



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαρακτηριστικά του Πληθωριστικού
Δυναμικού και το Φάσμα των
Διακυμάνσεων Καμπυλότητας

Ανδρέας Τσίγκας-Κουβέλης
Α.Μ.: 2019310

Επιβλέπων
Καθ. Νικόλαος Τετράδης

Ιούνιος 2021

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον κύριο επιβλέποντα της εργασίας καθ. Νικόλαο Τετράδη για τις ανεκτίμητες συμβουλές του, την συνεχή υποστήριξη και την υπομονή του κατά την διάρκεια αυτής της εργασίας.

Είμαι χαρούμενος επίσης που είχα την ευκαιρία να εργαστώ μαζί με τους Γιώργο Κονταξή, Ιωάννη Νταλιάνη και Ιωάννα Στάμου και θα ήθελα να τους ευχαριστήσω για την υποστήριξη και καθοδήγηση.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και φίλους Ευγενία Κουτσουμπού, Αργύρη Λουλέ, Βασίλη Μπισκετζή, Γιώργο-Φίλιππο Παράσχο, Θωδωρή Ρουμάνη και Σταμάτη-Ηλία Σταθόπουλο που μέσα από τις συζητήσεις μας έκαναν αυτή την δύσκολη για όλους χρονιά πιο ευχάριστη.

Περίληψη

Η πιθανότητα δημιουργίας αρχέγονων μελανών οπών έχει προσελκύσει πολύ ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια, αφού είναι πιθανό να αποτελούν ένα μεγάλο μέρος της σκοτεινής ύλης. Η δημιουργία τους απαιτεί την παρουσία μεγάλων διαταραχών της πυκνότητας στο πρώιμο Σύμπαν, οι οποίες μπορούν να υποδηλωθούν από μία ενίσχυση στο αρχέγονο φάσμα ισχύος των διακυμάνσεων καμπυλότητας κατά αρκετές τάξεις μεγέθους. Στην παρούσα εργασία μελετάμε τέτοιες περιπτώσεις στις οποίες η ενίσχυση προέρχεται από χαρακτηριστικά σαν σκαλοπάτια στο πληθωριστικό δυναμικό, έτσι ώστε να παραβιάζεται η προσέγγιση της αργής εξέλιξης.

Εστιάζουμε σε ένα μοντέλο με ένα πέδιο και μελετάμε την εξέλιξη των διαταραχών του πεδίου μέσω της εξίσωσης Mukhanov-Sasaki στο πλαίσιο της θεωρίας κοσμολογικών διαταραχών. Λαμβάνοντας υπόψη την κβαντική περιγραφή του πεδίου, μπορεί να υπολογιστεί το φάσμα ισχύος των διαταραχών αυτών. Εκτός από την αριθμητική ανάλυση, παρουσιάζουμε ακόμα μια αναλυτική προσέγγιση στον υπολογισμό αυτού του φάσματος ισχύος.

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό που εμφανίζεται και στους αριθμητικούς και στους αναλυτικούς υπολογισμούς, είναι ταλαντώσεις στο φάσμα των διακυμάνσεων καμπυλότητας. Αυτές οι ταλαντώσεις μπορούν να αποτυπωθούν στο φάσμα των βαρυτικών κυμάτων και μια ενδεχόμενη ανίχνευση τους μπορεί να παρέχει πληροφορίες για πιθανά χαρακτηριστικά στη πληθωριστική δυναμική.

Abstract

The creation of primordial black holes has attracted a lot of interest in recent years, as they may constitute a large part of the dark matter. Their production requires the presence of strong density perturbations in the early universe, which would correspond to the enhancement of the primordial power spectrum of curvature perturbations by several orders of magnitude. We study cases where this enhancement is generated by step-like features in the inflaton potential, so that the slow-roll approximation is violated.

We focus on a single-field model and we study the evolution of the field perturbations through the Mukhanov-Sasaki equation. Starting from the quantum description of the field in the Bunch-Davies vacuum, we compute the power spectrum numerically. We also present an analytical approach that explains many of its properties.

An interesting feature that is predicted by both numerical and analytical calculations is strong oscillations in the power spectrum of curvature perturbations. These oscillations can be imprinted on the spectrum of gravitational waves induced at second order in perturbation theory. A possible detection of these gravitational waves by near-future space interferometers, like LISA, can provide details of possible strong features in the inflationary dynamics.

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Εισαγωγή | 1 |
| 2 | Η Θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης | 3 |
| 2.1 | Κοσμολογική Αρχή και FLRW Υπόβαθρο | 3 |
| 2.2 | Δυναμική | 4 |
| 2.2.1 | Καμπυλότητα του Χωροχρόνου | 4 |
| 2.2.2 | Τανυστής Ενέργειας-Ορμής | 5 |
| 2.2.3 | Εξισώσεις Friedmann | 6 |
| 2.3 | Προβλήματα της Θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης | 7 |
| 2.3.1 | Πρόβλημα του Ορίζοντα | 7 |
| 2.3.2 | Πρόβλημα της Επιπεδότητας | 8 |
| 2.3.3 | Πρόβλημα των Μονοπόλων | 8 |
| 3 | Κοσμολογικός Πληθωρισμός | 10 |
| 3.1 | Λύσεις στα Κοσμολογικά Προβλήματα | 11 |
| 3.1.1 | Πρόβλημα του Ορίζοντα | 11 |
| 3.1.2 | Πρόβλημα της Επιπεδότητας | 11 |
| 3.1.3 | Πρόβλημα των Μονοπόλων | 12 |
| 3.2 | Πληθωριστικό Πεδίο | 12 |
| 3.2.1 | FLRW Υπόβαθρο | 14 |
| 3.3 | Η Προσέγγιση της Αργής Εξέλιξης | 14 |
| 4 | Κοσμολογικές Διαταραχές | 17 |
| 4.1 | Διαταραγμένη FLRW Μετρική | 17 |
| 4.2 | Ανάλυση σε Βαθμωτά-Διανύσματα-Τανυστές | 18 |
| 4.3 | Μετασχηματισμοί Βαθμίδας | 18 |
| 4.3.1 | Μετασχηματισμός Βαθμίδας των Διαταραχών της Μετρικής | 21 |
| 4.4 | Βαθμωτές Διαταραχές | 22 |
| 4.5 | Δυναμική του Διαταραγμένου Σύμπαντος | 23 |
| 4.6 | Χωρικά Επίπεδα Βαθμίδα | 25 |
| 4.7 | Εξέλιξη των Διαταραχών | 27 |
| 4.7.1 | Εξίσωση Mukhanov - Sasaki | 27 |
| 4.8 | Φάσμα Ισχύος | 28 |
| 5 | Χαρακτηριστικά του Πληθωριστικού Δυναμικού | 31 |
| 5.1 | Βασικός Φορμαλισμός | 31 |
| 5.2 | Αριθμητικός Υπολογισμός του Φάσματος των Διακυμάνσεων Καμπυ- λότητας | 37 |
| 5.3 | Αναλυτικός Υπολογισμός του Φάσματος των Διακυμάνσεων Καμπυ- λότητας | 39 |

| | |
|----------------|----|
| 6 Συμπεράσματα | 46 |
| Appendix A | 47 |
| Appendix B | 49 |
| Appendix C | 51 |

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η Κοσμολογία είναι μια προσπάθεια για την μαθηματική περιγραφή της συμπεριφοράς του Σύμπαντος και την ίδια στιγμή είναι η μελέτη για την προέλευση και την εξέλιξη του. Από την γέννηση της, με την πρόταση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας από τον Einstein το 1915, αρκετές παρατηρήσεις έχουν ωθήσει την επιστημονική κοινότητα να πιστέψει στην Θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, δηλαδή ότι το Σύμπαν ξεκίνησε από μία υπερβολικά θερμή και πυκνή κατάσταση. Μερικά από τα πιο σημαντικά γεγονότα που οδήγησαν σε αυτή την θεωρία, είναι τα ακόλουθα:

- Η ανακάλυψη της διαστολής του Σύμπαντος το 1929 από τον Hubble, χρησιμοποιώντας παρατηρήσεις της ερυθρομετατόπισης μακρικών γαλαξιών. Πιο συγκεκριμένα, η ταχύτητα απομάκρυνσης των παρατηρούμενων γαλαξιών είναι ανάλογη της απόστασης τους

$$u = H_0 r$$

- Η δουλειά πάνω στην θεωρία της Πυρηνοσύνθεσης από τον Gamow και τους συνεργάτες του, η οποία εξηγεί την παραγωγή των ελαφριών στοιχείων του Σύμπαντος. Επίσης, προέβλεψαν την ύπαρξη της μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB), η οποία έχει φάσμα μέλανου σώματος με θερμοκρασία $T \approx 2.73K$ και είναι ισοτροπική.
- Η ανίχνευση της μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου το 1965 από τους Penzias και Wilson, η οποία ταυτιζόταν με τις θεωρητικές προβλέψεις των Gamow et al..

Στην καθιερωμένη κοσμολογία, τα κοσμολογικά πρότυπα που χρησιμοποιούνται συνήθως για την περιγραφή της γεωμετρίας του Σύμπαντος είναι των Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Αυτά τα πρότυπα θεωρούν ότι το συνολικό κοσμικό ρευστό αποτελείται από τέσσερις συνιστώσες, δύο πραγματικά ρευστά (ύλη και ακτινοβολία) και δύο “εικονικά” (κοσμολογική σταθερά και καμπυλότητα), που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, αλλά καθορίζουν την δυναμική του Σύμπαντος. Μέχρι τώρα, αυτά τα κοσμολογικά πρότυπα έδειχναν να αναπαράγουν σε μεγάλο βαθμό τις παρατηρήσεις, για την χωρικά επίπεδη περίπτωση, το οποίο υποδεικνύει ένα ομοιογενές και ισοτροπικό Σύμπαν. Ωστόσο, υπάρχει ένας αριθμός από κοσμολογικά προβλήματα, όπως αυτά του ορίζοντα και της επιπεδότητας, που η κοσμολογία FLRW δεν μπορεί να λύσει. Η πιο δημοφιλής λύση σε αυτά τα θεμελιώδη προβλήματα που σχετίζονται με την καθιερωμένη κοσμολογία, είναι ο κοσμολογικός πληθωρισμός, δηλαδή μία εποχή επιταχυνόμενης διαστολής στο πρώιμο Σύμπαν.

Ο κοσμολογικός πληθωρισμός προτάθηκε αρχικά από τον Guth το 1981, καθώς αυτός μελετούσε το πρόβλημα της απουσίας μαγνητικών μονοπόλων. Είναι μια απότομη και σχεδόν εκθετική διαστολή του χώρου στο πρώιμο Σύμπαν, που κράτησε κλάσματα του δευτερολέπτου και πραγματοποιείται λόγω ενός υποθετικού βαθμωτού πεδίου, του πληθωριστικού πεδίου. Δεν είναι μόνο χρήσιμος στην επίλυση των προαναφερόμενων προβλημάτων, αλλά δίνει επίσης και μία εξήγηση για της προέλευση των δομών μεγάλης κλίμακας (LSS) που παρατηρούμε σήμερα στο Σύμπαν.

Το περίγραμμα της παρούσας εργασίας είναι το ακόλουθο. Στο κεφάλαιο 2, ξεκινάμε δίνοντας μια σύντομη επισκόπηση των βασικών χαρακτηριστικών της κοσμολογίας της Μεγάλης Έκρηξης και παραθέτουμε τα κύρια προβλήματα που ώθησαν προς την θεωρία του πληθωρισμού. Έπειτα στο κεφάλαιο 3, παρουσιάζουμε τις λύσεις στα κοσμολογικά προβλήματα που παρέχονται από τον πληθωρισμό και περιγράφουμε τον γενικό φορμαλισμό της πληθωριστικής κοσμολογίας. Στο κεφάλαιο 4, αναφέρονται τα βασικά στοιχεία της κοσμολογικής θεωρίας διαταραχών, και τελικά στο κεφάλαιο 5, παρέχουμε μια αριθμητική και μια αναλυτική προσέγγιση στον υπολογισμό του φάσματος των διακυμάνσεων καμπυλότητας. Συνοψίζουμε στο κεφάλαιο 6.

Στα κεφάλαια 2, 3, 4 στα οποία έγινε μία επισκόπηση του γενικού φορμαλισμού του κοσμολογικού πληθωρισμού και των διακυμάνσεων του πεδίου ακολουθήσαμε τις σημειώσεις [1, 2, 3, 4, 5] και το τελευταίο κεφάλαιο βασίζεται στις δύο δημοσιεύσεις [6, 7], οι οποίες περιέχουν και μία πιο εκτεταμένη ανάλυση.

Κεφάλαιο 2

Η Θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης

2.1 Κοσμολογική Αρχή και FLRW Υπόβαθρο

Η καθιερωμένη κοσμολογία βασίζεται στην κοσμολογική αρχή, η οποία αναφέρει ότι το Σύμπαν είναι χωρικά ομοιογενές και ισότροπο σε αρκούντως μεγάλες κλίμακες. Με πιο απλά λόγια, το Σύμπαν ουσιαστικά φαίνεται το ίδιο από όλες τις θέσεις και σε όλες τις κατευθύνσεις. Πράγματι, οι κοσμολογικές παρατηρήσεις των τελευταίων δεκαετιών, από το CMB και τις LSS, επιβεβαιώνουν την ομοιογένεια και ισοτροπία του Σύμπαντος σε κλίμακες μεγαλύτερες από 100 Mpc.

Η πιο γενική μετρική που σέβεται την κοσμολογική αρχή είναι η γνωστή FLRW μετρική

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \alpha^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1.1)$$

όπου γ_{ij} είναι το χωρικό μέρος της μετρικής και μπορεί να εκφραστεί σε σφαιρικές συντεταγμένες ως

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.1.2)$$

Εδώ, $\alpha(t)$ είναι ο παράγοντας κλίμακας που σχετίζεται με την διαστολή του Σύμπαντος και η χωρική καμπυλότητα k μπορεί να πάρει τις τρεις τιμές -1 , 0 και $+1$ που αντιστοιχούν σε ανοιχτό, επίπεδο και κλειστό Σύμπαν, αντίστοιχα. Μερικές φορές είναι πιο βολικό να κάνουμε έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων στην γ_{rr} συνιστώσα της χωρικής μετρικής γ_{ij} , $d\chi \equiv dr/\sqrt{1 - kr^2}$, έτσι ώστε

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2, \quad (2.1.3)$$

όπου

$$S_k(\chi) \equiv \begin{cases} \sinh \chi & k = -1 \\ \chi & k = 0 \\ \sin \chi & k = +1 \end{cases}. \quad (2.1.4)$$

Εισάγοντας τον σύμμορφο χρόνο τ , ο οποίος σχετίζεται με τον φυσικό χρόνο t μέσω της σχέσης

$$d\tau = \frac{dt}{\alpha}, \quad (2.1.5)$$

το στοιχείο μήκους μπορεί να γραφτεί ως

$$ds^2 = \alpha^2(\tau) [-d\tau^2 + d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2]. \quad (2.1.6)$$

Αυτή η μορφή της μετρικής είναι ιδιαίτερα βολική για την περιγραφή της διάδοσης του φωτός και της αιτιακής δομής του χωροχρόνου.

2.2 Δυναμική

Όπως είπαμε πριν, το στοιχείο μήκους FLRW παρέχει την μορφή της μετρικής $g_{\mu\nu}$ για ένα ομοιογενές και ισότροπο Σύμπαν, αλλά προκειμένου να μελετηθεί η δυναμική εξέλιξη του Σύμπαντος, είναι απαραίτητο να λυθούν οι εξισώσεις Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.2.1)$$

όπου $G_{\mu\nu}$, G και $T_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Einstein, η βαρυτική σταθερά και ο τανυστής ενέργειας-ορμής, αντίστοιχα. Αυτές οι εξισώσεις σχετίζουν τον τανυστή Einstein $G_{\mu\nu}$, που αποτελεί ένα μέτρο της καμπυλότητας του χωροχρόνου, με τον τανυστή ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$, ένα μέτρο της ενέργειας και της ορμής του χωροχρόνου.

2.2.1 Καμπυλότητα του Χωροχρόνου

Πρώτα, στρέφουμε την προσοχή μας στον τανυστή Einstein στο αριστερό μέρος των εξισώσεων Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (2.2.2)$$

όπου $R_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Ricci και R είναι το βαθμωτό Ricci. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον τανυστή Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (2.2.3)$$

και το βαθμωτό Ricci

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.2.4)$$

για το FLRW υπόβαθρο. Συνεπώς, χρειαζόμαστε τα σύμβολα Christoffel για την μετρική (2.1.1). Είναι δυνατό να δείχθει ότι τα μόνα μη-μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι¹

$$\Gamma_{ij}^0 = \alpha \dot{\alpha} \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(\gamma)^2, \quad (2.2.5)$$

ή σχετίζονται με αυτά με κάποια συμμετρία. Οι συνιστώσες του τανυστή Ricci³ που δεν μηζενίζονται είναι

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}, \quad R_{ij} = \left[\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + 2\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 + \frac{2k}{\alpha^2} \right] g_{ij}, \quad (2.2.6)$$

¹Η άνω τελεία υποδηλώνει παραγωγή ως προς τον φυσικό χρόνο t .

²Το $\Gamma_{jk}^i(\gamma)$ χρησιμοποιήθηκε για να υποδηλώσει τα σύμβολα Christoffel, υπολογισμένα για την 3-διάστατη μετρική γ_{ij} .

³Το $R_{i0} = R_{0i}$ είναι ένα 3-διάνυσμα και συνεπώς πρέπει να μηδενίζεται λόγω της ισοτροπίας της FLRW μετρικής.

και έτσι το βαθμωτό Ricci δίνεται από την σχέση

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 + \frac{k}{\alpha^2} \right]. \quad (2.2.7)$$

Τέλος, μπορούμε να γράψουμε τα μη-μηδενικά στοιχεία του τανυστή Einstein $G^\mu_\nu = g^{\mu\lambda}G_{\lambda\nu}$

$$G^0_0 = -3 \left[\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 + \frac{k}{\alpha^2} \right], \quad G^i_j = - \left[\frac{2\ddot{\alpha}}{\alpha} + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 + \frac{k}{\alpha^2} \right] \delta^i_j. \quad (2.2.8)$$

2.2.2 Τανυστής Ενέργειας-Ορμής

Σε πρώτη προσέγγιση η ύλη του Σύμπαντος μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ένα ιδανικό ρευστό. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής για ένα ιδανικό ρευστό δίνεται από

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.2.9)$$

όπου ρ και P είναι η ενεργειακή πυκνότητα και η πίεση στο σύστημα ηρεμίας του ρευστού και U^μ είναι η τετραταχύτητα του. Για έναν ομοκινούμενο παρατηρητή, $U^\mu = (1, \vec{0})$, ο τανυστής ενέργειας-ορμής παίρνει την μορφή

$$T^\mu_\nu = g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (2.2.10)$$

Από την αρχή διατήρησης του τανυστή ενέργειας-ορμής

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda = 0, \quad (2.2.11)$$

εξάγουμε την εξίσωση συνέχειας, η οποία καθορίζει την εξέλιξη της ενεργειακής πυκνότητας του κοσμικού ρευστού. Οι εξισώσεις (2.2.11) αντιστοιχούν σε τέσσερις διαφορετικές εξισώσεις, μία για κάθε ν . Η $\nu = 0$ εξίσωση

$$\partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0,$$

σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ο όρος T^i_0 μηδενίζεται λόγω της ισοτροπίας, δίνει την εξίσωση συνέχειας

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} (\rho + P) = 0. \quad (2.2.12)$$

Για κάθε συνιστώσα του Σύμπαντος, ψυχρή σκοτεινή ύλη, ακτινοβολία και σκοτεινή ενέργεια, μπορούμε να ορίσουμε την παράμετρο αναλογίας μέσω της καταστατικής εξίσωσης

$$w \equiv \frac{P}{\rho}, \quad (2.2.13)$$

όπου $w = 0, 1/3, -1$ αντιστοιχούν σε μη-σχετικιστική ύλη, ακτινοβολία και ενέργεια κενού, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.2.13), οι λύσεις της εξίσωσης (2.2.12) είναι

$$\rho \propto \alpha^{-3(1+w)}, \quad (2.2.14)$$

και συνεπώς

$$\rho \propto \begin{cases} \alpha^{-3} & \text{ύλη,} \\ \alpha^{-4} & \text{ακτινοβολία,} \\ \alpha^0 & \text{ενέργεια κενού.} \end{cases} \quad (2.2.15)$$

2.2.3 Εξισώσεις Friedmann

Τελικά, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Einstein μπορούμε να εξάγουμε τις εξισώσεις Friedmann. Για $\mu = \nu = 0$, οι εξισώσεις (2.2.1) δίνουν

$$G^0_0 = 8\pi G T^0_0 \Rightarrow \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 + \frac{k}{\alpha^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \Rightarrow H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \rho - \frac{k}{\alpha^2}, \quad (2.2.16)$$

όπου $H \equiv \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ είναι η παράμετρος Hubble και $M_{pl} \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$ η ανηγμένη μάζα Planck. Για $\mu = \nu = i$, παίρνουμε

$$G^i_i = 8\pi G T^i_i \Rightarrow \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = H^2 + \dot{H} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P), \quad (2.2.17)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση (2.2.16). Εδώ, τα ρ και P περιλαμβάνουν όλες τις συνεισφορές στην ενεργειακή πυκνότητα και πίεση του Σύμπαντος

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (2.2.18)$$

όπου οι δείκτες r , m , και Λ χρησιμοποιήθηκαν για να δηλωθεί η ακτινοβολία, η ύλη και η ενέργεια κενού, αντίστοιχα. Για το χωρικά επίπεδο Σύμπαν ($k = 0$), παίρνουμε την κρίσιμη πυκνότητα χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.2.16)

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.2.19)$$

Είναι βολικό να ορίσουμε τις αδιάστατες παραμέτρους πυκνότητας ως

$$\Omega_I \equiv \frac{\rho_I}{\rho_{crit}}. \quad (2.2.20)$$

Ορίζοντας επίσης και την παράμετρο πυκνότητας για την καμπυλότητα, $\Omega_k \equiv -k/(\alpha H)^2$, η εξίσωση Friedmann (2.2.16) μπορεί να γραφτεί ως

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^3 + \Omega_{k,0} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right], \quad (2.2.21)$$

όπου ο δείκτης 0 υποδεικνύει ότι η ποσότητα υπολογίζεται σήμερα.

