ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

**ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

***"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"***

# ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

## «Μελέτη της νοηματοδότησης της έννοιας του απείρου από μαθητές της Β΄Λυκείου κατά την επίλυση προβλημάτων με χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας»

**Σύψα Πολυνίκη**
**Δ201612**

**Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής**

Γ. Ψυχάρης Επικ. Καθηγητής ΕΚΠΑ

**Αθήνα**
**Σεπτέμβριος 2019**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

**Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

που απονέμει το

**Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη**

**«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την 9η Ιουλίου 2019 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

| **Ονοματεπώνυμο** | **Βαθμίδα** |
| --- | --- |
| ▪ Θ. Ζαχαριάδη | Καθηγητή ΕΚΠΑ |
| ▪ Δ. Πόταρη | Καθηγήτρια ΕΚΠΑ |
| ▪ Γ. Ψυχάρη (επιβλέπων) | Επικ. Καθηγητή ΕΚΠΑ |

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

| **Ονοματεπώνυμο** | **Βαθμίδα** |
| --- | --- |
| ▪ Θ. Ζαχαριάδη | Καθηγητή ΕΚΠΑ |
| ▪ Δ. Πόταρη | Καθηγήτρια ΕΚΠΑ |
| ▪ Γ. Ψυχάρη (επιβλέπων) | Επικ. Καθηγητή ΕΚΠΑ |

# Ευχαριστίες

Με το πέρας των σπουδών μου θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου, τον κ. Ψυχάρη Γεώργιο για τις εύστοχες παρατηρήσεις, την καθοδήγηση και το χρόνο που αφιέρωσε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας μου.
- Τον καθηγητή κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο για το ενδιαφέρον που έδειξε ως μέλος της συμβουλευτικής επιτροπής και για τις στοχευμένες παρατηρήσεις του.
- Την καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα που με τίμησε με τη συμμετοχή της στη συμβουλευτική επιτροπή.
- Όλους τους διδάσκοντες του προγράμματος για τις γνώσεις που μου προσέφεραν στη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.
- Τη μητέρα μου και την αδερφή μου για την υποστήριξη που μου προσφέρουν.
- Τον Βαλάντη για τις πολύτιμες συμβουλές του, τις εύστοχες παρατηρήσεις του και την αυστηρή κριτική που άσκησε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας μου.

# Περίληψη

Έχουν καταγραφεί σοβαρά προβλήματα κατά τη διδασκαλία εννοιών λογισμού με εκπαιδευόμενους να εμφανίζουν έλλειψη εννοιολογικού υπόβαθρου εννοιών λογισμού, αδυναμία συνδέσεων, ελλιπείς νοηματοδοτήσεις ως προς τις εικόνες των εννοιών. Προβλήματα που πηγάζουν από τη μαθησιακή διαδικασία αλλά και από επιστημολογικά εμπόδια των ίδιων των εννοιών. Όταν συζητάμε για έννοιες του λογισμού αναφερόμαστε σε έννοιες όπως οι πραγματικοί αριθμοί, οι ακολουθίες, οι σειρές, το όριο, η συνέχεια κτλ., που στη θεωρητική τους βάση έχουν το άπειρο, μια έννοια που προκαλεί συγκρούσεις και παράδοξα.

Η παρούσα έρευνα είναι μια προσπάθεια να μελετήσει τις νοηματοδοτήσεις εννοιών λογισμού, μαθητών λυκείου οι οποίοι δεν έχουν διδαχθεί τυπικά τέτοιες έννοιες καθώς και το ρόλο των πλαισίων, των περιβαλλόντων εργασίας, των tasks και των αναπαραστάσεων, στην κατασκευή τέτοιων νοημάτων. Οι μαθητές διερεύνησαν ένα ρεαλιστικό πρόβλημα και ένα γεωμετρικό αναπτύσσοντας στρατηγικές στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι, σε ένα μικρόκοσμο και στο περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας geogebra. Συγκεκριμένα η ενσωμάτωση του μικρόκοσμου με τη δυνατότητα συντονισμού μέσω ενός κώδικα των αναπαραστάσεων (οπτικών, αριθμητικών, συμβολικών) που προσφέρει, είχε ως στόχο την κατασκευή διάφορων μορφών αναπαραστάσεων, το δυναμικό συντονισμό και χειρισμό αυτών και τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ αυτών.

Στα αποτελέσματα της έρευνας κατεγράφησαν επεισόδια στα οποία οι μαθητές κατασκεύασαν νοήματα, μέσω στρατηγικών που αναφέρθηκαν πιο πάνω, ενώ παρατηρήθηκαν και περιστατικά που οι μαθητές εδραίωσαν τις νοηματοδοτήσεις τους κάνοντας συνδέσεις μεταξύ των προβλημάτων και μεταφέροντας αντιλήψεις από το ένα πλαίσιο στο άλλο.



**Λέξεις κλειδιά:** άπειρο, μικρόκοσμος, λογισμός, νοηματοδότηση, συντονισμός αναπαραστάσεων, AiC

# Abstract

It is well documented that serious problems occur in calculus courses where the students demonstrate lack of conceptual background, inability for connections, defective understanding of concept images. The aforementioned problems originate from the learning process and from the relevant epistemological obstacles. Examples of calculus concepts are the real numbers, sequences, series, limits, continuity etc. The common theoretical basis is the concept of infinity which is inherently paradoxical and produces conflicts.

In this thesis, we study the conceptual understanding of high school students that didn't have a formal course in such matters and the role of the contexts, the tasks and the representations in the development of their ideas. The students first worked on a realistic problem and then on a geometrical one. They developed problem solving strategies using a static environment (pencil and paper), an appropriate microworld and a dynamic geometry environment (GeoGebra). More specifically the microworld's integration offered the ability to coordinate the representations (optical, arithmetical, symbolic) through the use of appropriate code, the ability to dynamically manipulate the representations and the power to create relevant connections.

In the results of our study we record incidents where the students constructed new meanings using the aforementioned strategies and incidents where the students consolidated their understanding through appropriate connections and the use of multiple contexts



**Keywords:** infinity, microworld, calculus, conceptualization, representation coordination, AiC

# Περιεχόμενα

# Εισαγωγή

Η αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και του απειροστικού λογισμού στο 19ο αιώνα και η πληθώρα θεωρητικών αποτελεσμάτων που έφερε, οδήγησε στην σταδιακή ένταξη των νέων τυπικών μορφών των εννοιών του απειροστικού λογισμού στην εκπαίδευση.

Σε επίπεδο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης έννοιες του απειροστικού λογισμού, όπως οι πραγματικοί αριθμοί, οι ακολουθίες, οι σειρές, τα όρια, οι παράγωγοι, τα ολοκληρώματα, εισάγονται από το πρώτο εξάμηνο σπουδών, ενώ έχει προηγηθεί στο λύκειο, με εστίαση στην τελευταία τάξη, μια παρουσίαση σε εισαγωγικό επίπεδο των εννοιών του ορίου, της συνέχειας, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων. Ωστόσο η διδασκαλία στο λύκειο και ιδιαίτερα στην τελευταία τάξη, υπό την πίεση και των γενικών εξετάσεων, δίνει έμφαση στο υπολογιστικό μέρος σε βάρος του θεωρητικού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μαθητές να εισάγονται σε σχολές θετικών επιστημών, χωρίς επαρκές εννοιολογικό υπόβαθρο βασικών εννοιών και να αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στο πρώτο έτος των σπουδών τους στο μάθημα του απειροστικού λογισμού.

Από την άλλη παρατηρούνται σοβαρά προβλήματα κατά τη διδασκαλία εννοιών λογισμού και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, λόγω της εστίασης στην τυπική διδασκαλία, στο φορμαλισμό και στις αλγοριθμικές διαδικασίες, με τους σπουδαστές να έχουν μικρή κατανόηση του τι πραγματικά σημαίνουν οι έννοιες, να μην έχουν σχετικές εικόνες και να έχουν μικρή ή και καθόλου επίγνωση της σύνδεσης αυτών των εννοιών με άλλες καταστάσεις εντός και εκτός των μαθηματικών. Η εστιασμένη διδασκαλία σε αλγοριθμικές προσεγγίσεις αποφεύγει την αντιμετώπιση των δυσκολιών των σπουδαστών.

Συγκεκριμένα κατά τη μελέτη κειμένων που χρησιμοποιούνται σε μαθήματα απειροστικού λογισμού και πρακτικών διδασκαλίας σε περιοχές του Καναδά και του Ηνωμένου Βασιλείου, οι González-Martín, Nardi και Biza (2011), εστιάζοντας στην έννοια της σειράς διαπιστώνουν ότι η παρουσίαση της έννοιας στα κείμενα είναι μη ιστορική, αποπλαισιωμένη, χωρίς οπτικοποιήσεις και εφαρμογές σε άλλους κλάδους, ενώ κυριαρχεί η αλγεβρική εγγραφή και η φορμαλιστική προσέγγιση. Οι δραστηριότητες συγκεντρώνονται σε αλγοριθμικές διαδικασίες, κυρίως σε εφαρμογές κριτηρίων σύγκλισης, ενώ απουσιάζουν ευκαιρίες για διερεύνηση και επιστημολογική προσέγγιση. Μέσα από τα κείμενα ελάχιστες ευκαιρίες δίνονται για συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών εγγραφών. Παρόμοια εικόνα εμφανίζει και η διδασκαλία της έννοιας. Η εστίαση περιστρέφεται σε τεχνικές εφαρμογής των κριτηρίων σύγκλισης, ενώ οι διδάσκοντες δεν δίνουν ευκαιρίες για την εμπλοκή των σπουδαστών με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας και το συντονισμό αυτών, ενώ οι έννοιες παρουσιάζονται ως μαθηματικά αντικείμενα που εκπληρώνουν μόνο μαθηματικές ανάγκες, χωρίς εφαρμογές σε άλλους κλάδους. Οι ίδιοι οι διδάσκοντες παρατηρούν σοβαρές δυσκολίες και έλλειψη εννοιολογικών κατανοήσεων, ενώ εκφράζουν την επιθυμία για έναν εννοιολογικό προσανατολισμό με ενσωμάτωση οπτικοποίησης, ψηφιακών εργαλείων και ευκαιριών συνδέσεων και διερεύνησης. Πολλοί ερευνητές εστιάζουν στη σημασία του πλαισίου και των tasks και υποστηρίζουν το συνδυασμό διαφορετικών πλαισίων, αλγεβρικού και γεωμετρικού με χρήση αλγεβρικής γλώσσας (Waldegg, 1987) και το σχεδιασμό tasks συνδέσεων διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων (Sacristán & Noss, 2008). Επίσης πολλοί αναφέρουν τα οφέλη της χρήσης ψηφιακών περιβαλλόντων, ενώ η Sacristán προτείνει τη χρήση μικρόκοσμων εξαιτίας της δυνατότητας συντονισμού διαφορετικών αναδιπλούμενων αναπαραστάσεων (συμβολικών, οπτικών, αριθμητικών), μέσω ενός κώδικα συμβολικής έκφρασης.

Πέραν των διδακτικών πρακτικών για την παρουσίαση των εννοιών του λογισμού, δυσκολίες αναδύονται και εξαιτίας επιστημολογικών εμποδίων που πηγάζουν από αντιλήψεις της έννοιας του απείρου, μια έννοια που βρίσκεται στη θεωρητική βάση της ανάπτυξης του λογισμού. Το άπειρο είναι μια γνήσια διανοητική κατασκευή που καμιά απ’ ευθείας εμπειρία δεν μπορεί να την υποστηρίξει, χωρίς υλικές αναπαραστάσεις και χωρίς δυνατότητες ενσωμάτωσης στον πραγματικό κόσμο. Διάφορες πτυχές του απείρου όπως το εν δυνάμει άπειρο (potential infinity) έναντι του φύσει άπειρου (actual infinity) , το άπειρο ως διαδικασία έναντι του απείρου ως αντικείμενο, το απείρως μικρό έναντι του απείρως μεγάλου, το συνεχές έναντι του διακριτού, συνιστούν την παράδοξη φύση του. Οι διασθήσεις για το άπειρο είναι εγγενώς αντιφατικές, αφού τα λογικά σχήματα προσαρμόζονται σε πεπερασμένα αντικείμενα και γεγονότα. Έτσι στη μελέτη των δυσκολιών που προκαλούν οι έννοιες του λογισμού πρέπει να ενταχθεί η μελέτη του απείρου και των συγκρούσεων που εγείρει.

Η παρούσα έρευνα έχει ως στόχο τη μελέτη νοηματοδοτήσεων πτυχών του απείρου και εννοιών λογισμού, όπου στη θεωρητική τους βάση ενυπάρχει το άπειρο, σε μαθητές λυκείου οι οποίοι δεν έχουν πρότερη μαθησιακή εμπειρία με τέτοιες έννοιες στην τυπική τους μορφή. Λαμβάνοντας υπόψιν την υπάρχουσα έρευνα και μελετώντας τα εμπόδια και τις δυσκολίες τέτοιων εννοιών καθώς και την επίδραση διαφόρων διδακτικών πρακτικών στην κατασκευή νοημάτων, σχεδιάστηκαν δραστηριότητες για την εμπλοκή μαθητών που φοιτούν στη Β΄ λυκείου, ώστε να μελετηθούν και να αναλυθούν τα νοήματα που αναδύονται.

Ο σχεδιασμός ακολούθησε τις βασικές αρχές της θεωρίας δόμησης μέσω κατασκευών (contsructionism) και είχε ως στόχο να φέρει μαθητές της Β’ λυκείου, οι οποίοι δεν έχουν έως τώρα λάβει κάποιου είδους τυπική εκπαίδευση σε τέτοιες έννοιες, αντιμέτωπους με παράδοξες καταστάσεις, ώστε να χτίσουν σε αυτές, μέσα σε διαφορετικά πλαίσια (χρησιμοποιείται ένα ρεαλιστικό και ένα γεωμετρικό), σε ποικίλα περιβάλλοντα εργασίας (παραδοσιακό-στατικό, υπολογιστικά), που θα δίνουν ευκαιρίες κατασκευής αναπαραστάσεων διαφόρων ειδών (οπτικές, αλγεβρικές, αριθμητικές), χειρισμού και συντονισμού αυτών, ώστε να προκύψουν μεταξύ τους συνδέσεις. Έτσι λοιπόν ένας δεύτερος στόχος που τέθηκε, ήταν να μελετηθεί ο ρόλος των πλαισίων, των περιβαλλόντων εργασίας, των αναπαραστάσεων και των δραστηριοτήτων στην κατασκευή νοημάτων.

Κατά τη διαδικασία κατασκευής νοημάτων ολοκληρώθηκαν αφαιρέσεις που αναλύθηκαν με το μοντέλο RBC+C της AiC (αφαίρεση σε πλαίσιο), το οποίο περιγράφεται στο θεωρητικό πλαίσιο. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση δεδομένων δείχνουν ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα για το εν δυνάμει άπειρο (potential actual), ως διαδικασία που συνεχίζεται απεριόριστα, για τα απειροστά με την οπτική του Cauchy[1], για τη σύγκλιση γεωμετρικών σειρών. Λιγότερες νοηματοδοτήσεις εκφράστηκαν για την έννοια του απείρου ως αντικείμενο, για τη σύνδεση των σειρών με τις ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων τους και για τις ακολουθίες ως ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων.

Κυρίαρχο ρόλο στην κατασκευή αυτών των νοημάτων είχαν τα πλαίσια που χρησιμοποιήθηκαν, τα περιβάλλοντα εργασίας και οι δυνατότητες κατασκευής και σύνδεσης διαφορετικών αναπαραστάσεων που πρόσφεραν, ενώ παρατηρήθηκε ευχέρεια στη μετάβαση μεταξύ των πλαισίων, των περιβαλλόντων εργασίας και των αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια των διερευνήσεων.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην υπάρχουσα έρευνα. Παρουσιάζονται νοηματοδοτήσεις, δυσκολίες, εμπόδια και αντιλήψεις των πτυχών του απείρου και εννοιών οι οποίες βασίζονται στο άπειρο, όπως έχουν καταγραφεί έως τώρα. Επίσης αναφέρονται αποτελέσματα ερευνών σχετικά με τη μαθησιακή διαδικασία, τις διδακτικές πρακτικές και προσεγγίσεις και τα οφέλη ή τα εμπόδια που αναδύονται μέσα από αυτές.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνεται το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο βασίστηκε ο σχεδιασμός και η ανάλυση της έρευνας. Παρουσιάζονται κάποιες βασικές αρχές της θεωρία δόμησης μέσω κατασκευών (constructionism) στις οποίες στηρίζεται ο σχεδιασμός της έρευνας, εντάσσοντας ψηφιακά εργαλεία και αναπαραστάσεις, κάνοντας χρήση αυτών με βάση τη θεωρία του Duval των εγγραφών σημειωτικής αναπαράστασης (theory of register of semiotic representation). Τέλος παρουσιάζεται το μοντέλο RBC και RBC+C της AiC με το οποίο έγινε η ανάλυση των επεισοδίων.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται η μεθοδολογία της έρευνας, το προφίλ των συμμετεχόντων, τα μέσα συλλογής δεδομένων και η μέθοδος ανάλυσής τους, η ανάλυση του σχεδιασμού της έρευνας και διατυπώνονται τα ερευνητικά ερωτήματα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας. Τα επεισόδια που παρατίθενται κατηγοριοποιήθηκαν με βάση την έννοια που νοηματοδοτείται, το πλαίσιο στο οποίο η νοηματοδότηση λαμβάνει χώρα, τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν και τις αναπαραστάσεις μέσω των οποίων έγινε η διερεύνηση. Τα επεισόδια παρουσιάζουν κοινούς τρόπους ή μεμονωμένες περιπτώσεις κατασκευής νοημάτων και αναλύονται με βάση το μοντέλο RBC+C της AiC. Επίσης αναλύεται η συμβολή των περιβαλλόντων και των εργαλείων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας, ενώ γίνεται σύγκριση με αντίστοιχα αποτελέσματα που καταγράφονται στη βιβλιογραφία.

Τέλος παρατίθενται η βιβλιογραφία και τα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν στην παρέμβαση.

[1] Ο Cauchy περιγράφει το απειροστό ως μια μεταβλητή ποσότητα που γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται απεριόριστα με τέτοιο τρόπο σαν να συγκλίνουν στο μηδέν.

# Κεφάλαιο 1: Το άπειρο και σχετικές έννοιες στη μαθηματική εκπαίδευση

## 1.1. Οι πτυχές του απείρου

Το άπειρο είναι μια αναντίρρητα σπουδαία έννοια για την επιστήμη, τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία. Αιώνες εμπλοκής, προκλήσεων συγκρούσεων και εντάσεων, από σπουδαίους μαθηματικούς, με αδιαμφισβήτητη προσφορά στην επιστήμη των μαθηματικών, δηλώνουν τις δυσκολίες που ανακύπτουν από αυτή τη γνήσια νοητική κατασκευή την οποία καμιά απ' ευθείας εμπειρία δεν μπορεί να την υποστηρίξει (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979). Ό,τι κι αν σημαίνει το άπειρο στερείται από οποιαδήποτε ενσωμάτωση στην πραγματική ζωή. Πρόκειται για μια αέναη έννοια χωρίς υλικές αναπαραστάσεις που να μπορούν να επιτύχουν το «αδιάκοπο» μιας κατάστασης (Falk R. , 2010). Ωστόσο ένα άτομο πριν την εμπλοκή του με την τυπική προσέγγιση του απείρου, βάσει των εμπειριών και των διαισθήσεών του έχει κατασκευάσει μια εικόνα έννοιας (concept image) (Brackett, 1998). Με τον όρο εικόνα έννοιας (concept image), οι Tall και Vinner (1981), περιγράφουν τη γνωστική δομή που σχετίζεται με μια έννοια, η οποία δομείται από τις διαισθήσεις και τις εμπειρίες του ατόμου και μεταβάλλεται καθώς το άτομο δέχεται νέα ερεθίσματα που συνδέονται με την έννοια τα οποία συντελούν στη μαθηματική του ωρίμανση.

Οι Fischbein, Tirosh και Hess (1979) υποστηρίζουν ότι η κύρια πηγή δυσκολιών που συνοδεύουν την έννοια του απείρου είναι η βαθιά αντίφαση μεταξύ της έννοιας και των νοητικών σχημάτων των ατόμων. Οι διαισθήσεις για το άπειρο είναι εγγενώς αντιφατικές αφού τα λογικά σχήματα προσαρμόζονται σε πεπερασμένα αντικείμενα και γεγονότα. Οι Lacoff και Núñez (2000), υποστηρίζουν ότι ο τρόπος με τον οποίο το μυαλό κατανοεί το άπειρο είναι σε αναλογία με το πεπερασμένο, μέσω μιας κοινής επαγωγικής δομής που καλούν ως BMI (Basic Metaphor for Infinity). Δηλαδή η έννοια του απείρου προκύπτει από τη γνώση του πεπερασμένου, γεγονός που προκαλεί δυσκολίες και παράδοξα φαινόμενα. Πεπερασμένες ερμηνείες τείνουν να επικρατούν, κάτι που έχει αναγνωριστεί από το Γαλλιλαίο (όπως αναφέρεται στο Sacristán (2001)) αιώνες πριν, *«δυσκολίες προκύπτουν όταν προσπαθούμε, με το πεπερασμένο μας μυαλό να συζητήσουμε το άπειρο, αναθέτοντας σ' αυτό εκείνες τις ιδιότητες που δίνουμε στο πεπερασμένο και το περιορισμένο»*. (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979)

Για παράδειγμα η επαφή των ατόμων με άπειρα σύνολα δημιουργεί συγκρούσεις εξαιτίας της εμπειρικής περατοκρατικής αντίληψης ότι το όλον είναι μεγαλύτερο από τα μέρη του και της διαίσθησης της πληθικότητας σ' ένα πεπερασμένο σύνολο. Η επέκταση συγκεκριμένων ιδιοτήτων από τα πεπερασμένα σύνολα στα άπειρα οδηγεί σε παράδοξες καταστάσεις (Moreno & Waldegg, 1991). Έτσι το άπειρο άθροισμα πολλών θετικών όρων θα αποκλίνει πάντα μεταφέροντας εμπειρίες που απορρέουν από την εφαρμογή ιδιοτήτων της πρόσθεσης σε ένα πεπερασμένο πλαίσιο. Όπως και στην περίπτωση της διαίρεσης φυσικών ή γεωμετρικών αντικειμένων, η προσπάθεια για εφαρμογή πεπερασμένων μαθηματικών και λογικών αρχών οδηγεί σε παράδοξα ανάλογα με αυτό του Ζήνωνα.

Σύφωνα με τους Fischbein, Tirosh και Hess (1979), υπάρχουν δύο θεμελιακά διαφορετικές πτυχές που πρέπει να ληφθούν υπόψη όσον αφορά την έννοια του απείρου. Από τη μια υπάρχει η ψυχολογική διάσταση της έννοιας, που είναι συνδεδεμένη με διαισθητικές δυσκολίες και παράδοξες καταστάσεις. Το άπειρο με τη δυναμική του πτυχή, όπως ο Αριστοτέλης το αποδέχτηκε, ως μια αφηρημένη δυνατότητα. Το άπειρο ως επίρρημα, το εν δυνάμει άπειρο (potential infinity), αποτελεί το πιο βασικό επίπεδο κατανόησης της έννοιας, με τη γνώση ατέρμονων διαδικασιών όπως για παράδειγμα η απεριόριστη δυνατότητα για αύξηση ενός διαστήματος ή διαίρεσής του, μη τερματιζόμενες ακολουθίες όπως οι φυσικοί αριθμοί ή η δυνατότητα αέναης συνέχισης μιας οποιασδήποτε λειτουργίας (Monaghan, 2001).

Αυτή η ερμηνεία του απείρου, ως μια δυνατότητα, επικράτησε στα μαθηματικά μέχρι την Καντοριανή επανάσταση όπου πλέον αποδεικνύεται η μαθηματική σημασία του φύσει άπειρου (actual infinity) (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979). Η έμφαση μεταφέρεται στη χρήση του απείρου, για το χαρακτηρισμό εννοιολογικών αντικειμένων, των συνόλων. Με τη νέα αυτή σημασία το άπειρο μετασχηματίζεται σε αντικείμενο, μέσα σε ένα λειτουργικό πεδίο και ενσωματώνεται στα μαθηματικά (Moreno & Waldegg, 1991). Έτσι το άπειρο γίνεται αποδεκτό ως μια μαθηματική πραγματικότητα, μια λογική κατασκευή με μαθηματική δομή, η οποία δεν επιδέχεται αμφισβήτηση. Το άπειρο αποδεικνύεται – όπως ο Cantor έκανε – μη αντιφατικό και συνεπές με την ολότητα των μαθηματικών εννοιών. Νοηματοδοτείται ως αντικείμενο (για παράδειγμα ως πληθάριθμος ενός συνόλου), που υπακούει σε ορισμούς, θεωρήματα και αποδείξεις (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979).

Αυτή η δυϊκότητα διαδικασία – αντικείμενο μιας μαθηματικής έννοιας, που εμφανίζεται και στην περίπτωση του απείρου, έχει μελετηθεί από πολλούς μελετητές της διδακτικής των μαθηματικών και έχει εδραιωθεί στο πεδίο της έρευνας (Gray & Tall, 1994; Sfard, 1991; Dubinsky, 1991).

Ο Monaghan J. (1986), παρατηρεί ότι όταν τα παιδιά έρχονται σε επαφή με το άπειρο τα λεγόμενά τους αντικατοπτρίζουν τη σύλληψη του απείρου ως διαδικασία *«Αυτό συνεχίζει ξανά και ξανά. Είναι άπειρο»*. Μάλιστα αυτή η πτυχή του απείρου χρησιμοποιείται από τα παιδιά και ως ένα σχήμα αξιολόγησης (evaluatory schemes), για να αποφασίσουν αν μια ερώτηση έχει ως απάντηση το άπειρο. Η δυϊκότητα διαδικασία – αντικείμενο της έννοιας δεν έχει σαφή όρια στις νοηματοδοτήσεις των παιδιών (Monaghan, 2001). Για παράδειγμα όταν χρησιμοποιούν την έκφραση «πάει προς το άπειρο», δεν αποκλείεται η έννοια του απείρου ως διαδικασία. Ενώ οι λέξεις «απείρως» και «άπειρο» εναλλάσσονται στα λόγια τους, χωρίς να μπορούμε να υποστηρίξουμε με βεβαιότητα ότι το επίρρημα αναφέρεται στη διαδικασία, ενώ το ουσιαστικό στο αντικείμενο. Αυτή η δυϊκότητα οδηγεί σε παράδοξα αποτελέσματα συγκρίνοντας την πληθικότητα δύο συνόλων. Για παράδειγμα συγκρίνοντας το σύνολο των φυσικών αριθμών με το σύνολο των άρτιων, η αντίληψη του απείρου ως διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε απαντήσεις όπως ότι τα δύο σύνολα είναι «όμοια» ή μη συγκρίσιμα, επειδή και τα δύο «συνεχίζουν», ενώ η σύλληψη του απείρου ως αντικείμενο προκαλεί λανθασμένες απαντήσεις που σχετίζονται με την Ευκλείδεια αρχή, ότι το όλον είναι μεγαλύτερο από τα μέρη του.

Η αποδοχή του φύσει απείρου (actual infinity) απαιτεί την επεξεργασία νέων λογικών σχημάτων, τα οποία έρχονται σε αντίθεση με τα συνήθη νοητικά μας σχήματα, όπως ότι το όλον μπορεί να είναι ισοδύναμο με κάποια από τα μέρη του, ή ότι το πλήθος των σημείων ενός τμήματος είναι μεγαλύτερο από το άπειρο πλήθος των φυσικών αριθμών (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979). Η σύλληψη του φύσει απείρου (actual infinity) είναι δυνατή όταν ένα άπειρο σύνολο κατανοείται ως μια οντότητα ή ένα αντικείμενο, ενώ μια πιο μόνιμη και ισχυρή εννοιολόγησή του μπορεί να συμβεί με τη σύλληψη του μη μετρήσιμου χάσματος ή της άπειρης απόστασης ενός άπειρου και ενός πεπερασμένου συνόλου (Falk R. , 2010).

Η Falk σε έρευνα το 2010, ενέπλεξε μαθητές 6 – 15 ετών με τριών ειδών πειράματα. Στο πρώτο πείραμα, για τη διερεύνηση των κατανοήσεων του απείρου, σχεδίασε παιχνίδια αύξησης και μείωσης αριθμών καθώς και μείωσης κλασμάτων, στο δεύτερο στόχευε στη διερεύνηση του φύσει απείρου (actual infinity) μέσω συγκρίσεων συνόλων, ενώ στο τρίτο διερεύνησε το άπειρο χάσμα μεταξύ άπειρων συνόλων και πεπερασμένων. Και ενώ κάποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει ότι η διαίσθηση του εν δυνάμει απείρου (potential infinity) προηγείται των νοηματοδοτήσεων του φύσει απείρου (actual infinity), μέσα από την έρευνα της Falk η άποψη αυτή δεν επαληθεύεται. Από την ανάλυση των δεδομένων παρατηρείται παράλληλη εμφάνιση των δύο αυτών πτυχών του απείρου, περίπου στην ίδια ηλικία. Ωστόσο το εν δυνάμει άπειρο (potential infinity) φαίνεται να προηγείται της σύλληψης της απεριόριστης απόστασης της πληθικότητας ενός άπειρου συνόλου από ένα πεπερασμένο, η οποία κρίθηκε δυσκολότερη και χαρακτηρίζει μια ισχυρή σύλληψη του φύσει απείρου (actual infinity), αποτέλεσμα το οποίο ταιριάζει και με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας.

Οι μαθηματικοί στις δοσοληψίες τους με το άπειρο φαίνεται να έχουν εστιάσει σε δύο ακόμα πτυχές του απείρου, το απείρως μεγάλο και το απείρως μικρό (Monaghan, 2001). Το απείρως μικρό που προκαλείται από επαναλαμβανόμενες διαιρέσεις, είναι μια εσωτερική έννοια του απείρου και προϋποθέτει τη γνώση του απείρως μεγάλου, μιας εξωτερικής έννοιας του απείρου (Sacristán & Noss, 2008). Ο Monaghan J., στη διατριβή του το 1986, παρατηρεί ότι κάποιοι μαθητές αντιλαμβάνονται τα απειροστά ως μια γενίκευση ενός πολύ μικρού αριθμού, κατ' αναλογία της θέασης του απείρου ως μια γενίκευση ενός πολύ μεγάλου αριθμού.

*«Μπορώ να πιστέψω σε κάτι απείρως μικρό, απλά κάτι που λέγεται ότι είναι εξαιρετικά μικρό, όπως το άπειρο είναι χρήσιμο για κάτι που είναι εξαιρετικά μεγάλο. Απλά ένα είδος έκφρασης.»*

Η έρευνα του Monaghan (1986), αποκαλύπτει μια δυναμική εικόνα έννοιας (concept image) να επικρατεί στη σύλληψη των απειροστών. Μάλιστα ένας μόνο μαθητής ανέπτυξε μια στατική εικόνα έννοιας. Το δυναμικό πλαίσιο που αναδύεται μέσα από φθίνουσες ακολουθίες από τη μια οδηγεί σε μια απόρριψη των στατικών απειροστών, από την άλλη οδηγεί στη θέαση των απειροστών ως δυναμικές οντότητες που συνεχώς φθίνουν.

*«Δεν πιστεύω ότι υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός. Μπορείς να πεις ότι ο μικρότερος αριθμός είναι ο* $\frac{1}{\infty}$*, το οποίο είναι, … δεν μπορείς να πάρεις μικρότερο από* $\frac{1}{\infty}$*, το άπειρο συνεχίζει για πάντα , έτσι απλά συνεχίζει να γίνεται μικρότερο.»*

Μάλιστα μαθητές/φοιτητές που έχουν εμπειρία από διαδικασίες ορίων συλλαμβάνουν την ιδέα του απειροστού ως μια «μεταβλητή» ποσότητα που μπορεί να είναι όσο μικρή θέλει κανείς. Αυτές οι προσεγγίσεις είναι πολύ κοντά στην οπτική του Cauchy για τα απειροστά. Ο Cauchy περιγράφει το απειροστό ως μια μεταβλητή ποσότητα που γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται απεριόριστα με τέτοιο τρόπο, σαν να συγκλίνουν στο μηδέν (Cornu, 1991).

Το συγκλίνον και το αποκλίνον πλαίσιο του απείρου αναδύεται από τις συμπεριφορές αριθμών ή γεωμετρικών κατασκευών στην άπειρη έκτασή τους είτε ελαττώνοντας είτε επεκτείνοντας. Συγκεκριμένα καταστάσεις κατασκευής μικρότερων κλασματικών μονάδων εξηγούν το συγκλίνον πλαίσιο του απείρου ενσωματώνοντας μια αίσθηση «ολοκλήρωσης» (π.χ. όριο) μιας συνεχόμενης διαδικασίας και αντικατοπτρίζουν την έννοια του απείρως μικρού προκαλώντας δυσκολίες στους μαθητές. Από την άλλη καταστάσεις που εμπλέκουν την καρτασκευή διαδοχικά μεγαλύτερων φυσικών αριθμών εξηγεί το αποκλίνον πλαίσιο του απείρου, το απείρως μεγάλο (Brackett, 1998).

Οι Fischbein, Tirosh και Hess (1979), υποστηρίζουν ότι ένα παιδί μέχρι την ηλικία των 12 ετών ακόμα διαμορφώνει τις διαισθητικές ερμηνείες που αφορούν στην έννοια του απείρου, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως εύθραυστες στα ερεθίσματα που προσλαμβάνει από το περιβάλλον. Μετέπειτα παραμένουν σταθερές, με τις αυθόρμητες και σχεδόν αυταπόδεικτες έννοιες να μην επηρεάζονται ούτε από την ηλικία, ούτε από τη διδασκαλία. Υποστηρίζουν επίσης ότι η μαθηματική εκπαίδευση επηρεάζει μάλλον τυπικές αλλά επιφανειακές έννοιες του απείρου. Εξαιτίας της φύσης του απείρου, με τις συγκρούσεις που προκαλεί, η επιρροή της διδασκαλίας ποικίλει. Μάλιστα παρατηρούν ότι όταν μια παράδοξη κατάσταση προκύπτει οι λανθασμένες περατοκρατικές ερμηνείες υπερισχύουν ακόμα και σε μαθητές με ένα υψηλό μαθηματικό υπόβαθρο. Ο Monaghan (2001), υποστηρίζει ότι ακόμα και στην περίπτωση φοιτητών, στο πρώτο έτος ενός μαθήματος λογισμού, στο οποίο γίνεται χρήση μαθηματικών εννοιών και συμβολισμών σχετικών με το άπειρο, η επίδραση στις εννοιολογήσεις των φοιτητών για το άπειρο είναι αμελητέα. Θεωρεί ότι ένα εισαγωγικό μάθημα λογισμού περισσότερο εφοδιάζει τους φοιτητές με εμπειρίες, που μπορούν να συνεισφέρουν στην ανάπτυξη της έννοιας, παρά αλλάζει τις νοηματοδοτήσεις τους με την έννοια της τυπικής αντιμετώπισης του απείρου.

Μάλιστα οι Luis, Moreno και Waldegg (1991) υποστηρίζουν ότι η προσέγγιση μέσω ενός γεωμετρικού πλαισίου μόνο, μοιάζει να στέκεται εμπόδιο στην εννοιολογική κατανόηση του φύσει απείρου (actual infinity). Η διερεύνηση τέτοιων εννοιολογήσεων πραγματοποιήθηκε σε φοιτητές, εμπλέκοντάς τους με συγκρίσεις άπειρων συνόλων σε ένα αριθμητικό πλαίσιο, σε ένα γεωμετρικό και σε ένα συνδυασμό αριθμητικού και γεωμετρικού πλαισίου μέσω αλγεβρικής γλώσσας. Από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι όσον αφορά το αριθμητικό και γεωμετρικό πλαίσιο, η πλειοψηφία των φοιτητών εμφανίστηκαν να υιοθετούν την περατοκρατική προσέγγιση του Bolzano (μέρος – όλον), ενώ οι αντιλήψεις αυτές προκύπτουν περισσότερο από την ενασχόλησή τους με ζητήματα σύγκρισης άπειρων συνόλων σε γεωμετρικό πλαίσιο. Από την άλλη ο συδυασμός αριθμητικού και γεωμετρικού πλαισίου με χρήση αλγεβρικής γλώσσας οδηγεί στην εμφάνιση της προσέγγισης του Cantor (1 – 1 αντιστοιχία) εκ μέρους των φοιτητών, με πολλά εμπόδια που προκλήθηκαν από τις προηγούμενες εμπειρίες τους να εξαλείφονται.

Αντίθετα, οι Tsamir και Tirosh (1999) παρατηρούν ότι όταν μαθητές ηλικίας 15 – 17 ετών ήρθαν αντιμέτωποι με τη σύγκριση δύο απειροσυνόλων των {1, 2, 3, 4,…} και {4, 8, 12, 16,…}, το μεγαλύτερο ποσοστό απάντησε περατοκρατικά όταν τα σύνολα δόθηκαν σε αριθμητική – οριζόντια αναπαράσταση, ενώ όταν η αναπαράσταση μετατράπηκε σε γεωμετρική το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών απάντησε ότι τα σύνολα είναι ισοπληθικά.

Οι Falk, Gassner, Ben Zoor και Ben Simon (1986), παρατηρούν ότι παρά το καθαρά αριθμητικό πλαίσιο στο οποίο τίθενται τα tasks και τα παιχνίδια αύξησης και μείωσης αριθμών στην έρευνά τους, κάποια παιδιά εισάγουν μόνα τους γεωμετρικές εικόνες, όπως τούβλα που στοιβάζονται το ένα πάνω στο άλλο, σημεία του διαστήματος μεταξύ 0 και 1.

Σε παρόμοια έργα ένας ταλαντούχος μαθητής, ο Ben, εμφανίζει μια γνωστική μετακίνηση αναγνωρίζοντας καταρχάς την αντίφαση που προκαλείται από τις δύο διαφορετικές προσεγγίσεις του, συγκρίνοντας το σύνολο των φυσικών με το σύνολο των τετραγώνων τους, σε ένα αριθμητικό και ένα γεωμετρικό πλαίσιο. Η γνωστική μετακίνηση του Ben περιλαμβάνει επίσης την απόφαση της μη αποδοχής δύο αντιφατικών ισχυρισμών και τελικά τη συνειδητοποίηση της χρήσης μιας μόνο προσέγγισης για την αντιμετώπιση της σύγκρισης απειροσυνόλων (Tsamir & Dreyfous, 1999).

Οι Tsamir και Tirosh (2007), υποστηρίζουν το σχεδιασμό μαθησιακών περιβαλλόντων με στόχο την εννοιολογική αλλαγή στην περίπτωση της ισοδυναμίας απειροσυνόλων. Ο Monaghan (2001), θεωρεί τις μελέτες των Sacristán (1997) και Falk, Gassner, Ben Zoor και Ben Simon (1986) πολύ σημαντικές λόγω των δραστηριοτήτων με τις οποίες εμπλέκουν τους μαθητές προκειμένου να επιτύχουν επίγνωση με στόχο την εννοιολογική αλλαγή στις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο. Οι Sacristán και Noss (2008) προτείνουν πρακτικές διδασκαλίες και μαθησιακά περιβάλλοντα που φέρνουν τους μαθητές αντιμέτωπους με παράδοξες καταστάσεις με σκοπό να τους κάνει ενήμερους για τους διαισθητικούς περιορισμούς με σοπό την αντιμετώπιση των διαισθητικών καταστάσεων.

## 1.2. Έννοιες σχετικές με το άπειρο

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ερευνών για τις νοηματοδοτήσεις μαθηματικών εννοιών του λογισμού, για τις οποίες οι αντιλήψεις που διαμορφώνονται και οι δυσκολίες στη μάθησή τους είναι άμεσα συνδεδεμένες με τις ιδέες των εκπαιδευόμενων για το άπειρο.

### 1.2.1. Η έννοια του ορίου και το άπειρο

Για παράδειγμα, το όριο είναι μια έννοια που στο θεωρητικό της πλαίσιο βρίσκεται η έννοια του απείρου. Πρόκειται για μια μαθηματική έννοια με εξαιρετικό πλούτο και συνάμα πολυπλοκότητα, ο ρόλος της οποίας είναι κεντρικός στο λογισμό και τη μαθηματική ανάλυση, αφού αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο για έννοιες όπως οι ακολουθίες, οι σειρές, η συνέχεια, η διαφόριση, η ολοκλήρωση κτλ. Μια από τις κύριες πηγές των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έννοια του ορίου είναι η διαισθητική του πτυχή. Οι διαισθήσεις από μόνες τους δεν αποτελούν μια αξιόπιστη εικόνα για την έννοια του ορίου, ενώ η διαμόρφωση μιας ολοκληρωμένης εικόνας απαιτεί έναν τυπικό ορισμό (Mamona - Downs, 2001). Από την άλλη όλες οι γνωστικές πτυχές της έννοιας του ορίου δεν μπορούν να παραχθούν καθαρά από τον τυπικό ορισμό του (Cornu, 1991). Το μινιμαλιστικό στυλ έκφρασης ενός τυπικού ορισμού προσφέρει γνωστικό εύρος αλλά την ίδια στιγμή απαιτεί αρκετή ώριμη σκέψη της δομής του (Mamona - Downs & Downs, 2000). Το να θυμάται κανείς τον ορισμό είναι ένα θέμα, ενώ η απόκτηση μιας θεμελιώδους αντίληψής του είναι ένα άλλο, πολύ πιο ουσιαστικό. Πολλές φορές οι μαθητές θεωρούν ότι έχουν κατανοήσει τον τυπικό ορισμό και συχνά είναι ικανοί να ολοκληρώσουν ασκήσεις πάνω σ' αυτόν, χωρίς να έχουν καταλάβει το φορμαλισμό του και τις γνωστικές και μεταγνωστικές πτυχές του. Μάλιστα ακόμα και σε προχωρημένα στάδια των σπουδών τους, φαίνεται να μην κατέχουν την ιδέα του ορίου, χωρίς αυτό να τους εμποδίζει να εργάζονται με ασκήσεις που απαιτούν αλγεβρικούς χειρισμούς και να επιτυγχάνουν στις εξετάσεις τους.

Οι μαθητές πριν λάβουν οποιαδήποτε εκπαίδευση σε θέματα ορίων έχουν ήδη ένα πλήθος ιδεών, διαισθήσεων, εικόνων, γνώσεων, οι οποίες έχουν χαρακτηριστεί ως «αυθόρμητες έννοιες (spontaneous conceptions)», που μπορεί να προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία όπως επίσης και από τη σημασία με την οποία οι σχετικές λέξεις χρησιμοποιούνται στην καθομιλουμένη (Cornu, 1981; Cornu, 1983). Όταν ένας μαθητής συμμετέχει σε ένα μάθημα μαθηματικών οι ιδέες αυτές δεν εξαφανίζονται, αλλά αναμειγνύονται με τη νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται, προσαρμόζονται και συντελούν στη διαμόρφωση των προσωπικών του νοημάτων. Μάλιστα κατά την επίλυση ενός προβλήματος ένα άτομο δεν καλεί μόνο την επαρκή επιστημονική θεωρία, αλλά κάνει και φυσικούς συλλογισμούς οι οποίοι εμπεριέχονται στις «αυθόρμητες έννοιες» του.

Στην περίπτωση της έννοιας του ορίου οι λέξεις που χρησιμοποιούνται έχουν μια σημασία πριν οποιαδήποτε διδασκαλία λάβει χώρα, αποτελώντας συστατικά των «αυθόρμητων ιδεών» και συχνά οι μαθητές συνεχίζουν να καλούν αυτές τις σημασίες ακόμα και μετά τον τυπικό ορισμό (Cornu, 1991).

Ο Monaghan (2001), εξέτασε ασάφειες και δυσκολίες που ενυπάρχουν σε τέσσερις φράσεις, οι οποίες έχουν κάποιες σημασίες στην καθημερινή τους χρήση, ενώ όταν χρησιμοποιούνται σε ένα μαθηματικό πλαίσιο εμφανίζονται με διαφορετικές ιδιαίτερες σημασίες. Πρόκειται για τα ρήματα, *«τείνει (tends to)»*, *«προσεγγίζει (approaches)»*, *«συγκλίνει (converges)»*, και το ουσιαστικό *«όριο (limit)»*. Το πρώτο πράγμα που παρατήρησε ήταν ότι τα τρία ρήματα έχουν διαφορετικό νόημα από το ουσιαστικό *«όριο»*, εμφανίζοντας μια δυναμική πτυχή σε μαθηματικά πλαίσια στα οποία εμπλέκονται ακολουθίες και συναρτήσεις. Επιπλέον το ρήμα *«συγκλίνει (converges)»* εμφανίζεται διαφορετικό από τα υπόλοιπα εξαιτίας εικόνων που προκαλεί, μη εφαρμόσιμων στα μαθηματικά.

Συγκεκριμένα το ρήμα *«τείνει (tends to)»* αναφέρεται σε μια κίνηση προς ένα τέρμα, το οποίο δεν είναι δυνατό να το «φτάσει» το κινούμενο μαθηματικό αντικείμενο, ενώ στην καθημερινή εμπειρία συναντάται ως προσωπική ή γενική τάση, «τείνει να πίνει πολύ», «ο καιρός τείνει να γίνει πολύ άσχημος». Το ρήμα *«προσεγγίζει (approaches)»*, φαίνεται να έχει παρόμοια σημασία με τη φράση *«τείνει»*, όπου και στα δύο δίνεται μια γεωμετρική ερμηνεία. Στην καθημερινότητα εμφανίζεται με πολλές σημασίες, για παράδειγμα, ενός κινούμενου αντικειμένου που είναι ασαφές αν φτάνει τον προορισμό του, «ο σκύλος προσεγγίζει τη γάτα», ή μιας μεθόδου σκέψης ή ενέργειας, «οι διάφορες προσεγγίσεις μιας μαθηματικής έννοιας», ή κάτι που μοιάζει με κάτι άλλο, «ο ρατσισμός προσεγγίζει το φασισμό». Η φράση *«συγκλίνει (converges)»* προκαλεί μια διαφοροποιημένη θέαση σε σχέση με τα άλλα δύο ρήματα στο μαθηματικό σκηνικό των ακολουθιών και συναρτήσεων. Φαίνεται ότι κυριαρχεί η καθημερινή της σημασία, δύο συνεχών αντικειμένων που πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο και στις περισσότερες περιπτώσεις τελικά αγγίζουν το ένα το άλλο (για παράδειγμα «τα αυτοκίνητα συγκλίνουν», «δύο γραμμές συγκλίνουν σε ένα σημείο»). Αποτέλεσμα αυτής της σημασίας είναι ότι πολλοί μαθητές δεν μπορούν να δουν πως μια ακολουθία θα μπορούσε να συγκλίνει. Τέλος το ουσιαστικό *«όριο (limit)»*, υποδηλώνει ένα φράγμα (boundary), είτε στην πιο ακραία του πραγματοποίηση είτε ως το σημείο ακριβώς μετά το εφικτό, ενώ στην καθημερινή εμπειρία το όριο έχει έννοιες ορίων ταχύτητας, φυσικών ορίων που είναι σχεδόν αδύνατο να ξεπεραστούν (όπως το όριο της ποσότητας αλκοόλ που κάποιος μπορεί να καταναλώσει), διανοητικών ορίων όπως αυτά της ανθρώπινης υπομονής, νεύρων, αντοχής, ικανοτήτων, κτλ.).

Από τον ένα μαθητή στον άλλο και από το ένα πλαίσιο στο άλλο, η σημασία που δίνεται στις λέξεις διαφέρει, ενώ για ένα μαθητή μια λέξη μπορεί να εγείρει στο μυαλό του πολλές σημασίες (Cornu, 1991). Η ποικιλία των *«αυθόρμητων εννοιών»* ενός μαθητή σε συνδυασμό με το φορμαλισμό με τον οποίο εμπλέκεται μετά από τυπική διδασκαλία, οδηγούν σε μια ολική εικόνα έννοιας (concept image), που ενδεχομένως περιέχει δυναμικές αντιφατικές ιδέες, οι οποίες είναι δυνατόν να εγείρονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές (Tall & Vinner, 1981).

Στο Cornu (1991) και Przenioslo (2005), αναφέρονται διάφορα μοντέλα (κατηγορίες) που κατασκέυασε η Aline Robert (1982) στη διδακτορική της διατριβή, για τις αντιλήψεις προπτυχιακών φοιτητών, οι οποίοι είχαν λάβει τυπική διδασκαλία σχετικά με το όριο ακολουθίας, σύμφωνα με δύο πτυχές που έχουν να κάνουν με τις «αυθόρμητες έννοιες» τους. Η μια ήταν αν οι φοιτητές υπέθεταν σιωπηρά (ή όχι) τη μονοτονία της ακολουθίας και η άλλη αν υπήρχε σιωπηρή (ή όχι) υπόθεση της κίνησης των όρων της ακολουθίας.

- Πεποιθήσεις, όπως για παράδειγμα «μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα (φθίνουσα) ακολουθία φραγμένη από πάνω (κάτω), εκφράζονται στο *μονοτονικό μοντέλο (monotonic model)*.
- Το *δυναμικό μοντέλο (dynamic model)* περιγράφει πεποιθήσεις όπως « $u_n$ τείνει στο $\ell$ », « $u_n$ προσεγγίζει το $\ell$ », «η απόσταση των $u_n$ από το $\ell$ γίνεται μικρή», «οι τιμές προσεγγίζουν έναν αριθμό ολοένα και πιο κοντά».
- Στο *μονοτονικό – δυναμικό μοντέλο (monotonic – dynamic model)* ομαδοποιούνται αντιλήψεις όπως «μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα (φθίνουσα) ακολουθία που προσεγγίζει έναν όρο».
- Το *στατικό μοντέλο (static model)* παραπέμπει σε αντιλήψεις που εκφράζονται από παραδείγματα όπως «τα $u_n$ είναι σε ένα διάστημα κοντά στο $\ell$ », «τα $u_n$ συγκεντρώνονται γύρω από το $\ell$ », «τα στοιχεία της ακολουθίας καταλήγουν να βρίσκονται σε μια γειτονιά γύρω από το $\ell$ ».
- Το *μικτό μοντέλο*, που είναι ένα μίγμα όλων των παραπάνω.

Τα παραπάνω μοντέλα επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές αντιμετωπίζουν τα προβλήματα, οι οποίοι δεν έχουν μία μόνο αντίληψη για την έννοια του ορίου.

Ήδη έχουν αναφερθεί ορισμένες από τις πηγές δυσκολιών που αντιμετωπίζουν μαθητές και φοιτητές με την έννοια του ορίου, όπως η φύση του τυπικού ορισμού, οι αυθόρμητες ιδέες (spontaneous conceptions) που προκύπτουν από την καθημερινή εμπειρία, η σημασία των λέξεων στην καθημερινότητα, οι πεποιθήσεις των μαθητών που έχουν λάβει τυπική διδασκαλία. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η μελέτη των εγγενών επιστημολογικών εμποδίων της έννοιας του ορίου και η αναγνώριση των δυσκολιών που προκαλούν, ώστε να ληφθούν υπόψη κατά τη διαδικασία της υπέρβασής τους.

Ο Gay Brousseau (1983), ορίζει ως επιστημολογικό εμπόδιο τη γνώση η οποία λειτουργεί καλά σε μια συγκεκριμένη περιοχή δραστηριότητας και συνεπώς εδραιώνεται καλά, αλλά αποτυγχάνει να δουλέψει ικανοποιητικά σε ένα άλλο πλαίσιο όπου δυσλειτουργεί και οδηγεί σε παράδοξες καταστάσεις. Είναι συνεπώς αναγκαίο να καταστραφεί η μη συνεπής δύσμορφη γνώση και να αντικατασταθεί με μια καινούρια έννοια που να λειτουργεί ικανοποιητικά στο νέο πεδίο. Η διευκρίνηση και η απόρριψη τέτοιων εμποδίων αποτελεί ένα βασικό μέρος της γνώσης. Ο μετασχηματισμός δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς να αποσταθεροποιηθούν οι αρχικές ιδέες θέτοντάς τες σε ένα νέο πλαίσιο στο οποίο αποτυγχάνουν. Αυτό συνεπώς απαιτεί μεγάλη προσπάθεια ανασυγκρότησης.

Για την περίπτωση του ορίου, ο Cornu (1991) διακρίνει τέσσερα επιστημολογικά εμπόδια, που αναδύθηκαν κατά την ιστορική εξέλιξη της έννοιας.

