ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μία επισκόπηση των μονοαφετηριακών αδιαίρετων ροών

Ορέστης Κ. Μηλολιδάκης

Επιβλέπων: **Σταύρος Κολλιόπουλος,** Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2021

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μία επισκόπηση των μονοαφετηριακών αδιαίρετων ροών

Ορέστης Κ. Μηλολιδάκης
Α.Μ.: 1115201600101

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: **Σταύρος Κολλιόπουλος,** Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την εργασία μελετάμε προσεγγιστικούς αλγορίθμους για το πρόβλημα των μονο-αφετηριακών αδιαίρετων ροών. Εξηγούμε γιατί εισήχθη ως πρόβλημα από τον Kleinberg [7, 8], αναφερόμαστε στα σχετικά αποτελέσματα από τότε και έπειτα, και πραγματευόμαστε την (μακράν) πιο πρόσφατη σχετική δημοσίευση των Morell και Skutella [12]. Οι Morell και Skutella [12] απλοποιούν σημαντικά την απόδειξη του κύριου θεωρήματος μίας δημοσίευσης των Dinitz, Garg, και Goemans [4], και γενικεύουν αυτό και άλλα παλαιότερα αποτελέσματα.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Αλγόριθμοι

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: ροές δικτύων, αδιαίρετες ροές, προσεγγιστικοί αλγόριθμοι, συνδιαστική βελτιστοποίηση

ABSTRACT

In this thesis we study approximation algorithms for the problem of single-source unsplittable flows. We explain why it was introduced as a problem by Kleinberg [7, 8], we refer to the relevant results from then on, and analyze the (by far) most recent relevant publication by Morell and Skutella [12]. Morell and Skutella [12] simplify the proof of the main theorem of a publication of Dinitz, Garg, and Goemans [4] significantly, and generalize this and older results.

SUBJECT AREA: Algorithms

KEYWORDS: flow networks, unsplittable flows, approximation algorithms, combinatorial optimization

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 8

1.1 Εισαγωγικοί ορισμοί και μερικά γεγονότα 8

1.1.1 Ροές δικτύων 8

1.1.2 Ροή ελάχιστου κόστους 8

1.1.3 Μονοαφετηριακή αδιαίρετη ροή (με πολλούς προορισμούς) 9

1.1.4 Χρονική πολυπλοκότητα 9

1.1.5 NP-completeness αδιαίρετης ροής 11

1.1.6 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι 11

1.1.7 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα αδιαίρετης ροής 11

1.1.8 Συνθήκη τομής 12

1.1.9 Κριτήριο ισορροπίας 12

1.2 Αποτελέσματα και δημοσιεύσεις πάνω στην μονοαφετηριακή αδιαίρετη ροή 12

1.2.1 Κίνητρα εισαγωγής του προβλήματος 12

1.2.2 (1997) Single-source unsplittable flow (Kleinberg, original) [7] 14

1.2.3 (1997 Oct) Improved approximation algorithms for unsplittable flow problems (Kolliopoulos, Stein) [9] 14

1.2.4 (1999) On the single-source unsplittable flow problem (Dinitz, Garg, Goemans) [4] 15

1.2.5 (2001 April) Approximating the single-source unsplittable min-cost flow problem (Skutella) [15] 16

1.2.6 (October 2008) Convex Combinations of Single Source Unsplittable Flows (Martens, Salazar, Skutella) [11] 17

1.2.7 (April 2020) Single Source Unsplittable Flows with Arc-Wise Lower and Upper Bounds (Morell, Skutella) [12] 17

2. ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ ΤΩΝ MORELL ΚΑΙ SKUTELLA [12] 18

2.1 Εισαγωγικοί ορισμοί και γεγονότα 18

2.2 Ύπαρξη αδιαίρετης ροής που δεν ξεπερνά διαιρετή κατά πάνω από d_{max} 19

2.3 Ύπαρξη αδιαίρετης ροής που δεν υπολείπεται διαιρετής πάνω από d_{max} 21

2.4 Αδιαίρετες ροές για κάτω φράγματα ροής ακμών 25

2.5 Ροή που ούτε υπολείπεται ούτε ξεπερνά διαιρετή 26

2.5.1 Απόδειξη για ειδική περίπτωση 26

2.5.2 Απόδειξη ασθενέστερης πρότασης για γενική περίπτωση 28

3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ. 30

ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ – ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ 31

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ 32

ΑΝΑΦΟΡΕΣ 33

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

2.1 Εικόνα του paper των Morell και Skutella [12]. Το γράφημα G. Οι s και v_1 είναι οι μόνοι μη-τερματικοί κόμβοι. Οι απαιτήσεις είναι όλες 1. Στους γείτονες του s η x δίνει ροή $\frac{k}{k+1}$, όπου k ακέραιος, ενώ στις υπόλοιπες $\frac{1}{k+1}$. Τα εμπορεύματα είναι k το πλήθος (το G εικονίζεται για $k = 4$). 21

2.2 Βοηθητικό περίγραμμα του μονοπατιού $P_i^{y'}$ του ισχυρισμού 1. Ακμές αναπαριστώνται με βέλος, ενώ μονοπάτια με διακοπτόμενη γραμμή. Στα αριστερά τιμές της ροής y'. Στα δεξιά της x. Το $P_i^{y'}|[w^{y'}, v]$ είναι fuller. Το w μπορεί να είναι ένας οποιοδήποτε κόμβος του $P_i^{y'}|[w^{y'}, v]$, συμπεριλαμβανομένων των $w^{y'}$ και v. 24

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ – ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ 31
ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ 32

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Εισαγωγικοί ορισμοί και μερικά γεγονότα

1.1.1 Ροές δικτύων

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα με έναν *κόμβο πηγής ή αφετηρίας* (source) $s \in V$ και έναν *κόμβο απόληξης ή τερματικό κόμβο ή προορισμό (terminal node)* $t \in V$. Κάθε ακμή a έχει *χωρητικότητα* (capacity) $c(a)$, $c : E \to \mathbb{R}^+$.

Ορισμός 1.1. *Μία* ροή *(flow) f είναι μία συνάρτηση, $f : E \to \mathbb{R}^+$, που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες*

(1) $f(a) \le c(a)$ για κάθε ακμή,

(2) Για κάθε κόμβο v εκτός των s και t, βγαίνει ό,τι ροή μπαίνει, δηλαδή

$$\sum_{\text{e προς τον v}} f(e) = \sum_{\text{e από τον v}} f(e)$$

ή πιο τεχνικά

$$\sum_{u:(u,v)\in E} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u)\in E} f((v,u))$$

Αυτό το συμβολίζουμε και $f^{in}(v) = f^{out}(v)$.

Γενικά η πηγή "παράγει" ροή, και ο τελικός κόμβος "καταναλώνει" ροή. Οπότε $f^{in}(s) - f^{out}(s) \le 0$ και $f^{in}(t) - f^{out}(t) \ge 0$.

Για τα προβλήματα που μας ενδιαφέρουν, ο προορισμός έχει μία απαίτηση d και το ερώτημα είναι εάν αυτή η απαίτηση είναι ικανοποιήσιμη. Άρα θέλουμε ροή με $f^{in}(t) - f^{out}(t) = d$.

Μία επέκταση του προβλήματος αυτού γίνεται με την εισαγωγή επιπλέον τερμάτων. Κάθε τερματικός κόμβος t_i έχει δική του απαίτηση d_i και θέλουμε $f^{in}(t_i) - f^{out}(t_i) = d_i$. Δεν θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση του ενός αγαθού σε αυτό το κείμενο.

Η f είναι ροή που ικανοποιεί τους περιορισμούς ανν

$$f^{in}(v) - f^{out}(v) = \begin{cases} d_i & \text{αν } v = t_i \text{ για κάποιο } i \in \{1, ..., k\}, \\ -\sum_{i=1}^{k} d_i & \text{αν } v = s, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Κάθε τερματικός κόμβος t_i μπορεί να θεωρηθεί ότι δέχεται την ροή για ένα εμπόρευμα ή αγαθό i.

1.1.2 Ροή ελάχιστου κόστους

Ορισμός 1.2. *Έχουμε μία ροή όπως έχει περιγραφεί πριν, όμως εκτός από χωρητικότητες έχουμε επιπλέον για κάθε ακμή a μία σταθερή τιμή* κόστους $c(a)$ *με $c : E \to \mathbb{R}^+$. Το κόστος της ροής f ορίζεται ως $\sum_{a\in E} f(a)c(a)$ και συμβολίζεται και ως $c(f)$.*

Στην εκδοχή που μας ενδιαφέρει, αντικειμενικός στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους της ροής, ικανοποιώντας ασφαλώς τις απαιτήσεις και τις χωρητικότητες. Αυτό είναι το λεγόμενο *πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους* (minimum-cost flow problem).

1.1.3 Μονοαφετηριακή αδιαίρετη ροή (με πολλούς προορισμούς)

Μία μονοαφετηριακή ροή (με πολλούς προορισμούς) αποκαλείται *αδιαίρετη* (unsplittable) αν ολόκληρη η απαίτηση κάθε εμπορεύματος δρομολογείται διά μέσου ενός μονοπατιού απ'την αφετηρία στο τελικό κόμβο του. Με άλλα λόγια, αν για κάθε προορισμό, υπάρχει ένα μονοπάτι από την πηγή σε αυτό, που αναθέτει την απαίτηση του προορισμού σε καθεμία απ'τις ακμές του. Ο τεχνικός ορισμός είναι:

Ορισμός 1.3. *Έστω y μία αδιαίρετη ροή και έστω για κάθε εμπόρευμα i ένα μονοπάτι P_i^y το οποίο φέρει την ροή d_i από την πηγή στον προορισμό i. Τότε, για κάθε ακμή a,*

$$y_a = \sum_{i:a\in P_i^y} d_i.$$

Μία επέκταση της μονοαφετηριακής αδιαίρετης ροής (με πολλούς προορισμούς) είναι *η πολυαφετηριακή (multiple-source) αδιαίρετη ροή (με πολλούς προορισμούς)*.

Ορισμός 1.4. *Έστω k αγαθά και ζεύγη αφετηριών-τερματικών κόμβων $(s_1, t_1), (s_2, t_2), ...,$ (s_k, t_k). Κάθε τερματικός κόμβος t_i έχει δική του απαίτηση d_i.Έχουμε μία πολυαφαιτηριακή αδιαίρετη ροή με πολλούς προορισμούς y αν για όλα τα εμπορεύματα i υπάρχει ένα μονοπάτι P_i^y από την πηγή s_i στον προορισμό t_i τέτοια ώστε, για κάθε ακμή a,*

$$y_a = \sum_{i:a\in P_i^y} d_i.$$

Όταν αναφερόμαστε απλώς σε αδιαίρετη ροή, εννοούμε μονοαφετηριακή αδιαίρετη ροή με πολλούς προορισμούς. Με τον όρο *γενική αδιαίρετη ροή* εννοούμε πολυαφαιτηριακή αδιαίρετη ροή με πολλούς προορισμούς. Αν θέλουμε να τονίσουμε ότι μία ροή δεν είναι απαραίτητα αδιαίρετη, την αποκαλούμε *διαιρετή* (splittable/fractional).

1.1.4 Χρονική πολυπλοκότητα

Ο αναγνώστης μπορεί και να ανατρέξει στο γνωστό βιβλίο του Sipser [14].

Ορισμός 1.5. *Αποκαλούμε μία γλώσσα L* αποφασίσιμη *(decidable) αν υπάρχει μηχανή Turing M που για κάθε είσοδο w, λήγει με "Ναι" αν $w \in L$, και με "Όχι" αν $w \notin L$.*

Ορισμός 1.6. *Έστω μία αποφασίσιμη (decidable) γλώσσα L, και M μία ντετερμινιστική μηχανή Turing που να την αποφασίζει. Ορίζουμε σαν* συνάρτηση χρονικής πολυπλοκότητας *(time complexity) την $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, όπου $T(n)$ είναι ο μέγιστος αριθμός βημάτων που η M χρειάζεται ανάμεσα σε όλες τις εισόδους μήκους n. Λέμε ότι η L* αποφασίζεται *σε χρόνο $T(n)$. Αν τα ίδια ισχύουν για μία μη-ντετερμινιστική μηχανή, λέμε ότι η L* αποφασίζεται μη ντετερμινιστικά *σε χρόνο $T(n)$.*

Ορισμός 1.7. *Αν υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση $T(n)$ τέτοια ώστε η γλώσσα L να αποφασίζεται σε αριθμό βημάτων $O(T(n))$ λέμε ότι η γλώσσα ανήκει στην* κλάση P *(class P). Αν μία γλώσσα αποφασίζεται μη ντετερμινιστικά σε αριθμό βημάτων $O(T(n))$, όπου το $T(n)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση λέμε ότι η γλώσσα ανήκει στην* κλάση NP*.*

Συχνά παραλείπονται οι τεχνικές λεπτομέρειες σχετικές με μηχανές Turing στην χρονική ανάλυση ενός αλγορίθμου.

Ορισμός 1.8. Μηχανή πολυωνυμικού χρόνου *(Polynomial time machine) είναι μία μηχανή που τερματίζει σε $O(T(n))$ βήματα, όπου το $T(n)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση, για κάθε είσοδο μεγέθους n.*

Έστω Σ ένα *αλφάβητο* (alphabet), δηλαδή ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο και Σ^* όλες οι *συμβολοσειρές* (strings), δηλαδή ακολουθίες πεπερασμένου μήκους, που μπορούν να φτιαχτούν από στοιχεία της Σ.

