



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ρουτίνες που εκτελούν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με μία εφαρμογή έξυπνων συσκευών: το πρόβλημα της μεταφοράς

Τριανταφυλλάκος Ανδρέας
Δ 201503

Επιβλέπουσα Συμβουλευτικής Επιτροπής

Πόταρη Δέσποινα

Καθηγήτρια

Αθήνα
Σεπτέμβριος, 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 27^η Σεπτεμβρίου 2019 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο

Βαθμίδα

-
- | | |
|---------------------------|------------------|
| • Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα) | Καθηγήτρια |
| • Χ. Τριανταφύλλου | Επικ. Καθηγήτρια |
| • Π. Σπύρου | Αναπλ. Καθηγητή |

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της Συμβουλευτική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο

Βαθμίδα

-
- | | |
|---------------------------|------------------|
| • Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα) | Καθηγήτρια |
| • Χ. Τριανταφύλλου | Επικ. Καθηγήτρια |
| • Π. Σπύρου | Αναπλ. Καθηγητή |

Ευχαριστίες

Με αφορμή την ολοκλήρωση των σπουδών μου θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κα Δέσποινα Πόταρη, για τα καθοριστικά ερεθίσματα που μου έδωσε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, αλλά, κυρίως, για την τεράστια υπομονή και επιμονή που έδειξε μαζί μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	7
Abstract	8
1. Εισαγωγή.....	9
2. Θεωρητικό υπόβαθρο – Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	12
2.1. Ρουτίνες.....	12
2.2. Ρουτίνες τελετουργίας (<i>rituals</i>) και ρουτίνες εξερεύνησης (<i>explorations</i>).....	15
2.3. Πορεία εξέλιξης ρουτινών.....	17
2.4. Μη επίσημος μαθηματικός λόγος vs επίσημος μαθηματικός λόγος.....	19
2.5. Η μεταφορά – Σχολικά και καθημερινά προβλήματα.....	22
3. Μεθοδολογία.....	26
3.1. Στόχοι της έρευνας – Ερευνητικά ερωτήματα.....	26
3.2. Μέθοδος.....	26
3.3. Δραστηριότητα.....	26
3.4. Πλαίσιο έρευνας, συμμετέχοντες και διαδικασία.....	32
3.5. Διαδικασία ανάλυση δεδομένων.....	33
4. Ανάλυση-Αποτελέσματα.....	39
4.1. Πρώτο ερευνητικό ερώτημα: Τι είδους ρουτίνες αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με μία εφαρμογή σε έξυπνες συσκευές;.....	39
4.2. Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: Παρατηρείται μεταφορά κατά την ενασχόληση των μαθητών με την εφαρμογή; Πώς καταφέρνουν να την πραγματοποιήσουν;.....	55
5. Συζήτηση-Συμπεράσματα.....	64
Βιβλιογραφία.....	70
Παράρτημα I.....	72
Παράρτημα II.....	73
Παράρτημα III.....	79

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε τη *μεταφορά* που επιτυγχάνουν οι μαθητές κατά την προσπάθεια δημιουργίας ενός μοντέλου, που σκοπό έχει να περιγράψει τον τρόπο λειτουργίας μίας εφαρμογής για έξυπνες συσκευές. Υιοθετώντας την επικοινωνιακο-γνωστική προσέγγιση (Sfard, 2008) και θεωρώντας την μάθηση ως τη ρουτινοποίηση των ενεργειών των μαθητών (Lavie κ.ά., 2018), (α) εντοπίσαμε και αναλύσαμε τις ρουτίνες που ανέπτυξαν οι μαθητές κατά την εμπλοκή τους με την εφαρμογή και (β) μελετήσαμε πώς επιτυγχάνουν τη *μεταφορά*. Υιοθετήσαμε μία δυναμική οπτική για την *μεταφορά*, θεωρώντας ότι οι λόγοι που αναπτύσσονται περιορίζονται –χωρίς να καθορίζονται– από τα κοινωνικο-πολιτισμικά όρια, όπως αυτά τα αντιλαμβάνεται κάθε φορά ο μαθητής. Μέσω της ανάλυσης των ρουτινών προσδιορίσαμε τους *ταυτοποιητές* (Lavie κ.ά., 2018), δηλαδή τα χαρακτηριστικά της κατάστασης που βοηθούν τον μαθητή να «διαπεράσει» αυτά τα όρια. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι ρουτίνες που πραγματοποίησαν οι μαθητές και άνηκαν στον μαθηματικό λόγο αποτέλεσαν μειονότητα και, μάλιστα, ήταν *τελετουργίας* –αυτές που ο μαθητής εστιάζει στη διαδικασία και η πραγματοποίησή τους εξυπηρετεί κοινωνικές ανάγκες (Sfard, 2008). Τα είδη μεταφοράς που εντοπίστηκαν ήταν τρία: (α) από τα περιορισμένα -στα όρια της τάξης- μαθηματικά, στον καθημερινό λόγο, (β) από τα περιορισμένα -στα όρια της τάξης- μαθηματικά, στα χρήσιμα, για την δημιουργία ενός μοντέλου, (γ) από τον καθημερινό λόγο ή από τον μη επίσημο μαθηματικό (colloquial) στον μαθηματικό (literate mathematical discourse). Τρία ήταν και τα είδη των ταυτοποιητών: (α) η έξυπνη συσκευή, (β) οι οπτικοί διαμεσολαβητές της εφαρμογής, δηλαδή ενδείξεις που εκπραγματώναν την κίνηση της συσκευής στον χώρο και (γ) κάποιες από τις ερωτήσεις των εκπαιδευτικών.

Λέξεις κλειδιά: μεταφορά· ρουτίνες· τελετουργίας και εξερεύνησης· μοντελοποίηση· έξυπνες συσκευές

Abstract

In this research, we studied the *transfer of knowledge* of two 17-year-old students, while trying to understand how a smart phone application works. Adopting *commognitive* framework (Sfard, 2008) and theorizing learning as the *routinization* of students' actions (Lavie et al., 2018), we developed a methodological tool that helped us (a) identify the routines that emerged and (b) analyze the *transfer*. We theorized *transfer* as the extension of the *precedent search space* that occurred with the help of *precedents identifiers* (Lavie et al., 2018) –a dynamic view that helped us alternate between *insiders'* and *outsiders' perspective* (Sfard, 2008). The results show that the routines of the students were, in the majority, *rituals* – those that are process-oriented (Lavie et al., 2018). We found three types of transfer: from the classroom mathematics to (a) everyday discourse and to (b) mathematical discourse that led to the modelization of the problem, and (c) from everyday or colloquial mathematical discourse to literate mathematical discourse. We found three types of precedent identifiers too: (a) the smart phone, (b) visual mediators and (c) teachers' questions.

Keywords: Transfer· Routines· Rituals explorations· Modelization· Smart phone application

1. Εισαγωγή

Το ζήτημα της μεταφοράς γνώσης έχει απασχολήσει αρκετά την έρευνα, κυρίως γιατί πιστεύεται ότι, μελετώντας το, θα μπορέσουμε να βρούμε τρόπους να βοηθήσουμε τους μαθητές στην αντιμετώπιση καταστάσεων εκτός σχολικών πλαισίων. Οι έρευνες έχουν εστιάσει στη μεταφορά, από τα σχολικά μαθηματικά σε καθημερινές καταστάσεις και αντίστροφα (π.χ. Nunes, Schliemann & Carraher, 1993), από τα σχολικά μαθηματικά στον χώρο εργασίας (π.χ. Triantafyllou & Potari, 2014) και από τα μαθηματικά σε επιστημονικά πεδία εκτός μαθηματικών, όπως φυσικές επιστήμες, οικονομικά κ.λπ. (π.χ. Viirman & Nardi, 2018). Οι θεωρητικές προσεγγίσεις για τη μεταφορά ποικίλουν, ξεκινώντας από αυτούς που υιοθετούν μία «υβριδική» προσέγγιση και θεωρούν ότι καταστάσεις έργων που ανήκουν σε διαφορετικά πλαίσια μπορούν να θεωρηθούν ως ισοδύναμες (π.χ. Glenn, αναφέρεται στον Evans, 1999), και καταλήγοντας σε εκείνους που υιοθετούν μία «περιοριστική» προσέγγιση και θεωρούν ότι καταστάσεις έργων που ανήκουν σε διαφορετικά πλαίσια δεν πρέπει να θεωρούνται ίδιες λόγω των διαφορετικών διαδικασιών, κοινωνικών σχέσεων, τεχνουργημάτων κ.ά. μεταξύ των πλαισίων (π.χ. η Lave στις αρχικές της προσεγγίσεις, αναφέρεται στον Evans, 1999). Οι περισσότερες σύγχρονες προσεγγίσεις τοποθετούνται κάπου στη μέση, θεωρώντας ότι, αν και σε διαφορετικά πλαίσια, μπορούν να γίνουν μεταβάσεις μεταξύ αυτών. Έτσι, θεωρητικές κατασκευές όπως του Engeström βλέπουν τη μεταφορά ως αλληλεπιδρόμενα συστήματα και κοινότητες πρακτικής, εστιάζοντας έτσι, όχι μόνο στη μεταφορά γνώσης, αλλά και στις αμοιβαίες προσπάθειες των δύο συστημάτων για τη δημιουργία γνώσης και πρακτικών (Triantafyllou & Potari, 2014).

Τα ερευνητικά αποτελέσματα των Nunes, Schliemann & Carraher (1993) ήταν καθοριστικά για τη στροφή στις σύγχρονες προσεγγίσεις της μεταφοράς. Στη μελέτη αυτή, ένα 12χρονο παιδί που πουλούσε καρύδες σε μία αγορά της Βραζιλίας, προσεγγίζεται από τον αγοραστή-ερευνητή, ο οποίος θέλει να αγοράσει καρύδες. Ο 12χρονος πωλητής υπολογίζει με μεγάλη ευκολία πόσο κοστίζουν 4 καρύδες των 35 κρουζέιρος η κάθε μία. Λίγο καιρό αργότερα, ζητείται από το ίδιο παιδί, στα πλαίσια του σχολείου, να υπολογίσει τον πολλαπλασιασμό 4·35. Το αποτέλεσμα ήταν δραματικά διαφορετικό, με το παιδί να δυσκολεύεται αρκετά να ακολουθήσει τον αλγόριθμο που συνήθως διδάσκεται στο σχολείο και, στο τέλος, να δίνει ένα παράλογο, στα μάτια των μαθηματικών, αποτέλεσμα. Οι ίδιοι οι ερευνητές θέτουν το ερώτημα: «πώς είναι δυνατόν παιδιά που μπορούν να κάνουν αριθμητικούς υπολογισμούς σε καθημερινές-πραγματικές καταστάσεις, να αποτυγχάνουν

στους ίδιους αριθμητικούς υπολογισμούς, όταν το πρόβλημα αποπλαισιώνεται;» (Nunes, Schliemann & Carraher, 1993, σελ. 6). Οι ίδιοι απαντούν υποστηρίζοντας ότι οι δύο ρουτίνες που εκτέλεσε το παιδί ήταν διαφορετικές, κάτι το οποίο μπορεί να εξηγήσει τα τόσο διαφορετικά αποτελέσματα, λαμβάνοντας υπόψη και την ελλιπή φοίτηση του παιδιού στο σχολείο. Ωστόσο, αυτό οδηγεί σε ένα καινούριο ερώτημα: γιατί το παιδί, παρά τη δυσκολία που αντιμετώπισε στον πολλαπλασιασμό αυτόν, δεν χρησιμοποίησε και στην τάξη την ίδια ρουτίνα που χρησιμοποίησε στην αγορά πουλώντας καρύδες; Γεννιέται, λοιπόν, η ανάγκη μίας θεωρητικής πλαισίωσης της μεταφοράς που θα «βλέπει» από τα μάτια του παιδιού την κατάσταση έργου, βοηθώντας έτσι τον ερευνητή να γίνει εξωτερικός στον λόγο των μαθηματικών (Sfard, 2008), ώστε να μπορεί να εξηγήσει καλύτερα *τι* είναι αυτό που το παιδί κάνει και *γιατί* το κάνει, αποφεύγοντας να πέσει στην παγίδα ενός ελλειμματικού λόγου (*deficit discourse*) που εστιάζει στο *τι δεν κάνει* (Adler, 2019· Lavie, Steiner & Sfard, 2018).

Τις ανάγκες εστίασης στις ενέργειες των μαθητών και θέασης των πραγμάτων από την οπτική του εξωτερικού στον λόγο των μαθηματικών, προσπαθούμε να καλύψουμε υιοθετώντας τη θεωρητική πλαισίωση των Lavie κ.ά. (2018) γύρω από τις *ρουτίνες*, αντλώντας στοιχεία και από άλλες σχετικές προσεγγίσεις, όπως Nachlieli & Katz (2017), Nachlieli & Tabach (2018), Sfard (2008), Sfard & Lavie (2005) και Viirman & Nardi (2018). Η ρουτίνα έχει χρησιμοποιηθεί ως ερευνητικό εργαλείο σε διάφορα πεδία, όπως στην κοινωνιολογία, στην ψυχολογία, στην ανθρωπολογία, ενώ πρόσφατα έχει μπει και στην εκπαίδευση, κυρίως στον τομέα της διδασκαλίας (Lavie κ.ά., 2018). Όλες αυτές οι θεωρητικές προσεγγίσεις έχουν ένα κοινό: αντιλαμβάνονται την έννοια της ρουτίνας ως μοτίβα ενεργειών που γεννιούνται μέσα από την εσωτερίκευση των μοτίβων που παρατηρούνται στην κοινωνία. Στηριζόμενοι, λοιπόν, στη θεωρητική προσέγγιση των Lavie κ.ά. (2018) χρησιμοποιούμε το θεωρητικό εργαλείο της *ρουτίνας*, το οποίο μας βοηθάει να εστιάσουμε και να αναλύσουμε τις ενέργειες των μαθητών και, στη συνέχεια, υιοθετούμε μία θεώρηση για τη *μεταφορά*, η οποία προσπαθεί να εντοπίσει το πώς γίνεται εφικτή η υπέρβαση των κοινωνικο-πολιτισμικών ορίων όπως, κάθε φορά, τα αντιλαμβάνεται ο μαθητής.

Για να ερευνήσουμε το φαινόμενο της μεταφοράς, όπως το έχουμε θεωρήσει, μελετήσαμε την εμπλοκή των μαθητών Β΄ Λυκείου με μία εφαρμογή για έξυπνες συσκευές, η οποία μετράει την απόσταση αντικειμένων από τον χρήστη, καθώς και το ύψος τους, ενώ ο χρήστης εστιάζει στο κατώτερο και το ανώτερο σημείο τους μέσω της κάμερας. Ζητείται από τους μαθητές να εξηγήσουν πώς η εφαρμογή καταφέρνει και μετράει αυτές τις αποστάσεις.

Αυτό, λοιπόν, που οι μαθητές απαιτείται να κάνουν είναι η δημιουργία ενός μοντέλου, το οποίο θα περιγράφει τη λειτουργία της εφαρμογής σε τριγωνομετρικό λόγο. Τα δεδομένα που παρήχθησαν ήταν από δύο 17χρονους μαθητές, όπου, ο καθένας ξεχωριστά ήρθε αντιμέτωπος με την παραπάνω κατάσταση έργου. Και οι δύο είχαν ολοκληρώσει τη Β΄ Λυκείου, με τον ένα από αυτούς να έχει ξεκινήσει καλοκαιρινή προετοιμασία για τη Γ΄ Λυκείου. Στόχος της έρευνας ήταν να εντοπιστούν οι ρουτίνες που εκτελούν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με την εφαρμογή και ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών εκείνων της παρούσας κατάστασης που βοηθούν τους μαθητές στη μεταφορά.

Στην ενότητα 2, παρουσιάζουμε τη θεώρηση που υιοθετούμε για τις ρουτίνες, πώς αυτές μεταβάλλονται με την εσωτερίκευση του λόγου, και πώς θεωρούμε τη μεταφορά στην παρούσα εργασία. Στην ενότητα 3, παρουσιάζουμε το ερευνητικό πρόβλημα, το πλαίσιο της έρευνας και τη διαδικασία παραγωγής και ανάλυσης των δεδομένων. Στην ενότητα 4, δίνουμε κάποια παραδείγματα για το πώς έγινε η ανάλυση των δεδομένων και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα. Τέλος, στην ενότητα 5 συζητάμε τα αποτελέσματά μας σε σχέση με εκείνα άλλων ερευνών.

2. Θεωρητικό υπόβαθρο – Βιβλιογραφική ανασκόπηση

2.1. Ρουτίνες

Με βάση την *επικοινωνιακο-γνωστική* [commognitive: communication+cognition, Sfard, (2008)] προσέγγιση, η μάθηση μπορεί να θεωρηθεί ως η *ρουτινοποίηση* (*routinization*) των ενεργειών των μαθητών. Η *ρουτίνα*, μπορεί να αντικαταστήσει τους όρους *έννοια* και *δεξιότητες* που παραδοσιακά χρησιμοποιούνται στην έρευνα ως μονάδες ανάλυσης στη μελέτη της μάθησης (Adler, 2019· Heyd-Metzuyanim & Graven, 2019· Heyd-Metzuyanim, Smith, Bill, & Resnick, 2018· Heyd-Metzuyanim, Tabach & Nachlieli, 2015· Lavie, Steiner & Sfard, 2018· McCloskey, Lloyd, & Lynch, 2017· Nachlieli & Katz, 2017· Nachlieli & Tabach, 2012· Nachlieli & Tabach, 2018· Robertson & Graven, 2018· Sfard, 2008· Sfard & Lavie, 2005· Viirman & Nardi, 2018). Η έννοια της ρουτίνας έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν σε διάφορα πεδία, όπως στην κοινωνιολογία, στην ψυχολογία, στην ανθρωπολογία, ενώ πρόσφατα έχει μπει και στην εκπαίδευση, κυρίως στον τομέα της διδασκαλίας (Lavie κ.ά., 2018). Όλες αυτές οι θεωρητικές προσεγγίσεις έχουν ένα κοινό: αντιλαμβάνονται την έννοια της ρουτίνας ως μοτίβα ενεργειών που αναπτύσσονται μέσα από την εσωτερίκευση των μοτίβων που παρατηρούνται στην κοινωνία. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε την θεωρητική προσέγγιση των Lavie κ.ά. (2018) για την έννοια της ρουτίνας, αντλώντας στοιχεία και από άλλες προσεγγίσεις, όπως Nachlieli & Katz (2017), Nachlieli & Tabach (2018), Sfard (2008), Sfard & Lavie (2005) και Viirman & Nardi (2018). Στην συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιες έννοιες που είναι απαραίτητες για την εννοιοποίηση της ρουτίνας.