- *Οι γεωμετρικές ερμηνείες αποτελούν εμπόδιο στην έννοια του αριθμητικού ορίου*
  Η έννοια του ορίου στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά δεν αποσαφηνίστηκε παρόλο που το πρόβλημα της επιφάνειας του κύκλου για παράδειγμα, πρόσφερε μια ευκαιρία να αναπτυχθούν εργαλεία πολύ κοντά στην έννοια αυτή. Παρά τη χρήση των εγγεγραμμένων πολυγώνων από τον Ιπποκράτη το Χίο (430 π.Χ.), την οποία διαδέχθηκε η αρχή του Ευδόξου, για να καταλήξει στη μέθοδο της εξάντλησης, μια ιδέα πολύ κοντά στην έννοια του ορίου, εντούτοις δεν επιβεβαιώνεται ότι οι Αρχαίοι Έλληνες κατείχαν την έννοια του ορίου. Το πρόβλημα είναι ότι η μέθοδος της εξάντλησης είναι μια γεωμετρική μέθοδος, εφαρμόζεται δηλαδή σε γεωμετρικά μεγέθη και σε κάθε περίπτωση αντιμετωπίζεται σε ξεχωριστή βάση χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο επιχείρημα προσαρμοσμένο στο γεωμετρικό πλαίσιο. Δεν υπάρχει μεταφορά από τα γεωμετρικά σχήματα σε μια καθαρή αριθμητική ερμηνεία και έτσι απουσιάζει η ενοποιημένη έννοια του ορίου αριθμών.
- *Η έννοια του απείρως μεγάλου και απείρως μικρού*
  Κατά την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου συναντάμε την ύπαρξη των απειροστών. Πρόκειται για την ιδέα πολύ μικρών ποσοτήτων, τόσο μικρών σαν να είναι σχεδόν μηδέν, στις οποίες όμως δεν αποδίδεται ένα συγκεκριμένο μέγεθος. Για τον Cauchy ένα απειροστό είναι απλά μια μεταβλητή που τείνει στο μηδέν. Οι σύγχρονοι μαθητές συχνά νοηματοδοτούν το σύμβολο ε (στον ε – δ ορισμό) ως απειροστό, δηλαδή έναν αριθμό που δεν είναι μηδέν αλλά είναι μικρότερος από οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό. Παρόμοια αντίληψη έχουν για το 0,9999….. ως ο τελευταίος αριθμός πριν το 1, που δεν είναι ίσο με 1.
- *Η μεταφυσική πτυχή της έννοιας του ορίου*
  Οι μαθηματικοί κατά την εξέλιξη της έννοιας του ορίου εμφανίστηκαν αρκετά επιφυλακτικοί. Μάλιστα ο Lagrange εξέφρασε φόβους για τις μεταφυσικές του πτυχές. Κάπως έτσι αντιμετωπίζουν αρχικά την έννοια του ορίου και οι μαθητές που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με αυτή, μιας και τα αρχικά στάδια του λογισμού δεν βασίζονται σε απλή αριθμητική και άλγεβρα, έτσι ώστε το όριο να μπορεί να υπολογιστεί κατ' ευθείαν χρησιμοποιώντας οικείες αριθμητικές και αλγεβρικές μεθόδους.
- *Το δίλλημα για το εάν το όριο επιτυγχάνεται ή όχι*
  Είναι μια διαμάχη η οποία έχει διαρκέσει σε όλη την ιστορία της έννοιας, με τον D' Alembert να υποστηρίζει ότι μια ποσότητα δεν θα γίνει ποτέ ίση με το όριό της, *«για να μιλήσουμε ξεκάθαρα, δεν θα συμπίπτει ποτέ ή δεν θα γίνει ποτέ ίσο με την ποσότητα της οποίας είναι το όριό της, αλλά πάντα θα το προσεγγίζει και μπορεί να διαφέρει κατά μία μικρή ποσότητα, όσο κάποιος θέλει»*. Αυτή η διαμάχη συναντιέται συχνά και πολλές φορές έντονα σήμερα σε μαθητές και φοιτητές.

Η Sierpinska (1987), μέσα από μια οργανωμένη προσπάθεια παρουσίασε κατηγορίες επιστημολογικών εμποδίων για την έννοια του ορίου με κριτήριο τις αντιλήψεις των μαθητών για σχετικές έννοιες.

- *Εμπόδια ευρετικού χαρακτήρα,* που προκύπτουν από προσεγγίσεις ευρετικού τύπου για την έννοια, βασισμένες σε εμπειρικές – υπολογιστικές θεωρήσεις όπου στερούνται μαθηματικής αυστηρότητας και τα οποία διακρίνονται σε:
    - *Στατικά ευρετικά εμπόδια*, που προκύπτουν από αντιλήψεις για την εύρεση του ορίου μέσω μιας διαδικασίας αριθμητικών προσεγγίσεων που σταματά (σε μια ικανοποιητική προσέγγιση), ενώ απουσιάζει η έννοια του απείρου.
    - *Κινητικά ευρετικά εμπόδια*, που παράγονται από αντιλήψεις που συνδέουν την έννοια του ορίου με μια συνεχή κίνηση, όπου η παρουσία του εν δυνάμει άπειρου (potential infinity) είναι εμφανής.
- *Εμπόδια σχετικά με τη μαθηματική αυστηρότητα,* που προκύπτουν από αντιλήψεις όπου ο φορμαλισμός επικρατεί ενώ απουσιάζει οποιαδήποτε μεταφυσική έννοια του απείρου.
    - Εμπόδια λόγω αντιλήψεων για την εύρεση ορίου ως μια αυστηρή μέθοδο απόδειξης συγκεκριμένων σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, τα οποία προκύπτουν από την αποκλειστική χρήση του ε-δ ορισμού.
    - Εμπόδια εξαιτίας της προσέγγισης του ορίου μέσω μιας αυστηρής μαθηματικής διαδικασίας συσχέτισης αριθμών και μεταβλητών, με την παράλειψη των αριθμητικών τιμών που θεωρούνται αμελητέες.

Αυτά τα εμπόδια και άλλα είναι δυνατόν να εντοπιστούν μέσα από τα λάθη των εκπαιδευόμενων. Χρειάζεται ενημερότητα των επιστημολογικών εμποδίων ώστε να ληφθούν υπόψιν στο σχεδιασμό διδακτικών στρατηγικών, όχι για την αποφυγή τους, αλλά για την κατ' ευθείαν εμπλοκή των εκπαιδευόμενων με αυτά, με σκοπό την αναθεώρηση των ιδεών μέσα από προκλήσεις τέτοιου είδους.

### 1.2.2. Οι έννοιες της ακολουθίας και της σειράς και το άπειρο

Η Przenioslo (2005) σχετίζει τις δυσκολίες και τα εμπόδια της έννοιας του ορίου με τις δυσκολίες και τα επιστημολογικά εμπόδια που έχουν να κάνουν με την έννοια της αριθμητικής ακολουθίας. Για παράδειγμα η σύλληψη μιας ακολουθίας ως κανόνας για την παραγωγή αριθμών ή η αναγνώρισή της ως ένα σύνολο από όρους ή ως μια λίστα αριθμών μπορεί να λειτουργήσουν ως εμπόδια στην κατανόηση του ορίου. Η Mamona - Downs (2001), θεωρεί ότι η συχνή θεώρηση της ακολουθίας ως άπειρη διαδικασία οδηγεί τους μαθητές σε πεποιθήσεις όπως *«η ακολουθία δεν φτάνει το όριό της»*, αφού σε μια τέτοια θέαση το όριο, από τη μια δρα ως μια «τελική» τιμή μιας διαδικασίας, ενώ από την άλλη καθορίζει μια «τελική» θέση στην ακολουθία.

Ως προς τις ακολουθίες, υπάρχει μια αντίσταση των μαθητευόμενων για αναγνώριση μιας ακολουθίας ως ειδική μορφή συνάρτησης (Mamona, 1990; Lindaman & Gay, 2012). Η Mamona (1990), αναλύοντας τις απαντήσεις ενός πρωτοετή φοιτητή σε ερωτήματα που αφορούσαν στη σύγκλιση ακολουθιών, διαπιστώνει ότι η αναγνώριση μιας ακολουθίας ως συνάρτηση έγινε με τη σκέψη του γενικού τύπου της ακολουθίας. Έτσι συμπεραίνει ότι η επαφή των εκπαιδευόμενων με συγκεκριμένα παραδείγματα συναρτήσεων, οδηγεί στην υποτίμηση του εύρους της έννοιας της συνάρτησης, σε μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών που δίνει ένα συνεχές, ομαλό γράφημα, ενώ υπάρχει επιφυλακτικότητα στη θεώρηση συναρτήσεων με διακριτό πεδίο ορισμού.

Επίσης στις αντιλήψεις φοιτητών έχει φανεί μια σύγχυση για τις έννοιες της ακολουθίας και της σειράς (Mamona, 1990; Tall & Schwarzenberger, 1978). Μάλιστα η συνέντευξη ενός διδάσκοντα (González-Martín, Nardi, & Biza, 2011), διαφωτίζει ότι οι φοιτητές παρουσιάζουν δυσκολίες στη διάκριση της σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ από την ακολουθία $x_n$ και στη σύλληψη των μερικών αθροισμάτων των όρων της $x_n$, ως ακολουθία από μόνη της. Οι Tall και Schwarzenberger (1978), αποδίδουν αυτή τη σύγχυση στην αντιμετώπιση της έννοιας της σειράς πριν οι μαθητευόμενοι εμπλακούν σε βασικές εργασίες με πραγματικούς αριθμούς, δεκαδικούς και κλάσματα. Η Mamona (1990), παρατηρεί αυτή τη σύγχυση μέσω της απάντησης ενός φοιτητή ο οποίος ανήγαγε τη σύγκλιση μιας ακολουθίας, στη σύγκλιση της αντίστοιχης σειράς και αποδίδει αυτή την επικράτηση της σειράς σε διάφορους λόγους όπως, στην πιο συχνή χρήση της λέξης «σειρά» από τη λέξη «ακολουθία» στην καθομιλουμένη όπου εμφανίζονται με την ίδια σημασία, στο ενδεχόμενο οι όροι που προκύπτουν από την άθροιση των όρων της ακολουθίας να είναι πιο οικείοι ή στην έλλειψη υψηλών επιπέδων αφαίρεσης ώστε να εμπλακούν με αριθμούς πέραν των απλών λειτουργιών τους όπως η πρόσθεση.

Οι δυσκολίες και τα εμπόδια των ακολουθιών και των σειρών σχετίζονται με δυσκολίες της έννοιας του ορίου, που ανάγονται στις αντιλήψεις για το άπειρο. Η αντίληψη του απείρου με την εν δυνάμει πτυχή του (potential infinity), οδηγεί σε πεποιθήσεις για τις αριθμητικές ακολουθίες και τις σειρές όπως, η σύλληψη της ακολουθίας $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ ως μια μεταβλητή ποσότητα $s_n = \frac{1}{n}$, που γίνεται «αυθαίρετα μικρή» καθώς το n αυξάνεται ή ότι ο δεκαδικός αριθμός 0,999… είναι μικρότερος του 1, αφού ο n-οστός όρος $s_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ της ακολουθίας 0,9, 0,99, 0,999, … θα είναι πάντα μικρότερος του 1 (Kindron & Tall, 2015). Σύμφωνα με τους Kindron και Tall (2015), τέτοιες νοηματοδοτήσεις ακολουθούν την ιδέα της BMI[2] (Βασική μεταφορά στο άπειρο), που περιγράφεται από τους Lacoff και Núñez (2000),

*«Υποθέτουμε ότι όλες οι περιπτώσεις του απείρου – άπειρα σύνολα, σημεία στο άπειρο, όρια άπειρων σειρών, άπειρες διχοτομήσεις, ελάχιστα άνω φράγματα – είναι ειδικές περιπτώσεις μιας μόνο εννοιολογικής μεταφοράς στην οποία οι διαδικασίες που συνεχίζουν απεριόριστα έχουν ένα τέλος και ένα τελικό αποτέλεσμα».*

[2] BMI (Βασική μεταφορά στο άπειρο): μια κοινή συμπερασματική δομή μέσω της οποίας ο νους κατανοεί το άπειρο σε αναλογία με το πεπερασμένο.

Όμως η μεταφορά από την πρακτική αριθμητική που περιλαμβάνει πεπερασμένες λειτουργίες και πεπερασμένους δεκαδικούς είναι γνωστό ότι είναι προβληματική (Kindron & Tall, 2015).

Η Sierpinska (1987), για να μελετήσει τα επιστημολογικά εμπόδια της έννοιας του ορίου και την υπέρβαση αυτών, επιλέγει το πλαίσιο των άπειρων σειρών, ελπίζοντας να παραχθούν συνδέσεις μεταξύ της ιδέας της σύγκλισης σειρών και των δεκαδικών αναπτυγμάτων, καθώς επίσης για να δείξει ότι το άθροισμα άπειρου αριθμού όρων είναι δυνατό σε κάποιες περιπτώσεις, ενώ σε άλλες όχι.

Η έννοια του άπειρου αθροίσματος είναι μια μαθηματική έννοια εξαιρετικής σημασίας για τα μαθηματικά, με εφαρμογές ευρείας κλίμακας στην επιστήμη, όπως στη φυσική, στη βιολογία, στην ιατρική, στα οικονομικά. Στα μαθηματικά εμφανίζονται με εφαρμογές στο υπολογισμό εμβαδών μεταξύ καμπυλών, στους δεκαδικούς αριθμούς, σε μεδόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, στα ολοκληρώματα. Είναι μια έννοια αντίθετη στη διαίσθηση με αρκετές δυσκολίες στη μάθησή της που έχουν να κάνουν με αντιλήψεις των ατόμων για το άπειρο (González-Martín, Nardi, & Biza, 2011; Nardi, Biza, & González-Martín, 2008).

Διάφορες έρευνες έχουν διαπιστώσει  μια κοινή σύγχυση των μαθητευόμενων για την απόκλιση μιας άπειρης διαδικασίας, όπου στην περίπτωση των άπειρων αθροισμάτων εκφράζεται μέσω της πεποίθησης ότι το άθροισμα άπειρου αριθμού όρων πρέπει να είναι άπειρο, δηλαδή να ξεπερνά κάθε προεπιλεγμένη τιμή (Sacristán, 2001; Sacristán & Noss, 2008; González-Martín, Nardi, & Biza, 2011; Nardi, Biza, & González-Martín, 2008). Η πεποίθηση αυτή πηγάζει από τη διαισθητική κατανόηση των άπειρων σειρών ως άπειρα αθροίσματα που δεν μπορούν να ολοκληρωθούν σε πεπερασμένο χρόνο (Martínez-Planell, Gonzalez, DiCristina, & Acevedo, 2012). Το πρόβλημα προκύπτει όταν υπάρχουν κάποιες ανταγωνιστικές διεργασίες, όπως όταν δύο είδη επαναλήψης, ίσως διαφορετικής φύσης, συγχέονται (Nuñez, 2003, στο Sacristán, 2001) . Από τη μια η διαδικασία της πρόσθεσης ή της αύξησης του αριθμού των όρων και από την άλλη η συμπεριφορά αυτής της διαδικασίας από μόνη της (η οποία θα μπορούσε να συγκλίνει) (Sacristán, 2001).

## 1.3. Οι διαισθήσεις για το άπειρο κατά τη μαθησιακή διδασκαλία

Στις προηγούμενες ενότητες παρουσιάστηκαν αποτελέσματα ερευνών σχετικών με τις νοηματοδοτήσεις και τις αντιλήψεις μαθητών και φοιτητών για το άπειρο και για έννοιες που το εμπεριέχουν. Στη μάθηση τέτοιων εννοιών κυρίαρχος είναι ο ρόλος των διαισθήσεων και των εμπειριών των μαθητευόμενων οι οποίες πολλές φορές παραμένουν και επανέρχονται ακόμα και μετά από την τυπική διδασκαλία των εννοιών. Οι Fischbein, Tirosh και Hess (1979), ορίζουν τη διαίσθηση ως εξής: *«Χρησιμοποιούμε τον όρο διαίσθηση για τις άμεσες και αυταπόδεικτες μορφές της γνώσης»*. Μάλιστα υποστηρίζουν τη συνεργασία διαίσθησης και τυπικής προσέγγισης για την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης.

*«Τα μαθηματικά διδάσκουν τον πληθυσμό να σκέφτεται με συνέπεια. Χωρίς αρκετές διαισθήσεις και χωρίς την προσφυγή σε έναν επαρκή μαθηματικό έλεγχο, αυτή η συνέπεια μπορεί να εκφυλιστεί σε μια αδιέξοδη ακαμψία.»*

Η διασθητική σκέψη μαθητών που δεν έχουν πρόσβαση σε τυπικά μαθηματικά σχήματα, πρέπει να κριθεί και να ληφθεί υπόψιν ώστε η ‘αλήθεια’ και το ‘ψεύδος’ των διαισθήσεών τους να ειδωθεί στο δικό τους πλαίσιο και όχι σε ένα ανώτερο τυπικό που ενδεχομένως να διαστρεβλώσουν (Tall D. , 1980). Αυτό απαιτεί προσεκτικό και κατάλληλο σχεδιασμό, αφού έχει παρατηρηθεί ότι οι προσπάθειες των διδασκόντων για «απλοποίηση», ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές να ξεπεράσουν την πολυπλοκότητα των εννοιών πολλές φορές οδηγεί σε γνωστικά εμπόδια (Cornu, 1991). Από την άλλη η επιμονή σε τυπικές μόνο προσεγγίσεις πολλές φορές οδηγεί σε αλγοριθμικούς χειρισμούς για την επίλυση ασκήσεων προκαλώντας την υποτίμηση των γνωστικών και μεταγνωστικών πτυχών των εννοιών (Cornu, 1991).

## 1.4. Διδακτικές προσεγγίσεις του απείρου και σχετικών εννοιών

Ο Cornu (1991), αναφέρει δύο προσεγγίσεις για την παρουσίαση των εννοιών και συγκεκριμένα της έννοιας του ορίου. Η πρώτη αφορά στην καθαρή παρουσίαση της έννοιας. Πολλοί διδάσκοντες θεωρούν ότι με αυτό τον τρόπο οι μαθητές γίνονται ενήμεροι των πολύπλοκων πτυχών της έννοιας και αυτό τους δίνει τη δυνατότητα να αναπτύξουν τις δικιές τους ιδέες και να αντιμετωπίσουν τα εμπόδια. Όμως η έρευνα μέχρι τώρα δείχνει ότι οι εννοιολογήσεις των μαθητών ποικίλουν, τα λάθη που γίνονται είναι θεμελιώδη και τα εμπόδια δύσκολα ξεπερνιούνται. Η δεύτερη προσέγγιση περιλαμβάνει την έκθεση των μαθητευόμενων σε δραστηριότητητες για την απόκτηση επίγνωσης των άτυπων γνώσεών τους, των αυθόρμητων ιδεών, των εμπειριών τους και των διαισθήσεών τους, ώστε να μπορέσουν να τις θέσουν σε λειτουργία κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Αυτό αποδείχτηκε πολύτιμη στρατηγική για το χτίσιμο των γνώσεων και των κατανοήσεων (Cornu, 1983). Οι Nardi, Biza και González-Martín (2008), θεωρούν ότι η διδασκαλία που εστιάζει σε αλγοριθμικές προσεγγίσεις, που περιλαμβάνει ασκήσεις που απαιτούν μια τυφλή εφαρμογή τύπων, στατική χρήση γραφικών αναπαραστάσεων, απουσία συνδέσεων με άλλες χρήσιμες έννοιες εντός και εκτός των μαθηματικών αποφεύγει την αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών. Οι Lindaman και Gay (2012), σχεδίασαν στρατηγικές μεταρρύθμισης για τάξεις λογισμού με σκοπό την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των σειρών και την υπέρβαση τυπικών παρανοήσεων, δίνοντας έμφαση στην οπτικοποίηση, στη συνεργατική μάθηση, σε ερωτήσεις που προκαλούν συγκρούσεις με σκοπό την προώθηση υψηλού επιπέδου συλλογισμού και σε μεταγνωστικές δραστηριότητες, όπως αυτή του «γράφοντας (writing)», για σκέψη και κριτική της μάθησής τους από τους ίδιους τους μαθητευόμενους.

Ο Bagni (2005), προτείνει τη χρήση ιστορικών παραδειγμάτων κατά την παρουσίαση της έννοιας των σειρών, υποστηρίζοντας ότι με αυτό τον τρόπο μπορούν να αντιμετωπιστούν δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητευόμενων, που έχουν επίσης εμφανιστεί κατά την ιστορική εξέλιξη της έννοιας, όπως ότι άπειροι όροι δίνουν άπειρο άθροισμα ή οι παράδοξες καταστάσεις που προκύπτουν κατά τη μετάβαση από το πεπερασμένο στο άπειρο.

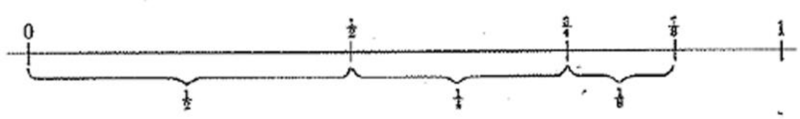
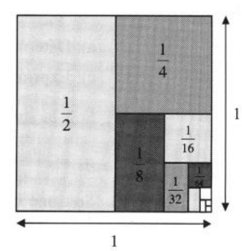
Ο Monaghan (2001), υποστηρίζει τη σημασία των δραστηριοτήτων στη διαμόρφωση ιδεών που εμπλέκουν το άπειρο, δίνοντας μάλιστα δύο παραδείγματα καλών πρακτικών, των Falk, Gassner, Ben Zoor και Ben Simon (1986) και της Sacristán (1997). Οι Falk, Gassner, Ben Zoor και Ben Simon (1986), έθεσαν σε παιδιά 5 – 12 ετών παιχνίδια αριθμών, ώστε να προκύψουν κατανοήσεις του απείρου. Και ενώ τα παιχνίδια λάμβαναν χώρα σε αριθμητικό πλαίσιο, οι ίδιοι οι συμμετέχοντες επικαλέστηκαν κάποιες φορές ένα γεωμετρικό σκηνικό για την αντιμετώπισή τους. Από την άλλη η Sacristán (1997), έχει μελετήσει ιδέες και αντιλήψεις για άπειρες σειρές που αναδύονται μέσα από το γεωμετρικό σηνικό των fractals, ενώ οι εργασίες των μαθητών λαμβάνουν χώρα σε ένα συνδυασμό πλαισίων (αλγεβρικού – γεωμετρικού – αριθμητικού), μέσω ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος.

Παρά τις παραπάνω έρευνες και των αποτελεσμάτων τους, που συμφωνούν στην ανάγκη για πιο εννοιολογική προσέγγιση, οι González-Martín, Nardi και Biza (2011) και Nardi, Biza και González-Martín (2008), κατά την εξέταση πανεπιστημιακών κειμένων που χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση της έννοιας της σειράς σε Καναδά και Ηνωμένο Βασίλειο, διαπιστώνουν ότι η αλγεβρική προσέγγιση κατέχει προνομιακή θέση με την πλειοψηφία των δραστηριοτήτων να αφορούν σε εφαρμογές των κριτηρίων σύγκλισης. Η έννοια της σειράς εισάγεται τυπικά ως ένα μαθηματικό αντικείμενο που εκπληρώνει μαθηματικές ανάγκες μόνο, χωρίς προτάσεις για εφαρμογές έξω από τα μαθηματικά και χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν η ιστορική εξέλιξή της. Οι δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται είναι αποπλαισιωμένες, χωρίς ιστορικές ή επιστημολογικές πτυχές με εστίαση σε τεχνικές. Η μελέτη των πρακτικών διδασκαλίας καθηγητών λογισμού σε διάφορα ιδρύματα του Μόντρεαλ έδειξε περίπου την ίδια εικόνα. Η διδασκαλία τους ακολουθεί στενά την τυπική – αλγεβρική προσέγγιση, με δραστηριότητες που αφορούν σε εφαρμογές κριτηρίων σύγκλισης, ενώ παρέχουν λίγες ευκαιρίες στους φοιτητές να εργαστούν με εφαρμογές των σειρών σε άλλους κλάδους, πέρα των μαθηματικών, αλλά και σε άλλα πλαίσια πέραν του αλγεβρικού. Μάλιστα δηλώνουν μη ενήμεροι για τις εφαρμογές της έννοιας αλλά και για τις δυνατότητες αναπαράστασής της.

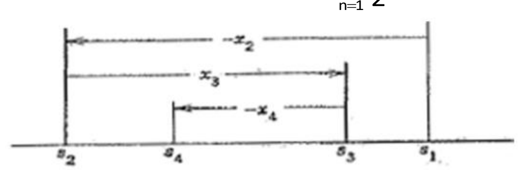
Η μέχρι τώρα έρευνα υποστηρίζει ότι η παραδοσιακή διδασκαλία εννοιών, που στη θεωρητική τους βάση βρίσκεται το άπειρο, κυρίως μέσα από μια τυπική αλγεβρική προσέγγιση μάλλον δυσχεραίνει τη σύνδεση των τυπικών γνώσεων με τις διαισθητικές αντιλήψεις και δεν φαίνεται να αντιμετωπίζει τις δυσκολίες των μαθητών (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979; Sacristán & Noss, 2008; Alcock & Simpson, 2004; Lindaman & Gay, 2012; Sacristán, 2001).

Όσον αφορά στις οπτικές αναπαραστάσεις, παρά την τυπική θεμελίωση εννοιών του λογισμού, οι οπτικές εικόνες εξακολουθούν να είναι κρίσιμες για τους μαθητευόμενους αλλά και για τους επαγγελματίες μαθηματικούς (Alcock & Simpson, 2004), όχι μόνο για επεξηγηματικούς σκοπούς αλλά ως βασικό στοιχείο συλλογισμού (Arcavi, 2003), αφού μπορούν να συμπυκνώνουν πληροφορίες και να προτείνουν αποτελέσματα ή πιθανές προσεγγίσεις σε αποδείξεις (Presmeg, 1986; Thurston, 1995).

Η εξέταση των κειμένων και των πρακτικών διδασκαλίας σε Καναδά και Ηνωμένο Βασίλειο από τους Nardi, Biza και González-Martín (2008) και González-Martín, Nardi και Biza (2011), έδειξε ότι ελάχιστος χώρος αφιερώνεται στις οπτικές αναπαραστάσεις της έννοιας της σειράς και της σύγκλισης, ενώ οι εφαρμογές που τίθενται είτε στα κείμενα είτε στη διάρκεια των μαθημάτων δεν απαιτούν από τους μαθητές συντονισμό των αλγεβρικών και γραφικών εγγραφών. Συγκεκριμένα στα κείμενα εμφανίζονται ελάχιστες οπτικές αναπαραστάσεις της γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, της αρμονικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ και της σειράς $x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots$ όπου $x_n$ είναι μια φθίνουσα και συγκλίνουσα ακολουθία στο 0 (εικόνα 1). Οι συνεντεύξεις των διδασκόντων αποκάλυψαν ότι δίνονται λίγες ευκαιρίες στους μαθητές να εργαστούν μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία των εννοιών, παρόλο που οι διδάσκοντες υποστηρίζουν την ιδέα της οπτικοποίησης κατά τη διδασκαλία ως μια καλή ευρετική η οποία πρέπει να συνοδεύεται με προφορικές λεκτικές περιγραφές για τη σύνδεση των αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων. Μάλιστα ένας από τους διδάσκοντες κάνει προτάσεις για οπτική αναπαράσταση γεωμετρικών σειρών μέσω ορθογωνίων-τετραγώνων ή μέσω του μοντέλου της σκάλας, όπου ελαφριές τροποποιήσεις στο ύψος κάθε σκαλιού μπορούν να μετατρέψουν τη σύγκλιση σε απόκλιση, ενώ δίνει και μια αναπαράσταση της αρμονικής σειράς και της απόκλισής της (εικόνα 1).

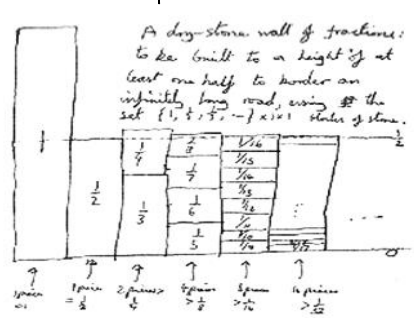



Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$




Η σειρά $x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots$ με $x_n$ μια φθίνουσα και συγκλίνουσα ακολουθία στο 0

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots$$




Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

*Εικόνα 1: Οπτικές αναπαραστάσεις σειρών που εμφανίζονται στα κείμενα και στις συνεντεύξεις*

Οι Alcock και Simpson (2004), μελετώντας τη μαθηματική συμπεριφορά φοιτητών, που έχουν την τάση να εστιάζουν σε οπτικές αναπαραστάσεις, κατά την εμπλοκή τους με έννοιες του λογισμού και συγκεκριμένα με σύγκλιση ακολουθιών και σειρών, παρατηρούν ότι αντιμετωπίζουν τις μαθηματικές κατασκευές ως αντικείμενα. Η εστίαση σε οπτικές αναπαραστάσεις με πτυχές σε εννοιολογικά αντικείμενα υποστηρίζει σχεσιακή κατανόηση (relational understanding), όπως έχει περιγραφεί από τον Skemp[3](1976), που επιτρέπει στους μαθητές να οργανώσουν τη γνώση τους σε ένα δίκτυο αντικειμένων, να κάνουν συγκρίσεις και να παράγουν νέα αποτελέσματα. Ακόμα και πιο αδύναμοι φοιτητές, που εστιάζουν στις εικόνες, έχτισαν τέτοιες σχεσιακές κατανοήσεις, ενώ αδύναμοι φοιτητές που δεν έκαναν χρήση εικόνων εμφανίζονται να στερούνται μαθηματικών γνωστικών αντικειμένων. Επίσης παρατηρείται ότι οι φοιτητές με τάση για οπτικοποίηση εξάγουν γρήγορα συμπεράσματα και πείθονται για την ορθότητα αυτών ακόμα κι όταν αποτυγχάνουν να παράγουν ακριβείς τυπικούς ορισμούς και ορθές αποδείξεις, σε αντίθεση με φοιτητές που δεν εστιάζουν στις εικόνες, οι οποίοι ακόμα και σε περιπτώσεις που παράγουν ολοκληρωμένες αποδείξεις εμφανίζονται με μια αίσθηση μη κατανόησης του υλικού.

Η Waldegg (1987), συνδύασε αριθμητικά και γεωμετρικά πλαίσια μέσω της χρήσης αλγεβρικής γλώσσας ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν να αντιμετωπίσουν εμπόδια που είχαν παρατηρηθεί, όπως η σύλληψη ότι ένα φραγμένο αριθμητικό σύνολο μπορεί να είναι άπειρο. Οι Garbin, S. και Azcárate, C. (2002) στο Sacristán και Noss (2008) εστίασαν στη σημασία tasks συνδέσεων (connection tasks) μεταξύ διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων, λεκτικών, γεωμετρικών, γραφικών, αλγεβρικών και αναλυτικών, για την ανάπτυξη συννεκτικών συλλογισμών των μαθητευόμενων σε σχέση με το φύσει άπειρο (actual infinity). Χτίζοντας συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων, κάποιες από τις δυσκολίες που προκύπτουν από την ενασχόληση σε ένα μόνο πλαίσιο θα μπορούσαν να αποφευχθούν (Sacristán & Noss, 2008). Μάλιστα ένα από τα κίνητρα για το μεταρρυθμιστικό κίνημμα στη Βόρεια Αμερική, ήταν η αναγνώριση της σημασίας μετάβασης μεταξύ αλγεβρικών, γραφικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών ιδεών (Tall D. , 1997).

Η καθιέρωση της μαθηματικής αλήθειας έγινε με χρήση αδρανών και στατικών μέσων. Και ενώ ο σκοπός των μαθηματικών επιτεύχθει, η αυστηρότητα των εκφράσεων και ο φορμαλισμός δημιουργεί προβλήματα στους μαθητευόμενους (DiSessa A. A., 2000) απομακρύνοντας το νόημα των μαθηματικών ιδεών από πραγματικές καταστάσεις και αυξάνοντας το επίπεδο δυσκολίας στις συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων (Sacristán & Noss, 2008). Ένα εναλλακτικό μέσο που επιτρέπει τη σύνδεση αναλυτικών μορφών με εμπειρικά συμπεράσματα φαίνεται να είναι ο προγραμματισμός. Πολλοί συγγραφείς προτείνουν υπολογιστικά περιβάλλοντα, περιβάλλοντα CAS, υπολογιστικά φύλλα, λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, ενώ μελέτες εξετάζουν την ανάπτυξη εννοιών του απείρου από μαθητές με τη διαμεσολάβηση ενός

[3] Σχεσιακή κατανόηση (Relational Understanding) : Κατανόηση των διασυνδέσεων της έννοιας με άλλες ιδέες σε ένα συνεκτικό δίκτυο εννοιών και διαδικασιών, *«Ξέρω τι κάνω και γιατί το κάνω».*

μικρόκοσμου σε περιβάλλον Logo (Sacristán, 1997; Sacristán, 2001; Sacristán & Noss, 2008). Τρεις τύποι αναπαραστάσεων προσφέρονται σε ένα τέτοιο προγραμματιστικό περιβάλλον. Η μαθηματική διαδικασία ορίζεται μέσω ενός κώδικα (συμβολική αναπαράσταση), η εκτέλεση του οποίου παράγει γραφικές και αριθμητικές αναπαραστάσεις. Πρόκειται για τρία ισομορφικά μοντέλα που παριστάνουν την ίδια διαδικασία. Από τη μια η γραφική αναπαράσταση αναπτύσσεται μέσω της κίνησης ενός χαρακτήρα (χελώνας), οπτικοποιώντας τη μαθηματική κατάσταση, από την άλλη η αριθμητική αναπαράσταση συμπληρώνει την οπτική, επικυρώνοντας ή απορρίπτοντας εικασίες και προσφέροντας ακρίβεια. Η συμβολική μορφή αναπαράστασης (κώδικας Logo) λειτουργεί ως σύνδεσμος μεταξύ των μαθητών και των άλλων μορφών αναπαράστασης. Η αναπαράσταση της μαθηματικής διαδικασίας μέσω ενός προγράμματος Logo απαιτεί ακρίβεια, αυστηρότητα στις εκφράσεις, εστίαση στις δομές και τις σχέσεις. Η αμοιβαιότητα με το μικρόκοσμο προσφέρει στους μαθητές ευκαιρίες για συντονισμό, έλεγχο, τροποποίηση και κατασκευή της γνώσης τους. Οι Sacristán και Noss (2008), επιχειρώντας την εμπλοκή μαθητών με καταστάσεις σύγκλισης ακολουθιών και σειρών μέσω ενός τέτοιου μικρόκοσμου, φέρνοντάς τους αντιμέτωπους με παράδοξα και εντάσεις, παρατηρούν ότι μέσω μιας τέτοιας προσέγγισης είναι δυνατόν να ξεπεραστούν σταδιακά προβλήματα, όπως η εφαρμογή κανόνων του πεπερασμένου σε άπειρες καταστάσεις, για παράδειγμα η αντίληψη ότι ένα άθροισμα άπειρων όρων θα είναι άπειρο.

# Κεφάλαιο 2: Θεωρητικό πλαίσιο

## 2.1. Η θεωρία της δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Consructionism)

Η θεωρία της δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Constructionism), έχοντας ως αφετηρία τη θεωρία του Piaget (Constructivism), εστιάζει στη μάθηση μέσω μιας ενεργητικής συνειδητής εμπλοκής των μαθητών στην κατασκευή της γνώσης με έμφαση στο «διάλογο» μαθητευόμενου με το αντικείμενο που κατασκευάζει.

*«Constructionism – το N σε αντίθεση με το V – μοιράζεται τη θέαση του Costructivism ως οικοδόμηση δομών γνώσης μέσω της προοδευτικής εσωτερικοποίησης των δράσεων… Στη συνέχεια προστίθεται η ιδέα ότι αυτό συμβαίνει ιδιαίτερα σε ένα πλαίσιο όπου ο μαθητής συνειδητά ασχολείται με την κατασκευή μιας δημόσιας οντότητας, είτε πρόκειται για ένα κάστρο στην άμμο, είτε για τη θεωρία του σύμπαντος»* (Papert & Harel, 1991).

Η θεωρία του Piaget προμηθεύει ένα πλαίσιο για την κατανόηση των τρόπων με τους οποίους τα παιδιά κατασκευάζουν και συνεχώς ανακατασκευάζουν γνώση μέσω των προσωπικών τους εμπειριών στα διαφορετικά επίπεδα της ανάπτυξής τους. Ο Papert εστιάζει περισσότερο στην τέχνη της μάθησης ή «learning to learn» και στη σημασία κατασκευής μέσα από το διάλογο του μαθητή με τα τεχνουργήματα (artefacts), ο οποίος οδηγεί σε αυτοκατευθυνόμενη μάθηση και στη διευκόλυνση κατασκευής της νέας γνώσης.

Και στις δυο θεωρίες τα παιδιά είναι οι κατασκευαστές των δικών τους γνωστικών εργαλείων και των δικών τους εξωτερικών πραγματικοτήτων. Η γνώση δεν είναι απλά ένα προϊόν που πρέπει να μεταδοθεί, να κωδικοποιηθεί, να διατηρηθεί και να εφαρμοστεί ξανά, αλλά προσωπική εμπειρία η οποία διαμορφώνεται. Και ο κόσμος δεν υπάρχει απλά περιμένοντας να αποκαλυφθεί, αλλά διαμορφώνεται σταδιακά και μετασχηματίζεται μέσω της προσωπικής εμπειρίας. Κοινός στόχος και στις δύο θεωρίες είναι να διαφωτιστούν οι διαδικασίες και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες τα άτομα διατηρούν ή αλλάζουν τις απόψεις τους και κατασκευάζουν βαθύτερες αντιλήψεις, για μια δεδομένη κατάσταση μέσω της αλληλεπίδρασής τους με αυτή (Ackermann , 2001).

Παρά τις σημαντικές συγκλίσεις οι δύο προσεγγίσεις διαφέρουν. Ο Piaget περιέγραψε τα στάδια ωρίμανσης του ανθρώπινου νου σε ένα ηλικιακό πλαίσιο, με βάση τις λογικές διεργασίες που μπορεί να πραγματοποιήσει σε κάθε στάδιο. Ο Papert διαφωνεί με αυτή την προσέγγιση. Για τον Papert, τα παιδιά πολύ πριν λάβουν εκπαίδευση συλλαμβάνουν διαισθητικά γεωμετρικές έννοιες και έχουν χωρική αντίληψη που τους βοηθά να κινούνται, ακόμη κι αν δεν έχουν διδαχθεί τίποτα από αυτές τις θεωρίες. Θεωρεί ότι τα παιδιά μπορούν να αντιληφθούν και εκτός των σταδίων ανάπτυξης, αν σχεδιαστούν κατάλληλα και πλούσια περιβάλλοντα τα οποία θα προσφέρουν εμπειρίες που θα καθιστούν δυνατή την δημιουργία μαθηματικών νοημάτων (Κυνηγός, 2006). Τονίζει τη σημασία των εργαλείων, των μέσων και του πλαισίου στη διαμόρφωση και το μετασχηματισμό των ιδεών, συντελώντας στην ανθρώπινη ανάπτυξη

(Ackermann , 2001). Και οι δύο θεωρίες υποστηρίζουν ότι η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται με βάση τις αντιλήψεις των μαθητών. Αυτό που προσθέτει ο Papert είναι ότι αυτό μπορεί να γίνει φυσιολογικά και αποτελεσματικά σε ένα περιβάλλον ή ένα πλαίσιο όπου ο μαθητής θα επινοεί τα εργαλεία και τις διαμεσολαβήσεις που υποστηρίζουν καλύτερα τις εξερευνήσεις του και θα εμπλέκεται στην κατασκευή δημόσιων οντοτήτων (public entities), τις οποίες θα εκφράζει και σε άλλους. Κάτω από αυτή τη θέαση ο Papert εισήγαγε την ιδέα των μικρόκοσμων, περιβάλλοντα εφοδιασμένα με υπολογιστικά αντικείμενα τα οποία ενσωματώνουν μαθηματικά άμεσα σχετιζόμενα με τους ίδιους τους εκπαιδευόμενους. Σύμφωνα με το όραμα του Papert, οι εκπαιδευόμενοι θα πρέπει να μπορούν να συντονίζουν τα αντικείμενα με τη δική τους αίσθηση και γνώση του σώματός τους (bodysyntonic) και ταυτόχρονα να αντιλαμβάνονται αυτά τα αντικείμενα με τρόπους εναρμονισμένους με τις αισθήσεις τους ως ανθρώπους με προθέσεις, στόχους, επιθυμίες, συμπάθειες, αντιπάθειες (egosyntonic), δύο πτυχές της θεωρίας δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευής (Healy & Kynigos, 2010).

## 2.2. Πολλαπλές αναπαραστάσεις

Ο ρόλος της αναπαράστασης είναι εξαιρετικής σημασίας στο πεδίο της γνωστικής ψυχολογίας όσον αφορά στην απόκτηση γνώσης και του χειρισμού της. Ο Duval (1995) επισημαίνει ότι *«δεν υπάρχει γνώση που να μπορεί να επιστρατευτεί χωρίς δραστηριότητα αναπαράστασης»*. Στο πεδίο των μαθηματικών η χρήση αναπαραστάσεων είναι βασική εξαιτίας της φύσης τους, αφού δεν υπάρχει κάποιος άλλος τρόπος πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα σε σχέση με άλλα γνωστικά πεδία, όπως η γεωλογία, η φυσική, η αστρονομία, τα οποία δίνουν δυνατότητες εμπειρικών προσεγγίσεων (Duval, 1999). Ο Kaput (1987), ορίζει ως αναπαράσταση ένα νοητικό σύμβολο ή μια έννοια που εκπροσωπείται από ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο. Το υλικό σύμβολο της αναπαράστασης αποτελεί το σημαίνων (signifier) και η έννοια η οποία αναπαρίσταται αποτελεί το σημαινόμενο (signified). Οι αναπαραστάσεις δεν εμφανίζονται μεμονωμένα, αλλά ανήκουν σε πολύπλοκα δομημένα συστήματα τα οποία καλούνται «σχήματα συμβόλων» ή «αναπαραστασιακά συστήματα» (Kaput, 1987).

Οι Goldin και Kaput (1996), θεωρούν πολύ σημαντική για την ψυχολογία της μάθησης και την ενασχόληση με τα μαθηματικά τη διάκριση σε εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις. Ο όρος εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρεται σε πιθανούς νοητικούς σχηματισμούς των ατόμων, είτε πρόκειται για εκπαιδευόμενους, είτε για λύτες προβλημάτων. Τα νοητικά αυτά σχήματα δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμα, αλλά είναι δυνατόν να υποτεθούν από την εξωτερική συμπεριφορά των ατόμων. Όσον αφορά στη διδακτική δραστηριότητα, τα συμπεράσματα για τους νοητικούς σχηματισμούς των μαθητών μπορεί να είναι σιωπηρά, ενώ συχνά επιδιώκονται συγκεκριμένοι τύποι εσωτερικών αναπαραστάσεων στους μαθητές. Από την άλλη οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται σε φυσικά ενσωματωμένους παρατηρήσιμους σχηματισμούς όπως, λέξεις, εικόνες, εξισώσεις ή υπολογιστικοί μικρόκοσμοι. Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις του ατόμου που ερμηνεύει (εικόνα 2) (Goldin & Kaput, 1996).


*Εικόνα 2: Σχέση εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων (Goldin & Kaput, 1996)*

Αυτή η διάκριση εσωτερικών-νοητικών και εξωτερικών-φυσικών αναπαραστάσεων είναι αποδεκτή από πολλούς ερευνητές, εντούτοις υπάρχουν και κάποιοι όπως οι Lesh, Post και Behr (1987) που θεωρούν αυτή τη διχοτομία τεχνητή, ενώ επιφυλάξεις εκφράζει και ο Duval (1995). Ο Duval (1995), θεωρεί ότι η παραπάνω διάκριση πρέπει να αναφέρεται στον τρόπο από τον οποίο παράγονται αυτές οι αναπαραστάσεις και όχι στη φύση τους. Τα σημεία (signs) με αυτή την έννοια είναι είτε διανοητικές, είτε φυσικές, είτε εξωτερικές οντότητες. Ο Duval δεν δέχεται τη διάκριση εωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων όπως ορίζονται στις γνωστικές επιστήμες, αλλά διακρίνει τις αναπαραστάσεις σε σημειωτικές και φυσικές/οργανικές. Οι σημειωτικές αναπαραστάσεις αναφέρονται σε εκείνες που παράγονται είτε διανοητικά είτε εξωτερικά σκόπιμα με τη χρήση οποιουδήποτε σημειωτικού συστήματος, γλώσσα, τυπική γλώσσα, αριθμητική γραφή, συμβολική γραφή, προτάσεις, γραφήματα, διαγράμματα, σχέδια για να υποδηλώσουν το αντικείμενο που αναπαρίσταται. Ενώ οι φυσικές/οργανικές αναπαραστάσεις προκαλούνται αιτιατά και αυτόματα, είτε από ένα οργανικό σύστημα (εικόνες μνήμης), είτε από μια φυσική συσκευή (φωτογραφίες).

Για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο συνήθως υπάρχουν πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις, οι οποίες υποδηλώνουν διαφορετικές ιδιότητες του αντικειμένου που αναπαρίσταται, ενώ το περιεχόμενο των σημειωτικών αναπαραστάσεων δεν πρέπει να συγχέεται με το μαθηματικό αντικείμενο. Ο Duval ορίζει ως «εγγραφές των σημειωτικών αναπαραστάσεων (register of semiotic representation)» τα μέσα αναπαράστασης και επεξεργασίας που κάθε σημειωτικό σύστημα προμηθεύει για μαθηματικό συλλογισμό. Η θεωρία «register of semiotic representation» περιλαμβάνει τρεις γνωστικές λειτουργίες.

- Το σχηματισμό αναπαράστασης ενός αντικειμένου
- Τους μετασχηματισμούς μέσα στην ίδια την εγγραφή, κάνοντας χρήση των τυπικών κανόνων του συστήματος, οδηγώντας σε αναμορφώσεις ή συνθέσεις (επεξεργασία – processing)
- Τους μετασχηματισμούς για την μετατροπή των εγγραφών. Η αναπαράσταση του αντικειμένου μετατρέπεται σε μια διαφορετική αναπαράσταση του ίδιου αντικειμένου, σε μια διαφορετική εγγραφή (μετατροπή – conversion). Η μαθηματική δραστηριότητα σε μια κατάσταση επίλυσης προβλήματος απαιτεί ικανότητα για τη μετατροπή μιας εγγραφής, είτε

επειδή κάποια άλλη εγγραφή είναι περισσότερο κατάλληλη, είτε επειδή και οι δύο εγγραφές είναι αναγκαίες (Duval, 1995; Duval, 1999).

Η χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων πιθανώς καλλιεργεί ποικίλες κατανοήσεις των μαθηματικών αντικειμένων, εντούτοις πολλές φορές δεν αρκεί όταν γίνεται με ασύνδετο τρόπο. Απαιτείται συντονισμός (coordination) μεταξύ των διαφορετικών εγγραφών, για να οδηγηθούν οι μαθητές σε συνδέσεις, φτιάχνοντας ένα γνωστικό οικοδόμημα στο οποίο θα κάνουν αντικειμενικές συνδέσεις μεταξύ παραγωγικών (deductive) και εμπειρικών μαθηματικών και θα αναγνωρίζουν το ίδιο το αντικείμενο μέσω των διαφορετικών αναπαραστάσεών του.

## 2.3. Ψηφιακά εργαλεία

Στην παρέμβαση της παρούσας εργασίας η χρήση ψηφιακών εργαλείων κατέχει κυρίαρχο ρόλο. Χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικά περιβάλλοντα, ο μικρόκοσμος της χελωνόσφαιρας και το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας geogebra, λαμβάνοντας υπόψιν τις διαφορετικές λειτουργίες τους και τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατό να συμβάλλουν στην κατασκευή νοημάτων και στην ενίσχυσή τους. Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών των δύο περιβαλλόντων.

### 2.3.1. Περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας

Στην παρούσα εργασία έγινε χρήση δομημάτων σχεδιασμένα στο περιβάλλον Geogebra, ένα ευρέως διαδεδομένο ψηφιακό περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας (DGE) που εκτός των χαρακτηριστικών των DGEs συνδυάζει και στοιχεία άλλων κατηγοριών εκπαιδευτικού λογισμικού όπως τα αλγεβρικά ψηφιακά συστήματα (CAS).

Το βασικό στοιχείο των DGEs είναι η δυνατότητα που δίνουν στο μαθητή να μεταβαίνει μεταξύ χωρικής αναπαράστασης ενός μαθηματικού αντικειμένου και της αντίστοιχης αφηρημένης έννοιας δηλαδή ενός συνόλου ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν το μαθηματικό αντικείμενο (Κυνηγός, 2006). Αυτό που χαρακτηρίζει τα DGEs είναι ο δυναμικός χειρισμός των αντικειμένων.

Η συνεισφορά των DGEs στη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας είναι αντιληπτή καθώς συνδέεται με τη θεωρητική πτυχή της μάθησης, αλλά και με το δυναμικό χειρισμό των κατασκευών. Κάθε DGE παρέχει ένα σύνολο εργαλείων που μπορεί να συσχετιστεί με τα αντίστοιχα εργαλεία κατασκευών της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Ένα μεγάλο μέρος ερευνών έχει εξάγει αποτελέσματα για τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας με χρήση DGEs, καθώς επίσης για το ρόλο τους στην διατύπωση εικασιών, στις αποδεικτικές διαδικασίες και σε καταστάσεις επιχειρηματολογίας.

Η βασική λειτουργία των DGEs είναι το σύρσιμο (dragging) με το μαθηματικό του ανάλογο να είναι η έννοια της μεταβολής (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006), ενώ πολλοί ερευνητές έχουν εντοπίσει διάφορα είδη συρσίματος και έχουν μελετήσει πως το κάθε είδος επιδρά στη διαδικασία της μάθησης. Μια άλλη ισχυρή λειτουργία είναι η λειτουργία της μέτρησης και ανάλογα με τον τρόπο που οι μαθητές τη χρησιμοποιούν, μπορούν να κατασκευάζουν μαθηματικά νοήματα, να διατυπώνουν εικασίες, να τις ελέγχουν και να τις χρησιμοποιούν για την κατασκευή αποδείξεων (Sinclair & Robutti, 2013).

Ο Vadcard (1999) στη μελέτη του για τη χρήση της μέτρησης, διακρίνει δύο κατηγορίες μετρήσεων που πραγματοποιούν οι μαθητές καθώς εμπλέκονται με τα DGEs:

- *Διερευνητική μέτρηση (mesure exploratoire)*, που χρησιμοποιείται κυρίως ως ευρετικό εργαλείο
- *Αποδεικτική μέτρηση (mesure probatoire)*, που χρησιμοποιείται ως ελεγκτικό εργαλείο.

Επιπλέον, οι Olivero και Robutti (2007), διαχώρισαν τις παραπάνω κατηγορίες σε διάφορους τύπους. Η πρώτη κατηγορία σχετίζεται με την εναλλαγή από το χωρο-γραφικό πεδίο στο θεωρητικό και περιλαμβάνει τους εξής τύπους:

- *Περιπλανώμενη/τυχαία μέτρηση (Wandering measuring)*: οι μαθητές δεν έχουν ακριβείς ιδέες για τα σχήματα, συνεπώς εξερευνούν τυχαία.
- *Καθοδηγούμενη μέτρηση (Guided measuring)*: οι μαθητές κάνουν μία καθοδηγούμενη εξερεύνηση του σχήματος εξετάζοντας συγκεκριμένες καταστάσεις τη μία πίσω από την άλλη.
- *Αντιληπτική μέτρηση (Perceptual measuring)*: οι μαθητές χρησιμοποιούν μετρήσεις για να ελέγξουν την ορθότητα μιας διαίσθησής τους ή μιας αντίληψης τους, μετασχηματίζοντας μία ποιοτική σχέση σε ποσοτική.

Η δεύτερη κατηγορία σχετίζεται με την εναλλαγή από το θεωρητικό πεδίο στο χωρο-γραφικό όπου οι μαθητές χρειάζεται να ελέγξουν την ορθότητα μίας διαίσθησης, εικασίας ακόμα και απόδειξης. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τους εξής τύπους:

- *Επικύρωση μέτρησης (Validation measuring)*: οι μαθητές χρησιμοποιούν μετρήσεις για να ελέγξουν αν μια εικασία πρέπει να γίνει δεκτή ή να απορριφθεί.
- *Αποδεικτική μέτρηση (Proof measuring)*: οι μαθητές, αφού έχουν κατασκευάσει μία απόδειξη, χρησιμοποιούν μετρήσεις για να ελέγξουν ή για να αποκτήσουν πεποίθηση.

### 2.3.2. Μικρόκοσμοι

Το όραμα των μικρόκοσμων για τη μάθηση των μαθηματικών εισήχθη στην κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης από τον Papert στο ICME το 1972. Ο Papert έδωσε μια πρώτη περιγραφή των μικρόκοσμων, ως «αυτοδύναμοι» κόσμοι στους οποίους οι μαθητές μαθαίνουν να μεταφέρουν συνήθειες και πρακτικές διερεύνησης από την προσωπική τους ζωή, στο πεδίο της επιστημονικής δημιουργίας (Healy & Kynigos, 2010). Στο βιβλίο του «Mindstorms», ο Papert μιλά για «ανακατασκευή» των μαθηματικών και για τη χρήση των υπολογιστών ως μαθηματικά εκφραστικά μέσα με τα οποία θα σχεδιαστούν «κατάλληλα μαθηματικά» προσαρμοσμένα στον μαθητευόμενο (Healy & Kynigos, 2010).

Οι πρώτοι μικρόκοσμοι ήταν καθαρά προγραμματιστικά περιβάλλοντα με κύρια χαρακτηριστικά τη γλώσσα προγραμματισμού και τη δυνατότητα κατασκευής γραφικών μοντέλων μέσω αυτής. Τα βασικά στοιχεία της δραστηριότητας των μαθητών σ’ ένα τέτοιο περιβάλλον είναι η δυνατότητα κατασκευής, τροποποίησης, επέκτασης των κανόνων και των σχέσεων του ίδιου του μικρόκοσμου. Το πρώτο παράδειγμα μικρόκοσμου ήταν η *Γεωμετρία της Χελώνας* που σχεδιάστηκε από τον Papert το 1980 και χρησιμοποιήθηκε σε πολλές έρευνες ως εργαλείο για τη μελέτη της κατασκευής γεωμετρικών νοημάτων των μαθητών. Η φύση αυτών των μικρόκοσμων, με τη δυνατότητα επεξεργασίας και τις άμεσες αναπαραστάσεις που προκαλούνται, παρέχει άμεση, επιστημολογικά σαφή και σύντομη ανατροφοδότηση που επιτρέπει διερεύνηση, αναθεώρηση, κατασκευή, στοιχεία επαρκή για να ενταχθούν οι μικρόκοσμοι στα πλαίσια του constructionism ως εργαλείο μάθησης (Kafai & Resnick, 1996). Ο Papert φαντάστηκε τα περιβάλλοντα των μικρόκοσμων ως προσβάσιμες, προκλητικές και ελκυστικές μαθηματικές κουλτούρες, στις οποίες οι μαθητές εμβαθύνουν και αναδύεται μαθηματική ευχέρεια. Έτσι στον πυρήνα των μικρόκοσμων βρίσκεται ένα πεδίο της μαθηματικής γνώσης. Ο μικρόκοσμος εξελίσσεται κατά τη διερεύνησή από τους μαθητές καθώς οικοδομούν νέα αντικείμενα και σχέσεις, κάνοντας χρήση των εργαλείων (Thompson, 1987), δηλαδή μαζί με τη γνωστική ανάπτυξη των χρηστών (Hoyles, 1993).