Ορισμός 1.9. *Μία συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ είναι* πολυωνυμικά υπολογίσιμη χρονικά *(polynomial time computable) αν υπάρχει κάποια μηχανή Turing πολυωνυμικού χρόνου M που για είσοδο w σταματάει με έξοδο $f(w)$.*

Ορισμός 1.10. *Μία γλώσσα A* ανάγεται σε πολυωνυμικό χρόνο *(polynomial time reducible) στην γλώσσα B αν υπάρχει πολυωνυμικά υπολογίσιμη χρονικά συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, όπου για κάθε w, $w \in A \iff f(w) \in B$.*

Ορισμός 1.11. *Μία γλώσσα L είναι* NP-complete *εάν 1) $L \in$ NP και 2) Κάθε γλώσσα $L' \in$ NP μπορεί να αναχθεί σε πολωνυμικό χρόνο στην L.*

Ορισμός 1.12. *Μία γλώσσα L είναι* NP-hard *εάν κάθε γλώσσα $L' \in$ NP μπορεί να αναχθεί σε πολωνυμικό χρόνο στην L.*

Προσέξτε πως αν μία NP-complete γλώσσα L' μπορεί να αναχθεί σε πολωνυμικό χρόνο σε μία γλώσσα L, συνεπάγεται ότι η L είναι NP-hard.

Σε ένα πρόβλημα απόφασης (decision problem), μας δίνεται μία γλώσσα L και μία συμβολοσειρά w και ζητείται να αποφασίσουμε αν $w \in L$. Ένα πρόβλημα απόφασης είναι NP-hard (NP ή NP-complete αντίστοιχα) αν η L είναι NP-hard (NP ή NP-complete αντίστοιχα).

Ορισμός 1.13. *Μία* χρησμοληπτική μηχανή Turing *(oracle Turing machine) M^P για κάποιο πρόβλημα P είναι μία μηχανή Turing, η οποία έχει πρόσβαση σε έναν* χρησμός *(oracle). Ένας χρησμός για το πρόβλημα P δίνει την λύση του P στην M σε ένα υπολογιστικό βήμα.*

Ορισμός 1.14. *Μία* αναγωγή Turing πολυωνυμικού χρόνου *(polynomial time Turing reduction) από το πρόβλημα P στο P' είναι μία χρησμοληπτική μηχανή Turing $M^{P'}$ η οποία λύνει το πρόβλημα P σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Ορισμός 1.15. *Μία* αναγωγή Turing πολυωνυμικού χρόνου *(polynomial time Turing reduction) από το πρόβλημα P στο P' είναι μία χρησμοληπτική μηχανή Turing $M^{P'}$ η οποία λύνει το πρόβλημα P σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Ορισμός 1.16. *Ένα πρόβλημα P είναι NP-hard αν υπάρχει κάποιο NP-complete πρόβλημα P' που να ανάγεται κατά Turing σε πολυωνυμικό χρόνο στο P.*

Προσέξτε πως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (optimization problem) μπορεί να είναι μόνο πιο δύσκολο από το αντίστοιχο πρόβλημα εύρεσης (search problem) που μπορεί να είναι μόνο πιο δύσκολο από το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης.

1.1.5 NP-completeness αδιαίρετης ροής

Το πρόβλημα απόφασης του *Bin-Packing*, ακόμα και με κάδους ίδιας χωρητικότητας είναι NP-complete πρόβλημα [5]:

Ορισμός 1.17. *Δοσμένου ενός σύνολου $S = a_1, a_2, ..., a_n$ θετικών ακεραίων και αριθμούς B και C, αποφασίστε αν υπάρχει διαμέριση του S σε το πολύ B σύνολα, το άθροισμα του καθενός οποίου να μην ξεπερνά το C.*

Θεώρημα 1.1. *Το πρόβλημα της ύπαρξης μονοαφετηριακής αδιαίρετης ροής είναι NP-complete.*

Απόδειξη. Φαίνεται εύκολα ότι το πρόβλημα ανήκει στο NP. Για κάθε τερματικό κόμβο t_i, βρες με μη ντετερμινιστικό τρόπο ένα μονοπάτι $s - t_i$. Αφού το κάνεις, κοίτα εάν παραβιάζονται οι χωρητικότητες. Αν δεν παραβιάζονται, εξήγαγε "ναι". Αν παραβιάζονται, εξήγαγε "όχι".

Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα είναι NP-complete, αρκεί να δείξουμε ότι ένα NP-complete πρόβλημα ανάγεται σε αυτό. Θα δείξουμε ότι το bin-packing με την μορφή που δίνεται στον ορισμό 1.17 ανάγεται στο πρόβλημα αδιαίρετης ροής.

Δοσμένης μίας τέτοιας εισόδου του bin-packing, φτιάχνουμε το εξής δίκτυο ροής: Έχουμε 2 κόμβους v_1, v_2 με v_1 να'ναι αφετηρία για αγαθά $i = 1, 2, ..., n$ με τερματικό κόμβο v_2 και απαίτηση a_i. Επίσης υπάρχουν B παράλληλες ακμές (v_1, v_2) με χωρητικότητα C. Υπάρχει αδιαίρετη ροή αν και μόνο αν υπάρχει εφικτή διαμέριση για το bin-packing. □

1.1.6 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

Καθώς δεν έχει βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος για προβλήματα που είναι NP-hard, θεωρούνται δυσεπίλυτα. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα, έχουν εισαχθεί οι *προσεγγιστικοί αλγόριθμοι* (approximation algorithms).

Έστω ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης και $OPT(w)$ η τιμή της βέλτιστης λύσης για συμβολοσειρά εισόδου w.

Ορισμός 1.18. *Για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, ένας* ρ-προσεγγιστικός αλγόριθμος *A, $\rho \geq 1$, βγάζει στην έξοδο μία λύση με τιμή $f(w)$ το πολύ ρ φορές της βέλτιστης, δηλαδή $OPT(w) \leq f(w) \leq \rho OPT(w)$, σε πολυωνυμικό χρόνο για κάθε συμβολοσειρά εισόδου w.*

Ορισμός 1.19. *Για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, ένας* ρ-προσεγγιστικός αλγόριθμος *A, $\rho \leq 1$, βγάζει στην έξοδο μία λύση με τιμή $f(w)$ τουλάχιστον ρ φορές της βέλτιστης, δηλαδή $OPT(w) \geq f(w) \geq \rho OPT(w)$, σε πολυωνυμικό χρόνο για κάθε συμβολοσειρά εισόδου w.*

Μπορεί για λόγους ευκολίας συμβολισμού, για πρόβλημα μεγιστοποίησης να δοθεί ο λόγος προσέγγισης ως $1/\rho$. Π.χ. αν δοθεί λόγος προσέγγισης 5 θα εννοούμε τότε ότι η σταθερά έχει τιμή ${}^1\!/_5 = 0.2$.

1.1.7 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα αδιαίρετης ροής

Για την αδιαίρετη ροή ενδιαφερόμαστε για 3 προβλήματα βελτιστοποίησης, ανάλογα με το ποια αντικειμενική συνάρτηση επιλέγουμε να βελτιστοποιήσουμε:

- *Ελάχιστη συμφόρηση* (Minimum congestion): Ποιο είναι το μικρότερο $a \geq 1$ τέτοιο ώστε αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις χωρητικότητες με a, θα υπάρχει αδιαίρετη ροή που να ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις;
- *Μεγιστοποίηση της δρομολογίσιμης απαίτησης* (Maximization of routable demand): Βρείτε ένα υποσύνολο T των εμπορευμάτων που να μπορούν να δρομολογηθούν αδιαίρετα ώστε να μεγιστοποιείται το $\sum_{i \in T} d_i$.
- *Ελάχιστος αριθμός γύρων* (Minimum number of rounds): Διαμερίστε τα εμπορεύματα στον ελάχιστο αριθμό συνόλων (γύρων), τέτοια ώστε τα εμπορεύματα που ανήκουν σε ίδιο γύρο να δρομολογούνται αδιαίρετα.

Αν σε αυτά τα προβλήματα βελτιστοποίησης λάβουμε υπόψη και κόστη, απλά αντί να έχουμε μια παράμετρο προσέγγισης έχουμε 2, μία όπως πριν, και μία για το κόστος. Π.χ. στην ελάχιστη συμφόρηση, μπορεί να έχουμε έναν $(2, 5.5)$-προσεγγιστικό αλγόριθμο, όπου η λύση που επιστρέφει ο αλγόριθμος επιτυγχάνει ταυτόχρονα 2-προσέγγιση για την ελάχιστη συμφόρηση και 5.5-προσέγγιση για το ελάχιστο κόστος.

1.1.8 Συνθήκη τομής

Ένα γνωστό θεώρημα απ΄την βιβλιογραφία [1] για διαιρετές ροές με πολλά εμπορεύματα είναι η *συνθήκη τομής* (cut condition). Μας ενδιαφέρει εδώ μόνο η μονοαφετηριακή εκδοχή της:

Θεώρημα 1.2. *Για ένα δίκτυο ροής με αφετηρία s και k αγαθά με τερματικούς κόμβους $t_1, ..., t_k$ και απαιτήσεις $d_1, ..., d_k$, υπάρχει εφικτή διαιρετή ροή ανν $\forall T \subseteq V \setminus \{s\}$, η αθροιστική χωρητικότητα των ακμών από το $V \setminus T$ στο T είναι μεγαλύτερη ή ίση της αθροιστικής απαίτησης των τερματικών κόμβων που περιέχονται στο T.*

Λέμε ότι η συνθήκη τομής ικανοποιείται αν το δεξί μέλος της ισοδυναμίας είναι αληθές.

1.1.9 Κριτήριο ισορροπίας

Στις αδιαίρετες ροές, μία συχνή υπόθεση, η οποία θα ισχύει στα επόμενα εκτός αν ειπωθεί το αντίθετο, είναι πως όλες οι χωρητικότητες είναι τουλάχιστον τόσο όσο η μέγιστη απαίτηση, δηλαδή $c_a \geq d_{max}$ για κάθε ακμή a. Αυτό λέγεται *συνθήκη ή κριτήριο ισορροπίας* (balance condition).

Αυτή η υπόθεση μάλλον προκύπτει απ'την άποψη πως στην πράξη αυτός που έχει δημιουργήσει το γράφημα δεν θα του αναθέσει κάποιο αγαθό που να μην μπορεί να υποστηριχθεί από κάθε ακμή του.

1.2 Αποτελέσματα και δημοσιεύσεις πάνω στην μονοαφετηριακή αδιαίρετη ροή

1.2.1 Κίνητρα εισαγωγής του προβλήματος

Έχοντας σαν κίνητρο δικτυακά θέματα σχετικά με admission control και δρομολόγηση σε δίκτυα υψηλών ταχυτήτων, ο Kleinberg εισήγαγε το γενικό πρόβλημα αδιαίρετης ροής.

Αυτό αποτελεί γενίκευση του γνωστού NP-complete *προβλήματος διακεκριμένων μονοπατιών* (disjoint paths problem), που κατά τον Kleinberg, παρόλο που ήτανε το αντικείμενο μελέτης προς την αντιμετώπιση των προαναφερώντων θεμάτων, δεν τα αντιπροσώπευε καθώς πρέπει.

Τυπικά, ένα δίκτυο επικοινωνίας μοντελοποιείται ως ένα γράφημα, με κάθε ζεύξη να έχει ένα όριο ρυθμού μετάδοσης. Υπάρχουν ζεύγη κόμβων τα οποία επιθυμούν να επικοινωνήσουν, με συγκεκριμένο ρυθμό μετάδοσης. Αυτά τα ονομάζουμε ζεύγη *τερματικών συστημάτων* (end system). Για μία κατηγορία μεθόδων δρομολόγησης που ονομάζονται *virtual circuit routing*, η πληροφορία ανάμεσα σε 2 τερματικά συστημάτα πρέπει να μεταφέρεται μέσω ενός μόνο μονοπατιού του γραφήματος. Το πρόβλημα διακεκριμένων μονοπατιών έχει δύο ελαττώματα ως εργαλείο μέσω του οποίου αντιμετωπίζεται το virtual circuit routing:

- Η χρήση του εμπεριέχει την υπόθεση πως όλες οι ζεύξεις μπορούν να ικανοποιήσουν κάθε ένα και μόνο ένα ζεύγος τερματικών συστημάτων.
- Δεν προβλέπει πηγές δυσεπιλυσιμότητας τύπου packing, παρόλο που αυτές μπορούν να εμφανιστούν σε δίκτυο επικοινωνίας: Έστω ένα δίκτυο επικοινωνίας που είναι ίδιο με το δίκτυο ροής που προέκυψε απ'την ανάγωγη απ'το bin-packing με κάδους ίδιας χωρητικότητας (θέστε όπου χωρητικότητα όριο ρυθμού μετάδοσης, και όπου απαίτηση επιθυμία ρυθμού μετάδοσης). Αν υποθέταμε ότι στο δίκτυο επικοινωνίας όλες οι ζεύξεις μπορούν να ικανοποιήσουν κάθε ένα και μόνο ένα μονοπάτι ενός ζεύγους τερματικών συστημάτων, το ερώτημα ύπαρξης δρομολόγησης virtual circuit routing θα λυνόταν τετριμμένα παρόλο που το αρχικό πρόβλημα είναι NP-complete.