Μπορούμε να πάρουμε τις σημερινές τιμές για αυτές τις παραμέτρους από τις παρατηρήσεις της αποστολής Planck

$$|\Omega_k| \leq 0.01, \quad \Omega_r \approx 9 \times 10^{-5}, \quad \Omega_m \approx 0.31, \quad \Omega_\Lambda \approx 0.69.$$

2.3 Προβλήματα της Θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης

Όπως αναφέραμε πριν, παρά την επιτυχία της καθιερωμένης κοσμολογίας να αναπαραγάγει τις κοσμολογικές παρατηρήσεις σε έναν μεγάλο βαθμό, υπάρχουν κάποια άλματα προβλήματα που σχετίζονται κυρίως με την συμπεριφορά του πρώιμου Σύμπαντος. Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε τα πιο αξιοσημείωτα προβλήματα, δηλαδή αυτά του ορίζοντα, της επιπεδότητας και των μονοπόλων.

2.3.1 Πρόβλημα του Ορίζοντα

Παρά το γεγονός ότι οι παρατηρήσεις από το CMB επιβεβαιώνουν την ομοιογένεια και ισοτροπία του Σύμπαντος σε μεγάλες κλίμακες, η FLRW κοσμολογία δεν μπορεί να τις δικαιολογήσει.

Σε ένα ισοτροπικό Σύμπαν, μπορούμε να θεωρήσουμε την ακτινική διάδοση του φωτός ($d\theta = d\phi = 0$). Αφού το φως ακολουθεί null γεωδαισιακές, $ds^2 = 0$, η τροχιά τους ορίζεται ως

$$\Delta\chi(\tau) = \pm\Delta\tau, \quad (2.3.1)$$

όπου το θετικό και αρνητικό πρόσημο αντιστοιχούν σε εξερχόμενα και εισερχόμενα φωτόνια αντίστοιχα.

Ο ομοκινούμενος σωματιδιακός ορίζοντας $\chi_{ph}(\tau)$ είναι η μέγιστη ομοκινούμενη απόσταση από την οποία ένας παρατηρητής, που ταξιδεύει με την ταχύτητα του φωτός, σε χρόνο t θα είναι δυνατόν να λάβει σήματα^{4,5}

$$\chi_{ph}(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{dt'}{\alpha(t')}, \quad (2.3.3)$$

και καθορίζει την κλίμακα των αιτιακά συνδεδεμένων τμημάτων του Σύμπαντος.

Ο σωματιδιακός ορίζοντας μπορεί επίσης να γραφτεί ως

$$\chi_{ph}(\tau) = \int_{\alpha_i}^{\alpha} \frac{da}{\alpha\dot{a}} = \int_{\ln\alpha_i}^{\ln\alpha} (\alpha H)^{-1} d\ln\alpha = \int_{\ln\alpha_i}^{\ln\alpha} \chi_H d\ln\alpha, \quad (2.3.4)$$

όπου χ_H είναι η ομοκινούμενη ακτίνα Hubble. Συνεπώς, η αιτιακή δομή του χωροχρόνου μπορεί να συσχετιστεί με την εξέλιξη της ομοκινούμενης ακτίνας Hubble $(\alpha H)^{-1}$.

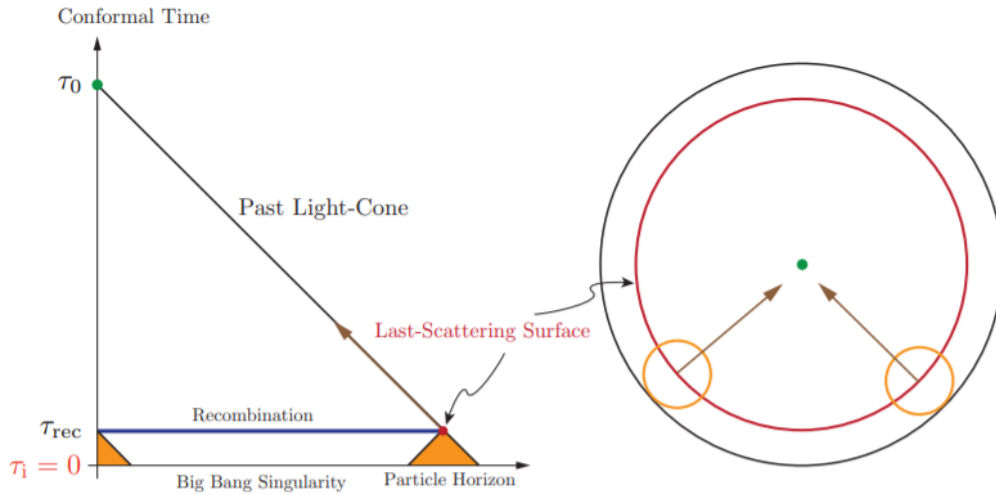
Στην καθιερωμένη κοσμολογία, η ακτίνα Hubble αυξάνεται μονοτονικά καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται, όπως και ο σωματιδιακός ορίζοντας. Αν θεωρήσουμε δυο φωτόνια από το CMB που λαμβάνουμε σήμερα από αντίθετες διευθύνσεις στον ουρανό, έχουν απόσταση $d_{com}(t_0) < \chi_{ph}(t_0)$. Πηγαίνοντας πίσω στον χρόνο, στην τελευταία εποχή σκέδασης, βρίσκουμε ότι $d_{com}(t_{ls}) > \chi_{ph}(t_{ls})$, αφού ο ορίζοντας ήταν αρκετά μικρότερος. Συνεπώς, αυτά τα φωτόνια προέρχονται από περιοχές, που δεν ήταν ποτέ

⁴Αντίστοιχα, υπάρχει ο ομοκινούμενος ορίζοντας γεγονότων

$$\chi_{eh}(\tau) = \tau_f - \tau = \int_{\tau}^{\tau_f} \frac{dt'}{\alpha(t')}, \quad (2.3.2)$$

ο οποίος είναι η μέγιστη απόσταση από την οποία ένας παρατηρητής σε χρόνο t_f θα λάβει σήματα που εκπέμφθηκαν σε οποιαδήποτε στιγμή αργότερα από τον χρόνο t .

⁵Εδώ, $t_i \equiv 0$ υποθέτει την “αρχή” της Μεγάλης Έκρηξης (singularity).



Σχήμα 2.1: Το πρόβλημα του ορίζοντα στην καθιερωμένη κοσμολογία της Μεγάλης Έκρηξης. Το CMB αποτελείται από $\sim 10^5$ περιοχές με διακυμάνσεις στην θερμοκρασία της τάξης του 10^{-5} , αλλά όχι σε αιτιακή επαφή.

σε αιτιακή επαφή. Παρόλα αυτά, η ακτινοβολία από το CMB είναι σχεδόν τέλεια ισοτροπική, με τις ανισοτροπίες στην θερμοκρασία του CMB να είναι μικρότερες από μία στις δέκα χιλιάδες. Αυτό είναι το πρόβλημα του ορίζοντα.

2.3.2 Πρόβλημα της Επιπεδότητας

Προηγουμένως, είπαμε ότι η χωρική καμπυλότητα k μπορεί να πάρει τις τρεις τιμές -1 , 0 και $+1$ που αντιστοιχούν σε ανοιχτό, επίπεδο και κλειστό Σύμπαν, αντίστοιχα. Η εξίσωση Friedmann (2.2.16) μπορεί να πάρει την μορφή

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(\alpha H)^2}. \quad (2.3.5)$$

Στην καθιερωμένη κοσμολογία, η ομοκινούμενη ακτίνα Hubble $(\alpha H)^{-1}$ αυξάνεται με τον χρόνο, αφού το Σύμπαν περιέχει μόνο ύλη και ακτινοβολία. Συνεπώς, το Ω τείνει να αποκλίνει από την μονάδα με την διαστολή του Σύμπαντος. Ωστόσο, αρκετές παρατηρήσεις υποδεικνύουν ένα χωρικά επίπεδο Σύμπαν, με την συνεισφορά της καμπυλότητας στην ενεργειακή πυκνότητα να είναι αμελητέα σήμερα, $|\Omega_k| \leq 0.01$. Έτσι η παράμετρος πυκνότητας πρέπει να είναι κοντά στην μονάδα με πολύ υψηλή ακρίβεια. Επίσης, απαιτούμε $|\Omega_k - 1| \leq 10^{-16}$ την στιγμή της Πυρηνοσύνθεσης και ακόμα μικρότερες τιμές πιο πριν. Αυτό είναι μία ακραία προσαρμογή των αρχικών συνθηκών, αφού καμία συμμετρία δεν προτιμάει ένα επίπεδο Σύμπαν σε σχέση με ένα ανοιχτό ή κλειστό.

2.3.3 Πρόβλημα των Μονοπόλων

Αρκετές θεωρίες, όπως η μεγάλη ενοποιημένη θεωρία (GUT), προβλέπουν ότι το σπάσιμο μίας συμμετρίας μπορεί να συμβεί κατά την διάρκεια αλλαγής φάσης και να οδηγήσει στον σχηματισμό τοπολογικών ατελειών, όπως μονόπολα, κοσμικές χορδές και domain walls.

Τα μαγνητικά μονόπολα είναι σημειακές ατέλειες με καθαρό μαγνητικό φορτίο. Η ενεργειακή τους πυκνότητα ελαττώνεται όπως αυτή της ύλης ($\rho_{mon} \propto a^{-3}$), και αν αυτά τα σωματίδια δημιουργήθηκαν στα αρχικά στάδια του Σύμπαντος, θα πρέπει να κυριαρχούν στην εξέλιξη του. Αυτές οι θεωρητικές προβλέψεις έρχονται σε αντίθεση με τις παρατηρήσεις, οδηγώντας στο γνωστό πρόβλημα των μονοπόλων.

Κεφάλαιο 3

Κοσμολογικός Πληθωρισμός

Ο κοσμολογικός πληθωρισμός προτάθηκε σαν μία απλή και κομψή λύση στα θεμελιώδη ελαττώματα της καθιερωμένης κοσμολογίας. Είναι μια εποχή επιταχυνόμενης διαστολής στο πρώιμο Σύμπαν

$$\ddot{\alpha} > 0. \quad (3.0.1)$$

Από την δεύτερη εξίσωση Friedmann (2.2.17), προκύπτει

$$\rho + 3P < 0 \Rightarrow w < -1/3, \quad (3.0.2)$$

δηλαδή, η επιταχυνόμενη διαστολή απαιτεί ένα ρευστό που παραβιάζει την ισχυρή συνθήκη ενέργειας (SEC) ¹.

Αν $w \approx -1$, τότε η διαστολή είναι σχεδόν εκθετική. Από την εξίσωση συνέχειας (2.2.12) έχουμε

$$\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho \approx \rho_I = \text{const.}, \quad (3.0.3)$$

και από την πρώτη εξίσωση Friedmann (2.2.16), για $k = 0$

$$H \approx H_I = \text{const.} \Rightarrow \alpha(t) \propto e^{H_I t}. \quad (3.0.4)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την δεύτερη εξίσωση Friedmann

$$H^2 + \dot{H} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) = -\frac{H^2}{2} \left(1 + \frac{3P}{\rho}\right), \quad (3.0.5)$$

κάποιος μπορεί να ορίσει την παράμετρο

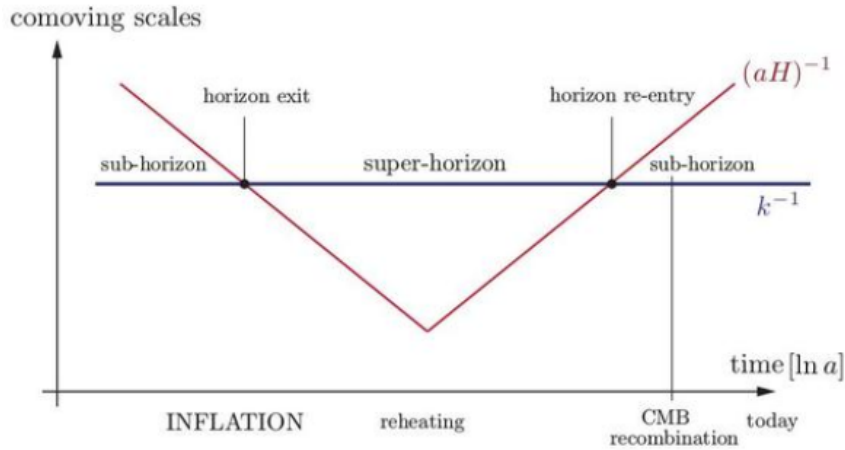
$$\varepsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right). \quad (3.0.6)$$

Αυτή η παράμετρος μπορεί να γραφτεί επίσης σε όρους του αριθμού των e -folds N

$$\varepsilon_H = -\frac{d \ln H}{dN}, \quad (3.0.7)$$

όπου $dN \equiv d \ln \alpha = H dt$ είναι το διάστημα στο οποίο μία εκθετικά αυξανόμενη ποσότητα, αυξάνεται κατά έναν παράγοντα e .

¹ Η SEC απαιτεί ότι ο ταυστής ενέργειας-ορμής ικανοποιεί την σχέση $(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) U^\mu U^\nu \geq 0$ για κάθε χρονοειδές διάνυσμα U^μ .



Σχήμα 3.1: Η λύση στο πρόβλημα του ορίζοντα. Οι κλίμακες κοσμολογικού ενδιαφέροντος ήταν μικρότερες από την ομοκινούμενη ακτίνα Hubble, πριν τον πληθωρισμό, και επομένως σε αιτιακή επαφή. Σήμερα, αυτές οι κλίμακες είναι πάλι μικρότερες από την ακτίνα Hubble.

Η συνθήκη για επιταχυνόμενη διαστολή αντιστοιχεί σε

$$\varepsilon_H < 1. \quad (3.0.8)$$

Η περίπτωση $\varepsilon_H = 0$ αντιστοιχεί σε de Sitter space (τέλειος πληθωρισμός), που είναι η λύση κενού των εξισώσεων Einstein με θετική κοσμολογική σταθερά.

Ας δούμε τώρα πως ο πληθωρισμός επιλύει τα κοσμολογικά προβλήματα της καθιερωμένης κοσμολογίας.

3.1 Λύσεις στα Κοσμολογικά Προβλήματα

3.1.1 Πρόβλημα του Ορίζοντα

Ο πληθωρισμός μπορεί επίσης να χαρακτηριστεί με όρους της εξέλιξης της ομοκινούμενης ακτίνας Hubble $(\alpha H)^{-1}$. Πιο συγκεκριμένα, αφού

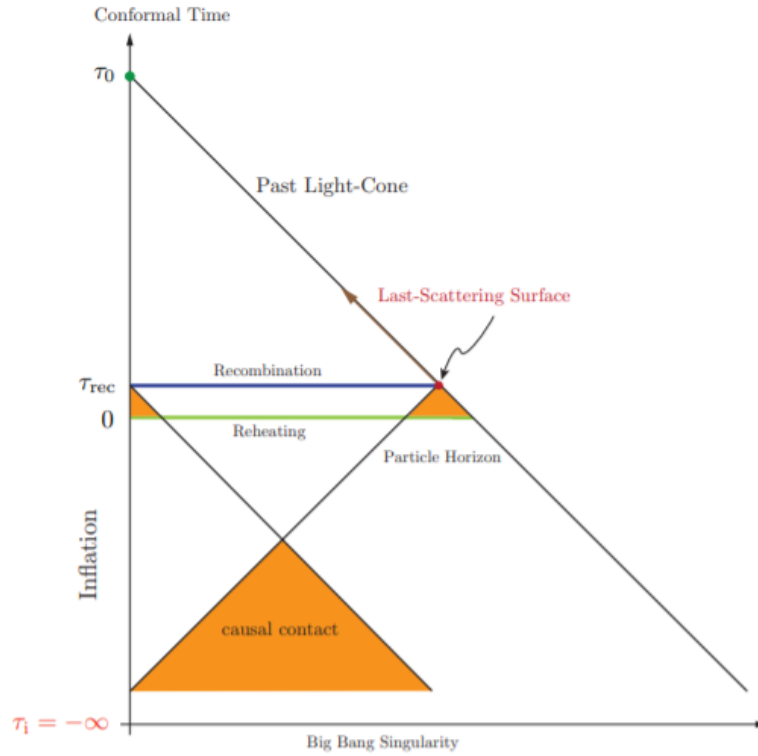
$$\frac{d}{dt} (\alpha H)^{-1} = \frac{d}{dt} (\dot{\alpha})^{-1} = -\frac{\ddot{\alpha}}{(\dot{\alpha})^2} < 0, \quad (3.1.1)$$

η ομοκινούμενη ακτίνα Hubble μειώνεται. Αυτή η αντιστροφή της συμπεριφοράς της ακτίνας Hubble είναι ουσιαστικά η λύση στο πρόβλημα του ορίζοντα, όπως βλέπουμε στα σχήματα (3.1, 3.2). Παρατηρούμε ότι οι μεγάλες κλίμακες που εισέρχονται ξανά στον ορίζοντα σήμερα, ήταν αρκετά μικρότερες από την ομοκινούμενη ακτίνα Hubble πριν τον πληθωρισμό και επομένως σε αιτιακή επαφή. Αυτό εξηγεί την ομοιογένεια και ισοτροπία του Σύμπαντος σε μεγάλες κλίμακες.

3.1.2 Πρόβλημα της Επιπεδότητας

Από την εξίσωση Friedmann (2.3.5), κατά την διάρκεια του πληθωρισμού, έχουμε

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_f}}{|\Omega - 1|_{t_i}} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_f} \right)^2 \sim e^{-2N}, \quad (3.1.2)$$



Σχήμα 3.2: Σύμμορφο διάγραμμα της πληθωριστικής κοσμολογίας. Ο πληθωρισμός επεκτείνει τον σύμμορφο χρόνο σε αρνητικές τιμές. Τώρα, δεν υπάρχει singularity την στιγμή $\tau = 0$ και οι κώνοι φωτός τέμνονται, αν ο πληθωρισμός διαρκέσει για τουλάχιστον 60 e -folds.

όπου $N = H_I (t_f - t_i)$ και οι t_i, t_f είναι οι στιγμές στις οποίες ο πληθωρισμός ξεκινάει και τελειώνει, αντίστοιχα. Από τις παρατηρήσεις του CMB γνωρίζουμε ότι οι μεγαλύτερες δομές που παρατηρούμε, δημιουργήθηκαν περίπου 60 e -folds πριν το τέλος του πληθωρισμού. Έτσι, ο πληθωρισμός λύνει το πρόβλημα της επιπεδότητας.

3.1.3 Πρόβλημα των Μονοπόλων

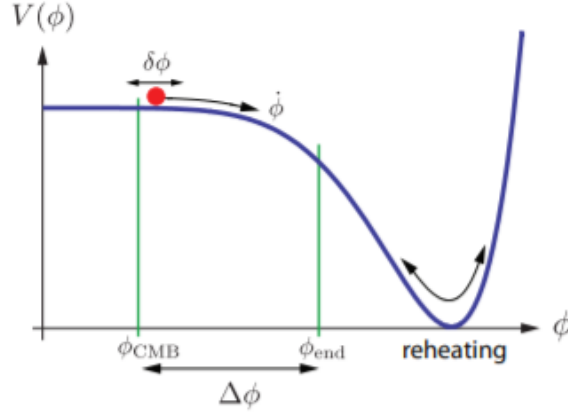
Αν ο πληθωρισμός συμβεί μετά τον σχηματισμό των μονοπόλων, τότε η πυκνότητα τους μειώνεται σημαντικά κατά την διάρκεια του

$$n_{mon} \propto \frac{N_{mon}}{\alpha^3} \Rightarrow \frac{(n_{mon})_{t_f}}{(n_{mon})_{t_i}} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_f}\right)^3 \sim e^{-3N} \rightarrow 0. \quad (3.1.3)$$

3.2 Πληθωριστικό Πεδίο

Τα απλούστερα μοντέλα για τον πληθωρισμό υποθέτουν ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(t, \vec{x})$, το λεγόμενο πληθωριστικό πεδίο. Αυτό το πεδίο έχει έναν κανονικό κινητικό όρο και είναι ελάχιστα συζευγμένο στην βαρύτητα, η οποία συνήθως περιγράφεται από έναν όρο Einstein-Hilbert. Η δυναμική του βαθμωτού πεδίου μπορεί να προσδιοριστεί από την δράση

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_\phi = \frac{1}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}d^4x + \int \mathcal{L}_\phi\sqrt{-g}d^4x, \quad (3.2.1)$$



Σχήμα 3.3: Παράδειγμα ενός πληθωριστικού δυναμικού $V(\phi)$.

όπου $g \equiv \det[g_{\mu\nu}]$ είναι η ορίζουσα της μετρικής και \mathcal{L}_ϕ η Λαγκρανζιανή του βαθμωτού πεδίου

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi). \quad (3.2.2)$$

Μία τυπική μορφή του δυναμικού $V(\phi)$ απεικονίζεται στο σχήμα (3.3).

Απαιτώντας η μεταβολή της δράσης ως προς το βαθμωτό πεδίο να μηδενίζεται, παίρνουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial\phi} - \nabla_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial(\nabla_\mu\phi)} \right] = 0 \Rightarrow \square\phi - V_{,\phi} = 0, \quad (3.2.3)$$

όπου ο όρος $V_{,\phi}$ υποδηλώνει την παραγωγή ως προς το πεδίο ϕ και

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi). \quad (3.2.4)$$

Από την άλλη μεριά, η μεταβολή ως προς την αντίστροφη μετρική μας δίνει τις εξισώσεις Einstein (2.2.1)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu},$$

όπου

$$T_{\mu\nu} \equiv -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.2.5)$$

Χρησιμοποιώντας ακόμα μία φορά² την ακόλουθη έκφραση για την μεταβολή της ορίζουσας

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (3.2.6)$$

παίρνουμε τον ταυιστή ενέργειας-ορμής

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi. \quad (3.2.7)$$

²Την χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως για να εξαγάγουμε τις εξισώσεις Einstein.

