Ολοκληρωσιμότητα Αρνητικών Δυνάμεων Λύσεων Του Προβλήματος Saint Venant

Σάπκας Ιωάννης
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

5 Φεβρουαρίου 2019

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Επιβλέποντες

Γ.Μπαρμπάτης,καθηγητής(**Επιβλέπων**)
Ν.Αλικάκος,καθηγητής
Ι.Στρατής,καθηγητής

Ευχαριστίες

Αυτή η εργασία, αποτελεί το τελευταίο έργο δύο υπέροχων ετών στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα των εφαρμοσμένων μαθηματικών στο τμήμα μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Βέβαια, για να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία συνέβαλαν πάρα πολύ ορισμένα άτομα, τα οποία και θα ήθελα να ευχαριστήσω. Αρχικά, οφείλω να ευχαριστήσω τον κύριο Γεράσιμο Μπαρμπάτη για την πολύτιμη καθοδήγηση και υποστήριξη, καθώς και την τεράστια υπομονή του. Ακόμη, ιδιαίτερες ευχαριστίες στους διδάσκοντες του προγράμματος, αλλά και τους συμφοιτητές μου και ειδικά την Μαρία, τον Νίκο και τον Constantin για την βοήθεια, την στήριξη, αλλά και την υπέροχη παρέα κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού αυτού προγράμματος. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου, αλλά και τον κύριο Ξεροβάσιλα Πέτρο γιατί χωρίς την πίστη τους τίποτα από όλα αυτά δεν θα είχε συμβεί.

Στην οικογένειά μου.

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε με την ανισότητα

$$\int_{\Omega} u(x)^{-\beta} < +\infty,$$

όπου Ω ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^n$ και $u(x)$ η λύση του προβλήματος Saint Venant

$$\begin{cases} \Delta u = -1, & \text{στο } \Omega, \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

Το κύριο θέμα που εντοπίζουμε είναι πως για τον προσδιορισμό της σταθεράς $\beta > 0$ για τις προαναφερθήσες συνθήκες, σημαντικό ρόλο παίζει η ομαλότητα του Ω και η φύση της σταθεράς $C(\Omega, \beta)$, από την οποία μπορούμε σε κάθε περίπτωση να φράξουμε το ολοκλήρωμα.

Σύνολα στα οποία εφαρμόζεται η μελέτη μας είναι τμηματικά C^1 χωρία στο $\mathbb{R}^n$, με κωνικές ιδιομορφίες, πολύεδρα στον $\mathbb{R}^3$ καθώς και τοπικά φραγμένα C^2 χωρία.

Abstract

In this master thesis we initiate the study of the finiteness condition

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta} \leq C(\Omega, \beta) < +\infty$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is an open set and u is the solution of the Saint Venant problem

$$\begin{cases} \Delta u = -1, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

The central issue which we address is that of determining the range of values of the parameter $\beta > 0$ for which the aforementioned condition holds under various hypotheses on the smoothness of Ω and demands on the nature of the constant $C(\Omega, \beta)$. Classes of domains for which our analysis applies include bounded piecewise C^1 domains in $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, with conical singularities (in particular polygonal domains in the plane), polyhedra in $\mathbb{R}^3$, and bounded domains which are locally of class C^2 and which have (finitely many) outwardly pointing cusps.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία, θα ασχοληθούμε με την ολοκληρωσιμότητα αρνητικών δυνάμεων λύσεων του προβλήματος Saint Venant. Για να μπορέσουμε όμως πρώτα να κατανοήσουμε την δομή και τις σημαντικές πτυχές του προβλήματος θα ξεκινήσουμε παραθέτοντας απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο.

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα κάνουμε μία σύντομη άλλά σημαντική αναφορά στην έννοια των ασθενώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων, καθώς και στους χώρους Sobolev [1]. Αυτή η αναφορά κρίνεται σημαντική, καθώς η γνώση και η κατανόηση τέτοιων χώρων είναι απαραίτητη για την συνέχεια. Ακολούθως, και ειδικότερα στο κεφάλαιο 2, θα ασχοληθούμε με στοιχεία γεωμετρικής θεωρίας μέτρου και θα δούμε αρκετά αναλυτικά κάποιες βασικές διαστάσεις όπως η Hausdorff αλλά και η Minkowski, χωρίς την πλήρη κατανόηση των οποίων [2][7], θα ήταν αδύνατο να προχωρήσουμε στο κεφάλαιο 3. Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με το βασικό αντικείμενο αυτής της εργασίας, το πρόβλημα Saint Venant [3]. Αφού προτίστως διατυπώσουμε το πρόβλημα, στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την ολοκληρωσιμότητα των λύσεων του Saint Venant σε συγκεκριμένα χωρία , καθώς και τις παραμέτρους από τις οποίες επηρεάζεται σε κάθε περίπτωση η ολοκληρωσιμότητα αυτή.

1.1 Χώροι Sobolev

Ορισμός 1.1.1. *Λέμε ότι η συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, g_2, \ldots, g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοιες ώστε*

$$\int_\Omega u(x)\phi_{x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)dx$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$ και για κάθε $\phi \in C_c^\infty$.

Λήμμα 1.1.2. *Αν η $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι τέτοια ώστε $\int_\Omega u\phi dx = 0$ για κάθε $\phi \in C_c^\infty$ τότε $u = 0$ στο Ω .*

Απόδειξη:Παραλείπεται.

Έπεται από το παραπάνω Λήμμα ότι αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη τότε οι συναρτήσεις $g_1 \cdots g_n$ είναι μοναδικές(μέχρι σύνολα μέτρου μηδέν). Τις ονομάζουμε τότε ασθενείς μερικές παραγώγους της u και τις συμβολίζουμε με u_{x_i}.

Παρατηρήσεις: (1) Είναι άμεσο ότι αν η u είναι παραγωγίσιμη με την κλασική έννοια , τότε είναι και ασθενώς παραγωγίσιμη και οι ασθενείς μερικές παράγωγοι ταυτίζονται με τις κλασικές μερικές παραγώγους.

(2) Έπεται άμεσα από το Λήμμα 1.1.2 ότι η έννοια της ασθενούς παραγώγου είναι τοπική, δηλαδή αν οι u και v είναι ασθενώς παραγωγίσιμες στο Ω και $u = v$ σε ένα ανοικτό σύνολο $V \subset \Omega$, τοτε $u_{x_i} = v_{x_i}$ στο V.

(3) Αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω και κλασικά παραγωγίσιμη στο ανοικτό σύνολο $V \subset \Omega$, τότε η ασθενής και η κλασική παράγωγος συμπίπτουν στο V.

Παραδείγματα: (1) Η συνάρτηση $u(t) = 1 + |t|$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$u'(t) = \begin{cases} -1, & t > 0, \\ 1, & t < 0. \end{cases}$$

(2)Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

δεν είναι ασθενώς παραγωγίσιμη.

Ορισμός 1.1.3. *Ορίζουμε*

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in \ L^2(\Omega) : u \text{ ασθενώς παραγωγίσιμη και } u_{x_i} \in L^2(\Omega)\}.$$

Ορισμός 1.1.4. *Ο χώρος $W^{1,2}(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος και ονομάζεται χώρος Sobolev .*

Εύκολα ελέγχει κανείς ότι η απεικόνιση

$$< u, v >_{W^{1,2}(\Omega)}= \int_\Omega (u\bar{v} + u_{x_1}\bar{v}_{x_1} + ... + u_{x_n}\bar{v}_{x_n})dx \qquad (1.\ 1)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $W^{1,2}(\Omega)$. Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega [(|u|^2 + |u_{x_1}|^2 + \ldots + |u_{x_n}|^2)dx]^{1/2} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}.$$

Ειδικότερα έχουμε, $u_k \to u$ στον $W^{1,2}(\Omega)$ αν και μόνο αν

$u_k \to u$ *στον* $L^2(\Omega)$

$u_{k,x_i} \to u_{x_i}$ *στον* $L^2(\Omega)$ *για* $i = 1, 2, ...n.$

Θεώρημα 1.1.5. *Ο $W^{1,2}(\Omega)$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο (1. 1) είναι χώρος Hilbert.*

Απόδειξη: Έστω (u_k) ακολουθία Cauchy στον $W^{1,2}(\Omega)$. Τότε οι ακολουθίες u_k και $u_{k,x_i}(i = 1, 2, 3...n)$ είναι ακολουθίες Cauchy στον $L^2(\Omega)$. Άρα υπάρχουν συναρτήσεις

$$\begin{array}{rcl} u, g_1, g_2, ..., g_n & \in & L^2(\Omega) \quad \textit{ώστε } u_k \to u \textit{ και } u_{k,x_i} \to g_i \\ & \textit{για} & i = 1, 2, 3, ..., n \textit{ στον } L^2(\Omega) \textit{ καθώς } k \to \infty. \end{array} \quad (1.\ 2)$$

Έστω $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $i = 1, 2, 3, ..., n$ έχουμε

$$\int_\Omega u_k \phi_{x_i} dx = -\int_\Omega u_{k,x_i} \phi dx.$$

Παίρνοντας το όριο για $k \to \infty$ προκύπτει

$$\int_\Omega u \phi_{x_i} dx = -\int_\Omega g_i \phi dx.$$

Αφού η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη και $u_{x_i} = g_i$. Άρα $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Τέλος η (1. 2) μαζί με τις $u_{x_i} = g_i$ συνεπάγεται ότι $u_k \to u$ στον $W^{1,2}(\Omega)$. Άρα ο $W^{1,2}(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert.

Ορισμός 1.1.6. *Ο χώρος $W_0^{1,2}(\Omega)$ ορίζεται ως η κλειστή θήκη του $C_c^\infty(\Omega)$ ως προς την νόρμα $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ δηλαδή την*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \Big[\int_\Omega (|u|^2 + |u_{x_1}|^2 + \ldots + |u_{x_n}|^2) dx \Big]^{1/2}.$$

Παρατήρηση: Έστω Ω φραγμένο με C^1 σύνορο και $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Αποδεικνύεται ότι $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \Longleftrightarrow u = 0$ στο $\partial\Omega$.

Για το λόγο αυτό λέμε συχνά ότι ο $W_0^{1,2}(\Omega)$ αποτελείται από στοιχεία του $W^{1,2}(\Omega)$ που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$.