Κατά τον Kleinberg, τα προαναφερόντα 3 προβλήματα βελτιστοποίησης που εισήχθησαν από τον ίδιο, είναι απλές προσαρμογές των 3 κύριων προβλημάτων βελτιστοποίησης που έχουν μελετηθεί για τα διακεκριμένα μονοπάτια, για τα οποία υπήρξε ελλιπής πρόοδος στην γενική περίπτωση, με λογαριθμικά-προσεγγιστικούς αλγορίθμους στης συμφόρησης και κανέναν στα άλλα. Καθώς το γενικό πρόβλημα αδιαίρετης ροής είναι γενίκευση των διακεκριμένων μονοπατιών, και άρα κατά τον ίδιο λογικά πιο δύσκολο, ο Kleinberg προτίμησε να ασχοληθεί με μία εξειδίκευση του, το πρόβλημα μονοαφετηριακής αδιαίρετης ροής (Single-source unsplittable flow) και για το οποίο αποδεικνύει την ύπαρξη προσεγγιστικών αλγορίθμων σταθερού λόγου προσέγγισης.

Σχετικά με το γενικό (πολλών τερμάτων/αφετηριών) πρόβλημα αδιαίρετης ροής: Μέχρι το 2008 είχαμε τα εξής αποτελέσματα: Για την ελάχιστη συμφόρηση, εφόσον ισχύει το Κριτήριο ισορροπίας, είχε βρεθεί ένας $O(\frac{\log m}{\log\log m})$-προσεγγιστικός αλγόριθμος, όπου m οι ακμές [13]. Η περίπτωση με κατευθυνόμενες ακμές, είναι $\Omega(\log\log m) - hard$ να προσεγγιστεί εκτός εάν NP $\in$ DTIME($n^{O(\log\log\log n)}$), όπου n ο αριθμός των κόμβων [3]. Για τη μεγιστοποίηση της ικανοποιημένης απαίτησης, είχε βρεθεί ένας $O(\sqrt{m})$-προσεγγιστικός αλγόριθμος ακόμα και χωρίς το Κριτήριο ισορροπίας [2]. Επίσης είχε βρεθεί ότι δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο απόδοσης $O(m^{1/2} - \epsilon)$ για οποιοδήποτε ϵ > 0, εκτός εάν P = NP [6]. Δείτε την παράγραφο "Related Results from the Literature" του [11] για περισσότερα.

Καθώς οι λόγοι προσέγγισης στο πρόβλημα της μονοαφετηριακής αδιαίρετης ροής είναι πλέον όλοι σταθερές μικρότερες του 5 αν ισχύει το Κριτήριο ισορροπίας (και 2 στο πρόβλημα συμφόρησης), η επιλογή του Kleinberg να εισαγάγει το μονοαφετηριακό πρόβλημα μοιάζει να απέβη σωστή όσον αφορά την προσεγγισιμότητα του προβλήματος.

Επίσης, όπως παρατηρεί και ο Kleinberg, το μονοαφετηριακό πρόβλημα χωρίς κόστη γενικεύει πολλά γνωστά NP-complete προβλήματα, όπως τα PARTITION, BIN PACKING, και scheduling parallel machines with makespan objective. Αν πάρουμε το πρόβλημα με κόστη, περιέχει το KNAPSACK.

Αναφέρονται τώρα οι δημοσιεύσεις πάνω στην μονοαφετηριακή αδιαίρετη ροή. Τα επόμενα σε αυτό το κεφάλαιο γενικά αφορούν μόνο τα 3 προβλήματα βελτιστοποίησης της αδιαίρετης ροής που ορίσαμε παραπάνω.

1.2.2 (1997) Single-source unsplittable flow (Kleinberg, original) [7]

Δείτε και το σχετικό Phd thesis [8].

Αποτελέσματα του εν λόγω paper:

Ο Kleinberg εισαγάγει το πρόβλημα της αδιαίρετης ροής και τα 3 σχετικά με αυτό προβλήματα βελτιστοποίησης. Αναφέρεται στα κίνητρα που τον ώθησαν να εισαγάγει το πρόβλημα και αποδεικνύει ότι το πρόβλημα είναι NP-complete με απλή αναγωγή απ'το bin-packing. Έπειτα αποδεικνύει κάποια αποτελέσματα για την προσεγγισιμότητα των προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Για γενικά μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, ο Kleinberg παρουσιάζει έναν 8.25-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της συμφόρησης και αποδεικνύει την ύπαρξη προσεγγιστικών αλγορίθμων σταθερού λόγου προσέγγισης στην περίπτωση του προβλήματος της μεγιστοποίησης της δρομολογίσιμης απαίτησης και του προβλήματος του ελάχιστου αριθμού γύρων. Στην αδιαίρετη ροή ελάχιστου-κόστους, για την συμφόρηση δίνει έναν (συμφόρηση=10.473,κόστος=7.473)-προσεγγιστικό αλγόριθμο.

Στην περίπτωση των κατευθυνόμενων γραφημάτων, η τεχνική που χρησιμοποιεί ο Kleinberg ακολουθεί την ίδια ιδέα με την τεχνική που χρησιμοποίησε στα μη κατευθυνόμενα γραφήματα, όμως υπάρχουν διαφοροποιήσεις που εμπεριέχουν δικές τους περιπλοκές. Ο Kleinberg παρουσιάζει έναν 16-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της συμφόρησης και αποδεικνύει την ύπαρξη προσεγγιστικών αλγορίθμων σταθερού λόγου προσέγγισης στην περίπτωση του προβλήματος της μεγιστοποίησης της δρομολογίσιμης απαίτησης και του προβλήματος του ελάχιστου αριθμού γύρων στην γενική περίπτωση.

Ο Kleinberg έγραψε πως δεν ενδιαφερόταν τόσο να αναφερθεί στους χαμηλότερους δυνατούς λόγους προσέγγισης, όσο να αποδείξει με κομψό τρόπο την ύπαρξη τους. Πράγματι, παρόλο που φτιάχνει αλγορίθμους και για τα 3 προβλήματα, αναφέρεται μόνο στον ακριβή λόγο προσέγγισης του 1ου.

1.2.3 (1997 Oct) Improved approximation algorithms for unsplittable flow problems (Kolliopoulos, Stein) [9]

Αποτελέσματα του εν λόγω paper:

Οι Κολλιόπουλος και Stein ακολουθούν διαφορετική προσέγγιση έχοντας υπόψη τα 3 προβλήματα βελτιστοποίησης (πάντως αξιοποιούν κάποιες τεχνικές του Kleinberg, όπως αυτήν που αποκαλούν grouping-and-scaling), με αποτέλεσμα:

- Να βελτιώσουν (και αποσαφηνίσουν) τις προσεγγιστικές σταθερές από το paper του Kleinberg.

- Να αναπτύξουν απλούστερους αλγορίθμους σε σχέση με τον Kleinberg χρησιμοποιώντας απλούστερα εργαλεία.

Επίσης τονίζουν ιδιαίτερα ότι οι τεχνικές τους δεν περιέχουν (σημαντικές) διαφορές είτε χρησιμοποιούνται για κατευθυνόμενα είτε για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, επιτρέποντας την ενιαία αντιμετώπιση των 3 προβλημάτων σε αυτούς.

Προσθέτουν ότι και οι 3 προσεγγιστικοί αλγόριθμοι που έχουν αναπτύξει έχουν ίδια δομή, αναφέροντας ότι θα μπορούσαν να δοθούν και οι 3 αλγόριθμοι ως 1 αλγόριθμος με διαφορετικές υπορουτίνες για κάθε υποπρόβλημα. Επιπροσθέτως ότι οι αλγοριθμικές τεχνικές που εισαγάγουν είναι γενικές και εφαρμόσιμες σε σχετικά προβλήματα.

- Για την ελάχιστη συμφόρηση, δίνουν έναν $(3.33 + o(1))$-προσεγγιστικό αλγόριθμο, αντί του 8.25 (ή 16) του Kleinberg για κατευθυνόμενα ή μη γραφήματα.

  Επίσης δίνουν αλγόριθμο με λόγο προσέγγιση (κόστους, συμφόρησης)=$(3.33+o(1), 1.68)$ για κατευθυνόμενα ή μη γραφήματα. Για το κόστος ιδιαίτερα, δείχνουν πώς να αποκτηθεί μία $(1 + \epsilon)$-προσέγγιση για κάθε $\epsilon > 0$, προς ζημία όμως του λόγου προσέγγισης της συμφόρησης. Στην περίπτωση των κατευθυνόμενων, ήταν η πρώτη προσέγγιση σταθερού λόγου.

- Για την μεγιστοποίηση ικανοποίησης, δίνουν έναν 7.5%-προσεγγιστικό αλγόριθμο. Κατά τους ίδιους, ο λόγος προσέγγισης του αλγόριθμου του Kleinberg, ο οποίος όπως είπαμε δεν τον προσδιόριζε, είναι 0.031 για μη κατευθυνόμενα γραφήματα και ως και 10^{-9} για κατευθυνόμενα.

- Για τον ελάχιστο αριθμό γύρων, κατασκευάζουν έναν 13-προσεγγιστικό αλγόριθμο έναντι του 32 του Kleinberg, αν ισχύει η Συνθήκη τομής.

Έπειτα, αποδεικνύουν ότι δεν υπάρχει ρ-προσεγγιστικός αλγόριθμος, με $\rho < 2$, για την συμφόρηση του διαφετηριακού προβλήματος αδιαίρετης ροής, εκτός αν P=NP.

Στην περίπτωση που δεν ικανοποιείται το Κριτήριο ισορροπίας, βρίσκουν έναν 5.8285-προσεγγιστικό αλγόριθμο για την συμφόρηση. Λένε ότι αυτό είναι το πρώτο αποτέλεσμα τέτοιας περίπτωσης που γνωρίζουνε.

Τέλος, αποδεικνύουνε με αναγωγή από πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού (scheduling problem), ότι αν οι απαιτήσεις παίρνουν τιμές απ'το σύνολο $\{p, 2p\}$ για κάποιο θετικό $p \in \mathbb{R}$, η συμφόρηση δεν μπορεί να έχει λόγο προσέγγισης καλύτερο του $\frac{3}{2}$, εκτός αν P=NP.

(2002 march) approximation algorithms for single-source unsplittable flow [10]:

Η προηγούμενη ήταν δημοσίευση σε συνέδριο. Αργότερα, δημοσιεύτηκε το ίδιο paper σε περιοδικό, με την προσεγγιστική σταθερά της συμφόρησης βελτιωμένη σε 3.

1.2.4 (1999) On the single-source unsplittable flow problem (Dinitz, Garg, Goemans) [4]

Τα αποτελέσματα του εν λόγω paper ισχύουν για κατευθυνόμενο ή μη γράφημα, και μόνο εάν η χωρητικότητα των ακμών είναι τουλάχιστον d_{max} εκτός αν αναφερθεί το αντίθετο.

Εάν ισχύει η συνθήκη τομής, οι Dinitz, Garg, και Goemans δίνουν έναν αποδοτικό αλγόριθμο, ο οποίος παράγει μία αδιαίρετη ροή που ικανοποιεί τις απαιτήσεις και δεν παραβιάζει τις χωρητικότητες κατά παραπάνω από την μέγιστη απαίτηση d_{max}.

Αυτό προκύπτει από αποδοτικό αλγόριθμο που κατασκευάζουν ο οποίος μετασχηματίζει μία ροή σε μία αδιαίρετη ροή αυξάνοντας την χωρητικότητα των ακμών κατά λιγότερο του d_{max}.

Με χρήση αυτού του αποτελέσματος, παίρνουν έναν 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο για την συμφόρηση, βελτιώνοντας τον 3.33 αλγόριθμο των Κολλιόπουλου και Stein. Επίσης δείχνουν ότι όλες οι απαιτήσεις μπορούν να ικανοποιηθούν σε 5 γύρους. Τέλος δείχνουνε ότι το 22.6% (σταθερά =$\frac{1}{0.226} = 4.43$) της συνολικής απαίτησης μπορεί να ικανοποιηθεί αδιαίρετα και δίνουνε αντίστοιχο προσεγγιστικό αλγόριθμο.

Στην περίπτωση που δεν ισχύει η συνθήκη τομής, επεκτείνουνε τα ίδια αποτελέσματα για την συμφόρηση και την μεγιστοποίηση της ικανοποίησης. Για την ελαχιστοποίηση των γύρων, βρίσκουν έναν 5-προσεγγιστικό αλγόριθμο.

Δείχνουν με αντιπαράδειγμα ότι ο αλγόριθμος μετατροπής διαιρετής σε αδιαίρετη ροή αυξάνει τις χωρητικότητες κατά το ελάχιστο δυνατό στην γενική περίπτωση.

Τέλος, δείχνουνε πως αν δεν ισχύει $d_{max} \leq c_{min}$, μπορεί να αποκτηθεί ένας 5-προσεγγιστικός αλγόριθμος για την συμφόρηση, βελτιώνοντας το 5.8285 των Κολλιόπουλου και Stein.