3.2.1 FLRW Υπόβαθρο

Οι συμμετρίες του FLRW υποβάθρου απαιτούν ότι οι τιμές του πληθωριστικού πεδίου έχουν εξάρτηση μόνο από τον χρόνο, $\phi = \phi(t)$. Η εξίσωση πεδίου (3.2.3) γίνεται

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (3.2.8)$$

που είναι η εξίσωση Klein-Gordon. Εδώ, η παράγωγος του δυναμικού, $V_{,\phi}$, δρα σαν δύναμη, ενώ ο όρος $3H\dot{\phi}$ περιγράφει την τριβή που προκαλείται εξαιτίας της διαστολής του Σύμπαντος, καθώς το βαθμωτό πεδίο κυλάει προς το ελάχιστο του δυναμικού $V(\phi)$.

Ο ταυυστής ενέργειας-ορμής (3.2.5) παίρνει την μορφή ενός ιδανικού ρευστού (2.2.10) με

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.2.9)$$

και

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.2.10)$$

Η παράμετρος αναλογίας w είναι

$$w = \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (3.2.11)$$

όπου βλέπουμε ότι το βαθμωτό πεδίο μπορεί να οδηγήσει σε επιταχυνόμενη διαστολή ($w < -1/3$) αν η δυναμική ενέργεια κυριαρχεί της κινητικής.

Αντικαθιστώντας την ενεργειακή πυκνότητα ρ_ϕ από την (3.2.9) στην πρώτη εξίσωση Friedmann (2.2.16) έχουμε

$$H^2 = \frac{\rho_\phi}{3M_{pl}^2} = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (3.2.12)$$

Τελικά, από την εξίσωση συνέχειας (2.2.12) παίρνουμε

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3H\dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow \dot{H} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}, \quad (3.2.13)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την παράγωγο της πρώτης εξίσωσης Friedmann ως προς τον φυσικό χρόνο t ($2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2}\dot{\rho}$).

3.3 Η Προσέγγιση της Αργής Εξέλιξης

Από τον ορισμό της ε_H και αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.2.13)

$$\varepsilon_H = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H^2}, \quad (3.3.1)$$

βλέπουμε ότι ο πληθωρισμός ($\varepsilon_H < 1$) συμβαίνει αν ισχύει η συνθήκη $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V$. Αυτή η συνθήκη συνεπάγεται ότι η δυναμική ενέργεια του πληθωριστικού πεδίου κυριαρχεί της κινητικής, και συνεπώς απαιτείται ένα επίπεδο δυναμικό. Επίσης, για να έχουμε επιταχυνόμενη διαστολή για το απαιτούμενο χρονικό διάστημα, η επιτάχυνση του βαθμωτού πεδίου πρέπει να είναι μικρή

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|. \quad (3.3.2)$$

Αυτές είναι οι συνθήκες αργής εξέλιξης και επιβάλλοντας τις στην εξίσωση Klein-Gordon (3.2.8) και στην πρώτη εξίσωση Friedmann (3.2.12), παίρνουμε τις εξισώσεις αργής-εξέλιξης

$$3H\dot{\phi} = -V_{,\phi}, \quad (3.3.3)$$

και

$$H^2 = \frac{V}{3M_{pl}^2}. \quad (3.3.4)$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο εξισώσεις, έχουμε την σχέση

$$H^{-1}\dot{\phi} = -M^2 \frac{V_{,\phi}}{V}, \quad (3.3.5)$$

ενώ υπολογίζοντας τις χρονικές παραγώγους τους, παίρνουμε

$$\dot{H} = -\frac{(V_{,\phi})^2}{6V}, \quad \ddot{\phi} = \frac{M_{pl}^2}{3} \frac{V_{,\phi\phi} V_{,\phi}}{V} - \frac{M_{pl}^2}{6} \frac{(V_{,\phi})^3}{V^2}. \quad (3.3.6)$$

Από την στιγμή που στην προσέγγιση αργής-εξέλιξης όλα εξαρτώνται από το πεδίο ϕ , μέσω του δυναμικού $V(\phi)$ και των παραγώγων του, είναι χρήσιμο να ορίσουμε τις παραμέτρους αργής-εξέλιξης του δυναμικού

$$\varepsilon_V \equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad \eta_V \equiv M_{pl}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V}, \quad \xi_V = M_{pl}^4 \frac{V_{,\phi\phi\phi} V_{,\phi}}{V^2}. \quad (3.3.7)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις αργής-εξέλιξης και τους παραπάνω ορισμούς των παραμέτρων αργής-εξέλιξης, παίρνουμε τα ακόλουθα χρήσιμα αποτελέσματα³

$$H^{-2}\dot{H} = -\varepsilon_V, \quad (3.3.8)$$

$$\left(H^{-1}\dot{\phi} \right)^2 = 2M_{pl}^2 \varepsilon_V, \quad (3.3.9)$$

$$H^{-2}\ddot{\phi} = H^{-1}\dot{\phi}(\varepsilon_V - \eta_V), \quad (3.3.10)$$

$$H^{-1}\dot{\varepsilon}_V = -2\varepsilon_V\eta_V + 4\varepsilon_V^2, \quad (3.3.11)$$

$$H^{-1}\dot{\eta}_V = 2\varepsilon_V\eta_V - \xi_V. \quad (3.3.12)$$

Επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε την ενεργειακή πυκνότητα και πίεση του πεδίου ως προς τις παραμέτρους αργής-εξέλιξης

$$\rho = \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_V \right) V, \quad (3.3.13)$$

$$P = \left(-1 + \frac{1}{3}\varepsilon_V \right) V, \quad (3.3.14)$$

$$w \equiv \frac{P}{\rho} \approx -1 + \frac{2}{3}\varepsilon_V, \quad (3.3.15)$$

$$c_s^2 \equiv \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} \approx -1 - \frac{2}{3}\varepsilon_V + \frac{2}{3}\eta_V. \quad (3.3.16)$$

³Appendix A.

Όπως αναφέραμε πριν, ο συνολικός αριθμός e -folds για επιταχυνόμενη διαστολή είναι

$$N_{tot} \equiv \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} d \ln \alpha = \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (3.3.17)$$

όπου οι t_i και t_f είναι ορισμένοι τις χρονικές στιγμές που ο πληθωρισμός ξεκινάει και τελειώνει, αντίστοιχα. Στην προσέγγιση αργής-εξέλιξης παίρνουμε

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V}} \frac{|d\phi|}{M_{pl}}, \quad (3.3.18)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (3.3.9). Οι μεγαλύτερες κλίμακες που παρατηρούμε στο CMB δημιουργήθηκαν περίπου 60 e -folds πριν από το τέλος του πληθωρισμού, $N_{CMB} \approx 60$.

Ο πληθωρισμός τελειώνει όταν $\varepsilon_H = 1$, δηλαδή το πεδίο κυλά προς το ελάχιστο του δυναμικού αποκτώντας κινητική ενέργεια. Το πεδίο ξεκινά να ταλαντώνεται γύρω από το ελάχιστο και να διασπάται σε ελαφρύτερα σωματίδια μεταφέροντας τους την ενέργεια του. Αυτή η διαδικασία χαρακτηρίζεται ως επαναθέρμανση (reheating) και αποτελεί την αρχή της καθιερωμένης κοσμολογίας.

Κεφάλαιο 4

Κοσμολογικές Διαταραχές

Για να καταλάβουμε τον σχηματισμό και την εξέλιξη των δομών μεγάλης κλίμακας, που παρατηρούμε σήμερα στο Σύμπαν, πρέπει να μελετήσουμε τις αρχέγονες ανομοιογένειες. Για όσο αυτές οι διαταραχές παραμένουν σχετικά μικρές, μπορούμε να τις αντιμετωπίσουμε με την θεωρία διαταραχών.

Ο πληθωρισμός παρέχει έναν φυσικό μηχανισμό για την παραγωγή αρχέγονων διακυμάνσεων στην πυκνότητα. Το πληθωριστικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί ως $\phi(t, \vec{x}) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, \vec{x})$, όπου $\bar{\phi}(t)$ είναι η ομοιογενής λύση του υποβάθρου και $\delta\phi(t, \vec{x})$ η χωροχρονικά εξαρτώμενη διαταραχή. Αυτές οι διαταραχές μπορούν να οδηγήσουν σε ανομοιογένειες στην ενεργειακή πυκνότητα και τελικά στην ανάπτυξη δομών στο Σύμπαν, καθώς και στις διακυμάνσεις της θερμοκρασίας $\Delta T(\vec{x})$ του CMB που παρατηρούμε σήμερα.

4.1 Διαταραγμένη FLRW Μετρική

Θεωρούμε τον διαταραγμένο χωροχρόνο, ο οποίος είναι κοντά σε ένα απλό και συμμετρικό FLRW υπόβαθρο

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = \alpha^2 (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \quad (4.1.1)$$

όπου $\bar{g}_{\mu\nu}$ είναι η μετρική του υποβάθρου και οι $\delta g_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$, όπως και οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοί τους, είναι μικρές. Επίσης, ορίζουμε

$$h^\mu{}_\nu \equiv \eta^{\mu\rho} h_{\rho\nu}, \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma},$$

παρά το γεγονός ότι η διαταραχή $h_{\mu\nu}$ δεν είναι ταυστής στο διαταραγμένο Σύμπαν. Το διαταραγμένο κομμάτι της μετρικής μπορεί να γραφτεί ως

$$h_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix}, \quad (4.1.2)$$

όπου $D = -\frac{1}{6}h^i{}_i \equiv -\frac{1}{6}h$ και $\delta^{ij}E_{ij} \equiv E^i{}_i \equiv E_{ii} = 0$.

Συνεπώς, το στοιχείο μήχους είναι

$$ds^2 = \alpha^2(\tau) \left\{ -(1 + 2A) d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + [(1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \right\}. \quad (4.1.3)$$

Η συνάρτηση $A(\tau, x^i)$ καλείται lapse function και $B_i(\tau, x^i)$ είναι το shift vector.

4.2 Ανάλυση σε Βαθμωτά-Διανύσματα-Τανυστές

Ένα διανυσματικό πεδίο μπορεί να γραφεί σαν ένα άθροισμα της κλίσης ενός βαθμωτού και ενός διανύσματος χωρίς απόκλιση

$$B_i = -B_{,i} + B_i^V, \quad (4.2.1)$$

όπου $\delta^{ij} B_{i,j}^V = 0$.

Παρομοίως, κάθε συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης μπορεί να γραφεί ως

$$E_{ij} = E_{ij}^S + E_{ij}^V + E_{ij}^T, \quad (4.2.2)$$

όπου

$$E_{ij}^S = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E = E_{,ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} E_{,kl}, \quad (4.2.3)$$

$$E_{ij}^V = -\frac{1}{2} (E_{i,j} + E_{j,i}), \quad \text{όπου} \quad \delta^{ij} E_{i,j} = \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (4.2.4)$$

$$\text{και} \quad \delta^{ik} E_{ij,k}^T = 0, \quad \delta^{ij} E_{ij}^T = 0. \quad (4.2.5)$$

Η ανάλυση σε βαθμωτά, διανύσματα και τανυστές είναι σημαντική, καθώς οι αντίστοιχες εξισώσεις Einstein για βαθμωτά, διανύσματα και τανυστές δεν συζεύγνται μεταξύ τους σε γραμμική τάξη και επομένως εξελίσσονται ανεξάρτητα.

Εμείς ενδιαφερόμαστε κυρίως για βαθμωτές διαταραχές, αφού αυτές σχετίζονται με τις διακυμάνσεις στην πυκνότητα και παρουσιάζουν βαρυτική αστάθεια, και επομένως είναι υπεύθυνες για τον σχηματισμό των δομών στο Σύμπαν. Οι διανυσματικές διαταραχές τείνουν να φθίνουν πολύ γρήγορα με την διαστολή του Σύμπαντος και επομένως δεν έχουν αρκετό ενδιαφέρον στην κοσμολογία. Τελικά, οι τανυστικές διαταραχές μπορούν να παράξουν βαρυτικά κύματα και, αν είναι αρκετά ισχυρές, να έχουν παρατηρήσιμες συνέπειες στην ανισοτροπία του CMB.

4.3 Μετασχηματισμοί Βαθμίδας

Μία λεπτομέρεια που πρέπει να δώσουμε προσοχή είναι η επιλογή βαθμίδας, δηλαδή η επιλογή των συντεταγμένων. Οι διαταραχές της μετρικής στην (4.1.3) δεν είναι μοναδικά ορισμένες. Μια διαφορετική επιλογή συντεταγμένων μπορεί να αλλάξει τις τιμές των διαταραγμένων μεταβλητών ή ακόμα και να εισάγει φανταστικές διαταραχές.

Για ένα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων στο υπόβαθρο, το οποίο το συμβολίζουμε με x^α , κάποιος μπορεί να θεωρήσει πολλά συστήματα συντεταγμένων στο διαταραγμένο Σύμπαν ($\hat{x}^\alpha, \tilde{x}^\alpha, \dots$), όλα κοντά το ένα στο άλλο. Μπορούμε να συσχετίσουμε δύο από αυτά τα συστήματα στο διαταραγμένο χωροχρόνο με τον μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$\tilde{x}^\alpha = \hat{x}^\alpha + \xi^\alpha, \quad (4.3.1)$$

όπου το ξ^α και οι παράγωγοι $\xi^\alpha_{,\beta}$ είναι πρώτης τάξης. Το σύστημα \hat{x}^α συσχετίζει ένα σημείο του υποβάθρου \bar{P} με ένα σημείο \hat{P} , ενώ το \tilde{x}^α σχετίζει το ίδιο σημείο \bar{P} με άλλο σημείο \tilde{P}

$$\tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) = x^\alpha(\bar{P}). \quad (4.3.2)$$

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων συσχετίζει τις συντεταγμένες του ίδιου σημείου στο διαταραγμένο Σύμπαν¹

$$\tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) + \xi^\alpha, \quad \tilde{x}^\alpha(\hat{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) + \xi^\alpha. \quad (4.3.3)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.3.2, 4.3.3), μπορούμε να πάρουμε τις παρακάτω σχέσεις για τις συντεταγμένες των δύο διαφορετικών σημείων σε ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων

$$\hat{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) - \xi^\alpha, \quad \tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \tilde{x}^\alpha(\hat{P}) - \xi^\alpha. \quad (4.3.4)$$

Έχουμε επίσης τους γνωστούς μετασχηματισμούς για τα βαθμωτά (s), διανύσματα (w^α) και τανυστές δεύτερης τάξης ($A^\alpha_\beta, B_{\alpha\beta}$)

$$\begin{aligned} s &= s, \\ w^{\tilde{\alpha}} &= X^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}} w^{\tilde{\beta}}, \\ A^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}} &= X^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\gamma}} X^{\tilde{\delta}}_{\tilde{\beta}} A^{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\delta}}, \\ B_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} &= X^{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\alpha}} X^{\tilde{\delta}}_{\tilde{\beta}} B_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

όπου

$$\begin{aligned} X^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}} &\equiv \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} = \delta^\alpha_\beta + \xi^\alpha_{,\beta}, \\ X^{\tilde{\delta}}_{\tilde{\beta}} &\equiv \frac{\partial \hat{x}^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} = \delta^\delta_\beta - \xi^\delta_{,\beta}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Αυτοί οι μετασχηματισμοί αναφέρονται στις τιμές αυτών των ποσοτήτων σε ένα συγκεκριμένο σημείο του διαταραγμένου χωροχρόνου.

Εμείς ενδιαφερόμαστε για τις διαταραχές στις διάφορες ποσότητες. Στο χωροχρόνο του υποβάθρου είναι πιθανό να έχουμε αρκετά 4-βαθμωτά πεδία \bar{s} , 4-διανυσματικά πεδία \bar{w}^α και τανυστικά πεδία $\bar{A}^\alpha_\beta, \bar{B}_{\alpha\beta}$, με τις αντίστοιχες διαταραγμένες ποσότητες

$$s = \bar{s} + \delta s, \quad (4.3.7)$$

$$w^\alpha = \bar{w}^\alpha + \delta w^\alpha, \quad (4.3.8)$$

$$A^\alpha_\beta = \bar{A}^\alpha_\beta + \delta A^\alpha_\beta, \quad (4.3.9)$$

$$B_{\alpha\beta} = \bar{B}_{\alpha\beta} + \delta B_{\alpha\beta}. \quad (4.3.10)$$

Για ένα 4-βαθμωτό (4.3.7), οι διαταραχές σε διαφορετικές βαθμίδες ορίζονται ως

$$\delta \hat{s}(x^\alpha) \equiv s(\hat{P}) - \bar{s}(\bar{P}), \quad \delta \tilde{s}(x^\alpha) \equiv s(\tilde{P}) - \bar{s}(\bar{P}). \quad (4.3.11)$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε το $\delta \hat{s}$ και το $\delta \tilde{s}$

$$s(\tilde{P}) = s(\hat{P}) - \frac{\partial s}{\partial \hat{x}^\alpha}(\hat{P}) \xi^\alpha = s(\hat{P}) - \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P}) \xi^\alpha. \quad (4.3.12)$$

¹Να σημειωθεί ότι η διαφορά $\xi^\alpha(\tilde{P}) - \xi^\alpha(\hat{P})$ είναι δεύτερης τάξης και συνεπώς γράφουμε απλά ξ^α .

²Πάλι, ενδιαφερόμαστε μόνο για πρώτης τάξης διαταραχές και συνεπώς κάνουμε την προσέγγιση $\frac{\partial s}{\partial \hat{x}^\alpha}(\hat{P}) \approx \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P})$.

Το υπόβαθρο μας είναι ομοιογενές, $\bar{s} = \bar{s}(\tau)$, και έτσι³

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P}) = \bar{s}' \xi^0.$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός βαθμίδας για τις διαταραχές των 4-βαθμωτών είναι

$$\delta \bar{s}(x^\alpha) = \delta \hat{s}(x^\alpha) - \bar{s}' \xi^0. \quad (4.3.13)$$

Αντίστοιχα με το (4.3.11), οι διαταραχές των διανυσματικών και τανυστικών πεδίων στις δύο βαθμίδες ορίζονται ως

$$\delta \hat{w}^\alpha(x^\beta) \equiv w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) - \bar{w}^\alpha(\bar{P}), \quad \delta \tilde{w}^\alpha(x^\beta) \equiv w^{\tilde{\alpha}}(\tilde{P}) - \bar{w}^\alpha(\bar{P}), \quad (4.3.14)$$

$$\delta \hat{A}^\alpha_\beta(x^\gamma) \equiv A^{\hat{\alpha}}_\beta(\hat{P}) - \bar{A}^\alpha_\beta(\bar{P}), \quad \delta \tilde{A}^\alpha_\beta(x^\gamma) \equiv A^{\tilde{\alpha}}_\beta(\tilde{P}) - \bar{A}^\alpha_\beta(\bar{P}), \quad (4.3.15)$$

$$\delta \hat{B}_{\alpha\beta}(x^\gamma) \equiv B_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\hat{P}) - \bar{B}_{\alpha\beta}(\bar{P}), \quad \delta \tilde{B}_{\alpha\beta}(x^\gamma) \equiv B_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(\tilde{P}) - \bar{B}_{\alpha\beta}(\bar{P}). \quad (4.3.16)$$

Για την περίπτωση του (0,2) τύπου τανυστικού πεδίου έχουμε

$$B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{P}) = B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) + \frac{\partial B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}}{\partial \hat{x}^\alpha} [\hat{x}^\alpha(\tilde{P}) - \hat{x}^\alpha(\hat{P})] = B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}(\bar{P}) \xi^\alpha, \quad (4.3.17)$$

και

$$B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{P}) = B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) - \xi^\rho_{,\mu} \bar{B}_{\rho\nu}(\bar{P}) - \xi^\sigma_{,\nu} \bar{B}_{\mu\sigma}(\bar{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}(\bar{P}) \xi^\alpha. \quad (4.3.18)$$

Έτσι παίρνουμε τον μετασχηματισμό βαθμίδας για την διαταραχή $\delta B_{\mu\nu}$

$$\delta \tilde{B}_{\mu\nu} \equiv B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{P}) - \bar{B}_{\mu\nu}(\bar{P}) = \delta \tilde{B}_{\mu\nu} - \xi^\rho_{,\mu} \bar{B}_{\rho\nu} - \xi^\sigma_{,\nu} \bar{B}_{\mu\sigma} - \bar{B}_{\mu\nu,\alpha} \xi^\alpha. \quad (4.3.19)$$

Με παρόμοιο τρόπο και κρατώντας στο μυαλό μας ότι το υπόβαθρο είναι ομοιογενές και ισότροπο και συνεπώς τα 4-διανύσματα και οι τανυστές του υποβάθρου παίρνουν την μορφή

$$\bar{w}^\alpha = (\bar{w}^0, \vec{0}), \quad \bar{A}^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \bar{A}^0_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \delta^i_j \bar{A}^k_k \end{pmatrix}, \quad (4.3.20)$$

εξαρτώμενα μόνο από τον συμμερφο χρόνο τ , μπορούμε να γράψουμε τους κανόνες μετασχηματισμού βαθμίδας για κάθε ξεχωριστή συνιστώσα των διαταραχών των 4-βαθμωτών, 4-διανυσματικών και (1,1) τύπου τανυστικών πεδίων⁴

$$\begin{aligned} \delta \tilde{s} &= \delta s - \bar{s}' \xi^0, \\ \delta \tilde{w}^0 &= \delta w^0 + \xi^0_{,0} \bar{w}^0 - \bar{w}^0_{,0} \xi^0, \\ \delta \tilde{w}^i &= \delta w^i + \xi^i_{,0} \bar{w}^0, \\ \delta \tilde{A}^0_0 &= \delta A^0_0 - \bar{A}^0_{0,0} \xi^0, \\ \delta \tilde{A}^0_i &= \delta A^0_i + \frac{1}{3} \xi^0_{,i} \bar{A}^k_k - \xi^0_{,i} \bar{A}^0_0, \\ \delta \tilde{A}^i_0 &= \delta A^i_0 + \xi^i_{,0} \bar{A}^0_0 - \frac{1}{3} \xi^i_{,0} \bar{A}^k_k, \\ \delta \tilde{A}^i_j &= \delta A^i_j - \frac{1}{3} \delta^i_j \bar{A}^k_{k,0} \xi^0. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

³Ο τόνος ' $\equiv \frac{d}{d\tau}$ υποδηλώνει την παράγωγο ως προς τον συμμερφο χρόνο τ .