Σε επόμενες προσεγγίσεις οι μικρόκοσμοι έχουν περιγραφεί ως υπολογιστικά περιβάλλοντα που ενσωματώνουν ένα σύνολο επιστημονικών εννοιών και σχέσεων, σχεδιασμένων έτσι, ώστε με κατάλληλες διδακτικές πρακτικές και tasks, οι μαθητές να εμπλέκονται σε διερεύνηση και πλούσιες κατασκευές στη δημιουργία εννοιών (Samara & Clements, 2002). Στο πλαίσιο της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών, η εστίαση μετατοπίζεται στη μορφή της αλληλεπίδρασης με τα εργαλεία και στην διαμεσολάβησή τους μεταξύ των δράσεων του ατόμου και των νοητικών του νοημάτων, αφού τα εργαλεία όχι μόνο διευκολύνουν τις νοητικές διεργασίες, αλλά τις αλλάζουν, τις αναδιοργανώνουν και τις διαμορφώνουν (Vygotsky, 1981). Στόχος είναι να κατανοηθούν οι τρόποι με τους οποίους επικοινωνούν τα οπτικά και τα συμβολικά νοήματα μέσω τέτοιων εργαλείων και κατ’ επέκταση ο μηχανισμός κατασκευής μαθηματικών νοημάτων. Από αυτή την άποψη οι ατομιστικές προσεγγίσεις στη μάθηση του constructionism, δίνουν σταδιακά τη θέση τους σε προσεγγίσεις οι οποίες λαμβάνουν υπόψη πολιτιστικές θεωρήσεις.

Όπως προαναφέρθηκε, το πρώτο παράδειγμα μικρόκοσμου ήταν η *Γεωμετρία της Χελώνας*, όπου η μαθηματική οντότητα είναι η Χελώνα. Ως προς τη μαθηματική της φύση η χελώνα παίζει το ρόλο των μαθηματικών αντικειμένων, διατηρώντας όμως κάποιες από τις φυσικές ιδιότητες μιας πραγματικής χελώνας, αφού είναι προσανατολισμένη και έχει ένα δυναμικό χαρακτήρα, προσφέροντας γόνιμο έδαφος στους μαθητές να συσχετίσουν τυπικές μαθηματικές ιδέες με δικές τους κινητικές εμπειρίες. Έτσι διευκολύνεται η μεταφορά της γνώσης από το γνωστό στο άγνωστο (Papert, 1980), με την ενσωμάτωση της *Γεωμετρίας της Χελώνας* στη γλώσσα προγραμματισμού Logo. Η Logo στη *Γεωμετρίας της Χελώνας*, έδωσε τη δυνατότητα ορισμού νέων διαδικασιών και επεξεργασίας, παρείχε ειδική σημειολογία για τον ορισμό μεταβλητών μέσα στις διαδικασίες και ένα συντακτικό με τυπικά σύμβολα κοντά στο μαθηματικό φορμαλισμό (Κυνηγός, 2006), που επιτρέπει τη χρήση εννοιών από αριθμητική, άλγεβρα και αναλυτική γεωμετρία. Δίνεται έτσι η δυνατότητα στους μαθητές να εκφράσουν τα μαθηματικά τους νοήματα με τη χρήση συμβόλων, που μπορεί να έχουν αλγεβρική υπόσταση (αριθμοί, μεταβλητές). Έτσι οι μαθηματικές τους ιδέες εκφράζονται με συμβολική μορφή μέσω της Logo, η οποία προκαλεί άμεσα τη γραφική αναπαράστασή τους. Η γραφική ανατροφοδότηση που έπεται της εκτέλεσης της συμβολικής μορφής, δίνει ευκαιρίες για αναστοχασμό, αναδιαμόρφωση και γενικεύσεις. Οι μικρόκοσμοι λοιπόν παίρνουν τη μορφή λογισμικών συμβολικής έκφρασης που προσφέρουν δυνατότητες διερεύνησης μαθηματικών ιδεών συνδέοντας τρείς μορφές αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων (προγραμματιστικές, συμβολικές και γραφικές) μέσω του συντονισμού των κινήσεων της Χελώνας με αισθησιοκινητική δραστηριότητα του ίδιου του χρήστη.

Ο Edwards (1998), παραθέτει κάποια κοινά χαρακτηριστικά όλων των μικρόκοσμων:

- Ένας μικρόκοσμος αποτελείται από ένα σύνολο υπολογιστικών αντικειμένων (τυπικά ορισμένων μέσω διαδικασιών ή προγραμμάτων) τα οποία αντανακλούν τη δομή των μαθηματικών ή άλλων επιστημονικών οντοτήτων (αν θέλουμε διευρύνουμε αυτά τα περιβάλλοντα ώστε να μοντελοποιούν και άλλες επιστημονικές πτυχές) στο πλαίσιο ενός γνωστικού πεδίου.
- Ένας μικρόκοσμος συνδέει περισσότερες από μια αναπαραστάσεις των υποκείμενων μαθηματικών ή άλλων επιστημονικών οντοτήτων, οι οποίες τυπικά είναι συμβολικές και οπτικές ή γραφικές. Ο σχεδιασμός περιβαλλόντων αποτελεί ανοιχτό πεδίο έρευνας, οπότε θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν και άλλες μορφές αναπαραστάσεων.
- Τα αντικείμενα και οι λειτουργίες σε ένα μικρόκοσμο μπορούν να συνδυαστούν ώστε να παράγουν πιο σύνθετες μορφές αντικειμένων ή λειτουργιών.
- Ένας μικρόκοσμος περιλαμβάνει ένα σύνολο από δραστηριότητες και ο χρήστης καλείται να αλληλεπιδράσει με τις οντότητες και τις λειτουργίες για να φτάσει σε ένα στόχο, όπως για παράδειγμα να λύσει ένα πρόβλημα.

Οι πρώτοι μικρόκοσμοι με προγραμματισμό Logo δεν περιλάμβαναν εργαλεία δυναμικού χειρισμού (Abelson & DiSessa, 1981). Με την άφιξη νέων τεχνολογιών διεπαφής η γλώσσα προγραμματισμού, ως το κύριο μέσο κατασκευής νοήματος στα πλαίσια του constructionism, ξεθώριασε υπέρ του δυναμικού χειρισμού των αναπαραστάσεων και η σημασία πέρασε στην υψηλή ποιότητα των γραφικών και εικονικών αναπαραστάσεων (Healy & Kynigos, 2010). Στα μέσα του ’90, ο Papert στο πλαίσιο του constructionism στη μαθηματική εκπαίδευση, αναδεικνύει την κατασκευή της γνώσης μέσα από την εμπλοκή των ατόμων με δυναμικά μεταβαλλόμενες κατασκευές και την ανάπτυξη προσωπικού διαλόγου με αυτές (Kafai & Resnick, 1996). Η εμπλοκή με περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας ενδεχομένως να οδηγεί στην αντίληψη ότι ο μαθηματικός φορμαλισμός έχει νόημα μόνο για τους επαγγελματίες μαθηματικούς, αφού σε τέτοια περιβάλλοντα κάποιος μπορεί να κατασκευάσει μαθηματικές ιδέες μέσα από δυναμικό χειρισμό, παρακάμπτοντας τη μαθηματική τυποποίηση. Από την άλλη οι μικρόκοσμοι με την ενσωμάτωση δυναμικού χειρισμού απαιτούν χρήση μαθηματικού φορμαλισμού, με τρόπο όμως που έχει νόημα για τους μαθητές (DiSessa A. , 2000). Τέτοιοι μικρόκοσμοι (για παράδειγμα ο χελωνόκοσμος), δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιστοιχίζουν ένα μαθηματικό αντικείμενο, το οποίο εκφράζεται συμβολικά μέσω μιας γλώσσας προγραμματισμού, σε ένα δυναμικό διάγραμμα, δηλαδή ένα σύνολο από διαγράμματα με δυναμική μετάβαση από το ένα στο άλλο (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006). Ο δυναμικός χειρισμός σε ένα μικρόκοσμο διαφέρει από ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Το σύρσιμο στα DGEs αφορά ένα χωρικό αντικείμενο (σημείο, πλευρά κτλ.), ενώ σε ένα μικρόκοσμο το αντικείμενο δυναμικού χειρισμού μπορεί να είναι μια μεταβλητή, που συμβάλει στην κατασκευή του μαθηματικού αντικειμένου, προκαλώντας ταυτόχρονες μεταβολές σε όλες τις αναπαραστάσεις του. Ο σκοπός της ενσωμάτωσης δυναμικού χειρισμού σε ένα μικρόκοσμο είναι η παράλληλη χρήση των αναπαραστάσεων ενός μαθηματικού αντικειμένου με δυναμικό τρόπο, ώστε οι μαθητές να κάνουν συγχρόνως άλγεβρα και γεωμετρία.

## 2.4. Αφαίρεση εντός πλαισίου (AiC)

Οι Hershkowitz, Schwarz και Dreyfus (2001), εστιάζουν στην έννοια της αφαίρεσης ως μια δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές αναδιοργανώνουν κατακόρυφα τα μαθηματικά που έχουν κατασκευάσει προηγουμένως σε μια νέα μαθηματική δομή. Χρησιμοποιούν τον όρο abstraction για να αναφερθούν στη διαδικασία και στο αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούν τους όρους process of abstraction για τη διαδικασία και abstracted entity για το αποτέλεσμα. Η θεωρία της Αφαίρεσης σε Πλαίσιο (Abstraction in Context – AiC), υιοθετεί τις απόψεις της κατακόρυφης μαθηματικοποίησης (vertical mathematization) της σχολής του Freudenthal και της «method of ascent to the concrete» του Davydov, εκπρόσωπου της προσέγγισης του Vygotsky.

Η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση αποτελεί τη γνωστική διάσταση της AiC και υποδεικνύει μια διαδικασία που τυπικά αποτελείται από την αναδιοργάνωση των προηγούμενων μαθηματικών κατασκευών μέσα από τα μαθηματικά και με μαθηματικά μέσα, όπου οι μαθητές κατασκευάζουν μια νέα αφηρημένη γνώση. Οι Dreyfus, Hershkowitz και Schwarz (2015), χρησιμοποιούν τους όρους κατακόρυφη μαθηματικοποίηση και κατακόρυφη αναδιοργάνωση για να διακρίνουν την πρόθεση του εκπαιδευτικού (μαθηματικοποίηση) από το τι συμβαίνει στην πράξη (αναδιοργάνωση). Στην κατακόρυφη αναδιοργάνωση οι προηγούμενες κατασκευές είναι τα δομικά στοιχεία της αφαίρεσης, τα οποία αναδιοργανώνονται και πολλές φορές συνενώνονται και ενσωματώνονται δίνοντας βάθος στη γνώση του μαθητή, ενώ οι νέες κατασκευές γίνονται τα δομικά στοιχεία για επιπλέον δράσεις κατασκευής σε μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία (Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015).

Από την άλλη η AiC υιοθετεί την κοινωνικοπολιτιστική διάσταση της «method of ascent to the concrete» του Davydov, όπου η αφαίρεση είναι μια διαλεκτική διαδικασία που ξεκινά από μια ασαφή, αρχική μορφή, που στερείται συνέπειας, προβαίνει στην ανάλυσή της, για να καταλήξει στη σύνθεση μιας πιο συνεπούς λεπτομερής μορφής μέσα από τις αλληλεπιδράσεις των ατόμων. Επιπλέον ιδιαίτερη σημασία δίνεται στο πλαίσιο που μπορεί να περιλαμβάνει ιστορικά, εμπειρικά, κοινωνικά, μαθησιακά, μαθηματικά, τεχνολογικά στοιχεία.

Η γένεση της αφαίρεσης διέρχεται από τρία στάδια (Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015):

1. Την *ανάγκη (need)*: ωθεί τους μαθητές να εμπλακούν στην αφαιρετική διαδικασία και προκύπτει από μια αρχική ασαφή κατάσταση για τον εκπαιδευόμενο και κατάλληλο σχεδιασμό.
2. Την *ανάδυση της νέας κατασκευής (emergency)*: το στάδιο αυτό περιγράφεται από τρεις επιστημικές δράσεις.
    - *Αναγνώριση (Recognizing)*: στη φάση αυτή λαμβάνει χώρα η αναγνώριση της συνάφειας προηγούμενων κατασκευών και γνώσεων με τωρινές καταστάσεις.
    - *Επαναδόμηση (Building with)*: είναι η φάση που περιλαμβάνει τη χρήση και το συνδυασμό των αναγνωρισμένων κατασκευών, γνώσεων και στρατηγικών για την επίτευξη του στόχου.
    - *Κατασκευή (Constructing)*: είναι η κύρια επιστημική δράση της αφαίρεσης κατά την οποία συναρμολογούνται και ενσωματώνονται προηγούμενες κατασκευές από κατακόρυφη μαθηματικοποίηση για την παραγωγή νέων κατασκευών. Είναι η πρώτη φορά που ο εκπαιδευόμενος εκφράζει ή χρησιμοποιεί τη νέα κατασκευή, η οποία όμως μπορεί να είναι εύθραυστη στις συνθήκες και στο πλαίσιο, αφού ο εκπαιδευόμενος δεν έχει πάντα την πλήρη επίγνωση των νέων κατασκευών του.
3. Την *παγίωση (consolidation)*: στο στάδιο αυτό, οι εκπαιδευόμενοι αποκτούν επίγνωση των κατασκευών τους, τις οποίες χρησιμοποιούν πιο άμεσα και αυτονόητα με περισσότερη σιγουριά και ευελιξία. Απόδειξη αυτής της ευχέρειας, είναι η αναγνώριση (recognizing) και η οικοδόμηση (building with) των νέων κατασκευών σε περαιτέρω δραστηριότητες κατασκευής.

Στη διαδικασία της αφαίρεσης οι επιστημικές δράσεις είναι εμφωλευμένες (nested) (Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015). Συγκεκριμένα οι δράσεις Recognizing είναι εμφωλευμένες στις δράσεις Building with, αφού η οικοδόμηση βάσει προηγούμενων κατασκευών και γνώσεων απαιτεί την αναγνώριση της ομοιότητας και της συνάφειας με καταστάσεις που έχουν να αντιμετωπίσουν. Επίσης οι δράσεις Constructing εξαρτώνται από τις δράσεις Recognizing και Building with, οι οποίες είναι δομικά μέρη τους. Έτσι οι δράσεις Recognizing και Building with είναι εμφωλευμένες στις δράσεις Constructing. Το μοντέλο Recognizing-Building with-Constructing (RBC) ή Recognizing-Building with-Constructing+Consolidation (RBC+C) είναι ο φακός μέσω του οποίου παρατηρούμε και αναλύουμε τη δυναμική της AiC.

# Κεφάλαιο 3: Μεθοδολογία της έρευνας

## 3.1. Εισαγωγή – Ερευνητικά ερωτήματα

Εστιάζοντας στα επιστημολογικά εμπόδια που εμπεριέχει η έννοια του απείρου και στις δυσκολίες μαθητών και φοιτητών κατά τη μετάβασή τους από πεπερασμένες καταστάσεις σε άπειρες, αναδύονται προβληματισμοί για την παρουσίαση της έννοιας μέσα από τα κείμενα και μέσα από τις πρακτικές διδασκαλίας, που τις περισσότερες φορές γίνεται με στατικό τρόπο, χωρίς οπτικοποίηση και αναπαραστάσεις και με λίγες ευκαιρίες διερεύνησης. Τα ευρήματα των ερευνών συνηγορούν στον εμπλουτισμό των κειμένων και των πρακτικών διδασκαλίας με δυναμικές αναπαραστάσεις και οπτικοποιήσεις, στη δυνατότητα για ένα διερευνητικό τύπο εργασίας σε περιβάλλοντα όπου ο μαθητής θα δημιουργήσει τις δικές του κατασκευές και θα νοηματοδοτήσει μέσω αυτών, καθώς και σε εφαρμογές της έννοιας σε πλαίσια εκτός των μαθηματικών.

Λαμβάνοντας υπόψιν την υπάρχουσα έρευνα και κάτω από το πρίσμα της θεωρίας δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Constructionism), η παρούσα έρευνα επιδιώκει μια πρώτη επαφή μαθητών λυκείου, οι οποίοι δεν έχουν εμπλακεί σε κάποιου είδους τυπική εκπαίδευση, με έννοιες οι οποίες υποκρύπτουν το άπειρο. Στόχος είναι οι μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι με παράδοξες καταστάσεις και να χτίσουν πάνω σε αυτές, μέσα σε περιβάλλοντα εργασίας, παραδοσιακά και υπολογιστικά, που προσφέρουν τη δυνατότητα κατασκευής αναπαραστάσεων διαφόρων ειδών, χειρισμού και συντονισμού αυτών, ώστε να προκύψουν συνδέσεις μεταξύ τους και να παραχθούν νοήματα σχετικά με την έννοια.

Το ερευνητικό θέμα της παρούσας εργασίας είναι η μετάβαση μαθητών λυκείου από το πεπερασμένο σε άπειρες καταστάσεις μέσω διδακτικών πρακτικών, οι οποίες δεν βασίζονται στη μαθηματική τυποποίηση αλλά στοχεύουν σε έναν πιο εμπειρικό και διερευνητικό τύπο εργασίας από τη μεριά των μαθητών και τα ερευνητικά ερωτήματα διαμορφώνονται ως εξής:

- Μελέτη των νοηματοδοτήσεων της έννοιας του απείρου και των διάφορων πτυχών του καθώς και εννοιών στενά συνδεδεμένων με το άπειρο από μαθητές που δεν έχουν λάβει έως τώρα κάποιο είδος τυπικής μαθηματικής εκπαίδευσης σε τέτοια θέματα.
- Ποιος είναι ο ρόλος και η συμβολή του πλαισίου, των tasks, των αναπαραστάσεων, των περιβαλλόντων εργασίας και των εργαλείων στη διαμόρφωση των παραπάνω νοηματοδοτήσεων.

## 3.2. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν έξι μαθητές της Β’ Λυκείου ενός Γενικού Λυκείου της Αθήνας, δύο αγόρια και τέσσερα κορίτσια, οι οποίοι χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες. Η συμμετοχή τους ήταν εθελοντική, ενώ υπήρξε η έγγραφη συναίνεση των κηδεμόνων τους.

Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου και διήρκησε συνολικά εννέα διδακτικές ώρες. Χρησιμοποιήθηκαν τρία laptop, ένα για κάθε ομάδα, στα οποία ήταν εγκατεστημένο το λογισμικό geogebra, ενώ στην επιφάνεια εργασίας τους υπήρχε φάκελος με όλα τα απαραίτητα αρχεία για τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων (εφαρμογές στο geogebra και στη χελωνόσφαιρα, φύλλα εργασίας). Σε κάθε laptop υπήρχε η δυνατότητα πρόσβασης στο διαδίκτυο, ώστε να καταστεί δυνατή η χρήση του περιβάλλοντος της χελωνόσφαιρας. Επίσης σε κάθε laptop ήταν εγκατεστημένο λογισμικό καταγραφής οθόνης, το οποίο παρέχει τη δυνατότητα ταυτόχρονης καταγραφής ήχου, κάτι για το οποίο ήταν ενήμεροι οι μαθητές και οι κηδεμόνες τους οι οποίοι συναίνεσαν. Στη φάση εξοικείωσης με το περιβάλλον της χελωνόσφαιρας έγινε χρήση ενός επιπλέον laptop συνδεδεμένου με ένα βιντεοπροβολέα ώστε να είναι εφικτή η παρουσίαση του μικρόκοσμου και των βασικών του εντολών. Τέλος στην αίθουσα υπήρχε ένας πίνακας ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για την καταγραφή συμπερασμάτων.

Το γνωστικό επίπεδο των μαθητών ήταν από καλό έως πολύ καλό. Συγκεκριμένα ο Κώστας και ο Πρόδρομος, της ομάδας 2, έχουν ένα σχετικά καλό επίπεδο μαθηματικής γνώσης, με τον Πρόδρομο να επιδεικνύει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και τη συνέχιση των σπουδών του σε αυτό το πεδίο. Η Κων/να και η Νανά από την ομάδα 3, παρουσιάζουν ένα πολύ καλό επίπεδο μαθηματικής γνώσης, όμως δεν εκδηλώνουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον κλάδο των μαθηματικών. Οι μαθήτριες της ομάδας 1, Ζέτα και Γεωργία, έχουν υψηλό μαθηματικό υπόβαθρο και εκδηλώνουν έντονο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Μάλιστα η Ζέτα εμφανίζεται με το προφίλ μιας μαθήτρια με ιδιαίτερες ικανότητες και δεξιότητες όχι μόνο στο πεδίο των επιστημών αλλά και σε άλλους κλάδους, όπως για παράδειγμα στη συγγραφή κειμένων. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, αρκετές φορές και οι δυο μαθήτριες της ομάδας 1 εκφράστηκαν με πάθος για καταστάσεις που αντιμετώπιζαν.

Ο σχεδιασμός της παρέμβασης απαιτούσε την εμπλοκή των μαθητών με δυο ψηφιακά περιβάλλοντα. Το μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας και το περιβάλλον του geogebra. Οι μαθητές είχαν μια πρότερη επαφή με το λογισμικό του geogebra από τη διδασκαλία των μαθημάτων της άλγεβρας και της γεωμετρίας. Γνώριζαν τον τρόπο λειτουργίας του, τις δυνατότητες δυναμικού χειρισμού που προσφέρει, ενώ είχαν χρησιμοποιήσει διάφορα εργαλεία του για κάποιες κατασκευές. Από την άλλη δεν είχαν έρθει σε επαφή ποτέ έως τώρα με το μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας, ενώ είχαν δουλέψει στο μικρόκοσμο MicroWorlds Pro στη Γ' Γυμνασίου στο μάθημα της πληροφορικής, χωρίς όμως να το θυμούνται. Η γρήγορη και εύκολη προσαρμογή τους στη φάση της εξοικείωσης μπορεί να σημαίνει ότι αυτή η προηγούμενη επαφή τους με ένα μικρόκοσμο έπαιξε θετικό ρόλο.

Η ερευνήτρια ήταν αυτή που έθεσε τους στόχους και τους σκοπούς της έρευνας έχοντας υπόψιν την υπάρχουσα και σχεδίασε τις δραστηριότητες των tasks σύμφωνα με αυτούς. Κατά την εμπλοκή των μαθητών στις δραστηριότητες των tasks περιφερόταν μεταξύ των ομάδων και παρέμβαινε όταν οι μαθητές είχαν δυσκολίες με ζητήματα χειρισμού των λογισμικών ή όταν είχαν απορίες σχετικά με τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων  αλλά κυρίως όταν οι μαθητές έπρεπε να αναπτύξουν το συλλογισμό τους και να δώσουν εξηγήσεις σχετικά με τις μεθόδους και τα εργαλεία που χρησιμοποιούσαν αλλά και τις εικασίες και τα συμπεράσματα στα οποία κατέληγαν. Ακόμα κι όταν οι μαθητές οδηγούνταν σε λανθασμένα συμπεράσματα ή επέλεγαν προσεγγίσεις οι οποίες δεν θα κατέληγαν σε αποτελέσματα σχετικά με τα ερωτήματα, τους έδινε χρόνο να αναπτύξουν τους συλλογισμούς τους, τους ζητούσε εξηγήσεις και τους έδινε ανατροφοδότηση ώστε να ερμηνεύσουν μόνοι τους τις προσεγγίσεις τους, να αναγνωρίσουν τις λανθασμένες επιλογές τους και να αναζητήσουν άλλες μεθόδους και εργαλεία. Μετά το πέρας κάποιας δραστηριότητας, αρκετές φορές έφερνε τη συζήτηση στην ολομέλεια, με σκοπό την αλληλεπίδραση, την ανταλλαγή διαφορετικών προσεγγίσεων και την επικοινωνία μαθηματικών νοημάτων.

## 3.3. Συλλογή δεδομένων

Τα δεδομένα προήλθαν από τις φάσεις εκτέλεσης των δύο tasks (φάσεις 2Β και 2Γ), ενώ δεν συλλέχτηκαν δεδομένα από τη φάση εξοικείωσης με το περιβάλλον της χελωνόσφαιρας (φάση 2Α). Οι κύριες πηγές συλλογής δεδομένων λοιπόν είναι:

- Απομαγνητοφωνήσεις των video κάθε ομάδας που εξήχθησαν από το πρόγραμμα καταγραφής οθόνης σε κάθε laptop.
- Παρατήρηση των καταγεγραμμένων δράσεων των μαθητών κάθε ομάδας σε video που προήλθαν από το πρόγραμμα καταγραφής οθόνης που ήταν εγκατεστημένο σε κάθε laptop.
- Σημειώσεις των μαθητών στα φύλλα εργασία.
- Σημειώσεις της ερευνήτριας κατά την εκτέλεση της παρέμβασης.

## 3.4. Φάσεις διεξαγωγής έρευνας

Η έρευνα διεξήχθη σε δύο φάσεις που έχουν να κάνουν με το σχεδιασμό και την εκτέλεση της.

**Φάση 1: Η φάση του σχεδιασμού**

Η φάση αυτή χωρίζεται σε δύο επιμέρους φάσεις:

- **Φάση 1Α: Επισκόπηση της υπάρχουσας έρευνας και διαμόρφωση των ερευνητικών ερωτημάτων**
  Η μελέτη της υπάρχουσας έρευνας ανέδειξε προβλήματα και δυσκολίες που σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες που εμπλέκουν το άπειρο και που παραμένουν ακόμα και σε φοιτητές που βρίσκονται σε στάδια προχωρημένης μαθηματικής σκέψης. Παρατηρήθηκε ότι ένα πλήθος ερευνών εστιάζει σε νοηματοδοτήσεις φοιτητών και στη διδασκαλία εννοιών λογισμού στην τριτοβάθμια εκπαίδευση παρά σε αντιλήψεις και προσεγγίσεις μαθητών λυκείου για το άπειρο. Με βάση τα αποτελέσματα των ερευνών που μελετήθηκαν και των κενών που εντοπίστηκαν τέθηκαν τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας.
- **Φάση 1Β: Σχεδιασμός των δραστηριοτήτων της παρέμβασης**
  Στη φάση αυτή σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια δυο ειδών δραστηριότητες:

- Οι δραστηριότητες εξοικείωσης με το ψηφιακό περιβάλλον του μικρόκοσμου της χελωνόσφαιρας.
- Οι δραστηριότητες των δυο βασικών tasks με τα οποία ενεπλάκησαν οι μαθητές.

Όλες οι δραστηριότητες, με έμφαση σ’ αυτές που περιλαμβάνονταν στα δυο tasks, σχεδιάστηκαν ώστε να ικανοποιούνται τρεις βασικοί στόχοι:

α. Η ανάδειξη μαθηματικών νοημάτων σχετικών με το άπειρο και με έννοιες που το εμπεριέχουν, με σκοπό την ανάλυσή τους και τη μελέτη τους.
β. Η καλλιέργεια ενός διερευνητικού τρόπου εργασίας, μέσω της δημιουργίας ποικίλων περιβαλλόντων όπου οι μαθητές θα αλληλεπιδρούν με διάφορα είδη αναπαραστάσεων με σκοπό την κατασκευή νοημάτων.
γ. Ο συνεργατικός τρόπος μάθησης, η αλληλεπίδραση των μαθητών και η επικοινωνία των μαθηματικών νοημάτων

**Φάση 2: Η φάση εκτέλεσης της παρέμβασης**

Η φάση αυτή χωρίζεται σε τρεις επιμέρους φάσεις.

- **Φάση 2Α: Η φάση εξοικείωσης με το μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας**
  Οι μαθητές στη φάση αυτή ήρθαν σε επαφή με το περιβάλλον του μικρόκοσμου και κάποιες βασικές εντολές (εντολές μετακίνησης, εντολές επανάληψης). Εν συνεχεία ενεπλάκησαν με δραστηριότητες ώστε να εξοικειωθούν με τις παραπάνω εντολές μέσω των δικών τους κατασκευών. Η φάση αυτή διήρκεσε δυο διδακτικές ώρες, ενώ οι μαθητές γρήγορα εξοικειώθηκαν με το περιβάλλον και εύκολα δημιούργησαν τις δικές τους κατασκευές, παρόλο που δεν είχαν πρόσφατη επαφή με τέτοιου είδους περιβάλλοντα.
- **Φάση 2Β: Εφαρμογή του 1ου task**
  Σ’ αυτό το task οι μαθητές ενεπλάκησαν με ένα ρεαλιστικό πρόβλημα από το χώρο της ιατρικής. Η εφαρμογή του task διήρκησε τέσσερις διδακτικές ώρες όπου οι μαθητές εργάστηκαν με δραστηριότητες κατανεμημένες σε τρία φύλλα εργασίας. Στο πρώτο φύλλο εργασίας οι μαθητές ενεπλάκησαν με αριθμητικούς υπολογισμούς και αλγεβρικούς χειρισμούς σε περιβάλλον χαρτί – μολύβι. Στο δεύτερο φύλλο εργασίας οι δραστηριότητες απαιτούσαν από τους μαθητές την οπτική αναπαράσταση του προβλήματος με δυο διαφορετικούς τρόπους επίσης σε περιβάλλον χαρτί – μολύβι, ενώ στο τρίτο φύλλο εργασίας οι μαθητές ενεπλάκησαν με διάφορες αναπαραστάσεις (αλγεβρική, αριθμητική, οπτική) του προβλήματος στο μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας.
- **Φάση 2Γ: Εφαρμογή του 2ου task**
  Οι μαθητές, κατά τη διάρκεια τριών διδακτικών ωρών, ήρθαν αντιμέτωποι με το γεωμετρικό σκηνικό ενός fractal. Δόθηκαν δύο φύλλα εργασίας, όπου στο πρώτο απαιτήθηκε αλγεβρική αντιμετώπιση του προβλήματος ενώ στο δεύτερο οι μαθητές κλήθηκαν να εργαστούν για την εξαγωγή συμπερασμάτων δίνοντάς τους τη δυνατότητα χειρισμού αριθμητικών και οπτικών αναπαραστάσεων του προβλήματος μέσω μιας εφαρμογής σχεδιασμένης στο ψηφιακό περιβάλλον του geogebra.

# 3.5. Ανάλυση δραστηριοτήτων

## 3.5.1. Συνοπτική περιγραφή του σκεπτικού των δραστηριοτήτων

Το άπειρο είναι μια αφηρημένη, αντίθετη πολλές φορές στη διαίσθηση, έννοια που παραδοσιακά παρουσιάζει επιστημολογικές δυσκολίες και οδηγεί πολλές φορές σε παράδοξα και καταστάσεις συγκρούσεων. Στο επίπεδο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης οι έρευνες δείχνουν ότι η διδασκαλία εννοιών που σχετίζονται με το άπειρο εστιάζει σε φορμαλιστικές προσεγγίσεις με περιορισμένες οπτικοποιήσεις και ελάχιστες ευκαιρίες διερεύνησης με αποτέλεσμα οι φοιτητές να εμπλέκονται σε τεχνικές και αλγεβρικού τύπου εφαρμογές ενώ παραμένουν οι αντιλήψεις που έχουν διαμορφώσει από την καθημερινή εμπειρία πριν την τυπική μαθηματική τους εκπαίδευση.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, στην παρούσα έρευνα επιδιώχθηκε η εμπλοκή μαθητών της Β’ Λυκείου σε δραστηριότητες διερεύνησης κλασικών ακολουθιών και των αντίστοιχων σειρών σε δυο διαφορετικά πλαίσια, στο πλαίσιο μιας ρεαλιστικής κατάστασης και σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο. Παρακάτω επισημαίνονται οι βασικές προτιμήσεις στις οποίες στηρίχθηκε ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων.

- Η επαφή των μαθητών με το άπειρο και η κατασκευή νοημάτων γύρω από αυτό, διερευνώντας, δημιουργώντας, ελέγχοντας και τροποποιώντας.
- Η κατασκευή πεδίων αφαίρεσης σε διαφορετικά πλαίσια και διαφορετικά περιβάλλοντα εργασίας ώστε να δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα κατασκευής και συντονισμού διαφόρων ειδών αναπαραστάσεων με στόχο τη δημιουργία νοητικών συνδέσεων μεταξύ τους.
- Η διευκόλυνση της μάθησης μέσω συνεργασίας, αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας προσεγγίσεων, αντιλήψεων και νοημάτων.
- Οι μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι με παράδοξες καταστάσεις σε σχέση με τη διαίσθησή τους, ώστε να χτίσουν πάνω σ’ αυτές και να παραχθούν αντιλήψεις πέραν της διαίσθησης.

## 3.5.2. Δραστηριότητες του 1$^{ου}$ task – το πρόβλημα του φαρμάκου

Για το πρώτο tasks σχεδιάστηκαν συνολικά έξι δραστηριότητες οι οποίες κατανεμήθηκαν σε τρία φύλλα εργασίας.

**1$^{ο}$ Φύλλο εργασίας**

Αρχικά δίνονται στους μαθητές κάποιες γενικές πληροφορίες για τα φάρμακα, τους τρόπους χορήγησής τους και της απορρόφησή τους από τον ανθρώπινο οργανισμό. Ο στόχος είναι οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με το χώρο αυτό, χωρίς όμως να εμπλακούν σε περισσότερες λεπτομέρειες που ίσως τους αποπροσανατολίσουν.

**Γενικές Πληροφορίες για τα φάρμακα**

- **Φάρμακο** ονομάζεται κάθε χημική ουσία ή μείγμα χημικών ουσιών που μπορεί να επηρεάσει τη λειτουργία του οργανισμού κάθε έμβιου όντος ή μικροοργανισμού όταν εισέλθει σε αυτόν. Δηλαδή όταν εισέρχεται σε έναν οργανισμό , ανακουφίζει, θεραπεύει ή αποκαθιστά την υγεία.
- **Τρόποι χορήγησης των φαρμάκων:**
    - ✓ Από το πεπτικό σύστημα (χάπι, σιρόπι, υπόθετο)
    - ✓ Παρεντερικά (ενδοφλεβίως, ενδομυϊκά, υποδόρια, ενδοδερμικά)
    - ✓ Από το αναπνευστικό σύστημα (εισπνοές)
    - ✓ Τοπικά στο δέρμα (κρέμες) ή διαδερμικά (αυτοκόλλητα)
    - ✓ Από τον ρινικό βλενογόνο
    - ✓ Από τον οφθαλμό
- **Απορρόφηση φαρμάκων:** η μεταφορά του φαρμάκου από τη θέση χορήγησης στην κυκλοφορία του αίματος. Η ταχύτητα απορρόφησης εξαρτάται από τον τρόπο χορήγησης. Για παράδειγμα στην ενδοφλέβια χορήγηση η απορρόφηση είναι άμεση και πλήρης, δηλαδή το σύνολο της δόσεως του φαρμάκου φτάνει στην κυκλοφορία κατά το 100%. Η χορήγηση του φαρμάκου από άλλες οδούς έχει σαν αποτέλεσμα ένα μέρος μόνο της δόσης να φτάνει στη συστηματική λειτουργία.

Στη συνέχεια τίθεται το πρόβλημα που θα απασχολήσει τους μαθητές σ' αυτό το task.

### Πρόβλημα

Ένας ενήλικας για να αντιμετωπίσει μια ασθένεια πρέπει να λαμβάνει καθημερινά μια ποσότητα $a$ mg ενός φαρμάκου ενδοφλεβίως. Η απορρόφηση του φαρμάκου είναι άμεση κατά το 100%, ενώ μέχρι το τέλος του 24ώρου ο οργανισμός αποβάλλει το 50% του φαρμάκου.

Πληροφορίες για τη δράση του φαρμάκου σε ένα συγκεκριμένο ασθενή

- Το φάρμακο λειτουργεί αποτελεσματικά για τον ασθενή όταν η ποσότητα του στον οργανισμό του ασθενούς κυμαίνεται από 95 mg έως 120 mg για όσο χρονικό διάστημα διαρκέσει η θεραπεία.
- Το φάρμακο γίνεται επιβλαβές για τον οργανισμό του ανθρώπου όταν η ποσότητα της ουσίας στον οργανισμό ξεπεράσει τα 120 mg.

**1η Δραστηριότητα**

Ακολουθεί η 1η δραστηριότητα όπου οι μαθητές καλούνται να εμπλακούν σε αριθμητικούς υπολογισμούς ώστε να διατυπώσουν μια εικασία για την ποσότητα του φαρμάκου στην περίπτωση που η λήψη του συνεχίζεται απεριόριστα.

**Δραστηριότητα 1**

Ποια θα είναι η ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενή την $1^η$ ημέρα λήψης, τη $2^η$ ημέρα λήψη, την $3^η$ ημέρα λήψης, την $4^η$ ημέρα λήψη, την $5^η$ ημέρα λήψης, την $6^η$ ημέρα λήψης, μετά τη χορήγηση της ημερήσιας δόσης, αν αυτή έχει οριστεί από τον θεράποντα ιατρό στα **50 mg**;

$1^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
$2^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
$3^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
$4^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
$5^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
$6^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
Πιστεύετε ότι το φάρμακο θα γίνει επικίνδυνο για τον ασθενή κάποια στιγμή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. …………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………………

Αναμένεται οι μαθητές να αντιδράσουν αυθόρμητα και με βάση τη διαίσθησή τους, σύμφωνα με την οποία άπειροι όροι πρέπει να δίνουν άπειρο άθροισμα μεταφέροντας αντιλήψεις τους για το πεπερασμένο σε άπειρες καταστάσεις.

Στόχος της δραστηριότητας είναι οι ανυποψίαστοι μαθητές να διατυπώσουν μια τέτοια διαισθητική εικασία, ώστε αργότερα να έρθουν αντιμέτωποι με μια παράδοξη γι' αυτούς κατάσταση.

**$2^η$ Δραστηριότητα**

Ακολουθεί η $2^η$ δραστηριότητα όπου οι μαθητές θα εμπλακούν σε αλγεβρικούς χειρισμούς προκειμένου να δώσουν ένα γενικό τύπο υπολογισμού της ποσότητας του φαρμάκου τη n-οστή ημέρα λήψης και με ημερήσια δόση α mg.

**Δραστηριότητα 2**

Αν ο ασθενής λαμβάνει καθημερινά ποσότητα **a mg** φαρμάκου, ποια θα είναι η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενή την $1^η$ ημέρα λήψης, τη $2^η$ ημέρα λήψης, την $3^η$ ημέρα λήψης, την $4^η$ ημέρα λήψης και γενικά τη n-οστής ημέρα λήψης του φαρμάκου, μετά τη χορήγηση της ημερήσιας δόσης;
$1^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
$2^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
$3^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
$4^η$ ημέρα λήψης: …………………………………………………………………………………………………
n-οστή ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………………

Τα ερωτήματα της δραστηριότητας κατευθύνουν σε ένα επαγωγικό τρόπο σκέψης προκειμένου οι μαθητές να καταλήξουν στο άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, ενώ κατά το σχεδιασμό υπήρχε επίγνωση των διαφορετικών στρατηγικών εργασίας όπως η κατασκευή αναδρομικού τύπου ή η κατασκευή του τύπου για το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου. Όσον αφορά τον αναδρομικό τρόπο προσέγγισης του προβλήματος, είχε σχεδιαστεί μια σειρά προφορικών οδηγιών για την αποφυγή του, ενώ η διαδικασία εύρεσης του αθροίσματος γεωμετρικής προόδου απαιτεί τύπους από προηγούμενη τάξη και έτσι αποκλείστηκε το ενδεχόμενο κάποια ομάδα να ακολουθήσει αυτή τη στρατηγική.

Στόχος της δραστηριότητας ήταν οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^{n-1}}$, που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου καθώς η λήψη του συνεχίζεται απεριόριστα. Με τον τρόπο αυτό επιδιώκεται σύνδεση, έστω και άτυπη, μεταξύ της σειράς και της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της. Επίσης η αλγεβρική αντιμετώπιση θα τους δώσει τη δυνατότητα να αντιληφθούν το μοτίβο που ακολουθείται προκειμένου να προκύψουν οι όροι της ακολουθίας.

**2ο Φύλλο εργασίας**

Σε αυτό το φύλλο εργασίας οι μαθητές θα αναπαραστήσουν οπτικά σε περιβάλλον χαρτί – μολύβι την ποσότητα του φαρμάκου με δύο τρόπους: με τη μορφή ραβδογράμματος και με τη μορφή κυκλικών διαγραμμάτων. Είναι οπτικές αναπαραστάσεις δανεισμένες από τον κλάδο της στατιστικής όπου η καθημερινή εμπειρία τις καθιστά οικείες. Επίσης υπάρχει μια προηγούμενη επαφή των μαθητών με τέτοιου είδους διαγράμματα λόγω της επαφής τους με το μάθημα της στατιστικής στο Γυμνάσιο.

**1η Δραστηριότητα**

Στην 1η Δραστηριότητα κατά την αναπαράσταση με τη μορφή ραβδογράμματος αναμένεται οι μαθητές να κατασκευάσουν τις ράβδους κάνοντας χρήση των αριθμητικών τιμών που έχουν προκύψει από την προηγούμενη εργασία τους και να αρχίσουν να διαισθάνονται την ολοένα και μικρότερη αύξηση της ποσότητας του φαρμάκου στο πέρασμα του χρόνου. Μάλιστα τα ύψη των ράβδων δίνουν την αίσθηση του «σταματήματος σε ένα σημείο».

Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι με μια παράδοξη κατάσταση σε σχέση με τη διαίσθησή τους και να αμφισβητήσουν την αυθόρμητη αντίληψη ότι άπειροι το πλήθος όροι δίνουν απείρως μεγάλο άθροισμα. Ταυτόχρονα επειδή οι ράβδοι αποτελούν μια οπτική αναπαράσταση των όρων της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων μέσω αυτής επιδιώκεται μια άτυπη σύνδεση των σειρών[4] με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τους.

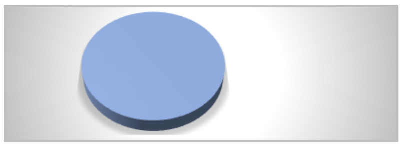
[4] Υπενθυμίζεται ότι η ποσότητα του φαρμάκου καθώς η λήψη του συνεχίζεται απεριόριστα εκφράζεται αλγεβρικά μέσω της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^{n-1}}$.

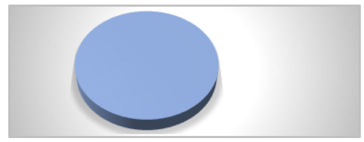
**2$^{η}$ Δραστηριότητα**

Στη δεύτερη δραστηριότητα ζητείται από τους μαθητές να αναπαραστήσουν την ποσότητα του φαρμάκου κάνοντας χρήση των κυκλικών διαγραμμάτων μέχρι και την 6$^{η}$ ημέρα λήψης, αναπαριστώντας την ημερήσια ποσότητα λήψης με ένα κυκλικό δίσκο.

### Δραστηριότητα 2

Αν αναπαραστήσουμε με ένα κυκλικό δίσκο την ποσότητα του φαρμάκου που ο ασθενής λαμβάνει ημερησίως, να αναπαραστήσετε την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς στην αρχή της 6$^{ης}$ ημέρας λήψης του και μετά τη χορήγηση της ημερήσιας δόσης του.





Αναμένεται οι μαθητές να κάνουν συνδέσεις με τον αλγεβρικό τύπο $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ και να αντιστοιχίσουν την ποσότητα α στον ένα κυκλικό δίσκο, ενώ στο δεύτερο κυκλικό δίσκο να αναπαραστήσουν την ποσότητα $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ ακολουθώντας το μοτίβο υποδιπλασιασμού που εμπεριέχει. Είναι σημαντική λοιπόν κατά την προηγούμενη αλγεβρική εμπλοκή τους οι μαθητές να αντιληφθούν αυτή την ιδέα, της συνεχούς διαίρεσης δια δύο.

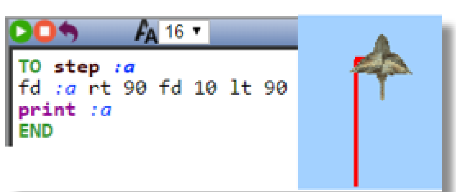
Στόχος της δραστηριότητας είναι να κατασκευαστεί μια αναπαράσταση μέσω της οποίας θα είναι δυνατό να προκύψει μια βεβαιότητα για το ότι η ποσότητα του φαρμάκου δεν μπορεί να ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή ακόμα κι αν η λήψη του συνεχίζεται απεριόριστα.

**3$^{ο}$ Φύλλο εργασίας**

Σε αυτό το φύλλο εργασίας οι μαθητές καλούνται να εργαστούν, να διερευνήσουν και να πειραματιστούν σε ένα διαφορετικό περιβάλλον, ψηφιακό αυτή τη φορά, το μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας, ώστε να προκύψουν συμπεράσματα σχετικά με το πρόβλημα του φαρμάκου.

**1$^{η}$ Δραστηριότητα**

Στο **ερώτημα Α** της 1$^{ης}$ Δραστηριότητας δίνεται ένας κώδικας, ο step, και οι μαθητές καλούνται να υποθέσουν την κίνηση του χαρακτήρα στο πεδίο των γραφικών που θα προκαλέσει η εκτέλεσή του (εικόνα 3). Δεν αναμένεται κάποια δυσκολία από την πλευρά των μαθητών.




*Εικόνα 3: Ο κώδικας step και η οπτική του αναπαράσταση*

Ο κώδικας step αποτελεί υπορουτίνα ενός άλλου κώδικα, του scale, τον οποίο οι μαθητές θα κληθούν να συμπληρώσουν στο ερώτημα Β αυτής της δραστηριότητας. Στόχος είναι πριν έρθουν σε επαφή με το βασικό κώδικα εργασίας τους, τον scale, μέσω του οποίου θα κάνουν τη διερεύνησή τους για το πρόβλημα του φαρμάκου, να εστιάσουν σε μια υπορουτίνα του, ώστε η μετάβαση στις εντολές του scale και οι συνδέσεις τους με το πρόβλημα, να γίνει πιο ομαλά.

Στο **ερώτημα Β** της δραστηριότητας, οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τις εντολές του κώδικα scale, κάνοντας χρήση της υπορουτίνας step, ώστε η εκτέλεσή του για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών του, α και n, να δίνει την ποσότητα του φαρμάκου τη n-οστή ημέρα λήψης του αν η ημερήσια δόση είναι α mg.

**Β.** Χρησιμοποιώντας τον κώδικα ***step***, να συμπληρώστε τον κώδικα ***scale*** ώστε όταν τον εκτελέσετε, να προκύψει ένα σχήμα που θα αναπαριστά την ποσότητα της ουσίας στον οργανισμό στην αρχή της n-οστής ημέρας λήψης, μετά τη χορήγηση της ημερήσιας δόσης, δεδομένου ότι η ποσότητα του φαρμάκου που λαμβάνει καθημερινά ο ασθενής είναι α mg. Στη συνέχεια να εκτελέσετε τον κώδικα αυτό, για να αναπαραστήσετε την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό, την $6^{η}$ ημέρα, μετά τη χορήγηση της ημερήσια δόσης, αν αυτή έχει οριστεί στα 50 mg .

```
TO scale :a :n
make "i 0
while :i<:n
[step Product :a  ........
  make "i ........]
END
```

Αναμένεται οι εντολές που ήδη υπάρχουν στον κώδικα να οδηγήσουν τους μαθητές σε συσχετίσεις και συνδέσεις με τον αλγεβρικό τύπο και το μοτίβο που εμπεριέχει, ώστε τελικά να προκύψει ο ζητούμενος αλγόριθμος.

Η χρήση ενός προγραμματιστικού περιβάλλοντος έγινε με σκοπό να περιγραφεί η μαθηματική διαδικασία που αναδύεται από το ρεαλιστικό πρόβλημα του φαρμάκου με αυστηρές και ακριβείς εκφράσεις μέσω ενός αλγορίθμου, που θα δώσει τη δυνατότητα οπτικοποίησής της και ταυτόχρονης ανάλυσής της από τις αριθμητικές αναπαραστάσεις που παράγονται και μέσω αυτών να προκληθούν νοηματοδοτήσεις για την άπειρη διαδικασία της απεριόριστης λήψης του φαρμάκου. Η εμπλοκή με το μικρόκοσμο στρέφει την εστίαση στις δομές, στις σχέσεις, στη φύση των αντικειμένων και στην ταυτόχρονη παρατήρηση αυτών μέσω οπτικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων. Αντικείμενο μελέτης είναι η εμφάνιση αφαιρετικών διαδικασιών νοηματοδότησης ιδεών και εννοιών σχετικών με το άπειρο.

**$2^{η}$ Δραστηριότητα**

Τα ερωτήματα που τίθενται στη $2^{η}$ δραστηριότητα ζητούν από τους μαθητές να απαντήσουν για την αποτελεσματικότητα και την επικινδυνότητα του φαρμάκου στις περιπτώσεις που η ποσότητα της ημερήσιας λήψης είναι 50 mg και 60 mg, ενώ στο ερώτημα Γ ζητείται επιπλέον η εξαγωγή ενός συμπεράσματος για την ποσότητα του φαρμάκου στην περίπτωση που η λήψη του συνεχίζεται απεριόριστα καθώς και εξηγήσεις αυτού.

### Δραστηριότητα 2

**Α.** Αν η ποσότητα της ουσίας που λαμβάνει καθημερινά ο ασθενής είναι 50 mg, ποια ημέρα το φάρμακο αρχίζει να δρα αποτελεσματικά για τον ασθενή; ………………………………………….

**Β.** Είναι δυνατόν μετά από ένα διάστημα το φάρμακο να γίνει επιβλαβές για τον ασθενή; Αν ναι μετά από πόσες ημέρες λήψης; ……………………………………………………………………………….
Αιτιολογήστε την απάντησή σας. ……………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………………………………

**Γ.** Απαντήστε στα ερωτήματα Α, Β, για τις περιπτώσεις που η καθημερινή ποσότητα φαρμάκου που λαμβάνει ο ασθενής είναι 60 mg. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. ………………………………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………………………………
Πως μπορείτε να είστε σίγουροι για τις απαντήσεις που δώσατε στα ερωτήματα Β και Γ, όταν ο αριθμός των ημερών που λαμβάνει ο ασθενής το φάρμακο είναι πολύ μεγάλος; ………………………………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………………………………

Αναμένεται από τους μαθητές διερεύνηση και πειραματισμός με τις αναπαραστάσεις που έχουν προκύψει από την εκτέλεση του κώδικα που κατασκεύασαν στην προηγούμενη δραστηριότητα για να εκφράσουν συμβολικά την ποσότητα του φαρμάκου. Η δραστηριότητα αυτή προσφέρει τη δυνατότητα συντονισμού μέσω ενός κώδικα και διερεύνησης των παραγόμενων οπτικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων που σταδιακά αναπτύσσονται, ώστε οι μαθητές να χτίζουν, να ελέγχουν, να τροποποιούν και έτσι να κατασκευάζουν πλούσιες νοηματοδοτήσεις σχετικά με το άπειρο.

Συγκεκριμένα, στόχος της δραστηριότητας είναι η κατασκευή νοημάτων για τη συμπεριφορά της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ και τη σχέση της με τη συμπεριφορά της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων αυτής, νοήματα που σχετίζονται με την έννοια της ακολουθίας και του ορίου της και γενικότερα με την έννοια του απείρου. Νοήματα που θα παραχθούν από την εμπλοκή με τις δομές και τις σχέσεις των αντικειμένων, για τα οποία ο προγραμματισμός απαιτεί αυστηρό και ακριβή τρόπο έκφρασης και την ταυτόχρονη ενασχόληση με τα σχηματικά και φυσικά χαρακτηριστικά αυτών.

Γενικότερα με τις δραστηριότητες του 3ου φύλλου εργασίας επιδιώκεται επίσης ένας τρόπος διερεύνησης και πειραματισμού μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων και περιβαλλόντων ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν το ρόλο και τη συμβολή τους στην παραγωγή εικασιών, συμπερασμάτων και εξηγήσεων, ενώ κατά το σχεδιασμό ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στην παραγωγή αιτιολογήσεων μέσω της οπτικοποίησης.

## 3.5.3. Δραστηριότητες του 2ου task – η καμπύλη του Koch

Για το 2ο task σχεδιάστηκαν συνολικά τέσσερις δραστηριότητες που κατανεμήθηκαν σε δυο φύλλα εργασίας. Το πλαίσιο των δραστηριοτήτων είναι διαφορετικό από αυτό του πρώτου task, αυτή τη φορά γεωμετρικό και το κεντρικό θέμα είναι η μελέτη της περιμέτρου και του εμβαδού ενός fractal, της καμπύλης του Koch, στο πέρασμα του χρόνου.

**4ο Φύλλο εργασίας**

Αρχικά περιγράφεται η διαδικασία σχηματισμού της καμπύλης του Koch, ενώ η περιγραφή αυτή συνοδεύεται από μια εφαρμογή (snowflake), σχεδιασμένη στο περιβάλλον του geogebra και εγκατεστημένη σε κάθε laptop, όπου μέσω ενός δρομέα οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα δυναμικά να παράγουν σχήματα μέχρι και το πέμπτο. Στόχος είναι αρχικά οι μαθητές να αντιληφθούν το μοτίβο και το δομικό στοιχείο που επαναλαμβάνεται καθώς η διαδικασία συνεχίζεται.

**1η Δραστηριότητα**

Στην πρώτη δραστηριότητα ζητείται από τους μαθητές να εργαστούν αλγεβρικά ώστε ακολουθώντας επαγωγικό συλλογισμό να προκύψουν τύποι για τον αριθμό των πλευρών, το μήκος τους, την περίμετρο και το εμβαδόν του n-οστού σχήματος.