1.2.5 (2001 April) Approximating the single-source unsplittable min-cost flow problem (Skutella) [15]

Το εν λόγω paper παράγει τα αποτελέσματα του για κατευθυνόμενα και μη γραφήματα, εκτός αν αναφερθεί το αντίθετο. Επίσης θα ισχύει $d_{max} \leq c_{min}$, εκτός αν ειπωθεί πως ένα αποτέλεσμα ισχύει για *αυθαίρετες απαιτήσεις* (arbitrary demands).

Ο Skutella παράγει προσεγγιστικούς αλγορίθμους για τα 3 προβλήματα, διατηρώντας βέλτιστη τιμή κόστους (σταθερά προσέγγισης 1) σε αντίθεση με προηγούμενες δημοσιεύσεις. Η κύρια αντιμετώπιση του σχετίζεται στενά με τεχνικές των Κολλιόπουλου και Stein, όπου όμως είναι πιο προσεκτικός ώστε να μην μειωθεί ο λόγος προσέγγισης κόστους.

Αποτελέσματα του εν λόγω paper:

Όλα τα επόμενα αποτελέσματα επιτυγχάνουν βέλτιστη τιμή κόστους, εκτός αν αναφερθεί το αντίθετο.

Ο Skutella αποκτά έναν 3-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα συμφόρησης. Για αυθαίρετες απαιτήσεις, παράγει εγγυήσεις απόδοσης 3+2$\sqrt{2}$.

Εάν ικανοποιείται η Συνθήκη τομής, χρησιμοποιώντας τεχνικές των Dinitz, Garg, και Goemans για το ίδιο πρόβλημα χωρίς κόστη, δείχνει πως μπορούν να ικανοποιηθούν όλες οι απαιτήσεις σε 8 γύρους έτσι ώστε το αθροιστικό κόστος να μην ξεπερνάει το κόστος μίας οποιασδήποτε συγκεκριμένης διαιρετής ροής. Εάν δεν ικανοποιείται η Συνθήκη τομής, παράγει έναν 8-προσεγγιστικό αλγόριθμο.

Από το από πάνω προκύπτει πως αν ισχύει η Συνθήκη τομής, μπορεί να ικανοποιηθεί το $\frac{1}{8}$ της απαίτησης με λόγο απόδοσης κόστους 1.

Τέλος, αποδεικνύει πως ανεξαρτήτως κόστων, για αυθαίρετες απαιτήσεις η συμφόρηση δεν έχει προσέγγιση με λόγο καλύτερο του ($\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \approx$ 1.618 εκτός αν P=NP, περιορίζοντας το προηγούμενο φράγμα =1.5 με την αναγωγή από πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού. Σε κατευθυνόμενα γραφήματα, με αναγωγή από το SAT δείχνει πως για την μέγιστη ικανοποίηση απαιτήσεων δεν υπάρχει ποσοστό προσέγγισης καλύτερο του 50% εκτός αν

P=NP.

Στην περίπτωση που για τις απαιτήσεις ισχύει $d_1|...|d_k$, δεδομένης αρχικής διαιρετής ροής, δίνεται αλγόριθμος που βρίσκει αδιαίρετη ροή με λόγω προσέγγισης στη συμφόρηση 2 και που δεν αυξάνει τα κόστη. Αποδεικνύει την Εικασία του paper που ακολουθεί (Εικασία 1.1) για αυτήν την ειδική περίπτωση.

1.2.6 (October 2008) Convex Combinations of Single Source Unsplittable Flows (Martens, Salazar, Skutella) [11]

Τα επόμενα είναι για κατευθυνόμενα γραφήματα.

Θυμίζουμε ότι οι Dinitz, Garg, and Goemans [4] είχαν αποδείξει ότι κάθε διαιρετή ροή f^{init} μπορεί να μετατραπεί σε μία αδιαίρετη ροή f με $f(a) \leq f^{init}(a) + d_{max}$ για κάθε ακμή a. Ο Goemans είχε εικάσει σε αλληλογραφία με τους συγγραφείς του παρόντος paper πως επιπλέον αν υπάρχουν κόστη στις ακμές, υπάρχει τέτοια αδιαίρετη ροή με μικρότερο ή ίσο κόστος.

Εικασία 1.1. *Κάθε διαιρετή ροή f^{init} μπορεί να μετατραπεί σε μία αδιαίρετη ροή f με $f(a) \leq f^{init}(a) + d_{max}$ για κάθε ακμή a και $c(f) \leq c(f^{init})$.*

Αποτελέσματα του εν λόγω paper:

Οι Martens, Salazar, Skutella αποδεικνύουν ότι η Εικασία 1.1 είναι ισοδύναμη με την Εικασία 1.2:

Εικασία 1.2. *Μία τυχαία διαιρετή ροή f^{init} μπορεί να γραφτεί σαν κυρτός συνδυασμός αδιαίρετων ροών f οι οποίες ικανοποιούν τις ίδιες απαιτήσεις και $f(a) \leq f^{init}(a) + d_{max}$.*

Έπειτα αποδεικνύουν μία πιο ασθενή μορφή της Εικασίας 1.2:

Μία τυχαία διαιρετή ροή f^{init} μπορεί να γραφτεί σαν κυρτός συνδυασμός αδιαίρετων ροών f οι οποίες ικανοποιούν τις ίδιες αλλά αμυδρά στρογγυλεμένες απαιτήσεις και $f(a) \leq f^{init}(a) + d_{max}$.

Οι καινούριες απαιτήσεις είναι οι αυθεντικές, αλλά στρογγυλεμένες (προς τα κάτω ή πάνω) κατά ένα παράγοντα του 2 στο κοντινότερο $\frac{d_{max}}{2^l}$, $l \in \mathbb{N}$.

Δείχνουν ότι ένας τέτοιος κυρτός συνδυασμός μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Δίνουν αντίστοιχο αλγόριθμο, χρησιμοποιώντας ιδέες των Κολλιόπουλου και Stein [9] και Skutella [15].

1.2.7 (April 2020) Single Source Unsplittable Flows with Arc-Wise Lower and Upper Bounds (Morell, Skutella) [12]

Οι συγγραφείς αποδεικνύουν το κύριο αποτέλεσμα των Dinitz, Garg και Goemans [4] για την ύπαρξη αδιαίρετης ροής με μία πιο απλή δική τους προσέγγιση, αλλά δεν δίνουν πολυωνυμικό αλγόριθμο. Η απόδειξη είναι λοιπόν μη κατασκευαστική. Παράγουν αντίστοιχα αποτελέσματα για κάτω φράγματα, (κάτι που έχει εφαρμογές για κάτω φράγματα ακμών) και αποδεικνύουν μία πιο χαλαρή μορφή ύπαρξης αδιαίρετης ροής που ικανοποιεί και τα 2 ταυτόχρονα. Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε το Κεφάλαιο 2, όπου αναλύουμε και σχολιάζουμε το paper.

2. ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ ΤΩΝ MORELL ΚΑΙ SKUTELLA [12]

Το παρόν μέρος αφορά το "Single Source Unsplittable Flows with Arc-Wise Lower and Upper Bounds (Morell, Skutella)" [12]. Αφού μελετάμε το paper τους, είναι εύλογο να ακολουθήσουμε τους δικούς τους συμβολισμούς και υποθέσεις, τους οποίους αναφέρουμε.

2.1 Εισαγωγικοί ορισμοί και γεγονότα

Έστω $D = (V, A)$ ένα κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα. Ο αφετηριακός κόμβος θα είναι ο $s \in V$, και υπάρχουν k εμπορεύματα με τερματικές κορυφές $t_1, ..., t_k \in V$ και αντίστοιχες απαιτήσεις $d_1, ..., d_k \in R_{>0}$. Έστω (διαιρετή) ροή x. Ας συμβολίσουμε με $\delta^{in}(v)$ και $\delta^{out}(v)$ το σύνολο των εισερχόμενων και εξερχόμενων ακμών του $v \in V$ αντίστοιχα, και με $\delta^{in}(T)$ και $\delta^{out}(T)$, $T \subseteq V$ το σύνολων των εισερχόμενων και εξερχόμενων του T ακμών αντίστοιχα, δηλαδή (v_1, v_2) με $v_1 \in V \setminus T$, $v_2 \in T$ ή το αντίθετο αντίστοιχα. Έστω $x_a := x(a)$ η ροή μέσα στην ακμή $a \in A$. Έστω $x(B) = \sum_{a \in B} x_a$, όπου $B \subseteq A$.

Σχόλια: Προσέξτε πως δεν έχει γίνει αναφορά σε χωρητικότητες. Οι Morell και Skutella δεν αναθέτουν χωρητικότητες c_a στις ακμές εκτός αν αναφερθεί το αντίθετο, δηλαδή δοσμένης μιας ροής x δεν υπάρχει ένα εξ'ορισμού άνω φράγμα c_a με $x_a \leq c_a$ για κάθε a. Έτσι κάνουν την δημοσίευση τους πιο ευσύνοπτη και απλή. Ασφαλώς, τα θεωρήματα τους δεν αχρηστεύονται αν προστεθούνε χωρητικότητες.

Ακολουθεί θεώρημα γνωστό από την βιβλιογραφία.

Θεώρημα 2.1. *Εάν οι τιμές $d_1, ..., d_k$ είναι όλες ακέραιες, τότε όποια ροή x μπορεί να γραφεί σαν κυρτός συνδυασμός* ***ακέραιων*** *ροών ώστε για κάθε τέτοια ροή y να ισχύει $\lfloor x_a \rfloor \leq y_a \leq \lceil x_a \rceil$ για όλα τα a.*

Παρατηρείστε πως αν x_a δεν είναι ακέραιος (αν είναι, $x_a = y_a$),

$$\lfloor x_a \rfloor \leq y_a \leq \lceil x_a \rceil \iff \lfloor x_a \rfloor \leq y_a \leq \lfloor x_a \rfloor + 1 \iff y_a = \lfloor x_a \rfloor \text{ ή } y_a = \lfloor x_a \rfloor + 1.$$

Σε κάθε περίπτωση, $dis(x_a, y_a) < 1$, όπου $dis(a, b) = |a - b|$ για $a,\ b \in \mathbb{R}$. Μπορεί χάριν συντομίας να γράψουμε και $dis(x, y) < 1$, εννοώντας $dis(x_a, y_a) < 1\ \forall a \in A$.

Έστω d_{max} το $max_i d_i$. Θεωρούμε ένα μονοπάτι υποσύνολο του δοσμένου σύνολου ακμών A ή του δοσμένου σύνολου κορυφών V ανάλογα με τα συμφραζόμενα. Για ένα υποσύνολο κόμβων $X \subseteq V \setminus \{s\}$, έστω

$$d(X) = \sum_{i: t_i \in X} d_i.$$

Υποθέτουμε στην διάρκεια αυτού του paper ότι, χωρίς απώλεια της γενικότητας, κάθε κόμβος v του γραφήματος μας βρίσκεται σε ένα $s - t_i$ μονοπάτι για κάποιο i. Αν δεν βρίσκεται, δεν μπορεί ποτέ να περάσει ροή από μέσα του, κάνοντας τον περιττό στο πλαίσιο των αδιαίρετων ροών.

Για ένα μονοπάτι Q και 2 κόμβους $v, w \in V$ που βρίσκονται στο μονοπάτι Q (με το v να βρίσκεται πρώτα), το $v - w-$υπομονοπάτι του Q υποδηλώνεται με $Q|[v, w]$.

Ακολουθεί τώρα το κύριο αποτέλεσμα των Dinitz, Garg και Goemans [4].

2.2 Ύπαρξη αδιαίρετης ροής που δεν ξεπερνά διαιρετή κατά πάνω από d_{max}

Θεώρημα 2.2. *Για οποιαδήποτε δοσμένη ροή x, υπάρχει αδιαίρετη ροή y τέτοια ώστε*

$$y_a \in [0, x_a + d_{max}] \text{ για όλες τις ακμές } a \in A \text{ στο γράφημα D.}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.2, θα χρειαστεί να εισάγουμε κάποια εργαλεία. Έστω ένα γράφημα με μία δοσμένη, διαιρετή ροή x και μία αυθαίρετη αδιαίρετη ροή y.

Ορισμός 2.1. *Αποκαλούμε έναν κόμβο v του γραφήματος* UBP (Upper Bound Preserving)-reachable *ή* UBP-προσβάσιμο *ή* σε πιο άδειο μονοπάτι (on an emptier path) *αν απ'την οπτική γωνία της αδιαίρετης ροής, κάποιο μονοπάτι $s - v$, ας το πούμε Q, είναι πιο άδειο, δηλαδή $y_a \leq x_a$ για κάθε $a \in Q$. Όποτε αποκαλούμε ένα μονοπάτι πιο άδειο θα εννοούμε ότι της αδιαίρετης ροής y είναι πιο άδειο από της διαιρετής x.*

Σε αυτή την εργασία, θεωρούμε πως ένα μονοπάτι μπορεί να είναι και κενό. Προσέξτε λοιπόν πως το κενό μονοπάτι $s - s$ είναι πιο άδειο, άρα ο s εξ ορισμού είναι σε πιο άδειο μονοπάτι για κάθε αδιαίρετη ροή y.

Υπενθυμίζουμε πως P_i^y είναι το μονοπάτι μέσω του οποίου κυκλοφορεί η ροή του εμπορεύματος i για την ροή y.