Οι Lavie κ.ά., (2018) υποστηρίζουν ότι η δυνατότητα ενός ατόμου να δρα όταν έρχεται αντιμέτωπο με μία κατάσταση έργου, αποδίδεται στην προηγούμενή του εμπειρία. Συγκεκριμένα, ένα άτομο μπορεί να δράσει επειδή η υπάρχουσα κατάσταση έργου ανακαλεί *προηγούμενα* (*precedents*) -καταστάσεις του παρελθόντος τις οποίες το άτομο τις αντιλαμβάνεται αρκετά όμοιες με την παρούσα, ώστε να επαναλάβει -ίσως με προσαρμογές- ό,τι συνέβη σε εκείνες τις καταστάσεις. Τα *προηγούμενα* μπορεί να έχουν πραγματοποιηθεί είτε από το ίδιο το άτομο, είτε από άλλους (π.χ. τον εκπαιδευτικό). Η καταφυγή στα *προηγούμενα* μπορεί να είναι αποτέλεσμα συνειδητής ή μη προσπάθειας.

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, έναν μαθητή της Β΄ Γυμνασίου, ο οποίος αντιμετωπίζει μία κατάσταση έργου στο μάθημα των μαθηματικών καθώς διδάσκεται το κεφάλαιο των συναρτήσεων. Τα προηγούμενα στα οποία ο μαθητής θα καταφύγει -συνειδητά ή μη- θα είναι, πιθανότατα, υποσύνολο των καταστάσεων που έχει συναντήσει το τελευταίο διάστημα στο

μάθημα των μαθηματικών και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο των συναρτήσεων. Είναι σχεδόν απίθανο ο μαθητής να καταφύγει σε προηγούμενα εκτός σχολείου, όπως για παράδειγμα σε προηγούμενα από το σούπερ μάρκετ ή από μία λαϊκή αγορά, ακόμα κι αν αυτά σχετίζονται με την κατάσταση έργου που αντιμετωπίζει (π.χ. Nunes, Schliemann & Carraher, 1993). Αλλά σχεδόν απίθανο φαντάζει ο μαθητής να καταφύγει και σε προηγούμενα εντός σχολείου που όμως δεν σχετίζονται με το μάθημα των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα σε προηγούμενα από το μάθημα της γλώσσας ή της πληροφορικής, ακόμα κι αν αυτά μπορούν να του φανούν χρήσιμα στην κατάσταση έργου με την οποία έρχεται αντιμέτωπος (π.χ. Gurnik & Saban, αναφέρεται στην Sfard, 2008). Όπως αναφέρουν οι Lavie κ.ά. (2018), η αναζήτηση για προηγούμενα, συνήθως περιορίζεται σε έναν *Χώρο-Αναζήτησης-Προηγούμενων* (*precedent-search-space*, ΧΑΠ, για συντομία). Ένας αρχικός ΧΑΠ συχνά δημιουργείται από τη στιγμή που το άτομο μπαίνει στην τάξη, πριν καν τεθεί η οποιαδήποτε κατάσταση έργου, όπως ακριβώς συνέβη στο παράδειγμα με τον μαθητή Β΄ Γυμνασίου που περιγράψαμε, όπου ο ΧΑΠ περιορίστηκε σε αυτά που έχει κάνει ο μαθητής το τελευταίο διάστημα στο μάθημα των μαθηματικών, ανεξάρτητα από την κατάσταση έργου που αντιμετώπιζε.

Πώς, όμως, από τον ΧΑΠ επιλέγει κανείς τα προηγούμενα εκείνα τα οποία θα τον βοηθήσουν στην κατάσταση έργου που αντιμετωπίζει; Στη διαδικασία αυτή συμβάλλουν οι *ταυτοποιητές προηγούμενων* (*precedent identifiers*), δηλαδή «τα χαρακτηριστικά εκείνα της παρούσας κατάστασης έργου τα οποία ένα άτομο τα θεωρεί ικανά, ώστε να αντιληφθεί μία κατάσταση έργου από το παρελθόν ως προηγούμενο» (Lavie κ.ά. 2018, σελ. 8).

Στο σημείο αυτό χρειάζεται μία σημαντική διευκρίνιση: για την ίδια κατάσταση έργου, διαφορετικά άτομα μπορεί να χρησιμοποιούν διαφορετικούς ταυτοποιητές προηγούμενων (Lavie κ.ά. 2018· Sfard & Lavie, 2005). Αυτό συνέβη στην έρευνα των Lavie κ.ά. (2018) όπου ένα αγόρι 2 ετών και 8 μηνών, ο Μίλο, έχοντας μπροστά του δύο μπουλ από το αγαπημένο του σνακ, κλήθηκε να απαντήσει στην ερώτηση «Πού υπάρχουν περισσότερα κομμάτια Bamba;». Για έναν ειδικό, οι ταυτοποιητές προηγούμενων είναι: (α) οι δύο συλλογές αντικειμένων και (β) η ερώτηση «Πού υπάρχουν περισσότερα;». Αντίθετα, για τον Μίλο, όπως έδειξε η ανάλυση, ήταν η παρουσία του ερευνητή που λειτούργησε ως ταυτοποιητής και τον οδήγησε να προσπαθήσει να μιμηθεί –όχι με ιδιαίτερη επιτυχία– αυτά που οι μεγαλύτεροι έκαναν σε προηγούμενες καταστάσεις.

Από την παραπάνω παρατήρηση καθώς και από θεωρητικά και εμπειρικά επιχειρήματα ερευνών (Lavie κ.ά. 2018· Sfard, 2008· Sfard & Lavie, 2005), συμπεραίνουμε ότι ένα έργο

μπορεί να είναι διαφορετικό από τα μάτια ενός μαθητή σε σχέση με το πώς το βλέπει ένας ειδικός, μπορεί, δηλαδή, να δημιουργηθεί ένα *κενό λόγου* (*discursive gap*). Κάτι τέτοιο πρέπει να το έχει υπόψη του ένας ερευνητής κατά την ανάλυση των δεδομένων του, γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγηθεί σε έναν *ελλειμματικό λόγο* (*deficit discourse*), δηλαδή σε έναν λόγο ο οποίος επικεντρώνεται σε όσα ο μαθητής δεν μπορεί να κάνει, παραβλέποντας τα όσα ο μαθητής κάνει, το *πώς* τα κάνει και το *γιατί* τα κάνει (Adler, 2019· Lavie κ.ά. 2018· Sfard, 2008). Έτσι, λοιπόν, προκύπτει η ανάγκη για θεωρητικά εργαλεία που διευκολύνουν να συλλάβουμε το πώς *ο μαθητής* βλέπει την κατάσταση έργου.

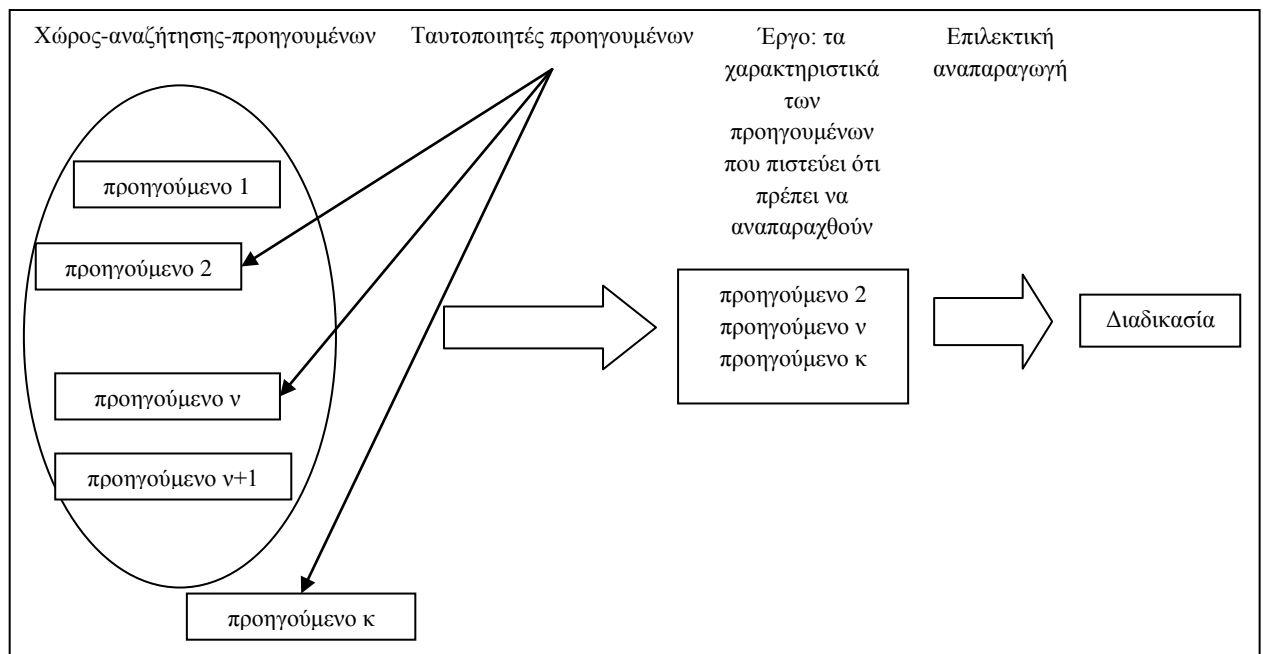
Με βάση ακριβώς αυτήν τη λογική, οι Lavie κ.ά. (2018), ορίζουν την έννοια της *ρουτίνας*, χρησιμοποιώντας τις έννοιες του *έργου* και της *διαδικασίας*. Ο όρος *έργο* συνδέεται με το άτομο για το οποίο μιλάμε κάθε φορά και είναι το πώς το *ίδιο το άτομο* ερμηνεύει την κατάσταση έργου. Έτσι, «ένα *έργο*, όπως γίνεται αντιληπτό από ένα άτομο σε μία συγκεκριμένη κατάσταση έργου, είναι το σύνολο όλων των προηγούμενων που το άτομο θεωρεί ότι χρειάζεται να αναπαραχθούν» (Lavie κ.ά., 2018, σελ. 9, η έμφαση προστέθηκε).

Αυτή η αναπαραγωγή είναι επιλεκτική: κατά τη δράση του, το άτομο διατηρεί κάποια στοιχεία από τις προηγούμενες καταστάσεις, ενώ κάποια άλλα τα αλλάζει. Η *διαδικασία* που εκτελεί ένα άτομο σε μία συγκεκριμένη κατάσταση έργου, είναι ακριβώς αυτές οι ενέργειές του, οι οποίες είναι αποτέλεσμα της επιλεκτικής αναπαραγωγής που κάνει (Lavie κ.ά., 2018).

Έχοντας ορίσει τις έννοιες του έργου και της διαδικασίας, οι Lavie κ.ά. (2018) εννοιοποιούν την *ρουτίνα* ως μία θεωρητική κατασκευή που «βλέπει» από τη σκοπιά του εκτελεστή –για παράδειγμα του μαθητή– την κατάσταση έργου: «η *ρουτίνα* που εκτελείται σε μία συγκεκριμένη κατάσταση έργου από ένα συγκεκριμένο άτομο είναι το *έργο* –όπως ακριβώς το αντιλαμβάνεται το άτομο– μαζί με τη *διαδικασία* που εκτέλεσε ώστε να πραγματοποιηθεί το *έργο*» (Lavie κ.ά., 2018, σελ. 9, η έμφαση προστέθηκε).

Έτσι, λοιπόν, η ρουτίνα έχει οριστεί ως η *δυάδα* *έργο-διαδικασία*. Η διαφορά που κάνει αυτή η θεωρητική προσέγγιση της ρουτίνας σε σχέση με τις υπόλοιπες είναι, πρώτον, ότι καταφέρνει να δει τα φαινόμενα από τη σκοπιά του εκτελεστή –π.χ. του μαθητή– και, δεύτερον, ότι δεν είναι ανεξάρτητη του χρόνου, καθώς εστιάζει στις συγκεκριμένες κάθε φορά ενέργειες, κάτι το οποίο μπορεί να μας βοηθήσει στη συσχέτιση του τρόπου που ο εκτελεστής δρα στο τώρα, με τις προηγούμενές του εμπειρίες. Αυτή η διαφορετική προσέγγιση κάνει την ρουτίνα ένα πιο λειτουργικό θεωρητικό εργαλείο, καθώς μπορεί να εστιάσει στις αλλαγές που παρουσιάζονται στα μοτίβα ενεργειών, δηλαδή μπορεί να εστιάσει στη μάθηση.

Με βάση την έως τώρα θεωρητική προσέγγιση κατασκευάστηκε η Εικόνα 1, η οποία παρουσιάζει σχηματικά την πορεία αντιμετώπισης μίας κατάστασης έργου από έναν μαθητή. Όπως έχουμε ήδη πει, ο χώρος-αναζήτησης-προηγούμενων διαμορφώνεται πριν καν ταθεί η κατάσταση έργου και, συνήθως, αποτελείται από προηγούμενα που έχει συναντήσει ο μαθητής το τελευταίο διάστημα. Όταν τεθεί η κατάσταση έργου, οι ταυτοποιητές προηγούμενων βοηθούν τον μαθητή να εντοπίσει τα προηγούμενα από τον αρχικό ΧΑΠ ή να επεκτείνει τον υπάρχοντα ΧΑΠ. Πλέον, το έργο για τον μαθητή είναι το σύνολο όλων των προηγούμενων, δηλαδή των καταστάσεων του παρελθόντος που ο μαθητής τις αντιλαμβάνεται αρκετά όμοιες με την παρούσα, ώστε να επαναλάβει –ίσως με προσαρμογές–, τι συνέβη σε εκείνες τις καταστάσεις. Η αναπαραγωγή αυτή είναι επιλεκτική. Οι ενέργειες που τελικά εκτελούνται από τον μαθητή είναι η διαδικασία.



Εικόνα 1: Πορεία αντιμετώπισης μίας κατάστασης έργου από ένα άτομο

2.2. Ρουτίνες τελετουργίας (*rituals*) και ρουτίνες εξερεύνησης (*explorations*)

Οι ρουτίνες διακρίνονται σε δύο είδη, τις *ρουτίνες τελετουργίας (rituals)* και τις *ρουτίνες εξερεύνησης (explorations)*. Ο όρος *τελετουργία* χρησιμοποιείται στις επιστήμες της ανθρωπολογίας και της κοινωνιολογίας για την μελέτη κοινωνικών συνηθειών, αλληλεπίδρασης και θρησκευτικών τελετών (Lavie κ.ά., 2018). Οι τελετουργίες εξυπηρετούν κοινωνικές ανάγκες, ενισχύοντας τους κοινωνικούς δεσμούς μεταξύ των ατόμων και επιβάλλοντας νόημα σε καταστάσεις που για το άτομο μοιάζουν χαοτικές και αυθαίρετες (Sfard, 2008).

Για να κάνουμε πιο κατανοητή την εννοιοποίηση της τελετουργίας στην μάθηση των μαθηματικών, θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι σε μία τάξη μαθηματικών Β΄ Λυκείου πραγματοποιείται το πρώτο μάθημα στη μαθηματική επαγωγή. Η κατάσταση έργου με την οποία συνήθως εμπλέκονται οι μαθητές είναι ένας ισχυρισμός $P(n)$, ο έλεγχος του ισχυρισμού για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις και το ερώτημα πώς θα καταφέρουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για κάθε φυσικό αριθμό n . Η αποδεικτική μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής έρχεται σαν από μηχανής θεός για να δώσει την λύση στο ερώτημα αυτό. Τέλος, πραγματοποιούνται κάποιες ασκήσεις-εφαρμογές στην νέα αποδεικτική μέθοδο, την μαθηματική επαγωγή. Η έρευνα γύρω από τις παρανοήσεις των μαθητών έχει δείξει ότι πολλοί μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα κάποιων συνθηκών της μαθηματικής επαγωγής, όπως του βασικού και του επαγωγικού βήματος (Ernest, 1984). Παρόλα αυτά, αρκετοί είναι οι μαθητές που ελέγχουν όλες τις συνθήκες, γιατί αυτό θεωρείται σωστό από την κοινότητα της τάξης. Οι μαθητές, λοιπόν, εκτελούν μία διαδικασία, χωρίς να εστιάζουν στο αποτέλεσμα αυτής, χωρίς να έχουν ως σκοπό την παραγωγή μίας νέας αφήγησης. Αντίθετα, μιμούνται, με μικρές ίσως προσαρμογές, προηγούμενες διαδικασίες, εστιάζοντας στην ίδια τη διαδικασία, δηλαδή στο «πώς συνεχίζω;» και στο «ποιες διαδικασίες πρέπει να ακολουθήσω;». Ρουτίνες σαν αυτή, μπορούν να χαρακτηριστούν ως ρουτίνες τελετουργίας. Γενικά, οι Lavie κ.ά., (2018), ορίζουν ως *ρουτίνες τελετουργίας* τις ρουτίνες που εστιάζουν στη διαδικασία (*process-oriented*) και όχι στο αποτέλεσμα (*product-oriented*). Ο εκτελεστής αυτής της ρουτίνας δεν μπορεί να αιτιολογήσει γιατί χρησιμοποιεί την συγκεκριμένη διαδικασία, ούτε να βρει μία εναλλακτική, καθώς η διαδικασία που πραγματοποιεί αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι του έργου. Τέτοιες ρουτίνες πραγματοποιούνται όταν υπάρχει η προσδοκία από άλλους να συμβεί αυτό –συνήθως αυτοί οι άλλοι είναι κατά κάποιον τρόπο ανώτεροι- και έχουν ως σκοπό την κοινωνική ανταμοιβή ή την αποφυγή τιμωρίας (Lavie κ.ά., 2018· Sfard, 2008).

Αντίθετα, όταν η εκτέλεση μίας ρουτίνας εστιάζει στο αποτέλεσμα (*product-oriented*), αυτή καλείται *ρουτίνα εξερεύνησης* (Lavie κ.ά., 2018). Σκοπός της εκτέλεσης μίας τέτοιας ρουτίνας είναι η παραγωγή νέων αφηγήσεων για τα μαθηματικά αντικείμενα. Η ερώτηση που θέλει να απαντήσει ο εκτελεστής μίας τέτοιας ρουτίνας είναι «Τι είναι αυτό στο οποίο θέλω να καταλήξω;». Στη συνέχεια θα συζητήσουμε για την πορεία εξέλιξης των ρουτινών και για το πώς μπορεί κανείς να διαχωρίσει τις ρουτίνες τελετουργίας από τις ρουτίνες εξερεύνησης.

2.3. Πορεία εξέλιξης ρουτινών

Με βάση τα όσα έχουμε παρουσιάσει για τις ρουτίνες τελετουργίας και εξερεύνησης, ως εκπαιδευτικοί θα προτιμούσαμε οι μαθητές να εκτελούν ρουτίνες εξερεύνησης στις καταστάσεις έργου που αντιμετωπίζουν. Ωστόσο, οι ρουτίνες τελετουργίας, όχι μόνο είναι αναπόφευκτες στην ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου, αλλά αποτελούν και τους θεμέλιους λίθους πάνω στους οποίους χτίζονται οι νέοι λόγοι (Nachlieli & Tabach, 2018).