Θεώρημα 1.1.7. *(Ανισότητα Poincaré). Έστω Ω φραγμένο. Υπάρχει $c > 0$ ώστε* $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα για $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Έστω ότι το Ω περιέχεται ανάμεσα στα υπερεπίπεδα $x_1 = 0$ και $x_2 = \alpha$. Επεκτείνουμε την u σε όλο το $\mathbb{R}^n$ θέτοντάς την ίση με μηδέν εκτός του Ω. Για $x \in \Omega$ έχουμε

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \Big| \int_{-\infty}^{x_1} u_{x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)dt \Big| \\ &\leq \int_0^\alpha |u_{x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)|dt \\ &\leq \alpha^{1/2} \Big(\int_0^\alpha |u_{x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)|^2 dt \Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και ολοκληρώνοντας ως προς x_1 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha |u(x_1, \cdots, x_n)|^2 dx_1 &\leq \alpha^2 \int_0^\alpha |u_{x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)|^2 dt \\ &\leq \alpha^2 \int_0^\alpha |\nabla u(t, x_2, \cdots, x_n)|^2 dt \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται ολοκληρώνοντας ως προς $x_2, \cdots x_n$.

Παρατήρηση: Έπεται από την ανισότητα Poincare ότι η

$$u \to \|\nabla u\|_{L^2(\Omega}$$

είναι νόρμα στον $W_0^{1,2}(\Omega)$ ισοδύναμη με την Sobolev νόρμα $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$.

2 Στοιχεία Γεωμετρικής Θεωρίας Μέτρου

2.1 Μέτρο Hausdorff

Ορισμός 2.1.1. *Έστω* $A, B \in \mathcal{H}$ *, όπου* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{R}^n), (n \geq 1)$ *το σύνολο των μη κενών , συμπαγών υποσυνόλων του χώρου* $\mathbb{R}^n$*.*

Έστω $d(x, B) = \min |x - \beta| : \beta \in B$ *η απόσταση του σημείου* $x \in \mathbb{R}^d$ *από το* B*. Ορίζουμε*

$$\tilde{d}(A, B) = \max \{d(\alpha, B) : \alpha \in A\} \text{ ως απόσταση του } A \text{ απο το } B$$

$$\tilde{d}(B, A) = \max \{d(\beta, A) : \beta \in B\} \text{ ως απόσταση του } B \text{ απο το } A$$

Ως Hausdorff απόσταση των A, B *ορίζουμε*

$$h(A, B) = \max \{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}.$$

Ορισμός 2.1.2. *Στον χώρο* $< \mathbb{R}^n, d >$ *, όπου* d *η Ευκλείδεια μετρική στον* $\mathbb{R}^n$ *ορίζουμε το εξωτερικό μέτρο Hausdorff* H^s *για* $s \in \mathbb{R}$*,* $s \geq 0$ *ως εξής:*

Θεωρούμε

$$\delta(A) = \sup \{|x - y| : x, y \in A\}$$

την διάμετρο του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *και για* $\epsilon > 0$

$$H^s_\epsilon = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad 0 < \delta(U_i) \leq \epsilon, \quad i \in \mathbb{N} \Big\}$$

όπου $E \subseteq \mathbb{R}^n$*.*

Είναι φανερό ότι, για $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ *έχουμε*

$$H^s_{\epsilon_2}(E) \leq H^s_{\epsilon_1}(E).$$

Ορίζουμε ως εξωτερικό μέτρο Hausdorff H^s *του* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *το*

$$H^s(E) = \sup \{H^s_\epsilon, \epsilon > 0\} = \lim_{\epsilon \to 0^+} H^s_\epsilon(E).$$

Παρατήρηση 2.1.3. *Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα* $H^s_\epsilon(\epsilon > 0)$ *και το* H^s *είναι εξωτερικά μέτρα.[7] Επιπλέον, εάν περιορίσουμε το* H^s *στην σ-άλγεβρα των* H^s *- μετρήσιμων συνόλων , τότε ο περιορισμός αυτός είναι το μέτρο Hausdorff s-διάστασης,* $(s \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0)$. *Στην άλγεβρα αυτή περιέχονται τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του* $\mathbb{R}^n$.

2.2 Διάσταση Hausdorff-Besicovitch

Σε κάθε γεωμετρικό σχήμα δίνουμε μία διάσταση.

Για παράδειγμα, οι ευθείες, οι ημιευθείες και τα ευθύγραμμα τμήματα είναι διάστασης 1. Τρίγωνα, πολύγωνα ,κυκλοι είναι διάστασης 2. Πυραμίδες, πολύεδρα κλπ είναι διάστασης 3.

Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος πεπερασμένο και μηδεν εμβαδόν και όγκο. Ένα τρίγωνο έχει άπειρο ''μήκος'', πεπερασμένο εμβαδόν και μηδέν όγκο. Ενώ ένας κύβος έχει άπειρο ''μήκος'' και ''εμβαδόν'' και πεπερασμένο όγκο.

Παρατηρούμε ότι η διάσταση ενός γεωμετρικού σχήματος είναι εκείνος ο αριθμός n που αν το μετρήσουμε με μέτρο $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$, όπου λ_k το μέτρο Lebesgue διάστασης k με $k \in \mathbb{N}$, έχει μέτρο άπειρο ενώ αν το μετρήσουμε με μέτρο $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots$ έχει μέτρο μηδέν. Την έννοια ''διάσταση'' συνόλου θα την γενικέυσουμε με την βοήθεια του μέτρου Hausdorff του συνόλου.

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ και $H^s(E)$ το s-Hausdorff μέτρο του, για $s \geq 0$. Τότε για $0 \leq s < t$ έχουμε

$$\begin{aligned} H^s_\epsilon(E) &= \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \delta(Ui) \leq \epsilon, \quad i \in \mathbb{N} \Big\} \\ &\geq \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(U_i) : \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \delta(Ui) \leq \epsilon, \quad i \in \mathbb{N} \Big\} \\ &= H^t_\epsilon(E) \end{aligned}$$

με $0 < \epsilon < 1$.

Από τον ορισμό του μέτρου Hausdorff έχουμε ότι

$$H^t(E) \leq H^s(E) \qquad \text{για} \qquad 0 \leq s < t.$$

Άρα, εάν $H^s(E) = 0$ για κάποιο $s \geq 0$, θα έχουμε και $H^t(E) = 0$ για κάθε $t > s$. Επιπλέον

$$H^s_\epsilon(E) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(U_i) \cdot \delta^{s-t}(U_i), \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \delta(Ui) \leq \epsilon, \quad i \in \mathbb{N} \Big\}$$

$$\geq \epsilon^{s-t} H^t_\epsilon(E).$$

Εάν $0 < H^s(E) \leq \infty$, τότε

$$H^s(E) = \lim_{\epsilon \to 0} H^s_\epsilon(E) \geq (\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{s-t}) H^t(E) = +\infty$$

για κάθε $0 \leq s < t$.

Ιδιαιτέρως, για το σύνολο $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι $H^n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ και $H^s(\mathbb{R}^n) = 0$ για $s > n$, και για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι $H^s(E) = 0$ για $s > n$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός s_o, $0 \leq s_o \leq n$, ώστε

$$H^t(E) = \begin{cases} 0, & \text{για } t > s_o, \\ +\infty, & \text{για } t < s_o. \end{cases}$$

Τότε

$$s_o = \sup\{t \geq 0 : H^t(E) = +\infty\} = \inf\{t \geq 0 : H^t(E) = 0\}.$$

Τον αριθμό αυτό ονομάζουμε Hausdorff-Besicovich διάσταση του E και συμβολίζουμε με $\dim_H E$. Το μέτρο $H^{s_o}(E)$ είναι δυνατό να είναι $0, +\infty$ ή θετικός αριθμός.

2.3 Box -counting Διάσταση και Διάσταση Minkowski

Η Box counting ή Box Διάσταση είναι μία από τις πιο συνηθισμένες διαστάσεις που συναντάμε στην μαθηματική ανάλυση. Την πρωτοσυναντάμε τουλάχιστον στις αρχές της δεκαετίας του 1930 και είναι αρκετά δημοφιλής, εξαιτίας της ευκολίας, τόσο στον μαθηματικό υπολογισμό της, αλλά και στην διαισθητική εκτίμισή της. Στην βιβλιογραφία την συναντάμε και με τις ονομασίες ''εντροπία Kolmogorov'', διάσταση εντροπίας, διάσταση πληροφορίας, λογαριθμική πυκνότητα και άλλα, οπότε εμείς για αποφυγή σύγχυσης θα την λέμε Box -counting διάσταση ή απλώς Box διάσταση.

Η κατανόηση του ορισμού γίνεται εφικτή μέσω παραδειγμάτων στον $\mathbb{R}^2$. Εάν έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς α και $\delta > 0$, χρειαζόμαστε τουλάχιστον

$$N_\delta = (\frac{\alpha}{\delta})^2 = \alpha^2(\frac{1}{\delta})^2$$

τετράγωνα πλευράς δ για να καλύψουμε το αρχικό τετράγωνο. Ανάλογα για τον κύβο πλευράς α χρειαζόμαστε τουλάχιστον

$$N_\delta = \alpha^3(\frac{1}{\delta})^3$$

κύβους πλευράς δ για να τον καλύψουμε.

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που εμφανίζεται στο $\frac{1}{\delta}$, είναι η διάσταση του αντικειμένου.

Για το τυχάιο αντικείμενο ''διάστασης'' s θα χρειαζόμασταν $N_\delta \cong c(\frac{1}{\delta})^s$ κύβους πλευράς δ για να το καλύψουμε, για κάποιο $s \geq 0$. (όπου c σταθερά, εξαρτώμενη από το αντικείμενο). Λογαριθμίζοντας έχουμε

$$\log N_\delta \cong \log c - s\log\delta.$$

Άρα

$$s = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{\log N_\delta}{-\log\delta}.$$

Ορισμός 2.3.1. *Έστω F ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $N_\delta(F)$ ο ελάχιστος αριθμός κύβων πλευράς δ που καλύπτουν το F. Τότε η κάτω και η πάνω Box -counting διάσταση του F ορίζονται ως εξής:*

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{2. 3}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{2. 4}$$

οι οποίες αν είναι ίσες, ισούνται με την Box -counting διάσταση η οποία ορίζεται ως

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \tag{2. 5}$$

Αποδυκνύεται ότι $N_\delta(F)$ είναι ένα από τα ακόλουθα

i) Ο ελάχιστος αριθμός κλειστών μπαλών ακτίνας δ, που καλύπτει το F.

ii) Ο ελάχιστος αριθμός συνόλων διαμέτρου το πολύ δ, που καλύπτει το F.

iii) Ο αριθμός των κύβων της μορφής

$$[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times ... \times [m_n\delta, (m_n+1\delta)]$$

όπου οι αριθμοί $m_1, ..., m_n$ είναι ακέραιοι, οι οποίοι τέμνουν το F .

iv) Ο μεγαλύτερος αριθμός μπαλών $S(x,\delta)$ ξένων ανά δύο με κέντρο $x \in F$.