Ορισμός 2.2. *Ορίζουμε ένα* UBP augmentation step *ή* UBP rerouting *ως εξής: Δοσμένου ενός κόμβου v που βρίσκεται σε ένα P_i^y για κάποιο i , και βρίσκεται σε ένα πιο άδειο μονοπάτι Q, αναδρομολόγησε τη ροή της i από το s μέχρι το v μέσα από το Q (αντί μέσα από το $s - v$ μονοπάτι $P_i^y|[s, v]$).*

Αυτή η αναδρομολόγηση δημιουργεί μία νέα έγκυρη αδιαίρετη ροή y' (με $P_i^{y'}|[s, v] = Q$), που επίσης διατηρεί την επιθυμητή ιδιότητα $y_a^{'} \in [0, x_a + d_{max}]$ για όλες τις ακμές στο $P_i^{y'}|[s, v] = Q$. Παρεμπιπτόντως,

$$y_a^{'} = \begin{cases} y_a + d_i, & v \in P_i^{y'}|[s, v] \text{ και } v \notin P_i^{y}|[s, v] \\ y_a - d_i, & v \in P_i^{y}|[s, v] \text{ και } v \notin P_i^{y'}|[s, v] \\ y_a, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{2.1}$$

Αν μία αδιαίρετη ροή y' προκύψει από την y μέσα από μία πεπερασμένη ακολουθία από UBP reroutings, γράφουμε $y \xrightarrow{UBP} y'$.

Ορισμός 2.3. *Ορίζουμε έναν κόμβο v να είναι* εν τέλει UBP-reachable έχοντας υπόψη την y (eventually UBP-reachable with regards to y) *ή* σε εν τέλει πιο άδειο μονοπάτι έχοντας υπόψη την y (on an eventually emptier path with regards to y) *αν υπάρχει αδιαίρετη ροή y' τέτοια ώστε $y \xrightarrow{UBP} y'$ και ο v είναι σε πιο άδειο μονοπάτι στην y'.*

Απόδειξη Θεωρήματος 2.2. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2.2.1.

Λήμμα 2.2.1. *Για όποια αδιαίρετη ροή y, όλοι οι κόμβοι μέσα στο V είναι σε εν τέλει πιο άδειο μονοπάτι έχοντας υπόψη την y.*

Υποθέτοντας πως το Λήμμα 2.2.1 είναι αληθές, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.2. Αρχίζοντας από μία αυθαίρετη αδιαίρετη ροή, κάνε τα κατάλληλα UBP-reroutes τέτοια ώστε ο t_1 να βρίσκεται σε ένα πιο άδειο μονοπάτι Q, μετά UBP-αναδρομολόγησε την ροή του 1ου εμπορεύματος μέσα από το Q. Όλες οι ακμές του P_1 ικανοποιούν τους περιορισμούς τώρα για αυτήν την καινούρια ροή. Προσέξτε πως όποιο UBP-rerouting και να ακολουθήσει, το εμπόρευμα 1 θα παραμείνει ορθά δρομολογημένο.

Τώρα που το εμπόρευμα 1 είναι ορθά δρομολογημένο, επανάλαβε αυτή την διαδικασία για το εμπόρευμα 2, και ούτω καθεξής μέχρις ότου όλα τα εμπορεύματα να είναι ταυτοχρόνως ορθά δρομολογημένα, με αποτέλεσμα μία ορθή αδιαίρετη ροή. $\square$

Απόδειξη Λήμματος 2.2.1: Αν για οποιαδήποτε αδιαίρετη ροή y το σύνολο των κόμβων σε εν τέλει πιο άδειο μονοπάτι X_y είναι = V, έχουμε τελειώσει. Υποθέτουμε ότι δεν συμβαίνει αυτό. UBP-αναδρομολογήσεις από το y και ύστερα μπορούν μόνο να μικρύνουν το σύνολο των κόμβων σε εν τέλει πιο άδειο μονοπάτι. Επιλέγουμε λοιπόν y τέτοιο ώστε αυτό το σύνολο να είναι εγκλειστικά ελαχιστικό (δηλαδή, αυτό το X_y δεν είναι υπερσύνολο κανενός άλλου X_y για κάποια άλλη ροή y). Τότε, για κάθε y' με $y \xrightarrow{\text{UBP}} y'$, $X_y = X_{y'} =: X$. Εξάγουμε 3 ιδιότητες:

- (P1): $y_a > x_a$ για όλες τις ακμές a που εξέρχονται του X.

  Έστω ακμή $a = (v, w)$ που εξέρχεται απ'το X και $y_a \leq x_a$. Για κάποια UBP-reroutes, καταλήγουμε με ένα πιο άδειο μονοπάτι $s - v$, το οποίο βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στο X. Ας ονομάσουμε την καινούρια ροή y'.

  Με UBP-reroutes, μπορεί να αυξηθεί η ροή μόνο πιο άδειων μονοπατιών $s - v'$, όπου v' κάποιος κόμβος σε πιο άδειο μονοπάτι. Ολόκληρο το $s - v'$ θα ανήκει στο X, οπότε δεν μπορεί να αυξηθεί η ροή της a.

  Έπεται ότι μετά από αυτά τα UBP-reroutes, το y'_a θα είναι y_a ή λιγότερο.

  Οπότε βάζοντας στο $s - v$ την a, το παραγόμενο μονοπάτι που συμβολίζουμε $s - v - (v, w)$ είναι πιο άδειο έχοντας υπόψη την y', και ο w είναι σε πιο άδειο μονοπάτι. Αυτό σημαίνει ότι ανήκει στο X, άτοπο.

- (P2): Η ροή που εισέρχεται στο X είναι $\neq 0$.

  $\delta^{out}(X) \neq \{\}$, γιατί έχουμε επιλέξει εξαρχής γράφημα D τέτοιο ώστε η s να μπορεί να έχει μονοπάτι προς οποιονδήποτε κόμβο.

  Λόγω της (P1), η y βγάζει εκτός του X περισσότερη ροή από την x, δηλαδή $y(\delta^{out}(X))$ $> x(\delta^{out}(X))$ (≥ 0).

  Για να είναι οι ροές νόμιμες, πρέπει $d(V - X)$ (που είναι σταθερά) = $x(\delta^{out}(X)) - x(\delta^{in}(X))$ και $d(V - X)$ = $y(\delta^{out}(X)) - y(\delta^{in}(X))$. Άρα αναγκαστικά $y(\delta^{in}(X)) > x(\delta^{in}(X))$, άρα $y(\delta^{in}(X)) \neq 0$.

- (P3): $y'(\delta^{in}(X)) \leq y(\delta^{in}(X))$ όπου $y \xrightarrow{\text{UBP}} y'$.

  Αφού μόνο οι κόμβοι στο X είναι σε εν τέλει πιο άδειο μονοπάτι, τα path Q στα οποία γίνεται UBP-rerouting βρίσκονται εξολοκλήρου μέσα στο X. Άρα μόνο η ροή μέσα στις ακμές του X αυξάνεται, και η υπόλοιπη μπορεί μόνο να μειώνεται (ή να μένει ίδια).

Έχοντας λοιπόν το (P3) υπόψη, παίρνουμε y με $y(\delta^{in}(X))$ ελαχιστικό, και έστω $a = (w, v)$ με $w \notin X$, $v \in X$ και ροή > 0. Αφού η a έχει ροή, ανήκει σε κάποιο μονοπάτι P_i. Το v είναι σε εν τέλει πιο άδειο μονοπάτι, οπότε παίρνοντας την κατάλληλη ακολουθία από UBP-reroutes, είναι σε ένα πιο άδειο μονοπάτι Q, με το Q να είναι εξολοκλήρου στο X.

Εντωμεταξύ, η ροή της a μένει σταθερή. Κάνοντας UBP-reroute τη ροή της i στο $P_i|[s,v]$ μέσα από το Q, μειώνεται η ροή που εισέρχεται στο X από το a, που είναι άτοπο. Η μόνη υπόθεση που κάναμε ήταν ότι το $X \neq V$, οπότε λόγω ατόπου $X = V$. $\square$

2.3 Ύπαρξη αδιαίρετης ροής που δεν υπολείπεται διαιρετής πάνω από d_{max}

Θεώρημα 2.3. *Δεδομένης μίας ροής x, υπάρχει μία αδιαίρετη ροή y ώστε*

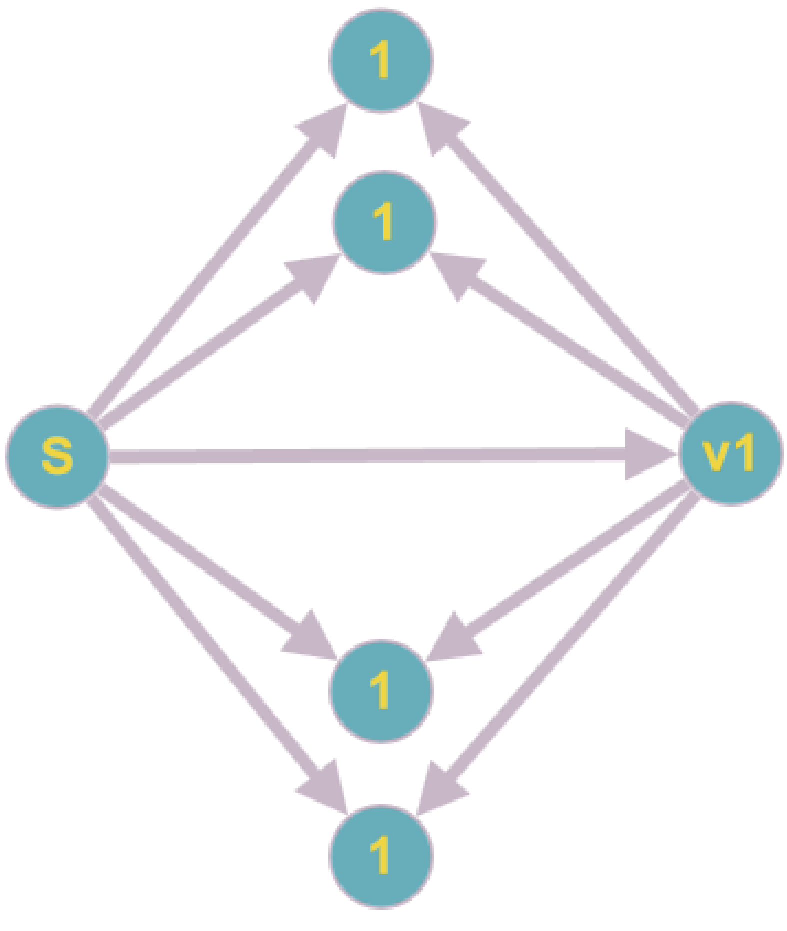
$$y_a \in [x_a - d_{max}, +\infty] \text{ για όλες τις ακμές.}$$

Συντομογραφικά, γράφουμε $y \in [x - d_{max}, +\infty]$.

Σχόλια: Το επάνω Θεώρημα μοιάζει να μην έχει άμεση εφαρμογή έχοντας υπόψη τις δημοσιεύσεις που είδαμε και τα 3 προβλήματα βελτιστοποίησης. Στην περίπτωση ροών για τις οποίες οι ροές στις ακμές πρέπει να είναι όχι μικρότερες, αλλά μεγαλύτερες των χωρητικοτήτων, η προσπάθεια εύρεσης μιας τέτοιας ροής y είναι λογική.

Το κάτω φράγμα είναι αυστηρό ως εξής:

$$\text{Όσο μικρή θετική σταθερά ε και να πάρω, για κάποια } G,\ x, \text{ δεν θα } \exists y \in [x - d_{max} + \epsilon, +\infty]. \tag{2.2}$$



Σχήμα 2.1: Εικόνα του paper των Morell και Skutella [12]. Το γράφημα G. Οι s και v_1 είναι οι μόνοι μη-τερματικοί κόμβοι. Οι απαιτήσεις είναι όλες 1. Στους γείτονες του s η x δίνει ροή $\frac{k}{k+1}$, όπου k ακέραιος, ενώ στις υπόλοιπες $\frac{1}{k+1}$. Τα εμπορεύματα είναι k το πλήθος (το G εικονίζεται για $k=4$).

Αυτό φαίνεται από το σχήμα 2.1. Όταν οι απαιτήσεις είναι όλες 1, η (2.2) γίνεται:

$$\text{Όσο μικρή θετική σταθερά ε και να πάρω, για κάποια } G,\ x, \text{ δεν θα } \exists y \in [x - 1 + \epsilon, +\infty]. \tag{2.3}$$

Οι s και v_1 είναι οι μόνοι μη-τερματικοί κόμβοι. Στους γείτονες του s το x δίνει ροή $\frac{k}{k+1}$, όπου k ακέραιος, ενώ στις υπόλοιπες $\frac{1}{k+1}$. Επίσης τα εμπορεύματα είναι k το πλήθος.

Προφανώς μία αδιαίρετη ροή μπορεί να αναθέσει ροή σε μία από τις δύο ακμές που προσπίπτουν ενός τερματικού κόμβου. Φαίνεται ότι καθώς το k γίνεται μεγάλο, τείνω να μπορώ όλο και λιγότερο να αυστηροποιήσω το φράγμα $x_a - 1$ προς τα δεξιά.