Η Sfard (2008) τονίζει ένα παράδοξο που υπάρχει στην εκπαίδευση, το οποίο μπορεί να δώσει μία ερμηνεία για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην μάθηση και ιδιαίτερα στη μάθηση των μαθηματικών: ο μόνος τρόπος για να εξοικειωθεί κανείς με έναν νέο λόγο είναι μέσα από την εμπλοκή του με αυτόν τον λόγο. Πώς, όμως, θα συμμετάσχει κανείς σε έναν λόγο με τον οποίο δεν είναι εξοικειωμένος;! Για να ξεπεράσουν αυτή την κυκλικότητα, οι μαθητές πραγματοποιούν ρουτίνες τελετουργίας, μέσω των οποίων έρχεται σταδιακά η *εξατομίκευση (individualization)* του νέου λόγου (Lavie κ.ά., 2018· Sfard, 2008). Πράγματι, για να εστιάσουν οι μαθητές στο αποτέλεσμα της ρουτίνας (product-oriented), και άρα να εκτελούν ρουτίνες εξερεύνησης, πρέπει να δουν στην πράξη τη χρησιμότητα του αποτελέσματος αυτού. Πώς, όμως, θα δουν αυτή τη χρησιμότητα αν δεν αποκτήσουν εμπειρία με την ρουτίνα που, στα αρχικά στάδια, θα είναι αναπόφευκτα ρουτίνα τελετουργίας;! Ο δρόμος, λοιπόν, για την ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου περνάει μέσα από τις ρουτίνες τελετουργίας (Lavie κ.ά., 2018· Nachlieli & Tabach, 2018).

Αυτός ο δρόμος δεν είναι ομαλός. Η μετάβαση από την εκτέλεση ρουτινών τελετουργίας στην εκτέλεση ρουτινών εξερεύνησης (*de-ritualization*) είναι μία σταδιακή (Lavie κ.ά., 2018· Sfard, 2008· Sfard & Lavie, 2005) και μη-γραμμική (Viirman & Nardi, 2018) διαδικασία. Μεταξύ των ρουτινών τελετουργίας και εξερεύνησης υπάρχει ένα ολόκληρο φάσμα, ένα συνεχές διάστημα, στο οποίο μπορεί να τοποθετηθεί η ρουτίνα που εκτελεί κάθε φορά ο μαθητής. Στη συνέχεια, βασιζόμενοι στους Lavie κ.ά. (2018), Nachlieli & Katz (2017), Nachlieli & Tabach (2018) και Sfard (2008), παρουσιάζουμε μία λίστα στοιχείων-χαρακτηριστικών που μπορεί κανείς να παρατηρήσει σε μία ρουτίνα. Αυτά τα στοιχεία μπορούν να βοηθήσουν στην τοποθέτηση μίας ρουτίνας ενός μαθητή στο «συνεχές διάστημα» μεταξύ τελετουργίας και εξερεύνησης.

Ευελιξία (flexibility). Η πραγματοποίηση ρουτινών με πιο ευέλικτο τρόπο σημαίνει ότι υπάρχουν πλέον περισσότεροι από ένας τρόποι για την πραγματοποίηση του έργου. Δηλαδή, σε μία τέτοια περίπτωση, διαφορετικές εναλλακτικές διαδικασίες μπορούν να εκτελεστούν για

την πραγματοποίηση του ίδιου έργου (Lavie κ.ά., 2018). Η ευελιξία είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό ρουτινών εξερεύνησης. Αντίθετα, οι ρουτίνες τελετουργίας χαρακτηρίζονται από ακαμψία: οι ρουτίνες έχουν συνδεθεί με μία συγκεκριμένη διαδικασία. Η πραγματοποίηση του έργου συχνά ταυτίζεται με την διαδικασία, δηλαδή σκοπός του μαθητή είναι η εκτέλεση της συγκεκριμένης διαδικασίας και όχι η παραγωγή μίας αφήγησης. Πρόκειται για ρουτίνες που είναι εστιασμένες στη διαδικασία (process-oriented) και όχι στο αποτέλεσμα (product-oriented). Ο εκτελεστής της ρουτίνας προσπαθεί να απαντήσει το ερώτημα «πώς συνεχίζω» και όχι το ερώτημα «πού θέλω να καταλήξω».

Δημιουργία δεσμών (bondedness). Η δημιουργία δεσμών σε μία ρουτίνα σημαίνει ότι το αποτέλεσμα ενός βήματος (output) της ρουτίνας χρησιμοποιείται σαν εισαγωγή (input) σε επόμενο βήμα της ρουτίνας (Lavie κ.ά., 2018). Η δημιουργία δεσμών αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό μίας ρουτίνας εξερεύνησης, καθώς κατά την εκτέλεση τέτοιων ρουτινών, ο εκτελεστής εστιάζει στο αποτέλεσμα κι έτσι δεν υπάρχει χώρος για βήματα που δεν είναι αναγκαία για την πραγματοποίηση του έργου. Αντίθετα, κατά την πραγματοποίηση ρουτινών τελετουργίας, αν και ο εκτελεστής μπορεί να εκτελεί τα επιμέρους βήματα με επιτυχία, δεν μπορεί να δει τη σχέση που έχουν αυτά μεταξύ τους και να χρησιμοποιήσει το αποτέλεσμα του ενός (output) ως εισαγωγή στο επόμενο (input).

Εφαρμοσιμότητα (applicability). Η ευρεία εφαρμοσιμότητα μίας ρουτίνας σημαίνει ότι μπορεί να αποτελέσει προηγούμενο για την πραγματοποίηση μίας μεγάλης γκάμας σχετικών καταστάσεων έργου, ανεξάρτητα με το αν αυτά τα έργα ανήκουν σε διαφορετικά πλαίσια και η πραγματοποίησή τους απαιτεί την ανάπτυξη διαφορετικών λόγων. Ρουτίνες εξερεύνησης έχουν πιο μεγάλο εύρος εφαρμοσιμότητας από τις ρουτίνες τελετουργίας, καθώς η εκτέλεση των τελευταίων έχει συνδεθεί με συγκεκριμένο ανθρώπινο και φυσικό περιβάλλον. Έτσι, μία ρουτίνα που έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του σχολείου και ανήκει, έτσι, στον σχολικό μαθηματικό λόγο, έχει συνδεθεί με το περιβάλλον του σχολείου, την τάξη και τον εκπαιδευτικό των μαθηματικών. Η πραγματοποίησή της σε καταστάσεις εκτός σχολείου δύσκολα θα συμβεί, αν αυτή δεν έχει φτάσει το στάδιο της εξερεύνησης.

Διαμεσολάβηση εκτελεστή – Αυθεντία (performer's agentivity–authority). Στις ρουτίνες εξερεύνησης, ο εκτελεστής του έργου πραγματοποιεί μία διαδικασία εστιάζοντας στο αποτέλεσμα στο οποίο θέλει να καταλήξει. Ο εκτελεστής χαρακτηρίζεται από σχετική αυτονομία: χρησιμοποιεί τα αναγκαία προηγούμενα και εκτελεί την κατάλληλη διαδικασία, ώστε να καταλήξει στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Αντίθετα, κατά την πραγματοποίηση μίας

ρουτίνας τελετουργίας, ο εκτελεστής εξαρτάται από άλλους ανθρώπους για το τι πρέπει να κάνει και το πότε. Ορισμένα, ή και όλα, από τα στάδια πραγματοποίησης μίας ρουτίνας τελετουργίας –η εισαγωγή (initiation), η εκτέλεση και το κλείσιμο (closure) της ρουτίνας– απαιτούν την παρέμβαση ενός άλλου ατόμου, μίας αυθεντίας στα μάτια του εκτελεστή. Ο εκτελεστής έχει την ανάγκη της επιβεβαίωσης των επιμέρους βημάτων κατά την εκτέλεση της ρουτίνας (Lavie κ.ά., 2018; Sfard, 2008).

Αιτιολόγηση (substantiability). Ο τρόπος που ένας μαθητής θα αιτιολογήσει το τι έκανε και το γιατί η αφήγηση που παρήγαγε είναι αποδεκτή, μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για το είδος της ρουτίνας. Αν η αιτιολόγηση μένει σε μία απλή περιγραφή των βημάτων που ακολούθησε, τότε έχουμε ένα στοιχείο ότι η ρουτίνα είναι τελετουργίας. Αντίθετα, μία εναλλακτική διαδικασία η οποία θα έδινε το ίδιο αποτέλεσμα είναι σημάδι ρουτίνας εξερεύνησης. Για παράδειγμα, αν, για τη λύση μίας πρωτοβάθμιας εξίσωσης, η αιτιολόγηση που δίνει ένας μαθητής είναι μία περιγραφή των βημάτων που ακολούθησε προσπαθώντας να δείξει ότι δεν έχει κάνει κάποιο λάθος, αυτό είναι σημάδι ρουτίνας τελετουργίας. Αν, όμως, η αιτιολόγηση είναι μία εναλλακτική διαδικασία, όπως η αντικατάσταση του αριθμού που βρήκε στη θέση του αγνώστου και η επαλήθευση της αρχικής ισότητας, αυτό δείχνει ότι η ρουτίνα επίλυσης πρωτοβάθμιων εξισώσεων είναι στο στάδιο της εξερεύνησης.

2.4. Μη επίσημος μαθηματικός λόγος vs επίσημος μαθηματικός λόγος

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε μία κατηγοριοποίηση που κάνει η Sfard (2008) για τον λόγο. Η Sfard (2008) διακρίνει τους λόγους σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τον καθημερινό λόγο και τον μαθηματικό λόγο. Αν και, εκ πρώτης, η διάκριση μεταξύ των δύο λόγων ίσως ακούγεται απλή, στην πραγματικότητα δεν είναι. Όπως τονίζει η Sfard (2008, σελ. 131), «οι λόγοι είναι σε συνεχή ροή, ο ένας διεισδύει στον άλλον και δεν έχουν διακριτά όρια». Συχνά παρομοιάζονται με έναν ζωντανό οργανισμό που συνεχώς μεταβάλλεται. Όμως, αν και πιθανότατα δεν θα είναι ο ίδιος την επόμενη φορά που θα τον συναντήσεις, διατηρεί την ταυτότητά του μέσα από μία συνεχή μεταμόρφωση.

Πώς, λοιπόν, θα χαρακτηρίσουμε έναν λόγο ως μαθηματικό ή καθημερινό; Όπως υποστηρίζει η Sfard (2008), ο μαθηματικός λόγος έχει κάποιες χαρακτηριστικές ρουτίνες, με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να τον εντοπίσουμε. Τέτοια παραδείγματα θα μπορούσε να είναι η επίλυση μίας πρωτοβάθμιας εξίσωσης, η εύρεση του εμβαδού ενός κύκλου ή η απόδειξη της σύγκλισης μίας σειράς. Ωστόσο, υπάρχουν και κάποια άλλα χαρακτηριστικά τα οποία μπορούν να μας βοηθήσουν να εντοπίσουμε τον μαθηματικό λόγο. Αυτά είναι οι λέξεις

κλειδιά (*keywords*) που χρησιμοποιούνται, οι *οπτικοί διαμεσολαβητές* (*visual mediators*) και οι *αφηγήσεις* (*narratives*). Οι λέξεις κλειδιά είναι λέξεις που χρησιμοποιούνται στον μαθηματικό λόγο, όπως τετράγωνο, επίπεδο, τρία, συνάρτηση. Οι οπτικοί διαμεσολαβητές είναι αντικείμενα που έχουν κατασκευασθεί για να βοηθούν στην επικοινωνία του μαθηματικού λόγου και μπορούν να γίνουν αντιληπτά από τις αισθήσεις, σε αντίθεση με τα μαθηματικά αντικείμενα τα οποία είναι κατασκευάσματα λόγου (Sfard, 2008). Για παράδειγμα, τα σύμβολα «3» ή «III» και το τετράγωνο που σχεδιάζουμε στο χαρτί είναι οπτικοί διαμεσολαβητές για τον αριθμό τρία και την γεωμετρική έννοια του τετραγώνου αντίστοιχα. Τέλος, οι αφηγήσεις είναι φράσεις οι οποίες περιγράφουν τα αντικείμενα ενός λόγου, τις σχέσεις που τα συνδέουν ή τις διαδικασίες που συνδέονται με αυτά (Sfard, 2008). Οι αφηγήσεις αυτές, μέσω συγκεκριμένων διαδικασιών, μπορούν να χαρακτηριστούν ως «αληθείς» ή να απορριφθούν. Αφηγήσεις όπως «η διάμεσος προς την βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και ύψος και διχοτόμος» και « $2+3=5$ », είναι αφηγήσεις που έχουν *παγιωθεί* (*endorsed*) στον μαθηματικό λόγο, δηλαδή έχουν γίνει αποδεκτές από την κοινότητα των μαθηματικών. Αντίθετα, ο τετραγωνισμός του κύκλου, δηλαδή «η ύπαρξη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο» είναι μία αφήγηση η οποία έχει απορριφθεί.

Η Sfard (2008) προχωρεί σε περαιτέρω διαχωρισμό του μαθηματικού λόγου σε δύο κατηγορίες, στον *καθημερινό*-μη επίσημο (*colloquial*) μαθηματικό και στον *επίσημο* (*literate*) μαθηματικό λόγο. Παρακάτω παραθέτουμε ένα παράδειγμα καθημερινού μαθηματικού λόγου.

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε
1. Άννα	Ρόνι, πόσο χρονών είσαι;
2. Ρόνι	Επτά
3. Άννα	Πόσο χρονών είναι η Μόραν;
4. Ρόνι	Δώδεκα.
5. Άννα	Είναι μεγαλύτερη από εσένα; Πόσο;
6. Ρόνι	Δεν ξέρω... δεν το είχα σκεφτεί.
7. Άννα	Προσπάθησε να το σκεφτείς τώρα.
8. Ρόνι	Και αυτή επτά;
9. Άννα	Τι εννοείς
10. Ρόνι	Επτά, οκτώ, εννιά, δέκα, έντεκα, δώδεκα (μετά από κάθε αριθμό, μετράει ένα δάκτυλο)... έξι.

Πίνακας 1: Συζήτηση με ένα οκτάχρονο παιδί (Sfard, 2008, σελ. 132)

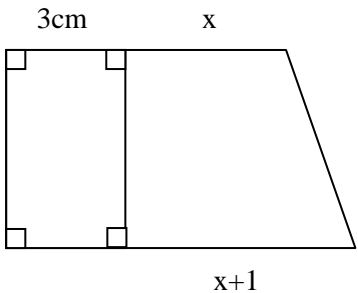
Ο καθημερινός-μη επίσημος μαθηματικός λόγος αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι καθημερινών δραστηριοτήτων. Έτσι, οι λόγοι που εμφανίζονται σε καθημερινές

δραστηριότητες, όπως η μέτρηση αντικειμένων και ο υπολογισμός του συνολικού κόστους κατά την αγορά αντικειμένων, ανήκουν στον καθημερινό-μη επίσημο μαθηματικό λόγο.

Αλλά ακόμα και στον επίσημο μαθηματικό λόγο μπορούμε να διακρίνουμε αρκετά διαφορετικά χαρακτηριστικά. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα μαθηματικού λόγου, όπως αυτό παρουσιάζεται από το βιβλίο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου (Εικόνα 2), κι ένα παράδειγμα από τις σημειώσεις του μαθήματος «Γεωμετρία» του ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών (Εικόνα 3) (Βασιλείου, 2015).

Εφαρμογή: Στο παρακάτω σχήμα, να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπέζιου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x.

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μικρή βάση είναι $ΔΓ = x + 3$ (cm), η μεγάλη βάση είναι $ΑΒ = x + 1 + 3 = x + 4$ (cm) και το ύψος είναι $ΔΑ = 6$ (cm). Άρα, το εμβαδόν του είναι:

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{(β + Β) \cdot υ}{2} = \frac{(x + 3 + x + 4) \cdot 6}{2} = 3(2x + 7) \text{ (cm}^2\text{)}$$


Εικόνα 2: Απόσπασμα βιβλίο Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου, σελ. 122

2.1.6 Πρόταση: Δύο διαφορετικές ευθείες k, ℓ έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, δηλαδή ένα σημείο P που ικανοποιεί τις σχέσεις $(P, k) \in I$ και $(P, \ell) \in I$.

Απόδειξη. Αν οι ευθείες k, ℓ είναι παράλληλες ($k // \ell$), τότε (αφού $k \neq \ell$) δεν υπάρχει κανένα κοινό σημείο P , άρα αληθεύει το συμπέρασμα.

Αν $k // \neq \ell$, τότε οπωσδήποτε υπάρχει κοινό σημείο P (γιατί αλλιώς οι ευθείες θα ήσαν παράλληλες). Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει κι ένα άλλο κοινό σημείο Q , δηλαδή $(Q, k) \in I \exists (Q, \ell)$. Θα δείξουμε ότι $P = Q$. Πραγματικά, αν ήταν P, Q , τότε κατά το [αξίωμα] (ΣΕ 1) ορίζεται η ευθεία $P \vee Q$. Απ' το άλλο μέρος, επειδή τα P, Q είναι και σημεία των k και ℓ , πάλι από το [αξίωμα] (ΣΕ 1) και το μονοσήμαντό του, προκύπτει ότι

$$k = P \vee Q = \ell,$$

πράγμα που αντίκειται στην υπόθεση k, ℓ . Επομένως, κατ' ανάγκην, καταλήγουμε στη σχέση $P = Q$. □

Εικόνα 3: Απόσπασμα από το "Θέματα Γεωμετρίας. Σημειώσεις για το ΠΜΣ Διδακτικής", σελ 40

Γίνεται κατανοητό ότι τα στοιχεία αυτών των δύο κατηγοριών μοιράζονται αρκετά κοινά χαρακτηριστικά για να θεωρηθούν ότι ανήκουν στην ίδια οικογένεια, αλλά και αρκετές διαφορές. Ο χαρακτηριστικός προτασιακός λογισμός, τα σύμβολα και η σημειογραφία ξεχωρίζουν το δεύτερο απόσπασμα από το πρώτο.

2.5. Η μεταφορά – Σχολικά και καθημερινά προβλήματα

Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζουμε κάποια παραδείγματα από την υπάρχουσα έρευνα που σχετίζονται με την μεταφορά καθώς και τη σύνθεση που πραγματοποιήσαμε για την μεταφορά στην παρούσα έρευνα.