⁴Τώρα αγνοούμε τα καπέλα της πρώτης βαθμίδας.

4.3.1 Μετασχηματισμός Βαθμίδας των Διαταραχών της Μετρικής

Εξετάζουμε τώρα τον μετασχηματισμό βαθμίδας στις διαταραχές της μετρικής. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό (4.3.19) στις διαταραχές της μετρικής, παίρνουμε

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \xi^{\rho}_{,\mu}\bar{g}_{\rho\nu} - \xi^{\sigma}_{,\nu}\bar{g}_{\mu\sigma} - \bar{g}_{\mu\nu,0}\xi^0, \quad (4.3.22)$$

αφού η μετρική του υποβάθρου εξαρτάται μόνο από τον χρόνο.

Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \alpha^2(\tau)\eta_{\mu\nu} \Rightarrow \bar{g}_{\mu\nu,0} = 2\alpha'\alpha\eta_{\mu\nu}, \quad (4.3.23)$$

η εξίσωση (4.3.22) μπορεί να γραφτεί ως

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + \alpha^2 \left[-\xi^{\rho}_{,\mu}\eta_{\rho\nu} - \xi^{\sigma}_{,\nu}\eta_{\mu\sigma} - 2\frac{\alpha'}{\alpha}\eta_{\mu\nu}\xi^0 \right]. \quad (4.3.24)$$

Γνωρίζουμε από την εξίσωση (4.1.2) ότι

$$\delta g_{\mu\nu} \equiv \alpha^2 \begin{pmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.3.25)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό βαθμίδας (4.3.24) στις διαταραγμένες συνιστώσες της μετρικής, έχουμε

- για την 00-συνιστώσα

$$\begin{aligned} \delta\tilde{g}_{00} &= -2\alpha^2\tilde{A} = -2\alpha A + \alpha^2 \left(-\xi^{\rho}_{,0}\eta_{\rho 0} - \xi^{\sigma}_{,0}\eta_{0\sigma} - 2\frac{\alpha'}{\alpha}\eta_{00}\xi^0 \right) \Rightarrow \\ -2\alpha^2\tilde{A} &= -2\alpha^2 A + \alpha^2 \left(2\xi^0_{,0} + 2\frac{\alpha'}{\alpha}\xi^0 \right) \Rightarrow \\ \tilde{A} &= A - \xi^0_{,0} - \frac{\alpha'}{\alpha}\xi^0. \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

- για την 0i-συνιστώσα

$$\begin{aligned} \delta\tilde{g}_{0i} &= -\alpha^2\tilde{B}_i = -\alpha^2 B_i - \alpha^2 \xi^{\rho}_{,0}\eta_{\rho i} - \alpha^2 \xi^{\sigma}_{,i}\eta_{0\sigma} - 2\alpha'\alpha\eta_{0i}\xi^0 \Rightarrow \\ -\alpha^2\tilde{B}_i &= -\alpha^2 B_i - \alpha^2 \xi^i_{,0}\eta_{ii} - \alpha^2 \xi^0_{,i}\eta_{00} \Rightarrow \\ -\alpha^2\tilde{B}_i &= -\alpha^2 B_i - \alpha^2 \xi^i_{,0} + \alpha^2 \xi^0_{,i} \Rightarrow \\ \tilde{B}_i &= B_i + \xi^i_{,0} - \xi^0_{,i}. \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

- για την ij-συνιστώσα

$$\begin{aligned} \delta\tilde{g}_{ij} &= \alpha^2 \left(-2\tilde{D}\delta_{ij} + 2\tilde{E}_{ij} \right) = \delta g_{ij} - \alpha^2 \xi^{\rho}_{,i}\eta_{\rho j} - \alpha^2 \xi^{\sigma}_{,j}\eta_{i\sigma} - 2\alpha'\alpha\eta_{ij}\xi^0 \Rightarrow \\ \alpha^2 \left(-2\tilde{D}\delta_{ij} + 2\tilde{E}_{ij} \right) &= \alpha^2 \left(-2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \right) - \alpha^2 \xi^j_{,i}\eta_{jj} - \alpha^2 \xi^i_{,j}\eta_{ii} - 2\alpha'\alpha\delta_{ij}\xi^0 \Rightarrow \\ -\tilde{D}\delta_{ij} + \tilde{E}_{ij} &= -D\delta_{ij} + E_{ij} - \frac{1}{2} \left(\xi^i_{,j} + \xi^j_{,i} \right) - \frac{\alpha'}{\alpha}\xi^0\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{2} (\xi^i_{,j} + \xi^j_{,i}) = \frac{1}{3} \delta_{ij} \xi^k_{,k} + \frac{1}{2} (\xi^i_{,j} + \xi^j_{,i}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \xi^k_{,k}, \quad (4.3.29)$$

αφού το ίχνος του $\frac{1}{2} (\xi^i_{,j} + \xi^j_{,i})$ είναι $\xi^k_{,k}$. Συνεπώς χωρίζουμε την εξίσωση (4.3.28) σε

$$\tilde{D} = D + \frac{1}{3} \xi^k_{,k} + \frac{\alpha'}{\alpha} \xi^0, \quad (4.3.30)$$

$$\tilde{E}_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{2} (\xi^i_{,j} + \xi^j_{,i}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \xi^k_{,k}. \quad (4.3.31)$$

4.4 Βαθμωτές Διαταραχές

Από την στιγμή που οι βαθμωτές διαταραχές σχετίζονται με τον σχηματισμό των δομών στο Σύμπαν, θα εστιάσουμε σε αυτές. Το στοιχείο μήκους είναι

$$ds^2 = \alpha^2(\tau) \{ -(1 + 2A) d\tau^2 + 2B_{,i} d\tau dx^i + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j \}, \quad (4.4.1)$$

όπου έχουμε ορίσει την διαταραχή της καμπυλότητας

$$\psi \equiv D + \frac{1}{3} \nabla^2 E. \quad (4.4.2)$$

Τώρα οι συνιστώσες της $h_{\mu\nu}$ είναι

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2A & B_{,i} \\ B_{,i} & -2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{pmatrix}. \quad (4.4.3)$$

Ξεκινώντας από καθαρά βαθμωτές διαταραχές και πραγματοποιώντας έναν αυθαίρετο μετασχηματισμό βαθμίδας $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, μπορεί να εισάγουμε και κάποια διανυσματική διαταραχή. Ωστόσο, αυτή η διανυσματική διαταραχή εξαρτάται από τον μετασχηματισμό της βαθμίδας και δεν έχει ενδιαφέρον. Όπως αναφέραμε και πριν, μπορούμε να χωρίσουμε το ξ^i σε δύο μέρη, ένα χωρίς απόκλιση και ένα με μηδενικό στροβιλισμό

$$\xi^i = \xi^i_{tr} - \delta^{ij} \xi_{,j}, \quad (4.4.4)$$

όπου $\xi^i_{tr,i} = 0$.

Θεωρώντας ότι μελετάμε μόνο βαθμωτές διαταραχές, μπορούμε να πετάξουμε τον όρο ξ^i_{tr} . Ο μετασχηματισμός βαθμίδας είναι

$$\tilde{\tau} = \tau + \xi^0(\tau, \vec{x}), \quad (4.4.5)$$

$$\tilde{x}^i = x^i - \delta^{ij} \xi_{,j}(\tau, \vec{x}) \quad (4.4.6)$$

Συνεπώς, οι εξισώσεις μετασχηματισμού (4.3.26, 4.3.27, 4.3.30, 4.3.31) γίνονται

$$\tilde{A} = A - \xi^{0'} - \frac{\alpha'}{\alpha} \xi^0, \quad (4.4.7)$$

$$\tilde{B} = B + \xi' + \xi^0, \quad (4.4.8)$$

$$\tilde{D} = D - \frac{1}{3} \nabla^2 \xi + \frac{\alpha'}{\alpha} \xi^0, \quad (4.4.9)$$

$$\tilde{E} = E + \xi. \quad (4.4.10)$$

Αντί για το D , συχνά χρησιμοποιείται η διαταραχή της καμπυλότητας ψ σαν τέταρτη βαθμωτή μεταβλητή και παίρνουμε

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{\alpha'}{\alpha} \xi^0 = \psi + \mathcal{H} \xi^0, \quad (4.4.11)$$

όπου $\mathcal{H} \equiv \frac{\alpha'}{\alpha} = \alpha H = \dot{\alpha}$ είναι η σύμμορφη παράμετρος Hubble.

Μπορούμε να δημιουργήσουμε ποσότητες, οι οποίες να είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, παίρνοντας διάφορους συνδυασμούς των τεσσάρων βαθμωτών μεταβλητών A, B, E και ψ . Οι πιο δημοφιλείς είναι τα δυναμικά Bardeen

$$\Phi \equiv A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')', \quad (4.4.12)$$

$$\Psi \equiv D + \frac{1}{3} \nabla^2 E - \mathcal{H}(B - E') = \psi - \mathcal{H}(B - E'). \quad (4.4.13)$$

4.5 Δυναμική του Διαταραγμένου Σύμπαντος

Τώρα, ας πάμε πίσω στο διαταραγμένο Σύμπαν.

Όπως είπαμε πριν, το υπόβαθρο είναι ένας επίπεδος FLRW χωροχρόνος. Θεωρώντας ένα βαθμωτό πεδίο, το πληθωριστικό πεδίο, οι εξισώσεις Friedmann είναι

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} \alpha^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} (\bar{\phi}')^2 + \alpha^2 V \right], \quad (4.5.1)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3} (\bar{\rho} + 3\bar{P}) = -\frac{8\pi G}{3} [(\bar{\phi}')^2 - \alpha^2 V]. \quad (4.5.2)$$

Για το διαταραγμένο Σύμπαν η μετρική είναι

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = \alpha^2 \begin{pmatrix} -1 - 2A & -B_i \\ -B_i & (1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix}, \quad (4.5.3)$$

$$g^{\mu\nu} = \alpha^{-2} \begin{pmatrix} -1 + 2A & -B_i \\ -B_i & (1 + 2D)\delta_{ij} - 2E_{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.5.4)$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα της

$$\begin{aligned} g &\approx -\alpha^8 (1 + 2A) (1 - 2D - 2E_{11}) (1 - 2D - 2E_{22}) (1 - 2D - 2E_{33}) \Rightarrow \\ g &\approx -\alpha^8 (1 + 2A - 6D), \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

αφού το ίχνος του E_{ij} είναι μηδέν.

Επομένως, παίρνουμε την εξίσωση πεδίου⁵

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' - \nabla^2\phi - (A' + 3D' - B_{i,i})\phi' = -\alpha^2(1 + 2A)V_{,\phi}. \quad (4.5.6)$$

Αν χωρίσουμε το πεδίο σε δύο μέρη, ένα υποβάθρο και μία διαταραχή

$$\phi = \bar{\phi}(\tau) + \delta\phi(\tau, \vec{x}), \quad (4.5.7)$$

το δυναμικό και η παράγωγος του γίνονται

$$V(\phi) = V(\bar{\phi} + \delta\phi) = V(\bar{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi \Rightarrow V_{,\phi} = \frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\delta\phi. \quad (4.5.8)$$

Από την εξίσωση (4.5.6) παίρνουμε την εξίσωση κίνησης του υποβάθρου και την διαταραγμένη εξίσωση κίνησης⁵

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi + \alpha^2 V_{,\phi\phi}\delta\phi = -2\alpha^2 V_{,\phi}A + (A' + 3D' - B_{i,i})\phi', \quad (4.5.9)$$

όπου $-B_{i,i} = \nabla^2 B$, και έτσι έχουμε συνεισφορά μόνο από το βαθμωτό μέρος του B.

Με αντίστοιχο τρόπο, από την εξίσωση (3.2.7), παίρνουμε την διαταραχή του ταυιστή ενέργειας-ορμής

$$\delta T_0^0 = -\alpha^{-2} [\phi'\delta\phi' - (\phi')^2 A] + V_{,\phi}\delta\phi = -\delta\rho, \quad (4.5.10)$$

$$\delta T_i^0 = -\alpha^{-2} \phi' \partial_i(\delta\phi) \quad (4.5.11)$$

$$\delta T_0^i = \alpha^{-2} [\phi' \partial_i(\delta\phi) - (\phi')^2 B_i] \quad (4.5.12)$$

$$\delta T_j^i = \delta_j^i \{ \alpha^{-2} [\phi'\delta\phi' - (\phi')^2 A] - V_{,\phi}\delta\phi \} = \delta_j^i \delta P. \quad (4.5.13)$$

Τα βαθμωτά πεδία δεν έχουν ανισοτροπική πίεση, συνεπώς τα δυναμικά Bardeen είναι ίσα, $\Phi = \Psi$.

Τώρα, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Einstein

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha^2\delta G_0^0 &= 3\mathcal{H}(\mathcal{H}A + D') - \nabla^2(\psi - \mathcal{H}B) \\ &= -4\pi G [\phi'\delta\phi' - (\phi')^2 A] + \alpha^2 V_{,\phi}\delta\phi, \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha^2\delta G_i^0 = (\psi' + \mathcal{H}A)_{,i} = 4\pi G \phi' \partial_i(\delta\phi), \quad (4.5.15)$$

$$\frac{1}{2}\alpha^2\delta G_0^i = [\psi' + \mathcal{H}A + (-\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) B]_{,i} = 4\pi G [\phi' \partial_i(\delta\phi) - (\phi')^2 B_i], \quad (4.5.16)$$

$$\frac{1}{2}\alpha^2\delta G_j^i = \left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) A + \mathcal{H}A' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi' + \frac{1}{2}\nabla^2\mathcal{D} \right] \delta_j^i - \frac{1}{2}\mathcal{D}_{,ij} \quad (4.5.17)$$

$$= 4\pi G \delta_j^i \{ [\phi'\delta\phi' - (\phi')^2 A] - \alpha^2 V_{,\phi}\delta\phi \}, \quad (4.5.18)$$

όπου $\mathcal{D} = A - \psi + 2\mathcal{H}(B - E') + (B - E')' = \Phi - \Psi = 0$, αφού δεν υπάρχει ανισοτροπική πίεση. Οι εξισώσεις (4.5.15), (4.5.16) δεν είναι ανεξάρτητες, αφού η διαφορά τους είναι απλά η εξίσωση υποβάθρου

$$-\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = 4\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})\alpha^2 = 4\pi G(\bar{\phi}')^2. \quad (4.5.19)$$

⁵Appendix B.

4.6 Χωρικά Επίπεδη Βαθμίδα

Η επιλογή της βαθμίδας μπορεί να μας βοηθήσει στην επίλυση των διαταραγμένων εξισώσεων πεδίου. Μια ιδιαίτερη επιλογή είναι αυτή της χωρικά επίπεδης βαθμίδας που συμβολίζουμε με τον δείκτη/εκθέτη Q και ικανοποιεί την συνθήκη

$$\psi_Q = 0. \quad (4.6.1)$$

Από την εξίσωση (4.4.11)

$$\tilde{\psi} = \psi + \mathcal{H}\xi^0, \quad (4.6.2)$$

βλέπουμε ότι πηγαίνουμε στην χωρικά επίπεδη βαθμίδα με τον μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\xi^0 = -\mathcal{H}^{-1}\psi. \quad (4.6.3)$$

Εδώ, η διαταραχή του πεδίου καλείται μεταβλητή Sasaki ή Mukhanov

$$Q \equiv \delta\phi^Q = \delta\phi + \frac{\phi'}{\mathcal{H}}\psi. \quad (4.6.4)$$

Επίσης, η διαταραγμένη εξίσωση πεδίου (4.5.9) γίνεται

$$Q'' + 2\mathcal{H}Q' - \nabla^2 Q + \alpha^2 V_{,\phi\phi} Q = -2\alpha^2 V_{,\phi} A_Q + \phi' A'_Q - \phi' \nabla^2 (E'_Q - B_Q). \quad (4.6.5)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Einstein ώστε να εξαλείψουμε τα A_Q , B_Q και E_Q από την εξίσωση (4.6.5)

- $A_Q = 4\pi G\mathcal{H}^{-1}\phi'Q$,
- $\nabla^2 (E'_Q - B_Q) = \mathcal{H}^{-1}\nabla^2\Phi$.

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην τελευταία εξίσωση τις διαταραχές της μετρικής με μια διαταραχή της ενεργειακής πυκνότητας, αλλά σε μία διαφορετική βαθμίδα, την ομοκινούμενη βαθμίδα, αφού

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\alpha^2\delta\rho^C. \quad (4.6.6)$$

Η ομοκινούμενη βαθμίδα ορίζεται από τις συνθήκες $v^C = B^C = 0$. Αντί της ταχύτητας, ένας πιο σωστός ορισμός για ένα βαθμωτό πεδίο θα ήταν ο ακόλουθος

$$v_i = -\frac{\delta T_i^0}{\rho + P}, \quad (4.6.7)$$

έτσι ώστε

$$\delta T_i^0 = 0. \quad (4.6.8)$$

Από την εξίσωση (4.5.11) προκύπτει ότι

$$\delta\phi^C = 0. \quad (4.6.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξίσωσεις μετασχηματισμού βαθμίδας (4.3.21ε, 4.4.8), παίρνουμε για την ομοκινούμενη βαθμίδα

$$\xi^0 = \frac{\delta\phi}{\phi'} \quad \text{και} \quad \xi' = -B - \xi^0. \quad (4.6.10)$$

Για την ομοκινούμενη διαταραχή της πυκνότητας έχουμε

$$\begin{aligned} \delta\rho^C &= \delta\rho - \rho'\xi^0 = \alpha^{-2} [\phi'\delta\phi' - (\phi')^2 A] + V_{,\phi}\delta\phi - \left[\alpha^{-2} \frac{(\phi')^2}{2} + V \right]' \frac{\delta\phi}{\phi'} \Rightarrow \\ &= \alpha^{-2} [\phi'(\delta\phi' - \phi' A) - (\phi'' - \mathcal{H}\phi')\delta\phi]. \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

Συνεπώς προκύπτει

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G [\phi'(\delta\phi' - \phi' A) - (\phi'' - \mathcal{H}\phi')\delta\phi], \quad (4.6.12)$$

όπου A και $\delta\phi$ είναι σε αυθαίρετη βαθμίδα. Ειδικότερα, στην χωρικά επίπεδη βαθμίδα

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G [\phi'(Q' - \phi' A_Q) - (\phi'' - \mathcal{H}\phi')Q]. \quad (4.6.13)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση για το A_Q μπορούμε να το εξαλείψουμε από την εξίσωση

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G \alpha^2 \delta\rho^C = 4\pi G \phi' \left(Q' + \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} Q - \frac{\phi''}{\phi'} Q \right), \quad (4.6.14)$$

και τελικά μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (4.6.5) σαν μία διαφορική εξίσωση μόνο για την διαταραχή του πεδίου Q

$$Q'' + 2\mathcal{H}Q' - \nabla^2 Q + \left[\alpha^2 V_{,\phi\phi} - \frac{8\pi G}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2}{\mathcal{H}} (\phi')^2 \right)' \right] Q = 0, \quad (4.6.15)$$

και σε χώρο Fourier

$$Q''_{\vec{k}} + 2\mathcal{H}Q'_{\vec{k}} + k^2 Q_{\vec{k}} + \left[\alpha^2 V_{,\phi\phi} - \frac{8\pi G}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2}{\mathcal{H}} (\phi')^2 \right)' \right] Q_{\vec{k}} = 0. \quad (4.6.16)$$

Αν γνωρίζουμε την λύση του υποβάθρου, μπορούμε να λύσουμε αυτή την εξίσωση ξεκινώντας από τις αρχικές τιμές $Q_{\vec{k}}$ και $Q'_{\vec{k}}$ ορισμένες σε κάποιον αρχικό χρόνο $\tau = \tau_{init}$.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε την ομοκινούμενη διαταραχή της καμπυλότητας

$$\mathcal{R} \equiv -\psi^C = -\psi - \mathcal{H}\xi^0 \Rightarrow \mathcal{R} = -\psi - \frac{\mathcal{H}}{\phi'}\delta\phi, \quad (4.6.17)$$

μία ποσότητα αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Στην χωρικά επίπεδη βαθμίδα είναι

$$\mathcal{R} = -\frac{\mathcal{H}}{\phi'} Q. \quad (4.6.18)$$

4.7 Εξέλιξη των Διαταραχών

Θα μελετήσουμε την εξέλιξη των διαταραχών του πεδίου στην προσέγγιση της αργής εξέλιξης.

Η διαταραγμένη εξίσωση πεδίου (4.6.15) ως προς τον κοσμικό χρόνο t είναι

$$H^{-2}\ddot{Q}_{\vec{k}} + 3H^{-1}\dot{Q}_{\vec{k}} + \left(\frac{k}{\alpha H}\right)^2 Q_{\vec{k}} = \left[\frac{8\pi G}{\alpha^3 H^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^3}{H} \dot{\phi}^2 \right) - H^{-2} V_{,\phi\phi} \right] Q_{\vec{k}}. \quad (4.7.1)$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{\alpha^3 H^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^3}{H} \dot{\phi}^2 \right) - H^{-2} V_{,\phi\phi} &= \frac{3\dot{\alpha}\dot{\phi}^2}{\alpha M_{pl}^2 H^2} + \frac{2\dot{\phi}\ddot{\phi}}{M_{pl}^2 H^3} - \frac{\dot{\phi}^2 \dot{H}}{M_{pl}^2 H^4} - \frac{V_{,\phi\phi}}{H^2} = \\ &= 3M_{pl}^2 \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 + \frac{M_{pl}^4}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^4 - 2V_{,\phi} \frac{M_{pl}^4}{V^2} \frac{V_{,\phi\phi} V_{,\phi}}{V} + V_{,\phi} \frac{M_{pl}^2}{V} \frac{3M_{pl}^2}{V} \frac{(V_{,\phi})^3}{3V^2} - 3\eta_V = \\ &= 6\varepsilon_V + 6\varepsilon_V^2 - 4\varepsilon_V \eta_V - 3\eta_V, \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις αργής εξέλιξης και τους ορισμούς των παραμέτρων αργής-εξέλιξης. Βλέπουμε ότι στην χωρικά επίπεδη βαθμίδα, οι διαταραχές της μετρικής επηρεάζουν τις διαταραχές του πεδίου σε πρώτη τάξη παραμέτρων αργής εξέλιξης.

Κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης παραμέτρους αργής εξέλιξης, έχουμε

$$H^{-2}\ddot{Q}_{\vec{k}} + 3H^{-1}\dot{Q}_{\vec{k}} + \left(\frac{k}{\alpha H}\right)^2 Q_{\vec{k}} = (6\varepsilon_V - 3\eta_V) Q_{\vec{k}}, \quad (4.7.3)$$

ή, σε σύμμορφο χρόνο

$$Q'' + 2\mathcal{H}Q' + k^2 Q = \mathcal{H}^2 (6\varepsilon_V - 3\eta_V) Q. \quad (4.7.4)$$

4.7.1 Εξίσωση Mukhanov - Sasaki

Ορίζοντας

$$u \equiv \alpha Q = \alpha \left(\delta\phi + \frac{\phi'}{\mathcal{H}} \psi \right), \quad (4.7.5)$$

παίρνουμε

$$u'' + \left(k^2 - \frac{\alpha''}{\alpha} \right) u = \mathcal{H}^2 (6\varepsilon_V - 3\eta_V) u. \quad (4.7.6)$$

Η μεταβλητή u σχετίζεται με την διαταραχή της καμπυλότητας \mathcal{R} μέσω της σχέσης

$$u = -z\mathcal{R}, \quad (4.7.7)$$

όπου $z = \frac{\alpha\dot{\phi}}{H}$. Η εξίσωση (4.7.6) μπορεί να γραφτεί ως⁶

$$u''_{\vec{k}} + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_{\vec{k}} = 0. \quad (4.7.8)$$

⁶Appendix C.

Αυτή είναι η εξίσωση Mukhanov-Sasaki. Σε πρώτη τάξη παραμέτρων αργής εξέλιξης $\frac{z''}{z} = \frac{\alpha''}{\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon_V, \eta_V)$.

Επίσης, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Mukhanov-Sasaki ως προς την διαταραχή της καμπυλότητας \mathcal{R} . Χρησιμοποιώντας τον ορισμό $u = -z\mathcal{R}$ παίρνουμε

$$\mathcal{R}_k'' + 2\frac{z'}{z}\mathcal{R}_k' + k^2\mathcal{R}_k = 0, \quad (4.7.9)$$

όπου $\frac{z'}{z} = \mathcal{H}(1 + 2\varepsilon_V - \eta_V)$.

Ένας μπορεί να βρει λύσεις στην εξίσωση Mukhanov-Sasaki χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις Hankel

$$H_\nu^{(1)} \equiv J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad \text{και} \quad H_\nu^{(2)} \equiv J_\nu(x) - iN_\nu(x), \quad (4.7.10)$$

όπου οι J_ν και N_ν είναι οι εξισώσεις Bessel και Neumann, αντίστοιχα.

4.8 Φάσμα Ισχύος

Κατά την διάρκεια του πληθωρισμού, οι κλίμακες μέσα στον ορίζοντα ήταν μικροσκοπικές και επομένως πρέπει να μεταβούμε στην κβαντική περιγραφή του πληθωριστικού πεδίου. Για να το κάνουμε αυτό, αντικαθιστούμε το κλασικά παρατηρούμενο $\phi(\tau, \vec{x})$ με τον τελεστή πεδίου

$$\hat{\phi}(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \hat{\phi}_{\vec{k}}(\tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (4.8.1)$$

όπου

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}(\tau) = w_{\vec{k}}(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}} + w_{\vec{k}}^*(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger. \quad (4.8.2)$$

Εδώ, οι $\hat{\alpha}_{\vec{k}}$, $\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger$ είναι οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας αντίστοιχα και $w_{\vec{k}}(\tau)$ είναι η συνάρτηση ταλάντωσης (mode function), μία κανονικοποιημένη λύση της εξίσωσης πεδίου. Οι σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας είναι

$$[\hat{\alpha}_{\vec{k}}, \hat{\alpha}_{\vec{k}'}] = [\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{\alpha}_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad \text{και} \quad [\hat{\alpha}_{\vec{k}}, \hat{\alpha}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \quad (4.8.3)$$

Η αναμενόμενη τιμή του πεδίου μηδενίζεται, δηλαδή $\langle \hat{\phi} \rangle = 0$, ωστόσο οι διακυμάνσεις του είναι μη-μηδενικές

$$\begin{aligned} \langle |\hat{\phi}|^2 \rangle &\equiv \langle 0 | \hat{\phi}_{\vec{k}}^\dagger \hat{\phi}_{\vec{k}} | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \langle 0 | (w_{\vec{k}}^*(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger + w_{\vec{k}}(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}}) (w_{\vec{k}'}(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}'} + w_{\vec{k}'}^*(\tau)\hat{\alpha}_{\vec{k}'}^\dagger) | 0 \rangle = \\ &= \int d \ln k \frac{k^3}{2\pi^2} |w_k(\tau)|^2. \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

Μπορούμε να ορίσουμε το φάσμα ισχύος για αυτές τις διακυμάνσεις κενού

$$P_\phi \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |w_k|^2. \quad (4.8.5)$$

Για κλίμακες έξω από τον ορίζοντα, η συνάρτηση ταλάντωσης είναι σχεδόν σταθερή⁷

⁷Βλέπε Hannu Kurki-Suonio-Cosmological Perturbation Theory, part 2.

$$w_k = 2^{\nu-2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \alpha^{-1} \sqrt{-\tau} (-k\tau)^{-\nu} \propto (-\tau)^{\eta_V - 2\varepsilon_V}, \quad (4.8.6)$$

και έτσι οι διακυμάνσεις “παγώνουν” και μπορούν να αντιμετωπιστούν κλασικά. Εδώ, $\nu = \frac{3}{2} + 3\varepsilon_V - \eta_V$. Το φάσμα ισχύος γίνεται

$$P_Q(\tau, k) = \frac{2^{2\nu-3}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 (-\alpha\tau)^{-2} (-k\tau)^{3-2\nu}. \quad (4.8.7)$$

Η εξάρτηση από την κλίμακα είναι

$$P_Q \propto k^{2\eta_V - 6\varepsilon_V} \equiv k^{n_s} \Rightarrow n_s = 2\eta_V - 6\varepsilon_V.$$

Η ομοκινούμενη διαταραχή της καμπυλότητας (4.6.18) παραμένει σταθερή σε κλίμακες μεγαλύτερες του ορίζοντα

$$\mathcal{R} = -\frac{H}{\dot{\phi}} Q \Rightarrow \mathcal{R} = -z^{-1} u, \quad (4.8.8)$$

όπου $z = \frac{\alpha\dot{\phi}}{\mathcal{H}} = \frac{\alpha\dot{\phi}}{H}$. Επομένως, το φάσμα ισχύος για τις διαταραχές καμπυλότητας είναι

$$P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 P_Q(\tau, k) \Rightarrow P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k}{z} \right|^2. \quad (4.8.9)$$

Για μεγάλους χρόνους ($k \ll \mathcal{H}$)

$$P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = \frac{2^{2\nu-3}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 \left(\frac{H}{-\alpha\tau\dot{\phi}} \right)^2 (-k\tau)^{3-2\nu}. \quad (4.8.10)$$

Η εξάρτηση από την κλίμακα είναι $\propto k^{3-2\nu}$, όπως και με το P_Q , ενώ η εξάρτηση από τον χρόνο δίνεται από

$$\left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}} \right)^2 (-\tau)^{1-2\nu}. \quad (4.8.11)$$

Αυτή η ποσότητα παραμένει σταθερή με το χρόνο στην προσέγγιση αργής εξέλιξης. Για να το δούμε αυτό ξεκινάμε από την σχέση

$$\frac{z'}{z} = \mathcal{H}(1 + 2\varepsilon_V - \eta_V),$$

έχουμε

$$\frac{d \ln z}{d\tau} = \mathcal{H}(1 + 2\varepsilon_V - \eta_V).$$

Γνωρίζουμε ότι $\ln z = -\ln \left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}} \right)$, άρα

$$\begin{aligned} d \ln \left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}} \right) &= -(1 + 2\varepsilon_V - \eta_V) d \ln \alpha \Rightarrow \\ \left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}} \right) &\propto \alpha^{-(1+2\varepsilon_V-\eta_V)}. \end{aligned}$$

Επομένως, γνωρίζοντας ότι $\alpha \propto (-\tau)^{-\frac{1}{1-\varepsilon_V}}$,

$$P_{\mathcal{R}} \propto \left(\frac{H}{\alpha\dot{\phi}}\right)^2 (-\tau)^{1-2\nu} \propto (-\tau)^{-1+2\nu} (-\tau)^{1-2\nu} = \text{const.} \quad (4.8.12)$$

Τελικά, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (4.8.10)

$$P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = 2^{2\nu-3} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}\right]^2 (1 - \varepsilon_V)^{2\nu-1} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \left(\frac{k}{\alpha H}\right)^{3-2\nu}, \quad (4.8.13)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση από το υπόβαθρο $-\alpha\tau = (1 - \varepsilon_V)^{-1}H^{-1}$. Την στιγμή που μια κλίμακα εξέρχεται του ορίζοντα, $k = \alpha H = \mathcal{H}$, παίρνουμε το αρχέγονο φάσμα ισχύος

$$P_{\mathcal{R}}(\tau, k) = \left[2^{2\nu-3} \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}\right]^2 (1 - \varepsilon_V)^{2\nu-1} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2\right]_{k=\alpha H}. \quad (4.8.14)$$

Αυτή η σχέση καθορίζει το πλάτος των διακυμάνσεων, μέσω της τιμής των H και $\dot{\phi}$.

Κεφάλαιο 5

Χαρακτηριστικά του Πληθωριστικού Δυναμικού

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως χαρακτηριστικά του πληθωριστικού δυναμικού σχετίζονται με μία ισχυρή ενίσχυση του φάσματος ισχύος των διαταραχών καμπυλότητας και επίσης θα παρέχουμε αριθμητικούς και αναλυτικούς υπολογισμούς για αυτό το φάσμα.

5.1 Βασικός Φορμαλισμός

Σε αυτή την ενότητα αναφέρουμε τον βασικό φορμαλισμό που σχετίζεται με την εξίσωση Mukhanov-Sasaki και βρίσκουμε τις εκφράσεις που περιγράφουν τις διαταραχές καμπυλότητας και το φάσμα τους.

Θεωρούμε την πιο γενική μετρική για βαθμωτές διαταραχές γύρω από ένα FLRW υπόβαθρο

$$ds^2 = \alpha^2(\tau) \left\{ -(1 + 2A)d\tau^2 + 2B_{,i}d\tau dx^i + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j \right\}, \quad (5.1.1)$$

όπου $B_{,i} = \partial_i B$ και $E_{,ij} = \partial_i \partial_j E$. Όπως είπαμε και πριν, μπορούμε να χωρίσουμε το πληθωριστικό πεδίο σε δύο μέρη, ένα υπόβαθρο και μία διαταραχή

$$\phi = \bar{\phi}(\tau) + \delta\phi(\tau, \vec{x}). \quad (5.1.2)$$

Επίσης, θυμόμαστε την αναλλοίωτη, κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, διαταραχή (4.7.5)

$$u = \alpha \left(\delta\phi + \frac{\phi'}{\mathcal{H}} \psi \right), \quad (5.1.3)$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Mukhanov-Sasaki

$$u'' - \nabla^2 u - \frac{z''}{z} u = 0, \quad (5.1.4)$$

ή σε χώρο Fourier

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0, \quad (5.1.5)$$

με $z = \frac{\alpha\phi'}{\mathcal{H}}$.

Πρέπει να προσδιορίσουμε τις αρχικές συνθήκες ώστε να λύσουμε την εξίσωση Mukhanov-Sasaki. Η γενική υπόθεση είναι ότι στις αρχικές χρονικές στιγμές το πεδίο βρίσκεται σε αργή εξέλιξη έτσι ώστε να ισχύει $z''/z = 2/\tau^2$. Οι κβαντικές του διακυμάνσεις βρίσκονται στο κενό Bunch-Davies. Αν κοιτάξουμε στο σχήμα (3.1), βλέπουμε ότι σε μεγάλους αρνητικούς σύμμορφους χρόνους τ , όλες οι κλίμακες κοσμολογικού ενδιαφέροντος ήταν μέσα στον ορίζοντα. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι παρατηρούμενες κλίμακες είχαν χρονοανεξάρτητες συχνότητες

$$\omega_k^2 = k^2 - \frac{\alpha''}{\alpha} \approx k^2 - \frac{z''}{z} \approx k^2 - \frac{2}{\tau^2} \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} k^2,$$

και οι δύο ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Mukhanov-Sasaki είναι οι $u_k \propto e^{\pm ik\tau}$. Η θετική συχνότητα $u_k \propto e^{-ik\tau}$ αντιστοιχεί στην ‘ελάχιστα διεγερμένη κατάσταση’ και συνεπώς καθορίζει την αρχική συνθήκη

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} u_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}, \quad (5.1.6)$$

η οποία ορίζει το κενό Bunch-Davies. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση Mukhanov-Sasaki παίρνει την μορφή

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) u_k = 0, \quad (5.1.7)$$

με ακριβή λύση

$$u_k(\tau) = c_1 \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) + c_2 \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{i}{k\tau}\right), \quad (5.1.8)$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Η αρχική συνθήκη (5.1.6) δίνει $c_1 = 1, c_2 = 0$ και συνεπώς έχουμε

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right). \quad (5.1.9)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό $u = -zR$ μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Mukhanov-Sasaki ως προς την διαταραχή της καμπυλότητας R

$$R_k'' + 2\frac{z'}{z}R_k' + k^2R_k = 0. \quad (5.1.10)$$

Εισάγουμε πολικές συντεταγμένες, $u_k(\tau) = \mathcal{V}_k(\tau)e^{-i\theta_k(\tau)}$ με \mathcal{V}_k και θ_k πραγματικά, έτσι ώστε να μελετήσουμε το πλάτος των μιγαδικών μεταβλητών u και R . Συνεπώς

$$u_k = \mathcal{V}_k e^{-i\theta_k} \Rightarrow u_k'' = \mathcal{V}_k'' e^{-i\theta_k} - 2i\theta_k' \mathcal{V}_k' e^{-i\theta_k} - i\theta_k'' \mathcal{V}_k e^{-i\theta_k} - \mathcal{V}_k (\theta_k')^2 e^{-i\theta_k},$$

και από την εξίσωση Mukhanov-Sasaki

$$\begin{aligned} u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) u_k = 0 &\Rightarrow \mathcal{V}_k'' - 2i\theta_k' \mathcal{V}_k' - i\theta_k'' \mathcal{V}_k - \mathcal{V}_k (\theta_k')^2 + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) \mathcal{V}_k = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}_k'' + \left[k^2 - \frac{z''}{z} - (\theta_k')^2\right] \mathcal{V}_k = 0 \\ 2\theta_k' \mathcal{V}_k' + \theta_k'' \mathcal{V}_k = 0 \Rightarrow \frac{\theta_k''}{\theta_k'} + 2\frac{\mathcal{V}_k'}{\mathcal{V}_k} = 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε την δεύτερη εξίσωση με λύση $\theta'_k \mathcal{V}_k^2 = \text{constant}$. Για το κενό Bunch-Davies παίρνουμε

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right) = \mathcal{V}_k(\tau) e^{-i\theta_k(\tau)}.$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{cases} \mathcal{V}_k = \sqrt{\frac{1}{2k} \left(1 + \frac{1}{(k\tau)^2} \right)} \\ \theta_k = k\tau + \arctan \left(\frac{1}{k\tau} \right) \end{cases}. \quad (5.1.12)$$

Αυτό θέτει την σταθερά της ολοκλήρωσης $\theta'_k \mathcal{V}_k^2 = \frac{1}{2}$, επομένως

$$\theta'_k = \frac{1}{2\mathcal{V}_k^2}. \quad (5.1.13)$$

Η εξίσωση (5.1.11.α) γράφεται ως

$$\mathcal{V}_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} - \frac{1}{4\mathcal{V}_k^4} \right) \mathcal{V}_k = 0, \quad (5.1.14)$$

η οποία μπορεί να λυθεί με αρχικές συνθήκες $\mathcal{V}_k \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2k}}$, $\mathcal{V}'_k \rightarrow 0$ για $\tau \rightarrow -\infty$. Με τον ίδιο τρόπο, η διαταραχή της καμπυλότητας μπορεί να γραφτεί ως $R_k(\tau) = -\mathcal{R}_k(\tau) e^{-i\theta_k(\tau)}$ με $\mathcal{R}_k = \mathcal{V}_k/z$. Επομένως το πλάτος της είναι

$$\mathcal{R}_k'' + 2\frac{z'}{z}\mathcal{R}_k' + \left(k^2 - \frac{1}{4z^4\mathcal{R}_k^4} \right) \mathcal{R}_k = 0. \quad (5.1.15)$$

Όπως αναφέραμε πριν, ο αριθμός των e -foldings N είναι

$$dN \equiv d \ln \alpha = H dt \Rightarrow \alpha = e^N,$$

και είναι πιο χρήσιμος σαν ανεξάρτητη μεταβλητή για την αριθμητική ανάλυση της εξέλιξης των διαταραχών. Για την παράμετρο Hubble παίρνουμε την σχέση

$$\mathcal{H} = \alpha H \Rightarrow H = e^{-N} \mathcal{H}, \quad (5.1.16)$$

και η πρώτη εξίσωση Friedmann γίνεται

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right] = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} H^2 \left(\frac{d\phi}{dN} \right)^2 + V \right] = \frac{V(\phi)}{3M_{pl}^2 - \frac{1}{2}\phi_{,N}^2}. \quad (5.1.17)$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε τις Hamilton-Jacobi παραμέτρους αργής εξέλιξης και την παραμέτρο z χρησιμοποιώντας τον αριθμό των e -foldings N

- Από την εξίσωση (3.3.1) έχουμε για την παράμετρο ε_H

$$\varepsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H^2} \Rightarrow \varepsilon_H = \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2}. \quad (5.1.18)$$

- Για την παράμετρο η_H παίρνουμε

$$\begin{aligned}\eta_H &= \varepsilon_H - \frac{1}{2} \frac{d \ln \varepsilon_H}{dN} = \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} - \frac{M_{pl}^2}{\phi_{,N}^2} \frac{2\phi_{,N}\phi_{,NN}}{2M_{pl}^2} \Rightarrow \\ \eta_H &= \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} - \frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}}.\end{aligned}\quad (5.1.19)$$

- Για την παράμετρο z

$$z = \frac{\alpha\phi'}{\mathcal{H}} = \frac{\alpha\dot{\phi}}{H} = \frac{H\alpha\phi_{,N}}{H} \Rightarrow z = e^N \phi_{,N}.\quad (5.1.20)$$

Για το πεδίο του υποβάθρου έχουμε από την εξίσωση Klein-Gordon (3.2.8)

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_{,NN} + \frac{\dot{H}}{H^2}\phi_{,N} + 3\phi_{,N} + \frac{V_{,\phi}}{H^2} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_{,NN} + 3\phi_{,N} - \frac{1}{2M_{pl}^2}\phi_{,N}^3 + \left(3M_{pl}^2 - \frac{1}{2}\phi_{,N}^2\right) \frac{V_{,\phi}}{V} &= 0,\end{aligned}\quad (5.1.21)$$

αφού $\dot{\phi} = H\phi_{,N}$ και $\ddot{\phi} = \dot{H}\phi_{,N} + H^2\phi_{,NN}$. Χρησιμοποιήσαμε επίσης τις εξισώσεις (3.3.8, 5.1.17). Τώρα, θέλουμε να βρούμε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τις διακυμάνσεις του πληθωριστικού πεδίου και του πλάτους του. Ξεκινάμε από την εξίσωση Mukhanov-Sasaki

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) u_k = 0.\quad (5.1.22)$$

Πρέπει να εκφράσουμε τα u_k'' και $\frac{z''}{z}$ ως παραγώγους ως προς τον αριθμό των e -foldings N

- Για το u_k'' έχουμε

$$u' = \frac{du}{d\tau} = \alpha\dot{u} = \alpha H u_{,N},$$

έτσι

$$\begin{aligned}u'' &= \alpha \frac{d}{dt} (\alpha H u_{,N}) = \alpha \dot{\alpha} H u_{,N} + \alpha^2 \dot{H} u_{,N} + \alpha^2 H^2 u_{,NN} = \\ &= \alpha^2 H^2 \left(u_{,N} + \frac{\dot{H}}{H^2} u_{,N} + u_{,NN} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow u'' &= \alpha^2 H^2 [u_{,NN} + (1 - \varepsilon_H) u_{,N}].\end{aligned}\quad (5.1.23)$$

- Για το $\frac{z''}{z}$ παίρνουμε

$$z' = \alpha z \Rightarrow z'' = \alpha \dot{\alpha} z + \alpha^2 \ddot{z}$$

Γνωρίζουμε ότι $z = e^N \phi_{,N}$, έτσι

$$\dot{z} = \frac{d}{dt} (e^N \phi_{,N}) = H e^N \phi_{,N} + H e^N \phi_{,NN},$$

και

$$\ddot{z} = \frac{d}{dt} (H e^N \phi_{,N} + H e^N \phi_{,NN}) \Rightarrow$$

$$\ddot{z} = \dot{H} e^N \phi_{,N} + H^2 e^N \phi_{,N} + H^2 e^N \phi_{,NN} + \dot{H} e^N \phi_{,NN} + H^2 e^N \phi_{,NN} + H^2 e^N \phi_{,NNN}.$$