Εισαγάγουμε πάλι κάποιες έννοιες, αντίστοιχες του προηγούμενου κεφαλαίου. Έστω ένα γράφημα με μία δοσμένη, διαιρετή ροή x και μία αυθαίρετη αδιαίρετη ροή y.

Ορισμός 2.4. *Αποκαλούμε έναν κόμβο v του γραφήματος* LBP (Lower Bound Preserving)-reachable *αν το μονοπάτι $P_i^y|[s, v]$, είναι fuller για κάποιο i. Δηλάδη, ο v βρίσκεται σε μονοπάτι P_i^y για κάποιο i, και $y_a \geq x_a$ για όλα τα $a \in P_i^y|[s, v]$.*

Προσέξτε πως εξ ορισμού ο s είναι LBP-reachable για κάθε αδιαίρετη ροή y.

Για να τονίσουμε τον ρόλο του αγαθού i, λέμε ότι ο κόμβος v είναι *LBP-reachable για το αγαθό i έχοντας υπόψη το y* (LBP-reachable for commodity i with regard to y).

Ορισμός 2.5. *Ορίζουμε ένα* LBP augmentation step *ή* LBP rerouting *ως εξής: Δεδομένου ενός κόμβου που είναι LBP-reachable για το αγαθό i έχοντας υπόψη το y, ανακατεύθυνε την ροή του αγαθού i από το $P_i^y|[s, v]$ σε ένα οποιοδήποτε $s - v$ μονοπάτι Q.*

Έτσι προκύπτει μία καινούρια ροή y' που αυξάνει την ροή εκτός του $P_i^y|[s, v]$ διατηρώντας την επιθυμητή ιδιότητα $y_a \in [x_a - d_{max}, +\infty]$ για $a \in P_i^y|[s, v]$.

Έστω αδιαίρετη ροή y. Αν μία ροή y' προκύψει από την y μετά από μία ακολουθία LBP-reroutes, γράφουμε ότι $y \xrightarrow{\text{LBP}} y'$.

Ορισμός 2.6. *Αν ο v μπορεί να γίνει LBP-reachable μετά από μία ακολουθία LBP-reroutes (δηλαδή για κάποιο y' όπου $y \xrightarrow{LBP} y'$), τον αποκαλούμε* eventually LBP-reachable, έχοντας υπόψη το y.

Ακολουθεί μία σειρά ισχυρισμών, μέσω των οποίων αποδεικνύεται το Θεώρημα 2.3. Για να αποδειχθεί το Θεώρημα 2.3 χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2.3.1:

Λήμμα 2.3.1. *Για κάθε αδιαίρετη ροή y, όλοι οι κόμβοι του V είναι εν τέλει LBP-reachable για κάποιο αγαθό έχοντας υπόψη την y.*

Αποδεικνύεται έπειτα. Υποθέτοντας ότι το Λήμμα 2.3.1 είναι αληθές, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το Λήμμα 2.3.2, και έπειτα το Θεώρημα 2.3:

Λήμμα 2.3.2. *Για οποιαδήποτε αδιαίρετη ροή y και ακμή a, υπάρχει μία αδιαίρετη ροή y' με $y \xrightarrow{LBP} y'$ τέτοια ώστε η a να είναι fuller (δηλαδή $y_a^{'} \geq x_a$).*

Απόδειξη Λήμματος 2.3.2: Έστω λοιπόν τυχαία ακμή $a = (v, w)$, με $y_a < x_a$. Όσο η a είναι αυστηρά πιο άδεια, LBP-reroutes δεν μπορούν να μειώσουν την ροή της. Από το Λήμμα 2.3.1, ο κόμβος w είναι πάντα eventually LBP-reachable για κάποιο αγαθό i. Άρα κάνω LBP-reroutings μέχρι w LBP-reachable, μετά κάνω LBP-reroute την ροή του i από το $P_i^y|[s,w]$ σε ένα οποιοδήποτε $s-w$ μονοπάτι Q με $(v,w)\in Q$, αυξάνοντας την ροή της ακμής a (προσέξτε πως $(v,w)\notin P_i^y|[s,w]$ καθώς είναι αυστηρά πιο άδεια) και παίρνοντας την ροή y'. Αν $y'_a < x_a$ επαναλαμβάνω τα ίδια. Από το Λήμμα 2.3.1, ο κόμβος w είναι πάντα eventually LBP-reachable για κάποιο αγαθό i'. Άρα (αν χρειάζεται) κάνω LBP-reroutings μέχρι w LBP-reachable, μετά κάνω LBP-reroute την ροή του i' από το $P_{i'}^{y'}|[s,w]$ σε ένα οποιοδήποτε $s-w$ μονοπάτι Q με $(v,w)\in Q$, αυξάνοντας την ροή της. Αυτά συνεχώς μέχρι η $(v,w)=a$ να είναι fuller. □

Απόδειξη Θεωρήματος 2.3: Έστω μία οποιαδήποτε αδιαίρετη ροή y. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Λήμματος 2.3.2, αυξάνω την ροή οποιασδήποτε ακμής με ροή κάτω από $x_a - d_{max}$. Εφόσον η ακμή φτάσει ροή $\geq x_a$, δεν θα βρεθεί κάτω από $x_a - d_{max}$, αφού LBP-reroutes μειώνουν την ροή μόνο ακμών με ροή $\geq x_a$. Πράττοντας αυτό για κάθε ακμή, καταλήγω με μία αδιαίρετη ροή y' που ικανοποιεί τους απαιτούμενους περιορισμούς. □

Για την ακρίβεια, εφόσον η ακμή φτάσει ροή $\geq x_a$, δεν θα βρεθεί κάτω από $x_a - \max_i d_i$, όπου το maximum επιλέγεται ανάμεσα σε όλα τα i για τα οποία η ακμή a βρίσκεται πάνω σε κάποιο $s-t_i$ μονοπάτι (διαισθητικά, ανάμεσα σε όλα τα i που μπορούν να χρησιμοποιήσουν την a) ή πιο τεχνικά

$$y_a \in [x_a - \max_{i:\ \exists\ path\ (s,t_i)\ni a} d_i, +\infty].$$

Προκειμένου να αποδειχθεί το Λήμμα 2.3.1 χρησιμοποιούμε τον ισχυρισμό 1.

Ισχυρισμός 1: Έστω y μία αδιαίρετη ροή και v κόμβος πάνω σε ένα P_i^y για κάποιο i. Αν ο κόμβος v είναι eventually LBP-reachable (όχι απαραιτήτως για το αγαθό i) για κάθε y' όπου $y \xrightarrow{\text{LBP}} y'$, τότε ο κόμβος v είναι eventually LBP-reachable για το αγαθό i έχοντας υπόψη την y.

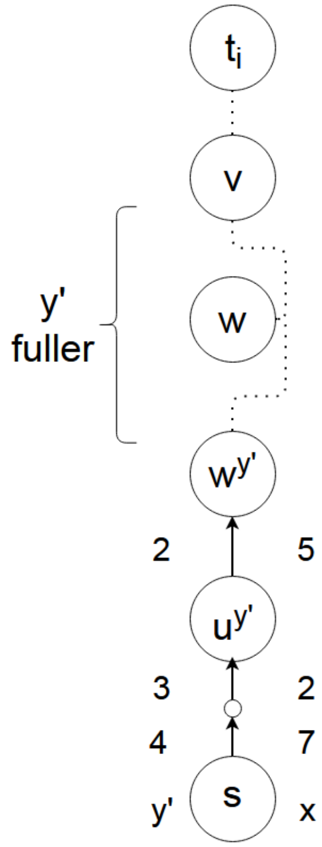
Σχόλιο: Μόνο χαρακτηριστικό του i εδώ είναι ότι το μονοπάτι του ακουμπάει το v.

Δοσμένης αδιαίρετης ροής y, προσέξτε πως αν ένας κόμβος v είναι LBP-reachable έχοντας υπόψη την y για το εμπόρευμα i, κάθε κόμβος $\in P_i^y|[s,v]$ είναι LBP-reachable για το i.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1. Έστω προς άτοπο ότι ο κόμβος v είναι eventually LBP-reachable (όχι απαραιτήτως για το αγαθό i) για κάθε y' όπου $y \xrightarrow{\text{LBP}} y'$, και ο κόμβος v δεν είναι eventually LBP-reachable για το αγαθό i έχοντας υπόψη την y.

Όταν αναφερόμαστε σε μία ακολουθία LBP-reroutings, μπορεί να εννοούμε και την κενή.

Όποια ακολουθία LBP-reroutings και να ακολουθήσει, οδηγώντας στη ροή y', το P_i^y μένει απαράλλακτο από το v και μετά (δηλαδή $P_i^y|[v,t_i] = P_i^{y'}|[v,t_i]$), γιατί το να αλλάξει ένα LBP-reroute το $P_i^y|[v,t_i]$ θα σήμαινε ότι ένα κόμβος στο $P_i^y|[v,t_i]$ είναι LBP-reachable για το εμπόρευμα i, κάνοντας τον v LBP-reachable για το i. Επίσης κάθε y' όπου $y \xrightarrow{\text{LBP}} y'$ έχει τουλάχιστον μία αυστηρά πιο άδεια ακμή στο $P_i^{y'}|[s,v]$. Έστω ότι για κάθε y', η $a^{y'} = (u^{y'}, w^{y'})$ είναι η κοντινότερη αυτών στο v. Προσέξτε ότι το $P_i^{y'}|[w^{y'},v]$ είναι fuller.



Σχήμα 2.2: Βοηθητικό περίγραμμα του μονοπατιού $P_i^{y'}$ του ισχυρισμού 1. Ακμές αναπαριστώνται με βέλος, ενώ μονοπάτια με διακοπτόμενη γραμμή. Στα αριστερά τιμές της ροής y'. Στα δεξιά της x. Το $P_i^{y'}|[w^{y'}, v]$ είναι fuller. Το w μπορεί να είναι ένας οποιοδήποτε κόμβος του $P_i^{y'}|[w^{y'}, v]$, συμπεριλαμβανομένων των $w^{y'}$ και v.

Επιλέγουμε αρχική αδιαίρετη ροή y τ.ώ τα επόμενα 2 κριτήρια να ικανοποιούνται στην δοσμένη σειρά: N^y : = αριθμός ακμών στο $P_i^y|[w^y, v]$ να είναι μέγιστο και y_{a^y} να είναι μέγιστο.

Γνωρίζουμε πως ο v είναι eventually LBP-reachable. Κατ'επέκταση, υπάρχει ένα κόμβος στο $P_i^y|[w^y, v]$ που να είναι eventually LBP-reachable. Έστω τώρα μία ακολουθία από LBP-reroutings, που παράγει τις ροές $y_0, y_1, ..., y_q$ $(y_0 = y)$, τέτοιες ώστε η y_q και μόνο η y_q να έχει ένα LBP-reachable κόμβο για κάποιο αγαθό στο $P_i^{\mathbf{y}}|[w^{\mathbf{y}}, v]$, ας τον ονομάσουμε w (μην το συγχύσετε με το w^y). Αφού πριν από κανένα rerouting δεν ήταν κόμβος του $P_i^y|[w^y, v]$ reachable και λόγω του μεγίστου των N^y και y_{a^y}, το $P_i^y|[u^y, v]$ δεν άλλαξε, (δηλαδή $P_i^y|[u^y, v] = P_i^{y_j}|[u^{y_j}, v]$ για $j \leq q$) και η ροή των ακμών του $P_i^y|[u^y, v]$ δεν μειώθηκε.

Καθώς το w είναι LBP-reachable για κάποιο αγαθό, κάνουμε LBP-reroute, στέλνοντας την αντίστοιχη ροή μέσα από το $P_i^y|[s, w]$.

Αυτό αυξάνει την ροή του a^y, παραβιάζοντας την μεγιστικότητα του y μας. □

Απόδειξη Λήμματος 2.3.1: Αν για οποιαδήποτε τυχαία αδιαίρετη ροή y το σύνολο eventually LBP-reachable κόμβων X_y είναι $= V$, τελειώσαμε. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει. LBP reroutes από το y και μετά μπορούν μόνο να μικρύνουν το X_y, δηλαδή, $X_{y'} \subseteq X_y$ για y' με $y \xrightarrow{\text{LBP}} y'$ (καθώς για y' με $y \xrightarrow{\text{LBP}} y'$, αν $v \in X_{y'}$, $v \in X_y$ εξ'ορισμού). Άρα επιλέγουμε y τέτοιο ώστε αυτό το σύνολο να είναι εγκλειστικά ελαχιστικό (δηλαδή, αυτό το X_y δεν είναι υπερσύνολο κανενός άλλου X_y μίας άλλης ροής y). Τότε, για κάθε $y \xrightarrow{\text{LBP}} y'$, $X_y = X_{y'} =: X$.

Εξάγουμε 3 ιδιότητες:

- (P1') $y(\delta^{out}(X)) \leq y'(\delta^{out}(X))$ όπου $y \xrightarrow{\text{LBP}} y'$.

  Ένα LBP-reroute μειώνει μόνο την ροή ενός fuller μονοπατιού $P_i^y|[s,v]$ για κάποιο i του οποίου η ροή αναδρομολογείται. Το $P_i^y|[s,v]$ είναι εξολοκλήρου μέσα στο X, και άρα η ροή που βγαίνει από το X δεν μπορεί να μειωθεί.