Στην έρευνα των Nunes, Schliemann & Carraher (1993), ένα 12-χρονο παιδί που πουλούσε καρύδες σε μία αγορά της Βραζιλίας, προσεγγίζεται από τον αγοραστή-ερευνητή, ο οποίος θέλει να αγοράσει καρύδες. Ο 12-χρονος πωλητής υπολογίζει με μεγάλη ευκολία πόσο κοστίζουν 4 καρύδες των 35 κρουζέιρος η κάθε μία. Λίγο καιρό αργότερα, ζητείται από το ίδιο παιδί, στα πλαίσια του σχολείου, να υπολογίσει το αποτέλεσμα της πράξης 4·35. Το αποτέλεσμα ήταν δραματικά διαφορετικό, με το παιδί, ακολουθώντας τον αλγόριθμο που συνήθως διδάσκεται στο σχολείο, να δυσκολεύεται αρκετά και στο τέλος να απαντάει ότι το αποτέλεσμα είναι 200. Γεννιέται, λοιπόν, το ερώτημα «πώς είναι δυνατόν παιδιά που μπορούν να κάνουν αριθμητικούς υπολογισμούς σε καθημερινές-πραγματικές καταστάσεις, να αποτυγχάνουν στους ίδιους αριθμητικούς υπολογισμούς, όταν το πρόβλημα αποπλαισιώνεται;» (Nunes, Schliemann & Carraher, 1993, σελ. 6). Η απάντηση στο ερώτημα που δίνουν οι ίδιοι οι ερευνητές είναι ότι οι δύο ρουτίνες που εκτέλεσε το παιδί ήταν διαφορετικές, κάτι το οποίο μπορεί να εξηγήσει τα τόσο διαφορετικά αποτελέσματα, αν λάβουμε υπόψη μας και την ελλιπή φοίτηση του παιδιού στο σχολείο. Ωστόσο, αυτό οδηγεί σε ένα καινούριο ερώτημα: γιατί το παιδί, παρά τη δυσκολία που αντιμετώπισε στον πολλαπλασιασμό αυτόν, δεν χρησιμοποίησε και στην τάξη την ίδια ρουτίνα που χρησιμοποίησε στην αγορά πουλώντας καρύδες;

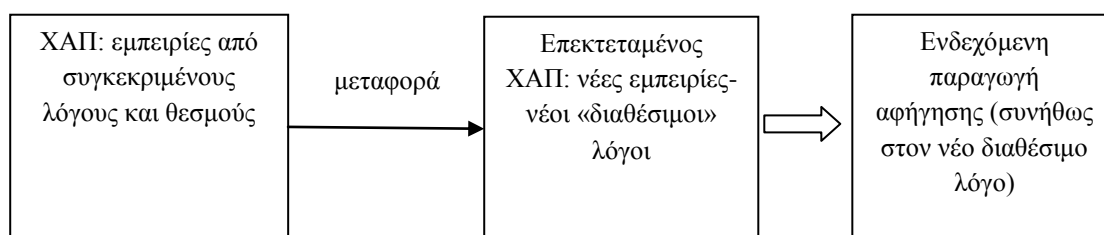
Οι Lavie κ.ά. (2018) υποστηρίζουν ότι οι Χώροι-Αναζήτησης-Προηγούμενων συνήθως δεν διασταυρώνονται, και τα όρια αυτών συμπίπτουν με τα όρια των λόγων και των θεσμών. Η, χρησιμοποιώντας τα λόγια της Sfard (2008, σελ.188), «καθημερινές καταστάσεις προκαλούν κυρίως μη επίσημο μαθηματικό λόγο, ενώ στις μαθηματικές καταστάσεις έργου κυριαρχεί ο μαθηματικός λόγος». Αυτό το φαινόμενο αποκαλείται συνήθως στη βιβλιογραφία «αδυναμία μεταφοράς» («lack of transfer» ή «situated knowledge»). Έτσι, για παράδειγμα, αν κάποιος αντιμετωπίζει μία κατάσταση έργου στο σχολείο, θα αναζητήσει κατάλληλες

ρουτίνες σε παλαιότερες εμπειρίες εντός σχολικών πλαισίων. Δύσκολα θα αναζητήσει μία ρουτίνα από εμπειρίες εκτός σχολικών πλαισίων, όπως για παράδειγμα από το σουπερμάρκετ, την λαϊκή αγορά ή τον χώρο εργασίας του, ακόμα και αν αυτές οι ρουτίνες μπορούν να τον βοηθήσουν στην κατάσταση έργου που αντιμετωπίζει. Αυτό ακριβώς συνέβη και με το 12-χρονο παιδί από την Βραζιλία, όπου, εντός σχολικών πλαισίων, κατάφερε να παράγει μόνο σχολικό μαθηματικό λόγο, δηλαδή μόνο τις ρουτίνες πολλαπλασιασμού που τις είχε συσχετίσει με το σχολείο. Αντίστοιχα, αν κάποιος αντιμετωπίζει μία κατάσταση έργου στο σουπερμάρκετ, στη λαϊκή αγορά ή στο χώρο εργασίας του, δύσκολα θα αναζητήσει ρουτίνες από τον σχολικό μαθηματικό λόγο. Είναι, όμως, αυτό ακατόρθωτο;

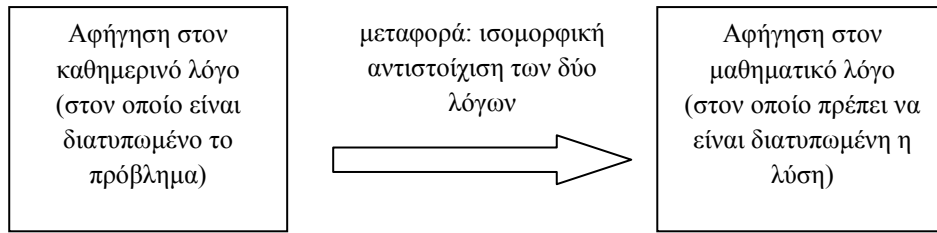
Σε μία έρευνα των Ben-Yahuda, Lavy, Linchevski & Sfard (2005), ένα 18-χρονο παιδί, σε παιχνίδι ρόλων με πραγματικά χρήματα, όπου ο ερευνητής ήταν ο πωλητής και το παιδί ο αγοραστής, δεν αντιμετώπιζε ιδιαίτερη δυσκολία στον υπολογισμό του ποσού που έπρεπε να πληρώσει και των ρέστων που έπρεπε να πάρει. Αντίθετα, σε αντίστοιχες πράξεις σχολικού τύπου αντιμετώπιζε παρόμοιες δυσκολίες με το παιδί από τη Βραζιλία. Όταν, όμως, έγινε ξεκάθαρο στο παιδί ότι μπορεί, για τους υπολογισμούς αυτούς, να χρησιμοποιήσει εικόνες και αντικείμενα, το παιδί κατάφερε να κάνει τους υπολογισμούς, ακολουθώντας παρόμοιες διαδικασίες με αυτές που είχε ακολουθήσει στο παιχνίδι ρόλων. Αυτά τα αποτελέσματα έρχονται σε πλήρη αντιστοιχία με την έρευνα των Nunes κ.ά. (1993), μας δίνουν, όμως, ένα επιπλέον στοιχείο: ένας μαθητής μπορεί, ακόμα και εντός της τάξης, αναγνωρίζοντας κατάλληλα χαρακτηριστικά της παρούσας κατάστασης έργου, να ανακαλέσει διαδικασίες του παρελθόντος που δεν σχετίζονται με τη σχολική τάξη, μπορούν όμως να τον βοηθήσουν στην κατάσταση έργου που αντιμετωπίζει. Ή διαφορετικά, ο μαθητής μπορεί, αναγνωρίζοντας *κατάλληλους ταυτοποιητές προηγούμενων*, να επεκτείνει τον ΧΑΠ ανακαλώντας προηγούμενα εκτός του σχολικού λόγου, που μπορούν να τον βοηθήσουν στην παρούσα κατάσταση έργου. Αν, λοιπόν, το παιδί από την Βραζιλία, κατά την εκτέλεση της πράξης 4-35 εντός σχολικών πλαισίων, είχε τέσσερις καρύδες μπροστά του, τον πάγκο που ήταν τοποθετημένες οι καρύδες ή τέλος πάντων ό,τι μπορούσε να λειτουργήσει για τον ίδιο ως ταυτοποιητής προηγούμενων, ίσως ανακαλούσε τις εμπειρίες από την αγορά και εκτελούσε στο σχολείο τις ίδιες ρουτίνες που εκτέλεσε και στην αγορά.

Στηριζόμενοι στην παραπάνω συζήτηση, στην παρούσα εργασία θεωρούμε ότι πραγματοποιείται μεταφορά, όταν ο μαθητής καταφέρνει να ξεπεράσει τα όρια που του δημιουργεί το πλαίσιο της κατάστασης έργου που αντιμετωπίζει και επιστρατεύει

διαδικασίες/ρουτίνες από άλλους λόγους. Ή διαφορετικά, όταν κατά την αντιμετώπιση μίας κατάστασης έργου, ο μαθητής, καταφέρνει να επεκτείνει τον υπάρχοντα ΧΑΠ, χάρη στους κατάλληλους ταυτοποιητές προηγούμενων, και να πραγματοποιήσει ρουτίνες που, μέχρι πρότινος, άνηκαν γι' αυτόν σε άλλον λόγο. Τα όρια του ΧΑΠ είναι κοινωνικο-πολιτισμικά: η παρούσα κατάσταση έργου, που λαμβάνει χώρα εντός του υπάρχοντος θεσμού, σε συνδυασμό με τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των ανθρώπων, περιορίζει –αλλά δεν καθορίζει– τους λόγους που παράγονται και, εντέλει, παγιώνονται. Ωστόσο, αυτά τα όρια αλλάζουν, καθώς εξελίσσεται η κατάσταση έργου. Στηριζόμενοι σε θεωρητικά εργαλεία που εστιάζουν στο πώς ο μαθητής αντιλαμβάνεται την κατάσταση έργου –η οποία μπορεί να είναι διαφορετική από το πώς την αντιλαμβάνεται ο εκπαιδευτικός και να αλλάζει στην πορεία της κατάστασης έργου (Evans, 1999· Lavie κ.ά., 2018)–, δημιουργήσαμε μία θεώρηση η οποία προσπαθεί να εντοπίσει την υπέρβαση των ορίων όπως, κάθε φορά, τα αντιλαμβάνεται ο μαθητής. Δεν αναζητούμε, λοιπόν, τη μεταφορά σε ένα στατικό μοντέλο, εντοπίζοντας τις μεταβάσεις από τον καθημερινό στον μαθηματικό λόγο. Θεωρούμε ένα δυναμικό μοντέλο, όπου στην μία πλευρά βρίσκεται το πώς ο μαθητής αντιλαμβάνεται κάθε φορά την κατάσταση έργου (π.χ. μία άσκηση σχολικού τύπου σαν τις πρόσφατες που έχει αντιμετωπίσει, μία πραγματική κατάσταση για την οποία πρέπει να δημιουργήσει ένα μαθηματικό μοντέλο ή μία καθημερινή κατάσταση, η αντιμετώπιση της οποίας απαιτεί καθημερινές ρουτίνες) και στην άλλη πλευρά βρίσκεται η μετάβαση που πραγματοποιεί. Προσδιορίζοντας κάθε φορά αυτό το, συνεχώς μεταβαλλόμενο, δίπολο, αναζητήσαμε τις μεταβάσεις που πραγματοποιήθηκαν σε αυτό. Στην Εικόνα 2 φαίνεται σχηματικά πού τοποθετούμε τη μεταφορά με βάση την παραπάνω θεώρηση, ενώ στην Εικόνα 3 φαίνεται σχηματικά η παραδοσιακή αντίληψη της μεταφοράς γνώσης.



Εικόνα 4: Η μεταφορά σχηματικά, όπως την θεωρούμε



Εικόνα 5: Η μεταφορά σχηματικά, όπως συνήθως θεωρείται

3. Μεθοδολογία

3.1. Στόχοι της έρευνας – Ερευνητικά ερωτήματα

Στην παρούσα εργασία μελετώνται οι ρουτίνες που εκτελούν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με μία εφαρμογή σε έξυπνες συσκευές και εντοπίζονται κάποια χαρακτηριστικά της παρούσας κατάστασης έργου που βοηθούν τους μαθητές στη μεταφορά. Έτσι, γίνεται μία προσπάθεια να απαντηθούν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Τι είδους ρουτίνες αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με μία εφαρμογή σε έξυπνες συσκευές;
- Παρατηρείται μεταφορά κατά την ενασχόληση των μαθητών με την εφαρμογή; Πώς καταφέρνουν να την πραγματοποιήσουν;

3.2. Μέθοδος

Η μέθοδος που επιλέχθηκε για την συγκεκριμένη έρευνα είναι η μελέτη περίπτωσης. Η μελέτη περίπτωσης είναι κατάλληλη, όταν μελετάμε το *πώς* και το *γιατί* των φαινομένων (Hancock, Algozzine, 2016). Η συγκεκριμένη μέθοδος, λοιπόν, επιλέχθηκε γιατί επιτρέπει να μελετήσουμε το *πώς* οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα που αναφέρονται σε πραγματικά πλαίσια, *πώς* πραγματοποιούν τη μεταφορά και να δώσουμε ερμηνείες στο *γιατί* οι μαθητές, αν κι έχουν διδαχθεί την απαραίτητη μαθηματική γνώση, ίσως να μην την εφαρμόζουν για να επιλύσουν αυτά τα προβλήματα.

3.3. Δραστηριότητα

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε: (α) τη δραστηριότητα που περιλαμβάνει την εμπλοκή των μαθητών με μία εφαρμογή έξυπνων συσκευών, όπως παρουσιάζεται στο Mascil (<http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28425/>), (β) *πώς* έγινε η εμπλοκή με την δραστηριότητα στην παρούσα έρευνα, (γ) *πώς* μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει αυτή την εφαρμογή, (δ) κάποιες βασικές ενδείξεις της και, τέλος, (ε) ένα μοντέλο το οποίο εξηγεί, σε τριγωνομετρικό λόγο, τον τρόπο λειτουργίας της εφαρμογής.

3.3.1. Παρουσίαση δραστηριότητας-πρόγραμμα Mascil

Το πρόβλημα που επιλέχθηκε για την παρέμβαση είναι μέρος της δραστηριότητας «Πώς λειτουργούν οι εφαρμογές των smart phones;» του προγράμματος Mascil. Στην περιγραφή της εφαρμογής αναφέρεται ότι:

Μέρος της δουλειάς ενός προγραμματιστή είναι να μελετά πώς λειτουργούν οι εφαρμογές ανταγωνιστικών εταιρειών. Αυτό το κομμάτι της δουλειάς ενός προγραμματιστή απαιτείται σε αυτό το έργο. Οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν μια εκ των τεσσάρων εφαρμογών και να ανακαλύψουν το πώς λειτουργεί.

(Bronner, 2015)

Η δραστηριότητα αφορά τον γνωστικό τομέα των μαθηματικών, απευθύνεται σε μαθητές ηλικίας 14 έως 16 ετών και ο προτεινόμενος χρόνος εφαρμογής είναι δύο διδακτικές ώρες (90 λεπτά). Η δραστηριότητα απαιτεί οι μαθητές να έχουν εγκαταστήσει τις τέσσερις εφαρμογές στα κινητά τους τηλέφωνα πριν την πραγματοποίηση της διδασκαλίας (Bronner, 2015).

Προτείνεται η ενορχήστρωση της τάξης σε ομάδες των τριών. Κάθε εφαρμογή έχει χαρακτηριστεί, ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας της, από το 1 έως το 3. Οι ομάδες καλούνται να επιλέξουν μια εκ των τεσσάρων εφαρμογών, ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας στο οποίο επιθυμούν να εργαστούν. Ζητείται από τους μαθητές να περιγράψουν το πώς λειτουργεί η εφαρμογή, να σχολιάσουν την ακρίβειά της, καθώς και τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της (Bronner, 2015).

3.3.2. Η δραστηριότητα, όπως τέθηκε στην παρούσα έρευνα

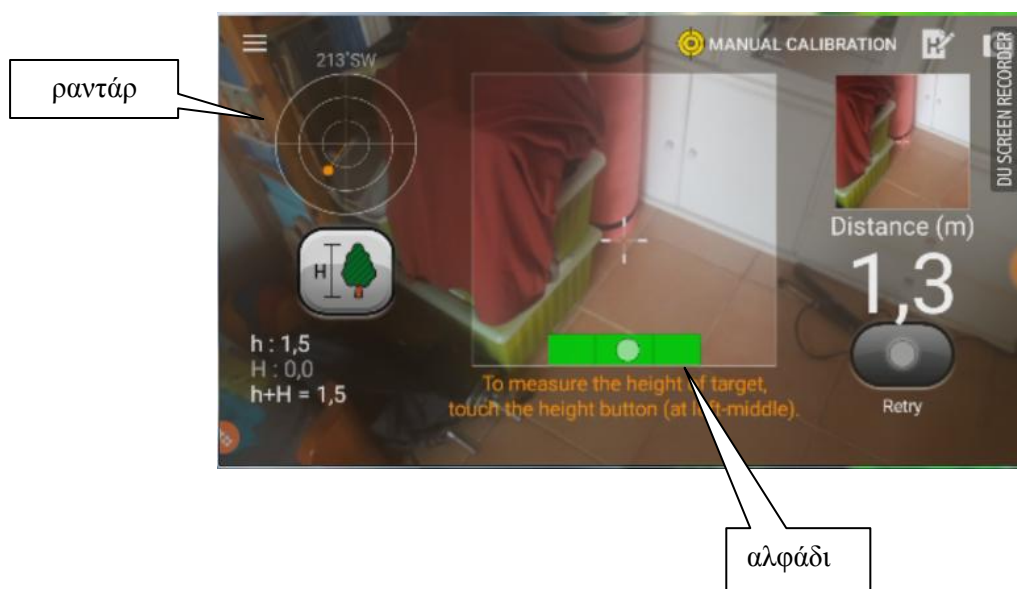
Στην παρούσα μελέτη επιλέχθηκε η δεύτερη εφαρμογή «Smart Measure» με επίπεδο δυσκολίας 2 –και δεν δόθηκε στους μαθητές η δυνατότητα επιλογής εφαρμογής– για τρεις κυρίως λόγους. Πρώτον, με αυτόν τον τρόπο κρίθηκε ότι θα μειωθεί ο χρόνος υλοποίησης της δραστηριότητας, κάτι το οποίο ήταν επιθυμητό λόγω των περιορισμών που συναντήθηκαν κατά την πραγματοποίηση της έρευνας. Δεύτερον, όπως αναφέρεται και στην ενότητα 3.3.4 όπου υπάρχει η μαθηματική ανάλυση της δραστηριότητας, η εφαρμογή χρησιμοποιεί για τη λειτουργία της έννοιες της τριγωνομετρίας, οι οποίες είναι γνωστές στους μαθητές καθώς διδάσκονται εκτενώς στα Ελληνικά σχολεία –στη Β΄ και στη Γ΄ Γυμνασίου, όπως και στη Β΄ Λυκείου. Τρίτον, το επίπεδο δυσκολίας της συγκεκριμένης εφαρμογής κρίθηκε ιδανικό, ώστε να παραχθούν «πλούσια» δεδομένα προς ανάλυση. Για την παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν τα κινητά τηλέφωνα των εκπαιδευτικών, οι οποίοι είχαν εγκαταστήσει από πριν την εφαρμογή.