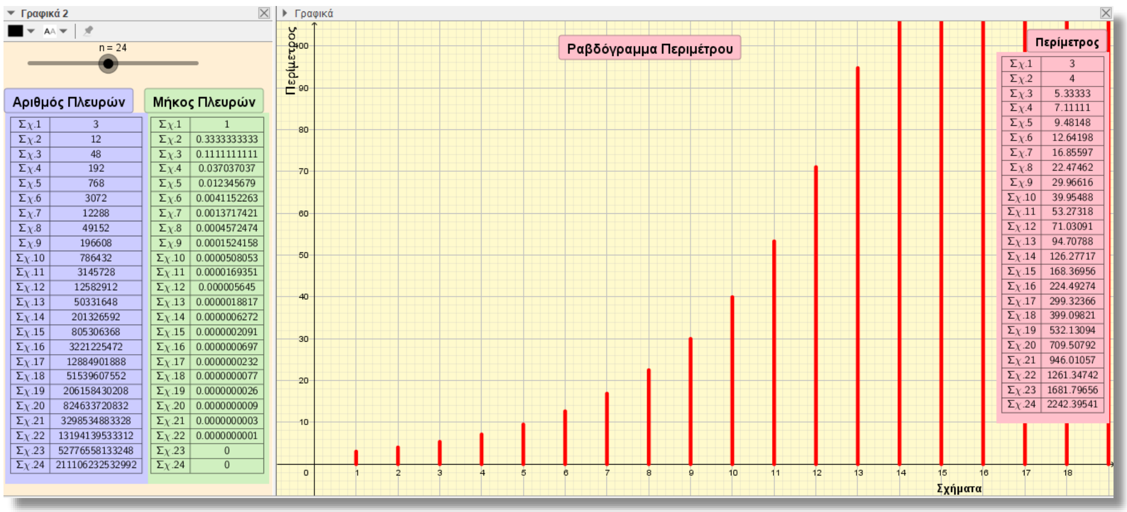
| | Αριθμός πλευρών | Μήκος κάθε πλευράς | Περίμετρος | Εμβαδόν |
|---|---|---|---|---|
| 1ο Σχήμα | | | | |
| 2ο Σχήμα | | | | |
| 3ο Σχήμα | | | | |
| 4ο Σχήμα | | | | |
| ……. | | | | |
| nο Σχήμα | | | | $E_1+\frac{E_1}{3}\cdot 1+\frac{E_1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\cdots+\frac{E_1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$ |

Αναμένεται οι τρεις πρώτοι τύποι να προκύψουν εύκολα, ενώ για τον τύπο του εμβαδού απαιτούνται σύνθετοι αλγεβρικοί χειρισμοί. Για το λόγο αυτό ζητείται από τους μαθητές να εργαστούν για τα τέσσερα πρώτα σχήματα με στόχο την εξαγωγή ενός συγκεκριμένου τύπου για το n-οστό.

Ένας από τους στόχους αυτής της δραστηριότητας είναι η κατασκευή συμβολικών εκφράσεων για την περίμετρο και το εμβαδόν οι οποίες θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε επόμενη εργασία. Επιπλέον οι μαθητές εισάγονται σε ένα επαγωγικό τρόπο σκέψης, κατασκευάζοντας τις αντίστοιχες εκφράσεις για το πρώτο σχήμα, το δεύτερο, το τρίτο και το τέταρτο ώστε να κατανοήσουν τη δομή των αντικειμένων με τα οποία εμπλέκονται, των σχημάτων και των συμβολικών εκφράσεων. Επίσης η χρήση επαγωγικού συλλογισμού δίνει την ευκαιρία συσχέτισης των αλγεβρικών τους κατασκευών με την έννοια της ακολουθίας, μιας έννοιας στενά συνδεδεμένης με την έννοια του απείρου.

**5ο Φύλλο εργασίας**

Για κάθε ομάδα υπάρχει στους υπολογιστές τους εγκατεστημένη μια εφαρμογή (perimetros_koch_ravdogramma), σχεδιασμένη στο περιβάλλον του geogebra, με διαθέσιμους πίνακες αριθμητικών τιμών για τον αριθμό των πλευρών, το μήκος τους και την περίμετρο κάθε σχήματος, ενώ για την περίμετρο είναι δυνατή και μια οπτική αναπαράσταση μέσω ραβδογράμματος ώστε με βάση αυτές τις αναπαραστάσεις να διατυπωθούν αρχικά εικασίες για τον αριθμό των πλευρών και το μήκος τους (εικόνα 4).




*Εικόνα 4: Η εφαρμογή perimetros_koch_ravdogramma στο geogebra*

**1η Δραστηριότητα**

Στο **ερώτημα Α**, οι μαθητές καλούνται να εικάσουν τη συμπεριφορά της περιμέτρου στο πέρασμα του χρόνου και στη συνέχεια να επαληθεύσουν τις εικασίες αυτές στο περιβάλλον του geogebra, κάνοντας χρήση του ραβδογράμματος και του πίνακα τιμών.

**Δραστηριότητα 1**

Στο αρχείο **perimetros_koch_ravdogramma** υπάρχει το ραβδόγραμμα που δίνει την περίμετρο σε κάθε σχήμα που προκύπτει αν συνεχιστεί η διαδικασία που περιγράφτηκε στο 4ο Φύλλο Εργασίας. Αρχικά να διερευνήστε τι συμβαίνει με τον αριθμό των πλευρών και το μήκος της κάθε πλευράς των σχημάτων που προκύπτουν, καθώς η διαδικασία συνεχίζεται πάρα πολλές φορές, πατώντας τα κουμπιά «Αριθμός πλευρών» και «Μήκος πλευράς»

**Α.** Τι νομίζετε ότι θα συμβαίνει με την περίμετρο των σχημάτων που προκύπτουν αν αυτή η διαδικασία συνεχίζεται άπειρες φορές;

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

Επαληθεύστε τις εικασίες σας για την περίμετρο πατώντας το κουμπί «Περίμετρος» και «Ραβδόγραμμα».

Αναμένεται οι μαθητές να ανακαλέσουν τον ορισμό της περιμέτρου ενός ευθύγραμμου σχήματος, ως άθροισμα του μήκους όλων των πλευρών και να εικάσουν ότι η περίμετρος θα γίνει μηδέν, καθώς η διαδικασία συνεχίζεται, εξαιτίας του μήκους των πλευρών που μετά το 23$^{\text{ο}}$ σχήμα φαίνεται να γίνεται μηδέν στον πίνακα τιμών που δίνεται, έχοντας τη δυνατότητα επαλήθευσης μέσω αριθμητικών τιμών και οπτικής αναπαράστασης της περιμέτρου στο περιβάλλον του geogebra.

Ο στόχος είναι ακριβώς αυτός, δηλαδή οι μαθητές να μεταφέρουν τις αντιλήψεις τους για το πεπερασμένο στην άπειρη κατάσταση που μελετούν και να οδηγηθούν σε ένα συμπέρασμα που συγκρούεται με την οπτική εικόνα, ώστε να αναζητήσουν εναλλακτικούς τρόπους διερεύνησης και να οδηγηθούν στην αλγεβρική αντιμετώπιση κάνοντας χρήση των τύπων στο 4$^{\text{ο}}$ φύλλο εργασίας. Μέσω αυτής της διαδικασίας επιδιώκονται νοηματοδοτήσεις για την έννοια της ακολουθίας και της απόκλισης, καθώς επίσης και μια πρώτη επαφή με την απροσδιοριστία $0 \cdot \infty$, μέσω της οποίας το άπειρο αντιμετωπίζεται ως αντικείμενο.

Στο **ερώτημα Β**, οι μαθητές καλούνται να προβλέψουν το εμβαδόν του σχήματος καθώς η διαδικασία συνεχίζεται.

| |
|---|
| **Β.** Τι νομίζετε ότι συμβαίνει με το εμβαδόν του σχήματος που προκύπτει κάθε φορά αν η διαδικασία αυτή συνεχίζεται άπειρες φορές. |

Αναμένεται διερεύνηση και πειραματισμός μέσω της οπτικής εικόνας αλλά και μέσω της αλγεβρικής αναπαράστασης του εμβαδού. Κατά την αλγεβρική εμπλοκή είναι δυνατό οι μαθητές να αναγνωρίσουν ομοιότητες με το πρόβλημα του φαρμάκου.

Αυτός είναι ο στόχος του συγκεκριμένου ερωτήματος. Οι μαθητές να κάνουν συνδέσεις με ένα άλλο πρόβλημα σε ένα άλλο πλαίσιο το οποίο έχει μελετηθεί σε ένα διαφορετικό περιβάλλον, ώστε να αναγνωρίσουν την κοινή μαθηματική έννοια που εμπεριέχεται και στα δύο προβλήματα (συμπεριφορά άπειρου αθροίσματος) και τον κοινό τρόπο αντιμετώπισης. Μέσω αυτής της διαδικασίας αναμένεται να προκύψουν νοηματοδοτήσεις για τη συμπεριφορά των σειρών της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n$, με $0<\theta<1$, για την έννοια των απειροστών, καθώς και για το αποτέλεσμα της πράξης $0 \cdot \infty$, όπου το άπειρο αντιμετωπίζεται ως αντικείμενο.

**2$^{\text{η}}$ Δραστηριότητα**

Κατά το σχεδιασμό προβλέφθηκε το ενδεχόμενο αποτυχίας των μαθητών να συνδυάσουν και να αναγνωρίσουν οι ίδιοι ομοιότητες μεταξύ των δύο προβλημάτων. Για το σκοπό αυτό υπάρχει η δεύτερη δραστηριότητα στην οποία δίνεται μια καθοδήγηση για εργασία στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, χωρίς όμως να αναφέρεται ρητά η σύνδεση με το πρόβλημα του φαρμάκου. Δίνεται έτσι η ευκαιρία στους μαθητές να οδηγηθούν οι ίδιοι στην αναγνώριση των κοινών στοιχείων των δύο προβλημάτων και στην κοινή αντιμετώπισή τους.

**3η Δραστηριότητα**

Η κοινή αντιμετώπιση των δύο προβλημάτων στο μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας οδηγεί στη διατύπωση εικασιών αλλά όχι στην εξήγηση αυτών. Στην περίπτωση του φαρμάκου η εξήγηση δόθηκε μέσω της στατικής οπτικής αναπαράστασης των κυκλικών διαγραμμάτων και της διαδικασίας της συνεχούς διαίρεσης δια δύο. Στην περίπτωση του εμβαδού της καμπύλης του Koch, η οπτική αναπαράσταση των κυκλικών διαγραμμάτων δεν δουλεύει. Για αυτό στην 3η δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να δώσουν μια εξήγηση για το πεπερασμένο εμβαδόν της καμπύλης του Koch μέσω του γεωμετρικού σχήματος.

**Δραστηριότητα 3**

Αν η διαδικασία συνεχιστεί πάρα πολλές φορές, η απάντησή σας στη Δραστηριότητα 3 θα είναι η ίδια; Δώστε μια διαφορετική αιτιολόγηση για την απάντησή σας χρησιμοποιώντας το σχήμα στο αρχείο **snowflake**.

Οι μαθητές καθοδηγούνται από την εκφώνηση να στηριχθούν στην οπτική εικόνα, οπότε αναμένεται να κάνουν χρήση της εφαρμογής snowflake, όπου έχουν τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού της οπτικής εικόνας και διαισθητικά να οδηγηθούν στην ιδέα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Στόχος είναι οι μαθητές να πειστούν για την παράδοξη κατάσταση ενός σχήματος άπειρης περιμέτρου που περικλείει πεπερασμένο εμβαδόν μέσω μιας χειροπιαστής γεωμετρικής κατασκευής την οποία οι ίδιοι θα εμπνευστούν και θα υλοποιήσουν με τα εργαλεία του geogebra. Συνέπεια αυτής της διαδικασίας είναι να παγιωθούν νοηματοδοτήσεις για τη συμπεριφορά άπειρων αθροισμάτων της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}\theta^n$, με $0<\theta<1$.

## 3.6. Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

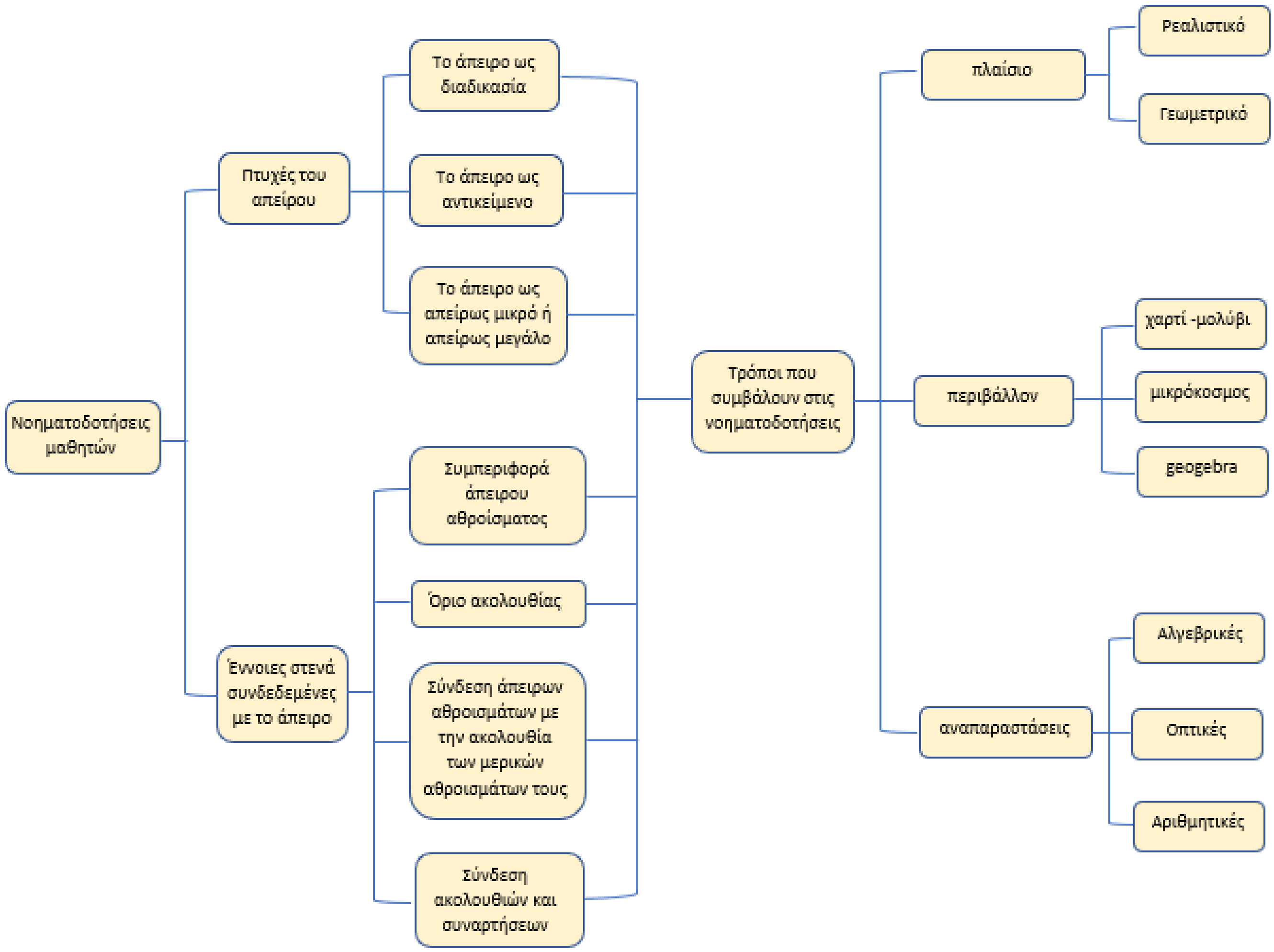
Για την ανάλυση των δεδομένων αρχικά απομαγνητοφωνήθηκαν και στη συνέχεια μελετήθηκαν όλες οι συζητήσεις μεταξύ των μαθητών κάθε ομάδας οι οποίες είχαν ηχογραφηθεί καθ' όλη τη διάρκεια των συναντήσεων. Επίσης μελετήθηκαν τα video καταγραφής των δράσεων των μαθητών κατά την αλληλεπίδρασή τους με τα ψηφιακά περιβάλλοντα, οι σημειώσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας που τους δόθηκαν, όπως και οι προσωπικές σημειώσεις της καθηγήτριας κατά τη διάρκεια των συναντήσεων. Τα δεδομένα αναλύθηκαν με τεχνικές grounded.

Η παρέμβαση χωρίστηκε σε επεισόδια με βάση τις νοηματοδοτήσεις εννοιών που αναδύθηκαν κατά την ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες της παρέμβασης. Έτσι προέκυψαν δύο βασικοί κωδικοί. Εστιάζοντας σε καθέναν και αναγνωρίζοντας ομοιότητες και διαφορές προκύπτουν υποκατηγορίες για κάθε είδος νοηματοδότησης.

- Νοηματοδοτήσεις που αφορούν τις διάφορες πτυχές του απείρου
  - Το άπειρο ως διαδικασία
  - Το άπειρο ως αντικείμενο
  - Το άπειρο μέσα σε απείρως μικρές ή απείρως μεγάλες ποσότητες
- Νοηματοδοτήσεις που αφορούν έννοιες στενά συνδεδεμένες με την έννοια του απείρου
  - Συμπεριφορά άπειρων αθροισμάτων (σειρών)
  - Όριο ακολουθίας
  - Σύνδεση άπειρου αθροίσματος (σειράς) με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων
  - Σύνδεση ακολουθιών και συναρτήσεων

Τα επεισόδια μελετήθηκαν και αναλύθηκαν με τεχνικές grounded, ενώ σε κάθε κατηγορία που προέκυψε έγιναν συγκρίσεις και συσχετίσεις με αποτέλεσμα να προκύψουν υποκατηγορίες. Έτσι ενώ κωδικοποιήθηκαν αρχικά οι νοηματοδοτήσεις των μαθητών, εν συνεχεία προέκυψαν κωδικοί για να προσδιορίσουν τους τρόπους που συμβάλλουν στην εμφάνισή τους. Συγκεκριμένα κωδικοί που σχετίζονται με το πλαίσιο των δραστηριοτήτων (ρεαλιστικό, γεωμετρικό), τα περιβάλλοντα που χρησιμοποιούνται (χαρτί – μολύβι, μικρόκοσμος, geogebra) και οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται (αλγεβρικές, οπτικές, αριθμητικές).

Το παρακάτω διάγραμμα (εικόνα 5) δείχνει την τελική κωδικοποίηση που προέκυψε.




*Εικόνα 5: Κωδικοποίηση των δεδομένων*

# Κεφάλαιο 4: Αποτελέσματα της έρευνας

## 4.1. Νοηματοδοτήσεις των πτυχών του απείρου

Η έννοια του απείρου είναι μια βαρυσήμαντη μαθηματική έννοια της οποίας η σπουδαιότητα για την επιστήμη, τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία είναι αναντίρρητη. Μια έννοια που αρκετά συχνά δημιουργεί σύγχυση και συγκρούσεις σε σχέση με τη διαίσθηση. Η ύπαρξη διαφορετικών διαισθήσεων, πτυχών και εκφάνσεων του απείρου έχει ερευνηθεί και έχει κριθεί ως πηγή των παραπάνω εντάσεων που προκαλεί.

### 4.1.1. Το άπειρο ως διαδικασία – Το εν δυνάμει άπειρο (potential infinity)

Η πτυχή του απείρου ως διαδικασία, το εν δυνάμει άπειρο, το άπειρο ως μια αφηρημένη δυνατότητα, όπως για παράδειγμα η απεριόριστη δυνατότητα για αύξηση ενός διαστήματος ή διαίρεσής του είναι σύμφωνα με τους Fischbein, Tirosh και Hess (1979) σύνθετη και συνδεδεμένη με διαισθητικές δυσκολίες. Είναι φυσικό, άτομα που εμπλέκονται με άπειρες καταστάσεις και δεν έχουν πρότερη επαφή με τυπικές προσεγγίσεις της έννοιας του απείρου, να αντιλαμβάνονται το άπειρο σε αυτή την έκφανση, ως διαδικασία, ως δυνατότητα απεριόριστης επανάληψης. Συγκεκριμένα μαθητές λυκείου που δεν έχουν εμπλακεί τυπικά με άπειρες καταστάσεις, όταν έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα στα οποία εμφανίζεται το άπειρο, λειτουργούν με βάση τη διαίσθησή τους και συνήθως το αντιλαμβάνονται ως μια αέναη διαδικασία.

#### 4.1.1.1. Το άπειρο ως διαδικασία μέσω αριθμητικών τιμών στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Τα επόμενα επεισόδια περιγράφουν τις νοηματοδοτήσεις του απείρου ως διαδικασία που προέκυψαν στην αρχή της παρέμβασης, στο 1ο task (πρόβλημα του φαρμάκου), καθώς οι μαθητές εκτελούν αριθμητικούς υπολογισμούς στο χαρτί, προκειμένου να απαντήσουν για την επικινδυνότητα του φαρμάκου, ερώτημα που τίθεται στην 1η δραστηριότητα του πρώτου φύλλου εργασίας.

Στα επεισόδια αυτά περιγράφονται οι πιο συχνοί τρόποι νοηματοδότησης του απείρου ως διαδικασία που προκύπτουν μέσω αριθμητικών υπολογισμών στο περιβάλλον χαρτί - μολύβι. Συγκεκριμένα τα επεισόδια 1 και 2 είναι αντιπροσωπευτικά για όλες τις ομάδες και δείχνουν νοηματοδοτήσεις του απείρου ως μια δυνατότητα απεριόριστης συνέχισης της διαδικασίας λήψης του φαρμάκου, υποστηρίζοντας την απεριόριστη αύξηση της ποσότητας του φαρμάκου στον οργανισμό. Στο επεισόδιο 3 παρουσιάζεται μια μεμονωμένη περίπτωση νοηματοδότησης του απείρου ως μια διαδικασία απεριόριστης μείωσης ενός μεγέθους, του ρυθμού αύξησης της ποσότητας του φαρμάκου στον οργανισμό, εκτελώντας αριθμητικούς υπολογισμούς στο στατικό περιβάλλον χαρτί - μολύβι.

**Επεισόδιο 1**

Οι μαθήτριες της ομάδας 1, μετά τους πρώτους αριθμητικούς υπολογισμούς, εκφράζουν τη δυνατότητα η διαδικασία να συνεχίζεται απεριόριστα, υποστηρίζοντας την ταυτόχρονη απεριόριστη αύξηση της ποσότητας του φαρμάκου στον οργανισμό. Μάλιστα μιλούν με όρους που έχουν να κάνουν με το πλαίσιο του προβλήματος και αντιλαμβάνονται τη χορήγηση του φαρμάκου ως μια δυνατότητα απεριόριστης αύξησης της ποσότητάς του στον οργανισμό του ασθενούς, μέσω των πρώτων αριθμητικών τιμών και της διαίσθησής τους.

*Παράδειγμα από ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Γεωργία:* | *Άμα διαρκεί 6 μέρες δεν είναι επικίνδυνο, γιατί είναι μέχρι το όριο που είναι 120. Αν συνεχίσει όμως αφού όλη την ώρα αυξάνεται, κάποια στιγμή θα το περάσει.* |
| *Καθηγήτρια* | *Γιατί;* |
| *Γεωργία:* | *Γιατί αφού κάθε φορά αυξάνεται, θα φτάσει και κάποια στιγμή ίσως ξεπεράσει το όριο των 120* |
| *Ζέτα:* | *Αφού συνεχώς αυξάνεται κάποια στιγμή θα ξεπεράσει το όριο.* |
| *Γεωργία:* | *Κοίτα άμα το παίρνει για όλη του τη ζωή θα το ξεπεράσει κάποτε. Αλλά έχουμε φτάσει στις πόσες μέρες;* |

Έτσι το άπειρο παίρνει τη μορφή της απεριόριστης διαδικασίας αύξησης μιας ποσότητας που δίνει άπειρο αποτέλεσμα. Ανάλογες νοηματοδοτήσεις προέκυψαν από όλες τις ομάδες στη φάση αυτή της αριθμητικής αναπαράστασης του προβλήματος στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι.

**Επεισόδιο 2**

Οι μαθήτριες της ομάδας 1 συνεχίζοντας τη διερεύνησή τους για την ποσότητα του φαρμάκου μέσω των αριθμητικών τιμών, μιλούν για διαδοχικές προσθέσεις τις οποίες μπορούν να συνεχίζουν επ’ αόριστο.

*Παράδειγμα από ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Τελικά μάλλον δεν το ξεπερνάει.* |
| *Καθηγήτρια:* | *Πως το καταλάβατε;* |
| *Ζέτα:* | *Με δοκιμές* |
| *Γεωργία:* | *Συνεχίσαμε με διαδοχικές προσθέσεις και όλα αυτά είναι 99 κόμμα κάτι* |
| *Καθηγήτρια:* | *Πόσες φορές, δηλαδή σε ποια μέρα φτάσατε;* |
| *Γεωργία:* | *Πρέπει να είμαστε στη 15. Αλλά μπορούμε να το κάνουμε όσο θέλουμε* |

**Επεισόδιο 3**

Παρόμοια και οι υπόλοιπες ομάδες αντιλαμβάνονται τη λήψη του φαρμάκου ως μια διαδικασία που δύναται να συνεχίζεται απεριόριστα, προκαλώντας συνεχή αύξηση στην ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενή, ενώ ταυτόχρονα εστιάζουν και στο ρυθμό αυτής της συνεχούς αύξησης.

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Όσο περνούν οι μέρες αυξάνεται λιγότερο η ποσότητα του φαρμάκου, αλλά κάποια στιγμή, λίγο λίγο, καθώς ανεβαίνει δεν θα περάσει τα 120; Μετά από …* |

Δηλαδή θεωρούν ότι η απεριόριστη λήψη του φαρμάκου προκαλεί συνεχή αύξηση στην ποσότητα του φαρμάκου αλλά με ρυθμό που ελαττώνεται συνεχώς.

Συμπερασματικά, φαίνεται ότι για όλους τους μαθητές το άπειρο παίρνει τη μορφή άπειρων διαδικασιών μέσω απεριόριστων αυξήσεων μεγεθών ενώ σε μια περίπτωση το άπειρο νοηματοδοτήθηκε ως μια διαδικασία απεριόριστης μείωσης μεγεθών. Παρόλο που το περιβάλλον εργασίας είναι στατικό (χαρτί – μολύβι), το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος και η δραστηριότητα των αριθμητικών υπολογισμών με τελικό ερώτημα την επικινδυνότητα του φαρμάκου, έδωσαν κίνητρα στους μαθητές να συνεχίσουν τη διαδικασία των αριθμητικών υπολογισμών με αποτέλεσμα να προκύψουν οι παραπάνω νοηματοδοτήσεις για το άπειρο.

#### 4.1.1.2. Το άπειρο ως διαδικασία μέσω αλγεβρικών αναπαραστάσεων σε περιβάλλον χαρτί - μολύβι στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Το επόμενο επεισόδιο έλαβε χώρα στο 1ο task (πρόβλημα του φαρμάκου) κατά τη διαδικασία της αλγεβρικής αναπαράστασης της ποσότητας του φαρμάκου τη n-οστή ημέρα λήψης, στη 2η δραστηριότητα του πρώτου φύλλου εργασίας, ενώ οι μαθητές είχαν ήδη ασχοληθεί με την αριθμητική αναπαράσταση του προβλήματος στην 1η δραστηριότητα του ίδιου φύλλου εργασίας, με τις δύο αυτές δραστηριότητες να απαιτούν εργασία στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι.

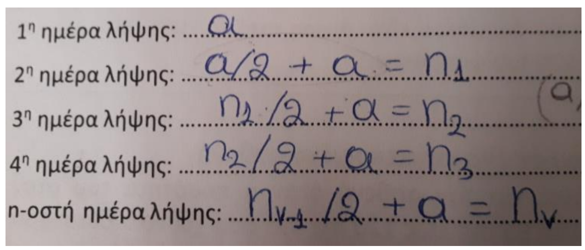
Στο επεισόδιο αυτό παρουσιάζεται μια μεμονωμένη περίπτωση νοηματοδότησης του απείρου ως μια αναδρομική διαδικασία με χρήση αλγεβρικών χειρισμών στο χαρτί. Ένα ακόμα επεισόδιο νοηματοδότησης του απείρου ως αναδρομική διαδικασία εμφανίζεται από την ίδια ομάδα, μέσω μιας αλγεβρικής αναπαράστασης πάλι, στο 2ο task στο γεωμετρικό σκηνικό της καμπύλης του Koch, το οποίο περιγράφεται στην παράγραφο 4.1.1.5.

**Επεισόδιο 1**

Κατά την αλγεβρική εμπλοκή των μαθητών προκειμένου να προκύψει ένας γενικός τρόπος υπολογισμού της ποσότητας του φαρμάκου τη n-οστή ημέρα λήψης με ημερήσια δόση α mg, οι μαθήτριες των ομάδων 1 και 3 προσπαθούν να καταλήξουν σε ένα αναδρομικό τύπο. Οι μαθήτριες της ομάδας 1 αποτυγχάνουν, ενώ οι μαθήτριες της ομάδας 3 καταλήγουν στον αναδρομικό τύπο χρησιμοποιώντας κάπως περίεργο συμβολισμό (εικόνα 6).

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Κων/να:* | *Ότι βρίσκουμε μια μέρα, μετά θα είναι διά 2* |
| *Νανά:* | *Όλα αυτά μπορούμε να τα ονομάσουμε κάπως; Δηλαδή είναι όλος αυτός ο αριθμός και μετά θα είναι όλος αυτός ο αριθμός δια 2 συν το α. Να το γράφουμε όλο μαζί με ένα όνομα για να μην γράφουμε όλο αυτό;* **(recognizing)** |
| *Κων/να:* | *Βάλτο x* |
| *Νανά:* | *Να το πούμε n1. Και μετά θα είναι n1/2 + α = n2 . n2 διά 2 + α = n3, και μετά τη n-οστή φορά θα πρέπει να είναι το προηγούμενο, δηλαδή n ..* |
| *Κων/να:* | *n-1, περίμενε* |
| *Νανά:* | *$n_{n-1}$;* |
| *Κων/να:* | *Ναι $n_{n-1}/2 + α$* |
| *Νανά:* | *$n_{n-1}/2 + α$ = το n .. το $n_{n-1}$* |




*Εικόνα 6: Αναδρομικός τύπος της ποσότητας του φαρμάκου από την ομάδα 3*

**Recognizing:** Αρχικά αναγνωρίζουν τη σημασία εισαγωγής μεταβλητών στην αντιμετώπιση του προβλήματος.

**Building with:** Κάνουν κατάλληλες αντιστοιχίσεις και συσχετισμούς μεταξύ των μεταβλητών και της πραγματικής κατάστασης και διατυπώνουν το πρόβλημα με αλγεβρικούς όρους.

**Constructing:** Η κατασκευή του αναδρομικού τύπου φανερώνει ότι αντιλαμβάνονται τη διαδικασία λήψης του φαρμάκου σαν μια αναδρομική διαδικασία, γεγονός που δείχνει τη σύλληψη μιας σιωπηρά ατελείωτης διαδικασίας αλλά και της δομής των άπειρων αντικειμένων γενικότερα.

Και εδώ οι μαθήτριες συζητούν με όρους του προβλήματος *«ό,τι βρίσκουμε μια μέρα, μετά θα είναι διά 2»*, γεγονός που δείχνει ότι το ρεαλιστικό πλαίσιο τους φανερώνει τη διαδικασία και την αποτύπωσή της με αλγεβρικούς όρους

#### 4.1.1.3. Το άπειρο ως διαδικασία μέσω οπτικοποίησης στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Το επόμενο επεισόδιο λαμβάνει χώρα πάλι στο 1$^{ο}$ task, κατά την εργασία των μαθητών με την οπτική αναπαράσταση της ποσότητας του φαρμάκου μέσω κυκλικών διαγραμμάτων στη 2$^{η}$ δραστηριότητα του δεύτερου φύλλου εργασίας και ενώ έχουν προηγηθεί αριθμητικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις του προβλήματος στο πρώτο φύλλο εργασίας και η οπτικοποίησή του μέσω ραβδογράμματος στην 1η δραστηριότητα του δεύτερου φύλλου εργασίας.

Πρόκειται για μια μεμονωμένη περίπτωση όπου μια μόνο ομάδα, η ομάδα 1, αντιλαμβάνεται το άπειρο ως διαδικασία μέσω μιας συγκεκριμένης στατικής οπτικής αναπαράστασης, αυτής των κυκλικών διαγραμμάτων, στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι.

**Επεισόδιο 1**

Οι μαθήτριες της ομάδας 1, έχοντας ήδη εμπλακεί με την αριθμητική και την αλγεβρική αναπαράσταση του προβλήματος του φαρμάκου και την οπτικοποίησή του μέσω ραβδογράμματος στο περιβάλλον χαρτί - μολύβι, προσπαθούν να αναπαραστήσουν την ποσότητα του φαρμάκου στα κυκλικά διαγράμματα κάνοντας χρήση αριθμητικών τιμών. Η σύγχυση που προκαλείται από την καθημερινή εμπειρία των κυκλικών διαγραμμάτων ως τρόπος αναπαράστασης ποσοστών, τις οδηγεί στη μετάβαση από τις αριθμητικές τιμές στον αλγεβρικό τύπο.

*Παράδειγμα από ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Όχι, όχι, κοίτα, έχεις μια πίτα που είναι α, και άλλη μια πίτα α, θέλεις και α/2 δηλ. θέλεις το μισό, θέλεις α/4, δηλ. θέλεις και το ¼, αυτά και 1/8,δηλ θα το χωρίσεις σε 8* **(recognizing)** |
| *Γεωργία:* | *Ναι και μετά το 1/16, Κόψε αυτό,…* (της δείχνει να κόψει το μισό του ¼) |
| *Ζέτα:* | *Δηλαδή, θα πάρεις και αυτό, και το 1/16, δηλ, .. αυτό κόψε (της λέει και της δείχνει να κόψει το μισό του 1/8), και αυτό, και το 1/32,…* |

**Recognizing:** Η σύγχυση που προκαλεί η χρήση αριθμητικών τιμών τις οδηγεί στην αναγνώριση του ρόλου του αλγεβρικού τύπου $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ στην κατασκευή της οπτικής αναπαράστασης που τους ζητείται.

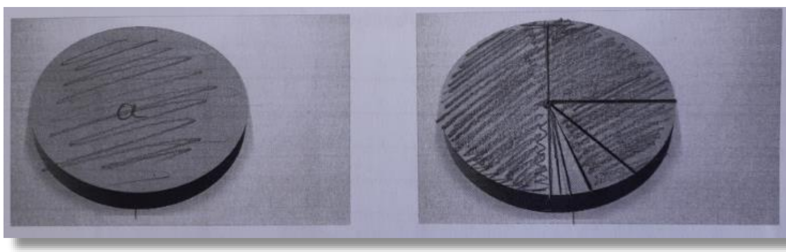
**Building with:** Εν συνεχεία κάνουν συσχετισμούς της μεταβλητής α, που παριστάνει την ημερήσια δόση, με τους κυκλικούς δίσκους, αναγνωρίζουν το ρόλο δυνάμεων του 2, που υπάρχουν στον τύπο, στη διαίρεση του δεύτερου κυκλικού δίσκου κάθε φορά στο μισό και έτσι συσχετίζουν τη διαδικασία που εμπεριέχεται στον τύπο με τον τρόπο υποδιαίρεσης των κυκλικών δίσκων.

*Παράδειγμα από ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Γεωργία:* | *Ορθή γωνία* |
| *Ζέτα:* | *Ορθή γωνία εγώ τη βλέπω, α/2, ζωγράφισε το μισό, μετά θέλει α/4, άρα παίρνουμε κι αυτό πάρε κι αυτό, το έχουμε κόψει σε τέταρτα, πάρε άλλο ένα. Τώρα θέλουμε άλλο 1/8, δηλαδή τράβα μια γραμμή, θα πάρουμε αυτό, θέλουμε άλλο 1/16.* **(building with)** |
| *Γεωργία:* | *Δηλαδή αυτό και α/32 δηλ. αυτό, εντάξει αυτό μπορούμε να το συνεχίζουμε συνεχώς …* **(νοηματοδότηση του απείρου ως διαδικασία)** |

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Και όλη την άλλη πίτα* |
| *Γεωργία:* | *Άρα εδώ πέρα πόσο έχουμε; Πόσο α λείπει;* |
| *Ζέτα:* | *α/32 τώρα, αλλά αν συνεχίσουμε …* |
| *Γεωργία:* | *Το κάναμε.* **(constructing)** |

**Constructing:** Η παραπάνω διαδικασία τις οδηγεί στην κατασκευή της οπτικής αναπαράστασης της ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό (εικόνα 7) και ενώ αυτή αφορά την 6η ημέρα λήψη του, οι μαθήτριες εκφράζουν τη δυνατότητα συνέχισης της διαδικασίας υποδιπλασιασμού του κυκλικού δίσκου. Φαίνεται ότι μέσα από τη διαδικασία αυτής της οπτικής αναπαράστασης συλλαμβάνουν το άπειρο ως μια απεριόριστη διαδικασία υποδιπλασιασμού ενός μεγέθους, συγκεκριμένα ενός κύκλου.




*Εικόνα 7: Η οπτική αναπαράσταση της ποσότητας του φαρμάκου με κυκλικά διαγράμματα από την ομάδα 1*

Το γεγονός ότι σε όλη την παρέμβαση υπήρξε μόνο μια περίπτωση νοηματοδότησης του απείρου ως διαδικασία μέσω οπτικοποίησης στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι είναι πιθανό να οφείλεται στη στατικότητα του περιβάλλοντος εργασίας, αφού στο δυναμικό περιβάλλον του μικρόκοσμου προέκυψαν αντίστοιχες νοηματοδοτήσεις με μεγαλύτερη συχνότητα και από όλες τις ομάδες, όπως περιγράφεται αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.

#### 4.1.1.4. Το άπειρο ως διαδικασία μέσω μικρόκοσμου στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Τα επόμενα επεισόδια λαμβάνουν χώρα στο 1ο task (πρόβλημα του φαρμάκου) κατά την εμπλοκή των μαθητών στις δραστηριότητες του τρίτου φύλλου εργασίας, όπου ζητείται η αναπαράσταση του προβλήματος του φαρμάκου στο μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας και η διερεύνησή του σ' αυτό το περιβάλλον. Έχουν προηγηθεί κατασκευές νοημάτων για το άπειρο ως διαδικασία μέσω της εργασίας τους στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι με διάφορες αναπαραστάσεις (αριθμητική, αλγεβρική, οπτική).

Στα επεισόδια αυτά περιγράφονται δύο πιο συνηθισμένοι τρόποι νοηματοδότησης του απείρου και συγκεκριμένα ενός άπειρου αθροίσματος ως διαδικασία, μέσω διερεύνησης στο μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας για το ρεαλιστικό πρόβλημα του φαρμάκου. Συγκεκριμένα το επεισόδιο 1 αντιπροσωπεύει αυτές τις νοηματοδοτήσεις όλων των ομάδων σ' αυτή τη φάση, κατά τη συμπλήρωση του κώδικα ώστε να αποτελεί τη συμβολική έκφραση της ποσότητας του φαρμάκου, ενώ το επεισόδιο 2 δείχνει έναν επίσης συνηθισμένο τρόπο εμφάνισης αυτών των νοηματοδοτήσεων καθώς οι μαθητές όλων των ομάδων διερευνούν στο μικρόκοσμο με τη χρήση δρομέα.

**Επεισόδιο 1**

Οι μαθήτριες της ομάδας 3 μαντεύουν από την αρχή την οπτική αναπαράσταση που θα προκύψει από την εκτέλεση του κώδικα, λόγω της υπορουτίνας step που υπάρχει, της οποίας η οπτική αναπαράσταση (ένα σκαλί) είναι γνωστή από προηγούμενη εργασία τους και η Κων/να σχεδιάζει νοητά με το χέρι της μια σκάλα. Επίσης διαβάζοντας τις πρώτες γραμμές του κώδικα εντοπίζουν τη σχέση του με τον αλγεβρικό τύπο που έχει προηγηθεί για την ποσότητα του φαρμάκου.

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Κων/να:* | *Ουσιαστικά δεν κάνουμε έτσι;* (Δείχνει με το χέρι της μια σκάλα) *Λοιπόν, φτιάχνουμε μια μεταβλητή,…* |
| *Νανά:* | *Αυτή πρέπει να είναι μικρότερη από n, γιατί εμείς είχαμε γράψει εις την n-1* **(recognizing)** |
| *Κων/να:* | *Ναι, και κάνει ένα step, άρα κάνει αυτό,…* (Δείχνει ένα σκαλί) |
| *Νανά:* | *Ναι αλλά με τι α;* **(recognizing)** |
| *Κων/να:* | *Με α = 50* |
| *Νανά:* | *Δεν το λέει αυτό, λέει product* |

**Recognizing:** Διαβάζοντας τις πρώτες γραμμές του ημισυμπληρωμένου κώδικα αναγνωρίζουν στις μεταβλητές του τη σύνδεση με τις μεταβλητές του αλγεβρικού τύπου $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$.

**Building with:** Εν συνεχεία προσπαθούν να ανακαλύψουν τις συσχετίσεις των μεταβλητών και των πράξεων που εμπεριέχονται στον τύπο με τις μεταβλητές και τις εντολές του κώδικα.

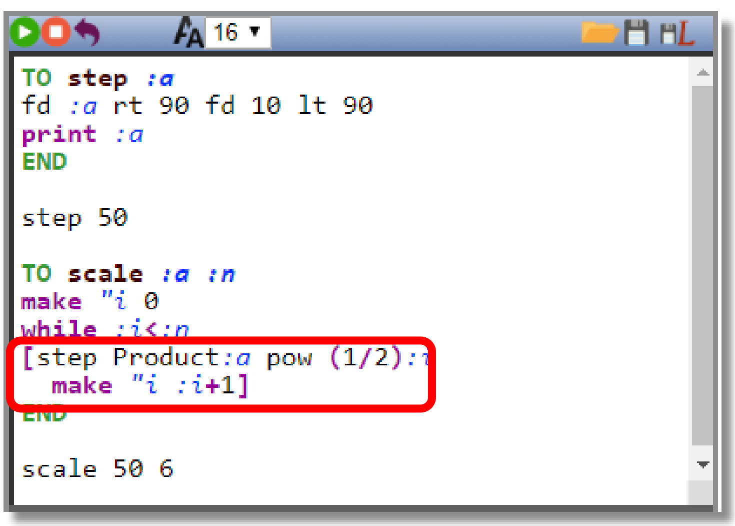
| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Ναι αλλά έχει τελίτσες, πρέπει να γράψουμε κάτι. Α, step product α, την $1^{η}$ μέρα δεν θα ανέβει α; επί ξέρω εγώ… Το i δεν θα είναι κάθε φορά …* |
| *Κων/να:* | *Κάθε μέρα* |
| *Νανά:* | *Κάθε φορά τι θα παίρνει;* |
| *Κων/να:* | *Την $1^{η}$ μέρα παίρνει α. Τη $2^{η}$, α + α/2, Άρα κάθε φορά, θα παίρνει …. Και το i που αρχικά είναι 0; Όταν το i είναι 0, το step τι έχει…* |
| *Νανά:* | *Όταν το i είναι 0, η μέρα, όχι περίμενε το n είναι η μέρα. Το i,… Έχουμε τη μεταβλητή n που είναι η μέρα, τη μεταβλητή α που είναι η ποσότητα και το i …* |
| *Κων/να:* | *Το i ξεκινά από το 0 και while i<n, δηλαδή όσο το i είναι μικρότερο του n …* |
| *Νανά:* | *Το i θα είναι ο εκθέτης που έχουμε στους παρονομαστές* |
| *Κων/να:* | *Ναι, αλλά ο εκθέτης … δεν είναι το n-1, πριν το n-2, κτλ.* |
| *Νανά:* | *Την ποσότητα με τι την πολλαπλασιάζουμε κάθε φορά;* |
| *Κων/να:* | *Με ½. Ναι αλλά την $1^{η}$ μέρα θα μας βγάλει α/2, ενώ είναι α* |
| *Νανά:* | *Ναι την $1^{η}$ μέρα, αφού το i είναι το 0 θα πρέπει να κάνουμε α* ξέρω εγώ $1/2^{0}$* |
| *Κων/να:* | *Και μετά γιατί θέλει να ξανακάνουμε το make ‘’i* |

| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Γιατί κάθε φορά …. την προηγούμενη μέρα θα την ….* |
| *Κων/να:* | *Προσθέτει, i+1* |
| *Νανά:* | *Εδώ τι να βάλουμε , που λέει step, με τι πολλαπλασιάζεται το α;* |
| *Κων/να:* | *Με $1/2^i$ , στο 0 δεν θα έχει καθόλου, τη 2η μέρα θα έχει εκθέτη 1, δηλαδή $1/2^1$* |
| *Στη συνέχεια εκτελούν τον κώδικα στο χαρτί για n = 6, ώστε να επιβεβαιώσουν τις επιλογές τους στη συμπλήρωση του κώδικα.* | |

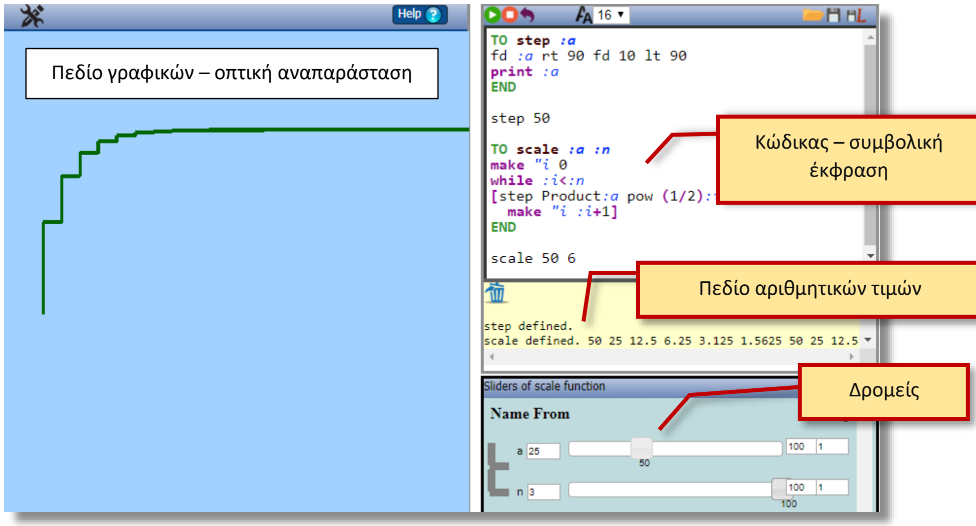
Η νοερή εκτέλεση του κώδικα και η αντιπαραβολή με τον τύπο, τις βοηθά να κατανοήσουν το ρόλο των μεταβλητών, να ερμηνεύσουν τις εντολές, να θέσουν αρχικές τιμές στις μεταβλητές και να κάνουν διορθώσεις. Μάλιστα κατά τη συμπλήρωση του κώδικα οι μαθήτριες κάνουν λάθη που οδηγούν σε μη εκτέλεση του κώδικα γεγονός που τους δίνει ανατροφοδότηση για να επανέλθουν και να κάνουν τις απαραίτητες διορθώσεις.

**Constructing:** Τελικά καταλήγουν σε μια τελική μορφή του κώδικα του οποίου η εκτέλεση με συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών προσφέρει μια οπτική αναπαράσταση του προβλήματος, ως μια σκάλα, με το ύψος κάθε σκαλιού να παριστάνει κάθε όρο του αθροίσματος (εικόνα 9).

Η συμπλήρωση την εντολών «step Product a 1/(pow 2 :i)» και «make “i :i+1»( εικόνα 8) υποδηλώνει ότι το άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ υλοποιείται μέσω μιας διαδικασίας κατά την οποία ο χαρακτήρας στο πεδίο γραφικών ανεβαίνει ένα σκαλί ύψους $\alpha\cdot\frac{1}{2^i}$ κάθε φορά και αυξάνοντας το i στον εκθέτη κατά 1 η κίνηση αυτή μπορεί να συνεχίζεται απεριόριστα, αν η λήψη του φαρμάκου συνεχίζεται απεριόριστα, δηλαδή αν το n αυξάνεται απεριόριστα. Έτσι κατασκευάζουν νοήματα για τα άπειρα αθροίσματα ως άπειρες διαδικασίες.




*Εικόνα 8: Οι εντολές του κώδικα που συμπλήρωσαν οι μαθήτριες της ομάδας 1*




*Εικόνα 9: Ο κώδικας που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου και οι αναπαραστάσεις που προσφέρει*

**Επεισόδιο 2**

Και οι τρεις ομάδες στο $1^{ο}$ task, προκειμένου να απαντήσουν στο ερώτημα για την επικινδυνότητα του φαρμάκου, εκμεταλλεύονται τη δυνατότητα που τους δίνει ο μικρόκοσμος και κάνουν χρήση δρομέα για τη μεταβλητή n, που εκφράζει τον αριθμό των ημερών λήψης του (εικόνα 7).

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Α, αυτό που βγάζει στο τέλος μήπως είναι η τελική ποσότητα, …. Κοίτα αν κάνουμε…. Για βάλε 1000* (εννοεί στην τιμή του n) |
| *Κων/να:* | *100!!! Να βάλουμε κι ακόμα πιο μεγάλο;* |
| *Νανά:* | *Πόσο πιο μεγάλο;* |
| | *Βάζουν n = 10000, αλλά κολλάει η εκτέλεση του κώδικα* |
| *Κων/να:* | *Κόλλησε!!! Την πατήσαμε* |
| Τελικά εκτελέστηκε ο αλγόριθμος και με σμίκρυνση φάνηκε μια ευθεία. Κοιτούν στο πεδίο των αριθμητικών τιμών | |
| *Νανά:* | *100!!!* |
| *Κων/να:* | *Να βάλω μεγαλύτερο;* |

Έτσι πειραματίζονται με αρκετά μεγάλες τιμές του n, μεγαλώνοντας συνεχώς το εύρος του δρομέα, μέχρι που ο αλγόριθμος να μην μπορεί να ανταποκριθεί σε τόσο μεγάλες τιμές. Υπό αυτή την έννοια η αλληλεπίδραση με το λογισμικό και τα εργαλεία που προσφέρει, συμβάλει στο να συλλάβουν το άθροισμα που παριστάνει την ποσότητα του φαρμάκου ως μια διαδικασία που μπορεί να συνεχίζεται απεριόριστα.

Μέσα από αυτά τα δύο επεισόδια αναδεικνύεται η συμβολή των εργαλείων του μικρόκοσμου στην κατασκευή νοημάτων για το άπειρο ως διαδικασία. Συγκεκριμένα μέσα από το επεισόδιο 1 φαίνεται η αξία του κώδικα συμβολικής έκφρασης που αποτελεί και την αλγεβρική αναπαράσταση της ποσότητας του φαρμάκου, όπου η συμπλήρωσή του, η εκτέλεσή του, ακόμα κι αν αυτή γίνεται νοητά, η οπτική αναπαράσταση που παράγεται νοητά ή μη και η δυνατότητα συντονισμού της μέσω του κώδικα, οδηγούν στη συνειδητοποίηση της διαδικασίας που εμπεριέχεται στο άπειρο άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cdots$. Ο κώδικας αποτελεί το σύνδεσμο μεταξύ μαθητή και των αναπαραστάσεων που παράγονται, δίνοντας τη δυνατότητα στους μαθητές να δοκιμάζουν, να εκτελούν, να διορθώνουν, να πειραματίζονται, να κατασκευάζουν με αποτέλεσμα τη δημιουργία πεδίων αφαίρεσης. Από την άλλη στο επεισόδιο 2 αναδεικνύεται η συμβολή της χρήσης δρομέα στο μικρόκοσμο, με τη δυνατότητα εξέλιξης της οπτικής αναπαράστασης που προσφέρει, στην κατασκευή νοημάτων για το άπειρο ως μια διαδικασία που μπορεί να συνεχίζεται απεριόριστα.

Επίσης το ρεαλιστικό πλαίσιο του φαρμάκου συμβάλλει σημαντικά στη συμπλήρωση του κώδικα όπως δείχνουν οι διάλογοι στο επεισόδιο 1, όπου οι μαθητές συμπληρώνοντας τον κώδικα χρησιμοποιούν όρους από το πρόβλημα, *«έχουμε τη μεταβλητή n που είναι η μέρα, την μεταβλητή α που είναι η ποσότητα, και το i …… την πρώτη μέρα το i θα είναι μηδέν …… κάθε φορά την προηγούμενη ημέρα θα την ….»*.

### 4.1.1.5. Το άπειρο ως διαδικασία μέσω αλγεβρικής αναπαράστασης στο γεωμετρικό πλαίσιο

Το επεισόδιο αυτό λαμβάνει χώρα στο 2$^{ο}$ task (καμπύλη του Koch), κατά τη διερεύνηση της συμπεριφοράς της περιμέτρου της καμπύλης του Koch, ερώτημα που τίθεται στην 1$^{η}$ δραστηριότητα (ερώτημα Α) του πέμπτου φύλλου εργασίας. Έχει προηγηθεί στο τέταρτο φύλλο εργασίας η αλγεβρική προσέγγιση, απ' όπου έχει προκύψει ο αλγεβρικός τύπος της περιμέτρου.

Είναι η δεύτερη φορά που το άπειρο αντιμετωπίζεται ως διαδικασία μέσω αλγεβρικής αναπαράστασης ενός προβλήματος. Η πρώτη φορά αφορούσε νοηματοδοτήσεις του απείρου ως διαδικασία μέσω της αλγεβρικής αναπαράστασης στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι του προβλήματος του φαρμάκου (1$^{ο}$ task). Αυτή τη φορά η ίδια ομάδα (ομάδα 3) νοηματοδοτεί το άπειρο ως διαδικασία μέσω αλγεβρικής αναπαράστασης στο γεωμετρικό σκηνικό ενός fractal, της καμπύλης του Koch.

**Επεισόδιο 1**

Στο 2$^{ο}$ task (καμπύλη του Koch), οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν μια εικασία για την περίμετρο του σχήματος. Μετά από κάποιες παράδοξες καταστάσεις με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι μέσω της αριθμητικής προσέγγισης που προσφέρεται στο περιβάλλον του geogebra, όπως ότι καθώς η διαδικασία συνεχίζεται απεριόριστα, η περίμετρος γίνεται μηδέν αφού το μήκος των πλευρών του γίνεται μηδέν, στρέφονται στον αλγεβρικό τύπο της περιμέτρου, που είχε προκύψει σε προηγούμενη εργασία τους, μέσω μιας ακολουθίας και συγκεκριμένα της γεωμετρικής προόδου $l\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$ (l, είναι το μήκος της πλευρά του αρχικού τριγώνου).