Επομένως, παίρνουμε

$$z'' = \alpha \dot{\alpha} z + \alpha^2 \ddot{z} \Rightarrow$$

$$\frac{z''}{z} = \alpha^2 H^2 \left(2 + 3 \frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} + \frac{\phi_{,NNN}}{\phi_{,N}} - \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} - \frac{\phi_{,N}\phi_{,NN}}{2M_{pl}^2} \right). \quad (5.1.24)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.1.23, 5.1.24) στην εξίσωση Mukhanov-Sasaki έχουμε

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 H^2 [u_{,NN} + (1 - \varepsilon_H) u_{,N}] + \alpha^2 H^2 \left(\frac{k^2}{\alpha^2 H^2} - 2 - 3 \frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} - \frac{\phi_{,NNN}}{\phi_{,N}} + \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} + \frac{\phi_{,N}\phi_{,NN}}{2M_{pl}^2} \right) u = 0 \Rightarrow$$

$$u_{k,NN} + \left(1 - \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} \right) u_{k,N} + \left(\frac{k^2}{e^{2N} H^2} - 2 - 3 \frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} - \frac{\phi_{,NNN}}{\phi_{,N}} + \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} + \frac{\phi_{,N}\phi_{,NN}}{2M_{pl}^2} \right) u_k = 0. \quad (5.1.25)$$

Για το πλάτος των διακυμάνσεων του πληθωριστικού πεδίου χρησιμοποιούμε την εξίσωση (5.1.14) και παίρνουμε

$$\mathcal{V}_{k,NN} + \left(1 - \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} \right) \mathcal{V}_{k,N} + \left[\frac{k^2}{e^{2N} H^2} \left(1 - \frac{1}{4k^2 \mathcal{V}^4} \right) - 2 - 3 \frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} - \frac{\phi_{,NNN}}{\phi_{,N}} + \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} + \frac{\phi_{,N}\phi_{,NN}}{2M_{pl}^2} \right] \mathcal{V}_k = 0. \quad (5.1.26)$$

Οι συντελεστές των παραπάνω εξισώσεων μπορούν να γραφτούν σε όρους των παραμέτρων αργής εξέλιξης

$$1 - \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} = 1 - \varepsilon_H, \quad (5.1.27)$$

$$-2 - 3\frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} - \frac{\phi_{,NNN}}{\phi_{,N}} + \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} + \frac{\phi_{,N}\phi_{,NN}}{2M_{pl}^2} = (1 + \varepsilon_H - \eta_H)(\eta_H - 2) - (\varepsilon_H - \eta_H)_{,N}. \quad (5.1.28)$$

Μπορούμε να ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα όπως πριν και να βρούμε αντίστοιχες εξισώσεις για την διαταραχή καμπυλότητας και το πλάτος της. Αυτή την φορά ξεκινάμε από την εξίσωση (5.1.10). Έχουμε

$$R_k'' = \alpha^2 H^2 [R_{k,NN} + (1 - \varepsilon_H)R_{k,N}], \quad (5.1.29)$$

ενώ

$$R_k' = \alpha \dot{R} = \alpha H R_{k,N}. \quad (5.1.30)$$

Επίσης, βρίσκουμε ότι

$$\frac{z'}{z} = \alpha H + \alpha H \frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}}. \quad (5.1.31)$$

Επομένως η εξίσωση (5.1.10) παίρνει την μορφή

$$\alpha^2 H^2 [R_{k,NN} + (1 - \varepsilon_H)R_{k,N}] + 2\alpha^2 H^2 \left[1 + \frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} \right] R_{k,N} + k^2 R_k = 0 \Rightarrow$$

$$R_{k,NN} + \left(3 + 2\frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} - \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} \right) R_{k,N} + \frac{k^2}{e^{2N} H^2} R_k = 0, \quad (5.1.32)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.1.15) παίρνουμε την εξίσωση για το πλάτος

$$\mathcal{R}_{k,NN} + \left(3 + 2\frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} - \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} \right) \mathcal{R}_{k,N} + \frac{k^2}{e^{2N} H^2} \left(1 - \frac{1}{4k^2 e^{4N} \phi_{,N}^4 \mathcal{R}_k^4} \right) \mathcal{R}_k = 0. \quad (5.1.33)$$

Μια ενδιαφέρουσα ποσότητα είναι αυτή στην πρώτη παρένθεση των τελευταίων δύο εξισώσεων, που συμβολίζουμε με

$$f(N) = 3 + 2\frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} - \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2}, \quad (5.1.34)$$

και είναι συνάρτηση του N . Αυτή η ποσότητα δρα σαν ένας γενικευμένος όρος τριβής στο κενό Bunch-Davies, ενώ σε μία πιο γενική εξέλιξη μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και να οδηγήσει σε ισχυρή ενίσχυση των διαταραχών. Μία ακόμα σημαντική ποσότητα είναι αυτή στον τελευταίο όρο της εξίσωσης (5.1.33)

$$g(N) = 1 - \frac{1}{4k^2 e^{4N} \phi_{,N}^4 \mathcal{R}_k^4}. \quad (5.1.35)$$

Αυτή η συνάρτηση αποκλίνει κάθε φορά που το πλάτος \mathcal{R}_k προσεγγίζει το μηδέν και συνεπώς το αποτρέπει από το να λάβει αρνητικές τιμές.

Το φάσμα των διαταραχών καμπυλότητας είναι

$$P_R = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{\mathcal{V}_k^2}{e^{2N} \phi_{,N}^2} = \frac{k^3}{2\pi^2} \mathcal{R}_k^2. \quad (5.1.36)$$

5.2 Αριθμητικός Υπολογισμός του Φάσματος των Διακυμάνσεων Καμπυλότητας

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε έναν αριθμητικό υπολογισμό του φάσματος ισχύος, ακολουθώντας την δημοσίευση [6]. Για να το κάνουμε αυτό, ολοκληρώνουμε αριθμητικά την εξίσωση (5.1.21), για ένα συγκεκριμένο πληθωριστικό δυναμικό, έτσι ώστε να εξάγουμε το υποβάθρο και ύστερα ολοκληρώνουμε μία εκ των εξισώσεων (5.1.25), (5.1.26), (5.1.32), (5.1.33).

Προσεγγίζουμε το πληθωριστικό δυναμικό από το ακόλουθο παραμετροποιημένο δυναμικό

$$V(\phi) = V_0 \left(1 + \frac{1}{2} \sum_i A_i [1 + \tanh(c_i(\phi - \phi_i))] + B\phi \right), \quad (5.2.1)$$

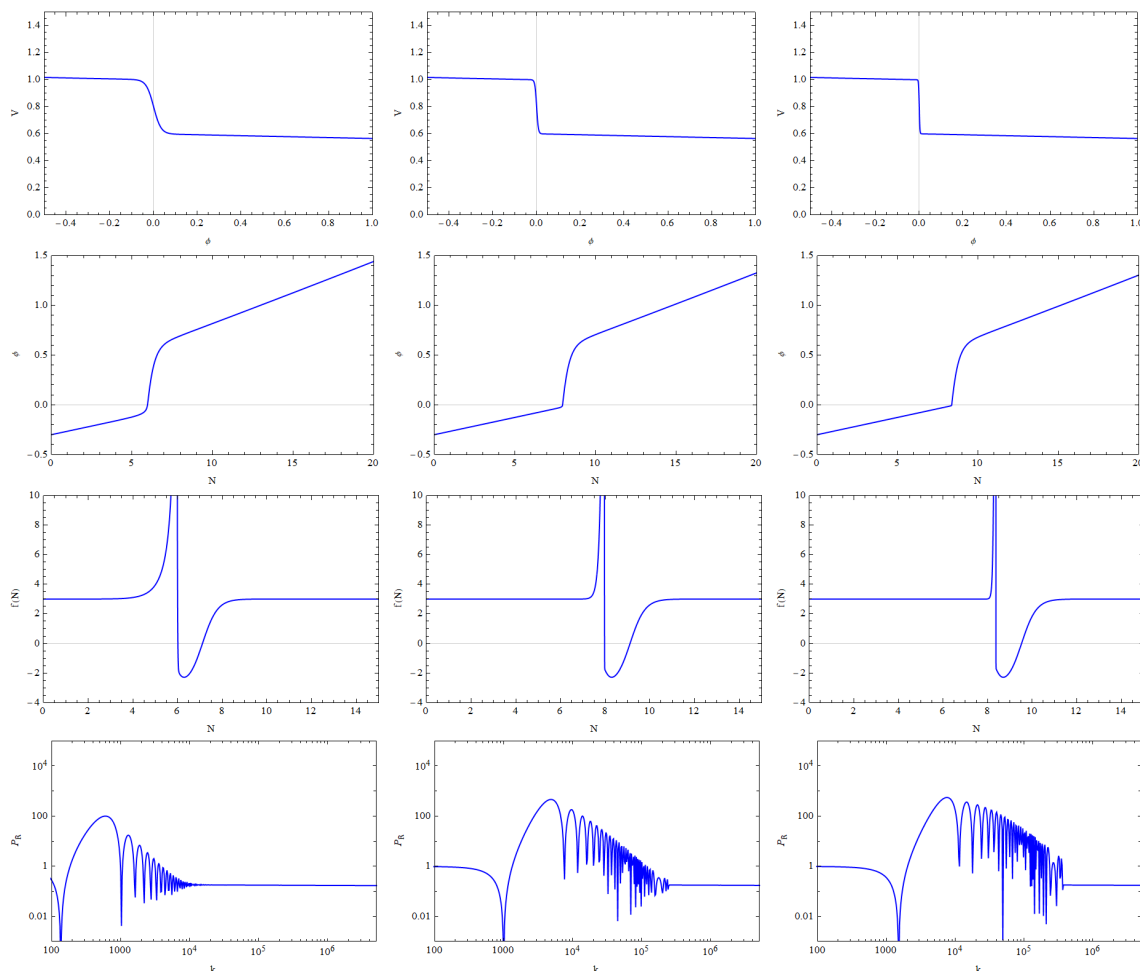
όπου i είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός που αντιστοιχεί σε ειδικές τιμές του πεδίου. Ο πρώτος όρος της παρένθεσης μπορεί να αναγνωριστεί σαν την ενέργεια κενού λόγω της οποίας πραγματοποιείται ο πληθωρισμός και έχει ένα ή περισσότερα σημεία μετάβασης, ενώ ο γραμμικός όρος σχετίζεται με την κλίση του δυναμικού. Επιπλέον, θέτουμε $V_0 = 1$ για την αριθμητική ανάλυση, αφού δεν επηρεάζει την λύση υποβάθρου της εξίσωσης (5.1.21).

Λόγω του δυναμικού (5.2.1), χαρακτηριστικά όπως

- ένα σημείο καμπής, στο οποίο η πρώτη και η δεύτερη παράγωγοι μηδενίζονται,
- ένα ή περισσότερα απότομα σκαλοπάτια στο δυναμικό

μπορούν να εμφανιστούν. Εδώ, μόνο η δεύτερη περίπτωση θα μας απασχολήσει. Ένα τελικό σημείο που πρέπει να αναφέρουμε, πριν υπολογίσουμε το φάσμα, είναι ότι το πρόσημο της συνάρτησης $f(N)$ παίζει σημαντικό ρόλο. Όπως μπορούμε να δούμε από την εξίσωση (5.1.33), για $f(N) > 0$ ο δεύτερος όρος δρα σαν όρος τριβής, καταστέλλοντας την ενίσχυση των διαταραχών της καμπυλότητας, ενώ για $f(N) < 0$ οδηγεί σε ενίσχυση. Στα επόμενα, μελετάμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις από χαρακτηριστικά σαν σκαλοπάτια στο δυναμικό και τις επιπτώσεις τους στο παραγόμενο φάσμα.

Πρώτα, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το πληθωριστικό δυναμικό έχει ένα σκαλοπάτι και εμείς αυξάνουμε την κλίση του. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί, τροποποιώντας την τιμή της παραμέτρου c_1 , όπως απεικονίζεται και στην πρώτη γραμμή του διαγράμματος (5.1). Κάθε στήλη του διαγράμματος (5.1) περιέχει το παραγόμενο φάσμα, καθώς επίσης και το δυναμικό, την εξέλιξη του πληθωριστικού πεδίου και τον όρο τριβής $f(N)$ για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου c_1 . Στην δεύτερη σειρά, βλέπουμε την εξέλιξη του πληθωριστικού πεδίου και παρατηρούμε ότι αυτό εξελίσσεται πολύ γρήγορα, μέσα σε 2-3 e -foldings, από το ένα πλάτος του δυναμικού στο άλλο. Ο όρος τριβής, στην τρίτη γραμμή, παίρνει μεγάλες θετικές τιμές πριν γίνει αρνητικός.

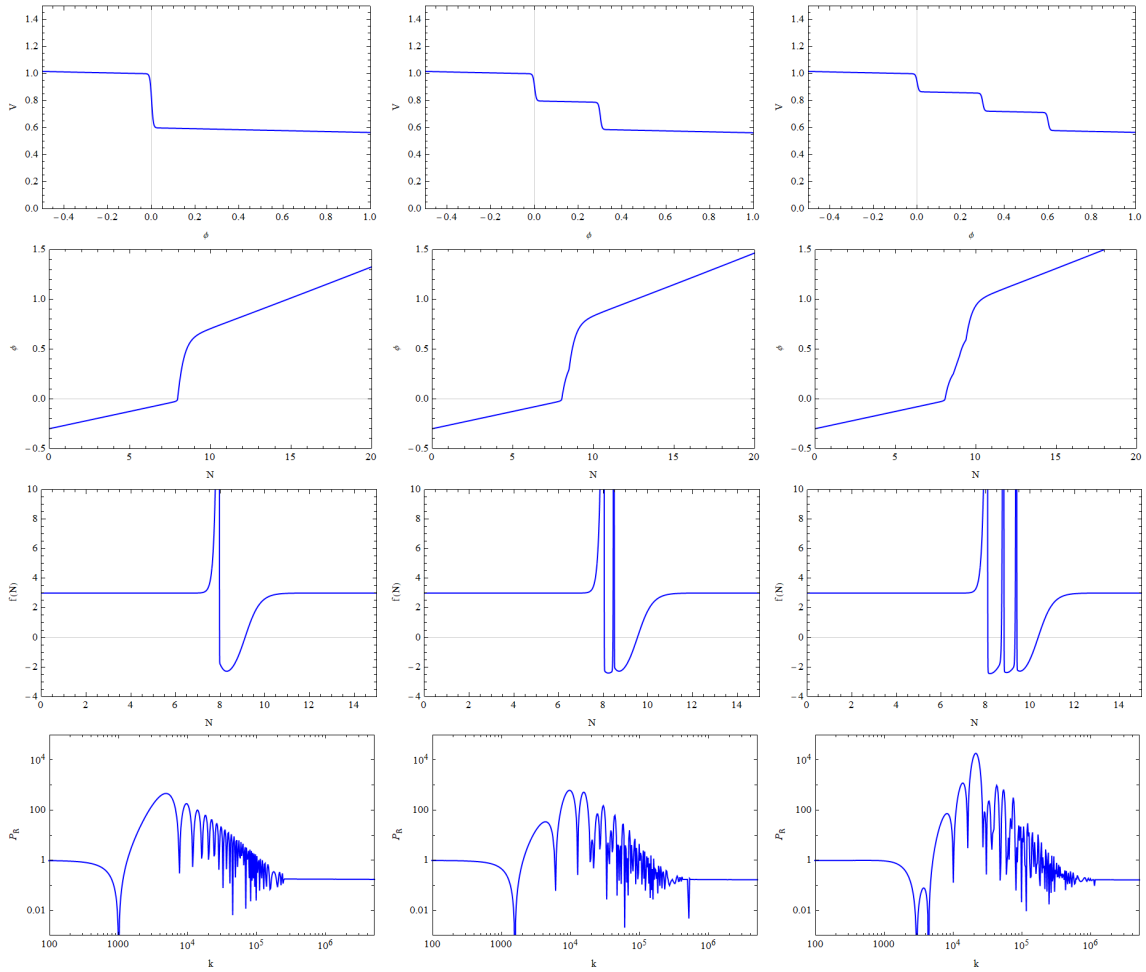


Σχήμα 5.1: Το πληθωριστικό δυναμικό $V(\phi)$, η εξέλιξη του πεδίου, ο όρος τριβής $f(N)$ και το φάσμα ισχύος των διαταραχών καμπυλότητας για τρεις επιλογές των παραμέτρων του δυναμικού. Πρώτη στήλη: $A_1 = -0.4$, $B = -0.035$, $c_1 = 30$. Δεύτερη στήλη: $A_1 = -0.4$, $B = -0.035$, $c_1 = 130$. Τρίτη στήλη: $A_1 = -0.4$, $B = -0.035$, $c_1 = 350$. Οι κλίμακες των k και V είναι αυθαίρετες.

Αυτή είναι μια τυπική μορφή της $f(N)$ για ένα χαρακτηριστικό σαν σκαλοπάτι στο δυναμικό. Η περιοχή στην οποία $f(N) > 3$ συρρικνώνεται όσο η παράμετρος c_1 αυξάνεται, ενώ η περιοχή αρνητικής $f(N)$ είναι ανεξάρτητη αυτής της αλλαγής. Τελικά, το φάσμα παρουσιάζει μεγαλύτερη ενίσχυση για μεγαλύτερες τιμές της c_1 και επίσης εμφανίζεται ισχυρή ταλαντωτική συμπεριφορά.

Ωστόσο, αυτή η ενίσχυση είναι περιορισμένη για ένα σκαλοπάτι στο δυναμικό. Για μεγαλύτερη ενίσχυση, περισσότερα σκαλοπάτια στο δυναμικό απαιτώνται. Αυτή η περίπτωση αποτυπώνεται στο διάγραμμα (5.2), όπου το φάσμα παράγεται από ένα, δύο και τρία σκαλοπάτια. Η συνολική μείωση στο δυναμικό είναι ίδια και στις τρεις περιπτώσεις. Περισσότερα σκαλοπάτια οδηγούν σε μεγαλύτερη ενίσχυση του φάσματος, εξαιτίας της συμπεριφοράς της συνάρτησης $f(N)$. Η παρουσία περισσότερων σκαλοπατιών αυξάνει τον συνολικό αριθμό των e -foldings στα οποία αυτή η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές και όπως αναφέραμε και πριν, η συνθήκη $f(N) < 0$ μεταφράζεται σε ενίσχυση του φάσματος.

Η τελευταία περίπτωση που μελετάμε είναι αυτή με τρία σκαλοπάτια στο δυναμικό, αλλά με διαφορετική απόσταση μεταξύ τους. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα (5.3), η αύξηση της απόστασης οδηγεί σε ενίσχυση του φάσματος, αφού η συνάρτηση $f(N)$



Σχήμα 5.2: Το πληθωριστικό δυναμικό $V(\phi)$, η εξέλιξη του πεδίου, ο όρος τριβής $f(N)$ και το φάσμα ισχύος των διαταραχών καμπυλότητας για τρεις επιλογές των παραμέτρων του δυναμικού. Πρώτη στήλη: $A_1 = -0.4$, $B = -0.035$, $c_1 = 130$. Δεύτερη στήλη: $A_1 = -0.2$, $A_2 = -0.2$, $B = -0.035$, $c = 130$, $\phi_2 = 0.3$. Τρίτη στήλη: $A_1 = -0.133$, $A_2 = -0.133$, $A_3 = -0.133$, $B = -0.035$, $c = 130$, $\phi_2 = 0.3$, $\phi_3 = 0.6$. Οι κλίμακες των k και V είναι αυθαίρετες.

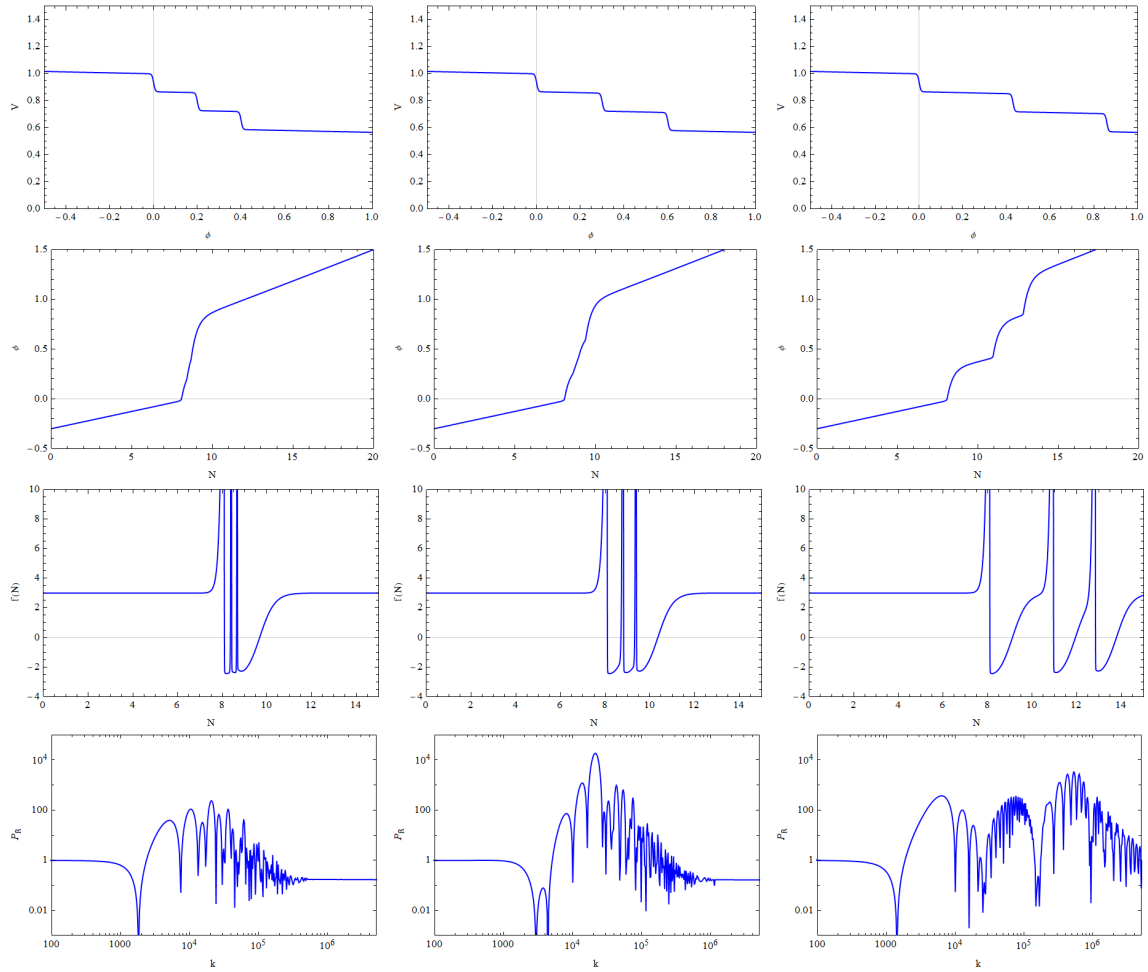
παραμένει αρνητική για περισσότερα e -foldings. Παρόλα αυτά, η απόσταση αυτή έχει ένα όριο, καθώς από μία απόσταση και μετά κάθε σκαλοπάτι δρα ανεξάρτητα στο φάσμα. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται στην τρίτη στήλη, όπου κάθε σκαλοπάτι παράγει ένα διαφορετικό φάσμα.