Δόθηκε, επίσης, η δυνατότητα στους μαθητές να παρακολουθήσουν, εφόσον το επιθυμούσαν, ένα βίντεο στην ιστοσελίδα youtube (<https://www.youtube.com/watch?v=4nnxvKmlcpQ>), όπου φαίνεται ένα παράδειγμα με το

πώς μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την εφαρμογή. Το πλήρες φύλλο εργασίας υπάρχει στο Παράρτημα I της παρούσας εργασίας. Στην υποενότητα 3.3.3, περιγράφουμε το πώς μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει αυτή την εφαρμογή και κάποιες βασικές ενδείξεις της, ενώ στην υποενότητα 3.3.4 ένα μοντέλο το οποίο εξηγεί, σε τριγωνομετρικό λόγο, τον τρόπο λειτουργίας της εφαρμογής.

3.3.3. Ο τρόπος λειτουργίας της εφαρμογής

Η εφαρμογή αυτή λειτουργεί μέσω της κάμερας και μπορεί να μετρήσει την απόσταση και το ύψος αντικειμένων. Αρχικά, ο χρήστης πρέπει να εστιάσει στο κατώτερο σημείο του αντικειμένου που θέλει να μετρήσει και να επιλέξει το «get distance». Η εφαρμογή εμφανίζει την απόσταση του αντικειμένου από τον χρήστη. Στην Εικόνα 6 φαίνεται ένα παράδειγμα, όπου ο χρήστης έχει μετρήσει την απόσταση του στρώματος γυμναστικής στα 1,3 μέτρα. Στη συνέχεια, πρέπει να επιλέξει το κουμπί για το ύψος (βλέπε Εικόνα 6 στα αριστερά και κάτω από το ραντάρ) και να εστιάσει στο ανώτερο σημείο του αντικειμένου. Επιλέγοντας το «get Height», η εφαρμογή μετράει το ύψος του στρώματος στα 0,8 μέτρα (βλέπε Εικόνα 7). Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιες βασικές ενδείξεις της εφαρμογής.

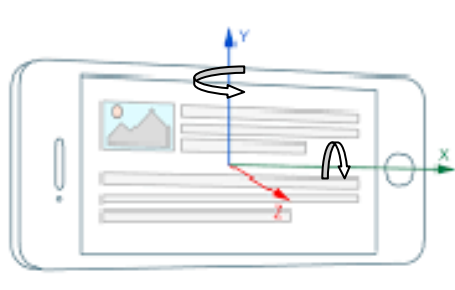


Εικόνα 6: Στιγμιότυπο μέτρησης απόστασης στρώματος



Εικόνα 7: Στιγμιότυπο μέτρησης ύψους στρώματος

Το ραντάρ που έχει η εφαρμογή (βλέπε Εικόνα 6) δείχνει τον προσανατολισμό στο χώρο με βάση τα σημεία του ορίζοντα. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 6 η συσκευή είναι προσανατολισμένη 213° νοτιοδυτικά. Η ένδειξη, λοιπόν, στο ραντάρ εκπραγματώνει την κίνηση της συσκευής γύρω από τον άξονα $y'y$ (βλέπε Εικόνα 8). Επίσης, το μήκος που έχει το πορτοκαλί ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το κέντρο του ραντάρ είναι ανάλογο της απόστασης του αντικειμένου από τον χρήστη. Έτσι, το ραντάρ εκπραγματώνει και την κίνηση γύρω από τον άξονα $x'x$ (βλέπε Εικόνα 8).



Εικόνα 8: Οι άξονες γύρω από τους οποίους πραγματοποιείται η κίνηση της συσκευής

Το αλφάδι της εφαρμογής (βλέπε Εικόνα 6) εκπραγματώνει την κίνηση της συσκευής γύρω από τον άξονα $z'z$. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 9 φαίνεται ένα στιγμιότυπο από τη

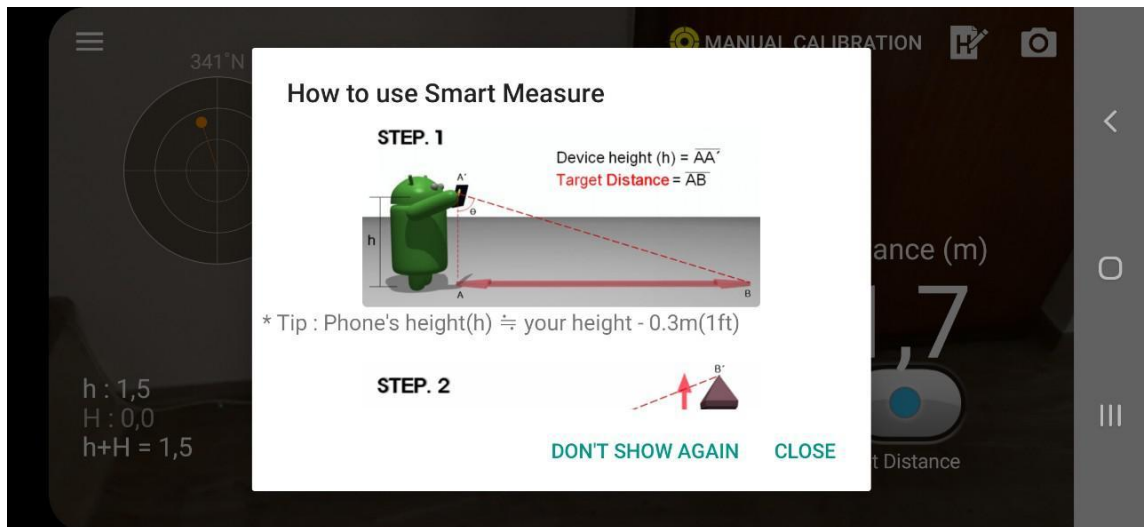
χρήση της εφαρμογής, όπου η συσκευή έχει περιστραφεί γύρω από τον άξονα z'z. Ο κύκλος που υπάρχει μέσα στο αλφάδι δεν βρίσκεται στη μέση, όπως συμβαίνει στην περίπτωση που κρατάμε τη συσκευή οριζόντια, αλλά έχει μετακινηθεί προς τα αριστερά, δείχνοντας έτσι το πώς έχει κινηθεί η συσκευή στο χώρο. Στην επόμενη υποενότητα παρουσιάζουμε το πώς η εφαρμογή καταφέρνει να κάνει αυτές τις μετρήσεις.



Εικόνα 9: Στιγμιότυπο όπου η συσκευή έχει περιστραφεί γύρω από τον z'z

3.3.4. Περιγραφή τριγωνομετρικού μοντέλου

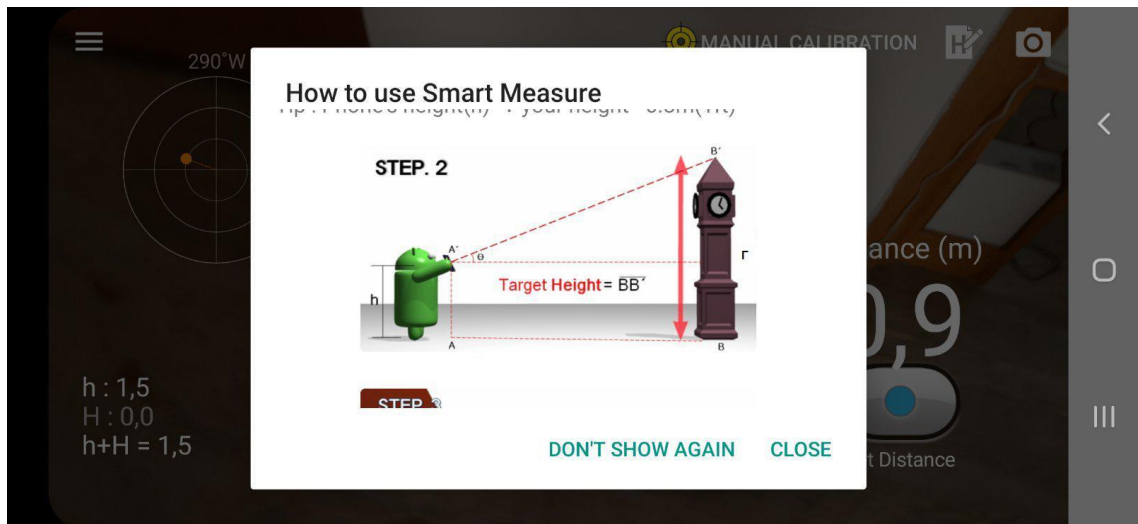
Μία έξυπνη συσκευή έχει αισθητήρες, όπως γυροσκόπιο, πυξίδα κλπ, οι οποίοι της επιτρέπουν να «αντιλαμβάνεται» οποιαδήποτε κίνησή της στον χώρο. Για να καταφέρει, λοιπόν, η εφαρμογή να κάνει τις μετρήσεις, χρησιμοποιεί αυτούς ακριβώς τους αισθητήρες, ώστε να μετρήσει τη γωνία θ που σχηματίζει η προοπτική της κάμερας –δηλαδή η ευθεία που κοιτάει η κάμερα- με την κατακόρυφο (βλέπε Εικόνα 10). Καθώς η συσκευή δεν μπορεί να μετρήσει το ύψος της από το έδαφος, η εφαρμογή κάνει μία υπόθεση ότι κρατάμε τη συσκευή σε ύψος 1,5 μέτρα πάνω από το έδαφος. Η εφαρμογή δίνει τη δυνατότητα αλλαγής αυτής της υπόθεσης, μέσω την επιλογής «manual calibration». Έτσι, στο ορθογώνιο τρίγωνο $A'AB$ που σχηματίζεται (βλέπε Εικόνα 10), με δεδομένα τη μία κάθετη πλευρά $A'A$ και τη μία οξεία γωνία θ , η εφαρμογή υπολογίζει την άλλη κάθετη πλευρά AB μέσω του τύπου της εφαπτομένης γωνίας. Το μήκος της πλευράς AB είναι και η απόσταση του χρήστη από το αντικείμενο το οποίο μετράει.



Εικόνα 10: Ορθογώνιο τρίγωνο για τη μέτρηση της απόστασης

Να σημειωθεί ότι η παραπάνω εικόνα εμφανίζεται κατά το άνοιγμα της εφαρμογής. Καθώς αυτή η εικόνα θα μπορούσε να «προδώσει» στους μαθητές το πώς λειτουργεί η εφαρμογή, οι εκπαιδευτικοί πρώτα έκλειναν αυτό το μήνυμα και στη συνέχεια έδιναν τη συσκευή στους μαθητές.

Αφού μετρήσει την απόσταση, στη συνέχεια ο χρήστης πρέπει να εστιάσει στο ανώτερο σημείο του αντικειμένου, ώστε η εφαρμογή να μετρήσει το ύψος του αντικειμένου. Στο τρίγωνο $A'B'T$ που δημιουργείται (βλέπε Εικόνα 11), η εφαρμογή χρησιμοποιεί ως δεδομένα τη γωνία θ' -την οποία υπολογίζει η συσκευή μέσω των αισθητήρων- και την πλευρά $A'T$ -η οποία είναι ίση με την πλευρά AB που έχει υπολογίσει από το πρώτο βήμα. Μέσω του τύπου της εφαπτομένης, η εφαρμογή υπολογίζει την πλευρά $B'T$. Προσθέτοντας την πλευρά GT , της οποίας το μήκος είναι ίσο με το ύψος $h = 1,5$ μέτρα, η εφαρμογή υπολογίζει το ύψος του αντικειμένου.



Εικόνα 11: Ορθογώνιο τρίγωνο για τη μέτρηση του ύψους

3.4. Πλαίσιο έρευνας, συμμετέχοντες και διαδικασία

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν δύο μαθητές Β΄ Λυκείου, ο Φώτης και ο Παναγιώτης. Η εμπλοκή με την δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε αφού ολοκληρώθηκε η φοίτηση στην τάξη αυτή, την περίοδο του καλοκαιριού. Καθώς η μαθηματική μοντελοποίηση δυσκολεύει αρκετά μαθητές όλων των τάξεων και των βαθμίδων (Viirman & Nardi, 2018), η Β΄ Λυκείου κρίθηκε η πιο κατάλληλη από τις σχολικές τάξεις.

Η εμπλοκή του Φώτη με την εφαρμογή έγινε με την εκπαιδευτικό που κάνουν ιδιαίτερα μαθήματα μαθηματικών. Η εμπλοκή πραγματοποιήθηκε στο δωμάτιο του Φώτη, στον χώρο δηλαδή που πραγματοποιούνταν και τα ιδιαίτερα μαθήματα. Η εμπλοκή του Παναγιώτη έγινε με τον εκπαιδευτικό που του έκανε ιδιαίτερα μαθήματα –και ταυτίζεται με τον συγγραφέα της παρούσας εργασίας-, στα πλαίσια μίας δομής που μοιάζει με αυτή του κοινωνικού φροντιστηρίου. Η διαφορά είναι ότι η συγκεκριμένη δομή οργανώνεται από τον σύλλογο γονέων και κηδεμόνων και τους εκπαιδευτικούς που πραγματοποιούν τα μαθήματα της δομής αυτής, και όχι από τον Δήμο. Πρόκειται για ένα Γυμνάσιο με Λυκειακές τάξεις (Α΄ και Β΄ Λυκείου) σε μία κωμόπολη 15 χιλιάμετρα έξω από τη Σπάρτη. Η εμπλοκή πραγματοποιήθηκε στο σχολείο, στην αίθουσα που γινόντουσαν και τα μαθήματα.

Και στις δύο περιπτώσεις, οι εκπαιδευτικοί εξήγησαν στους μαθητές ότι η εμπλοκή τους αυτή είναι στα πλαίσια μίας ερευνητικής εργασίας. Απαντούσαν σε διευκρινιστικές ερωτήσεις των μαθητών για την εφαρμογή και τη διαδικασία. Προσπαθούσαν να αφήνουν τους μαθητές

να δρουν μόνοι τους, αλλά παρέμβαιναν, κυρίως με την προσέγγιση της σκαλωσιάς (scaffolding), όταν το έκριναν αναγκαίο.

Το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε ήταν η παρατήρηση. Το μέσο καταγραφής των δεδομένων της παρούσας έρευνας ήταν μια εφαρμογή, η οποία επιτρέπει την εγγραφή σε βίντεο της εικόνας που δείχνει η οθόνη του κινητού τηλεφώνου και ταυτόχρονα την ηχογράφηση των όσων ακούγονται. Η εφαρμογή αυτή υπάρχει ελεύθερη στο διαδίκτυο (<https://play.google.com/store/apps/details?id=mobi.charmer.myscreenrecorder>). Από το αρχείο που προέκυπτε από αυτήν την εφαρμογή πραγματοποιήθηκε η απομαγνητοφώνηση κάθε παρέμβασης.

3.5. Διαδικασία ανάλυση δεδομένων

Κατά την ανάλυση των δεδομένων στην παρούσα εργασία, ο λόγος στην ολότητά του αποτέλεσε το αντικείμενο ανάλυσης, ενώ οι ρουτίνες αποτέλεσαν την μονάδα ανάλυσης. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι λόγοι είναι «πολυτροπικοί», δηλαδή, αν και η επικοινωνία συχνά πραγματοποιείται με λόγια, υπάρχουν κι άλλοι τρόποι, όπως χειρονομίες, χειροπιαστά αντικείμενα, εικόνες, διαγράμματα κλπ (Sfard, 2008).

1ο ερευνητικό ερώτημα: *Τι είδους ρουτίνες αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με μία εφαρμογή σε έξυπνες συσκευές;*

Για να απαντήσουμε το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που αφορά το είδος των ρουτινών, αρχικά εντοπίσαμε τις ρουτίνες που εκτέλεσαν οι μαθητές. Καθώς οι ρουτίνες θεωρούνται ως μοτίβα ενεργειών που παρατηρούνται σε κοινωνικό επίπεδο, διατρέξαμε τα δεδομένα μας προσπαθώντας να εντοπίσουμε ενέργειες των μαθητών οι οποίες επαναλαμβάνονταν. Αυτό το μοτίβο ενεργειών αποτέλεσε για μας την μονάδα ανάλυσης –την ρουτίνα- την οποία και ονομάσαμε ανάλογα με την διαδικασία που ακολουθούσαν οι μαθητές κατά την εκτέλεσή της. Για παράδειγμα, διατρέχοντας τα δεδομένα μας, εντοπίσαμε δώδεκα φορές οι μαθητές, χρησιμοποιώντας την εφαρμογή, να μετρούν την απόσταση και το ύψος διάφορων αντικειμένων, όπως δέντρα, πόρτες, θρανία κλπ. Αυτές οι ενέργειες θεωρήθηκαν ως η διαδικασία της εκάστοτε ρουτίνας. Το όνομα που δινόταν σε κάθε ρουτίνα ήταν εμπνευσμένο από την διαδικασία. Στο παράδειγμά μας, έχουμε τις ρουτίνες: «μέτρησης απόστασης-ύψους δέντρου», «μέτρησης απόστασης-ύψους θρανίου» κ.ο.κ..

Αφού εντοπίσαμε και ονομάσαμε τις ρουτίνες, στη συνέχεια πραγματοποιήσαμε τρεις διαφορετικές κατηγοριοποιήσεις με βάση τρία κριτήρια. Το πρώτο κριτήριο αφορά το

περιεχόμενο των ρουτινών. Με βάση την ονομασία που δόθηκε σε κάθε ρουτίνα αλλά και γενικότερα τη διαδικασία που ακολουθούσαν οι μαθητές κατά την εκτέλεση της ρουτίνας, έγινε ο διαχωρισμός των ρουτινών σε ομάδες.

Η δεύτερη κατηγοριοποίηση που πραγματοποιήσαμε είχε ως κριτήριο το είδος του λόγου. Καθώς, σύμφωνα με τη θεωρητική μας προσέγγιση, οι ρουτίνες αποτελούν τρόπο έκφρασης ενός λόγου, χαρακτηρίσαμε τις ρουτίνες ως μαθηματικές ή μη, ανάλογα με το αν ανήκουν ή όχι στον (επίσημο) μαθηματικό λόγο. Αν και, εκ πρώτης, αυτή η διαδικασία ίσως ακούγεται απλή, στην πραγματικότητα δεν είναι. Όπως τονίζει η Sfard (2008, σελ. 131), «οι λόγοι είναι σε συνεχή ροή, ο ένας διεισδύει στον άλλον και δεν έχουν διακριτά όρια». Παρόλα αυτά, διακρίνει τον μαθηματικό λόγο σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τον *καθημερινό (colloquial)* μαθηματικό λόγο και τον *επίσημο (literate)* μαθηματικό λόγο. Τα στοιχεία αυτών των δύο κατηγοριών μοιράζονται αρκετά κοινά χαρακτηριστικά για να θεωρηθούν ότι ανήκουν στην ίδια οικογένεια, αλλά και αρκετές διαφορές.