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Κων/να:* | *Θα αυξάνεται συνέχεια ή θα φτάσει ας πούμε σε ένα σημείο…. και μετά δεν θα μπορεί να αυξηθεί άλλο …* |
| *Νανά:* | *Κοίτα βασικά εδώ πέρα όσα περισσότερα σχήματα, η περίμετρος,…. θα πολλαπλασιάζεται με αυτό το κλάσμα (εννοεί το 4/3), που αυξάνει την περίμετρο* |
| *Καθηγήτρια:* | *Τελικά, τι λέτε;* |
| *Κων/να* | *Ότι θα έχει περίμετρο, και …. τώρα σκεφτόμασταν αν θα αυξάνεται ή όχι, και είπαμε ότι αφού θα αλλάζει το n, η περίμετρος θα αυξάνεται, θα είναι πάντα μεγαλύτερη, δεν μπορεί να μικραίνει γιατί κάθε φορά που πάμε στο επόμενο σχήμα, προσθέτουμε 1 στον εκθέτη άρα, πολλαπλασιάζουμε ουσιαστικά ότι είχαμε με το κλάσμα 4/3.* |
| *Καθηγήτρια:* | *Μέχρι που θα φτάσει;* |
| *Κων/να:* | *Ε, όσο πάει, το άπειρο;* |

**Recognizing:** Αναγνωρίζουν τον αλγεβρικό τύπο της περιμέτρου της καμπύλης του Koch, ως μέσον για τη μελέτη της συμπεριφοράς της. Η επιλογή για αλγεβρική προσέγγιση προέκυψε από την παράδοξη γεωμετρική κατάσταση ενός σχήματος που καθώς ο αριθμός των πλευρών του αυξάνεται απεριόριστα, το μήκος τους γίνεται μηδέν, προκαλώντας μηδενική περίμετρο.

**Building with:** Μελετούν τη συμπεριφορά της περιμέτρου σε σχέση με τη συμπεριφορά της μεταβλητής n και τις πράξεις που εμπλέκονται.

**Constructing:** Η ακολουθία που δίνει την περίμετρο νοηματοδοτείται ως μια αναδρομική διαδικασία, αφού η περίμετρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά την περίμετρο του προηγούμενου σχήματος με το κλάσμα 4/3. Και η αναδρομή γενικότερα υποδηλώνει σιωπηρά μια αέναη διαδικασία. Μάλιστα εδώ το άπειρο συλλαμβάνεται και ως διαδικασία και ως κριτήριο εκτίμησης του αποτελέσματος μιας διαδικασίας, αφού για την ακολουθία της περιμέτρου εκφράζεται η αντίληψη ότι «θα φτάσει στο άπειρο».

Σημαντικός είναι ο συνδυασμός της χρήσης δρομέα, της εξέλιξης του σχήματος, καθώς και της εξέλιξης των αριθμητικών τιμών του πλήθους και του μήκους των πλευρών του, στο δυναμικό περιβάλλον του geogebra, που προκαλεί την παράδοξη κατάσταση ενός σχήματος με μηδενική περίμετρο. Εξαιτίας αυτής της παραδοξότητας οι μαθητές οδηγούνται στην αλγεβρικό τύπο και στην κατασκευή νοήματος για το άπειρο ως αναδρομική διαδικασία.

#### 4.1.1.6. Συμπεράσματα για τις νοηματοδοτήσεις του απείρου ως διαδικασία

Καθ’ όλη τη διάρκεια της παρέμβασης και στα δύο tasks εμφανίζεται στους μαθητές όλων των ομάδων η τάση να αντιλαμβάνονται άπειρες καταστάσεις δυναμικά ως διαδικασίες που δύναται να συνεχίζονται απεριόριστα στο πέρασμα του χρόνου. Φαίνεται ότι αυτή η διαισθητική πτυχή του απείρου προϋπάρχει στις αντιλήψεις των μαθητών οι οποίοι, δεν έχουν λάβει κάποια τυπική εκπαίδευση σε θέματα όπου εμπλέκεται το άπειρο και διατυπώνουν επιχειρήματα άλλες φορές σιωπηρά και άλλες ρητά, στα οποία εμφανίζεται αυτή η τάση. Οι μαθητές εκφράζουν την εν δυνάμει πτυχή του απείρου ως διαδικασία μέσα από την εργασία τους σε όλα τα περιβάλλοντα, ακόμα και στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι και μέσω όλων των αναπαραστάσεων, ακόμα των αλγεβρικών. Όμως η νοηματοδότηση αυτής της πτυχής ενισχύεται κατά την εμπλοκή τους με τα ψηφιακά περιβάλλοντα, εξαιτίας της δυνατότητας που παρέχουν για δυναμικό χειρισμό των αναπαραστάσεων μέσω δρομέων, ενώ στο μικρόκοσμο παρέχεται επιπλέον η δυνατότητα συντονισμού αυτών των αναπαραστάσεων μέσω ενός κώδικα συμβολικής έκφρασης, του οποίου οι εντολές προδίδουν μια δυνατότητα απεριόριστης διαδικασίας.

### 4.1.2. Το άπειρο ως αντικείμενο – Το φύσει άπειρο (actual infinity)

Ένας άλλος τρόπος να αντιληφθεί κανείς το άπειρο είναι ως αντικείμενο, μια πτυχή που συνδέεται με το φύσει άπειρο. Το άπειρο ως μια μαθηματική πραγματικότητα, μια καθαρή τελική μαθηματική δομή, μη αντιφατική και συνεπή με την ολότητα όλων των άλλων μαθηματικών εννοιών, μια μαθηματική έννοια για την οποία κάνουμε αποδεκτούς ορισμούς, θεωρήματα και λογικές αποδείξεις. Και ενώ η εμφάνιση αυτής της πτυχής του απείρου απαιτεί ένα τυπικό θεωρητικό πλαίσιο και ένα λειτουργικό πεδίο στο οποίο θα αναπτυχθούν νέα λογικά σχήματα πολλές φορές αντίθετα στα συνήθη και θα συμβούν ανώτερες νοητικές διεργασίες που απαιτούν μαθηματική ωριμότητα, στην παρούσα παρέμβαση παρατηρήθηκαν κάποιες περιπτώσεις που οι μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο με αυτό τον τρόπο, παρόλο που έως τώρα δεν έχουν λάβει κάποιου είδους εκπαίδευσης σε τέτοια θέματα.

Η σύλληψη αυτής της πτυχής του απείρου παρατηρήθηκε μόνο στην ομάδα 1, σε δύο μόνο περιπτώσεις. Και στις δύο περιπτώσεις η αντίληψη αυτή εκφράστηκε κατά την εμπλοκή στα ψηφιακά περιβάλλοντα, στο μικρόκοσμο για το πρόβλημα του φαρμάκου ($1^{ο}$ task) και στο geogebra για την καμπύλη του Koch (2o task), και ενώ είχαν ασχοληθεί και στις δύο περιπτώσεις με αλγεβρικές, αριθμητικές και οπτικές αναπαραστάσεις, ενώ στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι είχε επικρατήσει η ιδέα του απείρου ως διαδικασία. Το άπειρο ως αντικείμενο προέκυψε αρχικά μόνο από την ομάδα 1 κατά τη διερεύνηση στο πρόβλημα του φαρμάκου μέσω του μικρόκοσμου, ενώ κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν αυτές τις ιδέες και στο πρόβλημα της καμπύλης του Koch, δηλαδή σε μια διαφορετική κατάσταση μέσω διαφορετικών εργαλείων. Το γεγονός αυτό δηλώνει ότι η κατασκευή αυτών των νοημάτων παρουσίασε μια σταθερότητα και μια παγίωση.

#### 4.1.2.1. Το άπειρο ως αντικείμενο μέσω τριών ειδών αναπαραστάσεων στο μικρόκοσμο, στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Το επόμενο επεισόδιο δείχνει αντιλήψεις των μαθητριών της ομάδας 1 για το άπειρο ως αντικείμενο και προέκυψε στο $1^{ο}$ task, όταν στο τρίτο φύλλο εργασίας ζητείται η διερεύνηση του προβλήματος του φαρμάκου μέσω του μικρόκοσμου. Οι νοηματοδοτήσεις αυτές για το άπειρο, προέκυψαν κατά τον πειραματισμό των μαθητριών με τις αναπαραστάσεις (οπτική –

αριθμητική) που παράγονται από την εκτέλεση του κώδικα, τον οποίο έχουν συμπληρώσει ώστε να αποτελεί τη συμβολική έκφραση της ποσότητας του φαρμάκου. Έχουν προηγηθεί αντιλήψεις του απείρου ως διαδικασία και κατά τη συμπλήρωση του κώδικα στο συγκεκριμένο φύλλο εργασίας, αλλά και στα δύο προηγούμενα κατά τη διερεύνηση του προβλήματος στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι μέσω αριθμητικών, αλγεβρικών και οπτικών αναπαραστάσεων.

Το επεισόδιο αυτό περιγράφει μια μεμονωμένη περίπτωση νοηματοδότησης του απείρου ως αντικείμενο, μέσω του μικρόκοσμου στο ρεαλιστικό πλαίσιο. Μόνο οι μαθήτριες της ομάδας 1 εξέφρασαν τέτοιες αντιλήψεις στο συγκεκριμένο πλαίσιο.

**Επεισόδιο 1**

Οι μαθήτριες της ομάδας 1, έχοντας αναπαραστήσει την ποσότητα του φαρμάκου με μια σκάλα, στο μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας, στην προσπάθειά τους να καταλάβουν αν η ποσότητα του φαρμάκου ξεπερνά την τιμή των 100mg, με ημερήσια δόση 50mg, κάνουν χρήση δρομέα για τον αριθμό n των ημερών, για να πειραματιστούν με μεγάλες τιμές του n. Παρατηρούν ότι όσο αυξάνουν το n μέσω του δρομέα, το ύψος της σκάλας αυξάνεται όλο και λιγότερο και αναγνωρίζουν την αιτία που προκαλεί το φαινόμενο αυτό, στους όρους του αθροίσματος $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, που είναι κλάσματα στα οποία ο παρονομαστής αυξάνεται καθώς το n αυξάνεται.

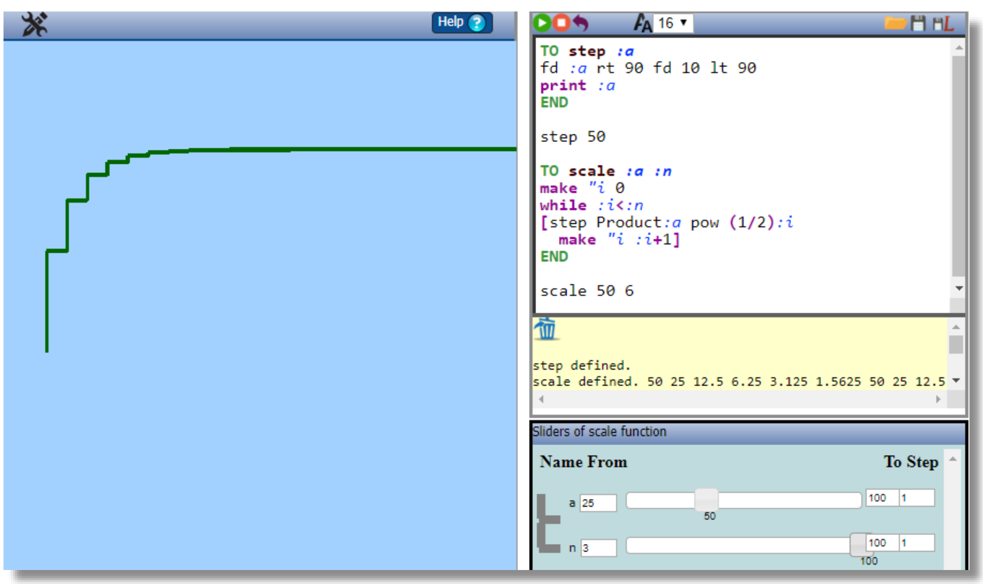
*Ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Εγώ λέω να παίξουμε με το n. Βάλε το n να είναι 100* |
| *Γεωργία:* | *Ξέρεις κάτι ανεβαίνει αλλά …* |
| *Ζέτα:* | *Α! ιδέα, άκου ο παρονομαστής όλο και μεγαλώνει, άρα όσο μεγαλώνει ο παρονομαστής, τόσο μικραίνει το κλάσμα, αν ο παρονομαστής μεγαλώσει πάρα πολύ ας πούμε <u>σαν να γίνει</u>* $+\infty$ *, θα γίνει 0 αυτό που θα προσθέτουμε κάθε φορά, γιατί* $1/+\infty$ *, <u>ας πούμε</u> κάνει 0* ***(recognizing)*** |

**Recognizing:** Αναγνωρίζουν το ρόλο των όρων $\frac{\alpha}{2^i}$, του αθροίσματος $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, στην ολοένα και μικρότερη αύξηση του, μέσω της παρατήρησης της ολοένα και μικρότερης αύξησης του ύψους της σκάλας.

**Building with:** Συζητούν το ρόλο της μεταβλητής n στο άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ και τη συμπεριφορά των παρονομαστών αλλά και των κλασμάτων καθώς το n αυξάνεται. Μάλιστα δίνουν στους παρονομαστές την τιμή άπειρο, ενώ στα κλάσματα την τιμή 0. Η Ζέτα χρησιμοποιεί ένα απλοϊκό παράδειγμα μιας σοκολάτας που μοιράζεται σε άπειρα κομμάτια. Ανατρέχουν στις αναπαραστάσεις που προσφέρει ο μικρόκοσμος της χελωνόσφαιρας και συνδέουν την αύξηση της μεταβλητής n με την αύξηση της μεταβλητής i του κώδικα καθώς επίσης παρατηρούν τις διαφορές στο ύψος της σκάλας καθώς ο αριθμός των ημερών αυξάνεται (εικόνα 10), παρατηρήσεις που έχουν να κάνουν με τη συμπεριφορά των όρων $\frac{\alpha}{2^i}$ σ' αυτήν την περίπτωση.

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Δηλαδή, φαντάσου να έχεις χωρίσει μια σοκολάτα ας πούμε σε άπειρα κομμάτια, και να έχεις πάρει το 1, είναι σαν να έχεις πάρει 0, άρα αυτό όταν θα μεγαλώσει τόσο πολύ ο παρονομαστής, θα τείνει στο* $+\infty$*, θα γίνει 0, όσο συνεχίζει να παίρνει το φάρμακο, θα παίρνει 0, δηλαδή μετά από κάποια φάση θα παίρνει 0 από το φάρμακο, περίπου… Κυρία, έχουμε κάτι να σας πούμε …* |
| *Ζέτα:* | *(Απευθύνεται στην καθηγήτρια) Έχουμε παρονομαστή, άρα όσο μεγαλώνει ο παρονομαστής μικραίνει το κλάσμα, και αφού ο παρονομαστής όλο θα μεγαλώνει, τόσο θα μικραίνει το κλάσμα και άμα ο παρονομαστής γίνει ας πούμε* $+\infty$*, αυτό που θα παίρνει κάθε μέρα θα είναι 0, δηλαδή αυτό που θα αρχίσει να παίρνει από μια φάση και μετά θα είναι 0, 0, 0.. άρα δεν θα συνεχίσει να μεγαλώνει.* |
| *Καθηγήτρια:* | *Αυτά που μου λέτε πως τα στηρίζετε; Εσείς λέτε ότι θα παραμείνει ..* |
| *Γεωργία:* | *Δεν θα γίνει επιβλαβές, γιατί θα συνεχίσει να …, θα μείνει στα ίδια, γιατί εδώ πέρα* (δείχνει στη χελωνόσφαιρα) *βλέπουμε ότι στην αρχή έχει μεγάλη διαφορά ενώ όσο πάει, θα ..γίνεται … σαν ευθεία είναι.* |
| *Ζέτα:* | *Στον τύπο, στη γραφική παράσταση, παίξαμε λίγο με το n, το μεγαλώσαμε πολύ …* |
| *Καθηγήτρια:* | *Και πως ξέρετε ότι μετά από 1.000.000 χρόνια τι θα γίνει* |
| *Ζέτα:* | *Μετά από 1.000.000 χρόνια το i θα είναι πάρα πολύ μεγάλο, ε, άρα θα μεγαλώνουν οι παρονομαστές, ..* |




*Εικόνα 10: Η αναπαράσταση στο μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας της ποσότητας του φαρμάκου*

**Constructing:** Σε όλη αυτή τη συζήτηση κυριαρχεί η ιδέα του απείρου ως αντικείμενο με τις μαθήτριες να διατυπώσουν ρητά το συμπέρασμα ότι $\frac{1}{\infty}$ κάνει 0, γεγονός που δείχνει ότι συλλαμβάνουν το άπειρο ως ένα μαθηματικό αντικείμενο στο οποίο μάλιστα αποδίδουν ιδιότητες. Και ενώ αρχικά οι μαθήτριες (στις δραστηριότητες των δύο πρώτων φύλλων εργασίας) και εργαζόμενες σε περιβάλλον χαρτί – μολύβι, αντιλαμβάνονται το άπειρο με τη διαισθητική πτυχή του, ως διαδικασία, εμπλουτίζοντας την εργασία τους με αναπαραστάσεις σε ένα δυναμικό περιβάλλον, το μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας και αλληλεπιδρώντας με αυτές, περνούν σε μια νοηματοδότηση του απείρου ως μαθηματικό αντικείμενο, για το οποίο ορίζονται πράξεις και ικανοποιούνται ιδιότητες. Στο συγκεκριμένο επεισόδιο το άπειρο εμφανίζεται ως μια μεγάλη ποσότητα όπου διαιρώντας έναν αριθμό με αυτήν προκύπτει το μηδέν.

**Consolidating:** Αργότερα οι μαθήτριες αυτής της ομάδας κατά την εμπλοκή τους στο 2ο task (καμπύλη του Koch) χρησιμοποιούν την ιδιότητα $\frac{l}{\infty}=0$, σε ένα διαφορετικό πλαίσιο αυτή τη φορά γεωμετρικό, κάνοντας χρήση αριθμητικών και οπτικών αναπαραστάσεων που προσφέρει τώρα το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας geogebra, αλλά και αλγεβρικών αναπαραστάσεων που έχουν προκύψει από την εργασία τους σε περιβάλλον χαρτί – μολύβι.

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Στο είπα, στο είπα…. Κυρία η περίμετρος θα γίνει 0 γιατί εδώ είναι* $\frac{l}{\infty}$ *(δείχνει τον τύπο του μήκους πλευράς* $\frac{l}{3^{n-1}}$ *)* **(consolidating)** |

Αυτό δείχνει ότι η νοηματοδότηση του απείρου ως αντικείμενο παγιώνεται, αφού αυτή η πτυχή του επανέρχεται και σε άλλες καταστάσεις διαφορετικών πλαισίων, οπότε θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι επιτυγχάνεται και η φάση **consolidating** της αφαίρεσης στη νοηματοδότηση του απείρου ως αντικείμενο.

Ο χειρισμός μεγάλων τιμών των μεταβλητών στο μικρόκοσμο, μέσω δρομέων ή μέσω του κώδικα και η ταυτόχρονη εξέλιξη της οπτικής αναπαράστασης της σκάλας η οποία εκφυλίζεται σε ευθεία, είναι καθοριστικός στη δημιουργία συνδέσεων με την αλγεβρική αναπαράσταση στην κατασκευή νοημάτων για τις ποσότητες $\frac{1}{2^i}$ και μέσω αυτών στη νοηματοδότηση ιδιοτήτων που ικανοποιεί το άπειρο ως αντικείμενο.

### 4.1.2.2. Το άπειρο ως αντικείμενο μέσω τριών ειδών αναπαραστάσεων στο geogebra, στο γεωμετρικό πλαίσιο

Στο επόμενο επεισόδιο περιγράφονται νοηματοδοτήσεις του απείρου ως αντικείμενο, μέσω του δυναμικού περιβάλλοντος geogebra, στο γεωμετρικό σκηνικό της καμπύλης του Koch. Το επεισόδιο αυτό λαμβάνει χώρα στο 2ο task, όταν στο πέμπτο φύλλο εργασίας ζητείται η διερεύνηση της περιμέτρου του σχήματος (δραστηριότητα 1Α). Έχει προηγηθεί η αλγεβρική αντιμετώπιση του προβλήματος όπου έχουν προκύψει τύποι για τον αριθμό και το μήκος των πλευρών, την περίμετρο και το εμβαδόν. Επίσης έχουν προηγηθεί νοηματοδοτήσεις του απείρου ως αντικείμενο από την ομάδα 1, στο ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος του φαρμάκου στο $1^{ο}$ task.

Πρόκειται για μια μεμονωμένη περίπτωση νοηματοδότησης του απείρου ως αντικείμενο από την ομάδα 1 στο γεωμετρικό πλαίσιο, μέσω αριθμητικών αναπαραστάσεων στο geogebra και μέσω αλγεβρικών αναπαραστάσεων που έχουν προκύψει έχοντας τη δυναμική οπτικοποίηση της καμπύλης του Koch στο geogebra.

**Επεισόδιο 1**

Στο $2^{ο}$ task (καμπύλη του Koch) ζητείται από τους μαθητές, να εικάσουν για τον αριθμό των πλευρών και το μήκος τους και εν συνεχεία για την περίμετρο του σχήματος καθώς συνεχίζεται η διαδικασία. Η Ζέτα από την ομάδα 1, αμέσως εικάζει ότι αν η διαδικασία συνεχίζεται άπειρες φορές, το σχήμα θα έχει άπειρες πλευρές, ενώ το μήκος κάθε πλευράς θα είναι κοντά στο μηδέν. Επικυρώνει μάλιστα αυτές τις εικασίες μέσα από τις αριθμητικές αναπαραστάσεις που προσφέρει η εφαρμογή που τους έχει δοθεί στο geogebra (πίνακες αριθμητικών τιμών για τον αριθμό των πλευρών και το μήκος κάθε πλευράς) και συμπεραίνει ότι η περίμετρος θα είναι μηδέν. Στην προσπάθειά της να πείσει τη συμμαθήτριά της ανατρέχει στους τύπους του αριθμού των πλευρών ($3 \cdot 4^{n-1}$) και του μήκους κάθε πλευράς ($\frac{l}{3^{n-1}}$), οι οποίοι έχουν προκύψει από προηγούμενη εργασία τους, αναγνωρίζοντας το ρόλο τους στη δικαιολόγηση των εικασιών της.

*Ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Να, κοίτα, …. θα γίνει 0 η περίμετρος* |
| *Γεωργία:* | *Τσακ! Θα εξαφανιστεί το σχήμα* (γελάει) |
| *Ζέτα:* | *Αφού το μήκος κάθε πλευράς θα γίνει κοντά στο 0, ..* |
| *Γεωργία:* | *Ω, δεν γίνεται αυτό, αφού θα έχεις σχήμα* |
| *Ζέτα:* | *Αυτό θα μεγαλώνει, ο αριθμός των πλευρών,* (δείχνει τον τύπο που έχει προκύψει από πριν για τον αριθμό των πλευρών $3 \cdot 4^{n-1}$) *η περίμετρος θα γίνει 0 γιατί εδώ είναι* $\frac{l}{\infty}$ (δείχνει τον τύπο του μήκους πλευράς ) **(recognizing)** |

**Recognizing:** Αναγνωρίζουν το ρόλο των αλγεβρικών τύπων, του αριθμού των πλευρών και του μήκους της κάθε πλευράς, στη μελέτη της συμπεριφοράς αυτών των μεγεθών στο πέρασμα του χρόνου.

**Building with:** Εν συνεχεία, θεωρώντας ότι η μεταβλητή n (εκφράζει των αριθμό των επαναλήψεων της διαδικασίας) είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός, εκτελεί τις πράξεις που εμπλέκονται στους τύπους θέτοντας στο n το άπειρο και προσπαθεί να εικάσει για την περίμετρο συνδέοντας την με το γινόμενο του αριθμού των πλευρών επί το μήκος της καθεμιάς.

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Στο είπα ότι θα γίνει 0, στο είπα, στο είπα* (βλέπει τον πίνακα αριθμητικών τιμών στο geogebra) |

| | |
|---|---|
| *Γεωργία:* | *Δεν γίνεται….* |
| *Ζέτα:* | *Κάτσε να σου το εξηγήσω, έχεις εδώ (στον τύπο για το μήκος κάθε πλευράς) n όπου το n είναι κάτι τεράστιο, πες άπειρο, -1 άρα άπειρο -1 πάλι άπειρο κάνει, άρα θα έχεις ένας αριθμό l προς 3 εις την άπειρο, που το $3^{\infty}$ πόσο θα κάνει; Άπειρο, είναι 3*3*3… άπειρες φορές, δηλαδή άπειρο* |
| *Γεωργία:* | *Εντάξει πολύ μεγάλος αριθμός* |
| *Ζέτα:* | *Και είναι σαν να έχεις, το l πες ότι είναι ένας αριθμός πες 10, πες 150, δεν έχει σημασία και είναι σαν να έχει μια σοκολάτα, να την έχεις χωρίσει σε άπειρα κομμάτια και να έχεις πάρει l, όσο και να είναι το l, όσο και να είναι, και 150 να είναι προς το άπειρο είναι πάντα πολύ μικρό, άρα είναι σαν να μην έχεις φάει τίποτα* |
| *Γεωργία:* | *Ναι, αυτό το καταλαβαίνω, αλλά έχεις ένα σχήμα, και έτσι να ΄ναι … είναι κάτι δεν είναι να πεις ότι η περίμετρος είναι 0* |

**Constructing:** Ουσιαστικά μέσα από αυτό το σκεπτικό η Ζέτα καταλήγει σε ιδιότητες του απείρου, $\infty - 1 = \infty$, $\frac{l}{\infty} = 0$, $3^{\infty} = \infty$ και $0 \cdot \infty = 0$, παρόλο που δεν είναι όλες σωστές, κατασκευάζοντας έτσι νοήματα για το άπειρο ως αντικείμενο που τις ικανοποιεί.

Οι λειτουργίες του geogebra, με τις αριθμητικές αναπαραστάσεις να καθορίζονται από τη χρήση ενός δρομέα, δίνοντας τη δυνατότητα εμφάνισης μεγάλου πλήθους αριθμητικών τιμών με αποτέλεσμα την εμφάνιση μηδενικών τιμών στο μήκος των πλευρών, επικυρώνουν την αντιμετώπιση του απείρου ως αντικείμενο, που οδηγεί επίσης σε μηδενικό μήκος πλευράς μέσω του αλγεβρικού τύπου $\frac{l}{3^{n-1}}$ και της ιδιότητας $\frac{l}{\infty} = 0$, *«Στο είπα ότι θα γίνει 0, στο είπα, στο είπα».*

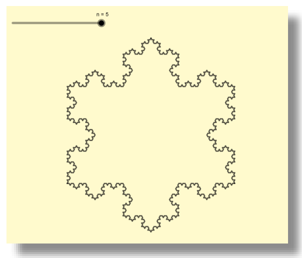
### 4.1.2.3. Η απροσδιοριστία 0 · ∞, μέσω τριών ειδών αναπαραστάσεων στο geogebra, στο γεωμετρικό πλαίσιο

Σε συνέχεια της προηγούμενης εργασίας τους οι μαθήτριες της ομάδας 1, εκφράζουν νοηματοδοτήσεις του απείρου ως αντικείμενο μέσω της απροσδιοριστίας $0 \cdot \infty$. Το επόμενο επεισόδιο λαμβάνει χώρα στο $2^{o}$ task, μετά από την κατασκευή νοημάτων για το άπειρο ως αντικείμενο, που έχουν προκύψει από αλγεβρικές και αριθμητικές αναπαραστάσεις στο geogebra για τον αριθμό και το μήκος των πλευρών του σχήματος, κατά τη διερεύνηση της περιμέτρου της καμπύλης του Koch.

Τέτοιες νοηματοδοτήσεις στο γεωμετρικό σκηνικό της καμπύλης του Koch παρατηρήθηκαν μόνο από την ομάδα 1 και το επόμενο επεισόδιο αποτελεί μεμονωμένη περίπτωση.

**Επεισόδιο 1**

Η Γεωργία συμφωνεί με το σκεπτικό της Ζέτας και τις ιδιότητες του απείρου στις οποίες έχει καταλήξει, έχει όμως έντονες αντιρρήσεις και θεωρεί παράδοξο το φαινόμενο ένα σχήμα με άπειρες πλευρές να έχει μηδενική περίμετρο, ερμηνεύοντας την ιδιότητα $0 \cdot \infty = 0$ στο γεωμετρικό πλαίσιο στο οποίο εργάζονται. Η παραδοξότητα αυτού του αποτελέσματος ενισχύεται όταν οι μαθήτριες αλληλεπιδρώντας με την καμπύλη του Koch που τους έχει δοθεί κατασκευασμένη στο περιβάλλον του geogebra αυξάνουν με ένα δρομέα τον αριθμό των πλευρών της (εικόνα 11).



*Εικόνα 11: Η καμπύλη του Koch για n = 5*

**Recognizing:** Η παράδοξη κατάσταση, που προκύπτει από την γεωμετρική αντιμετώπιση της περιμέτρου της καμπύλης του Koch, οδηγεί τις μαθήτριες στην αναγνώριση της αλγεβρικής προσέγγισης της περιμέτρου, μέσω του αλγεβρικού τύπου της, $3l \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, που είχε προκύψει σε προηγούμενη εργασία τους.

**Building with:** Κάνουν πράξεις θέτοντας στην μεταβλητή n το άπειρο.

*Ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Κοίτα 3l, το n άπειρο, και θα έχεις ουσιαστικά (4/3)$^{\infty}$, που θα σου κάνει ∞, επί 3l, πάλι άπειρο* |
| *Γεωργία:* | *Για την περίμετρο μιλάμε έτσι; Ωραία.* |
| *Καθηγήτρια:* | *Πως το αιτιολογείτε;* |
| *Ζέτα:* | *Εδώ βάλαμε όπου n το άπειρο* (δείχνει τον τύπο της περιμέτρου $3l(4/3)^{n-1}$) |
| *Γεωργία:* | *(4/3) εις την άπειρο, κάτι πολύ μεγάλο, κάνει άπειρο* |
| *Ζέτα:* | *Εγώ ένα δεν καταλαβαίνω, γιατί αυτό που είναι 0, … η περίμετρος είναι αυτό επί αυτό,* |
| *Γεωργία:* | *Η περίμετρος είναι αριθμός πλευρών επί το μήκος καθεμιάς* |
| *Ζέτα:* | *Ναι αυτό είναι 0, πως μηδέν επί κάτι δεν θα μας κάνει 0;* |
| *Γεωργία:* | *Μήπως 0*∞ μας κάνει άπειρο;* |

**Constructing:** Καταλήγουν στην ιδιότητα $0 \cdot \infty = \infty$, την οποία επικυρώνουν μέσω ενός ραβδογράμματος για την περίμετρο και του πίνακα τιμών της, δηλαδή μέσω μιας οπτικής και μιας αριθμητικής αναπαράστασης στο περιβάλλον του geogebra κάνοντας χρήση της δυνατότητας δυναμικού χειρισμού της μεταβλητής n που προσφέρει το λογισμικό.

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Κοίτα 3l, το n άπειρο, και θα έχεις ουσιαστικά $(4/3)^{\infty}$, που θα σου κάνει ∞, επί 3l, πάλι άπειρο* |
| *Γεωργία:* | *Για την περίμετρο μιλάμε έτσι; Ωραία.* |
| *Καθηγήτρια:* | *Πως το αιτιολογείτε;* |
| *Ζέτα:* | *Εδώ (δείχνει τον τύπο της περιμέτρου $3l(4/3)^{n-1}$) βάλαμε όπου n το άπειρο* |
| *Γεωργία:* | *(4/3) εις την άπειρο, κάτι πολύ μεγάλο, κάνει άπειρο* |
| *Ζέτα:* | *Εγώ ένα δεν καταλαβαίνω, γιατί αυτό που είναι 0, … η περίμετρος είναι αυτό επί αυτό,* |
| *Γεωργία:* | *Η περίμετρος είναι αριθμός πλευρών επί το μήκος καθεμιάς* |
| *Ζέτα:* | *Ναι αυτό είναι 0, πως μηδέν επί κάτι δεν θα μας κάνει 0;* |
| *Γεωργία:* | *Μήπως 0*∞ μας κάνει άπειρο;* |

Και πάλι μέσα από αυτή την αφαιρετική διαδικασία νοηματοδοτούν το άπειρο ως αντικείμενο μέσω της ιδιότητας $0 \cdot \infty = \infty$ με την τελευταία να μην ισχύει στους πεπερασμένους αριθμούς.

Σ' αυτή τη δραστηριότητα το ψηφιακό περιβάλλον του geogebra με τη χρήση δρομέα λειτούργησε ως μέσο πειραματισμού και διερεύνησης για τη διατύπωση εικασιών αλλά και ως μέσο επικύρωσης μέσω των οπτικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων που προσφέρει. Επίσης τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων σ' αυτό το task τίθενται με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι με την παράδοξη κατάσταση ενός σχήματος με άπειρο αριθμό πλευρών και μηδενικής περιμέτρου, ώστε να προκύψουν νοηματοδοτήσεις για το άπειρο που δεν είναι σε αναλογία με αντιλήψεις για το πεπερασμένο. Το γεωμετρικό πλαίσιο του task είναι καθοριστικής σημασίας για αυτές τις νοηματοδοτήσεις.

#### 4.1.2.4. Συμπεράσματα για τις νοηματοδοτήσεις του απείρου ως αντικείμενο

Όπως προαναφέρθηκε, σε όλη τη διάρκεια της παρέμβασης, εμφανίστηκαν στους μαθητές όλων των ομάδων νοηματοδοτήσεις για το άπειρο που έχουν να κάνουν με δυναμικές διαδικασίες που κατά βάση προέρχονται από τη διαίσθηση των μαθητών και προκλήθηκαν από τη φύση των δραστηριοτήτων, αλλά και από τις αναπαραστάσεις και τα περιβάλλοντα με τα οποία ενεπλάκησαν. Ένας από τους στόχους που τέθηκε κατά το σχεδιασμό της παρέμβασης, ήταν να μελετηθεί κατά πόσο η εμπλοκή των μαθητών σε άπειρες καταστάσεις μέσω αναπαραστάσεων σε διάφορα περιβάλλοντα εργασίας είναι δυνατό να προκαλέσει την εμφάνιση και άλλων πτυχών του απείρου πέραν των διαισθητικών.

Οι μαθήτριες της ομάδας 1, φάνηκε ότι αντιλαμβάνονται το άπειρο ως διαδικασία σε διάφορες φάσεις της παρέμβασης, με πιο έντονη την εμφάνιση αυτής της πτυχής στο 1ο task και στα δύο περιβάλλοντα εργασίας (χαρτί – μολύβι, μικρόκοσμος). Όμως καθώς η παρέμβαση εξελίσσεται και οι αναπαραστάσεις και τα περιβάλλοντα στα οποία εμπλέκονται εμπλουτίζονται, αρχίζει να διαμορφώνεται και μια ακόμα αντίληψη για το άπειρο, ως αντικείμενο. Η αντίληψη αυτή διαμορφώθηκε κατά την εμπλοκή τους στο μικρόκοσμο και μεταφέρθηκε στο πρόβλημα της καμπύλης του Koch, με το άπειρο να χρησιμοποιείται ως ένα μαθηματικό αντικείμενο, με το οποίο κάνουν πράξεις και συμπεραίνουν ιδιότητές του, που σημαίνει ότι αυτή η αντίληψη αρχίζει να εδραιώνεται στις νοηματοδοτήσεις τους. Φαίνεται ότι η έκφραση αλγεβρικών τύπων μέσω ενός κώδικα σ’ ένα προγραμματιστικό περιβάλλον και ο συντονισμός αναπαραστάσεων μέσω αυτού καθώς και ο δυναμικός τους χειρισμός μέσω δρομέων, οδήγησαν τις μαθήτριες να αντιληφθούν το άπειρο με ένα πιο αυστηρό τρόπο πέραν της διαίσθησής τους. Αυτές οι νοηματοδοτήσεις ενισχύθηκαν μέσω των αλγεβρικών αναπαραστάσεων του προβλήματος της καμπύλης του Koch στο 2$^{ο}$ task και της επικύρωσης που πρόσφεραν οι οπτικές και αριθμητικές αναπαραστάσεις κάνοντας χρήση δρομέα.

Στις υπόλοιπες ομάδες όμως, δεν εμφανίστηκε αυτή η νοηματοδότηση του απείρου, παρόλο που πολλές φορές έφτασαν πολύ κοντά. Συγκεκριμένα οι μαθήτριες της ομάδας 3, σε διάφορες φάσεις της παρέμβασης αναγνωρίζουν το ρόλο των αλγεβρικών τύπων στα προβλήματα που μελετούν, εν τούτοις δεν καταφέρνουν να σκεφτούν τυπικά και να χρησιμοποιήσουν το άπειρο ως αντικείμενο. Συγκεκριμένα η ποσότητα $\frac{1}{2^{n-1}}$ νοηματοδοτείται ως μια τιμή, ένας δεκαδικός αριθμός, που μικραίνει συνεχώς στο πέρασμα του χρόνου, εξαιτίας της συνεχούς αύξησης του εκθέτη n και κατά συνέπεια του παρονομαστή, προκαλώντας την ολοένα και μικρότερη αύξηση στην ποσότητα του φαρμάκου, ενώ στο γεωμετρικό πρόβλημα της καμπύλης του Koch, αναγνωρίζουν το ρόλο της ποσότητας $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$, την οποία όμως αντιλαμβάνονται ως μια τιμή που αυξάνεται συνεχώς στο πέρασμα του χρόνου. Παρατηρείται λοιπόν ότι παρόλο που κάνουν χρήση των αλγεβρικών τύπων και είναι πολύ κοντά στο να κάνουν χρήση του απείρου ως αντικείμενο, η διαισθητική του πτυχή ως μια δυναμική διαδικασία παραμένει ισχυρή στους μαθητές.

### 4.1.3. Το άπειρο ως απείρως μικρό – απείρως μεγάλο

Η ενασχόληση με άπειρες καταστάσεις οδηγεί, όπως προαναφέρθηκε, στην εμφάνιση διάφορων πτυχών του απείρου. Το απείρως μικρό και το απείρως μεγάλο είναι σημαντικές πτυχές που μπορεί να προκύψουν κατά την εμπλοκή σε προβλήματα άπειρων διαδικασιών όπου η επανάληψη παίζει κεντρικό ρόλο οδηγώντας πολλές φορές σε παράδοξα. Το απείρως μικρό (απειροστό) που προκύπτει από επαναλαμβανόμενες υποδιαιρέσεις προϋποθέτει το απείρως μεγάλο με όρους διαδικασίας στο πέρασμα του χρόνου.

Στην παρούσα έρευνα, όλες οι ομάδες εμφάνισαν αντιλήψεις για το απείρως μικρό με την οπτική του Cauchy[5]. Οι μαθητές εκφράστηκαν με όρους απειροστών κατά την εμπλοκή τους και στα δύο tasks κατά τη διερεύνησή τους με τα ψηφιακά εργαλεία.

#### 4.1.3.1. Το άπειρο ως απείρως μικρό – απείρως μεγάλο στο μικρόκοσμο, στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Το επόμενο επεισόδιο λαμβάνει χώρα στο 1ο task κατά τη διερεύνηση του προβλήματος του φαρμάκου στο μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας. Έχει προηγηθεί η μελέτη του προβλήματος στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι μέσω αριθμητικών, αλγεβρικών, οπτικών αναπαραστάσεων (στο πρώτο και δεύτερο φύλλο εργασίας) και προκειμένου να απαντηθούν τα ερωτήματα του τρίτου φύλλου εργασίας οι μαθητές πειραματίζονται με τις αναπαραστάσεις που έχουν παραχθεί κατά την εκτέλεση του κώδικα στο μικρόκοσμο.

Το επεισόδιο αυτό δείχνει ένα κοινό τρόπο με τον οποίο οι μαθητές όλων των ομάδων μιλούν με όρους απειροστών, κατά τη διερεύνηση του προβλήματος του φαρμάκου στη χελωνόσφαιρα.

**Επεισόδιο 1**

Και οι τρεις ομάδες έχουν διατυπώσει καθαρά την εικασία ότι η ποσότητα του φαρμάκου δεν ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή και προσπαθούν να δώσουν μια εξήγηση διερευνώντας στο μικρόκοσμο τη συμπεριφορά των αναπαραστάσεων που προσφέρει (οπτική και αριθμητική) αυξάνοντας τον αριθμό των ημερών n, μέσω ενός δρομέα. Η παρατήρηση στην εξέλιξη της σκάλας (οπτική αναπαράσταση της ποσότητας του φαρμάκου) καθώς και στις αριθμητικές τιμές (αριθμητική αναπαράσταση) τους οδηγεί σε εκφράσεις που δηλώνουν την κατασκευή νοημάτων για τα απειροστά, μέσω της ποσότητας $\frac{1}{2^{n-1}}$, στο άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, η οποία μπορεί να γίνεται απείρως μικρή, καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα, αφού η ποσότητα $2^{n-1}$ γίνεται απείρως μεγάλη. Αντιλαμβάνονται ότι αυτή η απείρως μικρή ποσότητα είναι που προκαλεί την ολοένα και μικρότερη αύξηση στην ποσότητα του φαρμάκου καθώς η λήψη του συνεχίζεται.

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Κων/να:* | *Α, κοίτα εδώ, την 100η μέρα έχει κάτι νούμερα!!! Με υποδιαστολή, …* |
| *Νανά:* | *Ισχύει, τα δεκαδικά είναι πάρα πολλά,..* |
| *Κων/να:* | *Οπότε κι αν ακόμα ανεβαίνει, θα ανεβαίνει εκατοστά του χιλιοστού* |
| *Νανά:* | *Και μετά αν ξανακάνεις τη διαίρεση, θα είναι ακόμα πιο μικρό και ακόμη πιο μικρό,… Πω, πω, αυτά είναι οι ποσότητες που κάθε φορά προσθέτουμε. Αυτό πρέπει να είναι 0,00000…* |

[5] Ο Cauchy περιγράφει το απειροστό ως μια μεταβλητή ποσότητα που γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται απεριόριστα με τέτοιο τρόπο σαν να συγκλίνουν στο μηδέν.

| | |
|---|---|
| *Κων/να:* | *Θα είναι ½ και στο 2 ο εκθέτης θα μεγαλώνει συνέχεια, άρα το κλάσμα θα γίνεται πολύ μικρό…* |
| *Καθηγήτρια:* | *Εκεί που δεν βλέπεις πως είσαι σίγουρη τι γίνεται; Ναι αυξάνεται πολύ λίγο, αλλά πως ξέρεις ότι με αυτό το πολύ λίγο δεν ξεπερνάς κάποια στιγμή που δεν μπορείς να δεις το 120;* |
| *Κων/να:* | *Είναι πάρα πολλές 1000000 μέρες* (έχουν πειραματιστεί στη χελωνόσφαιρα για n=1000000) |
| *Καθηγήτρια:* | *Πες ότι είχες ένα εξωγήινο ον που μπορεί να ζει 3000000000000 χρόνια και πιο πολλά ή που είναι αθάνατο.* |
| *Νανά:* | *Ναι αλλά αν κάνω $½^{3000000000000}$, τότε αυτό θα έβγαινε πολύ μικρό.* |

Φαίνεται λοιπόν ότι λειτουργούν αφαιρετικά και νοηματοδοτούν το απείρως μικρό (απειροστό), ενώ η διαδικασία της νοηματοδότησης εξελίσσεται σε τρία στάδια.

**Recognizing:** Αρχικά αναγνωρίζουν το ρόλο του αλγεβρικού τύπου $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ και συγκεκριμένα των όρων του $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ στην συμπεριφορά της ποσότητας του φαρμάκου καθώς ο αριθμός των ημερών n, αυξάνεται.

**Building with:** Η σταδιακή εξέλιξη των αριθμητικών τιμών του n, μέσω του δρομέα, τους οδηγεί σε συνδέσεις με την ποσότητα $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ και τη διερεύνηση της αριθμητικής συμπεριφοράς της.

**Constructing:** Με αυτό τον τρόπο οδηγούνται στην νοηματοδότηση της ποσότητας $2^{n-1}$ ως μια μεταβλητή ποσότητα που γίνεται απείρως μεγάλη όταν η αριθμητική της τιμή αυξάνεται συνεχώς, η οποία προκαλεί νοηματοδότηση για την ποσότητα $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ ως μια μεταβλητή που γίνεται απείρως μικρή, όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται απεριόριστα. Έτσι προκύπτει η νοητική κατασκευή του απειροστού ως μια μεταβλητή που η αριθμητική της τιμή μειώνεται απεριόριστα, σαν να συγκλίνει στο μηδέν.

Η χρήση του δρομέα για μεγάλες τιμές των μεταβλητών και η αντίστοιχη εξέλιξη της οπτικής και αριθμητικής αναπαράστασης στο μικρόκοσμο, αλλά και η δυνατότητα παρατήρησης των αλλαγών μέσω μεγεθύνσεων, σμικρύνσεων, στροφών στο τρισδιάστατο πεδίο των γραφικών, συμβάλλουν καθοριστικά στην κατασκευή νοημάτων για τα απειροστά. Επίσης εκτός των εργαλείων και του περιβάλλοντος εργασίας (μικρόκοσμος), το ρεαλιστικό πλαίσιο του task φαίνεται να συμβάλει σ’ αυτές τις νοηματοδοτήσεις αφού οι μαθητές μιλούν με όρους του προβλήματος, *«την 100η μέρα …»*, *«δεν είναι πάρα πολλές οι 1000000 μέρες;»*.

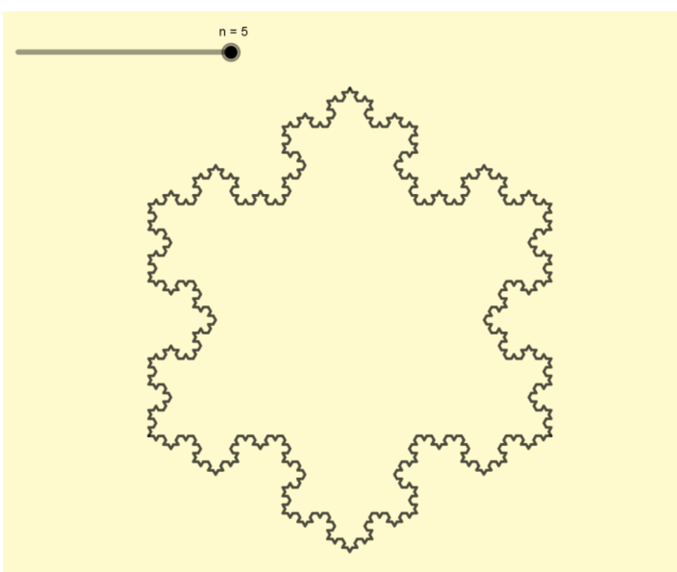
### 4.1.3.2. Το άπειρο ως απείρως μικρό – απείρως μεγάλο στο geogebra, στο γεωμετρικό πλαίσιο

Στην κατηγορία αυτή αναφέρονται επεισόδια που λαμβάνουν χώρα στο 2ο task, στο πρόβλημα της καμπύλης του Koch κατά τη διερεύνηση της περιμέτρου της στο πέμπτο φύλλο εργασίας και ενώ έχει προηγηθεί η αλγεβρική αντιμετώπιση του πλήθους και του μήκους των πλευρών, της περιμέτρου και του εμβαδού στο τέταρτο φύλλο εργασίας.

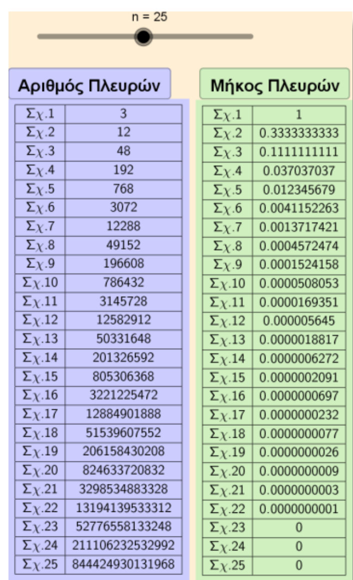
Οι διάλογοι που ακολουθούν εκφράζουν τους πιο κοινούς τρόπους ανάδυσης αντιλήψεων για το απείρως μικρό και το απείρως μεγάλο, οι οποίες προκύπτουν μέσω αριθμητικών και οπτικών αναπαραστάσεων στο δυναμικό περιβάλλον του geogebra και της σύνδεσης αυτών με τις αλγεβρικές αναπαραστάσεις που έχουν προηγηθεί.

**Επεισόδιο 1**

Η σύλληψη απείρως μικρών μεγεθών προκύπτει όταν οι μαθητές προσπαθούν να συμπεράνουν τη συμπεριφορά της περιμέτρου της καμπύλης του Koch καθώς η διαδικασία συνεχίζεται απεριόριστα. Εκφράζεται η άποψη ότι ο αριθμός των πλευρών θα αυξάνεται απεριόριστα ενώ το μήκος κάθε πλευράς *«θα γίνει κοντά στο μηδέν»*, η οποία διαμορφώνεται από την οπτική εξέλιξη του σχήματος στο περιβάλλον του geogebra (εικόνα 12), από τους πίνακες των αριθμητικών τιμών και τη χρήση δρομέα στο ίδιο περιβάλλον (εικόνα 13), καθώς επίσης και από την αλγεβρική αναπαράσταση του αριθμού των πλευρών ($3 \cdot 4^{n-1}$) και του μήκους της καθεμιάς ($\frac{l}{3^{n-1}}$), οι οποίες προέκυψαν σε προηγούμενη εργασία τους.




Εικόνα 12: Η καμπύλη του Koch για n=5




| Αριθμός Πλευρών | |
|---|---|
| Σχ.1 | 3 |
| Σχ.2 | 12 |
| Σχ.3 | 48 |
| Σχ.4 | 192 |
| Σχ.5 | 768 |
| Σχ.6 | 3072 |
| Σχ.7 | 12288 |
| Σχ.8 | 49152 |
| Σχ.9 | 196608 |
| Σχ.10 | 786432 |
| Σχ.11 | 3145728 |
| Σχ.12 | 12582912 |
| Σχ.13 | 50331648 |
| Σχ.14 | 201326592 |
| Σχ.15 | 805306368 |
| Σχ.16 | 3221225472 |
| Σχ.17 | 12884901888 |
| Σχ.18 | 51539607552 |
| Σχ.19 | 206158430208 |
| Σχ.20 | 824633720832 |
| Σχ.21 | 3298534883328 |
| Σχ.22 | 13194139533312 |
| Σχ.23 | 52776558133248 |
| Σχ.24 | 211106232532992 |
| Σχ.25 | 844424930131968 |

| Μήκος Πλευρών | |
|---|---|
| Σχ.1 | 1 |
| Σχ.2 | 0.3333333333 |
| Σχ.3 | 0.1111111111 |
| Σχ.4 | 0.037037037 |
| Σχ.5 | 0.012345679 |
| Σχ.6 | 0.0041152263 |
| Σχ.7 | 0.0013717421 |
| Σχ.8 | 0.0004572474 |
| Σχ.9 | 0.0001524158 |
| Σχ.10 | 0.0000508053 |
| Σχ.11 | 0.0000169351 |
| Σχ.12 | 0.000005645 |
| Σχ.13 | 0.0000018817 |
| Σχ.14 | 0.0000006272 |
| Σχ.15 | 0.0000002091 |
| Σχ.16 | 0.0000000697 |
| Σχ.17 | 0.0000000232 |
| Σχ.18 | 0.000000077 |
| Σχ.19 | 0.0000000026 |
| Σχ.20 | 0.0000000009 |
| Σχ.21 | 0.0000000003 |
| Σχ.22 | 0.0000000001 |
| Σχ.23 | 0 |
| Σχ.24 | 0 |
| Σχ.25 | 0 |

Εικόνα 13: Πίνακες αριθμητικών τιμών του αριθμού των πλευρών και του μήκους τους

*Παράδειγμα από ομάδα 2 (Συζητώντας για τις αριθμητικές τιμές στους πίνακες)*

| | |
|---|---|
| *Καθηγήτρια:* | *Το μήκος της πλευράς κάθε φορά πόσο είναι;* |
| *Πρόδρομος:* | *Δια 3* |

| | |
|---|---|
| *Καθηγήτρια:* | *Ναι, δια 3, δηλαδή κάνοντας δια 3, κάθε φορά, κάποια στιγμή θα γίνει 0 η πλευρά;* |
| *Πρόδρομος:* | *Όχι αφού οτιδήποτε δια 3 δεν κάνει 0* |
| *Καθηγήτρια:* | *Και εδώ γιατί βγάζει 0;* |
| *Κώστας:* | *Είναι πολύ μικρός αριθμός το μήκος των πλευρών* |
| *Πρόδρομος:* | *Και εδώ γιατί βγάζει 0, κάτσε το προηγούμενο πόσο είναι;* |
| *Κώστας:* | *0,000000000001* |
| *Πρόδρομος:* | *Δια 3 αυτό βγάζει 0; Όχι πάλι βγάζει 0,00000000…… ακόμα πιο μικρό* |

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Νανά*: | *Ξέρεις τι, το πρόβλημα είναι ότι υπάρχει αριθμός πλευρών αλλά δεν υπάρχει μήκος. Άρα μάλλον υπάρχει σχήμα, …* |
| *Κων/να*: | *Και πως υπάρχει σχήμα χωρίς να υπάρχουν πλευρές; Μήπως είναι τόσο πολύ πολύ μικρό….; Α! και δεν έχει μήκος γιατί είναι σημείο και τα σημεία δεν έχουν μήκος.* |

Όλες οι ομάδες ολοκληρώνουν τα τρία στάδια της AiC, νοηματοδότησης των απειροστών οπτικά, αλλά και αλγεβρικά.

**Recognizing:** Αρχικά οι μαθητές ανακαλούν τον τρόπο εύρεσης της περιμέτρου ενός σχήματος από τη γεωμετρία, αναγνωρίζοντας το ρόλο του αριθμού των πλευρών και του μήκους της καθεμιάς.