Σχόλιο: Θεωρούμε ότι το $\delta > 0$ είναι αρκετά μικρό ώστε το $-\log\delta$ αλλά και αντίστοιχες ποσότητες να είναι γνήσια θετικές. Για να μην έχουμε προβλήματα λοιπόν με ποσότητες όπως το $\log 0$ ή και το $\log\infty$ θεωρούμε την box-counting διάσταση για μη κενά και φραγμένα σύνολα.

Πρόταση 2.3.2. *Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε*

$$\underline{\dim}_B F = n - \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{\log\delta} \tag{2. 6}$$

$$\overline{\dim}_B F = n - \underline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{\log\delta} \tag{2. 7}$$

όπου F_δ είναι η δ-περιοχή του F .

Απόδειξη: Αφού το F μπορεί να καλυφτεί από $N_\delta(F)$ μπάλες ακτίνας $\delta < 1$, το F_δ μπορεί να καλυφτεί από ομόκεντρες μπάλες ακτίνας 2δ.

Άρα,

$$\mathrm{vol}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) c_n (2\delta)^n$$

όπου c_n ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$.

Λογαριθμίζοντας έχω

$$\frac{\log \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{-\log\delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n\log\delta + \log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

οπότε

$$\underline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log \mathrm{vol}^n(F_\delta)}{-\log\delta} \leq -n + \underline{\dim}_B(F) \tag{2. 8}$$

ομοίως και για το άνω όριο. Από την άλλη αν έχουμε $N_\delta(F)$ ξένες ανά δύο μπάλες ακτίνας δ με τα κέντρα τους στον F, τότε

$$N_\delta(F) c_n \delta^n \leq \mathrm{vol}^n(F_\delta).$$

Λογαριθμίζοντας και πάλι και για $\delta \to 0$ έχουμε την ακριβώς αντίθετη ανισότητα της (2. 8) .

Αυτή η μορφή της Box διάστασης είναι γνωστή ως διάσταση Minkowski.

Ορισμός 2.3.3. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο. Η άνω και η κάτω χωρητικότητα Minkowski διάστασης γ του $\partial\Omega$ ως προς το Ω ορίζονται ως*

$$M_\gamma^*(\partial\Omega) := \limsup_{r\to 0^+} \omega_{n-\gamma}(r) \qquad M_{*,\gamma}(\partial\Omega) := \liminf_{r\to 0^+} \omega_{n-\gamma}(r) \tag{2. 9}$$

όπου για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε θέσει

$$\omega_\alpha(r) := \frac{|\{x \in \Omega : \delta_\Omega(x) < r\}|}{r^\alpha}. \tag{2. 10}$$

Η άνω και η κάτω διάσταση Minkowski του $\partial\Omega$ ως προς το Ω δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dim^*_{Minkowski}(\partial\Omega) &:= \inf\{\gamma \geq 0 : M_\gamma^*(\partial\Omega) < +\infty\} \\ &= \sup\{\gamma \geq 0 : M_\gamma^*(\partial\Omega) = +\infty\} \\ &= \inf\{\gamma \geq 0 : M_\gamma^*(\partial\Omega) = 0\} \\ &= \sup\{\gamma \geq 0 : M_\gamma^*(\partial\Omega) > 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim_{*,Minkowski}(\partial\Omega) &:= \sup\{\gamma \geq 0 : M_{*,\gamma}(\partial\Omega) > 0\} \\ &= \inf\{\gamma \geq 0 : M_{*,\gamma}(\partial\Omega) = 0\} \\ &= \inf\{\gamma \geq 0 : M_{*,\gamma}(\partial\Omega) < +\infty\} \\ &= \sup\{\gamma \geq 0 : M_{*,\gamma}(\partial\Omega) = +\infty\} \end{aligned}$$

όπου θεωρούμε ότι $\inf\emptyset := +\infty$ και το $\sup\emptyset := -\infty$. Στην περίπτωση που η άνω και η κάτω διάσταση Minkowski είναι ίσες, τότε την κοινή τιμή τους την λέμε διάσταση Minkowski του $\partial\Omega$ ως προς το Ω και την συμβολίζουμε με $\dim_{Minkowski}(\partial\Omega)$.

Σε αυτό το σημείο, θα δείξουμε γιατί τα παραπάνω infimum και supremum που μας δίνουν την $\dim^*_{\text{Minkowski}}(\partial\Omega)$ είναι ίσα. Ομοίως, δουλεύουμε και για την ισότητα των infimum και supremum της $\dim_{*,\text{Minkowski}}(\partial\Omega)$. Αρχικά, έστω

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \{\gamma \geq 0 : M_\gamma^*(\partial\Omega) < +\infty\} \\ \mathrm{B} &= \{\gamma \geq 0 : M_\gamma^*(\partial\Omega) = +\infty\} \\ \Gamma &= \{\gamma \geq 0 : M_\gamma^*(\partial\Omega) = 0\} \\ \Delta &= \{\gamma \geq 0 : M_\gamma^*(\partial\Omega) > 0\}. \end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\omega_{n-\gamma_1}(r) = \frac{|\{x \in \Omega : \delta_\Omega(x) < r\}|}{r^{n-\gamma_1}} = \frac{|\{x \in \Omega : \delta_\Omega(x) < r\}|}{r^{n-\gamma_2}} r^{\gamma_1-\gamma_2},$$

άρα,

$$\omega_{n-\gamma_1}(r) = \omega_{n-\gamma_2}(r) r^{\gamma_1-\gamma_2}.$$

Έστω τώρα ότι, $\gamma_1 < \gamma_2$. Τότε, αν $M^*_{\gamma_2}(\partial\Omega) > 0$, έπεται ότι $M^*_{\gamma_1}(\partial\Omega) = +\infty$, ενώ αν $M^*_{\gamma_1}(\partial\Omega) < +\infty$, έπεται ότι $M^*_{\gamma_2}(\partial\Omega) = 0$.

Θα ξεκινήσουμε, δείχνοντας ότι το $\sup B = \inf \Gamma$.

i) $\sup B \leq \inf \Gamma$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\gamma_1 \leq \gamma_2$, $\forall \gamma_1 \in B, \quad \forall \gamma_2 \in \Gamma$. Έστω λοιπόν $\gamma_1 \in B$, $\gamma_2 \in \Gamma$. Άρα, $M^*_{\gamma_1}(\partial\Omega) = +\infty$, $M^*_{\gamma_2}(\partial\Omega) = 0$, άρα $\gamma_1 < \gamma_2$.

ii) $\sup B \geq \inf \Gamma$.

Έστω αντιθέτως ότι, $\sup B < \inf \Gamma$. Έστω $\overline{\gamma} \in (\sup B, \inf \Gamma)$.

a) Αν $M^*_{\overline{\gamma}}(\partial\Omega) < +\infty$, τότε $M^*_{\gamma}(\partial\Omega) = 0, \quad \forall \gamma > \overline{\gamma}$, άτοπο.

b) Αν $M^*_{\overline{\gamma}}(\partial\Omega) = +\infty$, τότε $\overline{\gamma} \in B$, άτοπο.

Άρα $\sup B = \inf \Gamma$.

Τώρα, θα δείξουμε ότι $\inf A = \inf \Gamma$.

i) $\inf A \leq \inf \Gamma$.

Παρατηρούμε ότι $\Gamma \subseteq A$, άρα από ορισμό infimum , έπεται άμεσα ότι $\inf A \leq \inf \Gamma$.

ii)$\inf A \geq \inf \Gamma$.

Έστω αντιθέτως ότι, $\inf A < \inf \Gamma$.

Έστω $\overline{\gamma} \in (\inf A, \inf \Gamma)$.

a) Αν $M^*_{\overline{\gamma}}(\partial\Omega) < +\infty$, τότε $M^*_{\gamma}(\partial\Omega) = 0, \quad \forall \gamma > \overline{\gamma}$, άτοπο, αφού $\overline{\gamma} < \inf \Gamma$.

b) Αν $M^*_{\overline{\gamma}}(\partial\Omega) = +\infty$, τότε $\overline{\gamma} \leq \inf A$,άτοπο.

Άρα $\inf A = \inf \Gamma$.

Τέλος, θα δείξω ότι $\sup B = \sup \Delta$.

i) $\sup B \leq \sup \Delta$.

Παρατηρούμε ότι $B \subseteq \Delta$, άρα από ορισμό supremum , έπεται άμεσα ότι $\sup B \leq \sup \Delta$.

ii)$\sup B \geq \sup \Delta$.

Έστω αντιθέτως ότι, $\sup B < \sup \Delta$.

Έστω $\overline{\gamma} \in (\sup B, \sup \Delta)$.

a) Αν $M^*_{\overline{\gamma}}(\partial\Omega) < +\infty$, τότε $M^*_{\gamma}(\partial\Omega) = 0, \quad \forall \gamma > \overline{\gamma}$, άτοπο, αφού $\overline{\gamma} < \sup \Delta$.

b) Αν $M^*_{\overline{\gamma}}(\partial\Omega) = +\infty$, τότε $\overline{\gamma} \in B$, άτοπο.

Άρα $\sup B = \sup \Delta$.

3 Το πρόβλημα Saint Venant

Ο Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (23 August 1797, Villiers-en-Bière, Seine-et-Marne – 6 January 1886, Saint-Ouen, Loir-et-Cher ήταν ένας σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός, μηχανικός και φυσικός, ο οποίος έγινε ιδιαίτερα γνωστός ως ο πρώτος που μελέτησε την εντατική κατάσταση ράβδου τυχαίας διατομής που καταπονείται σε στρέψη το 1853.

Μιλώντας για στρέψη, αξίζει να τονίσουμε πως η θεωρία της στρέψης ξεκίνησε από τον Coulomb, ο οποίος μελέτησε την περίπτωση ράβδου με κυκλική διατομή. Μάλιστα, η λύση του Coulomb στηρίχθηκε στην παραδοχή ότι επίπεδες διατομές στην απαραμόρφωτη κατάσταση παραμένουν επίπεδες και κατά τη παραμορφωμένη κατάσταση. Το πρόβλημα όμως στην θεωρία του Coulomb, ήταν πως η υπόθεση αυτή είναι ακριβής μόνο για την περίπτωση κυκλικών ή κυκλικών δακτυλιοειδών διατομών.