5.3 Αναλυτικός Υπολογισμός του Φάσματος των Διακυμάνσεων Καμπυλότητας

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε μια αναλυτική προσέγγιση στο φάσμα των διαταραχών σε περιπτώσεις που η προσέγγιση αργής εξέλιξης παραβιάζεται ισχυρά, ακολουθώντας την δημοσίευση [7].

Ξεκινάμε από την εξίσωση για τις διαταραχές της καμπυλότητας (5.1.32)

$$\mathcal{R}_{k,NN} + \left(3 + 2 \frac{\phi_{,NN}}{\phi_{,N}} - \frac{\phi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} \right) \mathcal{R}_{k,N} + \frac{k^2}{e^{2N} H^2} \mathcal{R}_k = 0.$$



Σχήμα 5.3: Το πληθωριστικό δυναμικό $V(\phi)$, η εξέλιξη του πεδίου, ο όρος τριβής $f(N)$ και το φάσμα ισχύος των διαταραχών καμπυλότητας για τρεις επιλογές των παραμέτρων του δυναμικού. Πρώτη στήλη: $A_1 = -0.133$, $A_2 = -0.133$, $A_3 = -0.133$, $B = -0.035$, $c = 130$, $\phi_2 = 0.2$, $\phi_3 = 0.4$. Δεύτερη στήλη: $A_1 = -0.133$, $A_2 = -0.133$, $A_3 = -0.133$, $B = -0.035$, $c = 130$, $\phi_2 = 0.3$, $\phi_3 = 0.6$. Τρίτη στήλη: $A_1 = -0.133$, $A_2 = -0.133$, $A_3 = -0.133$, $B = -0.035$, $c = 130$, $\phi_2 = 0.43$, $\phi_3 = 0.86$. Οι κλίμακες των k και V είναι αυθαίρετες.

Όπως αναφέραμε πριν, ο όρος τριβής

$$f(N) = 3 + \frac{2\varphi_{,NN}}{\varphi_{,N}} - \frac{\varphi_{,N}^2}{2M_{pl}^2} = 3 + \varepsilon_H - 2\eta_H, \quad (5.3.1)$$

είναι πολύ σημαντικός ώστε να προσδιοριστεί η ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων. Θέτοντας $f(N) = \kappa = \text{const.}$, η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων Bessel $J_{\pm\kappa/2}$ και έχει την μορφή

$$R_k(N; C_p, C_m, \kappa) = e^{-\frac{1}{2}\kappa N} \left(C_p J_{\kappa/2} \left(e^{-N} \frac{k}{H} \right) + C_m J_{-\kappa/2} \left(e^{-N} \frac{k}{H} \right) \right). \quad (5.3.2)$$

Η προσέγγιση αργής εξέλιξης αντιστοιχεί στην λύση με $\kappa = 3$ και $C_m/C_p = i$. Για μεγάλα N η ομοκινούμενη διαταραχή της καμπυλότητας δίνεται από

$$R_k(N) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{k}{H}\right)^{-3/2} e^{-N} \left[- \left(C_m e^N + C_p \frac{k}{H} \right) \cos \left(e^{-N} \frac{k}{H} \right) + \left(C_p e^N - C_m \frac{k}{H} \right) \sin \left(e^{-N} \frac{k}{H} \right) \right], \quad (5.3.3)$$

από όπου μπορούμε να δούμε ότι ο συντελεστής C_p δεν συνεισφέρει στο φάσμα. Συνεπώς το φάσμα ισχύος ουσιαστικά δίνεται από τον C_m .

Υποθέτοντας ότι γνωρίζουμε τους συντελεστές της λύσης C_{p_i}, C_{m_i} , σε μια περιοχή των N που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή του $\kappa = \kappa_i$, θέλουμε να βρούμε τους συντελεστές της λύσης σε μία γειτονική περιοχή των N , η οποία αντιστοιχεί σε διαφορετική τιμή του $\kappa = \kappa_f$. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε την εξίσωση συνέχειας της λύσης (5.3.2) και της πρώτης παραγώγου της ως προς N , σε ένα σημείο N_{fi} που συνδέει τις δύο αυτές περιοχές. Οι νέοι συντελεστές C_{p_f}, C_{m_f} δίνονται μέσω της σχέσης

$$\begin{pmatrix} C_{p_f} \\ C_{m_f} \end{pmatrix} = M(N_{fi}, \kappa_i, \kappa_f) \begin{pmatrix} C_{p_i} \\ C_{m_i} \end{pmatrix}, \quad (5.3.4)$$

όπου

$$M_{11}(N_{fi}, \kappa_i, \kappa_f) = C \left(J_{-\frac{\kappa_f}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) J_{\frac{1}{2}(-2+\kappa_i)} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) + J_{1-\frac{\kappa_f}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) J_{\frac{\kappa_i}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) \right),$$

$$M_{12}(N_{fi}, \kappa_i, \kappa_f) = C \left(-J_{-\frac{\kappa_f}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) J_{1-\frac{\kappa_i}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) + J_{1-\frac{\kappa_f}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) J_{-\frac{\kappa_i}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) \right),$$

$$M_{21}(N_{fi}, \kappa_i, \kappa_f) = C \left(-J_{\frac{\kappa_f}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) J_{\frac{1}{2}(-2+\kappa_i)} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) + J_{\frac{1}{2}(-2+\kappa_f)} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) J_{\frac{\kappa_i}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) \right),$$

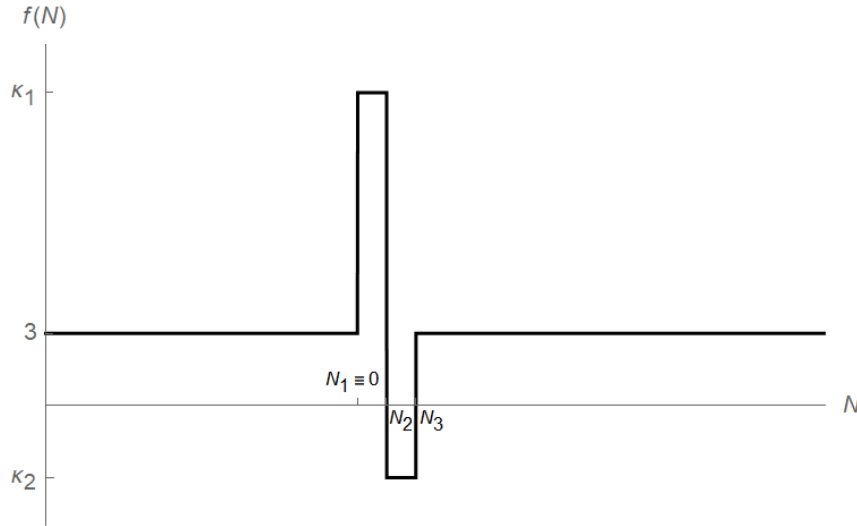
$$M_{22}(N_{fi}, \kappa_i, \kappa_f) = C \left(J_{\frac{\kappa_f}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) J_{1-\frac{\kappa_i}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) + J_{\frac{1}{2}(-2+\kappa_f)} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) J_{-\frac{\kappa_i}{2}} \left(e^{-N_{fi}} \frac{k}{H} \right) \right),$$

με

$$C = \frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{2}N_{fi}(-2+\kappa_f-\kappa_i)} \frac{k}{H} \csc\left(\frac{\pi\kappa_f}{2}\right). \quad (5.3.5)$$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, για μία δομή σαν σκαλοπάτι στο πληθωριστικό δυναμικό, περιμένουμε έναν όρο τριβής όπως αυτός απεικονίζεται στο διάγραμμα (5.1). Τώρα, για να προσεγγίσουμε την λύση της (5.1.32) αναλυτικά, θεωρούμε ότι ξεκινάμε από μία περιοχή με $\kappa = 3$, που αντιστοιχεί στο καθεστώς αργής εξέλιξης με αμελητέες παραμέτρους αργής εξέλιξης. Έπειτα, έχουμε μία μικρή περιοχή (N_1, N_2) με μεγάλη θετική τιμή του κ ($\kappa = \kappa_1$), μετά μια περιοχή (N_2, N_3) με αρνητική τιμή κ_2 και τελικά επιστρέφουμε στο καθεστώς αργής εξέλιξης με $\kappa = 3$. Αυτή η κατάσταση απεικονίζεται στο σχήμα (5.4). Επίσης, εξασφαλίζουμε ότι

$$(\kappa_1 - 3)(N_2 - N_1) - (\kappa_2 - 3)(N_3 - N_2) = 0, \quad (5.3.6)$$



Σχήμα 5.4: Μια απεικόνιση του μοντέλου τετραγωνικών παλμών με το οποίο γίνεται η προσέγγιση ενός όρου τριβής που αντιστοιχεί σε μια δομή σαν σκαλοπάτι στο πληθωριστικό δυναμικό.

έτσι ώστε το φάσμα ισχύος να καταλήγει ασυμπτωτικά στην ίδια τιμή από την οποία ξεκίνησε.

Επομένως, οι συντελεστές C_p , C_m για την περιοχή $N > N_3$ δίνονται από την ακόλουθη σχέση

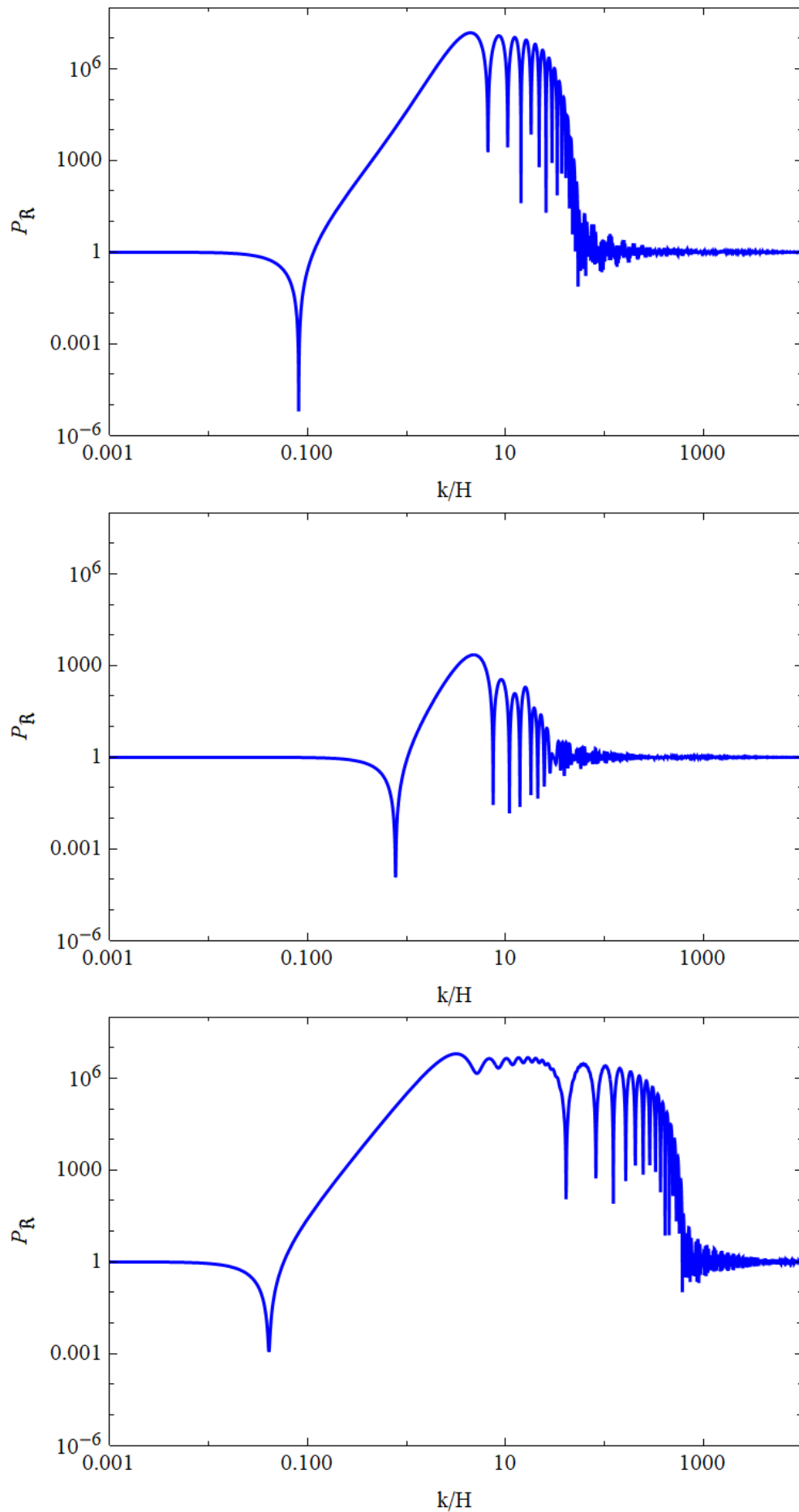
$$\begin{pmatrix} C_p \\ C_m \end{pmatrix} = M(N_3, \kappa_2, 3)M(N_2, \kappa_1, \kappa_2)M(N_1, 3, \kappa_1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (5.3.7)$$

Παρουσιάζουμε τρία φάσματα, που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες τιμές των N_1 , N_2 , N_3 , κ_1 , κ_2 , στο διάγραμμα (5.5).

Στην πρώτη περίπτωση βλέπουμε ότι το φάσμα παρουσιάζει όχι μόνο μια δυνατή ενίσχυση λόγω του χαρακτηριστικού στο υπόβαθρο, αλλά επίσης και μοτίβα ισχυρών ταλαντώσεων. Η ισχυρή ενίσχυση του φάσματος προέρχεται από την επίδραση της περιοχής με την αρνητική τιμή του κ . Ένας πρόχειρος υπολογισμός για την αναμενόμενη ενίσχυση είναι $\exp((N_3 - N_2)(3 - \kappa_2)) = \mathcal{O}(10^6)$.

Στην συνέχεια, μειώνουμε την τιμή της σταθεράς κ_1 , με αποτέλεσμα να μειώνεται και το διάστημα που ο παλμός παραμένει αρνητικός, όπως φαίνεται από την σχέση (5.3.6). Ως εκ τούτου, παρά το γεγονός ότι η τιμή της σταθεράς κ_2 παραμένει ίδια, παρατηρούμε ότι η ενίσχυση του φάσματος είναι αρκετά μικρότερη από την αντίστοιχη της προηγούμενης περίπτωσης.

Στην τελευταία περίπτωση, παρατηρούμε το φάσμα που παράγεται από έναν διαφορετικό όρο τριβής $f(N)$. Οι παλμοί αυτή την φορά έχουν τοποθετηθεί αντίστροφα, δηλαδή πρώτα ο αρνητικός παλμός και έπειτα ο παλμός με μεγάλη θετική τιμή του κ . Αυτό είναι πιθανό αν το πληθωριστικό πεδίο συναντήσει μια περιοχή με σχεδόν μηδενική κλίση. Σε αυτή την περίπτωση η “ταχύτητα” του πεδίου μειώνεται οδηγώντας σε θετικές τιμές της παραμέτρου η_H και αυτή με την σειρά της σε αρνητικές τιμές της συνάρτησης $f(N)$ όπως φαίνεται από την σχέση (5.3.1). Στην συνέχεια η “ταχύτητα” του πεδίου αυξάνεται ξανά, με αποτέλεσμα η παράμετρος η_H να παίρνει αρνητικές τιμές και η $f(N)$ θετικές. Παρατηρούμε ότι η ενίσχυση του φάσματος είναι ίδια με την πρώτη περίπτωση, αφού ο αρνητικός παλμός διαρκεί για το ίδιο διάστημα ΔN , αλλά οι ισχυρές ταλαντώσεις του φάσματος βρίσκονται σε μεγαλύτερα k , ενώ στην πρώτη



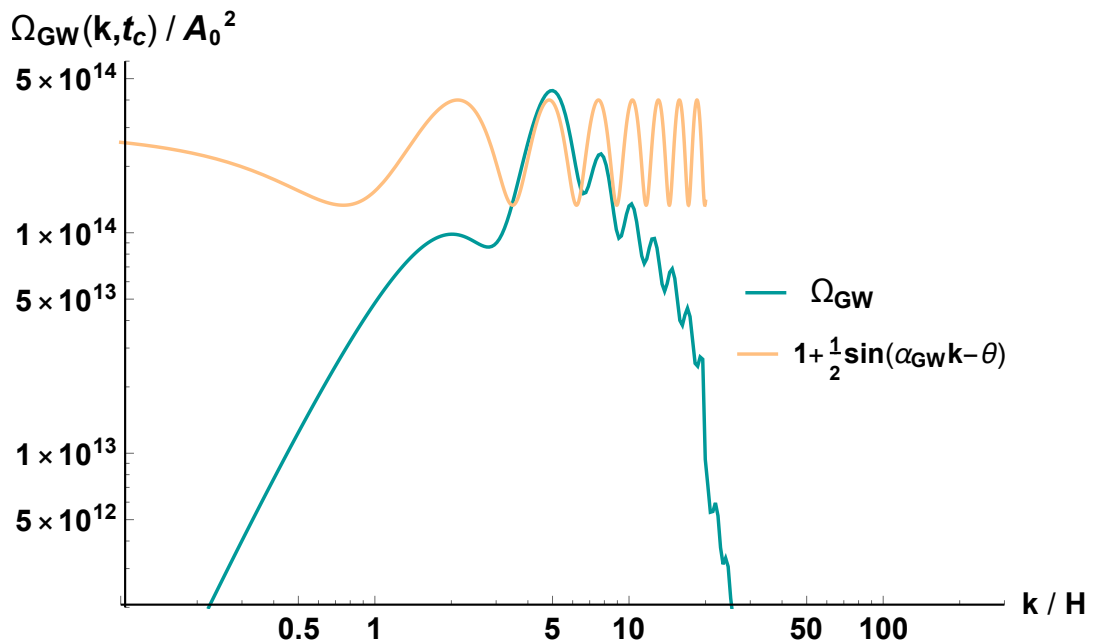
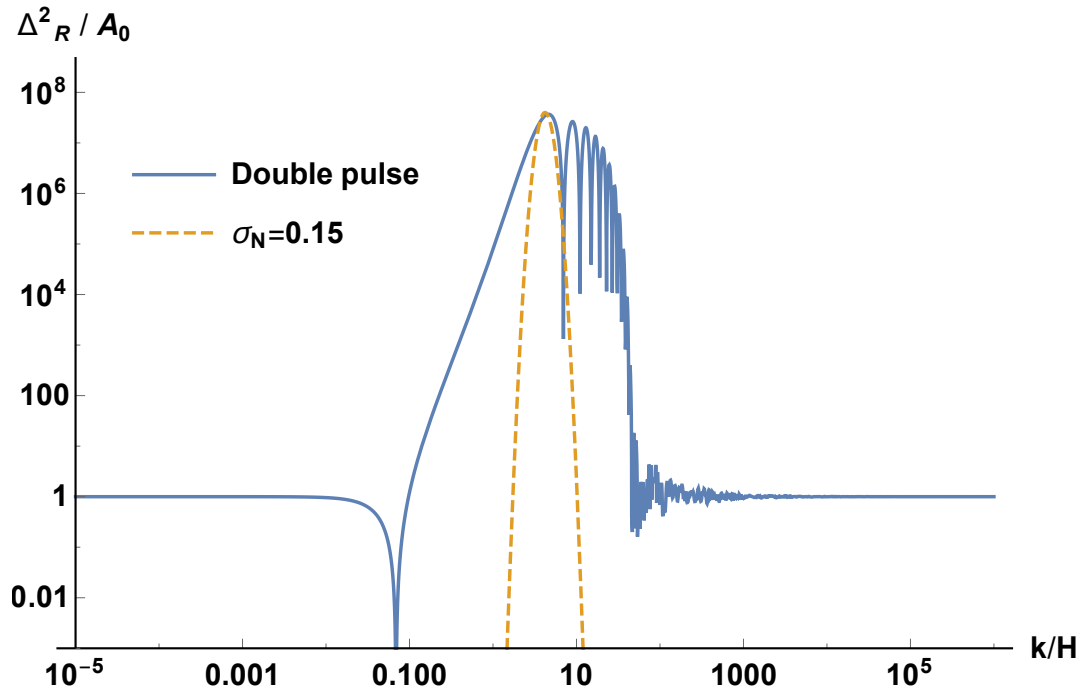
Σχήμα 5.5: Το φάσμα ισχύος των διαταραχών καμπυλότητας ως συνάρτηση του k/H , για τρεις επιλογές παραμέτρων. Πρώτη: $N_1 = 0$, $N_2 = 0.15$, $N_3 = 2.5771$, $\kappa_1 = 100.1$, $\kappa_2 = -3.001$. Δεύτερη: $N_1 = 0$, $N_2 = 0.15$, $N_3 = 1.0774$, $\kappa_1 = 40.1$, $\kappa_2 = -3.001$. Τρίτη: $N_1 = 0$, $N_2 = 2.43$, $N_3 = 2.5802$, $\kappa_1 = -3.001$, $\kappa_2 = 100.1$.

