1 ^ 2/(j ^ 2)+m ^ 2;
end
for i=1:N-1
    j=mod(i-1+n1 ,N)+1;
    ind3(i)=- (j+1/2)/sqrt ((j)*(j+1));
end
K1=diag (ind2 ,0)+diag (ind3 ,1)+diag (ind3 , -1);
K1(N-n1+1,N-n1)=0;
K1(N-n1 ,N-n1+1)=0;
Kp=- (N-n1+1/2)/sqrt ((N-n1-1)*(N-n1));
K1(1 ,N)=Kp;
K1(N,1)=Kp;
omega1=sqrtm (K);
A2=omega1 (1:n ,1:n);
B2=omega1 (1:n ,n+1:N);
C2=omega1 (n+1:N,n+1:N);
beta2=(transpose (B2)*(A2\B2))/2;
gamma2=C2-beta2;
betas2=real (eig (gamma2\beta2));
xi2=XI (betas2);
ent2=0;
for j=1:(N-n)
    ent2=ent2+entropy (xi2 (j));
end
if l==0
    totent2 (q)=totent2 (q)+ent2;
else
    totent2 (q)=totent2 (q)+2*ent2;

```

```

        end
    end
    if mod(log2(l),1)==0
        p=0;
        f=0;
        g=0;
        h=0;
        sub1=0;
        for z= 5:n1
            p=p+(z).^2;
            f=f+(z);
            g=g+(z)*totent2(z-4);
            h=h+(totent2(z-4));
            sub1=sub1+1;
        end
        M=[p f; f sub1]
        Q=[g ; h]
        S2=M\Q;
        Sb=S2(2,1);
        fprintf(fid, 'l=%f Sa+Sc-Sb=%f\n', l, Sa+Sc-Sb);
    end
end
fclose(fid);
toc

```

References

- [1] Srednicki Mark *Entropy and Area Law*. arxiv:hep-th/9303048, (1993)
- [2] Bombelli Luca, Rabinder K. Koul, Toohan Lee, Rafael D. Sorkin *Quantum source of entropy for black holes*. Phys. Rev D 34,373 (1986)
- [3] Preskill J. *Lecture notes on quantum information*.
- [4] Bekenstein J. D. *Black holes and the second law* . Lett Nuovo Cim, 737-740 (1972)
- [5] Bekenstein J. D. *Black holes and entropy*. Phys. Rev. D, 2333-2346 (1973)
- [6] Hawking W. St. *Black hole explosions*. Nature, 30-31 (1974)
- [7] Bardeen J. M., Carter B., Hawking W. S. Commun. Math. Phys. 31, 162 (1973)
- [8] Feynman P. Richard *Statistical Mechanics a set of lectures*. California, The Benjamin/Cummings Publishing company (1982)
- [9] Nielsen A. Michael, Chuang L. Isaac *Quantum Computation and Quantum Information*. arxiv:hep-th/9303048, (2000)
- [10] Asher Peres *Separability criterion for density matrices*. arxiv:quant-physics/9604005, (1996)
- [11] Horodecki Michal, Horodecki Pawel, Horodecki Ryszard *Separability of mixed states necessary and sufficient conditions*. arxiv:quant-physics/9605038, (1996)
- [12] Pastras G. *Static elliptical minimal surfaces in AdS₄*. arxiv:hep-th/1612.03631 (2016)
- [13] Jacobson Ted *Thermodynamics of spacetime: The Einstein equation of state*. arxiv:gr-qc/9504004, (1995)
- [14] Lashkari Nima, McDermott B. Michael, Van Raamsdonk Mark *Gravitational Dynamics From Entanglement "Thermodynamics"*. arxiv:hep-th/1308.3716, (2013)
- [15] Ryu S., Takayanagi T., *Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT* arxiv:hep-th/0603001 (2006)
- [16] Ryu S., Takayanagi T., *Aspects of holographic entanglement entropy* arxiv:hep-th/0605073 (2006)
- [17] Pastras G., Katsinis D. *An Inverse Mass Expansion for Entanglement Entropy in Free Massive Field Theory* arxiv:hep-th/1711.02618 (2017)
- [18] Maldacena J., Susskind L. *Cool horizons for entangled black holes* arxiv:hep-th/1306.0533 (2013)
- [19] Verlinde E. *On the origin of gravity and laws of Newton* arxiv:hep-th/1001.0785 (2010)
- [20] Susskind L. *Dear qubitizers, GR=QM*. arxiv:hep-th/1608.03040 (2017)