Αντιθέτως, ο Saint Venant, δεν περιορίστηκε σε ράβδους κυκλικής διατομής. Στην παραγματικότητα, βασιζόμενος στην θεωρία του Coulomb, εισήγαγε ορισμένες τροποποιήσεις προκειμένου να επιλύσει το πρόβλημα στρέψης που αφορούσε μη κυκλικές διατομές τυχούσας μορφής. Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι όταν μια ράβδος μη κυκλικής διατομής υπόκειται σε στρέψη, μια εγκάρσια διατομή η οποία ήταν επίπεδη πριν από τη στρέψη, δεν παραμένει επίπεδη και μετά τη στρέψη. Η διατομή αυτή υπό την επίδραση στρεπτικής καταπόνησης υπόκειται σε στρέβλωση. Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία του Saint Venant, η στρέβλωση των διατομών, λόγω της στρεπτικής έντασης, μπορεί να πραγματοποιηθεί ανεμπόδιστα. Αυτό το είδος της στρέψης ονομάζεται ομοιόμορφη στρέψη ή στρέψη Saint Venant. Εν κατακλείδι, μας έδωσε την θεωρία στρέψης ράβδων τυχούσας διατομής, θέτοντας κατα αυτόν τον τρόπο πρώτος τα θεμέλια της κλασσικής θεωρίας της στρέψης.

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνουμε την σύντομη αναφορά στην βιογραφία του Saint Venant και συνεχίζουμε στο κύριο θέμα μελέτης της εργασίας.

3.1 Εισαγωγή στο πρόβλημα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την ισχύ της

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta} dx < +\infty$$

για $\beta > 0$, όπου $u(x)$ θετική συνάρτηση, με $\Delta u < 0$ στο φραγμένο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Μια ειδική τέτοια περίπτωση είναι η λύση του προβλήματος Saint Venant

$$\begin{cases} \Delta u = -1, & \text{στο } \Omega, \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

και μελετάμε, για ποιες τιμές της σταθεράς $\beta > 0$ ισχύει ότι

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta} dx \leq C(\Omega, \beta) < +\infty \tag{3. 11}$$

που κάτω από ορισμένες συνθήκες εξαρτάται από την σταθερά C. Οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις είναι

1) Πολυγωνικές περιοχές στον $\mathbb{R}^2$

2) Πολυεδρικές περιοχές στον $\mathbb{R}^3$

3) Κατά τμήματα ομαλά χωρία με κωνικές ιδιότητες.

Παρατήρηση 3.1.1. *Λόγω της μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος Saint Venant, κάτι το οποίο έπεται από την αρχή μεγίστου, έχουμε ότι το* $\int_\Omega u(x)^{-\beta} dx$ *καθορίζεται εξόλοκλήρου από το* Ω *και το* β*. Για αυτόν τον λόγο θα το λέμε* β*-ολοκλήρωμα του* Ω*.*

Επιπλέον, εκτός του μαθηματικού ενδιαφέροντος, η μελέτη μας είναι ιδιαίτερα σημαντική και για προβλήματα στην θεωρία ελαστικότητας.

Για παράδειγμα, αποδυκνύεται οτι [8], ο συντελεστής στρεπτικής ακαμψίας του Ω

$$P(\Omega) := \sup \Big(\int_\Omega |w| dx \Big)^2 \Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \Big)^{-1}$$

με $0 \neq w \in C_0^\infty$ ισούται με

$$P(\Omega) = \int_\Omega u dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

όπου u η λύση του προβλήματος Saint Venant.

Σε αυτό το σημείο, καλό είναι αναφέρουμε, πως το αρχικό, μαθηματικό, ενδιαφέρον για την σχέση

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta} < +\infty$$

ξεκίνησε μέσα από προβλήματα αρμονικής ανάλυσης σχετικά με τα μέτρα αντίστροφης εικόνας πραγματικών, κυρτών, C^2 συναρτήσεων σε ανοικτά $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 3.1.2. *Έστω v, πραγματική, κυρτή C^2 συνάρτηση, ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, όπου η Εσσιανή της v ικανοποιεί την*

$$\det[(\partial^2 v/\partial x_i \partial x_j)_{1 \leq i,j \leq n}] \geq 1 \tag{3. 12}$$

στο Ω. Τότε, υπάρχει σταθερά $C = C_n > 0$ [4] ώστε

$$|\Omega| \leq C \cdot \|v\|^{n/2}_{L^\infty(\Omega)} . \tag{3. 13}$$

Αν επιπλέον, η v είναι μή αρνητική, και αντικαταστήσουμε στην (3. 13) το Ω με το σύνολο $\{x \in \Omega : v(x) < t\}$, τότε έχουμε ότι

$$|\{x \in \Omega : v(x) < t\}| \leq C t^{n/2}, \quad t > 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η (3. 12), σε συνδυασμό με την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου, μας δίνει ότι

$$\Delta v/n \geq (\det(\partial_{i,j} v))^{1/n}_{1 \leq i,j < n} \geq 1.$$

Σε αυτό το σημείο, είναι λογικό να αναρωτηθούμε ότι γνωρίζοντας μόνο ότι $\Delta v \geq n$, γίνεται να καταλήξουμε σε κάτι αντίστοιχο με την (3. 13); Αν ναι για τι είδους σταθερά C;

Για να πάρουμε κάποια απάντηση σε τέτοιου είδους ερωτήματα, είναι αναγκαία η σχέση

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta} < +\infty$$

για u λύση του προβλήματος Saint Venant.

Έστω μία συνάρτηση v πραγματική, αυστηρά κυρτή C^2 σε μία περιοχή του 0 η οποία κανονικοποιείται ώστε

$$v(0) = 0, \quad \nabla v(0) = 0$$

θεωρούμε τότε $t > 0$ (αρκετά μικρό) και ορίζουμε

$$\Omega := \{x : v(x) < t\}.$$

Αν πάρουμε τώρα τον περιορισμό της v στο ανοικτό Ω και ορίσουμε

$$G = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, v(x) < x_{n+1} < t\}$$

την περιοχή του χώρου στον $\mathbb{R}^{n+1}$ που βρίσκεται πάνω από το γράφημα της v και κάτω από το n διάστατο οριζόντιο επίπεδο $x_{n+1} = t$ θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το $n+1$ διάστατο μέτρο Lebesque του G.

Έστω λοιπόν u λύση του προβλήματος Saint Venant. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες και επειδή η u και η $v - t$ μηδενίζονται στο σύνορο του Ω έχουμε

$$|G| = \int_\Omega (t - v(x))dx = \int_\Omega (v(x) - t)(\Delta u)(x)dx = \int_\Omega (\Delta v)(x) \cdot u(x)dx.$$

Επιπλέον τώρα, με βάση αυτό που μόλις δείξαμε, σε συνδυασμό με την προφανή ανισότητα $|G| \leq t|\Omega|$, για δωθέν γ $\in (0, 1/2)$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\Delta v)^\gamma dx &= \int_\Omega ((\Delta v)u)^\gamma u^{-\gamma} dx \\ &\leq \Big(\int_\Omega (\Delta v) u dx\Big)^\gamma \Big(\int_\Omega u^{-\gamma/(1-\gamma)} dx\Big)^{1-\gamma} \\ &= |G|^\gamma \Big(\int_\Omega u^{-\gamma/(1-\gamma)} dx\Big)^{1-\gamma} \\ &\leq t^\gamma |\Omega|^\gamma \Big(\int_\Omega u^{-\gamma/(1-\gamma)} dx\Big)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

με χρήση της ανισότητας του Holder, το οποίο δίνει για

$$\beta := \gamma/(1-\gamma) \in (0, 1)$$

$$\int_\Omega (\Delta v)^\gamma dx \leq \|v\|^\gamma_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^\gamma \Big(\int_\Omega u^{-\beta} dx\Big)^{1-\gamma}. \tag{3. 14}$$

Επιπροσθέτως, στην περίπτωση όπου

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta} \leq C_\beta |\Omega|^{1-2\beta/n} \tag{3. 15}$$

η σχέση (3. 14) γίνεται

$$\int_\Omega (\Delta v)^\gamma dx \leq C_\gamma \|v\|^\gamma_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{1-2\gamma/n}. \tag{3. 16}$$

Το συμπέρασμα είναι ότι αν ισχύει η (3. 15) τότε χρησιμοποιώντας την ασθενέστερη συνθήκη $\Delta v \geq n$, αντί για την (3. 12) παίρνουμε

$$n^\gamma |\Omega| \leq C_\gamma t^\gamma |\Omega|^{1-2\gamma/n}$$

που μας οδηγεί στο

$$|\{x : v(x) < t\}| \leq D t^{n/2}, \quad t > 0 \tag{3. 17}$$

όπου το D εξαρτάται μόνο απο το n.

Αυτό φυσικά εξαρτάται από την (3. 14) για κάποιο $\gamma \in (0, 1/2)$ με την σταθερά C_γ να είναι ανεξάρτητη του t.

Παρόλα αυτά δεν μπορούμε να περιμένουμε μία σχέση σαν την (3. 17) να ισχύει για μία αυθαίρετα κυρτή v ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο που περιέχει το 0 με $v(0) = 0$ και $\nabla v(0) = 0$.

Για παράδειγμα για ϵ μικρό θεωρούμε την $v_\epsilon(x) = x_1^2 + \epsilon x_2^2$ στον $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι η (3. 17) δεν ισχύει παρόλο που $v(0) = 0$, $\nabla v(0) = 0$ και $\Delta v \geq 2$, καθώς το σύνολο $\{x : v_\epsilon(x) < t\}$ είναι ελλειψοειδές με ημιάξονες $\sqrt{t}$ και $\sqrt{t/\epsilon}$. Άρα το εμβαδόν του είναι $\pi t/\sqrt{\epsilon}$. Αυτό δείχνει ότι η (3. 17) δεν ισχύει για σταθερό D (θα έπρεπε $D \to \infty$ καθώς $\epsilon \to 0$).

3.2 Εκτιμήσεις για τη λύση του προβλήματος Saint Venant σε μη ομαλά χωρία

Έστω Ω ανοικτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $W^{1,p}(\Omega)$ ο κλασικός χώρος Sobolev τάξης 1 στο Ω με $1 \leq p \leq \infty$ και $W_0^{1,p}(\Omega)$ η κλειστότητά του $C_c^\infty(\Omega)$. Τότε από το λήμμα Lax-Milgram έχουμε ότι το πρόβλημα Saint Venant

$$\begin{cases} \Delta u = -1, & \text{στο } \Omega, \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει μοναδική, ασθενή λύση u στον $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega), \qquad \Delta u = -1 \quad \textit{στο} \quad \Omega \tag{3. 18}$$

η οποία είναι καλά ορισμένη και μάλιστα, η λύση του, (3. 18) μπορεί να εκφραστεί και ως

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)dy \qquad x \in \Omega \tag{3. 19}$$

όπου $G(\cdot,\cdot)$ η συνάρτηση Green για την Dirichlet Λαπλασιανή στο Ω. Για την μοναδική συνάρτηση Green της (3. 19) έχουμε ότι

$$G : \Omega \times \Omega \to (0, +\infty]$$

με

$$G(\cdot, y) \in W^{1,2}(\Omega \backslash B(y,r)) \cap W_0^{1,1}(\Omega), \quad \forall y \in \Omega, \quad \forall r > 0$$

και

$$\int_\Omega \langle \nabla_x G(x,y), \nabla \phi(x) \rangle dx = \phi(y), \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Η απόδειξη για την ύπαρξη και την μοναδικότητα της συνάρτησης Green όπως και ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες της, όπως το ότι η συνάρτηση Green είναι συμμετρική

$$G(x,y) = G(y,x) \quad \forall x, y \in \Omega$$

αλλά και ότι για $n \geq 3$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$G(x,y) \leq C_n |x-y|^{2-n} \qquad \forall x, y \in \Omega \tag{3. 20}$$

και

$$G(x,y) \geq C_n |x-y|^{2-n} \qquad \forall \quad x,y \in \Omega \quad \mu\epsilon \quad |x-y| \leq \frac{1}{2}\delta_\Omega(x) \qquad (3.\ 21)$$

όπου οι σταθερές εξαρτώνται μόνο από την διάσταση παρουσιάζονται αναλυτικά στο [5].