**Building with:** Στη συνέχεια συνδέουν τον αριθμό των πλευρών και το μήκος καθεμιάς με τα δεδομένα του προβλήματος. Συγκεκριμένα η χρήση των αριθμητικών τιμών τους οδηγεί στην άποψη ότι καθώς το σχήμα εξελίσσεται, ο αριθμός των πλευρών αυξάνεται απεριόριστα, ενώ το μήκος τους μικραίνει απεριόριστα έχοντας την τάση να γίνει μηδέν, η οποία επιβεβαιώνεται οπτικά «*Μήπως είναι τόσο πολύ πολύ μικρό….; Α! και δεν έχει μήκος γιατί είναι σημείο και τα σημεία δεν έχουν μήκος*» και αλγεβρικά από τον τύπο του μήκους κάθε πλευράς $\frac{l}{3^{n-1}}$ «*Το μήκος κάθε πλευράς πόσο θα είναι; Δια 3 αυτό βγάζει 0; Όχι πάλι βγάζει 0,00000000…… ακόμα πιο μικρό*».

**Constructing:** Συλλαμβάνεται λοιπόν η ιδέα ενός σχήματος με απείρως μεγάλο αριθμό πλευρών μήκους απείρως μικρού. Ενώ το απείρως μικρό μήκος νοηματοδοτείται οπτικά ως σημείο.

Από την άλλη το απείρως μικρό νοηματοδοτείται αλγεβρικά, ως ένα κλάσμα με σταθερό αριθμητή και απείρως μεγάλο παρονομαστή με τη έννοια της σύγκλισης στο μηδέν.

**Consolidation της αλγεβρικής νοηματοδότησης των απειροστών μέσω απείρως μικρών κλασμάτων:** Μια ομάδα μόνο φάνηκε ότι παγίωσε τα αλγεβρικά νοήματα για τα απειροστά μέσω των απείρως μικρών κλασμάτων. Συγκεκριμένα οι μαθήτριες της ομάδας 3 χρησιμοποιούν την έννοια των απείρως μικρών κλασμάτων και αργότερα, στους όρους $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$ του αθροίσματος

$\mathrm{E}+\frac{\mathrm{E}}{3}\cdot 1+\frac{\mathrm{E}}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{\mathrm{E}}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2}+\cdots+\frac{\mathrm{E}}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}+\cdots$ που παριστάνει το εμβαδόν της καμπύλης του Koch. Έτσι μιλούν πάλι με όρους σύγκλισης στο μηδέν συγκρίνοντας τα κλάσματα $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$ με τα απείρως μικρά κλάσματα $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ που εμφανίζονται στον τύπο της ποσότητας του φαρμάκου.

Η δυνατότητα εξέλιξης του σχήματος και των αριθμητικών τιμών στο δυναμικό περιβάλλον του geogebra μέσω ενός δρομέα συμβάλλει καθοριστικά στην ερμηνεία των αντίστοιχων αλγεβρικών αναπαραστάσεων, που οδηγούν σε νοηματοδοτήσεις για το απείρως μικρό οπτικά και αλγεβρικά, οι οποίες προϋποθέτουν νοηματοδοτήσεις του απείρως μεγάλου. Το γεωμετρικό πλαίσιο του task συμβάλει στη νοηματοδότηση του απείρως μικρού μήκους ως σημείο. Επίσης οι δραστηριότητες του task που καθοδηγούν ώστε η διερεύνηση του αριθμού και του μήκους των πλευρών να προηγείται της διερεύνησης της περιμέτρου, οδηγούν αναπόφευκτα στην αντιμετώπιση απείρως μικρών και απείρως μεγάλων μεγεθών.

#### 4.1.3.3. Συμπεράσματα για το απείρως μικρό – απείρως μεγάλο

Παρατηρήθηκαν νοηματοδοτήσεις για το απείρως μικρό και το απείρως μεγάλο από όλες τις ομάδες, κατά τη διερεύνηση του προβλήματος του φαρμάκου στο μικρόκοσμο, καθώς επίσης και κατά τη διερεύνηση της περιμέτρου και του εμβαδού της καμπύλης του Koch στο geogebra. Κατά την εμπλοκή στο μικρόκοσμο η πιο συχνή κατασκευή νοήματος για το απειροστό που παρατηρήθηκε ήταν μιας μεταβλητής ποσότητας που γίνεται αυθαίρετα μικρή σαν να συγκλίνει στο μηδέν (η οπτική του Cauchy). Η εμπλοκή στο geogebra για το πρόβλημα της καμπύλης του Koch, ανέδειξε αλγεβρικές και οπτικές νοητικές κατασκευές. Έτσι γεωμετρικά νοηματοδοτήθηκε το απείρως μικρό μήκος ως σημείο, ενώ αλγεβρικά ένα κλάσμα είναι απείρως μικρό όταν έχει σταθερό αριθμητή και απείρως μεγάλο παρονομαστή.

Όλες οι κατασκευές προέκυψαν μετά από την εργασία με τα ψηφιακά εργαλεία. Σημαντικός, για τις νοηματοδοτήσεις αυτές, εμφανίζεται ο ρόλος του δυναμικού χειρισμού μέσω δρομέα και της ταυτόχρονης παρατήρησης της εξέλιξης των αριθμητικών τιμών και των οπτικών αναπαραστάσεων, μέσω των οποίων οι μαθητές κατάφεραν να δώσουν ερμηνείες στα στοιχεία των αλγεβρικών αναπαραστάσεων που με τη σειρά τους συνέβαλαν στις παραπάνω νοηματοδοτήσεις. Το ρεαλιστικό πλαίσιο του 1$^{ου}$ task οδήγησε σε νοηματοδοτήσεις για τα απειροστά παρόμοιες με αυτή του Cauchy, ενώ το γεωμετρικό πλαίσιο συνέβαλε στη νοηματοδότηση του απείρως μικρού μήκους ως σημείο. Τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων οδήγησαν τους μαθητές στην αντιμετώπιση απείρως μικρών και απείρως μεγάλων μεγεθών.

## 4.2. Νοηματοδοτήσεις εννοιών σχετικών με το άπειρο

Οι αντιλήψεις των εκπαιδευόμενων για το άπειρο αντανακλούν στις νοηματοδοτήσεις εννοιών λογισμού, που στη θεωρητική τους βάση βρίσκεται η έννοια του απείρου, όπως για παράδειγμα οι ακολουθίες, οι σειρές, το όριο κτλ. Νοηματοδοτήσεις σχετικές με τις έννοιες αυτές, που αναδύθηκαν κατά τη διάρκεια της παρούσας παρέμβασης, περιγράφονται και αναλύονται στις επόμενες ενότητες.

### 4.2.1. Συμπεριφορά άπειρων αθροισμάτων (σύγκλιση γεωμετρικής σειράς)

Αντιλήψεις για τα άπειρα αθροίσματα διατυπώνονται από τους μαθητές σε όλες τις φάσεις τις παρέμβασης. Στην αρχή της παρέμβασης, στο 1ο task, οι μαθητές εκφράζουν τη διαισθητική αντίληψη ότι η ποσότητα του φαρμάκου θα αυξάνεται συνεχώς, αφού κάθε ημέρα λήψης θα προστίθεται στον οργανισμό μια ποσότητα, αλλά κατά την εμπλοκή τους με αριθμητικούς υπολογισμούς στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι, αρχίζουν να αμφισβητούν την αρχική τους διαίσθηση και να διατυπώνουν κάποιες φορές δειλά την άποψη ότι η ποσότητα του φαρμάκου δεν θα ξεπερνάει μια συγκεκριμένη τιμή, ιδέες μεμονωμένες και εύθραυστες, που δεν μπορούμε να τις εντάξουμε στην κατασκευή νοήματος. Η κατασκευή πιο στέρεων νοημάτων σε σχέση με αυτή την αντίληψη παρατηρείται κατά την εμπλοκή τους στο μικρόκοσμο για το 1ο task και στο περιβάλλον του geogebra για το 2ο task.

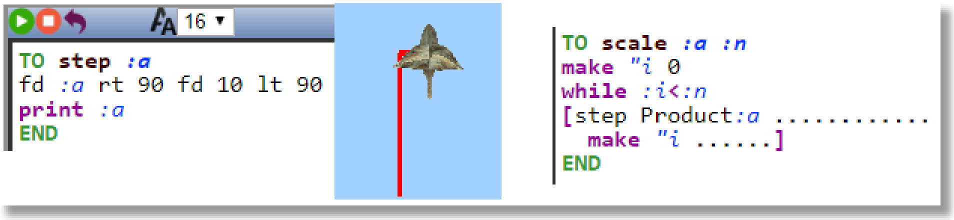
#### 4.2.1.1. Η συμπεριφορά ενός άπειρου αθροίσματος στο μικρόκοσμο στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Τα επόμενα επεισόδια λαμβάνουν χώρα στο 1ο task (πρόβλημα του φαρμάκου) κατά τη διερεύνηση του προβλήματος στο μικρόκοσμο, όπως ζητείται στις δραστηριότητες του τρίτου φύλλου εργασίας. Έχει προηγηθεί η μελέτη του προβλήματος στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι μέσω αριθμητικών, αλγεβρικών, οπτικών αναπαραστάσεων, ενώ έχουν εκφραστεί κάποιες διαισθητικές εικασίες για την ποσότητα του φαρμάκου καθώς η λήψη του συνεχίζεται απεριόριστα.

Στο επεισόδιο 1, φαίνεται ο πιο συνηθισμένος τρόπος με τον οποίο οι μαθητές όλων των ομάδων κατασκευάζουν νοήματα για τη συμπεριφορά της γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, εκφράζοντάς τα με τη μορφή εικασίας. Στο επεισόδιο 2 περιγράφεται ένα μεμονωμένο περιστατικό διαφοροποίησης, από την ομάδα 2, ως προς τον τρόπο διαμεσολάβησης του μικρόκοσμου μέχρι να φτάσουν σ’ αυτή την εικασία, ενώ στο επεισόδιο 3 παρουσιάζεται ένα μεμονωμένο περιστατικό διαφοροποίησης, από την ομάδα 1, ως προς το περιεχόμενο του νοήματος που κατασκευάζεται που περιλαμβάνει εκτός από την εικασία και την αιτιολόγησή της.

**Επεισόδιο 1**

Στο 3ο φύλλο εργασίας δίνονται στους μαθητές δύο κώδικες οι step και scale (εικόνα 14) στο μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας και καλούνται να σχεδιάσουν στο χαρτί την οπτική εικόνα που προσφέρει ο πρώτος (step) και να συμπληρώσουν το δεύτερο (scale), ώστε να αναπαριστά την ποσότητα του φαρμάκου τη n-οστή ημέρα.




*Εικόνα 14: Αριστερά ο κώδικας step με την οπτική του αναπαράσταση (σκαλί) και δεξιά ο ημισυμπληρωμένος κώδικας scale για την αναπαράσταση της ποσότητας του φαρμάκου*

**Recognizing:** Οι μαθητές και των τριών ομάδων αναγνώρισαν στον κώδικα scale τη συμβολική έκφραση της ποσότητας του φαρμάκου, δηλαδή τον αλγεβρικό τύπο $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$.

*Παράδειγμα από ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *την 1η μέρα θα είναι α, τη δεύτερη μέρα α/2* |
| *Γεωργία:* | *το Product τι είναι;* |
| *Καθηγήτρια:* | *είναι το γινόμενο* |
| *Ζέτα:* | *Γίνεται να βάλουμε τελίτσες;* **(recognizing)** |
| *Καθηγήτρια:* | *όχι, διαβάστε τον κώδικα και σκεφτείτε ταυτόχρονα το πρόβλημα* |

Από το παραπάνω επεισόδιο φαίνεται ότι οι μαθήτριες της ομάδας 1, χωρίς να το αναφέρουν ρητά, προσπαθούν να συμπληρώσουν τον κώδικα έχοντας ως οδηγό τον τύπο. Μάλιστα προβληματίζονται για τις τελίτσες που έχει ο τύπος και τον τρόπο έκφρασης αυτών με εντολές του κώδικα. Ανάλογα λειτουργούν και οι μαθητές των άλλων ομάδων.

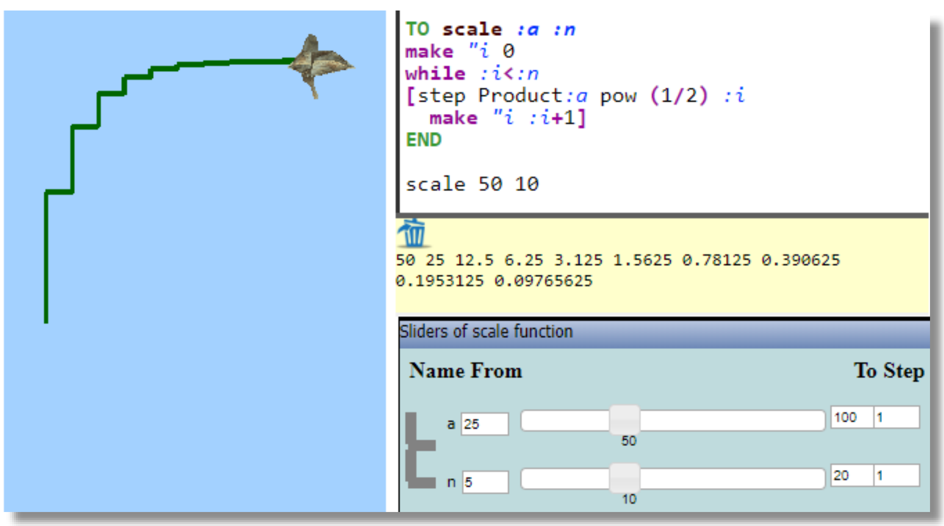
**Building with:** Γίνεται μια προσπάθεια αντιπαραβολής, συνδέσεων και συσχετίσεων μεταξύ των μεταβλητών και των πράξεων του τύπου με τις μεταβλητές και τις εντολές του κώδικα από όλες τις ομάδες.

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Κων/να:* | *Λοιπόν, φτιάχνουμε μια μεταβλητή* |
| *Νανά:* | *Αυτή πρέπει να είναι μικρότερη του n, γιατί εμείς είχαμε γράψει εις την n-1* |
| *Κων/να:* | *Ναι, και κάνει ένα step, άρα κάνει αυτό… (δείχνει ένα σκαλί με το χέρι της)* |
| *Νανά:* | *Ναι αλλά με τι α; Δεν το λέει αυτό, λέει product … και έχει τελίτσες, πρέπει να γράψουμε κάτι. Α, step product α, την 1η μέρα δεν θα ανέβει α; επί ξέρω εγώ… Το i δεν θα είναι κάθε φορά …* |
| *Κων/να:* | *Το i ξεκινά από το 0 και while i<n, δηλαδή όσο το i είναι μικρότερο του n …* |
| *Νανά:* | *Το i θα είναι ο εκθέτης που έχουμε στους παρονομαστές* |

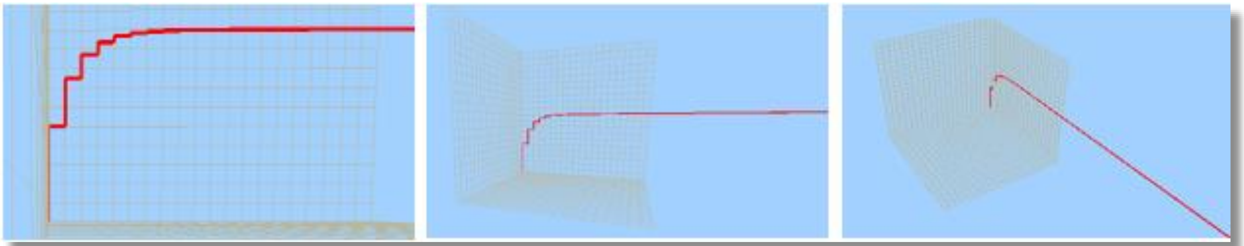
| | |
|---|---|
| *Κων/να:* | *Με ½,* |
| *Νανά:* | *Μετά ¼, μετά 1/8* |
| *Κων/να:* | *Ναι αλλά την $1^{η}$ μέρα θα μας βγάλει α/2, ενώ είναι α* |
| *Νανά:* | *Ναι την $1^{η}$ μέρα, αφού το i είναι το 0 θα πρέπει να κάνουμε α* ξέρω εγώ $1/2^{0}$* |
| *Κων/να:* | *Και μετά γιατί θέλει να ξανακάνουμε το make ''i … Προσθέτει, i+1* |
| *Νανά:* | *Εδώ τι να βάλουμε , που λέει step, με τι πολλαπλασιάζεται το α;* |
| *Κων/να:* | *Με $1/2^{i}$ , στο 0 δεν θα έχει καθόλου, τη $2^{η}$ μέρα θα έχει 1, ½$^{1}$* |

Στον παραπάνω διάλογο είναι ξεκάθαρο ότι προσπαθούν να εκφράσουν το άθροισμα που δίνει την ποσότητα του φαρμάκου τη n-οστή ημέρα με τη μορφή ενός κώδικα. Τις βοηθάει και τις καθοδηγεί ο κώδικας που είναι ημισυμπληρωμένος, παρόλα αυτά τις προβληματίζει ιδιαίτερα ο ρόλος της μεταβλητής i, ενώ τελικά φαίνεται ότι συλλαμβάνουν την επανάληψη (while i<n …….. make i=i+1) που περιέχεται στον κώδικα ως τρόπο έκφρασης του μοτίβου που ακολουθούν οι όροι του αθροίσματος $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$. Η εκτέλεση του κώδικα, ακόμα και όταν αυτή γίνεται νοητά χωρίς τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις, τους δίνει ανατροφοδότηση για διορθώσεις και βελτιώσεις. Η συμπλήρωση του κώδικα όσον αφορά στη μεταβλητή i, έγινε με αυτό τον τρόπο, δοκιμάζοντας, εκτελώντας νοητά και βελτιώνοντας, όπως φαίνεται στον παραπάνω διάλογο.

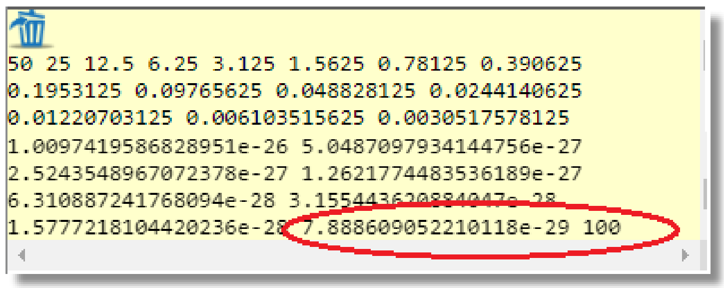



*Εικόνα 15: Ο κώδικας συμπληρωμένος με τις αναπαραστάσεις του*

**Constructing:** Τελικά όλες οι ομάδες συμπλήρωσαν τον κώδικα λαμβάνοντας την οπτική αναπαράσταση της σκάλας που φαίνεται στην εικόνα 15. Αφού έχουν συμπληρώσει και εκτελέσει τον κώδικα, με τις τρεις διαφορετικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν, συνεχίζουν με πειραματισμούς. Δοκιμάζουν μεγάλες τιμές του n (αριθμός ημερών) κάνοντας χρήση δρομέα, εισάγουν πλέγμα στο χώρο των γραφικών ώστε να μπορούν να υπολογίζουν άμεσα το ύψος της σκάλας και παρατηρούν την εξέλιξη της σκάλας (εικόνα 16), αλλά και των αριθμητικών τιμών στο αντίστοιχο πεδίο (εικόνα 17). Μάλιστα χωρίς την οδηγία της καθηγήτριας συνεχίζουν σε επόμενα ερωτήματα και διερευνούν και άλλες τιμές της ημερήσιας δόσης. Μετά από αυτή τη διερεύνηση καταλήγουν στην κατασκευή μιας εικασίας, ότι το άθροισμα που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου θα αυξάνεται, χωρίς όμως να ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή, καθώς ο αριθμός των ημερών λήψης αυξάνεται.



*Εικόνα 16: Διερεύνηση στο μικρόκοσμο της ποσότητας του φαρμάκου για μεγάλες τιμές του n*




*Εικόνα 17: Το πεδίο των αριθμητικών τιμών για την ποσότητα του φαρμάκου στο μικρόκοσμο*

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Βάλε 1000* |
| *Κων/να:* | *100!!! Να βάλουμε κι ακόμα πιο μεγάλο; (Κοιτούν τις αριθμητικές τιμές, και προχωράνε τις τιμές για να δουν την τελευταία που δίνει το άθροισμα)* |
| *Νανά:* | *Πόσο πιο μεγάλο; (Βάζουν 10000)* |
| *Κων/να:* | *Κόλλησε!!! Την πατήσαμε (Τελικά ο αλγόριθμος έτρεξε και με σμίκρυνση φάνηκε μια ευθεία. Κοιτούν τα νούμερα).* |
| *Νανά:* | *100!!!* |
| *Νανά:* | *Να βάλουμε 60, να δούμε τι θα βγάλει; (Εκτελούν τον αλγόριθμο για α=60 και n=1000)* |
| *Κων/να:* | *119,99999… (Στη συνέχεια εκτελούν τον αλγόριθμο για n =10000)* |
| *Νανά:* | *119.999999999999…..* |
| *Κων/να στην ολομέλεια:* | *Εμείς το δοκιμάσαμε για πολλές μέρες και μετά είδαμε ότι έβγαινε συνέχεια 119,999999999…. Ε, άρα δεν ξεπερνά το 120.* ***(constructing)*** |

Και κατά την προηγούμενη εργασία τους σε περιβάλλον χαρτί – μολύβι οι μαθητές είχαν εκφράσει σχετικές απόψεις με μικρότερο βαθμό βεβαιότητας, περισσότερο ως πιθανότητα.

Τώρα εξαιτίας της δυνατότητας δυναμικού χειρισμού μέσω δρομέα στο μικρόκοσμο που τους επιτρέπει πειραματισμό με μεγάλες τιμές του n και ταυτόχρονη παρατήρηση της σταδιακής ανάπτυξης της οπτικής αναπαράστασης και των αριθμητικών τιμών, φαίνεται ότι κατασκευάζουν μια πιο στέρεα αντίληψη για τη συμπεριφορά της γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^{n-1}}$.

**Επεισόδιο 2**

Παρακάτω περιγράφεται ένα μεμονωμένο επεισόδιο που αφορά στη νοηματοδότηση της συμπεριφοράς του άπειρου αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^{n-1}}$. Οι μαθητές της ομάδας 2 ενώ λειτούργησαν παρόμοια με τις υπόλοιπες ομάδες, στις φάσεις recognizing και constructing της αφαίρεσης που πραγματοποιείται κατά την κατασκευή νοημάτων για τη συμπεριφορά του παραπάνω αθροίσματος, στη φάση building with διαφοροποιήθηκαν με τις διαισθητικές αντιλήψεις να επανέρχονται και να συμβάλουν στις κατασκευές τους.

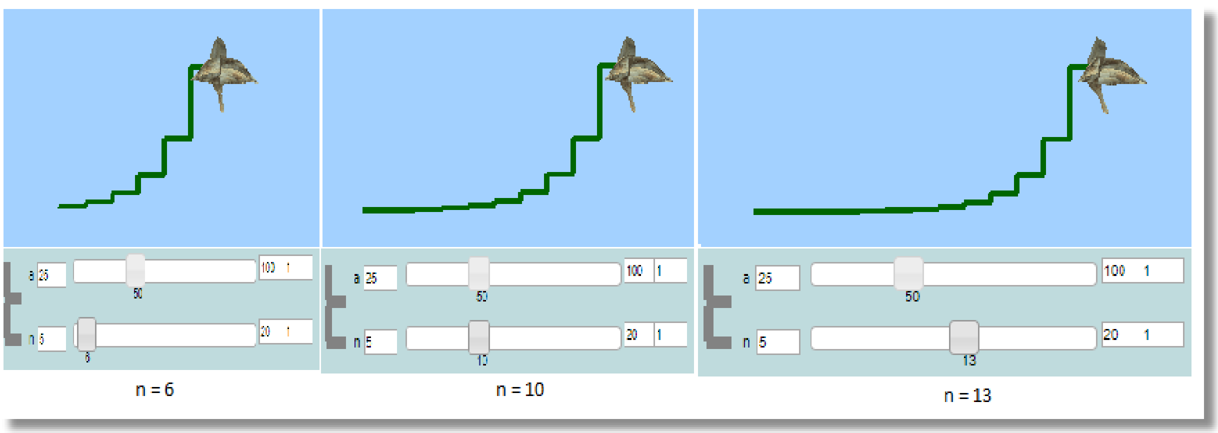
**Recognizing:** Αναγνωρίζουν το ρόλο του αλγεβρικού τύπου στη συμπλήρωση του κώδικα.

**Building with:** Σ' αυτή τη φάση των συσχετίσεων των εντολών του κώδικα με τις μεταβλητές και τις πράξεις του αλγεβρικού τύπου, κατά τη συμπλήρωση του κώδικα εκφράζουν το άθροισμα $\frac{\alpha}{2^{n-1}} + \frac{\alpha}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{\alpha}{2} + \alpha$, του οποίου οι όροι είναι γραμμένοι από το τέλος προς την αρχή σε σχέση με το άθροισμα $\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha}{2^{n-1}}$. Και ενώ ο κώδικας αυτός αποτελεί τη συμβολική έκφραση της ποσότητα του φαρμάκου τη n-οστή ημέρα, η εκτέλεσή του προσφέρει την οπτική εικόνα μιας «ανάποδης σκάλας» (εικόνα 18), που συγκρούεται με την διαισθητική αντίληψη που από την αρχή είχαν εκφράσει, για τη συνεχή αύξηση της τιμής ενός αθροίσματος, στο οποίο προστίθενται συνεχώς όροι, γεγονός που δείχνει ότι αυτή η αντίληψη έχει παραμείνει στο concept image για τα άπειρα αθροίσματα και μάλιστα ισχυρή. Η αντίδραση των μαθητών ήταν να απορρίψουν αυτή την γεωμετρική αναπαράσταση διορθώνοντας τον κώδικα, κάνοντας τις κατάλληλες συσχετίσεις ώστε να παριστάνει το άθροισμα $\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha}{2^{n-1}}$, προκειμένου να λάβουν μια διαφορετική οπτική αναπαράσταση, πιο κοντά στη διαίσθησή τους (εικόνα 15).

**Constructing:** Η νέα οπτική αναπαράσταση και η διερεύνηση των αριθμητικών τιμών για μεγάλες τιμές του n και για διαφορετικές τιμές του α, κάνοντας χρήση δρομέων, τους οδηγεί όπως και τις υπόλοιπες ομάδες στην κατασκευή της εικασίας ότι το άθροισμα $\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha}{2^{n-1}} + \cdots$ δεν ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή, όσο κι αν συνεχίζεται η διαδικασία.

*Παράδειγμα από ομάδα 2*

| | |
|---|---|
| *Κώστας:* | *Όταν το i είναι 0, είναι α*1/$2^n$ και μετά όταν το i είναι 1, α*1/$2^{n-1}$ , αυτό δεν θέλουμε;* |
| *Πρόδρομος:* | *το α*1/$2^n$ δεν το θέλουμε, από εκεί και μετά θέλουμε* |
| *Κώστας:* | *Άρα αρχική τιμή στο i θέλουμε το 1* (Εκτελούν τον κώδικα με το $2^{n-1}$ και τους βγαίνει η σκάλα ανάποδα (εικόνα 18) *…Τι έτσι βγαίνει;* (Βάζουν δρομείς για το n και το α, και παίζουν λίγο με αυτούς) |
| *Πρόδρομος:* | *Όλο πέφτει …., δεν πρέπει να ανεβαίνει;* |
| *Κώστας:* | *Δεν ξέρω … Για βάλε εδώ 2 εις την i, δηλαδή 2 εις την 0, 2 εις την 1, 2 εις την 2, μέχρι.. το i μικρότερο του n άρα 2 εις την n-1.* (στη συνέχεια διορθώνουν και εκτελούν τον κώδικα, και προκύπτει η σκάλα που έβγαλαν και οι άλλοι. Βάζουν και δρομείς και παίζουν με αυτούς έχοντας α = 50) |
| *Πρόδρομος:* | *Κοίτα αυτό δείχνει ότι δεν θα μπορέσει να ανέβει άλλο, αφού καταλήγει σε μια ευθεία και δεν ανεβαίνει άλλο, ότι λέγαμε και πριν* (εικόνα 15) |
| *Κώστας:* | *Ωραία, ας κρατήσουμε αυτό, αυτό νομίζω ότι είναι* |




*Εικόνα 18: Οπτική αναπαράσταση του αθροίσματος* $\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\frac{\alpha}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{\alpha}{2}+\alpha$ *από την ομάδα 2*

Στο συγκεκριμένο επεισόδιο, σημαντική ήταν η συμβολή του μικρόκοσμου, όπου η δυνατότητα του δυναμικού συντονισμού της οπτικής αναπαράστασης της σκάλας μέσω του κώδικα δίνει ευκαιρίες ανατροφοδότησης για βελτιώσεις και διορθώσεις. Επιπλέον η εμπλοκή στο μικρόκοσμο με τη δυνατότητα διόρθωσης του κώδικα ώστε να προκύψουν αλλαγές και στην αντίστοιχη οπτική αναπαράσταση συμβάλει στη μετατροπή λανθασμένων διαισθητικών αντιλήψεων για τα άπειρα αθροίσματα, σε βοηθούς για την κατασκευή ορθών αντιλήψεων.

**Επεισόδιο 3**

Το συγκεκριμένο επεισόδιο αναδεικνύει την αιτιολόγηση της εικασίας για τη συμπεριφορά του άπειρου αθροίσματος $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cdots$, με την οποία ολοκληρώνεται η νοηματοδότηση του παραπάνω αθροίσματος και η συμπλήρωση του concept image της έννοιας.

Η αιτιολόγηση αυτή έγινε μόνο από την ομάδα 1, μετά από τη μελέτη του παραπάνω αθροίσματος στο μικρόκοσμο και την κατασκευή εικασίας και μετά από την πίεση της καθηγήτριας για δικαιολόγηση, προκαλώντας με την περίπτωση ενός αθάνατου ανθρώπου. Η δικαιολόγηση σχηματίστηκε μεταβαίνοντας στην στατική οπτική αναπαράσταση των κυκλικών διαγραμμάτων με τα οποία οι μαθήτριες είχαν ασχοληθεί σε προηγούμενη εργασία τους στο περιβάλλον χαρτί - μολύβι.

Η προηγούμενη εργασία της αναπαράστασης της ποσότητας του φαρμάκου στα κυκλικά διαγράμματα, τους οδήγησε να φανταστούν τη συμπεριφορά του σχήματος που προκύπτει καθώς η διαδικασία συνεχίζεται απεριόριστα. Ότι δηλαδή παίρνοντας το μισό κάθε φορά του κυκλικού τομέα που απομένει, προκύπτει συνολικά ένας κυκλικός τομέας που δεν πρόκειται να υπερβεί ολόκληρο τον κυκλικό δίσκο (εικόνα 7). Έτσι οι μαθήτριες της ομάδας 1 κατασκευάζουν την αιτιολογημένη πλέον αντίληψη ότι το άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cdots$ δεν θα ξεπερνά την τιμή 2α, όπου το α συμβολίζει ολόκληρο τον κυκλικό δίσκο.

*Παράδειγμα από ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Κοίτα, στα κυκλικά διαγράμματα, έχει μείνει στην πίτα, κάτι <u>απειροελάχιστο</u>, το οποίο το διαιρείς και συνεχίζεις και διαιρείς, ε, όλο και κάτι θα έχεις να διαιρέσεις, ….* |
| *Καθηγήτρια:* | *Γιατί πήγατε σ' αυτό το σχήμα, στο κυκλικό διάγραμμα;* |
| *Ζέτα:* | *Μας έχετε δώσει και 2 πίτες, δηλαδή είναι 100,…* |
| *Καθηγήτρια:* | *Το 100 που λες τι είναι;* |
| *Γεωργία:* | *Δυο ημερήσιες δόσεις, αφού η μια ημερήσια δόση είναι 50 και παριστάνεται από μια πίτα.* |
| *Καθηγήτρια:* | *Αν βάλω κάποια ποσότητα α mg;* |
| *Ζέτα:* | *Το ίδιο, θα είναι στην δεύτερη πίτα το μισό, και το μισό αυτού που θα μείνει και το μισό, και το μισό, …* |
| *Καθηγήτρια:* | *Και τι σημαίνει αυτό;* |
| *Ζέτα:* | *Ε, όσο λίγο και να είναι πάλι θα παίρνουμε το μισό του λίγου* |
| *Γεωργία:* | *Ελάχιστη ποσότητα, δεν θα φτάσει* |
| *Ζέτα:* | *Δεν γίνεται να ξεπεράσει το διπλάσιο της ημερήσιας δόσης,…. **(constructing)*** |

Οι φάσεις **Recognizing** και **Building with** της αφαίρεσης που έλαβε χώρα κατά την κατασκευή νοημάτων και αντιλήψεων για το άπειρο άθροισμα έγιναν παρόμοια με την περιγραφή στο επεισόδιο 1. Η φάση **Constructing** διαφοροποιείται από τις υπόλοιπες ομάδες στο σημείο που η κατασκευή νοήματος αφορά σε μια ολοκληρωμένη και δικαιολογημένη αντίληψη για το άπειρο άθροισμα, ενώ ταυτόχρονα νοηματοδοτούν και το όριο σύγκλισης της σειράς. Οι μαθήτριες της ομάδας 1 μέσα από αυτή την εργασία τους εμφανίζουν μια ευχέρεια στη μετάβαση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων και περιβαλλόντων, αναγνωρίζοντας πλέον τα πλεονεκτήματα του καθενός.

Συμπερασματικά, όλες οι ομάδες κατά την εμπλοκή τους στο μικρόκοσμο διατύπωσαν την εικασία ότι η ποσότητα του φαρμάκου, δηλαδή το άπειρο άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cdots$ δεν θα ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή και αυτή τους η αντίληψη εμφανίζεται ποιο στέρεα από αντίστοιχες ιδέες που είχαν εκφραστεί κατά την ενασχόλησή τους με τις αριθμητικές τιμές στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι, οι οποίες ήταν εύθραυστες στο περιβάλλον και στις αλληλεπιδράσεις με τους άλλους.

Μόνο η ομάδα 1 κατάφερε να δικαιολογήσει αυτή την εικασία μεταβαίνοντας από τις αναπαραστάσεις του μικρόκοσμου σε μια οπτική αναπαράσταση στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι. Οι μαθήτριες της ομάδας 1 εμφανίζονται πιο ώριμες στη διαχείριση των δεδομένων τους αλλά και των προηγούμενων εργασιών τους παίρνοντας ανατροφοδότηση από αυτές.

Οι μαθητές της ομάδας 2 δεν καταφέρνουν να δικαιολογήσουν την εικασία τους αλλά εμφανίζουν μεγαλύτερη ωριμότητα στο να χρησιμοποιούν τις διαισθήσεις τους και να τις ενσωματώνουν στα περιβάλλοντα και στις εργαλειακές δυνατότητες που έχουν στη διάθεσή τους.

Οι μαθήτριες της ομάδας 3 δεν καταφέρνουν και αυτές να αιτιολογήσουν αλλά μετά την εμπλοκή τους στο μικρόκοσμο εμφανίζουν μεγαλύτερη σιγουριά για τις αντιλήψεις τους, ενώ εμφανίζουν πρόοδο σε σχέση με την κατάλληλη χρήση των εργαλείων προκειμένου να κατασκευάσουν νοήματα.

Ο ρόλος του μικρόκοσμου στην εξέλιξη των μαθητών είναι ουσιώδης, εξαιτίας της δυνατότητας δυναμικού συντονισμού όλων των αναπαραστάσεων μέσω του κώδικα, η εκτέλεση του οποίου και η παρατήρηση των αντίστοιχων αναπαραστάσεων και της ανάπτυξής τους με τη χρήση δρομέα, δίνει ανατροφοδότηση και ευκαιρίες για διορθώσεις – βελτιώσεις και έλεγχο, μια λειτουργία που συμβάλλει ουσιαστικά στη διερεύνηση.

Οι δραστηριότητες στο τρίτο φύλλο εργασίας σε συνδυασμό με την εμπλοκή στο μικρόκοσμο, φέρνουν τους μαθητές αντιμέτωπους με την παράδοξη κατάσταση ενός αθροίσματος που δεν ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή παρόλο που προστίθενται συνεχώς όροι, με αποτέλεσμα τον εμπλουτισμό των εμπειρικών τους αντιλήψεων.

Επίσης τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων είναι ανοιχτά και αφήνουν ελεύθερους τους μαθητές να αποφασίσουν για τη χρήση των εργαλείων στο μικρόκοσμο, με αποτέλεσμα οι ομάδες να διαφοροποιούνται κάπως στον τρόπο διερεύνησης, ενώ απαιτούν συνεχώς εξηγήσεις και αιτιολογήσεις.

Το ρεαλιστικό πλαίσιο σε συνδυασμό με τις συγκρούσεις που προκαλούνται από τις αναπαραστάσεις στο μικρόκοσμο, δίνει κίνητρο για διερεύνηση ώστε οι εικασίες να σταθεροποιηθούν και να αιτιολογηθούν.

### 4.2.1.2. Η συμπεριφορά ενός άπειρου αθροίσματος στο γεωμετρικό πλαίσιο

Στα επόμενα επεισόδια περιγράφονται νοηματοδοτήσεις για τη συμπεριφορά μιας γεωμετρικής σειράς, που προκύπτει στο γεωμετρικό σκηνικό της καμπύλης του Koch, στο 2ο task, η οποία εκφράζει το εμβαδόν της καθώς η διαδικασία συνεχίζεται απεριόριστα. Έχουν προηγηθεί νοηματοδοτήσεις για τη συμπεριφορά μιας άλλης γεωμετρικής σειράς, της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, στο ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος του φαρμάκου (1ο task) κατά την εμπλοκή στο μικρόκοσμο, ενώ οι μαθητές έχουν ήδη αντιμετωπίσει αλγεβρικά το εμβαδόν της καμπύλης του Koch και έχουν εξάγει συμπεράσματα για την απεριόριστη αύξηση της περιμέτρου της μέσω αλγεβρικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων στο δυναμικό περιβάλλον του geogebra.

Τα επόμενα επεισόδια δείχνουν ένα κοινό τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος από όλες τις ομάδες οι οποίες εκφράζονται με διαφορετικό τρόπο. Όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν συνάφειες του προβλήματος του εμβαδού της καμπύλης του Koch με το πρόβλημα του φαρμάκου, εργάστηκαν στο περιβάλλον της χελωνόσφαιρας με τον ίδιο κώδικα που είχαν συμπληρώσει στην περίπτωση του προβλήματος του φαρμάκου, κάνοντας τις κατάλληλες συσχετίσεις και τελικά κατασκεύασαν νοήματα για τη σύγκλιση των γεωμετρικών σειρών.

**Επεισόδιο 1**

Οι μαθητές της ομάδας 2 διατυπώνουν από την αρχή την άποψη ότι το εμβαδόν της καμπύλης του Koch θα αυξάνεται όλο και λιγότερο, βασισμένοι στην εξέλιξη του σχήματος (όλο και μικρότερα τριγωνάκια προστίθενται), την οποία παρατηρούν στο περιβάλλον του geogebra, κάνοντας χρήση δρομέα.

*Παράδειγμα από ομάδα2*

| | |
|---|---|
| *Πρόδρομος:* | *Το εμβαδόν πιστεύω ότι θα μικραίνει; Θα είναι … Λογικά θα μηδενίζει* |
| *Κώστας:* | *Το εμβαδόν; Γιατί; …. αφού προστίθενται τριγωνάκια, προστίθενται κι άλλα, κι άλλα, κι άλλα* |
| *Πρόδρομος:* | *Υπάρχει περίπτωση να μείνει σταθερό; Γιατί δεν θα μεγαλώσει άλλο, θα είναι στο ίδιο τέτοιο, απλά θα σπάνε και θα γίνονται μικρότερα.* |
| *Καθηγήτρια:* | *Μπορείτε να βρείτε τρόπους να το δικαιολογήσετε αυτό;* |
| *Πρόδρομος:* | *Από τον τύπο του εμβαδού μήπως θέλει;* |
| *Κώστας:* | *Δεν είναι σαν αυτό που κάναμε στην αρχή, με τα α* |
| *Πρόδρομος:* | *Ποια α;* |
| *Κώστας:* | *Τα α, με το φάρμακο,…* **(recognizing)** |

Η οπτική αυτή παρατήρηση τους οδηγεί να αναγνωρίσουν συνάφεια αυτής της κατάστασης με το πρόβλημα του φαρμάκου.

**Recognizing:** Αναγνωρίζουν συνάφειες του προβλήματος της επιφάνειας της καμπύλης του Koch με το πρόβλημα του φαρμάκου, εξαιτίας της οπτικής εικόνας που παρουσιάζει το σχήμα κατά την εξέλιξή του με την προσθήκη ολοένα και μικρότερων τριγώνων, που δεν μεταβάλλουν σημαντικά την επιφάνειά του. Και στην περίπτωση του φαρμάκου η άθροιση όλο και περισσότερων όρων προκαλούσε όλο και μικρότερη αύξηση στο άθροισμα, χωρίς τελικά να προκαλούν μεταβολές.

**Building with:** Μετά από αυτή την αναγνώριση μεταβαίνουν στον τύπο του εμβαδού, $\mathrm{E}+\frac{\mathrm{E}}{3}\cdot 1+\frac{\mathrm{E}}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{\mathrm{E}}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\frac{\mathrm{E}}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}+\cdots$, που έχει προκύψει από προηγούμενη εργασία τους και αμέσως ανοίγουν το αρχείο στη χελωνόσφαιρα με το οποίο είχαν δουλέψει στην περίπτωση του φαρμάκου, κάνοντας συσχετίσεις στον ίδιο κώδικα.

*Ομάδα 2*

| | |
|---|---|
| *Κώστας:* | *Εδώ έχουμε n-2 αντί για n-1* |
| *Πρόδρομος:* | *Και το κλάσμα. Εδώ έχουμε 4/9 ενώ στο φάρμακο ουσιαστικά ½* |
| *Κώστας:* | *Το α που έχει εδώ; Α! είναι το Ε* |
| *Πρόδρομος:* | *Όχι το Ε, το Ε/3, εδώ όμως έχει και ένα Ε μπροστά. Εδώ δείχνει τον κώδικα το ½ να το κάνουμε 4/9; Κάτσε το α είναι το Ε/3, άρα άστο αυτό θα το λέμε α, μετά θα πάει 4/9 … Το i -2, …* |
| *Κώστας:* | *n-2* |
| *Πρόδρομος:* | *Να το κάνουμε i+1;* |
| *Κώστας:* | *Μικρότερο του n, δηλαδή μέχρι n-1, άρα τώρα που θέλουμε να φτάνει μέχρι n-2, θα το βάλουμε μικρότερο του n – 1* |

Συσχετίζοντας τους δύο τύπους, κάνουν παραδοχές. Για παράδειγμα, αποφασίζουν η μεταβλητή α της ποσότητας του φαρμάκου να παριστάνει το $\frac{\mathrm{E}}{3}$, ενώ δεν αναπαριστούν καθόλου το πρώτο όρο του τύπου του εμβαδού. Εστιάζουν στην αντικατάσταση των δυνάμεων $\left(\frac{1}{2}\right)^i$ με τις δυνάμεις $\left(\frac{4}{9}\right)^i$ και στην τελική τιμή της μεταβλητής i (εικόνα 19).


*Ο κώδικας που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου* *Ο κώδικας γιαι το εμβαδόν της καμπύλης του Koch*

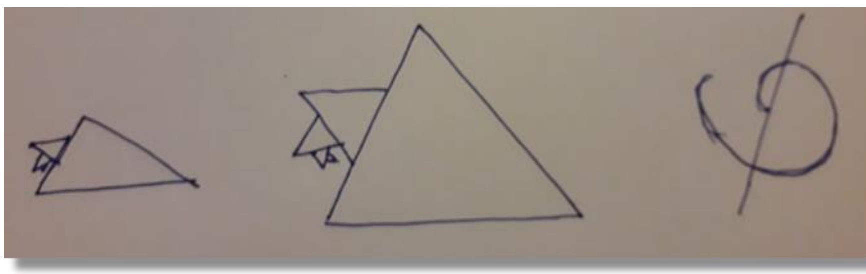
*Εικόνα 19: Τροποποιήσεις του κώδικα για την ποσότητα του φαρμάκου ώστε να εκφράζει το εμβαδό της καμπύλης του Koch*

**Constructing:** Η εκτέλεση του κώδικα οδηγεί στην επιβεβαίωση της αρχική τους άποψης. Έτσι κατασκευάζουν πάλι συμπέρασμα για τη συμπεριφορά ενός ακόμη άπειρου αθροίσματος, το οποίο δεν θα ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή.

*Ομάδα 2*

| | |
|---|---|
| *Κώστας:* | *Άρα το εμβαδόν αυξάνεται λίγο, λίγο* |
| *Πρόδρομος:* | *Ελάχιστα* |
| *Κώστας:* | *Απειροελάχιστα* |
| *Πρόδρομος:* | *Ε, εντάξει και εδώ δεν θα ξεπερνά το…Ε, ναι αν έχω διαφορετικά νούμερα δεν θα ξεπερνά και άλλη τιμή* |

Μετά από απαίτηση για δικαιολόγηση αυτού του συμπεράσματος μέσω του σχήματος, προσπαθούν να φανταστούν την εξέλιξή του σχεδιάζοντας στο χαρτί τα σχήματα της εικόνας 20.



*Εικόνα 20: Σχήματα που έχουν σχεδιάσει οι μαθητές της ομάδας 2 στην προσπάθειά τους να δώσουν μια γεωμετρική αιτιολόγηση για το πεπερασμένο εμβαδό της καμπύλης του Koch*

Τα σχέδια αυτά τους οδηγούν στην ιδέα ενός κύκλου.

*Παράδειγμα από ομάδα 2*

| | |
|---|---|
| *Κώστας:* | *Κυρία είναι εδώ τα τρίγωνα, αν κάνει έτσι κι έτσι κι έτσι, δεν θα ξαναγυρίσει πάνω εδώ.* |
| *Καθηγήτρια:* | *Τι εννοείς;* |
| *Κώστας:* | *Είναι αυτό εδώ έτσι, κι έτσι, κι έτσι, κάνει κύκλους* |
| *Πρόδρομος:* | *Μπορεί να σχηματιστεί κύκλος; Η περίμετρος του … αλλά όχι, …. καμπύλη θα είναι … Από ένα σημείο και μετά θα ακουμπήσει … δεν θα υπάρχει χώρος να ανοίξει άλλο, …. Όπως το έκανε ο Κώστας …* |
| *Καθηγήτρια:* | *Τι εννοείς κύκλους; Που;* |
| *Πρόδρομος:* | *Η περίμετρος του … αλλά όχι, …. καμπύλη θα είναι … Από ένα σημείο και μετά θα ακουμπήσει … δεν θα υπάρχει χώρος να ανοίξει άλλο, …. Όπως το έκανε ο Κώστας …* |
| *Κώστας:* | *Κάτσε να κάνω ένα κύκλο.* |

Αποφασίζουν με τα εργαλεία του geogebra να σχεδιάσουν τον περιγεγραμμένο κύκλο της καμπύλης του Koch, που τους οδηγεί στην αιτιολόγηση ότι το εμβαδόν της καμπύλης του Koch δεν πρέπει να υπερβεί το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου της. Έτσι οι μαθητές της ομάδας 2 κατασκεύασαν ολοκληρωμένα και αιτιολογημένα νοήματα για τη συμπεριφορά άλλης μιας σειράς της $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}$.

**Επεισόδιο 2**

Οι μαθήτριες της ομάδας 3, από την αρχή ανατρέχουν στον τύπο του εμβαδού και διατυπώνουν την άποψη ότι το εμβαδόν θα αυξάνεται ολοένα και λιγότερο εστιάζοντας στη βάση $\frac{4}{9}$ των δυνάμεων που εμφανίζονται στον τύπο, η οποία είναι μικρότερη της μονάδας.

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Και το εμβαδόν θα αυξάνεται.* |
| *Κων/να:* | *Ναι θα αυξάνεται, αλλά κάποια στιγμή αυτό το κλάσμα,… όχι βλακεία πήγα να πω … αλλά αυτό το κλάσμα έχει μεγαλύτερο παρονομαστή από αριθμητή, … δεν γίνεται όμως να ανοίγει το σχήμα και να μην μεγαλώνει το εμβαδόν , αλλά όχι όπως μεγαλώνει η περίμετρος* |
| *Νανά:* | *Το εμβαδόν μπορεί να μεγαλώνει, μπορεί όμως,…. Όχι δεν μπορεί να μένει σταθερό εντάξει …* |
| *Κων/να:* | *Βέβαια, το εμβαδόν κάθε φορά αυξάνεται, αλλά αυξάνεται όλο και λιγότερο,…* |
| *Νανά:* | *Άρα, μήπως φτάσει σε ένα σταθερό εμβαδόν στο τέλος;* |
| *Κων/να:* | *Δεν ξέρω… Απλά είναι σαν αυτό που κάναμε με το φάρμακο, που αυξάνεται όλο και λιγότερο, και μετά από ένα σημείο αυξάνεται πολύ λίγο και δεν ξεπερνά μια ποσότητα, οπότε εδώ υπάρχει κάποιο εμβαδόν, που φτάνει, …. που είναι το μέγιστο, … κοίτα κάθε φορά προσθέτουμε τα 4/9 του Ε/3, …* **(recognizing)** |
| *Κων/να:* | *Στο φάρμακο προσθέταμε κάθε φορά όλο και λιγότερο, το μισό του μισού του μισού κτλ. Και τελικά, έφτασε κάπου και δεν μπορούσε μετά να πάει παραπάνω.* **(building with)** |
| *Νανά:* | *Εδώ τα 4/9 του Ε/3 και μετά τα* $(4/9)^2$ *του Ε/3 και μετά τα* $(4/9)^3$ *του Ε/3, για σκέψου 4/9 του 4/9 του Ε/3, δηλ πιο μικρό, άρα μικραίνει κάθε φορά αυτό που προσθέτουμε.* **(building with)** |
| Εκφράζουν έτσι την ανάγκη αναπαράστασης του εμβαδού με κάποιο τρόπο που θα τους δώσει τη δυνατότητα να αποφασίσουν αν τελικά το εμβαδόν θα γίνεται «σταθερό». | |

| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Δεν πάμε στη χελωνόσφαιρα, να το κάνουμε με τη σκάλα; Μόνο αυτό δεν κοιτάξαμε.* |

**Recognizing:** Παρατηρώντας τον αλγεβρικό τύπο του εμβαδού και ερμηνεύοντας τους όρους του αθροίσματος, όπου κάθε όρος του είναι μικρότερος από τον προηγούμενο, αναγνωρίζουν ομοιότητες με το πρόβλημα του φαρμάκου.

**Building with:** Και ενώ έχουν αναγνωρίσει ομοιότητες με το πρόβλημα του φαρμάκου, εμφανίζουν μια αβεβαιότητα εξαιτίας της παράδοξης και αντίθετης στη διαίσθησή τους κατάστασης ενός σχήματος στο οποίο άπειρη περίμετρος περικλείει πεπερασμένο εμβαδόν. Αποφασίζουν να κάνουν τη μελέτη τους στο μικρόκοσμο, λόγω της δυνατότητας τροποποίησης της συμβολικής έκφρασής του αθροίσματος με ταυτόχρονη επίδραση στις άλλες αναπαραστάσεις που προσφέρει, προκειμένου να βεβαιωθούν για τον παρόμοιο τρόπο συμπεριφοράς της ποσότητας του φαρμάκου και του εμβαδού της καμπύλης του Koch. Κάνουν τις συσχετίσεις των δύο προβλημάτων, συγκεκριμένα των δύο τύπων, του εμβαδού και της ποσότητας του φαρμάκου με σκοπό να τροποποιήσουν τον κώδικα. Εργάζονται παρόμοια με τη ομάδα 2 και κάνουν τις παραδοχές που έχουν περιγραφεί και στο επεισόδιο 1 (εικόνα 17).

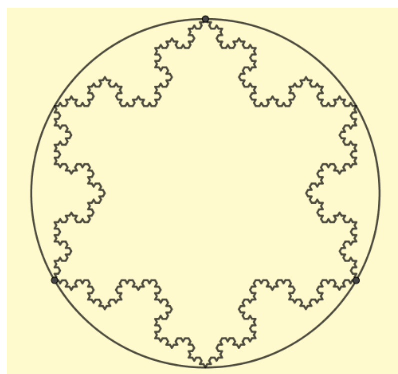
**Constructing:** Τελικά συμπληρώνουν και εκτελούν τον κώδικα. Η εκτέλεση του κώδικα με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις που παράγει και κυρίως την οπτική, τους επιβεβαιώνει την άποψη που είχαν διατυπώσει για τη συμπεριφορά του εμβαδού, το οποίο δεν θα ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή, όπως συνέβαινε και με την ποσότητα του φαρμάκου. Οι συσχετίσεις που έχουν γίνει στο προηγούμενο στάδιο φανερώνουν ότι οι μαθήτριες έχουν αντιληφθεί ότι η ολοένα και μικρότερη αύξηση των δύο αθροισμάτων οφείλεται στις δυνάμεις $\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$ και $\left(\frac{4}{9}\right)^{i}$ οι οποίες είναι μικρότερες της μονάδας. Έτσι κατασκευάζουν νοήματα για τη συμπεριφορά των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty}\theta^{n}$, $0<\theta<1$, χωρίς να εκφράζονται με αυτό το φορμαλισμό.

Επιπλέον στην προσπάθειά τους να αιτιολογήσουν γεωμετρικά αυτό το συμπέρασμα, η Κων/να υποστηρίζει ότι καθώς προχωράει η διαδικασία το σχήμα θα εκφυλιστεί σε κύκλο ή σε κάποιο καμπυλόγραμμο σχήμα. Η επιφυλακτικότητα της συμμαθήτριάς της, τις οδηγεί στην απόφαση να οπτικοποιήσουν αυτή την εικασία της Κων/νας μέσω των εργαλείων του geogebra και να κατασκευάσουν ένα τέτοιο κύκλο, ώστε να μπορέσουν να ελέγξουν την αλήθεια της. Υλοποιούν την κατασκευή σχεδιάζοντας τον περιγεγραμμένο κύκλο του αρχικού τριγώνου (εικόνα 21).