Συχνά παρομοιάζονται με έναν ζωντανό οργανισμό που συνεχώς μεταβάλλεται. Όμως, αν και πιθανότατα δεν θα είναι ο ίδιος την επόμενη φορά που θα τον συναντήσεις, διατηρεί την ταυτότητά του μέσα από μία συνεχή μεταμόρφωση.

Πώς, λοιπόν, θα αποφασίσουμε αν μία ρουτίνα ανήκει ή όχι στον επίσημο μαθηματικό λόγο; Όπως υποστηρίζει η Sfard (2008) οι ρουτίνες είναι χαρακτηριστικές στον μαθηματικό λόγο. Τέτοια παραδείγματα θα μπορούσε να είναι η επίλυση μίας πρωτοβάθμιας εξίσωσης, η εύρεση του εμβαδού ενός κύκλου ή η απόδειξη της σύγκλισης μίας σειράς. Ωστόσο, υπάρχουν και κάποια χαρακτηριστικά τα οποία μπορούν να μας βοηθήσουν να εντοπίσουμε τον μαθηματικό λόγο γενικά, και τις ρουτίνες ειδικά. Αυτά είναι οι *λέξεις κλειδιά (keywords)* που χρησιμοποιούνται, οι *οπτικοί διαμεσολαβητές (visual mediators)* και οι *αφηγήσεις (narratives)*. Οι λέξεις κλειδιά είναι λέξεις που χρησιμοποιούνται στον μαθηματικό λόγο, όπως τετράγωνο, επίπεδο, τρία, συνάρτηση. Οι οπτικοί διαμεσολαβητές είναι αντικείμενα που έχουν κατασκευασθεί για να βοηθούν στην επικοινωνία του μαθηματικού λόγου και μπορούν να γίνουν αντιληπτά από τις αισθήσεις, σε αντίθεση με τα μαθηματικά αντικείμενα τα οποία είναι κατασκευάσματα λόγου (Sfard, 2008). Για παράδειγμα, τα σύμβολα «3» ή «III» και το τετράγωνο που σχεδιάζουμε στο χαρτί είναι οπτικοί διαμεσολαβητές για τον αριθμό τρία και την γεωμετρική έννοια του τετραγώνου αντίστοιχα. Τέλος, οι αφηγήσεις είναι φράσεις οι οποίες περιγράφουν τα αντικείμενα ενός λόγου, τις σχέσεις που τα συνδέουν ή τις διαδικασίες που συνδέονται με αυτά (Sfard, 2008). Οι αφηγήσεις αυτές, μέσω συγκεκριμένων

διαδικασιών, μπορούν να χαρακτηριστούν ως «αληθείς» ή να απορριφθούν. Αφηγήσεις όπως «η διάμεσος προς την βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και ύψος και διχοτόμος» και « $2+3=5$ », είναι αφηγήσεις που έχουν *παγιωθεί* (*endorsed*) στον μαθηματικό λόγο, δηλαδή έχουν γίνει αποδεκτές από την κοινότητα των μαθηματικών. Αντίθετα, ο τετραγωνισμός του κύκλου, δηλαδή «η ύπαρξη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο» είναι μία αφήγηση η οποία έχει απορριφθεί.

Τέλος, με βάση το τρίτο κριτήριο, χαρακτηρίσαμε τις ρουτίνες ως τελετουργίας ή εξερεύνησης. Για τον σκοπό αυτόν, δημιουργήσαμε τον παρακάτω πίνακα στηριζόμενοι στις έρευνες των Lavie κ.ά. (2018), Nachlieli & Katz (2017), Nachlieli & Tabach (2018) και Sfard (2008). Ο πίνακας αυτός εστιάζει στην μονάδα ανάλυσής μας, την ρουτίνα και μας βοήθησε να τοποθετήσουμε κάθε ρουτίνα που εκτελέστηκε από έναν μαθητή στο «συνεχές διάστημα» μεταξύ τελετουργίας και εξερεύνησης. Στην πρώτη στήλη του πίνακα υπάρχουν τα μέρη από τα οποία αποτελείται μία ρουτίνα. Στην δεύτερη υπάρχουν ερωτήσεις, οι απαντήσεις των οποίων θα μας βοηθήσουν να χαρακτηρίσουμε την ρουτίνα ως τελετουργίας ή εξερεύνησης. Αν η απάντηση δίνεται από την τρίτη στήλη, τότε η ρουτίνα μπορεί να χαρακτηριστεί ως τελετουργίας. Αν δίνεται από την τέταρτη, τότε μπορεί να χαρακτηριστεί εξερεύνησης. Αν και σπάνια μία ρουτίνα χαρακτηρίζεται αμιγώς τελετουργίας ή εξερεύνησης, κοιτώντας συνολικά το αποτέλεσμα που έδινε κάθε φορά η ανάλυση μέσω του πίνακα, μπορέσαμε να χαρακτηρίσουμε μία ρουτίνα ως εξερεύνησης ή τελετουργίας.

Όνομα ρουτίνας:			
Μέρη ρουτίνας	Ερώτηση	Ρουτίνα τελετουργίας (Ritual)	Ρουτίνα εξερεύνησης (Exploration)
1. Εισαγωγή ρουτίνας (Initiation)	Με ποια αφορμή ξεκινάει η ρουτίνα; (<i>performer's agentivity</i>)	Αμέσως μετά από ένα ερώτημα που θέτει ο εκπαιδευτικός.	Από τον μαθητή, προκειμένου να χρησιμοποιήσει την απάντηση σε μία άλλη ρουτίνα (<i>bondedness</i>) ή να απαντήσει το αρχικό ερώτημα.
2. Διαδικασία (Procedure)	Ποια είναι η ερώτηση που ο μαθητής προσπαθεί να απαντήσει; (<i>orientation</i>)	Πώς συνεχίζω; (<i>process-oriented</i>)	Σε τι θέλω να καταλήξω; (<i>product-oriented</i>)
	Ευελιξία (<i>flexibility</i>)	Ο μαθητής πραγματοποιεί μία ρουτίνα με μη ευέλικτο τρόπο (<i>flexibility</i>), η οποία έχει ήδη εφαρμοστεί από άλλους σε παρόμοιες καταστάσεις. Σπάνια ενεργεί αυτόνομα (<i>performer's agentivity</i>).	Διάφορες εναλλακτικές διαδικασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον μαθητή για το ίδιο έργο (<i>flexibility</i>). Ο μαθητής ενεργεί αυτόνομα (<i>performer's agentivity</i>).

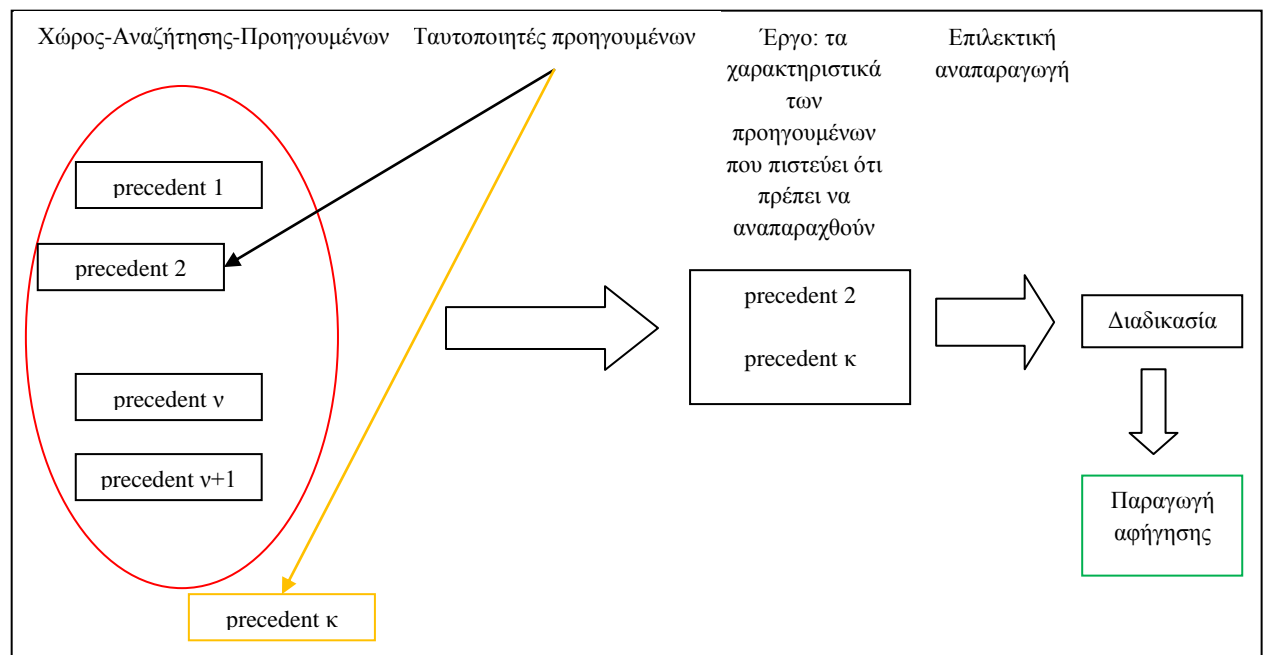
	Από ποιον έχει εισαχθεί η ρουτίνα; Σε ποιον απευθύνεται; (<i>performer's agentivity</i>)	Η ρουτίνα έχει εισαχθεί από τον εκπαιδευτικό. Η ρουτίνα απευθύνεται στον εκπαιδευτικό (<i>performer's agentivity</i>).	Η ρουτίνα έχει εισαχθεί από τον ίδιο τον μαθητή ή και από άλλους, ωστόσο δεν πρόκειται για μία απλή μίμηση, αλλά μία επιλεκτική αναπαραγωγή προηγούμενων. Η ρουτίνα απευθύνεται στον ίδιο τον μαθητή (<i>performer's agentivity</i>) για την παραγωγή μίας νέας αφήγησης (<i>product-oriented</i>).
3. Κλείσιμο (Closure)	Πώς ο μαθητής αιτιολογεί την επιτυχία της ρουτίνας; (<i>substantiability</i>)	Η ρουτίνα κρίνεται ως επιτυχής, όταν μία συγκεκριμένη διαδικασία έχει ολοκληρωθεί. Σκοπός του ήταν η πραγματοποίηση της συγκεκριμένης διαδικασίας, δηλαδή για τον μαθητή η διαδικασία και το έργο ταυτίζονται. Συχνά, αν ζητηθεί αιτιολόγηση, περιγράφει τα βήματα της διαδικασίας που ακολούθησε.	Η ρουτίνα κρίνεται ως επιτυχής, όταν μία νέα αφήγηση έχει παραχθεί. Αν ζητηθεί αιτιολόγηση, περιγράφει τον μαθηματικό συλλογισμό της διαδικασίας ή δίνει μια εναλλακτική διαδικασία (<i>substantiability</i>).
	Ποιος καθορίζει το τέλος της ρουτίνας; (<i>performer's agentivity</i>) Χρησιμοποιείται η αφήγηση που παρήγαγε ως δεδομένο κατά την πραγματοποίηση μίας άλλης αφήγησης (<i>bondedness</i>);	Η ρουτίνα κλείνει όταν ολοκληρώνεται η διαδικασία που ο μαθητής «έπρεπε» να ακολουθήσει, καθώς σκοπός του ήταν η πραγματοποίηση της συγκεκριμένης διαδικασίας. Συχνά, όμως, δεν είναι σε θέση να κρίνει το τέλος της ρουτίνας και χρειάζεται ο εκπαιδευτικός να το κάνει αυτό. (<i>performer's agentivity, authority</i>)	Ο μαθητής (<i>performer's agentivity, authority</i>). Αν αυτή δεν ήταν η εξωτερική ρουτίνα (απάντηση αρχικού ερωτήματος), χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα της ρουτίνας ως δεδομένο κατά την πραγματοποίηση μίας άλλης ρουτίνας (<i>bondedness</i>).
4. Μερικά χαρακτηριστικά της ρουτίνας που αφορούν και τα τρία μέρη της (εισαγωγή, διαδικασία, κλείσιμο).	Αυθεντία, Διαμεσολάβηση εκτελεστή (<i>Authority, performer's agentivity</i>)	Ο δάσκαλος (ή άλλα άτομα). Ο μαθητής εξαρτάται πλήρως από άλλους για το τι πρέπει να κάνει και το πότε. Η παρουσία άλλων (φυσική ή και φανταστική) είναι απαραίτητη για όλα τα στάδια πραγματοποίησης της ρουτίνας (έναρξη, διαδικασία, κλείσιμο, αξιολόγηση επιτυχίας). Η ρουτίνα πραγματοποιείται επειδή υπάρχει προσδοκία από άλλους να συμβεί αυτό κι έχει ως σκοπό την κοινωνική ανταμοιβή ή την αποφυγή τιμωρίας.	Ο ίδιος ο μαθητής, ο οποίος δεν χρειάζεται την παρέμβαση άλλων ατόμων για την πραγματοποίηση της ρουτίνας.
	Εφαρμοσιμότητα	Η ρουτίνα έχει συνδεθεί με συγκεκριμένο ανθρώπινο και φυσικό περιβάλλον (<i>precedent identifiers</i>) και μπορεί να ξαναχρησιμοποιηθεί μόνο σε	Η ρουτίνα μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορετικού είδους περιβάλλοντα (πχ σχολείο-καθημερινότητα).

		περιβάλλοντα που σχεδόν ταυτίζονται.	
--	--	--------------------------------------	--

Πίνακας 2: Ρουτίνα τελετουργίας ή εξερεύνησης;

2ο ερευνητικό ερώτημα: *Παρατηρείται μεταφορά κατά την ενασχόληση των μαθητών με την εφαρμογή; Πώς καταφέρνουν να την πραγματοποιήσουν;*

Για να αναλύσουμε το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, αναλύσαμε, με βάση το διάγραμμα στην Εικόνα 1, τις ρουτίνες που είχαμε εντοπίσει και ονομάσει στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα. Για να προσδιορίσουμε τον ΧΑΠ για κάθε ρουτίνα, αρχικά ανατρέξαμε στις πρόσφατες εμπειρίες από την τάξη των μαθηματικών των μαθητών. Στη συνέχεια, ακολουθήσαμε την πορεία του μαθητή στην κατάσταση έργου μέσω των ρουτινών που πραγματοποίησε, εντοπίζοντας τις αφηγήσεις που παρήγαγε και διαμόρφωναν κατάλληλα τον ΧΑΠ. Αφού προσδιορίσαμε τον ΧΑΠ της ρουτίνας, προσπαθήσαμε να εντοπίσουμε τα προηγούμενα του ΧΑΠ, με βάση τα οποία παρήγαγε ο μαθητής την αφήγηση, και τον ταυτοποιητή ή τους ταυτοποιητές που τον βοήθησαν να διακρίνει αυτά τα προηγούμενα. Θεωρήσαμε ότι πραγματοποιήθηκε μεταφορά στις περιπτώσεις που ο μαθητής είχε χρησιμοποιήσει προηγούμενα εκτός του ΧΑΠ, δηλαδή στις περιπτώσεις που ο μαθητής, με τη βοήθεια κάποιου ταυτοποιητή, κατάφερνε να επεκτείνει τον ΧΑΠ του (βλέπε Εικόνα 12, πορτοκαλί χρώμα). Το είδος των προηγούμενων που περιέχει ο ΧΑΠ καθόρισε το ένα πλαίσιο (βλέπε Εικόνα 12, κόκκινο χρώμα) και η επέκταση του ΧΑΠ που πραγματοποιούσε ο μαθητής το άλλο πλαίσιο της μεταφοράς.



Εικόνα 12: Παράδειγμα μεταφοράς

Θα λέγαμε ότι πρόκειται για ένα δυναμικό μοντέλο της μεταφοράς, όπου στην μία πλευρά βρίσκεται το πώς *ο μαθητής* αντιλαμβάνεται αρχικά την κατάσταση έργου και στην άλλη πλευρά βρίσκεται η μετάβαση που πραγματοποιεί, δηλαδή η καινούρια του οπτική για την κατάσταση έργου. Τα αποτελέσματα, λοιπόν, του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος προέρχονται από τον προσδιορισμό αυτού του, συνεχώς μεταβαλλόμενου, δίπολου.

4. Ανάλυση-Αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα για το πώς έγινε η ανάλυση των δεδομένων, καθώς και τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης για κάθε ερευνητικό ερώτημα. Στο τέλος γίνεται μία προσπάθεια να δούμε και τις δύο περιπτώσεις συνολικά σε σχέση με την μεταφορά που παρατηρήθηκε.

4.1. Πρώτο ερευνητικό ερώτημα: Τι είδους ρουτίνες αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με μία εφαρμογή σε έξυπνες συσκευές;

4.1.1. Εντοπισμός ρουτινών

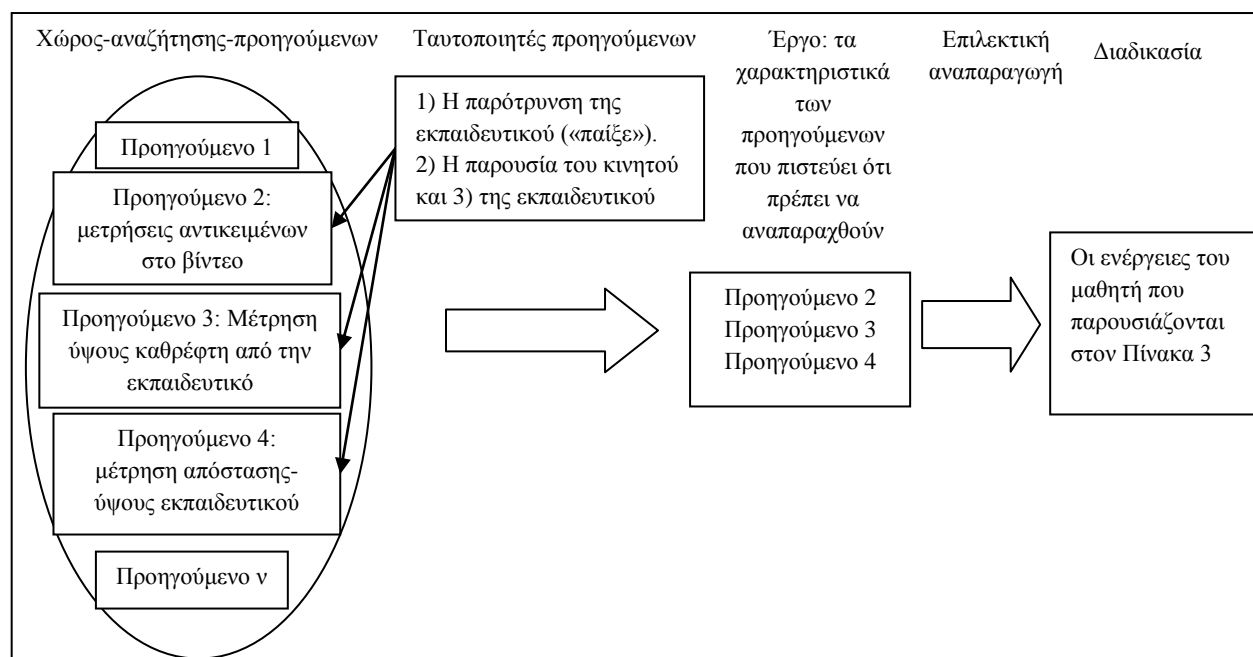
Για να απαντήσουμε το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που αφορά το είδος των ρουτινών, αρχικά, εντοπίσαμε τις ρουτίνες που εκτέλεσαν οι μαθητές (βλέπε υποενότητα 3.5). Στον Πίνακα 3 δίνεται ένα απόσπασμα που δείχνει την εμφάνιση της ρουτίνας με όνομα: «μέτρηση απόστασης-ύψους στρώματος γυμναστικής», όπου ο μαθητής μετράει, μέσω της εφαρμογής, την απόσταση του στρώματος γυμναστικής από τον ίδιο καθώς και το ύψος του στρώματος.