Τώρα, για $n = 2$ αντί για

$$|x-y|^{2-n} \ \acute{\epsilon}\chi o \upsilon \mu \epsilon \ \log(\mathrm{diam}(\Omega)/|x-y|).$$

Έπεται λοιπόν από τις (3. 19) και (3. 20),

$$0 < u(x) \leq C_n[\mathrm{diam}(\Omega)]^2, \qquad \forall x \in \Omega. \qquad (3.\ 22)$$

Το πρώτο μέλος, δηλαδή ότι $0 < u(x)$ έπεται από την (3. 19), καθώς όπως αναφέραμε και παραπάνω η $G : \Omega \times \Omega \to (0, +\infty]$, άρα $G(x,y) > 0$, επομένως το ολοκλήρωμα της, που αποτελεί την $u(x)$ θα είναι γνήσια θετικό. Τώρα, για το δεύτερο σκέλος της ανίσωσης, δηλαδή ότι $u(x) \leq C_n[\mathrm{diam}(\Omega)]^2, \qquad \forall x \in \Omega$, έχουμε από την (3. 20) ότι

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)dx \leq \int_\Omega C_n|x-y|^{2-n}dx \leq C_n \int_{B(x,\mathrm{diam}(\Omega))} |x-y|^{2-n}dx.$$

Τώρα θέτουμε $r = |x-y|$, και χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$u(x) \leq C_n \int_{B(x,\mathrm{diam}(\Omega))} |x-y|^{2-n}dx = C_n \int_0^{\mathrm{diam}(\Omega)} r^{2-n}r^{n-1}dr = C_n[\mathrm{diam}(\Omega)]^2.$$

Άρα αποδείχθηκε ότι,

$$0 < u(x) \leq C_n[\mathrm{diam}(\Omega)]^2, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Παρατήρηση 3.2.1. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε $\forall \quad \beta > 0$ η λύση του (3. 18) ικανοποιεί την*

$$C(n,\beta)|\Omega|[\mathrm{diam}(\Omega)]^{-2\beta} \leq \int_\Omega u(x)^{-\beta}dx. \tag{3. 23}$$

Πράγματι, από την (3. 22) έχουμε

$$|\Omega| = \int_\Omega u(x)^\beta u(x)^{-\beta}dx \leq C_n^\beta[\mathrm{diam}(\Omega)]^{2\beta}\int_\Omega u(x)^{-\beta}dx.$$

Ορισμός 3.2.2. *Λέμε ότι το Ω ικανοποιεί μία εσωτερική corkscrew συνθήκη αν υπάρχουν σταθερές $M > 1$ και $R > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \partial\Omega$ και $r \in (0, R)$ υπάρχει $A_r(x) \in \Omega$, το οποίο καλείται corkscrew σημείο του x ώστε*

$$|x - A_r(x)| < r \text{ και } \mathrm{dist}(A_r(x), \partial\Omega) > M^{-1}r.$$

Επίσης το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί μία εξωτερική corkscrew συνθήκη αν το

$$\Omega^c := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$$

ικανοποιεί μία εσωτερική corkscrew συνθήκη. Βέβαια, αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή της πραμέτρου $\beta > 0$ ώστε να αληθεύει μία σχέση σαν την (3. 11) κάτω από τυχαίες γεωμετρικές συνθήκες για το Ω.

Ένα πολύ σημαντικό ''εργαλείο'' στην προσπάθειά μας αυτήν είναι η αρχή μεγίστου. Για να μπορέσουμε λοιπόν να προχωρήσουμε ομαλά πρέπει να δώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 3.2.3. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,φραγμένο και ανοικτό. Λέμε ότι μία συνάρτηση $u \in W^{1,2}(\Omega)$ είναι υφαρμονικη αν*

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\phi(x)\rangle dx \leq 0 \quad \text{για κάθε μη αρνητική } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Θα λέμε ότι η u είναι υπέραρμονική αν η $-u$ είναι υφαρμονική.

Ορισμός 3.2.4. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, φραγμένο, ανοικτό και έστω $E \subseteq \overline{\Omega}$. Λέμε ότι για μία συνάρτηση $u \in W^{1,2}(\Omega)$, ισχύει $u \geq 0$ στο E υπό την έννοια του $W^{1,2}(\Omega)$, αν υπάρχει ακολουθία*

$$u_j \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega), \quad j \in \mathbb{N}$$

που συγκλίνει στην u στο $W^{1,2}(\Omega)$ και $\forall j \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία ανοικτή περιοχή U_j του E στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $u_j > 0$ στο $U_j \cap \Omega$.

Ορισμός 3.2.5. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ανοικτό. Λέμε ότι το Ω είναι ένα Lipschitz χωρίο αν για κάθε σημείο $p \in \partial\Omega$, υπάρχει ένα $n-1$ διάστατο υπερεπίπεδο H που περιέχει το p, καθώς και μία Lipschitz συνεχής συνάρτηση $g : H \to \mathbb{R}$ και σταθερές $r > 0$ και $n > 0$ ώστε*

$$\begin{array}{ll} i) & \Omega \cap C = \{x + y\vec{n} \quad | \quad x \in B_r(p) \cap H, \quad -h < y < g(x)\} \\ ii) & (\partial\Omega) \cap C = \{x + y\vec{n} \quad | \quad x \in B_r(p) \cap H, \quad g(x) = y\} \end{array}$$

όπου

$$\begin{array}{rl} \vec{n} & \text{μοναδιαίο κάθετο στο } H \\ B_r(p) := & \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \|x - p\| < r\} \\ C := & \{x + y\vec{n} \quad | \quad x \in B_r(p) \cap H, \quad -h < y < h\}. \end{array}$$

Επιστρέφοντας στο κύριο θέμα μας, συνεχίζουμε κάνοντας μερικές απλές, αλλά ουσιώδεις παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 3.2.6. *Η περίπτωση μίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή*

$$\Omega = B(0, R), \qquad R > 0$$

κατά την οποία η (3. 18) έχει λύση της μορφής

$$u(x) = \frac{1}{2n}(R^2 - |x|^2), \quad x \in B(0, R) \tag{3. 24}$$

δείχνει ότι πρέπει αναγκαστικά να έχουμε $\beta < 1$ και ότι η οριακή τιμή $\beta = 1$ δεν μας ικανοποιεί. Πράγματι η (3. 24) ικανοποιεί την

$$\frac{R}{2n}\delta_{B(0,R)}(x) \leq u(x) \leq \frac{R}{n}\delta_{B(0,R)}(x), \quad \forall x \in B(0, R) \tag{3. 25}$$

και άρα,

$$\int_{B(0,R)} u(x)^{-1} dx = +\infty. \tag{3. 26}$$

Σε αυτό το σημείο, καλό είναι να υπενθυμίσουμε ότι, για φραγμένο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ με λείο σύνορο και $\beta > 0$, έχουμε ότι

$$\int_\Omega \delta(x)^{-\beta} = \begin{cases} +\infty & , \text{αν } \beta = 1, \\ < +\infty & , \text{αν } \beta < 1. \end{cases}$$

Παρατήρηση 3.2.7. *Σχετικά με το πρόβλημα εκφυλισμού του β-ολοκληρώματος για $\beta = 1$, πρέπει να τονίσουμε ότι αυτό γίνεται πάντα αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και $x_* \in \partial\Omega$, λέμε τότε ότι το Ω ικανοποιεί μία συνθήκη περιβάλλουσας μπάλας ακτίνας $R > 0$ κοντά στο x_* αν υπάρχει*

$$\rho > 0 : \forall \quad x \in B(x_*, \rho) \cap \partial\Omega$$

υπάρχει μπάλα ακτίνας R που περιέχει το Ω και στο σύνορό της βρίσκεται το x.

Η σημασία αυτής της ορολογίας είναι προφανής από το ακόλουθο αποτέλεσμα: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί μία συνθήκη περιβάλλουσας μπάλας ακτίνας $R > 0$ κοντά στο σημείο $x_* \in \partial\Omega$. Τότε αν u η λύση του (3. 18) έχουμε

$$u(x) \leq n^{-1} R \delta_\Omega(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \textit{κοντά στο} \quad x_* \tag{3. 27}$$

άρα

$$\int_\Omega u(x)^{-1} dx = +\infty. \tag{3. 28}$$

Για να αποδείξουμε το παραπάνω φράγμα για την u όσον αφορά την απόσταση από το σύνορο, θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $x_o \in B(x_*, \rho/2) \cap \Omega$ και ένα σημείο $x_1 \in \partial\Omega$ για το οποίο ισχύει $r := |x_1 - x_o|$. Τότε, αναγκαστικά ισχύει $x_1 \in Bx_*, \rho) \cap \partial\Omega$. Τώρα ας θεωρήσουμε μία μπάλα $B = B(x_2, R)$ που περιέχει το Ω και επιπλέον το $x_1 \in \partial\Omega$. Τότε έχουμε $B(x_o, r) \subseteq \Omega \subseteq B$, ώστε οι μπάλες $B(x_o, r)$ και $B(x_2, R)$ να εφάπτονται στο x_1. Τότε έχουμε ότι τα σημεία x_1, x_o, x_2 είναι συγγραμικά και μάλιστα $R - r = |x_o - x_2|$. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την αρχή μεγίστου έχουμε

$$u(x) \leq (2n)^{-1}(R^2 - |x - x_2|^2) \quad \forall \quad x \in \Omega \tag{3. 29}$$

όπου για $x = x_o$ γίνεται

$$u(x_o) \leq (n)^{-1} R(R - |x_o - x_2|) = n^{-1} R r = n^{-1} R \delta_\Omega(x_o) \tag{3. 30}$$

όπου αφού το $x_o \in B(x_*, \rho/2) \cap \Omega$ ήταν τυχαίο, έπεται η (3. 27).