*Παράδειγμα από ομάδα 3*

| | |
|---|---|
| *Κων/να:* | *Εγώ συνεχίζω να πιστεύω ότι θα γίνει κύκλος αν αυτό συνεχιστεί και θα έχει κέντρο το κέντρο του τριγώνου* |

| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Εγώ λέω κέντρο το κέντρο αυτού του τριγώνου (πάει το δρομέα στη θέση n=1) και βάζει τον κέρσορα στο κέντρο του αρχικού τριγώνου* |
| *Κων/να:* | *Το ίδιο πράγμα δεν είναι, αφού όλα τα σχήματα το ίδιο κέντρο θα έχουν αφού όλα γίνονται στο ίδιο σημείο. Όταν θα γίνει κύκλος …. Αν γίνει κύκλος, μετά δεν μπορούμε να χωρίσουμε τις πλευρές διά 3, , άρα δεν μπορούμε να συνεχίζουμε τη διαδικασία άπειρες φορές.* |
| *Νανά:* | *Για φτιάξε τον κύκλο που λες με το geogebra, για να δούμε..* |
| | *…..* |
| *Νανά:* | *Κοίτα, όσο κι αν συνεχιστεί η διαδικασία δεν νομίζω το εμβαδόν που θα έχουμε σε κάθε σχήμα δεν θα ξεπεράσει ποτέ τον κύκλο.* |
| *Κων/να:* | *Δεν θα τον φτάσει, έτσι φαίνεται τελικά. Το εμβαδόν κύκλου δίνεται από τον τύπο $\pi\rho^2$. Άρα το εμβαδόν θα αυξάνεται όλο και πιο λίγο αλλά δεν θα φτάσει ποτέ στον κύκλο, άρα όπως και το φάρμακο δεν θα ξεπεράσει ποτέ αυτό το εμβαδόν.* |



*Εικόνα 21: Αιτιολόγηση του πεπερασμένου εμβαδού της καμπύλης του Koch*

Αντιλαμβάνονται ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, είναι και περιγεγραμμένος στην καμπύλη του Koch, όπως κι αν εξελιχθεί συνεχίζοντας τη διαδικασία, οπότε οδηγούνται κατ' ευθείαν στο συμπέρασμα ότι η επιφάνεια της δεν θα υπερβεί την επιφάνεια του κύκλου του οποίου το εμβαδόν είναι πεπερασμένο.

Έτσι όπως και τις υπόλοιπες ομάδες, η γεωμετρική αυτή κατασκευή τις οδηγεί στην κατασκευή ενός ολοκληρωμένου και αιτιολογημένου συμπεράσματος για τη συμπεριφορά του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}$.

Και τα δύο ψηφιακά περιβάλλοντα συμβάλλουν στην κατασκευή του παραπάνω νοήματος. Από τη μια η χρήση δρομέα στο geogebra προκαλεί τη δυναμική εξέλιξη του σχήματος μέσω της οποίας προκύπτει η αναγνώριση της συνάφειας με το πρόβλημα του φαρμάκου. Από την άλλη στο μικρόκοσμο η δυνατότητα για διόρθωση των εντολών του κώδικα, ώστε να αναπαριστά το άθροισμα που περιγράφει το εμβαδόν της καμπύλης του Koch, οδηγεί στην κατασκευή εικασίας για τη συμπεριφορά του καθώς η διαδικασία συνεχίζεται.

Οι δραστηριότητες στο πέμπτο φύλλο εργασίας καθοδηγούν άμεσα ή έμμεσα για την αναπαράσταση του αθροίσματος που περιγράφει το εμβαδόν στο μικρόκοσμο. Η απαίτηση για τη μελέτη της περιμέτρου πριν το εμβαδόν, προκαλεί σύγκρουση εξαιτίας της παράδοξης κατάστασης ενός σχήματος άπειρης περιμέτρου που περικλείει πεπερασμένο εμβαδόν. Αυτή η σύγκρουση προκάλεσε στην ομάδα 3 την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση του εμβαδού στο μικρόκοσμο λόγω της συνάφειας των δύο αλγεβρικών αναπαραστάσεων. Η απαίτηση για δικαιολόγηση μέσω του σχήματος προκάλεσε την κατασκευή ολοκληρωμένων και αιτιολογημένων νοημάτων για τις γεωμετρικές σειρές που εκφράζουν τα δύο προβλήματα. Ακόμα και η σειρά με την οποία τέθηκαν τα δύο tasks έπαιξε καθοριστικό ρόλο σ' αυτές τις νοηματοδοτήσεις.

#### 4.2.1.3. Παγίωση νοηματοδοτήσεων της συμπεριφορά άπειρων αθροισμάτων (consolidating)

Αρχικά οι μαθητές στο ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος του φαρμάκου ολοκλήρωσαν μια αφαιρετική διαδικασία νοηματοδότησης της συμπεριφοράς του αθροίσματος $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ καθώς το n αυξάνεται συνεχώς, ενώ κάνουν χρήση διαφόρων περιβαλλόντων, κλασσικών (χαρτί – μολύβι) αλλά και ψηφιακών (μικρόκοσμος). Έτσι κατασκεύασαν άτυπα νοήματα για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ και τη σύγκλισή της διατυπώνοντας την αντίληψη ότι το άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ δεν θα ξεπερνά την τιμή 2α, καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα και αιτιολογώντας την (μόνο η ομάδα 1).

**Consolidating:** Στη συνέχεια εργαζόμενοι σ' ένα διαφορετικό πλαίσιο, αυτή τη φορά γεωμετρικό και κάνοντας χρήση ενός διαφορετικού ψηφιακού περιβάλλοντος (geogebra) καταφέρνουν να μεταφέρουν τα συμπεράσματά τους και τις νοηματοδοτήσεις τους, στη μελέτη ενός άλλου άπειρου αθροίσματος του $E+\frac{E}{3}\cdot 1+\frac{E}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{E}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\frac{E}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}+\cdots$. Επιτυγχάνουν συσχετίσεις των δύο προβλημάτων και την αναγνώριση των στοιχείων που προκαλούν τη συνάφειά τους. Μάλιστα μεταφέρουν τη μελέτη αυτού του αθροίσματος, στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στο οποίο μελετήθηκε το διαφορετικής φύσης πρόβλημα του φαρμάκου, τροποποιώντας τον κώδικα ώστε να εκφράζει το εμβαδόν της καμπύλης του Koch.

Αναγνωρίζοντας τα στοιχεία που κάνουν τα δύο αθροίσματα να συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο (να συγκλίνουν), επιτυγχάνουν να παγιώσουν τα νοήματα που έχουν κατασκευάσει για τέτοιου είδους άπειρα αθροίσματα και να αποκτήσουν στέρεες νοηματοδοτήσεις για τη σύγκλιση σειρών της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}\theta^n$, $0<\theta<1$, χωρίς φυσικά να διατυπώνουν ρητά τέτοιου είδους φορμαλιστικές γενικεύσεις. Την πιο επιτυχημένη προσέγγιση στην παραπάνω γενίκευση κάνει η ομάδα 3 αποδίδοντας την ολοένα και μικρότερη αύξηση του αθροίσματος στο ότι ο αριθμητής των δυνάμεων είναι μικρότερος του παρονομαστή.

### 4.2.2. Όριο ακολουθίας

Η διδασκαλία της έννοιας του ορίου δεν ξεκινά σε παρθένο έδαφος. Οι μαθητές έχουν ένα πλήθος ιδεών και διαισθήσεων οι οποίες προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία ενώ έρευνες δείχνουν ότι αυτές οι αντιλήψεις μπορεί να παραμένουν και σε προχωρημένα στάδια μάθησης. Για παράδειγμα οι λέξεις «τείνει στο» ή «όριο» έχουν διάφορες σημασίες, όπως και οι εκφράσεις «προσεγγίζει», «προσεγγίζει χωρίς να το φτάνει», «προσεγγίζει φτάνοντάς το», «ένα μέγιστο ή ελάχιστο», οι οποίες διαφέρουν από άτομο σε άτομο και εξαρτώνται κάθε φορά από την κατάσταση.  Το όριο μιας ακολουθίας, ακόμα και για μαθητές οι οποίοι έχουν εμπλακεί με το φορμαλισμό, μπορεί να σημαίνει ότι οι τελικοί όροι θα έχουν την ίδια τιμή ή ότι οι τιμές τους δεν ξεπερνούν ένα αριθμό. Παρόμοιες αυθόρμητες και διαισθητικές αντιλήψεις για το όριο ακολουθίας εγείρονται καθώς οι μαθητές, που δεν είναι γνώστες του τυπικού ορισμού, εμπλέκονται με τις δραστηριότητες της συγκεκριμένης παρέμβασης.

#### 4.2.2.1. Το όριο ακολουθίας ως άνω φράγμα μέσω αριθμητικών υπολογισμών και οπτικοποίησης στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι, στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Το επόμενο επεισόδιο λαμβάνει χώρα στην αρχή της παρέμβασης, στο 1$^{ο}$ task (πρόβλημα του φαρμάκου) κατά την εμπλοκή στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι. Συγκεκριμένα στο επεισόδιο αυτό φαίνονται νοηματοδοτήσεις για το όριο μιας ακολουθίας, ως το ελάχιστο άνω φράγμα, μέσω των αριθμητικών αναπαραστάσεων της ποσότητας του φαρμάκου στο πρώτο φύλλο εργασίας και μέσω της οπτικής αναπαράστασης του ραβδογράμματος στο δεύτερο φύλλο εργασίας.

Πρόκειται για ένα αντιπροσωπευτικό επεισόδιο νοηματοδότησης του ορίου ακολουθίας ως το ελάχιστο άνω φράγμα από όλες τις ομάδες κατά την εμπλοκή τους στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι στο ρεαλιστικό πλαίσιο του φαρμάκου.

**Επεισόδιο 1**

Οι μαθητές έχουν έως τώρα εκφράσει τη διαισθητική αντίληψη ότι η ποσότητα του φαρμάκου θα αυξάνεται συνεχώς καθώς η διαδικασία συνεχίζεται απεριόριστα. Μετά την εργασία τους με τις αριθμητικές τιμές και το ραβδόγραμμα στο πρώτο και το δεύτερο φύλλο εργασίας αρχίζουν να αμφισβητούν αυτή τη διαίσθηση, εκφράζοντας την άποψη ότι η ποσότητα του φαρμάκου δεν θα ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή. Παρόλο που αυτές οι ιδέες στη φάση αυτή δεν λογίζονται ως κατασκευές, όπως έχει προαναφερθεί, εντούτοις υποκρύπτουν αντιλήψεις για το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων ως άνω φράγμα.

*Παράδειγμα από ομάδα 1 κατά την εμπλοκή με αριθμητικές τιμές*

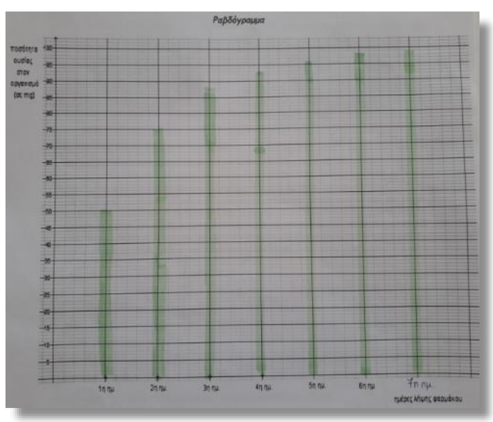
| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Να σου πω κάτι, μπορεί και να μην το ξεπερνάει, για κάνε το άλλη μια.* |
| *Γεωργία:* | *Κοίτα άμα το παίρνει για όλη του τη ζωή θα το ξεπεράσει κάποτε. Αλλά έχουμε φτάσει στις πόσες μέρες;* |
| *Ζέτα:* | *Τελικά μάλλον δεν το ξεπερνάει* (Απευθύνεται στην καθηγήτρια) |

| | |
|---|---|
| *Καθηγήτρια:* | *Πως το καταλάβατε;* |
| *Ζέτα:* | *Με δοκιμές. Συνεχίσαμε με διαδοχικές προσθέσεις και όλα αυτά είναι 99 κόμμα κάτι .* |
| *Καθηγήτρια:* | *Πόσες φορές, δηλαδή σε ποια μέρα φτάσατε;* |
| *Γεωργία:* | *Πρέπει να είμαστε στη 15$^{η}$. Δεν ξεπερνάει το 100* |
| *Καθηγήτρια:* | *Ε, εντάξει, μόνο 15, εγώ ας πούμε ένα φάρμακο το παίρνω χρόνια.* |
| *Γεωργία:* | *Αλλά το συνεχίζουμε και …..* |

*Παράδειγμα από ομάδα 1 κατά την εμπλοκή με το ραβδόγραμμα*

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Εδώ πέρα, άμα μετά, γίνει φθίνουσα μετά, που δεν νομίζω, δεν θα τα περάσει ποτέ τα 120. Αύξουσα όμως είναι* |
| *Γεωργία:* | *Αλλά μετά ελαττώνεται, όχι ελαττώνεται, αλλά, …. Δηλαδή εδώ πέρα πάει πολύ απότομα, ενώ εδώ πάει λίγο, λίγο λίγο δηλαδή εδώ πέρα είναι ευθεία* |
| *Ζέτα:* | *Η κοινή λογική είναι ότι όσο παίρνεις παραπάνω κάποια στιγμή θα ξεπεραστεί το **όριο**. Αλλά εμείς απ' ότι βλέπουμε, λέμε ότι δεν θα το ξεπεράσει* |

Ουσιαστικά υπολογίζοντας κάποιους από τους πρώτους όρους της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{2^{n-1}}$ ή παριστάνοντάς τους με τη μορφή ράβδων στο ραβδόγραμμα (εικόνα 22), προκύπτουν αντιλήψεις για το όριό της, ως άνω φράγμα και μάλιστα το ελάχιστο άνω φράγμα, αφού εκφράζουν την αντίληψη ότι η ποσότητα του φαρμάκου δεν ξεπερνά τα 100 mg (με ημερήσια δόση 50 mg) παρόλο που το ερώτημα αφορούσε στο αν η ποσότητα του φαρμάκου θα ξεπεράσει τα 120 mg.




*Εικόνα 22: Ραβδόγραμμα για την ποσότητα του φαρμάκου*

Στο στατικό περιβάλλον εργασίας (χαρτί – μολύβι) οφείλονται οι στατικές αντιλήψεις για το όριο ακολουθίας ως άνω φράγμα ή ως ελάχιστο άνω φράγμα.

### 4.2.2.2. Το όριο ακολουθίας ως άνω φράγμα ή τιμή την οποία προσεγγίζουν οι όροι της και τελικά ταυτίζονται, στα ψηφιακά περιβάλλοντα

Τα επόμενα επεισόδια δείχνουν κάποιες περιπτώσεις όπου οι μαθητές σχηματίζουν αντιλήψεις για την έννοια του ορίου ακολουθίας. Οι αντιλήψεις αυτές δεν είναι σαφείς και οι τρόποι έκφρασής τους δηλώνουν σύγχυση. Η εμπλοκή των μαθητών με τα ψηφιακά περιβάλλοντα φαίνεται να προκαλεί κατά κύριο λόγο νοηματοδοτήσεις για το όριο ακολουθίας οι οποίες είναι κοντά στο ορισμό του ορίου κατά Cauchy[6]. Η έννοια του ορίου ως μια τιμή την οποία οι όροι της ακολουθίας «προσεγγίζουν», «πλησιάζουν συνεχώς», είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος νοηματοδότησης, ενώ οι μαθητές αμφιταλαντεύονται για την τελική ταύτιση των όρων με αυτή την τιμή, με τις δύο αυτές οπτικές να εναλλάσσονται στις εκφράσεις τους.

Τα επόμενα επεισόδια στα οποία περιγράφονται τέτοιες νοηματοδοτήσεις για το όριο ακολουθίας λαμβάνουν χώρα στο 1ο task κατά τη διερεύνηση της ποσότητας του φαρμάκου στο μικρόκοσμο αλλά και στο 2ο task κατά τη διερεύνηση της περιμέτρου της καμπύλης του Koch στο geogebra

Στο επεισόδιο 1 περιγράφεται μια μεμονωμένη περίπτωση νοηματοδότησης του ορίου μιας ακολουθίας μέσω μιας πιο τυπικής προσέγγισης, ενώ τα επεισόδια 2 και 3 αποτελούν τα πιο κοινά περιστατικά νοηματοδότησης του ορίου.

**Επεισόδιο 1**

Οι μαθήτριες της ομάδας 1, κατά την εμπλοκή τους στο μικρόκοσμο και την αναπαράσταση του προβλήματος του φαρμάκου, συζητούν για τη συμπεριφορά των όρων $\frac{1}{2^{n-1}}$, καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα. Έτσι διατυπώνουν την άποψη ότι τελικά οι όροι $\frac{1}{2^{n-1}}$ θα γίνουν μηδέν, καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα, η οποία ενισχύεται από την οπτική τους αναπαράσταση, ως ύψος του n-στού σκαλιού και το γεγονός ότι η σκάλα μοιάζει τελικά σαν ευθεία.

*Ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Ζέτα*: | *Α! ιδέα, άκου ο παρονομαστής όλο και μεγαλώνει, άρα όσο μεγαλώνει ο παρονομαστής, τόσο μικραίνει το κλάσμα, αν ο παρονομαστής μεγαλώσει πάρα πολύ ας πούμε <u>σαν να γίνει</u> $+\infty$, θα γίνει 0 αυτό που θα προσθέτουμε κάθε φορά, γιατί $1/+\infty$, <u>ας πούμε</u> κάνει 0, θα αρχίσει* |

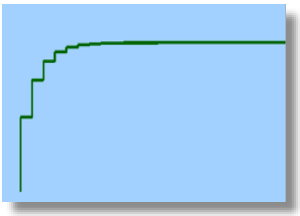
[6] Ορισμός του ορίου ακολουθίας κατά Cauchy: Όταν διαδοχικές τιμές που παίρνει μια μεταβλητή προσεγγίζουν απεριόριστα μια συγκεκριμένη τιμή έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτήν λιγότερο από όσο επιθυμεί κανείς, η τελευταία αυτή τιμή καλείται όριο όλων των άλλων.

| | |
|---|---|
| | *να παίρνει από μια φάση και μετά 0,0,0,..άρα δεν θα συνεχίζει να μεγαλώνει* |
| *Γεωργία*: | *Δεν θα γίνει επιβλαβές, γιατί θα συνεχίσει να …, θα μείνει στα ίδια, γιατί εδώ πέρα* (δείχνει στη χελωνόσφαιρα) *βλέπουμε ότι στην αρχή έχει μεγάλη διαφορά ενώ όσο πάει, θα ..γίνεται … σαν ευθεία είναι.* |

**Recognizing:** Αρχικά οι μαθήτριες αναγνωρίζουν το ρόλο των όρων $\frac{1}{2^{n-1}}$ στο άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cdots$ και αποφασίζουν να μελετήσουν τη συμπεριφορά της ακολουθίας $\frac{1}{2^{n-1}}$

**Building with:** Με βάση τις πράξεις που εμφανίζονται στον τύπο αυτής της ακολουθίας, προσπαθούν να συσχετίσουν τη συμπεριφορά της μεταβλητής n στο άπειρο, με τη συμπεριφορά των αντίστοιχων όρων της ακολουθίας, «*καθώς ο παρονομαστής μεγαλώνει πολύ, γίνεται* $\infty$*, τα κλάσματα 1/*$\infty$*, θα γίνονται 0*».

**Constructing:** Νοηματοδοτούν έτσι το όριο της ακολουθίας ως μια τιμή, την οποία οι όροι της πλησιάζουν και τελικά ταυτίζονται με αυτήν, μέσω μιας πιο τυπικής προσέγγισης που βασίζεται στη νοηματοδότηση του απείρου ως αντικείμενο. Ταυτόχρονα για την επιβεβαίωση αυτής της κατασκευής καταφεύγουν στην οπτική αναπαράσταση της σκάλας, η οποία φαίνεται να εξελίσσεται σε ευθεία, επικυρώνοντας την τελική ταύτιση των όρων της ακολουθίας με το μηδέν, μέσω των μεταβολών στο ύψος της σκάλας, οι οποίες γίνονται μηδενικές (εικόνα 23).



*Εικόνα 23: Οπτική αναπαράσταση της ποσότητας του φαρμάκου στο μικρόκοσμο*

**Επεισόδιο 2**

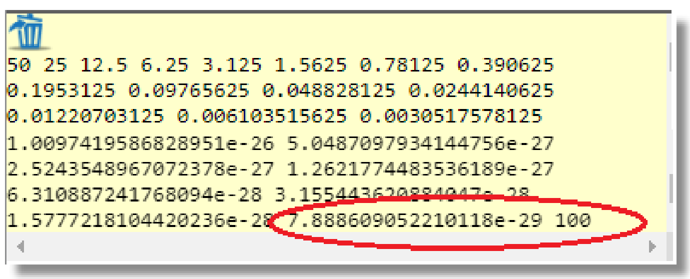
Το επεισόδιο αυτό αντιπροσωπεύει ένα κοινό τρόπο νοηματοδότησης για το όριο ακολουθίας ως μια τιμή που οι όροι της την προσεγγίζουν όλο και πιο πολύ χωρίς να την «φτάνουν», που αναδύεται κατά την εμπλοκή στο μικρόκοσμο για το πρόβλημα του φαρμάκου. Ο διάλογος που παρουσιάζεται παρακάτω αφορά στη συζήτηση των μαθητριών της ομάδας 1. Παρόλο που στο προηγούμενο επεισόδιο οι ίδιες μαθήτριες, υιοθετώντας μια τυπική προσέγγιση, είχαν εκφράσει αντιλήψεις για το όριο ακολουθίας ως μια τιμή που οι όροι της την προσεγγίζουν και τελικά ταυτίζονται με αυτήν, τώρα κάνοντας χρήση του δυναμικού χειρισμού των αναπαραστάσεων μέσω δρομέα, αυτή τη φορά και των αριθμητικών και παρατηρώντας την ανάπτυξή τους στο περιβάλλον της χελωνόσφαιρας, εκφράζουν νέες συγκεχυμένες αντιλήψεις για το αν οι όροι της ακολουθίας προσεγγίζοντας όλο και πιο πολύ το όριο, το «φτάνουν» ή όχι.

*Παράδειγμα από ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Γεωργία:* | *Είναι στο τσακ… Α! εδώ είναι επιβλαβές, γιατί κοίτα ..* |
| *Ζέτα:* | *Στα 120 γίνεται επιβλαβές* (Στριφογυρίζουν το σχήμα στο χώρο) *Βασικά, 110, 120, πάλι τείνει στο 120, κατάλαβες; έχει φτάσει ίσα ίσα στο 120* |
| *Γεωργία:* | *Είναι πολύ κοντά, αλλά δεν είναι, κατάλαβες; Αν τα προσθέσεις όλα αυτά δεν σου βγάζει πάνω από 120* (κοιτάει τα νούμερα). *Δεν φτάνει τα 120* |
| *Ζέτα:* | *Είναι…, εδώ είναι 120, κι όλο πάει στο 120* |
| *Γεωργία:* | *Φτάνει, αλλά δεν είναι …* |
| *Ζέτα:* | *Όχι είναι, ..* |
| *Γεωργία:* | *Δεν φτάνει, άμα τα προσθέσεις όλα αυτά δεν σου βγάζει πάνω από 120* |

**Recognizing:** Αρχικά, αναγνωρίζουν στις αναπαραστάσεις του μικρόκοσμου (οπτικές και αριθμητικές) έναν τρόπο για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την ποσότητα του φαρμάκου, δηλαδή τη συμπεριφορά της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{2^{n-1}}$

**Building with:** Στη συνέχεια χειρίζονται με τη χρήση δρομέων αυτές τις αναπαραστάσεις, για διάφορες τιμές των μεταβλητών και παρατηρούν το ύψος της σκάλας (εικόνα 23), αλλά και την εξέλιξη των αριθμητικών τιμών (εικόνα 24).


50 25 12.5 6.25 3.125 1.5625 0.78125 0.390625
0.1953125 0.09765625 0.048828125 0.0244140625
0.01220703125 0.006103515625 0.0030517578125
1.0097419586828951e-26 5.048709793414756e-27
2.524354896707378e-27 1.262177448353689e-27
6.310887241768094e-28 3.155443620884047e-28
1.5777218104420236e-28 7.888609052210118e-29 100

*Εικόνα 24: Αριθμητική αναπαράσταση της ποσότητας του φαρμάκου στο μικρόκοσμο*

**Constructing:** Κατασκευάζουν μια αντίληψη για το όριο παρόμοια με αυτή του Cauchy, ως μια τιμή που οι όροι της ακολουθίας την πλησιάζουν συνεχώς, ενώ παρατηρείται σύγχυση για το αν οι όροι επιτυγχάνουν αυτή την τιμή, η οποία διακρίνεται στη χρήση εκφράσεων: *«είναι στο τσακ», «δεν φτάνει», «φτάνει ίσα – ίσα το 120», «τείνει στο 120», «είναι κοντά στο 120», «όλο πάει στο 120», «οριακά στο 120», «δυσκολεύεται να φτάσει το 120».*

**Επεισόδιο 3**

Στο επεισόδιο αυτό αναγνωρίζεται ένας κοινός τρόπος με τον οποίο προκύπτουν νοηματοδοτήσεις για το όριο ακολουθίας αντιμετωπίζοντας τα δύο προβλήματα, στο μικρόκοσμο (όσον αφορά στο πρόβλημα του φαρμάκου) και στο geogebra (όσον αφορά στο πρόβλημα της καμπύλης του Koch). Είναι οι πιο συνηθισμένες νοηματοδοτήσεις που εμφανίστηκαν με τη διαφορά ότι οι ομάδα 3 συλλαμβάνει με μεγαλύτερη σιγουριά το όριο ακολουθίας ως μια τιμή την οποία οι όροι της πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο και τελικά ταυτίζονται μ' αυτήν.

*Παράδειγμα από ομάδα 3 (για την ποσότητα του φαρμάκου στο μικρόκοσμο και για το μήκος των πλευρών της καμπύλης του Koch)*

| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Ναι αφού όσες περισσότερες μέρες βάλουμε θα καταλήξουμε σε μια ευθεία* |
| *Κων/να:* | *Μήπως πρέπει να δούμε αν το σημείο όπου γίνεται ευθεία δεν είναι το 120; Μέσα σε 100 μέρες θα γίνει ευθεία. Και στις πρώτες 6, θα έχει γίνει περίπου 100.* |
| *Νανά:* | *Ωραία, μετά από κάποια μέρα, ποια μέρα όμως δεν ξέρουμε ποια μέρα, μετά από κάποια μέρα, παραμένει στάσιμη η γραφική παράσταση* |
| Ακολουθούν πειραματισμοί ……… | |
| *Νανά:* | *Κάθε φορά ανεβαίνει* |
| *Κων/να:* | *Ανεβαίνει ελάχιστα* |
| *Νανά:* | *Ναι, τώρα το βλέπουμε κι από το πλάι βασικά…* |
| *Κων/να:* | *Δεν βάζουμε κι άλλες μέρες;* |
| *Νανά:* | *Τώρα φαίνεται σαν να μην ανεβαίνει καθόλου. Κατεβαίνω κάτω, να δούμε (εννοεί στο πεδίο των αριθμητικών τιμών)* |
| *Κων/να:* | *Κοίτα την τελευταία τιμή που έχει βγάλει* |
| *Νανά:* | *Πω, πω, αυτά είναι οι ποσότητες που κάθε φορά προσθέτουμε*<br>*Αυτό πρέπει να είναι 0,00000…* |
| *Κων/να:* | *Στα 60, το φτάνει το 120.* |
| *Νανά:* | *Φτάνει ναι, δεν τα περνάει όμως.* |

*Αργότερα στο 2$^{o}$ task για το μήκος των πλευρών της καμπύλης του Koch*

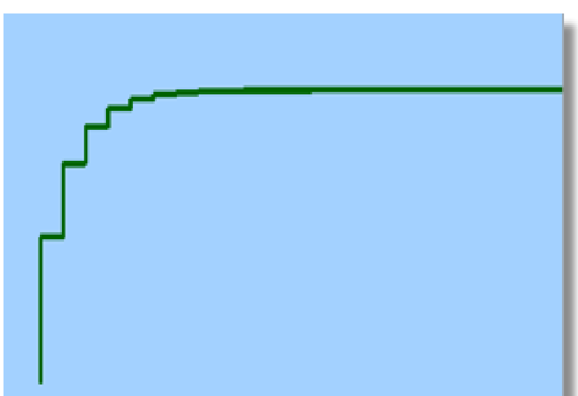
| | |
|---|---|
| *Νανά:* | *Ώπα, εδώ έγινε 0* (αναφέρεται στον πίνακα τιμών του μήκους των πλευρών από το 23$^{o}$ σχήμα και μετά) |
| *Κων/να:* | *Το μήκος της πλευράς είναι 0, άρα η περίμετρος θα είναι 0, άρα δεν θα υπάρχει σχήμα; Ουσιαστικά, αυτά μόνο αυξάνονται* (μιλάει για τις τιμές του αριθμού των πλευρών)*, αυτά μικραίνουν, μικραίνουν, μικραίνουν, μετά φτάνουν στο 0 και μένουν εκεί…* |

**Recognizing:** Διερευνώντας το πρόβλημα του φαρμάκου στο μικρόκοσμο και της περιμέτρου της καμπύλης του Koch στο geogebra, αναγνωρίζουν τη συνεισφορά των αναπαραστάσεων που προσφέρουν αυτά τα δύο περιβάλλοντα (η οπτική αναπαράσταση της σκάλας στο μικρόκοσμο και ο πίνακας αριθμητικών τιμών του μήκους κάθε πλευράς στο geogebra), στην εξαγωγή συμπερασμάτων για τη συμπεριφορά της ποσότητας του φαρμάκου και της περιμέτρου της καμπύλης του Koch (πρόκειται για τη συμπεριφορά ακολουθιών στο άπειρο).

**Building with:** Και στα δύο προβλήματα πειραματίζονται και παρατηρούν τη σταδιακή εξέλιξη των αναπαραστάσεων που προσφέρει ο δυναμικός χειρισμός με τη χρήση δρομέων και στα δύο περιβάλλοντα, μεταβαίνοντας μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων (αριθμητικών και οπτικών) σε κάθε περιβάλλον και συσχετίζοντας τις συμπεριφορές τους.

**Constructing:** Από τις εκφράσεις που χρησιμοποιούν οι μαθήτριες *(«μένει στάσιμη», «μένει εκεί», «φαίνεται σαν να μην ανεβαίνει καθόλου», «φτάνουν στο μηδέν»*), υποδηλώνονται νοηματοδοτήσεις για το όριο ακολουθίας ως μια τιμή γενικά, την οποία οι όροι της πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο στο πέρασμα του χρόνου και τελικά ταυτίζονται με αυτή (*«την φτάνουν»*).

Σημαντικός είναι ο ρόλος των ψηφιακών περιβαλλόντων, όπου η χρήση δρομέων για τον πειραματισμό με μεγάλες τιμές των μεταβλητών με την ταυτόχρονη εξέλιξη των οπτικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων προσδίδουν ένα δυναμικό χαρακτήρα στις αντιλήψεις για το όριο (οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο την τιμή του ορίου). Στο σχηματισμό της αντίληψης της ταύτισης με το όριο, συμβάλουν οι αριθμητικές αναπαραστάσεις και στα δύο περιβάλλοντα, με τις αριθμητικές τιμές να παίρνουν την ίδια τιμή από έναν όρο και μετά (εικόνα 25(β)) καθώς και οι οπτικές αναπαραστάσεις, όπως για παράδειγμα η αίσθηση της ευθείας που δίνει η οπτική αναπαράσταση της σκάλας (εικόνα 25(α)). Επίσης το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος του φαρμάκου και το γεωμετρικό πλαίσιο της καμπύλης του Koch, αποτελούν πεδία ερμηνείας των μαθηματικών εικασιών και συμπερασμάτων, με τους μαθητές να εμφανίζουν μια επιμονή για αναγωγή των αντιλήψεών τους στο πλαίσιο αυτών των δύο προβλημάτων παρόλο που έχουν μοντελοποιηθεί, κάτι που φαίνεται από τις συζητήσεις τους στις οποίες μιλούν συνεχώς με όρους των προβλημάτων αυτών.



*(α) οπτική αναπαράσταση της ποσότητας του φαρμάκου στο μικρόκοσμο*

| Μήκος Πλευρών | |
|---|---|
| Σχ.1 | 1 |
| Σχ.2 | 0.3333333333 |
| Σχ.3 | 0.1111111111 |
| Σχ.4 | 0.037037037 |
| Σχ.5 | 0.012345679 |
| Σχ.6 | 0.0041152263 |
| Σχ.7 | 0.0013717421 |
| Σχ.8 | 0.0004572474 |
| Σχ.9 | 0.0001524158 |
| Σχ.10 | 0.0000508053 |
| Σχ.11 | 0.0000169351 |
| Σχ.12 | 0.000005645 |
| Σχ.13 | 0.0000018817 |
| Σχ.14 | 0.0000006272 |
| Σχ.15 | 0.0000002091 |
| Σχ.16 | 0.0000000697 |
| Σχ.17 | 0.0000000232 |
| Σχ.18 | 0.0000000077 |
| Σχ.19 | 0.0000000026 |
| Σχ.20 | 0.0000000009 |
| Σχ.21 | 0.0000000003 |
| Σχ.22 | 0.0000000001 |
| Σχ.23 | 0 |
| Σχ.24 | 0 |
| Σχ.25 | 0 |
| Σχ.26 | 0 |

*(β) πίνακας τιμών του μήκους των πλευρών της καμπύλης του Koch*

*Εικόνα 25*

### 4.2.2.3. Συμπεράσματα για τις νοηματοδοτήσεις του ορίου ακολουθίας

Στα παραπάνω επεισόδια αναλύθηκαν νοηματοδοτήσεις για το όριο ακολουθίας που αναδύθηκαν κατά την εμπλοκή των μαθητών και στα δύο tasks. Οι μαθητές εκφράζουν αντιλήψεις για το όριο ως άνω φράγμα, όταν δουλεύουν στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι, ενώ με τη διαμεσολάβηση των ψηφιακών εργαλείων και το δυναμικό χειρισμό των αναπαραστάσεων με χρήση δρομέων, το όριο αποκτά δυναμικό χαρακτήρα ως μια τιμή την οποία οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν και που ίσως τελικά ταυτίζονται με αυτήν. Οι νοηματοδοτήσεις αυτές για την ταύτιση των όρων της ακολουθίας με το όριό της εμφανίζονται εύθραυστες, ασαφείς και εναλλάσσονται συνεχώς ανάλογα με το περιβάλλον και τις αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, η δυναμική εξέλιξη της σκάλας που τελικά εκφυλίζεται σε μια ευθεία ή η εξέλιξη των αριθμητικών τιμών του μήκους των πλευρών της καμπύλης του Koch, με αυτές να μηδενίζονται μετά το 23$^{ο}$ σχήμα, λόγω στρογγυλοποιήσεων, προκαλεί αντιλήψεις για την ταύτιση των όρων της ακολουθίας με το όριό της.

## 4.2.3. Σχέση σειράς και ακολουθίας μερικών αθροισμάτων

Μέσα από την έρευνα έχει τεκμηριωθεί ότι ακόμα και φοιτητές, οι οποίοι έχουν λάβει μια πιο προχωρημένη μαθηματική εκπαίδευση, παρουσιάζουν δυσκολίες σε θέματα σχετικά με σειρές, σύγκλιση σειρών, άπειρα αθροίσματα. Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην παρούσα παρέμβαση, μη έχοντας κάποια προηγούμενη εκπαίδευση οποιασδήποτε μορφής σε αυτές τις έννοιες, εμπλέκονται σε δραστηριότητες που έχουν ως στόχο να προκύψουν άτυπες και διαισθητικές νοηματοδοτήσεις σχετικές με σειρές και σύγκλιση σειρών, μέσα από πειραματισμό και διερεύνηση με διάφορες μορφές αναπαραστάσεων σε διάφορα περιβάλλοντα.

### 4.2.3.1. Σχέση σειράς και ακολουθίας μερικών αθροισμάτων μέσω οπτικοποίησης και αριθμητικών τιμών στο περιβάλλον χαρτί – μολύβι, στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Το επόμενο επεισόδιο αντιπροσωπεύει ένα κοινό τρόπο κατασκευής νοήματος από όλες τις ομάδες, όσον αφορά στη σχέση μιας σειράς με την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της. Τα νοήματα αυτά λαμβάνουν χώρα στην αρχή της παρέμβασης, στο 1$^{ο}$ task (πρόβλημα του φαρμάκου), στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι, μέσω των αριθμητικών υπολογισμών στο πρώτο φύλλο εργασίας, είναι άτυπα και διαισθητικά, ενώ δεν εκφράζονται ρητά από τους μαθητές παρά μόνο υπονοούνται από τις συζητήσεις τους.

*Παράδειγμα από ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Γεωργία:* | *Αφού η διάρκεια της θεραπείας είναι 6 μέρες και η ποσότητα που έχει στον οργανισμό του είναι 96,43 mg, είναι στο επιτρεπτό όριο, που ήταν μέχρι 120.* |
| *Καθηγήτρια:* | *Ναι αλλά αν συνεχίσει τη θεραπεία; Θα γίνει κάποια στιγμή επικίνδυνο;* |
| *Γεωργία* | *Ναι* |

| | |
|---|---|
| *Καθηγήτρια:* | *Γιατί;* |
| *Γεωργία:* | *Γιατί αφού κάθε φορά αυξάνεται , θα φτάσει και κάποια στιγμή ίσως ξεπεράσει το όριο των 120* |
| *Ζέτα:* | *Προχώρα στην 7η μέρα,……., δεν το φτάνει* **(recognizing)** |
| *Γεωργία:* | *8η μέρα, ….*(κάνουν πράξεις)*….. /2 +50, 9η μέρα …* (πράξεις) |
| *Ζέτα:* | *Να σου πω κάτι, μπορεί και να μην το ξεπερνάει, για κάντο άλλη μια.* |
| *Γεωργία:* | *Κοίτα άμα το παίρνει για όλη του τη ζωή θα το ξεπεράσει κάποτε. Αλλά έχουμε φτάσει στις πόσες μέρες; Συνεχίσαμε με διαδοχικές προσθέσεις και όλα αυτά είναι 99 κόμμα κάτι .* |

**Recognizing:** Αναγνωρίζουν ότι η συμπεριφορά της ποσότητα του φαρμάκου, καθώς η λήψη του συνεχίζεται απεριόριστα, δηλαδή της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{50}{2^{n-1}}$, ανάγεται στην μελέτη της συμπεριφοράς της ποσότητας φαρμάκου την 1η, 2η, …, 8η, … ημέρα λήψης, δηλαδή της αριθμητικής ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της.

**Building with:** Κάνουν συνδέσεις με τα δεδομένα του προβλήματος και βάσει αυτών, δηλαδή του τρόπου λήψης και απορρόφησης του φαρμάκου, υπολογίζουν την ποσότητά του στον οργανισμό την 1η, 2η, …, 9η, … ημέρα λήψης. Προσπαθούν να υπολογίσουν την ποσότητα του φαρμάκου σε όσο δυνατόν περισσότερες ημέρες λήψης, ώστε να φτάσουν σε μια εικασία μέσω των αριθμητικών τιμών.

**Constructing:** Ουσιαστικά οι μαθητές καταγράφουν τους όρους της αριθμητικής ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{50}{2^{n-1}}$, με σκοπό η συμπεριφορά αυτής της ακολουθίας στο άπειρο να τους δώσει συμπεράσματα για την ποσότητα του φαρμάκου καθώς η λήψη συνεχίζεται απεριόριστα. Οι μαθητές χωρίς να το συνειδητοποιούν και άτυπα, παραμένοντας στο ρεαλιστικό πλαίσιο συνδέουν τη σύγκλιση ή την απόκλιση της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων με τη σειρά που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό καθώς η λήψη συνεχίζεται απεριόριστα.

#### 4.2.3.2. Σχέση σειράς και ακολουθίας μερικών αθροισμάτων στο μικρόκοσμο, στο ρεαλιστικό πλαίσιο

Το επεισόδιο αυτό λαμβάνει χώρα στο 1ο task (πρόβλημα του φαρμάκου) όταν στο τρίτο φύλλο εργασίας ζητείται η συμπλήρωση ενός κώδικα στο μικρόκοσμο της χελωνόσφαιρας, προκειμένου να αναπαρασταθεί και να διερευνηθεί η ποσότητα του φαρμάκου.

Πρόκειται για ένα μεμονωμένο περιστατικό, από την ομάδα 1, μέσα από το οποίο φαίνεται ότι η εργασία στο μικρόκοσμο, ιδιαίτερα η συμπλήρωση του κώδικα και η συνειδητοποίηση των δομικών του στοιχείων, είναι δυνατό να παράγει νοήματα σχετικά με τη σύνδεση της σειράς και της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της.

Η συμπλήρωση και εκτέλεση του κώδικα, που αποτελεί τη συμβολική έκφραση του n-οστού όρου της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, με τη σκάλα που παράγεται να αποτελεί την οπτική του αναπαράσταση, οδηγεί στη διερεύνηση της συμπεριφοράς της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα για την αντίστοιχη σειρά και άρα για την ποσότητα του φαρμάκου καθώς η λήψη του συνεχίζεται απεριόριστα.

**Επεισόδιο 1**

Στην ομάδα 1, κατά την εμπλοκή τους στο μικρόκοσμο προκειμένου να διερευνηθεί η ποσότητα του φαρμάκου, λαμβάνει χώρα μια συζήτηση σχετικά με την κίνηση της χελώνας κατά την εκτέλεση του κώδικα, όπου υποκρύπτονται νοήματα για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων και τη σχέση της με την ποσότητα του φαρμάκου.

*Παράδειγμα από ομάδα 1*

| | |
|---|---|
| *Καθηγήτρια:* | *Σκέψου τι κάνει η υπορουτίνα step. Σκεφτείτε και την κίνηση του χαρακτήρα μέσω του step.* |
| *Ζέτα:* | *Αρχικά θα προχωρήσει α, την $1^η$ μέρα, θα στρίψει, και μετά τη $2^η$ μέρα θα προχωρήσει όσο θέλουμε δηλαδή α/2, δεν θέλουμε όμως να προχωρήσει α/2 και α;* **(recognizing)** |
| *Μαριάννα:* | *Ναι αλλά ρωτάει για τη n-οστή μέρα. Κοίτα το α το έχει προχωρήσει, θα το ξαναπροχωρήσει; Δηλαδή το $1^ο$ σκαλί θα είναι α, το $2^ο$ σκαλί θα είναι α/2 , το $3^ο$ σκαλί θα είναι α/4,.. οπότε την $3^η$ μέρα είναι α+α/2+α/4 δηλαδή η σκάλα αυτή με αυτά τα τρία σκαλιά* |
| *Ζέτα:* | *Ναι σωστά, άρα μια χαρά είναι ο κώδικας* |

**Recognizing:** Αναγνωρίζουν τη σχέση των βημάτων εκτέλεσης του κώδικα (για κάθε τιμή της μεταβλητής i, παράγεται μια εκτέλεση της υπορουτίνας step) και της αντίστοιχης κίνησης του χαρακτήρα στο πεδίο γραφικών (ένα σκαλί) με τους όρους της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, αφού η Ζέτα κατά την εκτέλεση του κώδικα απαιτεί σε κάθε βήμα του, την εμφάνιση ενός όρου της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων, *«Αρχικά θα προχωρήσει α, την $1^η$ μέρα, … και μετά τη $2^η$ μέρα … δεν θέλουμε όμως να προχωρήσει α/2 και α;»*.

**Building with:** Συζητιούνται οι προβληματισμοί της Ζέτας, η οποία ανέμενε την ταυτόχρονη οπτική αναπαράσταση όλων των όρων της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων, ενώ η συμμαθήτρια της έχει αντιληφθεί από την αρχή ότι η οπτική αναπαράσταση της σκάλας αφορά στον τελικό όρο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Έτσι στη φάση αυτή γίνονται συσχετισμοί και συνδέσεις της οπτικής αναπαράστασης της σκάλας, του ύψους κάθε σκαλιού καθώς και του ύψους ολόκληρης της σκάλας, με την αλγεβρική αναπαράσταση και την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων.

**Constructing:** Τελικά και οι δύο μαθήτριες της ομάδας 1 αντιλαμβάνονται ότι ο κώδικας που έχουν κατασκευάσει και η οπτική αναπαράσταση της σκάλας, παριστάνει την ποσότητα του φαρμάκου τη n-οστή ημέρα λήψης του, δηλαδή το n-οστό όρο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων, η μελέτη της οποίας μπορεί να δώσει συμπεράσματα για την ποσότητα του φαρμάκου, καθώς η λήψη του συνεχίζεται απεριόριστα ($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$). Τα νοήματα αυτά, σχετικά με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, είναι άτυπα, εκφράζονται με όρους του ρεαλιστικού προβλήματος, ενώ οι μαθητές δεν έχουν πλήρη συνείδηση γι' αυτά.

#### 4.2.3.3. Συμπεράσματα για τη σχέση σειράς και ακολουθίας μερικών αθροισμάτων

Φαίνεται ότι όλες οι ομάδες στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι και με χρήση αριθμητικών τιμών κατασκεύασαν νοήματα άτυπα και διαισθητικά για τις έννοιες της σειράς και της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων, συνδέοντας αυθόρμητα, άτυπα και διαισθητικά τις συμπεριφορές τους. Το ρεαλιστικό πλαίσιο συνέβαλε σημαντικά στην έκφραση αυτών των άτυπων νοημάτων με όρους του προβλήματος του φαρμάκου. Από την άλλη καθοριστικός είναι ο ρόλος των δραστηριοτήτων με ερωτήματα που απαιτούν τον υπολογισμό της ποσότητας του φαρμάκου στις έξι πρώτες ημέρες λήψης, καθώς και ερωτημάτων για τη συμπεριφορά του φαρμάκου. Ερωτήματα που δεν έχουν ως στόχο μια απλή καθοδήγηση, αλλά είναι τοποθετημένα στο ρεαλιστικό πλαίσιο και στοχεύουν στην άτυπη σύνδεση της συμπεριφοράς της σειράς και της ακολουθία των μερικών αθροισμάτων.

Στη συνέχεια κατά διάρκεια της παρέμβασης δεν παρατηρήθηκαν άλλα τέτοιου είδους νοήματα, τουλάχιστον ανιχνεύσιμα, παρά μόνο από την ομάδα 1, πάλι στο ρεαλιστικό πλαίσιο του φαρμάκου, κατά τη διερεύνηση στο μικρόκοσμο. Σημαντικός είναι ο ρόλος του μικρόκοσμου με την αλληλεπίδραση του κώδικα συμβολικής έκφρασης με την οπτική αναπαράσταση της σκάλας. Όσον αφορά στις υπόλοιπες ομάδες, εφόσον συνέδεσαν τη συμπεριφορά του φαρμάκου με τη συμπεριφορά της σκάλας, πιθανώς να διαμόρφωσαν κάποιες αντιλήψεις οι οποίες όμως δεν πήραν λεκτική μορφή ώστε να μπορούν να ανιχνευθούν.

### 4.2.4. Σχέση ακολουθίας – συνάρτησης

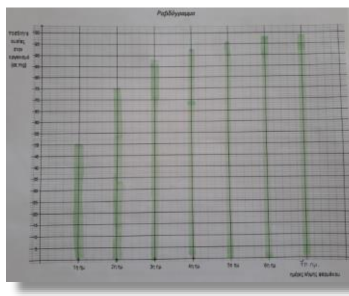
Στα παρακάτω επεισόδια φαίνεται μια τάση για τη μελέτη της συμπεριφοράς ακολουθιών μέσω της συμπεριφοράς συναρτήσεων, που υποδηλώνει τη σύλληψη των ακολουθιών ως ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων.

Η τάση αυτή για σύνδεση μεταξύ ακολουθιών και συναρτήσεων εμφανίστηκε μόνο από τις μαθήτριες της ομάδας 1, κατά την οπτικοποίηση ακολουθιών και στα δύο πλαίσια.

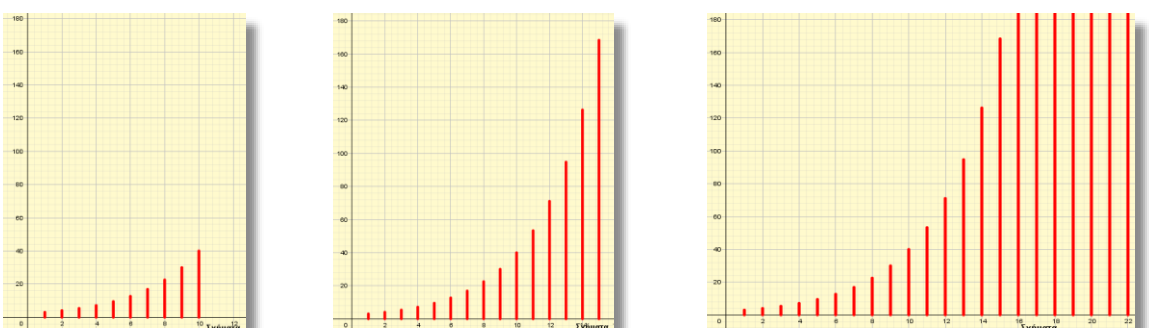
Τα επεισόδια στα οποία εμφανίστηκε αυτή η τάση έλαβαν χώρα σε δύο περιπτώσεις, στην αρχή της παρέμβασης, στο 1º task, κατά την αναπαράσταση με τη μορφή ραβδογράμματος της ποσότητας του φαρμάκου στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι (εικόνα 26) και στο 2º task κατά την αναπαράσταση της περιμέτρου της καμπύλης του Koch πάλι με τη μορφή ραβδογράμματος στο δυναμικό περιβάλλον του geogebra (εικόνα 27).

Η τάση αυτή για σύνδεση μεταξύ ακολουθιών και συναρτήσεων εμφανίστηκε μόνο από τις μαθήτριες της ομάδας 1, κατά την οπτικοποίηση ακολουθιών και στα δύο πλαίσια, οπότε τα επεισόδια αυτά αποτελούν μεμονωμένες περιπτώσεις αυτών των νοηματοδοτήσεων.

Στο 1ο task, κατά την αναπαράσταση μέσω ραβδογράμματος των πρώτων όρων της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων, που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου στις πρώτες ημέρες λήψης( εικόνα 26), οι μαθήτριες της ομάδας 1 εκφράζουν την τάση για ένωση των κορυφών ώστε να προκύψει ένα γράφημα και να ανάγουν τη μελέτη της ακολουθίας στη μελέτη της αντίστοιχης συνάρτησης. Η ίδια τάση εμφανίζεται από την ίδια ομάδα και κατά την αναπαράσταση της περιμέτρου της καμπύλης του Koch με τη μορφή ραβδογράμματος στο geogebra (εικόνα 27).



*Εικόνα 26: Ραβδόγραμμα για την ποσότητα του φαρμάκου στις 7 πρώτες ημέρες λήψης από την ομάδα 1*



*Εικόνα 27: Το ραβδόγραμμα της περιμέτρου της καμπύλης του Koch στο περιβάλλον του geogebra*

*Παράδειγμα από ομάδα 1 (μέσω του ραβδογράμματος της ποσότητας του φαρμάκου)*

| | |
|---|---|
| *Γεωργία:* | *… Πάει έτσι ….Να τα ενώσω; …. Η συνάρτηση….* |
| *Ζέτα:* | *Πάει έτσι, μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για τη συνάρτηση;* |
| *Γεωργία:* | *Να δούμε αν θα έχει μέγιστο;* |
| *Ζέτα:* | *Εδώ πέρα, άμα μετά, θα γίνει φθίνουσα μετά* (δείχνει με το χέρι της). *Γιατί άμα μετά γίνει φθίνουσα, που δεν νομίζω, δεν θα τα περάσει ποτέ τα 120. Αλλά στην αρχή είναι αύξουσα* |
| *Γεωργία:* | *Αλλά μετά ελαττώνεται, όχι ελαττώνεται, αλλά, ….* |

| | |
|---|---|
| *Ζέτα:* | *Η κλίση ας πούμε, πως να το πούμε,..., πως το λένε αυτό;* |
| *Γεωργία:* | *Δηλαδή εδώ πέρα πάει πολύ απότομα, ενώ εδώ πάει λίγο, λίγο λίγο δηλαδή εδώ πέρα είναι ευθεία* |
| *Ζέτα:* | *Αυτό λέγεται παραβολή;* |
| *Γεωργία:* | *Ή μήπως υπερβολή; Στη φυσική πέρυσι είχαμε ένα τέτοιο διάγραμμα. Πως λέγεται; Αυτό που πάει έτσι* (φαίνεταινα δείχνει με το χέρι της το διάγραμμα μιας εκθετικής συνάρτησης) |

*Παράδειγμα από ομάδα 1 (μέσω του ραβδογράματος της περιμέτρου της καμπύλης του Koch)*

| | |
|---|---|
| *Γεωργία:* | *Εγώ θα ήθελα να ήξερα ποια συνάρτηση είναι.* |
| *Ζέτα:* | *Είναι έτσι, ...(δείχνει με τα χέρια της)... Αυτή είναι η $y=x^2$* |
| *Γεωργία:* | *Η $y=x^2$ δεν είναι παραβολή ...(Σχεδιάζει νοητά με το χέρι της όλη την παραβολή)* |
| *Ζέτα:* | *Άρα αυτή είναι η $y=x^2$ για x θετικά* |
| *Καθηγήτρια:* | *Δηλαδή η περίμετρος είναι η $y=x^2$; (Δείχνει τον τύπο της περιμέτρου* $3l\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ *)* |
| *Ζέτα:* | *Δεν φαίνεται ότι είναι η $y=x^2$ , έτσι δεν πάει η $x^2$ , η παραβολή; (Σχηματίζει νοητά με το χέρι την παραβολή)* |

**Recognizing:** Χωρίς να το αναφέρουν ρητά, από τη συζήτηση φαίνεται ότι αναγνωρίζουν ομοιότητες και συνάφειες μεταξύ των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων και των ραβδογραμμάτων που έχουν κατασκευάσει, τα οποία ουσιαστικά οπτικοποιούν μια ακολουθία και στις δύο περιπτώσεις (την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς για την ποσότητα του φαρμάκου και την ακολουθία της περιμέτρου της καμπύλης του Koch). Η αναγνώριση αυτή ενδεχομένως να έγινε εξαιτίας της εμφάνισης των αξόνων ή της μορφής του ραβδογράμματος (που ενδεχομένως τους θυμίζει το γράφημα μιας συνάρτησης).