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
1. Φώτης		Σημαδεύει το κάτω μέρος του καφέ, μένει για 2 δευτερόλεπτα και μετά φεύγει.
2. α. Φώτης	Θα βγάλω- θα βγάλω- τι θα βγάλω... το- το- το...	Αρχίζει και στρίβει το κινητό προς τα αριστερά στο υπόλοιπο δωμάτιο για να βρει αντικείμενο. Βλέπει ένα στρώμα γυμναστικής το οποίο είναι διπλωμένο και όρθιο (σαν κύλινδρος).
β. Φώτης	A, αυτό εδώ πέρα.	Το στρώμα γυμναστικής. Σημαδεύει το κάτω μέρος του.
3. α. Φώτης	Παρ' το από εδδδδδ...	Όταν πατάει το κουμπί «get distance» ολοκληρώνει τη λέξη «εδώ».
β. Φώτης		Περιστρέφει το κινητό ώστε να σημαδέψει την κορυφή του στρώματος και πατάει το κουμπί για το ύψος («get height»).
4. Φώτης	Και το έβγαλε 80 εκατοστά.	
5. Εκπαιδευτικός	E, να μην είναι;!	
6. Φώτης	Ένα μέτρο πάντως δεν είναι.	
7. Εκπαιδευτικός	Όχι- όχι.	
8. Φώτης	Με τίποτα.	
9. Εκπαιδευτικός	Ωραία.	

Πίνακας 3: Μέτρηση απόστασης-ύψους στρώματος γυμναστικής

Στο παραπάνω απόσπασμα φαίνεται η διαδικασία εκτέλεσης της ρουτίνας. Ολόκληρη η πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου -της οποίας η ρουτίνα αποτελεί μέρος- παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 1. Αρχικά, ο μαθητής εισέρχεται σε μία κατάσταση έργου,

δηλαδή σε μία θέση όπου οι υπόλοιποι γύρω του αναμένουν από αυτόν να δράσει. Ο μαθητής καταφέρνει να ανταποκριθεί στην κατάσταση έργου χάρη στην προηγούμενή του εμπειρία, τα προηγούμενα. Ο χώρος αναζήτησης προηγούμενων (ΧΑΠ) έχει διαμορφωθεί πριν καν εισαχθεί η κατάσταση έργου: καθώς αυτός που εισάγει την κατάσταση έργου είναι η εκπαιδευτικός των μαθηματικών, ο ΧΑΠ περιορίζεται στις πρόσφατες εμπειρίες του από την τάξη των μαθηματικών. Οι ταυτοποιητές προηγούμενων είναι τα χαρακτηριστικά της παρούσας κατάστασης που τον βοηθούν να επιλέξει τα κατάλληλα προηγούμενα από το σύνολο του ΧΑΠ, δηλαδή τα χαρακτηριστικά της παρούσας κατάστασης που ο μαθητής τα έχει συνδέσει με συγκεκριμένες εμπειρίες από το παρελθόν. Στο παράδειγμά μας, ως ταυτοποιητές θα μπορούσαν να έχουν λειτουργήσει η παρότρυνση της εκπαιδευτικού «παίξε» (με την εφαρμογή), η παρουσία της εκπαιδευτικού καθώς και η ίδια η εφαρμογή. Τα προηγούμενα που πιθανότατα χρησιμοποίησε ο μαθητής είναι το βίντεο που είχε παρακολουθήσει, η μέτρηση που είχε πραγματοποιήσει η εκπαιδευτικός, καθώς και η προηγούμενη μέτρηση που είχε κάνει ο ίδιος. Το έργο, όπως το αντιλαμβάνεται ο μαθητής, είναι να επαναλάβει με κάποιες προσαρμογές αυτά τα προηγούμενα, δηλαδή να μετρήσει την απόσταση και το ύψος ενός νέου αντικειμένου, του στρώματος γυμναστικής. Η διαδικασία που τελικά εκτελεί είναι αυτή που φαίνεται στον Πίνακα 3. Η ρουτίνα μέτρησης απόστασης-ύψους στρώματος είναι η διαδικασία, δηλαδή οι ενέργειες που κάνει ο μαθητής προκειμένου να ανταποκριθεί στην κατάσταση έργου, αλλά και το έργο, δηλαδή το πώς ο μαθητής σχετίζει την παρούσα κατάσταση με τις προηγούμενές του εμπειρίες.



Διάγραμμα 1: Πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου από τον μαθητή

Αφού εντοπίσαμε, ονομάσαμε και αναλύσαμε τις ρουτίνες όπως παραπάνω, στη συνέχεια, πραγματοποιήσαμε τρεις διαφορετικές κατηγοριοποιήσεις με βάση τρία κριτήρια. Στα Διαγράμματα 5 και 6 παρουσιάζονται αυτές οι τρεις κατηγοριοποιήσεις. Με βάση το πρώτο κριτήριο που αφορά το περιεχόμενο των ρουτινών, δημιουργήθηκαν τέσσερις κατηγορίες: (α) μελέτη εντολών-μηνυμάτων εφαρμογής, (β) κίνηση της συσκευής στον χώρο, (γ) μέτρηση απόστασης-ύψους αντικειμένων και (δ) εύρεση μήκους ευθύγραμμου τμήματος. Η κατηγοριοποίηση αυτή φαίνεται στην πρώτη στήλη των Διαγραμμάτων 5 και 6. Η δεύτερη κατηγοριοποίηση που πραγματοποιήσαμε είχε ως κριτήριο το είδος του λόγου. Καθώς, σύμφωνα με τη θεωρητική μας προσέγγιση, οι ρουτίνες αποτελούν τρόπο έκφρασης ενός λόγου, χαρακτηρίσαμε τις ρουτίνες ως μαθηματικές ή μη, ανάλογα με το αν ανήκουν ή όχι στον μαθηματικό λόγο (βλέπε υποενότητα 3.5). Η κατηγοριοποίηση αυτή φαίνεται στα Διαγράμματα 5 και 6 από τα χρώματα των πλαισίων: σε πράσινο πλαίσιο παρουσιάζονται οι μαθηματικές ρουτίνες, ενώ σε κόκκινο οι μη. Τέλος, για την τρίτη κατηγοριοποίηση, αναλύσαμε τα δεδομένα μας με βάση τον Πίνακα 2 (βλέπε υποενότητα 3.5) και χαρακτηρίσαμε τις ρουτίνες ως τελετουργίας ή εξερεύνησης. Η κατηγοριοποίηση αυτή φαίνεται στη δεύτερη στήλη κάθε διαγράμματος, όπου οι ρουτίνες τελετουργίας έχουν μπει εντός παρενθέσεων (), ενώ οι ρουτίνες εξερεύνησης εντός αγκυλών { }. Στη συνέχεια, περιγράφουμε την πρώτη κατηγοριοποίηση, ως προς το περιεχόμενο, και δίνουμε ένα παράδειγμα για καθεμία από τις τέσσερις κατηγορίες. Ακολουθεί η δεύτερη και η τρίτη κατηγοριοποίηση με αντίστοιχα παραδείγματα.

4.1.2. Κατηγοριοποιήσεις

Ως προς το περιεχόμενο: Στη δεύτερη στήλη κάθε διαγράμματος φαίνεται η ονομασία που δόθηκε στην εκάστοτε ρουτίνα, καθώς και η σειρά εμφάνισής της. Για παράδειγμα, η ρουτίνα: «περιστροφή συσκευής γύρω από τον x'x: παρατήρηση ένδειξης απόστασης» ήταν η δεύτερη και η τρίτη ρουτίνα που εκτέλεσε ο Φώτης (βλέπε Διάγραμμα 5).

Στην πρώτη στήλη κάθε διαγράμματος φαίνονται οι τέσσερις κατηγορίες ρουτινών που δημιουργήθηκαν με βάση το πρώτο κριτήριο κατηγοριοποίησης. Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από τις ρουτίνες κατά τις οποίες ο χρήστης μελετά τα μηνύματα που του εμφανίζει η εφαρμογή και ελέγχει τις ρυθμίσεις που μπορεί να αλλάξει σε αυτήν. Τα μηνύματα που εμφανίζει η εφαρμογή είναι οδηγίες οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν τον χρήστη στη διαδικασία μέτρησης της απόστασης και του ύψους των αντικειμένων, ενώ οι εντολές που μπορεί να δώσει είναι η αλλαγή κάποιων προκαθορισμένων ρυθμίσεων (βλέπε

υποενότητα 3.3.). Στον Πίνακα 4 παρουσιάζεται η ρουτίνα με όνομα «αλλαγή προκαθορισμένου ύψους κινητού», η οποία ανήκει σε αυτήν την κατηγορία, καθώς κατά την πραγματοποίησή της, ο χρήστης επέλεξε τη ρύθμιση «confirm default heights» και πραγματοποίησε διάφορες ενέργειες προσπαθώντας να ανακαλύψει τις λειτουργίες αυτής της επιλογής. Καθώς τέτοιες διαδικασίες είναι συνέπεια της προσπάθειας του χρήστη να εξοικειωθεί με τον τρόπο λειτουργίας της εφαρμογής, κρίθηκε ότι πρέπει να αποτελέσουν μία κατηγορία στο σύνολο των ρουτινών που εντοπίστηκαν.

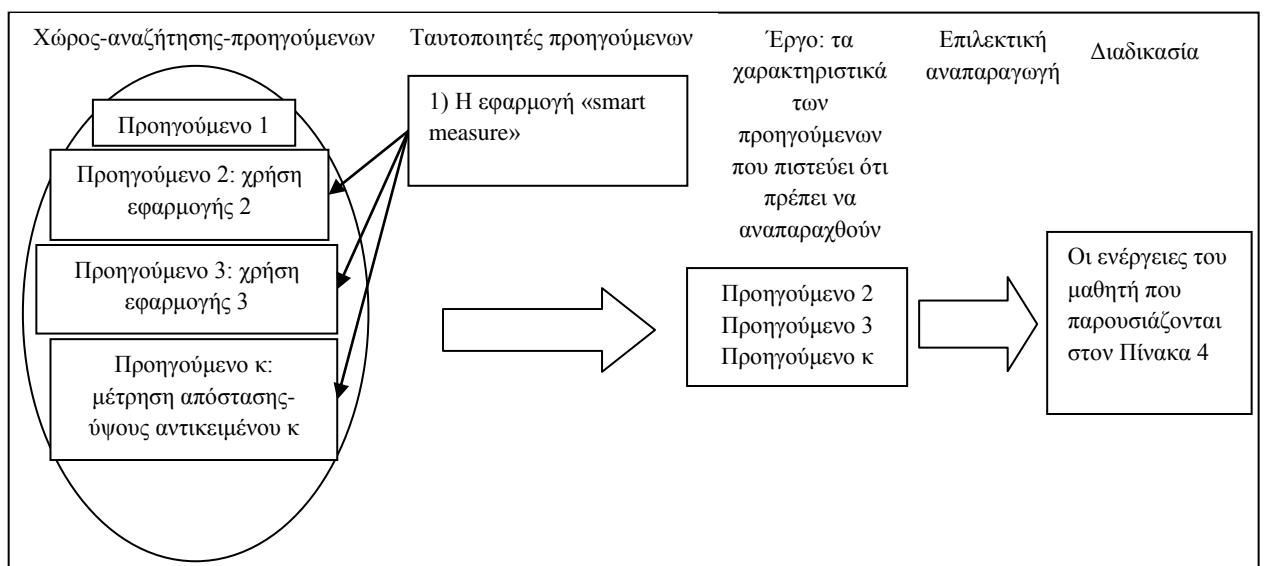
Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
100.Εκπαιδευτικός	Δεν έχεις πατήσει καθόλου... αυτό.	Ένα εικονίδιο με το κεφαλαίο γράμμα «H». Εμφανίζεται ένα παράθυρο με τίτλο “Confirm default heights”. Στην πρώτη σειρά του παραθύρου υπάρχει η προεπιλογή «Phone’s (h): 1,5 m» και στη δεύτερη «Building’s (H): 0 m» (βλέπε Εικόνα 6).
101.α. Παναγιώτης	...Α! Εδώ βάζουμε το ύψος που είμαστε εμείς από το πάτωμα.	Επιλέγει το «Phone’s (h): 1,5 m» κι εμφανίζεται το πληκτρολόγιο. Στη συνέχεια, επιλέγει «έξοδος».
β. Παναγιώτης	Κι εδώ το ύψος του κτιρίου;!	Επιλέγει το «Building’s (H): 0m» κι εμφανίζεται το πληκτρολόγιο. Στη συνέχεια, επιλέγει «έξοδος».
γ. Παναγιώτης	... Ωραία... ε...	
102.Εκπαιδευτικός	Προς το παρόν το ύψος του κτιρίου, ασ’ το λίγο στην άκρη.	
103.α. Παναγιώτης	Ωραία. Ένα μέτρο κάπου.	Επιλέγει το Phone’s (h):
β. Παναγιώτης	Τι; Ένα... όχι δέκα.	Πληκτρολόγησε 1 στο Phone’s (h): και 10 στο Building’s (H):.
104.Εκπαιδευτικός	Άλλαξες και το δεύτερο. Βαλ’ το μηδέν.	
105.Παναγιώτης		Διορθώνει το Building’s (H): και πληκτρολογεί 0.
106.Παναγιώτης	Ωραία...	
Στη συνέχεια, μετράει το ύψος του τοίχου που είχε μετρήσει και πριν και συγκρίνει τα δύο αποτελέσματα.		

Πίνακας 4: Αλλαγή προκαθορισμένου ύψους κινητού



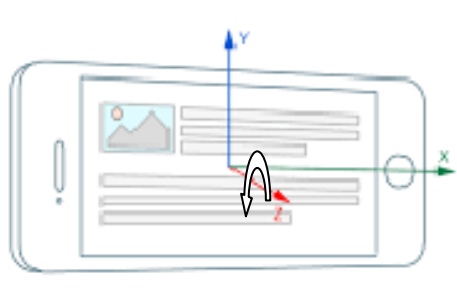
Εικόνα 13: Παράθυρο καθορισμού ύψους συσκευής

Στο παραπάνω επεισόδιο, ο μαθητής καταφέρνει να ανταποκριθεί στην κατάσταση έργου, χάρη στην προηγούμενή του εμπειρία με τη χρήση εφαρμογών σε έξυπνες συσκευές. Επιλέγοντας το εικονίδιο με το κεφαλαίο γράμμα «H» εμφανίζεται ένα μενού επιλογών, του οποίου ο σχεδιασμός είναι στο μοτίβο των περισσότερων εφαρμογών: υπάρχει ένα κενό προς συμπλήρωση, που αν το επιλέξεις εμφανίζεται το πληκτρολόγιο με το οποίο μπορείς να συμπληρώσεις το κενό (βλέπε Εικόνα 13). Η έξυπνη συσκευή έχει λειτουργήσει ως ταυτοποιητής προηγούμενων, ενώ τα προηγούμενα αποτελούνται από παλαιότερες εμπειρίες του με τη χρήση άλλων εφαρμογών σε έξυπνες συσκευές. Ως προηγούμενα μπορούμε να θεωρήσουμε και τις μετρήσεις απόστασης και ύψους αντικειμένων που έχει ήδη κάνει, καθώς, μέσω αυτών, έχει αντιληφθεί ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η συσκευή παίζει ρόλο στις μετρήσεις και, άρα, έχει νόημα ο προσδιορισμός του στην επιλογή «Phone's height». Το έργο, λοιπόν, όπως το αντιλαμβάνεται ο μαθητής, είναι η αλλαγή των προκαθορισμένων ρυθμίσεων της εφαρμογής, προκειμένου οι μετρήσεις της συσκευής να είναι πιο ακριβείς. Στο Διάγραμμα 2 φαίνονται σχηματικά αυτά που περιγράψαμε.



Διάγραμμα 1: Πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου από τον μαθητή

Η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από τις ρουτίνες κατά τις οποίες ο χρήστης, κινώντας τη συσκευή στον χώρο, παρατηρεί τις αλλαγές στις ενδείξεις της εφαρμογής. Στον Πίνακα 5 παρουσιάζεται η ρουτίνα με όνομα «Περιστροφή συσκευής γύρω από τον άξονα z'z». Κατά την εκτέλεσή της, ο μαθητής περιστρέφει το κινητό γύρω από τον άξονα z'z (βλέπε Εικόνα 14), παρατηρώντας τις συνέπειες στις ενδείξεις της εφαρμογής από αυτήν την κίνηση.