Όσον αφορά την (3. 28), αρχικά να σημειώσουμε ότι το $B(x_*, \rho/2) \cap \Omega$ είναι κυρτό και μάλιστα Lipschitz. Επομένως, αυτό μαζί με την (3. 27) δίνουν

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)^{-1}dx &\geq \int_{B(x_*,\rho/2)\cap\Omega} u(x)^{-1}dx \\ &\geq nR^{-1}\int_{B(x_*,\rho/2)\cap\Omega} \delta_\Omega(x)^{-1}dx = +\infty \qquad (3.\ 31)\end{aligned}$$

όπου το τελευταίο βήμα είναι άμεση συνέπεια του ότι το $B(x_*, \rho/2) \cap \Omega$ είναι Lipschitz.

Θεώρημα 3.2.8. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο. Τότε υπάρχει οικογένεια ανοικτών κύβων $Q_k, k = 1, 2, ...,$ τέτοια ώστε:*

$$\begin{aligned} &i) \quad \bigcup_k \overline{Q}_k = \Omega \\ &ii) \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset \text{ για } i \neq j \\ &iii) \quad \mathrm{diam}(Q_k) \leq \mathrm{dist}(Q_k, \partial\Omega) \leq 4\mathrm{diam}(Q_k). \end{aligned}$$

Απόδειξη: Παραλείπεται. Βρίσκεται αναλυτικά στο [6].

Η συνάρτηση απόστασης $\delta_\Omega(x)$ είναι μία πολύ χρήσιμη και σημαντική συνάρτηση. Έχει όμως το "ελάττωμα" ότι δεν είναι, γενικά, παραγωγίσιμη. Για το λόγο αυτό, είναι χρήσιμη η συνάρτηση που ορίζεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.9. *Υπάρχει συνάρτηση $\delta_{\Omega,reg} \in C^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} &1) \quad c_1\delta_\Omega(x) \leq \delta_{\Omega,reg}(x) \leq c_2\delta_\Omega(x) \\ &2) \quad |\partial^\alpha \delta_{\Omega,reg}(x)| \leq C_\alpha \delta_\Omega(x)^{1-|\alpha|}, \quad \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 και C_α είναι ανεξάρτητες του Ω. Αυτήν την συνάρτηση θα καλούμε ''κανονικοποιημένη συνάρτηση απόστασης του Ω ''.

Απόδειξη: Για να μπορέσουμε να πάμε στην κατασκευή της συνάρτησής μας, πρώτα πρέπει να ορίσουμε ορισμένα πράγματα. Αρχικά θεωρώ Q_0 κύβο μήκους 1 τον οποίο τοποθετώ στο κέντρο. Τότε, ορίζω συνάρτηση $\phi \in C^\infty(\Omega)$ με $0 \leq \phi \leq 1$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 1, \quad x \in Q_0 \text{ και} \\ \phi(x) &= 0, \quad x \notin (1+\epsilon)Q_0. \end{aligned}$$

Τότε θεωρούμε συνάρτηση ϕ_k για τον αντίστοιχο κύβο Q_k ώς εξής:

$$\phi_k(x) = \phi(\frac{x - x^k}{l_k})$$

όπου x^k το κέντρο του αντίστοιχου κύβου Q_k και l_k το κοινό μήκος των πλευρών του.

Τώρα, επανερχόμαστε στο κύριο μέρος της απόδειξής μας, καθώς μπορούμε να κατασκευάσουμε την $\delta_{\Omega,reg}(x)$ άμεσα θέτοντας

$$\delta_{\Omega,reg}(x) = \sum_k \mathrm{diam}(Q_k)\phi_k(x).$$

Θεωρώ ότι για $x \in Q_k$, τότε $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \Omega) \leq \mathrm{dist}(Q_k, \Omega) + \mathrm{diam}(Q_k) \leq 5\mathrm{diam}(Q_k)$ με βάση ότι

$$\mathrm{diam}(Q) \leq \mathrm{dist}(Q, \partial\Omega) \leq 4\mathrm{diam}(Q), \qquad \mu\epsilon\ Q \in \mathcal{F}.$$

Σε αυτό το σημείο ας θεωρωρήσουμε ως Q_k^* τον ομόκεντρο κύβο με τον Q_k, πολλαπλασιασμένο με τον παράγοντα $(1 + \epsilon)$, με $\epsilon < \frac{1}{4}$. Δηλαδή,

$$Q_k^* = (1 + \epsilon)[Q_k - x^k] + x^k.$$

Τώρα, για $x \in Q_k^*$, από την παραπάνω σχέση έχω

$$\begin{aligned} \delta(x) \geq \quad & \mathrm{dist}(Q_k^*, \partial\Omega) \\ & \geq \mathrm{dist}(Q_k, \partial\Omega) - \mathrm{dist}(Q_k, \partial Q_k^*) \\ & = \mathrm{dist}(Q_k, \partial\Omega) - \epsilon\mathrm{diam}(Q_k) \\ & \geq \mathrm{dist}(Q_k, \partial\Omega) - \frac{1}{4}\mathrm{diam}(Q_k) \geq \frac{3}{4}\mathrm{diam}(Q_k). \end{aligned}$$

Άρα συνοψίζοντας, αν $x \in Q_k$ τότε $\delta(x) \leq 5\mathrm{diam}(Q_k)$, ενώ αν $x \in Q_k^*$, τότε $\delta(x) \geq \frac{3}{4}\mathrm{diam}(Q_k)$. Σε κάθε περίπτωση βέβαια $\phi_k(x) = 1$ για $x \in Q_k$, άρα

$$\delta_{\Omega,reg}(x) \geq \mathrm{diam}(Q_k) \geq \frac{\delta(x)}{5} \quad , x \in Q_k.$$

Από την άλλη κάθε x ανήκει το πολύ σε N από τα Q_k^* και τότε

$$\delta_{\Omega,reg}(x) \leq \sum_{x \in Q_k^*} \mathrm{diam}(Q_k) \leq \frac{4}{3}N\delta(x).$$

Μόλις αποδείξαμε τον ισχυρισμό 1) με $c_1 = \frac{1}{5}$ και $c_2 = \frac{4}{3}N$.

Για τον ισχυρισμό 2) θα χρησιμοποιήσουμε την ανισοτική σχέση

$$\big|\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^{\alpha}\phi_k(x)\big| \leq A_{\alpha}(\mathrm{diam}Q_k)^{-|\alpha|}$$

που έπεται άμεσα από τον ορισμό των $\phi_k(x)$ και Q_k και εργαζόμαστε όπως πριν.

Παρατήρηση 3.2.10. *Είναι χρήσιμο να σημειώσουμε ότι δοθέντως ενός φραγμένου και ανοικτού $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ η λύση του (3. 18) είναι κάτω φραγμένη από πληθώρα συναρτήσεων του τετραγώνου της απόστασης από το σύνορο (που εξαρτώνται μόνο από την διάσταση n). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με πολλούς τρόπους, ένας εκ των οποίων είναι με χρήση της $\delta_{\Omega,reg}$,της ''κανονικοποιημένης'' ουσιαστικά συνάρτησης απόστασης του $\partial\Omega$ που είδαμε στο παραπάνω θεώρημα. Αυτή, όπως είδαμε, είναι C^∞ συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ με $\delta_{\Omega,reg} \approx \delta_\Omega$, με την ιδιότητα για κάθε α να υπάρχει $C_\alpha > 0$ σταθερά, τέτοια ώστε*

$$|\partial^{\alpha}\delta_{\Omega,reg}(x)| \leq C_{\alpha}\delta_{\Omega}(x)^{1-|\alpha|}, \quad \forall x \in \Omega. \tag{3. 32}$$

Ειδικότερα, υπάρχει πεπερασμένη σταθερά $C > 0$ ώστε

$$|\Delta(\delta^2_{\Omega,reg})(x)| \leq C \quad \forall x \in \Omega.$$

Αυτό δίνει ότι η $u - C^{-1}\delta^2_{\Omega,reg}$ είναι υπεραρμονική στο Ω, συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και μηδενίζεται στο $\partial\Omega$. Άρα από την αρχή μεγίστου,

$$u(x) \geq C_n\delta_\Omega(x)^2 \quad \forall \quad x \in \Omega.$$

Μία βέλτιστη εκδοχή της εκτίμησης αυτής είναι

$$u(x) \geq (2n)^{-1}\delta_\Omega(x)^2 \quad \forall \quad x \in \Omega. \tag{3. 33}$$

Για να το δείξουμε αυτό, θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $x_o \in \Omega$ και θέτουμε $r := \delta_\Omega(x_o)$. Τότε, για κάθε $\epsilon \in (0, r)$ έχουμε ότι $\overline{B(x_o, r-\epsilon)} \subseteq \Omega$ και $u \in C^\infty(\overline{B(x_o, r-\epsilon)})$. Στην συνέχεια θεωρούμε την

$$v(x) := (2n)^{-1}((r-\epsilon)^2 - |x - x_o|^2), \quad x \in B(x_o, r-\epsilon). \tag{3. 34}$$

Για την $v(x)$ ισχύει ότι $\Delta v(x) = -1$ στην $B(x_o, r-\epsilon)$, άρα

$$\Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v = -1 - (-1) = 0,$$

δηλαδή η $u - v$ είναι αρμονική. Έστω, $x \in \partial B(x_o, r-\epsilon)$. Τότε, $u(x) - v(x) = u(x) > 0$. Από την αρχή μεγίστου, έπεται ότι

$$u(x) - v(x) \geq 0 \quad \forall x \in B(x_o, r-\epsilon)$$

και ειδικότερα, $u(x_o) \geq v(x_o) = (2n)^{-1}(r-\epsilon)^2$.

Τέλος για $\epsilon \to 0$ έχουμε

$$u(x_o) \geq (2n)^{-1} r^2 = (2n)^{-1} \delta_\Omega(x_o)^2$$

και αφού το $x_o \in \Omega$ είναι τυχαίο, η (3. 33) απεδείχθει.

Στην παρακάτω πρόταση παραθέτουμε μία εκδοχή του τύπου συνεμβαδού (Coarea formula). Δοθέντως $n \in \mathbb{N}$ και συμβολίζοντας με $\mathcal{L}^n$ το $n-$διάστατο μέτρο *Lebesgue* στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\ k \leq n$, θεωρούμε $\mathcal{H}^k$ το $k-$διάστατο μέτρο Hausdorff στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 3.2.11. *Έστω $n \geq m$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ που είναι $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο και $g \in L^1(A)$ έχουμε ότι η $g|_{A \cap f^{-1}(\{y\})}$ είναι για σχεδόν όλα τα $y \in \mathbb{R}^m$ ως προς το μέτρο $\mathcal{L}^n$, $\mathcal{H}^{n-m}$ αθροίσιμη και ισχύει ότι*

$$\int_A g(x)|(Jf)(x)| d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{A \cap f^{-1}(\{y\})} g d\mathcal{H}^{n-m} \Big) d\mathcal{L}^m(y) \qquad (3.\ 35)$$

όπου $Jf = \sqrt{\det[(Df)(Df)^T]}$ η Ιακωβιανή της f.