**Building with:** Στη φάση αυτή, συζητούν για την ένωση των κορυφών του ραβδογράμματος και προσπαθούν να τα συσχετίσουν με γραφήματα γνωστών τους συναρτήσεων (αναφέρονται συχνά στην παραβολή και στην υπερβολή). Ταυτόχρονα συζητούν την αναγωγή των προβλημάτων, της ποσότητας του φαρμάκου και της περιμέτρου της καμπύλης του Koch, στη μελέτη μιας συνάρτησης συνδέοντας αυτή με τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

**Constructing:** Μέσω γραφημάτων, δηλαδή οπτικοποιήσεων, διαμορφώνουν τη διαισθητική αντίληψη (αν και δεν αναφέρεται ρητά), ότι η ακολουθία είναι ειδική περίπτωση συνάρτησης, ενώ αντιλαμβάνονται τις κορυφές των ράβδων ως υποσύνολο του γραφήματος μιας συγκεκριμένης συνάρτησης (εστιάζουν στο να ενώσουν τις κορυφές στο ραβδόγραμμα για το πρόβλημα του φαρμάκου), η μελέτη της οποίας θα μπορούσε να τους δώσει απαντήσεις στα ερωτήματα που έχουν τεθεί στα δύο προβλήματα.

Εντούτοις δεν κατάφεραν να εντοπίσουν τη διάκριση μεταξύ ακολουθίας και συνάρτησης ως προς το πεδίο ορισμού, ούτε οπτικά μέσω του γραφήματος, ούτε κάνοντας συνδέσεις με τον ορισμό της ακολουθίας που έχουν διδαχθεί σε προηγούμενη τάξη[7]. Επίσης δεν μπορούν να εντοπίσουν τις αντίστοιχες συναρτήσεις, κάτι που στην περίπτωση του φαρμάκου είναι δύσκολο αφού απαιτεί προηγούμενες γνώσεις σχετικές με γεωμετρικές προόδους, αλγεβρικούς χειρισμούς και γνώση της εκθετικής συνάρτησης. Στην περίπτωση της περιμέτρου της καμπύλης του Koch, θα ήταν εύκολο εξαιτίας του τύπου $3l\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, που παραπέμπει κατ' ευθείαν στον τύπο της αντίστοιχης συνάρτησης. Το γεγονός ότι δεν έγιναν οι κατάλληλες συνδέσεις δηλώνει ότι οι προσεγγίσεις των μαθητών στη σχέση ακολουθίας και συνάρτησης είναι διαισθητικές και οφείλονται στην οπτικοποίηση των ακολουθιών.

Σημαντικός είναι ο ρόλος της οπτικής αναπαράστασης του ραβδογράμματος. Η συγκεκριμένη οπτικοποίηση των ακολουθιών φαίνεται να οδηγεί σε συνδέσεις με το γράφημα μιας συνάρτησης, ενώ από την οπτικοποίηση στο μικρόκοσμο με τη μορφή μιας σκάλας δεν προέκυψαν σε τέτοιες συνδέσεις. Το περιβάλλον εργασίας δεν φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά αφού και στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι και στο δυναμικό περιβάλλον του geogebra προέκυψαν παρόμοιες συνδέσεις.

[7] Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, …, ν στους πραγματικούς

# Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα - Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκαν οι νοηματοδοτήσεις της έννοιας του απείρου και άλλων σχετικών εννοιών λογισμού από μαθητές λυκείου, οι οποίοι δεν έχουν εμπλακεί σε τυπική εκπαίδευση σχετική με τέτοια θέματα. Επίσης διερευνήθηκε ο ρόλος του πλαισίου, των tasks, των αναπαραστάσεων, των περιβαλλόντων και των εργαλείων στη διαδικασία νοηματοδότησης τέτοιων εννοιών. Η έρευνα όσον αφορά στο θεωρητικό πλαίσιο στηρίχθηκε στη θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (constructionism), που εστιάζει στη μάθηση μέσω μιας διαλεκτικής και συνειδητής εμπλοκής των εκπαιδευόμενων στην κατασκευή της γνώσης. Επίσης οι αφαιρέσεις που έλαβαν χώρα κατά τη διαδικασία των νοηματοδοτήσεων αναλύθηκαν μέσω του μοντέλου RBC + C της θεωρίας AiC. Η έρευνα εξελίχθηκε σε τρεις φάσεις, τη φάση του σχεδιασμού, τη φάση της εφαρμογής και τη φάση της ανάλυσης των δεδομένων και εξαγωγής συμπερασμάτων και αφορά σε έξι μαθητές της Β' Λυκείου. Ο σχεδιασμός έγινε με βάση την υπάρχουσα έρευνα, ενώ κατά την εφαρμογή οι μαθητές ενεπλάκησαν σε δραστηριότητες εξοικείωσης με τα ψηφιακά εργαλεία και σε δύο βασικά πλαισιωμένα tasks (ρεαλιστικό και γεωμετρικό πλαίσιο), για την ανάδειξη των μαθηματικών νοημάτων. Χρησιμοποίησαν εργαλεία παραδοσιακά και ψηφιακά στην προσπάθειά τους να διερευνήσουν τις μαθηματικές έννοιες αναπαριστώντας τες με διάφορους τρόπους (οπτικά, συμβολικά, αριθμητικά) και σε διάφορα περιβάλλοντα (στατικά, δυναμικά, υπολογιστικά, συμβολικής έκφρασης). Οι συζητήσεις κατά τη διάρκεια της παρέμβασης απομαγνητοφωνήθηκαν και μελετήθηκαν και στη συνέχεια κωδικοποιήθηκαν με βάση τις νοηματοδοτήσεις των μαθητών, ενώ τα επεισόδια αναλύθηκαν με τεχνικές grounded.

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκαν οι νοηματοδοτήσεις μαθητών της Β΄ Λυκείου, των πτυχών του απείρου μέσα από δραστηριότητες που διερευνούν τη σύγκλιση και την απόκλιση ακολουθιών και σειρών σε δύο διαφορετικά πλαίσια, ένα ρεαλιστικό και ένα γεωμετρικό. Το άπειρο είναι μια έννοια που παραδοσιακά συλλαμβάνεται ως μια διανοητική κατασκευή αφηρημένης φύσης που εξαρτάται από το πλαίσιο, τη θέαση, το σχήμα αναπαράστασης, ενώ είναι πηγή παραδόξων και συγκρούσεων εξαιτίας της τάσης μεταφοράς των μαθηματικών του πεπερασμένου σε άπειρες καταστάσεις. Το άπειρο εμφανίζεται με πολλές πτυχές, το εν δυνάμει άπειρο (potential infinity) και το φύσει άπειρο (actual infinity), το άπειρο ως διαδικασία και το άπειρο ως αντικείμενο, το απείρως μικρό και το απείρως μεγάλο.

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας δείχνουν ότι η κύρια πτυχή του απείρου που συλλαμβάνεται άμεσα και φυσικά είναι αυτή του απείρου ως διαδικασία, που αντανακλά τη σύλληψη του εν δυνάμει άπειρου (potential infinity). Αυτή η διαισθητική πτυχή εμφανίζεται στο μεγαλύτερο μέρος της παρέμβασης από όλες τις ομάδες. Συγκεκριμένα οι απόψεις αυτές εκφράστηκαν και στα δύο πλαίσια, σε όλα τα περιβάλλοντα εργασίας. Στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι η διερεύνηση με αριθμητικούς υπολογισμούς ανέδειξε πιο συχνά τέτοιες απόψεις, ενώ κατά την εμπλοκή τους σε αλγεβρικούς χειρισμούς οι αντιλήψεις αυτές εμφανίστηκαν με μικρότερη συχνότητα και μόνο η ομάδα 1 εξέφρασε την ιδέα της άπειρης διαδικασίας κατά την εργασία της με τις στατικές οπτικές αναπαραστάσεις. Από την άλλη, η εργασία στο μικρόκοσμο και στο geogebra ανέδειξε νοηματοδοτήσεις για το εν δυνάμει άπειρο σε όλες τις ομάδες, εξαιτίας του δυναμικού χειρισμού και συντονισμού μέσω προγραμματισμού και δρομέων που προσφέρονται σ' αυτά τα περιβάλλοντα. Η συχνότητα των επεισοδίων στα οποία εμφανίζονται οι διαισθητικές πτυχές του απείρου εξηγείται από την υπάρχουσα έρευνα που υποστηρίζει ότι το άπειρο με τη δυναμική του πτυχή αποτελεί το πιο βασικό επίπεδο κατανόησης με τη έννοια της ατέρμονης διαδικασίας (Monaghan, 2001) και ότι κατά την πρώτη επαφή των παιδιών με την έννοια αντικατοπτρίζεται η διαισθητική σύλληψη του απείρου ως διαδικασία (Monaghan, 1986; Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979).

Ένας από τους στόχους που τέθηκαν στο σχεδιασμό ήταν να μελετηθεί αν η εμπλοκή μαθητών σε άπειρες καταστάσεις, σε διαφορετικά πλαίσια και περιβάλλοντα, συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις, είναι δυνατό να προκαλέσει την εμφάνιση και άλλων πτυχών του απείρου πέραν της διαισθητικής ως άπειρη διαδικασία. Συγκεκριμένα τέθηκε υπό μελέτη αν μαθητές που δεν έχουν διδαχθεί τυπικά την έννοια, θα μπορούσαν μέσω μιας τέτοιας διερεύνησης να επιτύχουν την κατασκευή νοημάτων για το άπειρο ως αντικείμενο, δεδομένου ότι αυτή η πτυχή απαιτεί ανώτερα λογικά σχήματα, απαιτητικές νοητικές διεργασίες και μαθηματική ωριμότητα. Πράγματι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να συλλάβουν το άπειρο με αυτή την έννοια με εξαίρεση τις μαθήτριες της ομάδας 1, που εξέφρασαν αυτή την αντίληψη σε δύο σημεία της παρέμβασης. Η πρώτη φορά που αντιμετώπισαν το άπειρο ως αντικείμενο, κάνοντας πράξεις με αυτό, όπως $\frac{1}{\infty}=0$, ήταν μετά τη διερεύνηση του προβλήματος του φαρμάκου στη χελωνόσφαιρα, ενώ αυτή η εννοιολόγηση επανήλθε και αργότερα, μετά τη διερεύνηση του προβλήματος της περιμέτρου της καμπύλης του Koch με τη χρήση του geogebra, όπου το άπειρο φαίνεται να παγιώνεται ως αντικείμενο που ικανοποιεί ιδιότητες. Η συμβολή των ψηφιακών εργαλείων είναι σημαντική στην ανάδειξη αυτών των νοημάτων για το άπειρο. Στο περιβάλλον του μικρόκοσμου ο προγραμματισμός μέσω ενός κώδικα συμβολικής έκφρασης και οι σταδιακά αναπτυσσόμενες αναπαραστάσεις που παράγονται από την εκτέλεσή του και τη χρήση δρομέα, οδηγούν σε ερμηνείες των δομικών στοιχείων των αλγεβρικών αναπαραστάσεων και στο χειρισμό του απείρου ως αντικείμενο. Ενώ το δυναμικό περιβάλλον του geogebra λειτουργεί ως μέσο διερεύνησης, πειραματισμού και επικύρωσης μέσω της εξέλιξης αριθμητικών αναπαραστάσεων κάνοντας χρήση δρομέων. Οι δραστηριότητες και των δύο tasks φέρνουν τους μαθητές αντιμέτωπους με παράδοξες καταστάσεις, ώστε να προκύψουν νοήματα για το άπειρο που δεν είναι σε αναλογία με αντιλήψεις για το πεπερασμένο. Και τα δύο πλαίσια (ρεαλιστικό και γεωμετρικό) δίνουν κίνητρα, ενώ ταυτόχρονα αποτελούν πεδία έκφρασης και ερμηνείας των αποτελεσμάτων των διερευνήσεων των μαθητών. Οι υπόλοιπες ομάδες δεν κατάφεραν να κατασκευάσουν παρόμοια νοήματα για το άπειρο, παρόλο που η ομάδα 3 πλησίασε αρκετά την προσέγγιση της ομάδας 1, χωρίς όμως να αποδώσουν στο άπειρο την έννοια του αντικειμένου, επικρατώντας στις αντιλήψεις τους η δυναμική πτυχή του ως διαδικασία. Συμπερασματικά αυτή η δυναμική πτυχή του απείρου φαίνεται να επικρατεί στις αντιλήψεις των μαθητών, εύρημα το οποίο επιβεβαιώνεται και από την βιβλιογραφία, μέσα από την οποία επισημαίνεται ότι πολλές φορές ακόμα και σε προχωρημένα στάδια μαθηματικής σκέψης οι εκπαιδευόμενοι έχουν ως συστατικό των εικόνων εννοιών τους (concept image) αυτές τις διαισθητικές πτυχές, τις οποίες ανακαλούν και χρησιμοποιούν κατά την ενασχόλησή τους και με άλλες σχετικές μαθηματικές έννοιες (Sacristán & Noss, 2008; Sacristán, 1997). Επίσης ακόμα και στις περιπτώσεις που το άπειρο χρησιμοποιήθηκε ως αντικείμενο, από την ομάδα 1, αυτό έγινε αφού είχαν προηγηθεί διαισθητικές εκφράσεις του εν δυνάμει άπειρου κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της Falk (2010), η οποία ερευνώντας τις νοηματοδοτήσεις μαθητών για τους αριθμούς, τα κλάσματα, τα πεπερασμένα και τα άπειρα σύνολα, υποστήριξε ότι η διαίσθηση του εν δυνάμει άπειρου (potential infinity) εμφανίζεται παράλληλα με τις νοηματοδοτήσεις του φύσει απείρου (potential infinity). Η διαφορά στα αποτελέσματα αυτά θα μπορούσε να εντοπιστεί στη σημασία της φύσης των δραστηριοτήτων, αφού οι δραστηριότητες της παρούσας έρευνας εμπλέκουν τους μαθητές με άπειρες διαδικασίες προκαλώντας τη δυναμική πτυχή του απείρου, ενώ οι δραστηριότητες της Falk έχουν μεγαλύτερο εύρος ως προς τα νοήματα που αναμένεται να προκαλέσουν.

Νοηματοδοτήσεις προέκυψαν και για το απείρως μικρό και το απείρως μεγάλο, πτυχές του απείρου που όπως φαίνεται και από τη βιβλιογραφία εκφράζουν την έννοια των απειροστών (Monaghan, 1986). Οι κατασκευές αυτών των νοημάτων έλαβαν χώρα και στα δύο tasks, κατά την εμπλοκή στο περιβάλλον της χελωνόσφαιρας για το πρόβλημα του φαρμάκου και στο geogebra για το πρόβλημα της καμπύλης του Koch, ενώ σε προηγούμενες δραστηριότητες είχαν ολοκληρωθεί κατασκευές των αλγεβρικών αναπαραστάσεων των δύο προβλημάτων. Όλες οι ομάδες κατάφεραν να ολοκληρώσουν αφαιρέσεις και να κατασκευάσουν νοήματα και στις δύο περιπτώσεις, ενώ μια ομάδα φάνηκε να εδραιώνει τις αντιλήψεις της για τα απειροστά, αφού έκανε χρήση τους και αργότερα. Κατασκευάστηκαν νοήματα για τα απειροστά ως μεταβλητές ποσότητες που μπορούν να γίνονται αυθαίρετα μικρές, σαν να συγκλίνουν στο μηδέν (οπτική Cauchy), κάτι που επιβεβαιώνεται και από την έρευνα. Ο Cornu (1991), υποστηρίζει ότι οι εκπαιδευόμενοι συλλαμβάνουν συχνά την ιδέα του απειροστού με την οπτική του Cauchy, ειδικά αν έχουν εμπειρία από διαδικασίες ορίων. Επίσης κατασκευάστηκαν νοήματα για την οπτική αναπαράσταση του απείρως μικρού ως σημείο, ενώ αλγεβρικά το απειροστό εκφράστηκε ως ένα πολύ μικρό κλάσμα με σταθερό αριθμητή και απείρως μεγάλο παρονομαστή. Ο Monaghan (1986), αναφέρει ότι πολλοί μαθητές αντιλαμβάνονται τα απειροστά ως πολύ μικρούς αριθμούς κατ' αναλογία της αντίληψης του απείρου ως πολύ μεγάλου αριθμού. Σημαντικό ρόλο στην κατασκευή αυτών των νοημάτων έπαιξαν τα ψηφιακά εργαλεία. Η δυνατότητα της δυναμικής εξέλιξης των διαδικασιών και της ταυτόχρονης ανάπτυξης των αναπαραστάσεων που προσφέρουν μέσω δρομέων έδωσε τη δυνατότητα της παρατήρησης της εξέλιξης των αριθμητικών τιμών και της ερμηνείας των στοιχείων (μεταβλητές, πράξεις) των αλγεβρικών αναπαραστάσεων, ο συνδυασμός των οποίων βοήθησε στην κατασκευή των παραπάνω νοημάτων για τα απειροστά. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τα αποτελέσματα ερευνών, που υποστηρίζουν ότι η σύλληψη των απειροστών αναδύεται μέσα από ένα δυναμικό πλαίσιο που οδηγεί στη θέαση δυναμικών οντοτήτων που φθίνουν συνεχώς. Το γεωμετρικό πλαίσιο στο $2^{o}$ task έπειξε καθοριστικό ρόλο στη νοηματοδότηση του απείρως μικρού μήκους ως σημείο, ενώ ακόμα και η σειρά των δραστηριότητων και των ερωτημάτων συνέβαλλαν στις νοηματοδοτήσεις του απείρως μικρού και του απείρως μεγάλου.

Τα tasks με τα οποία εργάστηκαν οι μαθητές στην παρούσα παρέμβαση αφορούν στη συμπεριφορά άπειρων αθροισμάτων και συγκεκριμένα γεωμετρικών σειρών. Οι μαθητές στην ήρθαν αντιμέτωποι με δύο tasks, το πρόβλημα του φαρμάκου και της καμπύλης του Koch, διαφορετικής φύσης και διαφορετικών πλαισίων (ρεαλιστικό και γεωμετρικό), μέσα από τα οποία αναδύεται η συμπεριφορά άπειρων αθροισμάτων. Στο πρόβλημα του φαρμάκου όλοι οι μαθητές κατασκεύασαν νοήματα σε σχέση με τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$. Συγκεκριμένα διατυπώνουν την εικασία ότι το άθροισμα $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ δεν θα ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα, η οποία σχηματίζεται ξεκάθαρα μετά την αντιμετώπιση του προβλήματος στο μικρόκοσμο, ενώ παρόμοιες ιδέες που είχαν εκφραστεί κατά την ενασχόληση στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι αποδείχθηκαν προσωρινές και εύθραυστες. Το σημαντικό είναι ότι οι μαθητές κατάφεραν να μεταφέρουν τα νοήματα που κατασκεύασαν για τα άπειρα αθροίσματα στο πρόβλημα της καμπύλης του Koch, ένα διαφορετικό πρόβλημα, διαφορετικού πλαισίου και να εδραιώσουν αυτές τις απόψεις. Όσον αφορά στην αιτιολόγηση των συμπερασμάτων που προέκυψαν, όταν δόθηκε το πλαίσιο εργασίας (στην περίπτωση της καμπύλης του Koch), όλες οι ομάδες κατάφεραν να σχηματίσουν αιτιολόγηση, ενώ στην περίπτωση του φαρμάκου, όπου το πλαίσιο δεν δόθηκε, μόνο η ομάδα 1 κατάφερε να κάνει συνδέσεις ώστε να δώσει εξήγηση των συμπερασμάτων της. Οι εργασίες έλαβαν χώρα σε διαφορετικά περιβάλλοντα (χαρτί – μολύβι, μικρόκοσμος, geogebra), χρησιμοποιώντας διαφορετικής φύσης εργαλεία και διαφορετικές αναπαραστάσεις (οπτικές, αλγεβρικές, αριθμητικές). Μάλιστα οι Sacristán και Noss, (2008) εστίασαν στη σημασία tasks συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων, λεκτικών, γεωμετρικών, γραφικών, αλγεβρικών και αναλυτικών, για την ανάπτυξη συνεκτικών συλλογισμών των μαθητευόμενων σε σχέση με το φύσει άπειρο (actual infinity). Επίσης η Waldegg (1987), συνδύασε αριθμητικά και γεωμετρικά πλαίσια μέσω της χρήσης αλγεβρικής γλώσσας ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν να αντιμετωπίσουν εμπόδια που είχαν παρατηρηθεί. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ο ρόλος των ψηφιακών. Από τη μια το περιβάλλον της χελωνόσφαιρας δίνει τη δυνατότητα συντονισμού όλων των αναπαραστάσεων (αλγεβρική, οπτική, αριθμητική) μέσω ενός κώδικα συμβολικής έκφρασης, ενώ η σταδιακή τους ανάπτυξη και η χρήση δρομέα είναι για τους μαθητές πηγή ανατροφοδότησης, μέσω της οποίας μπορούν να διορθώνουν, να βελτιώνουν και να ελέγχουν, ενώ παρέχεται η δυνατότητα τροποποίησης του κώδικα για τη μελέτη και άλλων αθροισμάτων και τον εμπλουτισμό των νοηματοδοτήσεων. Από την άλλη οι εφαρμογές που δόθηκαν στο geogebra, δίνουν την δυνατότητα παρατήρησης των αλγεβρικών τιμών μέσω δυναμικού χειρισμού, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διατύπωση εικασιών, για έλεγχο και επικύρωση. Όπως φαίνεται και από τη βιβλιογραφία πολλοί ερευνητές προτείνουν υπολογιστικά περιβάλλοντα, περιβάλλοντα CAS, υπολογιστικά φύλλα, λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας και μικρόκοσμους σε περιβάλλον Logo (Sacristán, 1997; Sacristán, 2001; Sacristán & Noss, 2008).

Επίσης οι δραστηριότητες των tasks σχεδιάστηκαν με στόχο οι μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι με καταστάσεις αντίθετες στη διαίσθησή τους που θα προκαλέσουν συγκρούσεις. Τα άπειρα αθροίσματα είναι μια έννοια που όπως επιβεβαιώνεται και από την έρευνα προκαλεί σύγχυση, όπως για παράδειγμα ότι το άθροισμα άπειρων όρων πρέπει να είναι άπειρο (González-Martín, Nardi, & Biza, 2011; Nardi, Biza, & González-Martín, 2008). Η στόχευση των δταστηριοτήτων ήταν η προσέγγιση της έννοιας των άπειρων αθροισμάτων μέσα σε ένα διερευνητικό πεδίο μάθησης, που τον κεντρικό ρόλο δεν θα έχει η τυπική διδασκαλία, μιας και απευθύνεται σε μαθητές Λυκείου, ενώ θα λαμβάνονται υπόψιν οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών. Παρόμοιες προσεγγίσεις υποστηρίζονται και από την έρευνα. Οι Nardi, Biza και González-Martín (2008), θεωρούν ότι οι αλγοριθμικές προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν ασκήσεις τυφλής εφαρμογής τύπων, στατική χρήση γραφικών αναπαραστάσεων, απουσία συνδέσεων με άλλες έννοιες εντός και εκτός των μαθηματικών φαίνεται να επικρατούν, ενώ υποστηρίζουν ότι τέτοιες πρακτικές αποφεύγουν την αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών. Οι Lindaman και Gay (2012) για την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των σειρών και την υπέρβαση τυπικών παρανοήσεων, δίνουν έμφαση στην οπτικοποίηση, στη συνεργατική μάθηση, σε ερωτήσεις που προκαλούν συγκρούσεις και σε μεταγνωστικές δραστηριότητες.

Ταυτόχρονα με τις νοηματοδοτήσεις της συμπεριφοράς των άπειρων αθροισμάτων αναδύονται αντιλήψεις για το όριο ακολουθίας. Η έννοια του ορίου μιας ακολουθίας είναι μια έννοια πολύπλοκη, με ασάφειες και επιστημολογικά εμπόδια όπως υποστηρίζεται και στην έρευνα (Cornu, 1991; Monaghan, 2001; Sierpinska, 1987). Οι εμπειρικές χρήσεις διάφορων λέξεων, όπως *«τείνει»*, *«προσεγγίζει»* κτλ., προκαλούν σύγχυση και ασάφειες στους μαθητές (Monaghan, 2001). Στην παρούσα έρευνα παρατηρήθηκε επίσης δυσκολία έκφρασης και ευθραυστότητα στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών για το όριο ακολουθίας. Οι πιο συχνές νοηματοδοτήσεις τους για το όριο ήταν ως άνω φράγμα ή ως μια τιμή την οποία προσεγγίζουν οι όροι της ακολουθίας, ενώ στις εκφράσεις τους παρατηρούνται αντιλήψεις για την πιθανότητα ταύτισης των τελικών όρων της ακολουθίας με αυτή την τιμή, οι οποίες όμως δεν εμφανίζονται ισχυρές. Οι μαθητές όλων των ομάδων έχουν την τάση να μετακινούνται μεταξύ αυτών των νοηματοδοτήσεων ανάλογα με το περιβάλλον στο οποίο εργάζονται και τις πληροφορίες που αντλούν από τις αναπαραστάσεις. Οι εναλλαγές στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών είναι δικαιολογημένες, αφού δεν έχουν έρθει έως τώρα αντιμέτωποι με κάποιου είδους τυπική διδασκαλία για την έννοια του ορίου με αποτέλεσμα να εκφράζονται οι διαισθητικές απόψεις που αναδύονται με τη διαμεσολάβηση των εργαλείων. Συγκεκριμένα η εργασία στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι προκαλεί αντιλήψεις για το όριο ως ελάχιστο άνω φράγμα, ενώ στα ψηφιακά περιβάλλοντα οι νοηματοδοτήσεις εμφανίζουν ένα δυναμικό χαρακτήρα, λόγω της χρήσης δρομέων, με το όριο να είναι η τιμή την οποία οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν συνεχώς, μια οπτική παρόμοια με αυτή του Cauchy. Η ταύτιση ή μη των τελικών όρων της ακολουθίας με το όριό της, φαίνεται να εξαρτάται από τις αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα η παρατήρηση της εξέλιξης του μήκους των πλευρών της καμπύλης του Koch, με τις μηδενικές τιμές να εμφανίζονται μετά το 23ο σχήμα στο περιβάλλον του geogebra και η εξέλιξη της οπτικής αναπαράστασης της σκάλας σε ευθεία, δημιουργεί την αίσθηση της ταύτισης των τελικών όρων της ακολουθίας με το όριό της (εικόνα 25). Ο ρόλος των ψηφιακών περιβαλλόντων και των αναπαραστάσεων που προσφέρουν είναι καθοριστικός εξαιτίας της δυνατότητας συντονισμού αυτών μέσω προγραμματιστικού κώδικα αλλά μέσω δρομέων.

Η εμπλοκή των μαθητών με τις δραστηριότητες των tasks, ανέδειξε νοήματα σχετικά με τη σύνδεση των εννοιών της σειράς και της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της, τα οποία δεν εμφανίστηκαν με μεγάλη συχνότητα και δεν εκφράστηκαν ρητά, κάτι που δικαιολογείται από την απουσία οποιασδήποτε μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών με τέτοιες έννοιες. Όλες οι ομάδες εξέφρασαν νοήματα για τις παραπάνω έννοιες, μέσω της εργασίας τους με τις αριθμητικές τιμές στο στατικό περιβάλλον χαρτί – μολύβι στο ρεαλιστικό πλαίσιο του φαρμάκου, συνδέοντας άτυπα και διαισθητικά τις συμπεριφορές τους. Πέραν αυτών των περιπτώσεων, παρόμοιες αντιλήψεις εκφράστηκαν μόνο σε μια ακόμα περίπτωση, στο ρεαλιστικό πλαίσιο του φαρμάκου κατά την εμπλοκή τους στο μικρόκοσμο. Σημαντικό ρόλο στην παραγωγή αυτών των νοημάτων έπαιξαν, το ρεαλιστικό πλαίσιο, το οποίο έδωσε κίνητρο στους μαθητές και αποτέλεσε πεδίο έκφρασης των άτυπων νοημάτων με όρους του ρεαλιστικού προβλήματος, οι δραστηριότητες διερευνητικού χαρακτήρα, με ερωτήματα που δεν πρόδιδαν τις απαντήσεις καθώς επίσης και το ψηφιακό περιβάλλον με την οπτικοποίηση που προσφέρει. Οι Mamona (1990), Tall και Schwarzenberger (1978), González-Martín, Nardi και Biza (2011), παρατηρούν σύγχυση στις αντιλήψεις σπουδαστών για τις έννοιες των σειρών, των ακολουθιών και της σύγκλισής τους, ακόμα και μετά από μαθήματα λογισμού. Συγκεκριμένα αναφέρουν δυσκολία διάκρισης της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ από την ακολουθία $(x_n)$ και της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της από την ακολουθία $(x_n)$. Για την υπέρβαση τέτοιων δυσκολιών προτείνεται ο εμπλουτισμός των τυπικών – αλγεβρικών προσεγγίσεων, με οπτικοποιήσεις, εφαρμογές σε άλλα πλαίσια πέραν των μαθηματικών και διερευνητικούς τρόπους εργασίας (Nardi, Biza, & González-Martín, 2008; Sacristán, 2001; Sacristán & Noss, 2008).

Τέλος υπήρξαν μεμονωμένες περιπτώσεις που οι μαθητές έκαναν συνδέσεις μεταξύ ακολουθιών και συναρτήσεων με μια τάση για αναγωγή της μελέτης των ακολουθιών στη μελέτη συναρτήσεων. Οι συνδέσεις αυτές πραγματοποιήθηκαν μέσω της οπτικοποίησης ακολουθιών με τη μορφή ραβδογράμματος χωρίς οι μαθητές να έχουν πρόσφατη και ξεκάθαρη εικόνα για τη σχέση ακολουθίας και συνάρτησης. Να σημειωθεί ότι η έννοια της ακολουθίας έχει οριστεί σε προηγούμενη τάξη, ενώ ο ορισμός αυτός δεν αναφέρει ρητά τη σχέση ακολουθίας και συνάρτησης. Έτσι οι συνδέσεις των μαθητών έγιναν σε ένα πρώτο επίπεδο, διαισθητικά και άτυπα και το κύριο μέσο που τις ανέδειξε ήταν η χρήση οπτικοποίησης. Εξάλλου η χρήση οπτικοποίησης τυπικών μαθηματικών εννοιών ως διδακτική πρακτική για την καλύτερη εννοιολογική κατανόηση των εννοιών υποστηρίζεται και από την έρευνα (González-Martín, Nardi, & Biza, 2011; Sacristán & Noss, 2008).

# Βιβλιογραφία


(Abelson, H., & DiSessa, A. (1981). *Turtle Geometry: The computer as a Medium for Exploring Mathematics.* Cambridge, M.A: MIT Press.

Ackermann , E. (2001). *Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference.* Retrieved from http://learning.media.mit.edu/content/publications/EA.Piaget%20_%20Papert.pdf.

Alcock, L. G., & Simpson, A. P. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), pp. 1-32.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representatios in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, pp. 215-241.

Bagni, G. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bagni.pdf

Brackett, J. (1998). Children's conceptualizations of infinity: the association of mathematical context and middle-grade students' responses to tasks involving infinity. *Journal of Interdisciplinary Mathematics 1*(1), pp. 1-31.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologique et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques, 4*(2), pp. 165-198.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modeles spontanes et modeles. *Actes du Cinquieme Colloque du Groupe Internationale PME*, (pp. 322-326). Grenoble.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* These de doctorat de troisieme cycle, L'Universite Scientifique et Medicale de Grenoble.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

DiSessa, A. (2000). *Changing minds: Computers, learning, and literacy.* Cambridge, MA: MIT Press.

DiSessa, A. A. (2000). *Changing minds: Computers, learning, and literacy.* Cambridge: MA: MIT Press.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and method* (pp. 185–217). Dordrecht: Springer, Advances in Mathematics Education series.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (1995). Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Morelos, Mexico.

Edwards, L. D. (1998). Embodying mathematics and science: Microworlds as representations. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), pp. 53-78.

Falk, R. (2010). The Infinite Challenge: Levels of Conceiving the Endlessness of Numbers. *Cognition and Intruction*(28), pp. 1-38.

Falk, R., Gassner, D., Ben Zoor, F., & Ben Simon, K. (1986). How do children cope with the infinity of numbers? *Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 13-18). London.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, B. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematies*(10), pp. 3-40.

Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer, *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

González-Martín, A. S., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: The case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(5), pp. 565-589.

Gray, E., & Tall, D. (1994). 'Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic'. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), pp. 116-134.

Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 42*(1), pp. 63-76.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context:Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), pp. 195-222.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/Schoolworlds: The transformation of an innovation. In C. Keitel, & K. Ruthven (Ed.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (Vol. 121, pp. 1-17). Heidelberg: Springer-Verlag.

Kafai, Y., & Resnick, M. (Eds.). (1996). *Constructionism in practice.* Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Kafai, Y., & Resnick, M. (Eds.). (1996). *Constructionism in Practice. Designing, Thinking and Learning in a Digital World.* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kindron, I., & Tall, D. (2015). The role of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics, 88*(2), pp. 183-199.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbookk of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Netherlands: Sense.

Lacoff, G., & Núñez , R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics.* New York: Basic Books.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning* (pp. 33-40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lindaman, B., & Gay, S. (2012). Improving the Instruction of Infinite Series. *PRIMUS, 22*(5), pp. 373-385.

Luis, E., Moreno, A., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*, pp. 211-231.

Mamona - Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal. A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational studies in Mathematics, 48*, pp. 259 - 288.

Mamona - Downs, J., & Downs, M. (2000). Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. In L. English, *Handbook of International Research in Mathematics Education.* NJ: Lawrence Erlbaum Ass.

Mamona, J. (1990). Sequences and series – Sequences and functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21*(2), pp. 333-337.

Martínez-Planell, R., Gonzalez, A., DiCristina, G., & Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in Mathematics, 81*, pp. 235-249.

Monaghan, J. (1986). *Adolescents' Understanding of Limits and Infinity.* Unpublished PhD thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK.

Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*, pp. 239-257.

Moreno, L., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies, 22*(3), pp. 211-231.

Nardi, E., Biza, I., & González-Martín, A. (2008). Introducing the concept of infinite sum: Preliminary analyses of curriculum content. *Proceedings of the Conference of the British Society for Research into the Learning of Mathematics. 28*, pp. 84-89. London: M. Joubert ed.

Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12*(2), pp. 135-156.

Papert, S. (1980). *Mindstorms:Children, Computers and Powerful Ideas.* Boston, Massachusets: Harvester Press.

Papert, S., & Harel, I. (1991). *Situating Comstructionism. .* Ablex Publishing Corpotation.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*, pp. 297–311.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics, 60*, pp. 71-93.

Sacristán, A. I. (1997). *Windows on the Infinite: Constructing Meanings in a Logo-based Microworld.* Unpublished PhD thesis, Institute of Education, University of London, UK.

Sacristán, A. I. (2001). Students' shifting conceptios of the infinite through computer explorations of fractals and other visual models. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 25)*, *4*, pp. 129-136. Utrecht.

Sacristán, A. I., & Noss, R. (2008). Computational Construction as a Means to Coordinate Representations of Infinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*, pp. 47-70.

Samara, J., & Clements, D. (2002). Design of Microworlds in Mathematics ans Science Education. *Journal of Educational Computing Research, 27*(1), pp. 1-3.

Sfard, A. (1991). 'On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin'. *Educational Studies in Mathematics, 22*, pp. 1-36.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*(4), pp. 371-397.

Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. In N. A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 571-596). New York: Springer.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 11*, pp. 271-284.

Tall, D. (1997). Functions and calculus. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde, *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D., & Schwarzenberger, R. L. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82*, pp. 44-49.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*(12), pp. 151-169.

Thompson, P. W. (1987). Mathematical microworlds and intelligent computer-assisted instruction. In G. Kearsley, *Artificial intelligence and education* (pp. 83-109). New York: Addison-Wesley.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 15*(1), pp. 29-37.

Tsamir, P., & Dreyfous, D. (1999). Comparing infinite sets-a process of abstraction: the case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, pp. 1-23.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and Representations: The Case of Actual Infinity. *Journal, 30*(2), pp. 213-219.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2007). Teaching for conceptual change: The case of infinite sets. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi, *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 299-316). Oxford: Elsevier.

Vygotsky, L. S. (1981). The instrumental method in psychology. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 134-143). Armonk: M.E. Sharpe.

Waldegg, G. (1987). *Esquemas de respuesta ante el infinito matemático. Transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito.* Doctoral dissertation, Centre for Research and Advanced Studies, Mexico.

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το Μάθημα της Διερεύνησης.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

**Ομάδα:**

## 1$^{O}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

### Γενικές Πληροφορίες για τα φάρμακα

- **Φάρμακο** ονομάζεται κάθε χημική ουσία ή μείγμα χημικών ουσιών που μπορεί να επηρεάσει τη λειτουργία του οργανισμού κάθε έμβιου όντος ή μικροοργανισμού όταν εισέλθει σε αυτόν. Δηλαδή όταν εισέρχεται σε έναν οργανισμό , ανακουφίζει, θεραπεύει ή αποκαθιστά την υγεία.
- **Τρόποι χορήγησης των φαρμάκων:**
  - ✓ Από το πεπτικό σύστημα (χάπι, σιρόπι, υπόθετο)
  - ✓ Παρεντερικά (ενδοφλεβίως, ενδομυϊκά, υποδόρια, ενδοδερμικά)
  - ✓ Από το αναπνευστικό σύστημα (εισπνοές)
  - ✓ Τοπικά στο δέρμα (κρέμες) ή διαδερμικά (αυτοκόλλητα)
  - ✓ Από τον ρινικό βλενογόνο
  - ✓ Από τον οφθαλμό
- **Απορρόφηση φαρμάκων:** η μεταφορά του φαρμάκου από τη θέση χορήγησης στην κυκλοφορία του αίματος. Η ταχύτητα απορρόφησης εξαρτάται από τον τρόπο χορήγησης. Για παράδειγμα στην ενδοφλέβια χορήγηση η απορρόφηση είναι άμεση και πλήρης, δηλαδή το σύνολο της δόσεως του φαρμάκου φτάνει στην κυκλοφορία κατά το 100%. Η χορήγηση του φαρμάκου από άλλες οδούς έχει σαν αποτέλεσμα ένα μέρος μόνο της δόσης να φτάνει στη συστηματική λειτουργία.

## Πρόβλημα

Ένας ενήλικας για να αντιμετωπίσει μια ασθένεια πρέπει να λαμβάνει καθημερινά μια ποσότητα $a$ mg ενός φαρμάκου ενδοφλεβίως. Η απορρόφηση του φαρμάκου είναι άμεση κατά το 100%, ενώ μέχρι το τέλος του 24ώρου ο οργανισμός αποβάλλει το 50% του φαρμάκου.

### Πληροφορίες για τη δράση του φαρμάκου σε ένα συγκεκριμένο ασθενή

- Το φάρμακο λειτουργεί αποτελεσματικά για τον ασθενή όταν η ποσότητα του στον οργανισμό του ασθενούς κυμαίνεται από 95 mg έως 120 mg για όσο χρονικό διάστημα διαρκέσει η θεραπεία.
- Το φάρμακο γίνεται επιβλαβές για τον οργανισμό του ανθρώπου όταν η ποσότητα της ουσίας στον οργανισμό ξεπεράσει τα 120 mg.

## Δραστηριότητα 1

Ποια θα είναι η ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενή την 1η ημέρα λήψης, τη 2η ημέρα λήψη, την 3η ημέρα λήψης, την 4η ημέρα λήψη, την 5η ημέρα λήψης, την 6η ημέρα λήψης, μετά τη χορήγηση της ημερήσιας δόσης, αν αυτή έχει οριστεί από τον θεράποντα ιατρό στα **50 mg**;

1η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

2η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

3η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

4η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

5η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

6η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

Πιστεύετε ότι το φάρμακο θα γίνει επικίνδυνο για τον ασθενή κάποια στιγμή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. ………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………

## Δραστηριότητα 2

Αν ο ασθενής λαμβάνει καθημερινά ποσότητα **a mg** φαρμάκου, ποια θα είναι η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενή την 1η ημέρα λήψης, τη 2η ημέρα λήψης, την 3η ημέρα λήψης, την 4η ημέρα λήψης και γενικά τη n-οστής ημέρα λήψης του φαρμάκου, μετά τη χορήγηση της ημερήσιας δόσης;

1η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

2η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

3η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

4η ημέρα λήψης: ……………………………………………………………………………………………………………………

n-οστή ημέρα λήψης: ………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………

**Ομάδα:**

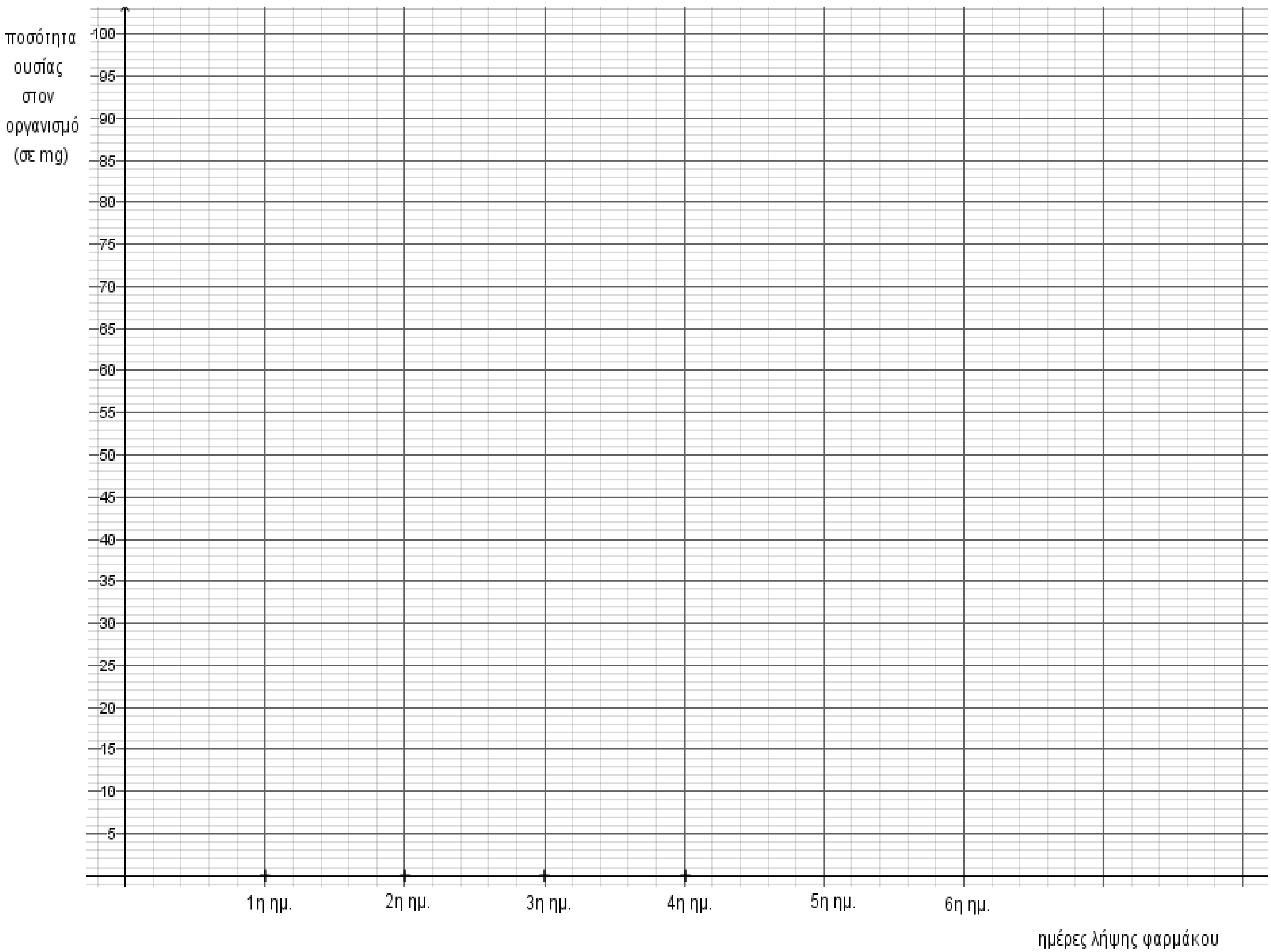
# $2^{O}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι παρακάτω Δραστηριότητες που αφορούν στο πρόβλημα που τέθηκε στο 1ο Φύλλο Εργασίας.

## Δραστηριότητα 1

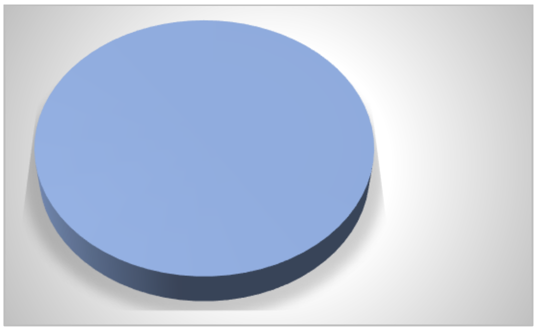
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση με τη μορφή ραβδογράμματος της ποσότητας του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά τη χορήγηση της ημερήσιας δόσης, ως συνάρτηση των ημερών λήψης του φαρμάκου, αν η ποσότητα του φαρμάκου που λαμβάνει καθημερινά ο ασθενής είναι **50 mg**.

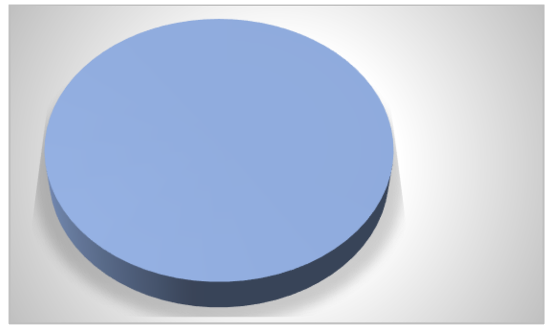
***Ραβδόγραμμα***



## Δραστηριότητα 2

Αν αναπαραστήσουμε με ένα κυκλικό δίσκο την ποσότητα του φαρμάκου που ο ασθενής λαμβάνει ημερησίως, να αναπαραστήσετε την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς στην αρχή της $6^{ης}$ ημέρας λήψης του και μετά τη χορήγηση της ημερήσιας δόσης του.





**Ομάδα:**

# $3^{o}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Να ασχοληθείτε με τις παρακάτω Δραστηριότητες που αφορούν στο πρόβλημα που τέθηκε στο $1^{o}$ Φύλλο Εργασίας.

## Δραστηριότητα 1

Στο περιβάλλον της χελωνόσφαιρας υπάρχουν δύο κώδικες με ονόματα ***step*** και ***scale***.

**A.** Σχεδιάστε στο παρακάτω πλαίσιο ένα πρόχειρο σχήμα που νομίζετε ότι προκύπτει από την εκτέλεση του κώδικα ***step*** (χωρίς να εκτελέσετε τον κώδικα).

Να εκτελέσετε τον κώδικα ***step*** για $a=50$ για να επαληθεύσετε το σχήμα σας.

**B.** Χρησιμοποιώντας τον κώδικα ***step***, να συμπληρώστε τον κώδικα ***scale*** ώστε όταν τον εκτελέσετε, να προκύψει ένα σχήμα που θα αναπαριστά την ποσότητα της ουσίας στον οργανισμό στην αρχή της n-οστής ημέρας λήψης, μετά τη χορήγηση της ημερήσιας δόσης, δεδομένου ότι η ποσότητα του φαρμάκου που λαμβάνει καθημερινά ο ασθενής είναι α mg. Στη συνέχεια να εκτελέσετε τον κώδικα αυτό, για να αναπαραστήσετε την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό, την $6^{η}$ ημέρα, μετά τη χορήγηση της ημερήσια δόσης, αν αυτή έχει οριστεί στα 50 mg .

```
TO scale :a :n
make "i 0
while :i<:n
[step Product :a  ........
  make "i ........]
END
```

## Δραστηριότητα 2

Αν η ποσότητα της ουσίας που λαμβάνει καθημερινά ο ασθενής είναι 50 mg:

**A.** Ποια ημέρα το φάρμακο αρχίζει να δρα αποτελεσματικά για τον ασθενή. ..........................................

..........................................................................................................................................

**B.** Είναι δυνατόν μετά από ένα διάστημα το φάρμακο να γίνει επιβλαβές για τον ασθενή; Αν ναι μετά από πόσες ημέρες λήψης;..........................................................................................................

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. ……………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..

**Δ.** Απαντήστε στα ερωτήματα Α, Β, για τις περιπτώσεις που η καθημερινή ποσότητα φαρμάκου που λαμβάνει ο ασθενής είναι 60 mg. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

Πως μπορείτε να είστε σίγουροι για τις απαντήσεις που δώσατε στα ερωτήματα Β και Γ, όταν ο αριθμός των ημερών που λαμβάνει ο ασθενής το φάρμακο είναι πολύ μεγάλος; ………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

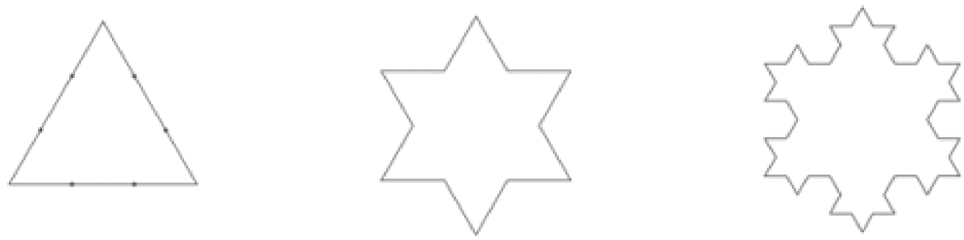
…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..

**Ομάδα:**

# $4^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Θεωρείστε το ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $\ell$ του *σχήματος 1*. Χωρίζουμε την κάθε πλευρά του σε τρία ίσα μέρη, αφαιρούμε το μεσαίο και το αντικαθιστούμε με δύο ίσα με αυτό τμήματα που σχηματίζουν γωνία $60^{ο}$ (*σχήμα 2*). Κάνουμε το ίδιο για όλες τις πλευρές του νέου σχήματος (*σχήμα 3*). Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία για κάθε νέο σχήμα που προκύπτει.



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3

Ανοίξτε το αρχείο snowflake. Μετακινώντας το δρομέα n προκύπτουν τα σχήματα που περιγράφονται παραπάνω.

## Δραστηριότητα 1

Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών, το μήκος κάθε πλευράς, την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος που προκύπτει κάθε φορά από την παραπάνω διαδικασία (μπορείτε να θέσετε Ε το εμβαδόν του $1^{ου}$ Σχήματος για λόγους απλοποίησης των πράξεων).

| | Αριθμός πλευρών | Μήκος κάθε πλευράς | Περίμετρος | Εμβαδόν |
|---|---|---|---|---|
| $1^{ο}$ Σχήμα | | | | |
| $2^{ο}$ Σχήμα | | | | |
| $3^{ο}$ Σχήμα | | | | |
| $4^{ο}$ Σχήμα | | | | |
| ……. | | | | |
| $n^{ο}$ Σχήμα | | | | $E_1+\frac{E_1}{3}\cdot 1+\frac{E_1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\cdots+\frac{E_1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$ |

# $5^{Ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι παρακάτω δραστηριότητες αφορούν στα σχήματα που περιγράφτηκαν στο $4^{ο}$ Φύλλο Εργασίας. Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε στο $4^{ο}$ Φύλλο Εργασίας, να απαντήσετε στις παρακάτω δραστηριότητες.

## Δραστηριότητα 1

Στο αρχείο **perimetros_koch_ravdogramma** υπάρχει το ραβδόγραμμα που δίνει την περίμετρο σε κάθε σχήμα που προκύπτει αν συνεχιστεί η διαδικασία που περιγράφτηκε στο $4^{ο}$ Φύλλο Εργασίας. Αρχικά να διερευνήστε τι συμβαίνει με τον αριθμό των πλευρών και το μήκος της κάθε πλευράς των σχημάτων που προκύπτουν, καθώς η διαδικασία συνεχίζεται πάρα πολλές φορές, πατώντας τα κουμπιά «Αριθμός πλευρών» και «Μήκος πλευράς» .

**Β.** Τι νομίζετε ότι θα συμβαίνει με την περίμετρο των σχημάτων που προκύπτουν αν αυτή η διαδικασία συνεχίζεται άπειρες φορές;

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

Επαληθεύστε τις εικασίες σας για την περίμετρο πατώντας το κουμπί «Περίμετρος» και «Ραβδόγραμμα».

**Γ.** Τι νομίζετε ότι συμβαίνει με το εμβαδόν του σχήματος που προκύπτει κάθε φορά αν η διαδικασία αυτή συνεχίζεται άπειρες φορές.

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………

## Δραστηριότητα 2

Να αναπαραστήσετε γραφικά το εμβαδόν καθενός από τα σχήματα που προκύπτουν από την παραπάνω διαδικασία. Χρησιμοποιήστε το περιβάλλον της χελωνόσφαιρας για να κάνετε τις κατασκευές σας.

Από τις κατασκευές σας στη χελωνόσφαιρα τι παρατηρείτε για το εμβαδόν των σχημάτων που προκύπτουν καθώς συνεχίζεται η παραπάνω διαδικασία; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

## Δραστηριότητα 3

Αν η διαδικασία συνεχιστεί πάρα πολλές φορές, η απάντησή σας στη Δραστηριότητα 3 θα είναι η ίδια; Δώστε μια διαφορετική αιτιολόγηση για την απάντησή σας χρησιμοποιώντας το σχήμα στο αρχείο **snowflake**.

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………