  Για την ακρίβεια, $y_a \leq y'_a$ για κάθε ακμή $a \in \delta^{out}(X)$ όπου $y \xrightarrow{\text{LBP}} y'$.

  Έστω λοιπόν για τις επόμενες ιδιότητες y με την εξερχόμενη του X ροή $y(\delta^{out}(X))$ μεγιστική.

- (P2') $\delta^{in}(X) = \{\}$. Καμία ακμή δεν εισέρχεται στο X.

  Έστω (w, v) μία εισερχόμενη ακμή του X. Αφού το v είναι eventually LBP-reachable, υπάρχει ακολουθία LBP-reroutes ώστε το v να γίνει LBP-reachable. Κάνοντας LBP-reroute τη ροή κάποιου αγαθού που χρησιμοποιεί τον v μέσα από μονοπάτι που περιέχει την (w, v), αυξάνουμε αναγκαστικά και την ροή κάποιας εξερχόμενης του X ακμής (που δεν μπορεί να μειωθεί λόγω του (P1')), άτοπο.

- (P3') Υπάρχει ακμή εξερχόμενη του X με $y_a \geq x_a$ και $y_a \neq 0$. Ισοδύναμα, $y_a \in [x_a, +\infty] - \{0\}$.

  Αφού $\delta^{in}(X) = \{\}$, η ροή που εξέρχεται του X είναι ίση με $d(V \setminus X)$ για οποιαδήποτε ροή. Έχουμε πει ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας το γράφημα έχει κάθε κόμβο του πάνω σε ένα $s - t_i$ μονοπάτι, οπότε αφού $\delta^{in}(X) = \{\}$ υπάρχει τερματικός κόμβος στο $V \setminus X$, άρα $y(\delta^{out}(X)) = x(\delta^{out}(X)) = d(V \setminus X) > 0$. Αναγκαστικά $y_a \geq x_a$ για κάποια ακμή με θετική ροή (για το y) εξερχόμενη του X, γιατί αν $y_a < x_a$ για καθεμία, θα ήταν

  $$\sum_{a \in \delta^{out}(X)} y_a < \sum_{a \in \delta^{out}(X)} x_a \Rightarrow y(\delta^{out}(X)) < x(\delta^{out}(X))$$

  , άτοπο. Αποδείξαμε την ιδιότητα (P3').

Έστω λοιπόν ακμή $a = (v, w)$ εξερχόμενη του X, όπως στην (P3'), $y_a \geq x_a$. Αφού έχει μη μηδενική ροή, είναι πάνω σε κάποιο P_i, και αφού δεν υπάρχουν εισερχόμενες στο X ακμές, ο τερματικός κόμβος βρίσκεται στο $V \setminus X$. Λόγω του ισχυρισμού 1, ο v είναι eventually LBP-reachable για το αγαθό i. Εκτελώντας τα κατάλληλα LBP-reroutings που οδηγούν στην ροή y', κάνω τον v LBP-reachable για το αγαθό i. Αφού δεν υπάρχουν εισερχόμενες στο X ακμές, LBP-reroutings δεν θα αλλάξουν το $P_i|[v, t_i]$ ή την ροή του. Άρα ο w είναι eventually LBP-reachable έχοντας υπόψη το y' και eventually LBP-reachable έχοντας υπόψη το y, άτοπο. $\square$

2.4 Αδιαίρετες ροές για κάτω φράγματα ροής ακμών

Πόρισμα 1. *Έστω διαιρετή ροή x, και $c \geq 1$ σταθερά τέτοια ώστε $cx_a \geq \max_i d_i$ για κάθε $a \in A$, όπου το maximum επιλέγεται ανάμεσα σε όλα τα i για τα οποία η ακμή a βρίσκεται πάνω σε κάποιο $s - t_i$ μονοπάτι (διαισθητικά, ανάμεσα σε όλα τα i που μπορούν να χρησιμοποιήσουν την a) ή πιο τεχνικά*

$$cx_a \geq \max_{i:\ \exists\ path\ (s,t_i) \ni a} d_i.$$

Τότε, αρκούν $\lceil 1+c \rceil$ αντίγραφα από καθένα εκ των τερμάτων για να βρεθεί αδιαίρετη ροή y αυτών των αντιγράφων τέτοια ώστε $y \geq x$ (δηλαδή $y_a \geq x_a$ για όλα τα a).

Αντίγραφο σε ένα αγαθό, είναι ένα επιπλέον αγαθό με την ίδια απαίτηση και τον ίδιο τερματικό κόμβο.

Σχόλια: Στην περίπτωση όπου οι χωρητικότητες είναι κάτω φράγματα της ροής, οπότε και η ροή x_a σε κάθε ακμή είναι τουλάχιστον όση η χωρητικότητα, ένα λογικό ερώτημα είναι πόσα αντίγραφα χρειαζόμαστε ώστε η αδιαίρετη ροή y να είναι μεγαλύτερη ή ίση της x σε κάθε ακμή, οπότε και η y ικανοποιεί τις χωρητικότητες.

Η μόνη διαφορά της αντιγραφής ενός αγαθού απ'τον διπλασιασμό της απαίτησης του, είναι ότι μας επιτρέπει να έχουμε περισσότερες αδιαίρετες ροές. Είναι μία είδους χαλάρωση στο πρόβλημα της αδιαίρετης ροής, καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μέχρι και k μονοπάτια, όπου k ο αριθμός των αντιγράφων, αντί 1.

Ο αριθμός των αντιγράφων πρέπει να είναι ακέραιος, εξού και το άνω ακέραιο μέρος.

Οι συγγραφείς θα μπορούσαν να πάρουν d_{max} στο Θεώρημα αλλά το $\max_i d_i$ προτιμάται, ίσως επειδή τους επιτρέπει να μειώσουν την σταθερά c.

Απόδειξη: Έστω $\lceil 1+c \rceil$ αντίγραφα κάθε αγαθού και $\widetilde{x} := \lceil 1+c \rceil\, x$ ροή που τα ικανοποιεί. Από το Θεώρημα 2.3, υπάρχει αδιαίρετη ροή y που τα ικανοποιεί με $y_a \in [\widetilde{x_a} - \max_i d_i, +\infty]$ πού το maximum επιλέγεται ανάμεσα σε όλα τα i που μπορούν να χρησιμοποιήσουν την a. Συνδυάζοντάς το παραπάνω με το $cx_a \geq \max_i d_i$ (εξ'υποθέσεως), έχουμε πως

$$y \geq \widetilde{x} - cx = \lceil 1+c \rceil\, x - cx \geq (1+c)x - cx = x.$$

□

2.5 Ροή που ούτε υπολείπεται ούτε ξεπερνά διαιρετή

2.5.1 Απόδειξη για ειδική περίπτωση

Θεώρημα 2.4. *Εάν για μη-φθίνουσα διάταξη των απαιτήσεων κάθε απαίτηση είναι πολλαπλάσιο της επόμενης, δηλαδή $d_1|d_2|...|d_k$ (τα αγαθά είναι k), τότε για οποιαδήποτε ροή x υπάρχει αδιαίρετη ροή y τέτοια ώστε*

$$x_a - d_{max} \leq y_a \leq x_a + d_{max} \text{ για όλες τις ακμές} \tag{2.4}$$

ή

$$y_a \in [x_a - d_{max}, x_a + d_{max}] \text{ για όλες τις ακμές}$$

ή

$$dis(x_a, y_a) \leq d_{max} \text{ για όλες τις ακμές.}$$

Ειδικότερα, κάθε ροή x μπορεί να γραφτεί σαν κυρτός συνδυασμός αδιαίρετων ροών y, με

$$x_a - d_{max} \leq y_a \leq x_a + d_{max} \text{ για καθεμία.}$$

Ορισμός 2.7. *Γράφοντας $a|b$, οπού $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, εννοούμε πως το b είναι πολλαπλάσιο του a, άρα $b = k \cdot a$, $k \in \mathbb{Z}$. Λέμε ότι το b είναι a-integral, αφού είναι $= a\cdot$ ακέραιο.*

Απόδειξη Θεωρήματος 2.4. Έστω d_{min} ή $\widetilde{d_1}$, η ελάχιστη απαίτηση, $\widetilde{d_2}$, η δεύτερη μικρότερη απαίτηση και ούτω καθεξής. Επίσης $x^1 := x$.

Όλες οι απαιτήσεις είναι d_{min}-integral.

Διαιρώντας τις απαιτήσεις και τις ροές στις ακμές του γραφήματος κατά d_{min}, μετασχηματίζουμε την ροή μας $x = x^1$ ώστε όλες οι απαιτήσεις να είναι ακέραιες, παίρνοντας την $x^{'1}$. Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.1. Η μετασχηματισμένη ροή $x^{'1}$ μπορεί να γραφτεί σαν κυρτός συνδυασμός ακέραιων διαιρετών ροών $y^{'1}$ με $dis(x^{'1}, y^{'1}) < 1$. Πολλαπλασιάζοντας τις ροές με d_{min}, επαναφέρουμε την ροή $x = x^1$ που γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός d_{min}-ακέραιων διαιρετών ροών y^1 όπου $dis(x^1, y^1)$ < d_{min}.

Προσέξτε ότι μία d_{min}-ακέραια ροή μπορεί να ερμηνευθεί έτσι ώστε τα αγαθά i με $d_i = d_{min}$ να δρομολογούνται αδιαίρετα, ερμηνεύοντας απλώς ένα μονοπάτι με ροή $s - t_i$ ως το μονοπάτι P_i. Θεωρώντας αυτά τα αγαθότα ικανοποιημένα, τα διαγράφουμε και μειώνουμε την ροή του P_i κατά d_{min}.

Προς ευκολότερη επεξήγηση, εφαρμόζουμε αυτήν την παρατήρηση σε ένα από τα y^1 (αντί όλων), και πλέον έχουμε ένα $\widetilde{d_1}$-ακέραιο flow, με $\widetilde{d_2}$-ακέραιες απαιτήσεις, το οποίο ονομάζουμε x^2_a. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε πάλι το Θεώρημα 2.1. Υπάρχουν y^2_a ώστε να έχουμε $dis(x^2_a, y^2_a) < \widetilde{d_2}$ για κάθε $a \in A$. Αλλά x^2_a, y^2_a είναι $\widetilde{d_1}$-integral και $\widetilde{d_2}$-integral αντίστοιχα. Άρα $dis(x^2_a, y^2_a) < \widetilde{d_2}$ γράφεται σαν $dis(k_a\widetilde{d_1}, l_a\widetilde{d_2}) < \widetilde{d_2}$, για κάποια συγκεκριμένα k_a, $l_a \in \mathbb{N}$. Αφού $\widetilde{d_1}|\widetilde{d_2}$, προκύπτει ότι αν είναι $dis(k_a\widetilde{d_1}, l_a\widetilde{d_2}) < \widetilde{d_2}$, πρέπει να ισχύει και το πιο στενό $dis(k_a\widetilde{d_1}, l_a\widetilde{d_2}) \le \widetilde{d_2} - \widetilde{d_1}$.

Άρα $dis(x^2, y^2) \le \widetilde{d_2} - \widetilde{d_1}$. Επίσης $dis(x^1, y^1)$ < $\widetilde{d_1}$.

Αν προσθέταμε στην ροή x^2 και y^2 τις διαγραμμένες ροές (στις ίδιες ακμές όπου ήτανε) και αγαθά με τιμές $\widetilde{d_1}$, θα βλέπαμε ότι η y^2 απέχει απ'την αρχική x το πολύ $\widetilde{d_2} - \widetilde{d_1} + \widetilde{d_1} = \widetilde{d_2}$, και όλες τις y^2 να παραμένουν κυρτός συνδυασμός της x^2.

Τώρα αφαιρώ όπως και πριν από την y^2 τα αγαθά με τιμή $\widetilde{d_2}$, ερμηνεύοντας την ροή τους δρομολογημένη αδιαίρετα, δημιουργώντας την x^3, και εφαρμόζω το Θεώρημα 2.1. Ακολουθούν τα ίδια επιχειρήματα. Εφαρμόζοντας το αυτό επαναληπτικά για τα $\widetilde{d_2}, \widetilde{d_3}, ...$, καταλήγω πως η αρχική μου ροή x είναι κυρτός συνδυασμός αδιαίρετων ροών y που απέχουν απ'την x το πολύ d_{max}. □

Προσέξτε το εξής. Έστω για κάποια ακμή a, d_{i_a} η απαίτηση του αγαθού i_a που στην αδιαίρετη ροή y περνάει την πιο πολύ ροή μέσα από την a. Θα υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d_{i_a} = \widetilde{d_i}$. Ας κοιτάξουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4 στο τέλος της i επανάληψης, οπού διαγράφουμε τα αγαθά με απαίτηση $\widetilde{d_i}$ από την y^i, παίρνοντας την ροή x^{i+1}. Αν προσθέταμε στην ροή x^i και y^i τις διαγραμμένες ροές (στις ίδιες ακμές όπου ήτανε) και αγαθά με τιμές $\widetilde{d_1}, ..., \widetilde{d_{i-1}}$, θα βλέπαμε ότι η y^i απέχει από την αρχική x το πολύ $\widetilde{d_i}$. Προσέξτε ότι εξ'ορισμού της x^{i+1}, το να προσθέσουμε στην y^i τις διαγραμμένες ροές (στις ίδιες ακμές όπου ήτανε) και αγαθά με τιμές $\widetilde{d_1}, ..., \widetilde{d_{i-1}}$ και το να προσθέσουμε στην x^{i+1} τις διαγραμμένες ροές (στις ίδιες ακμές όπου ήτανε) και αγαθά με τιμές $\widetilde{d_1}, ..., \widetilde{d_{i-1}}, \widetilde{d_i}$ παράγει την ίδια ροή. Οπότε αν προσθέταμε στην x^{i+1} τις διαγραμμένες ροές (στις ίδιες ακμές όπου ήτανε) και αγαθά με τιμές $\widetilde{d_1}, ..., \widetilde{d_{i-1}}, \widetilde{d_i}$, θα βλέπαμε ότι η x^{i+1} απέχει από την αρχική x το πολύ $\widetilde{d_i}$. Για την ακμή a ειδικά, αυτές οι διαγραμμένες ροές είναι αυτές ακριβώς που περνάνε μέσα από την a στην y. Άρα, $dis(x^{i+1}_a + y_a, x) \le \widetilde{d_i} \iff x - \widetilde{d_i} \le x^{i+1}_a + y_a \le x + \widetilde{d_i}$. Άρα, $y_a \le x + \widetilde{d_i} - x^{i+1}_a \le x + \widetilde{d_i}$.