Τώρα θα ανακαλέσουμε την σχέση (2. 10) αφού πρώτα δώσουμε έναν βοηθητικό ορισμό.

Ορισμός 3.2.12. *Ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, καλείται Jordan μετρήσιμο αν το σύνορό του είναι μηδενικού μέτρου Lebesgue.*

Λήμμα 3.2.13. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, φραγμένο, ανοικτό και επιπλέον Jordan μετρήσιμο. Θέτουμε τότε*

$$\Omega_t := \{x \in \Omega : \delta_\Omega(x) \geq t\}.$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε :

$$\lim_{r \to 0^+} \omega_\alpha(r) = 0 \qquad \text{και} \qquad \int_0 \frac{\omega_\alpha(r)}{r} dr < +\infty, \qquad (3.\ 36)$$

όπου,

$$\omega_\alpha(r) := \frac{|\{x \in \Omega : \delta_\Omega(x) < r\}|}{r^\alpha}.$$

Τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_t} \delta_\Omega(x)^{-\alpha} dx = \omega_\alpha(t) + \alpha \int_0^t \frac{\omega_\alpha(r)}{r} dr. \tag{3. 37}$$

Ειδικότερα, για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\int_\Omega \delta_\Omega(x)^{-\alpha} dx \leq t^{-\alpha} \mathcal{L}^n(\Omega) + \alpha \int_0^t \frac{\omega_\alpha(r)}{r} dr < +\infty. \tag{3. 38}$$

Απόδειξη: Από την υπόθεση ότι το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι Jordan μετρήσιμο, έχουμε

$$\mathcal{L}^n(\partial\Omega) = 0. \tag{3. 39}$$

Τώρα για κάθε $t > 0$ θα εφαρμόσουμε το τύπο συνεμβαδού (3. 35), με $A := \Omega\setminus\Omega_t, g \in L^1(\Omega\setminus\Omega_t)$ τυχαία και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, όπου ,$f(x) := \delta_\Omega(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\partial\Omega_t = \Omega \cap \delta_\Omega^{-1}(\{t\})$ για κάθε $t > 0$ και

$$Jf(x) = \begin{cases} 1 & \textit{κατά } \mathcal{L}^n \textit{ μέτρο για σχεδόν κάθε } x \in \Omega \\ 0 & \textit{κατά } \mathcal{L}^n \textit{ μέτρο για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}^n\setminus\Omega. \end{cases} \tag{3. 40}$$

Άρα, για κάθε $t > 0$ έχουμε χρησιμοποιώντας την (3. 39)

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_t} g(x) dx = \int_0^t \Big(\int_{\partial\Omega_r} g d\mathcal{H}^{n-1} \Big) dr. \tag{3. 41}$$

Ειδικότερα,

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{\Omega\setminus\Omega_t} g(x) dx \Big) = \int_{\partial\Omega_t} g d\mathcal{H}^{n-1} \textit{ κατά } \mathcal{H}^1 \textit{ για σχεδόν κάθε } t > 0 \tag{3. 42}$$

όπου για $g = 1$ έχουμε

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_t) = \frac{d}{dt}(\mathcal{L}^n(\Omega\setminus\Omega_t)) \quad \textit{κατά} \quad \mathcal{H}^1 \textit{ για σχεδόν κάθε } t > 0. \tag{3. 43}$$

Ειδικότερα στην (3. 41) αν για κάποιο συγκεκριμένο $\alpha > 0$ και $M > 0$ πάρουμε

$$g(x) := \min\{\delta_\Omega(x)^{-\alpha}, M\} \qquad \forall \quad x \in \Omega \backslash \Omega_t \tag{3. 44}$$

θα έχουμε τότε, ότι $g \in L^1(\Omega\backslash\Omega_t)$, οπότε για αυτήν την g έχουμε

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_t} \min\{\delta_\Omega(x)^{-\alpha}, M\} dx = \int_0^t \min\{r^{-\alpha}, M\} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_r) dr. \tag{3. 45}$$

Άρα τελικά, παίρνοντας $M \to +\infty$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης του Lebesgue, παίρνουμε

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_t} \delta_\Omega(x)^{-\alpha} dx = \int_0^r r^{-\alpha} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_r). \tag{3. 46}$$

Από την (3. 43) τώρα και την (3. 46) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_t} \delta_\Omega(x)^{-\alpha} dx = \int_0^t r^{-\alpha} \frac{d}{dr}(\mathcal{L}^n(\Omega\backslash\Omega_r)) dr. \tag{3. 47}$$

Τώρα ολοκληρώνοντας κατά μέλη το δεξιό μέλος της ισότητας (3. 47) έχουμε

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_t} \delta_\Omega(x)^{-\alpha} dx = t^{-\alpha}\mathcal{L}^n(\Omega\backslash\Omega_t) - \lim_{r\to 0^+} (r^{-\alpha}\mathcal{L}^n(\Omega\backslash\Omega_r)) + \alpha \int_0^t r^{-\alpha-1}\mathcal{L}^n(\Omega\backslash\Omega_r) dr, \tag{3. 48}$$

και άρα

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_t} \delta_\Omega(x)^{-\alpha} dx = \omega_\alpha(t) - \lim_{r\to 0^+} \omega_\alpha(r) + \alpha \int_0^t \frac{\omega_\alpha(r)}{r} dr. \tag{3. 49}$$

Τώρα η (3. 37) έπεται από αυτό όπως και η (3. 36). Επίσης, άμεση συνέπεια της (3. 37) αλλά και του ότι

$$\int_{\Omega_t} \delta_\Omega(x)^{-\alpha} dx \le t^{-\alpha}\mathcal{L}^n(\Omega_t)$$

καθώς ακόμα και του ότι

$$t^{-\alpha}\mathcal{L}^n(\Omega_t) + \omega_\alpha(t) = t^{-\alpha}\mathcal{L}^n(\Omega)$$

είναι η (3. 38).

Παρατήρηση 3.2.14. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα Jordan-μετρήσιμο, φραγμένο και ανοικτό σύνολο. Τότε παρατηρώντας την απόδειξη του παραπάνω λήμματος ευκόλα συμπεραίνουμε ότι*

$$\int_{\Omega} \delta_{\Omega}(x)^{-\alpha} dx < +\infty \quad \textit{όταν} \quad \dim^*_{Minkowski}(\partial\Omega) < n - \alpha \tag{3. 50}$$

και

$$\int_{\Omega} \delta_{\Omega}(x)^{-\alpha} dx = +\infty \quad \textit{όταν} \quad \sup\{\gamma \geq 0 : M^*_{\gamma}(\partial\Omega) < +\infty, M_{*,\gamma}(\partial\Omega) > 0\} > n-\alpha. \tag{3. 51}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την (3. 50). Λόγω της (3. 37), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0^t \frac{\omega_{\alpha}(r)}{r} dr < \infty.$$

Έστω $\dim^*_{\text{Minkowski}}(\partial\Omega) < \gamma < n - \alpha$.

Τότε

$$\lim_{r \to 0} \omega_{n-\gamma}(r) = 0.$$

Άρα,

$$\int_0^t \frac{\omega_{\alpha}(r)}{r} dr = \int_0^t \omega_{n-\gamma}(r) r^{n-\gamma-\alpha-1} < \infty,$$

αφού ισχύει ότι $n - \gamma - \alpha - 1 > -1$.

Ορισμός 3.2.15. *Το σύνολο $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται Ahlfors κανονικό, αν υπάρχουν πεπερασμένες σταθερές $C_o, C_1 > 0$ καθώς και ένας αριθμός $R > 0$ ώστε*

$$C_o r^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(B(x,r) \cap \Sigma) \leq C_1 r^{n-1}, \quad \forall \quad x \in \Sigma, \quad \forall \quad r \in (0, R). \tag{3. 52}$$

Η τριάδα των C_o, C_1, R θα αναφέρεται ως ο Ahlfors χαρακτήρας του Σ.

Λήμμα 3.2.16. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο, ανοικτό, του οποίου το σύνορο είναι Ahlfors κανονικό. Τότε για κάθε εκθέτη $\alpha \in [0, 1)$ υπάρχει σταθερά $C > 0$, η οποία εξαρτάται μόνο από το n, το α αλλά και τον Ahlfors χαρακτήρα του $\partial\Omega$ ώστε*

$$\int_{\Omega} \delta_{\Omega}(x)^{-\alpha} dx \leq C[\mathcal{L}^n(\Omega)]^{1-\alpha}[\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)]^{\alpha}. \tag{3. 53}$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακόλουθη γενικευμένη ισοπεριμετρική ανισότητα ισχύει

$$\int_\Omega \delta_\Omega(x)^{-\alpha}dx \leq C[\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)]^{\frac{n-\alpha}{n-1}} \tag{3. 54}$$

και μάλιστα πιο συγκεκριμένα κάτω από τις ίδιες συνθήκες ισχύει

$$\int_\Omega \delta_\Omega(x)^{-\alpha}dx \leq C\mathrm{diam}(\Omega)^{n-\alpha}. \tag{3. 55}$$

Απόδειξη: Αρχικά υπάρχει μία εκδοχή της ισοπεριμετρικής ανισότητας [9], που λέει ότι αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{L}^n(\overline{E}) < \infty$, τότε

$$\mathcal{L}^n(\overline{E}) \leq \frac{1}{n(\omega_{n-1})^{1/(n-1)}}[\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)]^{\frac{n}{n-1}} \tag{3. 56}$$

όπου το ω_{n-1} υποδηλώνει το εμβαδό επιφάνειας της S^{n-1}. Φυσικά η (3. 56) ικανοποιεί και την (3. 53) για $\alpha = 0$. Άρα εμείς θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση όπου $0 < \alpha < 1$.

Για να συνεχίσουμε, πρέπει να επισημαίνουμε δύο συνέπειες της υπόθεσης ότι το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό, φραγμένο με Ahlfors κανονικό σύνορο. Αρχικά, αποδεικνύεται ότι λόγω του Ahlfors χαρακτήρα του συνόρου, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^n(\partial\Omega) = 0,$$

δηλαδή το Ω είναι Jordan- μετρήσιμο.