κορυφή οι ταλαντώσεις είναι αρκετά πιο αδύναμες.

Αυτή η ενίσχυση στο φάσμα των διαταραχών καμπυλότητας κατά αρκετές τάξεις μεγέθους παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, αφού μπορεί να υποδηλώσει την παρουσία ισχυρών διακυμάνσεων της πυκνότητας στο πρώιμο Σύμπαν. Αυτές με την σειρά τους, μπορούν να οδηγήσουν στην παραγωγή αρχέγονων μελανών οπών, μέσω βαρυτικής κατάρρευσης, καθώς επίσης και σε στοχαστικά βαρυτικά κύματα μέσω της σύζευξης των διαταραχών αυτών σε δεύτερης τάξης θεωρίας διαταραχών. Η παραγωγή των βαρυτικών κυμάτων δεύτερης τάξης πραγματοποιείται κυρίως την στιγμή που οι διαταραχές εισέρχονται ξανά στον ορίζοντα Hubble και αν αυτό συμβεί την εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας, το φάσμα τους μπορεί να υπολογιστεί ακολουθώντας την κοσμολογική θεωρία διαταραχών.

Το φάσμα αυτών των βαρυτικών κυμάτων προέρχεται και διαμορφώνεται από τις διακυμάνσεις της καμπυλότητας. Όπως είδαμε προηγουμένως, μοτίβα ισχυρών ταλαντώσεων εμφανίζονται στο φάσμα των διακυμάνσεων καμπυλότητας, λόγω των χαρακτηριστικών στο πληθωριστικό δυναμικό. Συνεπώς, αναμένουμε το φάσμα των βαρυτικών κυμάτων να κληρονομεί αυτά τα μοτίβα ταλαντώσεων και επομένως να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μια πύλη στην δυναμική του πληθωρισμού.

Στο διάγραμμα (5.6) παρουσιάζουμε ένα φάσμα των διαταραχών καμπυλότητας, για συγκεκριμένες τιμές των N_1 , N_2 , N_3 , κ_1 , κ_2 , μαζί με το παραγόμενο φάσμα βαρυτικών κυμάτων, όπου είναι εμφανείς οι ταλαντώσεις. Στο φάσμα των διαταραχών καμπυλότητας έχει προστεθεί μία λογαριθμική κανονική κατανομή με συγκεκριμένο εύρος $\sigma_N < 1$, για να διευκρινίσει την αναμενόμενη δομή διπλής κορυφής στο φάσμα των βαρυτικών κυμάτων που εμφανίζεται όταν η κύρια κορυφή στο φάσμα των διαταραχών καμπυλότητας είναι αρκετά στενή. Από την άλλη στο φάσμα των βαρυτικών κυμάτων έχει σχεδιαστεί και μία αρμονική συνάρτηση, η οποία επισημαίνει την περιοδική αλλαγή στο πλάτος των βαρυτικών κυμάτων γύρω από την κορυφή.



Σχήμα 5.6: Πάνω: Το φάσμα των διαταραχών καμπυλότητας ως συνάρτηση του k/H , για την παρακάτω επιλογή παραμέτρων $N_1 = 0$, $N_2 = 0.2$, $N_3 = 2.77$, $\kappa_1 = 80$, $\kappa_2 = -3$, κανονικοποιημένο στο μετρημένο πλάτος του CMB. Η διακεκομμένη γραμμή είναι μια λογαριθμική κανονική κατανομή με εύρος σ_N . Κάτω: Το φάσμα των βαρυτικών κυμάτων, μαζί με μία αρμονική συνάρτηση.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία, μελετήσαμε πώς χαρακτηριστικά του πληθωριστικού δυναμικού με μορφή σκαλοπατιού προκαλούν την ενίσχυση του φάσματος των διαταραχών καμπυλότητας σε πληθωρισμό με ένα πεδίο. Επίσης παρουσιάσαμε αριθμητικούς και αναλυτικούς υπολογισμούς αυτού του φάσματος.

Αρχικά, κάναμε μια γρήγορη επισκόπηση της καθιερωμένης κοσμολογίας της Μεγάλης Έκρηξης και των προβλημάτων της. Ο πληθωρισμός παρέχει τις λύσεις για αυτά τα προβλήματα και επομένως μια εισαγωγή στον γενικό φορμαλισμό του ήταν απαραίτητη. Εστιάσαμε σε ένα μοντέλο με ένα πληθωριστικό πεδίο και μελετήσαμε την εξέλιξη των διαταραχών του μέσω της εξίσωσης Mukhanov-Sasaki στο πλαίσιο της κοσμολογικής θεωρίας διαταραχών. Μέσω της κβαντικής περιγραφής του πεδίου, έγινε δυνατός ο υπολογισμός του φάσματος αυτών των διαταραχών.

Το πληθωριστικό δυναμικό που χρησιμοποιήσαμε στο πρώτο μέρος της ανάλυσης μας έχει ένα ή περισσότερα σημεία στα οποία μειώνεται απότομα, οδηγώντας σε μπίτσα ταλαντώσεων στο φάσμα των διαταραχών της καμπυλότητας και επίσης σε μια ενίσχυση του φάσματος κατά αρκετές τάξεις μεγέθους. Μελετήσαμε ακόμα επιδράσεις στο φάσμα, που προέρχονται από αλλαγές στην κλίση, τον αριθμό και την απόσταση αυτών των χαρακτηριστικών. Στο δεύτερο μέρος προσεγγίσαμε την μορφή του όρου τριβής με τετράγωνους παλμούς και συνεπώς ήταν δυνατόν να κάνουμε μια αναλυτική προσέγγιση στο φάσμα των διαταραχών σε περιπτώσεις που η προσέγγιση αργής εξέλιξης παραβιάζεται. Και πάλι το παραγόμενο φάσμα παρουσίαζε ισχυρές ταλαντώσεις και ενίσχυση.

Μια ισχυρή ενίσχυση στο αρχέγονο φάσμα ισχύος είναι σημαντική, καθώς σχετίζεται με ισχυρές διακυμάνσεις στην πυκνότητα που είναι ικανές να οδηγήσουν στην παραγωγή αρχέγονων μελανών οπών. Αυτή η πιθανότητα έχει μελετηθεί ενδελεχώς και με μεγάλη λεπτομέρεια τα τελευταία χρόνια. Το ερώτημα της ακριβούς αφθονίας τους και ενός πιθανού ρόλου τους σαν σκοτεινή ύλη έχει προσελκύσει πολύ ενδιαφέρον. Από την άλλη μεριά, οι ταλαντώσεις στο φάσμα των διαταραχών καμπυλότητας μπορούν να αποτυπωθούν στο φάσμα των βαρυτικών κυμάτων. Μια ενδεχόμενη ανίχνευση αυτών των βαρυτικών κυμάτων μπορεί να παρέχει πληροφορίες για πιθανά χαρακτηριστικά στη πληθωριστική δυναμική.

Appendix A

- Συνδυάζοντας τις εξισώσεις(3.3.4, 3.3.6.α), παίρνουμε

$$H^{-2}\dot{H} = -\frac{3M_{pl}^2 (V,\phi)^2}{V \cdot 6V} = -\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V,\phi}{V}\right)^2 = -\varepsilon_V.$$

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.3.5)

$$H^{-1}\dot{\phi} = -M^2 \frac{V,\phi}{V} \Rightarrow \left(H^{-1}\dot{\phi}\right)^2 = M_{pl}^4 \left(\frac{V,\phi}{V}\right)^2 = 2M_{pl}^2 \varepsilon_V.$$

- Από τις εξισώσεις (3.3.4, 3.3.6)

$$\begin{aligned} H^{-2}\ddot{\phi} &= \frac{3M_{pl}^2}{V} \frac{M_{pl}^2}{3} \frac{V,\phi\phi}{V} \frac{V,\phi}{V} - \frac{3M_{pl}^2}{V} \frac{M_{pl}^2}{6} \frac{(V,\phi)^3}{V^2} = \\ &= \underbrace{M_{pl}^2 \frac{V,\phi\phi}{V}}_{\eta_V} \underbrace{M_{pl}^2 \frac{V,\phi}{V}}_{-H^{-1}\dot{\phi}} - \underbrace{M_{pl}^2 \frac{V,\phi}{V}}_{-H^{-1}\dot{\phi}} \underbrace{\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V,\phi}{V}\right)^2}_{\varepsilon_V} = \\ &= H^{-1}\dot{\phi} (\varepsilon_V - \eta_V). \end{aligned}$$

- Παίρνοντας την χρονική παράγωγο της ε_V και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.3.3, 3.3.4) έχουμε

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &\equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V,\phi}{V}\right)^2 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_V = M_{pl}^2 \frac{V,\phi}{V} \left(\frac{V,\phi\phi\dot{\phi}V - (V,\phi)^2\dot{\phi}}{V^2}\right) \Rightarrow \\ H^{-1}\dot{\varepsilon}_V &= -\underbrace{M_{pl}^2 \frac{V,\phi\phi}{V}}_{\eta_V} \underbrace{M_{pl}^2 \left(\frac{V,\phi}{V}\right)^2}_{2\varepsilon_V} + \underbrace{\left(M_{pl}^2 \left(\frac{V,\phi}{V}\right)^2\right)^2}_{4\varepsilon_V^2} \Rightarrow \\ H^{-1}\dot{\varepsilon}_V &= -2\varepsilon_V\eta_V + 4\varepsilon_V^2. \end{aligned}$$

- Με τον ίδιο τρόπο, για την παράμετρο η_V

$$\begin{aligned}\eta_V &\equiv M_{pl}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \Rightarrow \dot{\eta}_V = M_{pl}^2 \frac{V_{,\phi\phi\phi} V \dot{\phi} - V_{,\phi\phi} V_{,\phi} \dot{\phi}}{V^2} \Rightarrow \\ H^{-1} \dot{\eta}_V &= \underbrace{M_{pl}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V}}_{\eta_V} \underbrace{M_{pl}^2 \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2}_{2\varepsilon_V} - \underbrace{M_{pl}^4 \frac{V_{,\phi\phi\phi} V_{,\phi}}{V^2}}_{\xi_V} \Rightarrow \\ H^{-1} \dot{\eta}_V &= 2\varepsilon_V \eta_V - \xi_V.\end{aligned}$$

- Από την εξίσωση (3.2.9) για την ενεργειακή πυκνότητα και τις παραμέτρους αργής εξέλιξης (3.3.3, 3.3.4)

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V = \frac{1}{6} \frac{(V_{,\phi})^2}{3H^2} + V = \frac{V}{3} \underbrace{\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2}_{\varepsilon_V} + V = \left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V \right) V.$$

- Παρομοίως για την πίεση

$$P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V = \frac{1}{6} \frac{(V_{,\phi})^2}{3H^2} - V = \frac{V}{3} \underbrace{\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2}_{\varepsilon_V} - V = \left(-1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V \right) V.$$

- Η σταθερά αναλογίας w σε πρώτη τάξη

$$w \equiv \frac{P}{\rho} = \frac{-1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V}{1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V} \approx \left(-1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V \right) \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon_V \right) \approx -1 + \frac{2}{3} \varepsilon_V.$$

- Ξεκινάμε από την ενεργειακή πυκνότητα και αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (3.3.3, 3.3.6.β)

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \Rightarrow \dot{\rho} = \dot{\phi} \ddot{\phi} + \dot{\phi} V_{,\phi} = - \left(\frac{V_{,\phi}}{3H} \right) \left(\frac{M_{pl}^2 V_{,\phi\phi} V_{,\phi}}{3} - \frac{M_{pl}^2 (V_{,\phi})^3}{6 V^2} \right) + V_{,\phi} \left(\frac{V_{,\phi}}{3H} \right) \Rightarrow \\ H^{-1} \dot{\rho} &= - \frac{M_{pl}^4}{3} V \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 + \frac{M_{pl}^4}{6} V \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^4 - M_{pl}^2 V \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \Rightarrow \\ H^{-1} \dot{\rho} &= 2V \varepsilon_V \left(-1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V - \frac{1}{3} \eta_V \right).\end{aligned}$$

Ομοίως, $H^{-1} \dot{P} = 2V \varepsilon_V \left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V - \frac{1}{3} \eta_V \right)$. Άρα σε πρώτη τάξη

$$\begin{aligned}c_s^2 &\equiv \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} = \frac{1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V - \frac{1}{3} \eta_V}{-1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V - \frac{1}{3} \eta_V} \approx \left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon_V - \frac{1}{3} \eta_V \right) \left(-1 - \frac{1}{3} \varepsilon_V + \frac{1}{3} \eta_V \right) \Rightarrow \\ c_s^2 &\approx -1 - \frac{2}{3} \varepsilon_V + \frac{2}{3} \eta_V.\end{aligned}$$

Appendix B

Η διαταραγμένη μετρική είναι

$$g^{\mu\nu} = \alpha^{-2} \begin{pmatrix} -1 + 2A & -B_i \\ -B_i & (1 + 2D)\delta_{ij} - 2E_{ij} \end{pmatrix}, \quad (6.0.1)$$

συνεπώς η ορίζουσα της

$$g \approx -\alpha^8 (1 + 2A - 6D) \Rightarrow \sqrt{-g} \approx \alpha^4 (1 + A - 3D). \quad (6.0.2)$$

Οι εξισώσεις πεδίου είναι

$$\begin{aligned} \square\phi - V_{,\phi} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) - V_{,\phi} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} [\partial_0 (\sqrt{-g} \partial^0 \phi) + \partial_i (\sqrt{-g} \partial^i \phi)] - V_{,\phi} = 0 \end{aligned}$$

- Ο πρώτος όρος είναι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 (\sqrt{-g} \partial^0 \phi) &= \frac{1}{\alpha^4 (1 + A - 3D)} \partial_0 [\alpha^4 (1 + A - 3D) g^{0\kappa} \partial_\kappa \phi] = \\ &= \frac{(1 - A + 3D)}{\alpha^4} \partial_0 \left[\alpha^4 (1 + A - 3D) \left(g^{00} \partial_0 \phi + \underbrace{g^{0i} \partial_i \phi}_{\text{2nd order}} \right) \right] = \\ &= \frac{(1 - A + 3D)}{\alpha^4} \partial_0 [\alpha^2 (1 + A - 3D) (-1 + 2A) \phi'] = \\ &= \frac{(1 - A + 3D)}{\alpha^4} [2\alpha\alpha' (-1 + A + 3D) \phi' + \alpha^2 (A' + 3D') \phi' + \alpha^2 (-1 + A + 3D) \phi'']. \end{aligned}$$

- Με παρόμοιο τρόπο, ο δεύτερος όρος είναι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} \partial^i \phi) &= \frac{1}{\alpha^4 (1 + A - 3D)} \partial_i [\alpha^4 (1 + A - 3D) g^{i\kappa} \partial_\kappa \phi] = \\ &= \frac{(1 - A + 3D)}{\alpha^4} \partial_i [\alpha^4 (1 + A - 3D) (g^{i0} \phi' + g^{ij} \partial_j \phi)] = \\ &= \frac{(1 - A + 3D)}{\alpha^4} \partial_i \left[-\alpha^2 (1 + A - 3D) B_i \phi' + \alpha^2 (1 + A - 3D) \left((1 + 2D) \delta_{ij} - \underbrace{2E_{ij}}_{\text{2nd order}} \right) \partial_j \phi \right] \\ &= \frac{(1 - A + 3D)}{\alpha^4} [-\alpha^2 B_{i,i} \phi' + \alpha^2 \partial_i^2 \phi] \end{aligned}$$

Έτσι οι εξισώσεις πεδίου γίνονται

$$\square\phi - V_{,\phi} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(1 - A + 3D)}{\alpha^4} [2\alpha\alpha'(-1 + A + 3D)\phi' + \alpha^2(A' + 3D')\phi' + \alpha^2(-1 + A + 3D)\phi'' - \alpha^2 B_{i,i}\phi' + \alpha^2 \partial_i^2 \phi] = V_{,\phi} \Rightarrow$$

$$2\mathcal{H}\phi' + (-1 + 2A)(A' + 3D' - B_{i,i})\phi' + \phi'' + (-1 + 2A)\nabla^2\phi = -\alpha^2(-1 + 2A)V_{,\phi} \Rightarrow$$

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' - \nabla^2\phi - (A' + 3D' - B_{i,i})\phi' = -\alpha^2(1 + 2A)V_{,\phi}.$$

Χωρίζοντας το πεδίο σε δύο μέρη, ένα υπόβαθρο και μία διαταραχή

$$\phi = \bar{\phi}(\tau) + \delta\phi(\tau, \vec{x}),$$

το δυναμικό και οι παράγωγοι του γίνονται

$$V(\phi) = V(\bar{\phi} + \delta\phi) = V(\bar{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi \Rightarrow V_{,\phi} = \frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\delta\phi.$$

Συνεπώς οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την μορφή

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' - \nabla^2\phi - (A' + 3D' - B_{i,i})\phi' = -\alpha^2(1 + 2A)V_{,\phi} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\bar{\phi}''}_{\delta\phi''} + \delta\phi'' + \underbrace{2\mathcal{H}\bar{\phi}'}_{2\mathcal{H}\delta\phi'} + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi - (A' + 3D' - B_{i,i})(\bar{\phi} + \delta\phi) = \underbrace{-\alpha^2\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi}}_{-2\alpha^2 A\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi}} - \alpha^2\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\delta\phi - 2\alpha^2 A\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi}$$

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi + \alpha^2\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\delta\phi = -2\alpha^2 A\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi} + (A' + 3D' - B_{i,i})\bar{\phi}'.$$

Appendix C

Ξεκινάμε από την εξίσωση (4.7.6)

$$u'' + \left(k^2 - \frac{\alpha''}{\alpha}\right) u = \mathcal{H}^2 (6\varepsilon_V - 3\eta_V) u.$$

Έχουμε ότι $z = \frac{\alpha\phi'}{\mathcal{H}} = \frac{\alpha\dot{\phi}}{H}$ και

$$\left(\frac{z'}{z}\right)' = \frac{z''}{z} - \left(\frac{z'}{z}\right)^2 \Rightarrow \frac{z''}{z} = \left(\frac{z'}{z}\right)' + \left(\frac{z'}{z}\right)^2.$$

Επίσης $z' = \dot{z}\alpha$, όπου

$$z = \frac{\alpha\dot{\phi}}{H} \Rightarrow \dot{z} = \frac{\dot{\alpha}\dot{\phi}}{H} + \frac{\alpha\ddot{\phi}}{H} - \frac{\alpha\dot{\phi}\dot{H}}{H^2},$$

έτσι

$$\begin{aligned} z' &= \dot{z}\alpha = \frac{\alpha\dot{\alpha}\dot{\phi}}{H} + \frac{\alpha^2\ddot{\phi}}{H} - \frac{\alpha^2\dot{\phi}\dot{H}}{H^2} \Rightarrow \\ \frac{z'}{z} &= \frac{H}{\alpha\dot{\phi}} \left(\frac{\alpha\dot{\alpha}\dot{\phi}}{H} + \frac{\alpha^2\ddot{\phi}}{H} - \frac{\alpha^2\dot{\phi}\dot{H}}{H^2} \right) \Rightarrow \\ \frac{z'}{z} &= \dot{\alpha} + \frac{\alpha\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} - \frac{\alpha\dot{H}}{H}. \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις (3.3.8, 3.3.10) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{z'}{z} &= \dot{\alpha} + \alpha H(\varepsilon_V - \eta_V) + \alpha H \varepsilon_V \Rightarrow \\ \frac{z'}{z} &= \mathcal{H}(1 + 2\varepsilon_V - \eta_V). \end{aligned}$$

Συνεπώς, σε πρώτης τάξης παραμέτρους αργής-εξέλιξης έχουμε

$$\frac{z''}{z} = \left(\frac{z'}{z}\right)' + \left(\frac{z'}{z}\right)^2 = \mathcal{H}^2 (2 + 5\varepsilon_V - 3\eta_V).$$

Αντίστοιχα για το α , παίρνουμε

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \mathcal{H}^2 (2 - \varepsilon_V).$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{z''}{z} - \mathcal{H}^2(6\varepsilon_V - 3\eta_V),$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.7.6)

$$u'' + \left(k^2 - \frac{\alpha''}{\alpha}\right) u = \mathcal{H}^2(6\varepsilon_V - 3\eta_V) u \Rightarrow$$

$$u'' + \left[k^2 - \frac{z''}{z} + \mathcal{H}^2(6\varepsilon_V - 3\eta_V)\right] u = \mathcal{H}^2(6\varepsilon_V - 3\eta_V) u \Rightarrow$$

$$u'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) u = 0.$$

Βιβλιογραφία

- [1] V. Mukhanov, H. Feldman and R. Brandenberger, “Theory of Cosmological Perturbations”, Phys. Rep. 215, 203 (1992)
- [2] D. Baumann, “Cosmology,” Lecture Notes, Cambridge.
- [3] D. Baumann, “The Physics of Inflation,” Lecture Notes, Cambridge
- [4] D. Baumann, “Inflation,” [arXiv:0907.5424 [hep-th]].
- [5] H. Kurki-Suonio. Cosmological Perturbation Theory, part 1 and 2. Lecture Notes.
- [6] K. Kefala, G. P. Kodaxis, I. D. Stamou and N. Tetradis, Features of the inflaton potential and the power spectrum of cosmological perturbations, [arXiv:2010.12483 [astro-ph.CO]].
- [7] I. Dalianis, G. P. Kodaxis, I. D. Stamou, N. Tetradis and A. Tsigkas-Kouvelis, “Spectrum oscillations from features in the potential of single-field inflation,” [arXiv:2106.02467 [astro-ph.CO]].