Οπότε ισχύει το πιο ισχυρό $y_a \le x + d_{i_a}$ για το άνω φράγμα της (2.4).

2.5.2 Απόδειξη ασθενέστερης πρότασης για γενική περίπτωση

Θεώρημα 2.5. *Για οποιαδήποτε αυθαίρετη ροή x, υπάρχει μία αδιαίρετη ροή y τέτοια ώστε*

$$\frac{x_a}{2} - d_{max} \leq y_a \leq 2x_a + d_{max} \text{ για όλες τις ακμές.} \tag{2.5}$$

Η ροή y δίνεται απ'τον Αλγόριθμο 1, που ακολουθεί.

Algorithm 1

Είσοδος: Ροή x^0 του γραφήματος D που ικανοποιεί απαιτήσεις $d_1, ..., d_k$.
Έξοδος: Αδιαίρετη ροή y δοσμένη από ένα $s - t_i$-μονοπάτι για $i = 1, ..., k$.

Για $i = 1, ..., k$, θέσε $\overline{d_i} \leftarrow d_{min} \cdot 2^{\lfloor \log(d_i/d_{min}) \rfloor}$.
Υπολόγισε μία ροή x που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις $\overline{d_1}, ..., \overline{d_k}$, με $\overline{x_a} \geq \frac{x_a}{2}$ για όλα τα $a \in A$.
Εφάρμοσε το Θεώρημα 2.4 στο $\overline{x}$, παράγοντας μία αδιαίρετη ροή $\overline{y}$ για απαιτήσεις $\overline{d_1}, ..., \overline{d_k}$.
Επέστρεψε μία αδιαίρετη ροή y για τις αυθεντικές απαιτήσεις με $P_i^y \leftarrow P_i^{\overline{y}}$, για $i = 1, ..., k$.

Προσέξτε πως ισχύει $d_i = d_{min} \cdot 2^c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Ο Αλγόριθμος 1 ορίζει $\overline{d_i} = d_{min} \cdot 2^k, k \in \mathbb{Z}$, όπου $k = \lfloor c \rfloor$.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι $d_i - \overline{d_i} < \frac{d_i}{2}$.

$$d_i - \overline{d_i} = d_{min} \cdot 2^c - d_{min} \cdot 2^{\lfloor c \rfloor} = d_{min} \cdot (2^c - 2^{\lfloor c \rfloor})$$

το οποίο είναι μικρότερο του

$$d_{min} \cdot \frac{2^c}{2} = \frac{d_i}{2}.$$

Μπορούμε να φτιάξουμε μία ροή που να ικανοποιεί τα $\overline{d_i}$ με $\overline{x_a} \geq \frac{x_a}{2}$ για όλα τα $a \in A$:

Μετατρέπω τις τιμές ροών του x σε χωρητικότητες ακμών. Αφού υπάρχει εφικτή ροή (η ίδια η ροή x), από την Συνθήκη τομής, θα ισχύει για κάθε $T \subseteq V \setminus \{s\}$ πως

$$\sum_{a \in \delta^{in}(T)} x_a \geq d(T)$$

άρα

$$\sum_{a \in \delta^{in}(T)} \frac{x_a}{2} \geq \frac{d(T)}{2} > d(T) - \overline{d}(T)$$

με τις χωρητικότητες υπόψη. Από την Συνθήκη τομής, λόγω της τελευταίας ανισότητας, θα υπάρχει μία (καινούρια) εφικτή ροή για το γράφημα με χωρητικότητες ακμών $\frac{x_a}{2}$ και απαιτήσεις $d_i - \overline{d}_i$ στους ίδιους τερματικούς κόμβους. Αυτή θα έχει τιμές ροών στις ακμές $\leq \frac{x_a}{2}$. Λόγω αυτού μπορούμε να αφαιρέσουμε την ροή αυτή από την αρχική ροή x, με την προκύπτουσα ροή $\overline{x}$ να είναι μη αρνητική. Η $\overline{x}$ ικανοποιεί απαιτήσεις $\overline{d}_i$ και έχει τιμές ροών $\geq \frac{x_a}{2}$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4 στο $\overline{x}$, προκύπτει ροή $\overline{y}$ με

$$\overline{x}_a - \overline{d}_{max} \leq \overline{y}_a \leq \overline{x}_a + \overline{d}_{max}.$$

Το αριστερό μέλος της ανισότητας (2.5) προκύπτει ως εξής:

$$\frac{\overline{x}_a}{2} - d_{max} \leq \overline{x}_a - \overline{d}_{max} \leq \overline{y}_a \leq y_a$$

Το δεξί μέλος της ανισότητας (2.5) προκύπτει ως εξής:

Έστω d_{i_a} η απαίτηση του αγαθού i_a που (στην y) περνάει την πιο πολλή ροή μέσα από το a.

$$y_a = \sum_{i:a \in P_i} d_i = d_{i_a} + \sum_{i:a \in P_i, i \neq i_a} d_i \leq d_{i_a} + 2 \sum_{i:a \in P_i, i \neq i_a} \overline{d_i} = d_{i_a} + 2(\overline{y}_a - \overline{d}_{i_a}) \tag{2.6}$$

Απ'την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.4 πιο πριν, για να είμαστε πιο ακριβείς ισχύει

$$\overline{y}_a \leq \overline{x}_a + \overline{d}_{i_a} \Rightarrow \overline{y}_a - \overline{d}_{i_a} \leq \overline{x}_a.$$

Άρα το δεξί μέλος της (2.6) $\leq d_{i_a} + 2\overline{x}_a \leq d_{max} + 2x_a$. □

3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ.

Ενώ η δημοσίευση των Dinitz, Garg και Goemans [4] δίνει έναν αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της ροής y για το Θεώρημα 2.2, οι Morell και Skutella δεν μπόρεσαν να παράξουν πολυωνυμικό αλγόριθμο με τις ιδιότητες του Θεωρήματος 2.2 απ'τις δικές τους τεχνικές.

- Εικάζουν λοιπόν, πως για το Θεώρημα 2.2 (2.3 αντίστοιχα) αρκεί πολυωνυμικός αριθμός UBP (LBP) reroutings για να φτιαχτεί η επιθυμητή αδιαίρετη ροή.
- Επίσης εικάζουν ότι υπάρχει αδιαίρετη ροή y που ικανοποιεί τα Θεωρήματα 2.2 και 2.3 ταυτόχρονα.
- Εικάζουν ότι κάθε ροή x μπορεί να γραφτεί ως κυρτός συνδυασμός αδιαίρετων ροών που ικανοποιούν τα Θεωρήματα 2.2 και 2.3 ταυτόχρονα.

  Αυτή η τελευταία Εικασία, που όπως είδαμε εμφανίστηκε αρχικά μόνο με το πάνω φράγμα (δείτε την Εικασία 1.1) στο paper των Martens, Salazar και Skutella [11] , γράφεται όπως φαίνεται εκεί ισοδύναμα ως
- Δοσμένου γραφήματος με κόστη ακμών και τυχαίας ροής x, υπάρχει αδιαίρετη ροή y με $x_a - d_{max} \leq y_a \leq x_a + d_{max}$ για κάθε ακμή a, τέτοια ώστε $c(y) \leq c(x)$.

Φαίνεται ότι οι Morell και Skutella, σε αυτό το paper δεν δημιουργούν κάποια άμεση πρόοδο για τα προβλήματα βελτιστοποίησης τα οποία συζητήθηκαν νωρίτερα. Αντί αυτού εισαγάγουν νέες τεχνικές, απλοποιούνε σημαντικά την απόδειξη ενός παλιότερου αποτελέσματος, και παράγουν αποτελέσματα έχοντας υπόψη ροές όπου αντί χωρητικότητες (δηλαδή άνω φράγματα ροής) υπάρχουν στις ακμές κάτω φράγματα, επεκτείνοντας με φυσικό τρόπο προηγούμενα θεωρήματα και εικασίες.

Μέχρι τώρα δεν έχουν υπάρξει περαιτέρω εξελίξεις σχετικές με την δημοσίευση αυτή.

ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ – ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

UBP	Upper Bound Preserving
LBP	Lower Bound Preserving

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

Ξενόγλωσσος όρος	**Ελληνικός Όρος**
Commodity	Εμπόρευμα / αγαθό
Terminal Node	Κόμβος Απόληξης / Τερματικός Κόμβος / Προορισμός
Capacity	Χωρητικότητα
Unsplittable	Αδιαίρετη
Multiple Source	Πολυαφετηριακή
Splittable/Fractional	Διαιρετή
Time Complexity	Χρονική Πολυπλοκότητα
Class	Κλάση
Polynomial Time Computable	Πολυωνυμικά Υπολογίσιμη Χρονικά
Polynomial Time Machine	Μηχανή Πολυωνυμικού Χρόνου
Polynomial Time Reducible	Ανάγεται σε Πολυωνυμικό Χρόνο
Approximation Algorithm	Προσεγγιστικός Αλγόριθμος
Minimum Congestion	Ελάχιστη Συμφόρηση
Maximization of Routable Demand	Μεγιστοποίηση της Δρομολογίσιμης Απαίτησης
Minimum Number of Rounds	Ελάχιστος Αριθμός Γύρων
Cut Condition	Συνθήκη τομής
Balance Condition	Συνθήκη ή Κριτήριο Ισορροπίας
Arbitrary Demands	Αυθαίρετες Απαιτήσεις
UBP-reachable	UBP-Προσβάσιμο
On an Emptier Path	Σε πιο Άδειο Μονοπάτι
Eventually UBP-reachable	Εν Τέλει UBP-reachable
On an Eventually Emptier Path	Σε εν Τέλει πιο Άδειο Μονοπάτι

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Ravindra K Ahuja, Thomas L Magnanti, and James B Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, 1993.

[2] Y. Azar and O. Regev. Strongly polynomial algorithms for the unsplittable flow problem. In *IPCO*, 2001.

[3] Julia Chuzhoy and Joseph (Seffi) Naor. New hardness results for congestion minimization and machine scheduling. *J. ACM*, 53(5):707–721, September 2006.

[4] Yefim Dinitz, Naveen Garg, and Michel Goemans. On the single-source unsplittable flow problem. volume 19, pages 290--299, 12 1998.

[5] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., USA, 1990.

[6] Venkatesan Guruswami, Sanjeev Khanna, Rajmohan Rajaraman, Bruce Shepherd, and Mihalis Yannakakis. Near-optimal hardness results and approximation algorithms for edge-disjoint paths and related problems. *Journal of Computer and System Sciences*, 67:473--496, 11 2003.

[7] J.M. Kleinberg. Single-source unsplittable flow. In *Proceedings of 37th Conference on Foundations of Computer Science*, pages 68--77, 1996.

[8] Jon Michael Kleinberg. *Approximation Algorithms for Disjoint Paths Problems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, USA, 1996.

[9] S.G. Kolliopoulos and C. Stein. Improved approximation algorithms for unsplittable flow problems. In *Proceedings 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 426--436, 1997.

[10] Stavros G. Kolliopoulos and Clifford Stein. Approximation algorithms for single-source unsplittable flow. *SIAM Journal on Computing*, 31(3):919--946, 2001.

[11] Maren Martens, Fernanda Salazar, and Martin Skutella. Convex combinations of single source unsplittable flows. In Lars Arge, Michael Hoffmann, and Emo Welzl, editors, *Algorithms - ESA 2007, 15th Annual European Symposium, Eilat, Israel, October 8-10, 2007, Proceedings*, volume 4698 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 395--406. Springer, 2007.

[12] Sarah Morell and Martin Skutella. Single source unsplittable flows with arc-wise lower and upper bounds. In Daniel Bienstock and Giacomo Zambelli, editors, *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, pages 294--306, Cham, 2020. Springer International Publishing.

[13] Prabhakar Raghavan and Clark D. Tompson. Randomized rounding: A technique for provably good algorithms and algorithmic proofs. *Combinatorica*, 7(4):365–374, December 1987.

[14] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Course Technology, Boston, MA, third edition, 2013.

[15] M. Skutella. Approximating the single source unsplittable min-cost flow problem. *Mathematical Programming*, 91:493--514, 2002.