Επιπλέον, έχει αποδειχτεί [9] ότι

$$\mathcal{L}^n(\Omega\backslash\Omega_r) \leq Cr\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \quad ,\forall \quad r > 0 \tag{3. 57}$$

όπου το $C > 0$ εξαρτάται μόνο από τον Ahlfors χαρακτήρα του $\partial\Omega$ και όπως πριν για κάθε $r > 0$,

$$\Omega_r = \{x \in \Omega : \delta_\Omega(x) \geq r\}.$$

Πιο συγκεκριμένα η (3. 57) συνεπάγεται

$$\omega_\alpha(r) \leq Cr^{1-\alpha}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega), \quad \forall \quad r > 0 \tag{3. 58}$$

και αφού $\alpha \in (0, 1)$, έπεται ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 3.2.13.

Τότε η (3. 38) δίνει

$$\begin{aligned} \int_\Omega \delta_\Omega(x)^{-\alpha}dx &\leq t^{-\alpha}\mathcal{L}^n(\Omega) + C\alpha\Big(\int_0^t r^{-\alpha}dr\Big)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \\ &= t^{-\alpha}\mathcal{L}^n(\Omega) + \frac{C\alpha}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \qquad (3.\ 59) \end{aligned}$$

για κάθε $t > 0$. Επιλέγοντας τώρα

$$t = \mathcal{L}^n(\Omega)/\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$$

τότε αμέσως έχουμε την (3. 53). Από αυτήν, την (3. 53) έπεται και η (3. 54), αφού πρώτα παρατηρήσουμε ότι από την (3. 56) συνεπάγεται η

$$[\mathcal{L}^n(\Omega)]^{1-\alpha} \leq C_{n,\alpha}[\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)]^{\frac{n(1-\alpha)}{n-\alpha}}. \qquad (3.\ 60)$$

Όσον αφορά τώρα την (3. 55), αυτή είναι συνέπεια της (3. 54) και του γεγονότος ότι για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^n$ με Ahlfors κανονικό σύνορο ισχύει

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \leq C[\mathrm{diam}(E)]^{n-1} \qquad (3.\ 61)$$

όπου η σταθερά $C > 0$ εξαρτάται μόνο από τον Ahlfors χαρακτήρα του ∂E (στην πραγματικότητα, εδώ μας αρκεί μόνο το άνω φράγμα της συνθήκης περί Ahlfors κανονικότητας).

Σε αυτό το σημείο, μας μένει να αποδείξουμε την (3. 61) και δεδομένης της φύσης αυτής της εκτίμησης, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι $\overline{E} \subseteq (-1,1)^n$. Χωρίζουμε τώρα τον κύβο $(-1,1)^n$, σε ένα πλέγμα υποκύβων με το ίδιο μέγεθος τους οποίους θέτουμε

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{Q}\in\mathcal{J}},\ \textit{πλευρας}\ R/(2\sqrt{n})$$

όπου το $R \in (0,1)$ είναι τέτοιο ώστε να υπάρχει $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{H}^{n-1}(B(x,r)\cap\partial E) \leq Cr^{n-1}, \quad \forall \quad x \in \partial E, \forall \quad r \in (0,R). \qquad (3.\ 62)$$

Θεωρούμε τώρα την υποοικογένεια

$$\mathcal{J}_* = \{\mathcal{Q} \in \mathcal{J} : \mathcal{Q} \cap \partial E \neq \emptyset\}$$

και για κάθε $\mathcal{Q} \in \mathcal{J}_*$ επιλέγω $x_\mathcal{Q} \in \mathcal{Q} \cap \partial E$. Τότε, για $x \in \partial E$ και $Q \in \mathcal{J}_*$ τέτοια ώστε $x \in \mathcal{Q} \cap \partial E$, έχουμε

$$|x - x_\mathcal{Q}| < \frac{1}{2}\mathrm{diam}(Q) = \frac{R}{2}.$$

Άρα

$$\partial E \subseteq \bigcup_{Q \in \mathcal{J}_*} B(x_Q, R/2). \tag{3. 63}$$

Τώρα, συνδυάζοντας την (3. 63) με την (3. 62) και το γεγονός ότι το $\mathcal{H}^{n-1}$ είναι εξωτερικό μέτρο έχουμε

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \leq \sum_{Q \in \mathcal{J}_*} (\partial E \cap B(x_Q), R/2)$$

$$\leq C(R/2)^{n-1} \# \mathcal{J}_* \leq 2Cn^{n-2}R^{-1}. \tag{3. 64}$$

Όποτε πλέον η απόδειξη της (3. 61) έχει ολοκληρωθεί.

Ακολουθεί το πιο σημαντικό θεώρημα της εργασίας.

Θεώρημα 3.2.17. *i) Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο χωρίο με το σύνορό του να έχει πεπερασμένη άνω χωρητικότητα Minkowski διάστασης γ, με $\gamma < n$, τότε η*

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta} \leq C(\Omega, \beta) < +\infty$$

ισχύει για κάθε $\beta \in (0, (n-\gamma)/2)$.

ii) Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο χωρίο με το σύνορό του να είναι Ahlfors κανονικό, τότε η

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta} \leq C(\Omega, \beta) < +\infty$$

ισχύει για κάθε $\beta \in (0, 1/2)$ και επιπλέον

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta} dx \leq C[\mathcal{L}^n(\Omega)]^{1-2\beta}[\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)]^{2\beta} \leq C \mathrm{diam}(\Omega)^{n-2\beta} \tag{3. 65}$$

αν $\beta < 1/2$, όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τον Ahlfors χαρακτήρα του $\partial\Omega$, το n και το β.

iii) Όσον αφορά την

$$\int_\Omega u(x)^{-\beta}dx \le C[\mathcal{L}^n(\Omega)]^{1-2\beta}[\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)]^{2\beta} \le C\mathrm{diam}(\Omega)^{n-2\beta},$$

το $\beta = 1/2$ *αποτελεί κρίσιμη τιμή , καθώς για* $\beta \in (1/2, 1)$ *υπάρχει φραγμένο χωρίο* $\Omega_\beta \subseteq \mathbb{R}^n$ *το οποίο ικανοποιεί το πρόβλημα Dirichlet και έχει Ahlfors κανονικό σύνορο, και αν η* u *είναι λύση του*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega), \qquad \Delta u = -1 \quad \textit{στο} \quad \Omega$$

τότε

$$\int_{\Omega_\beta} u(x)^{-\beta}dx = +\infty. \tag{3. 66}$$

Απόδειξη: Για τα (i) - (ii), έχω ότι έπονται άμεσα από το Λήμμα 3.2.13 και το Λήμμα 3.2.16 , με χρήση της (3. 33).

Για το (iii) τώρα ο στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα αντιπαράδειγμα για την (3. 11), για $\beta \in (1/2, 1)$ για φραγμένα χωρία που ικανοποιούν το πρόβλημα Dirichlet και τα σύνορά τους είναι Ahlfors κανονικα. Για να το κάνουμε αυτό ''φιξάρουμε'' ένα $\beta \in (1/2, 1)$ και θεωρούμε το ακόλουθο καμπυλόγραμμο τρίγωνο Ω_β στον $\mathbb{R}^2$

$$\Omega_\beta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \textit{ και } 0 < y < \epsilon x^{1/(2\beta-1)}\} \tag{3. 67}$$

όπου το $\epsilon = \epsilon(\beta)$ είναι μία πολύ μικρή θετική σταθερά που θα προσδιοριστεί στην συνέχεια. Άρα η συνάρτηση

$$v(x, y) := y(\epsilon x^{1/(2\beta-1)} - y), \quad \forall \quad (x, y) \in \Omega_\beta \tag{3. 68}$$

είναι θετική μέσα στο Ω_β και μη αρνητική στο σύνορό του. Επιπλέον για κάθε $(x, y) \in \Omega_\beta$ έχουμε

$$\begin{aligned} -(\Delta v)(x, y) &= 2 - \frac{2\epsilon(1-\beta)}{(2\beta-1)^2}x^{(3-4\beta)/(2\beta-1)}y \\ &\ge 2 - \frac{2\epsilon^2(1-\beta)}{(2\beta-1)^2}x^{(4-4\beta)/(2\beta-1)} \\ &\ge 2 - 2\epsilon^2(1-\beta)(2\beta-1)^{-2} \end{aligned} \tag{3. 69}$$

όπου για το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε ότι $\beta \in (1/2, 1)$.

Τώρα επιλέγουμε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε η τελευταία έκφραση της (3. 69) να είναι μεγαλύτερη ίση της μονάδος, δηλαδή

$$2 - 2\epsilon^2(1-\beta)(2\beta-1)^{-2} \geq 1.$$

Εξ αιτίας αυτής της επιλογής μας η $u - v$ πρέπει να είναι υφαρμονική στο Ω_β, με u λύση του προβλήματος Saint Venant στο Ω_β. Επιπλέον η $u - v \leq 0$ στο $\partial\Omega_\beta$. Όμως από την Αρχή Μεγίστου έχουμε $u \leq v$ στο Ω_β άρα

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\beta} u(x,y)^{-\beta} dxdy &\geq \int_{\Omega_\beta} v(x,y)^{-\beta} dxdy \\
&= \int_0^1 \Big(\int_0^{\epsilon x^{1/(2\beta-1)}} y^{-\beta}(\epsilon x^{1/(2\beta-1)} - y)^{-\beta} dy \Big) dx \\
&= \epsilon^{1-2\beta} \Big(\int_0^1 x^{-1} dx \Big) \Big(\int_0^1 t^{-\beta}(1-t)^{-\beta} dt \Big) = +\infty
\end{aligned}$$

με αλλαγή μεταβλητών στο εσωτερικό ολοκλήρωμα της δεύτερης γραμμής $y = \epsilon x^{1/(2\beta-1)} t$. Σε αυτό το σημείο η απόδειξή μας έχει ολοκληρωθεί.

Αναφορές

[1] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations,*second ed.,American Mathematical Society ,Rhode island Usa ,2010. ISBN 978-0-8218-4974-3

[2] Kenneth Falconer *Fractal Geometry,Mathematical Foundations and applications,*second ed.,John Wiley & sons ltd,West Sussex,England ,2003 ISBN 0-470-84861-8

[3] Antony Carbery,Vladimir Maz'ya, Marius Mitrea, David J.Rule *The Integrability of Negative Powers of the Solution of the Saint Venant Problem* ,2012

[4] Antony Carbery *A uniform sublevel set estimate, in Proceedings of Conference on Harmonic Analysis and PDE,*, El Escorial, 2008.

[5] Michael Gruter,Kjell-Ove Widman *The Green function for uniformly elliptic equations*,Springer-Verlag,1982

[6] E.M.Stein *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press,Princeton, N.J,1970

[7] Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα *Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας*, Τμήμα Μαθηματικών,Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2000

[8] A.Colesanti and M.Fimiani, *The Minkowski problem for the torsional rigidity, preprint (2008).*

[9] H.Federer, *Geometric Measure Theory,* reprint of the 1969 edition, Springer-Verlag, 1996.

[10] C.E.Kenig, *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems,* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol.83, AMS, Providence, RI, 1994.