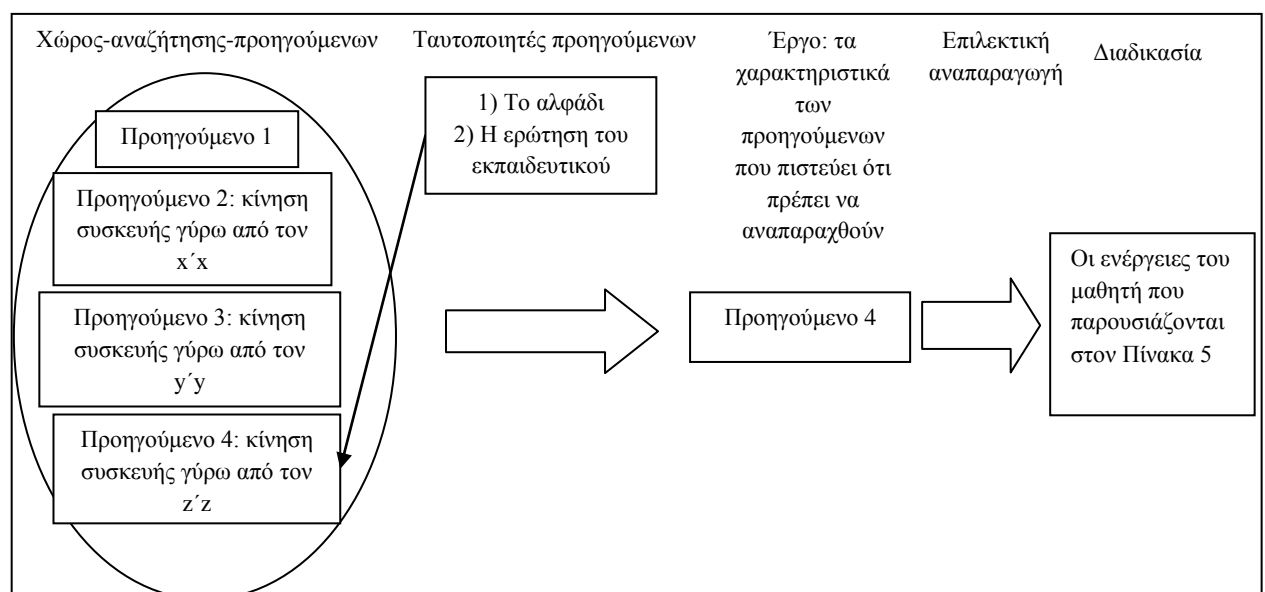
Εικόνα 14: Οι άξονες γύρω από τους οποίους πραγματοποιείται η κίνηση της συσκευής

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
58. Εκπαιδευτικός	Αυτό το πράσινο εκεί, τι είναι;	Δείχνει το αλφάδι
59. Παναγιώτης	Εε... άμα το πηγαίνω έτσι ή έτσι.	Περιστρέφει το κινητό γύρω από τον άξονα z'z, πρώτα 90 μοίρες αριστερόστροφα, το επαναφέρει οριζόντια και, στη συνέχεια, το περιστρέφει 90 μοίρες δεξιόστροφα και το επαναφέρει οριζόντια.
60. Εκπαιδευτικός	Ωραία, τι αλλάζει δηλαδή; Τι μετράει; Ας πούμε, τι σου δείχνει;	
61. α. Παναγιώτης	Τι μου δείχνει; Καλό αυτό.	Συνεχίζει να περιστρέφει τη συσκευή γύρω από τον z'z.
β. Παναγιώτης	Άμα πηγαίνω δεξιά αριστερά...	Περιστρέφει τη συσκευή γύρω από τον y'y (δεξιά αριστερά).
γ. Παναγιώτης	Ντάξει δεν πάει πολύ.	
δ. Παναγιώτης	Τη μεριά της κλίσης; Όχι.	Περιστρέφει ξανά τη συσκευή γύρω από τον z'z.
ε. Παναγιώτης	Μπορώ να μετρήσω κι έτσι;	Περιστρέφει τη συσκευή 90 μοίρες δεξιόστροφα (γύρω από τον άξονα z'z) και επιλέγει το κουμπί «get distance». Η συσκευή δονείται, δεν μετράει την απόσταση κι εμφανίζει το μήνυμα «The level was inclined to 91.2 degrees. To calibrate, long-click the level», το οποίο εξαφανίζεται πριν προλάβει να το διαβάσει.
στ. Παναγιώτης	Τι λέει;!	Η εφαρμογή δεν εμφανίζει πια το μήνυμα.
ζ. Παναγιώτης		Κάνει κι άλλη προσπάθεια, το μήνυμα εξαφανίζεται πάλι πριν προλάβει να το διαβάσει, οπότε επαναλαμβάνει αυτή τη διαδικασία άλλες 2 φορές, έως

		όπου καταφέρει να διαβάσει ολόκληρο το μήνυμα.
η. Παναγιώτης		Επαναφέρει τη συσκευή οριζόντια, επιλέγει «get distance» και η εφαρμογή μετράει κανονικά την απόσταση.
θ. Παναγιώτης	Εδώ είναι κάτι με τις μοίρες... ας πούμε έξω από εδώ δεν μπορώ να βγάλω.	Περιστρέφει τη συσκευή γύρω από τον z'z, ώστε ο κύκλος που δείχνει την κλίση στο αλφάδι να βγει εκτός ορίων.
ι. Παναγιώτης	Οκ... είναι καλό αυτό. Ωραία, όταν φεύγει από εδώ δεν μπορώ να βγάλω, να μετρήσω μάλλον.	
62. Εκπαιδευτικός	Και πότε φεύγει από τη μέση;	
63. Παναγιώτης	Όταν γυρίσω το κινητό.	Περιστρέφει τη συσκευή γύρω από τον z'z.
64. Εκπαιδευτικός	Ωραία. Γενικά	
65. Παναγιώτης	Όταν αλλάζει... όταν γυρίζω το κινητό, φεύγει.	

Πίνακας 5: Περιστροφή συσκευής γύρω από τον άξονα z'z.

Στο παραπάνω επεισόδιο, ο μαθητής καταφέρνει να ανταποκριθεί στην κατάσταση έργου, χάρη στην προηγούμενή του εμπειρία με την παρούσα εφαρμογή. Μέχρι αυτό το σημείο, ο μαθητής έχει ήδη εκτελέσει άλλες έξι ρουτίνες που ανήκουν στην κατηγορία «κίνησης συσκευής στον χώρο». Μάλιστα, έχουν παγιωθεί αφηγήσεις, όπως «αυτό εδώ (το ραντάρ) είναι κάτι με τους άξονες κι εγώ βρίσκομαι στον z, στη μέση», «[το ραντάρ] δείχνει προς τα πού είμαστε, δηλαδή λειτουργεί σαν πυξίδα» κ.ά.. Το έργο, όπως το αντιλαμβάνεται ο μαθητής, είναι να επαναλάβει κάποιες από τις κινήσεις που έκανε πριν, οι οποίες αποτελούν τα προηγούμενα, και να περιγράψει τις αλλαγές στις ενδείξεις της εφαρμογής που οφείλονται σε αυτήν την κίνηση. Στο Διάγραμμα 3 φαίνονται σχηματικά αυτά που περιγράψαμε.



Διάγραμμα 3: Πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου από τον μαθητή

Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν οι ρουτίνες κατά τις οποίες ο χρήστης μετράει την απόσταση που απέχει ένα αντικείμενο από τον ίδιο καθώς και το ύψος του αντικειμένου. Στον Πίνακα 3 παρουσιάστηκε η ρουτίνα μέτρησης της απόστασης και του ύψους ενός στρώματος γυμναστικής από τον μαθητή. Στο κείμενο που ακολουθεί τον Πίνακα 3 παρουσιάστηκε η ανάλυση της κατάστασης έργου.

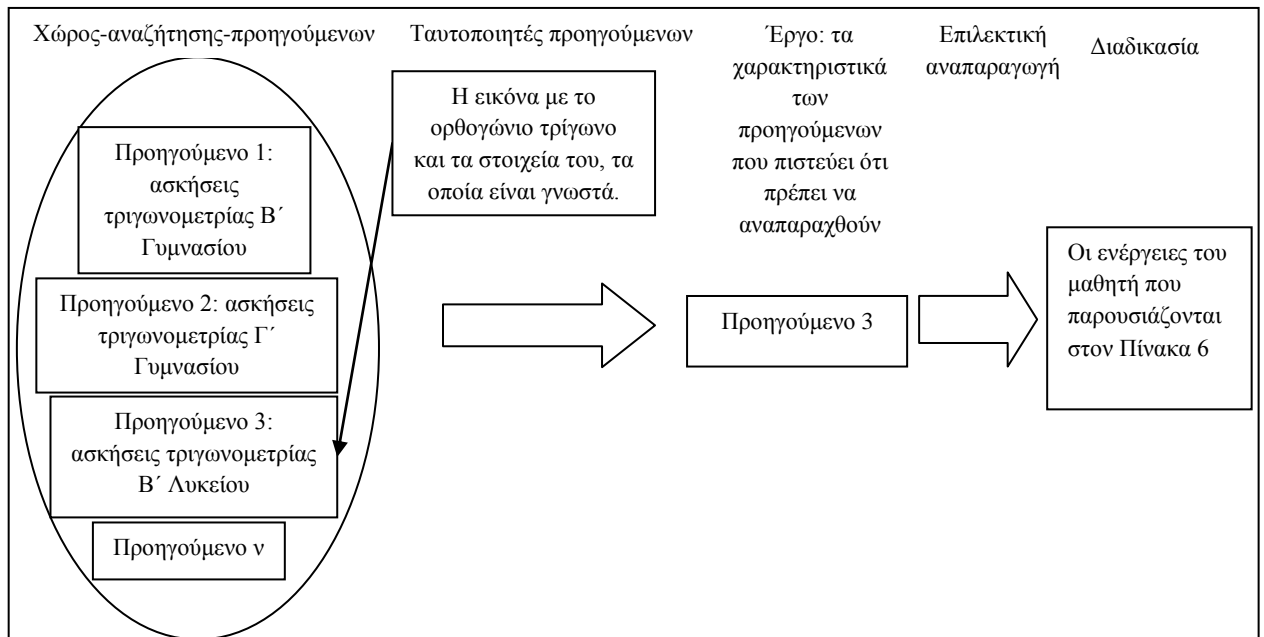
Τέλος, η τέταρτη κατηγορία αποτελείται από τις ρουτίνες εύρεσης του μήκους ενός ευθύγραμμου τμήματος. Εδώ, οι μαθητές ακολουθούν διαδικασίες με τις οποίες προσπαθούν να βρουν το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος, δουλεύοντας πάνω σε ένα γεωμετρικό σχήμα. Στον Πίνακα 6 παρουσιάζεται ένα σχετικό απόσπασμα όπου ο μαθητής, για μία υποθετική μέτρηση με τη γωνία θ (βλέπε υποενότητα 3.3) να είναι 45 μοίρες, έχει σχεδιάσει το ανάλογο ορθογώνιο τρίγωνο και προσπαθεί να βρει την άγνωστη κάθετη πλευρά.

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
324. Παναγιώτης		Έχει σχεδιάσει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τη μία προσκείμενη στη βάση γωνία να είναι 45 μοίρες και έχει γράψει από κάτω: $\eta_{45} = \sqrt{2}/2$ $\sigma_{45} = \sqrt{2}/2.$
325. Παναγιώτης	Είχαμε κάνει κανά τέτοιο πρόβλημα στην άλγεβρα; Με μία πυραμίδα;	
326. Εκπαιδευτικός	Χμ χμ...	Συγκαταβατικά.
327. Παναγιώτης	Είχαμε κάνει ε;	
...		
392.α. Παναγιώτης	Αυτή... αυτή είναι η απέναντι κάθετη.	Τη δείχνει στο σχήμα.
β. Παναγιώτης	Κι αυτή είναι... δεν είναι η προσκείμενη;... αυτή είναι η προσκείμενη!	Τη δείχνει στο σχήμα.
γ. Παναγιώτης	Κι αυτή είναι η υποτείνουσα.	Τη δείχνει στο σχήμα.
393. Εκπαιδευτικός	Ωραία.	
394.α. Παναγιώτης	Αα... Ε... ωραία... αφού αυτό είναι ρίζα δύο δεύτερα... καλό αυτό... θα πούμε... ας ονομάσουμε... άλφα, βήτα, γάμα.	Ονομάζει την υποτείνουσα β και τις δύο κάθετες γ και α . Η πλευρά α είναι αυτή που αντιστοιχεί στην απόσταση του αντικειμένου, δηλαδή αυτή που ψάχνει.
β. Παναγιώτης	Έχουμε ημίτονο 45 είναι ίσο με	Σβήνει το $\sqrt{2}/2$ που ήταν γραμμένο.
γ. Παναγιώτης	Απέναντι κάθετη, που είναι άλφα, προς υποτείνουσα...	Γράφει στον πίνακα: α .
δ. Παναγιώτης	Όπα... δεν θέλω να βάλω αυτό... την εφαπτομένη καλύτερα...	Σβήνει.
ε. Παναγιώτης	Εφαπτομένη των 45 είναι... η άλφα... απέναντι προς προσκείμενη.	Γυρνάει προς τον εκπαιδευτικό.
395. Εκπαιδευτικός		Γνέφει συγκαταβατικά.

396.α. Παναγιώτης	Ωραία. Άλφα προς γάμμα.	Γράφει στον πίνακα.
β. Παναγιώτης	Η εφαπτομένη των 45... δεν θυμάμαι πόσο είναι... μισό... θα το θυμηθώ... ε...	
397.Εκπαιδευτικός	Ένα.	
398.α. Παναγιώτης	Ένα. Χα, καλό. Ωραία.	
β. Παναγιώτης	Έχουμε 1 ίσον το άλφα προς 1,	Γράφει στον πίνακα $1=a/1$.
	ε;	Γυρνάει προς τον εκπαιδευτικό.
399.Εκπαιδευτικός		Γνέφει συγκαταβατικά.
400.α. Παναγιώτης	...αφού είναι να βρω το ύψος. Οπότε άλφα ίσον με 1.	Γυρνάει προς τον πίνακα και γράφει.
β. Παναγιώτης	Και βρήκαμε αυτή.	Και δείχνει την πλευρά άλφα, δηλαδή την κάθετη που αντιστοιχεί στην απόσταση του αντικειμένου.
401.Εκπαιδευτικός	Χμ χμ...	Συγκαταβατικά.
402.α. Παναγιώτης	Δηλαδή άμα έχει το ύψος, τη γωνία από το κινητό, βρίσκει αυτό.	Δείχνει την πλευρά άλφα που αντιστοιχεί στην απόσταση του αντικειμένου.
β. Παναγιώτης	Ντάξει δεν χρειαζόμαστε τίποτα άλλο.	
403.Εκπαιδευτικός	Αυτό κάνει!	
404.Παναγιώτης	Αυτό κάνει!	

Πίνακας 6: Υπολογισμός κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου

Στο παραπάνω επεισόδιο, ο μαθητής καταφέρνει να ανταποκριθεί στην κατάσταση έργου, χάρη στην προηγούμενή του εμπειρία με ασκήσεις τριγωνομετρίας. Τέτοιες ασκήσεις, όπου σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο δίνεται η μία πλευρά και η μία γωνία και ζητείται μία άλλη πλευρά, γίνονται τόσο στη Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου, όσο και στη Β΄ Λυκείου. Ως ταυτοποιητές προηγούμενων λειτούργησαν το ορθογώνιο τρίγωνο και τα στοιχεία του, τα οποία αποτελούν δεδομένα για το παρόν πρόβλημα, δηλαδή η μία κάθετη πλευρά και η γωνία. Τα προηγούμενα τα οποία προσπαθεί ο μαθητής να ανακαλέσει είναι κάποιες ασκήσεις που είχαν κάνει τη φετινή χρονιά στην Άλγεβρα Β΄ Λυκείου [325 έως 327]. Το έργο για τον μαθητή είναι να αντικαταστήσει στον τύπο της εφαπτομένης τα γνωστά στοιχεία (τη μία πλευρά και την εφαπτομένη της γωνίας), ώστε να βρει την άγνωστη πλευρά. Η διαδικασία της ρουτίνας φαίνεται στο απόσπασμα [392 έως 404]. Στο Διάγραμμα 4 φαίνονται σχηματικά αυτά που περιγράψαμε.



Διάγραμμα 4: Πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου από τον μαθητή

Ως προς το είδος του λόγου: Η δεύτερη κατηγοριοποίηση που πραγματοποιήσαμε είχε ως κριτήριο το είδος του λόγου. Καθώς, σύμφωνα με τη θεωρητική μας προσέγγιση, οι ρουτίνες αποτελούν τρόπο έκφρασης ενός λόγου, χαρακτηρίσαμε τις ρουτίνες ως μαθηματικές ή μη, ανάλογα με το αν ανήκουν ή όχι στον μαθηματικό λόγο (βλέπε υποενότητα 3.5). Στα Διαγράμματα 5 και 6, οι ρουτίνες που ανήκουν στον μαθηματικό λόγο είναι σε πράσινο πλαίσιο, ενώ αυτές που δεν ανήκουν σε κόκκινο πλαίσιο. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, καμία από τις ρουτίνες των πρώτων τριών κατηγοριών, δηλαδή (α) μελέτη εντολών-μηνυμάτων εφαρμογής, (β) κίνηση της συσκευής στον χώρο και (γ) μέτρηση απόστασης-ύψους αντικειμένων, δεν ανήκει στον μαθηματικό λόγο. Αντίθετα, όλες οι ρουτίνες της τέταρτης κατηγορίας, δηλαδή της εύρεσης μήκους ευθύγραμμου τμήματος, ανήκουν στον μαθηματικό λόγο. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα ρουτίνας που δεν ανήκει στον μαθηματικό λόγο κι ένα που ανήκει.

Στον Πίνακα 4 της παρούσας ενότητας παρουσιάστηκε το επεισόδιο αλλαγής προκαθορισμένου ύψους κινητού. Μελετώντας το απόσπασμα, παρατηρούμε ότι εμφανίζονται λέξεις κλειδιά που χρησιμοποιούνται στον αριθμητικό λόγο, όπως «ένα μέτρο» [103α], «ένα... όχι δέκα» [103β], «μηδέν» [104]. Ωστόσο, μετά τη συνολική εξέταση των χαρακτηριστικών της ρουτίνας, δεν κατηγοριοποιήθηκε στον αριθμητικό λόγο: το έργο, όπως το αντιλαμβάνεται ο μαθητής -και άρα ο σκοπός πραγματοποίησης της ρουτίνας- είναι να αλλάξει τις προκαθορισμένες ρυθμίσεις της εφαρμογής και, στη συνέχεια, να εκτελέσει κι άλλες μετρήσεις. Η ρουτίνα αυτή δεν είχε ως σκοπό, ούτε παρήγαγε μία αφήγηση που να

ανήκει στον μαθηματικό λόγο και γι' αυτό θεωρούμε ότι δεν ανήκει σε αυτόν. Η παρουσία, όμως, κάποιων λέξεων που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά, μας οδηγεί στο να τον κατατάξουμε στον μη επίσημο-καθημερινό μαθηματικό λόγο.

Αντίθετα, στον Πίνακα 6 παρουσιάζεται η ρουτίνα υπολογισμού κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου, η οποία ανήκει στον μαθηματικό λόγο. Μελετώντας κανείς το απόσπασμα μπορεί να βρει πολλές λέξεις κλειδιά που χρησιμοποιούνται στον μαθηματικό λόγο, όπως για παράδειγμα «απέναντι κάθετη» [392α], «ημίτονο» [394β], «γωνία» [402]. Ο μαθητής χρησιμοποίησε ένα τρίγωνο, που είχε σχεδιάσει στον πίνακα, για οπτικό διαμεσολαβητή. Επιπλέον, ο μαθητής παρήγαγε μία αφήγηση, ότι η κάθετη πλευρά που έψαχνε είναι ένα μέτρο, η οποία ανήκει και αυτή στον μαθηματικό λόγο. Τέλος, ο σκοπός πραγματοποίησης της ρουτίνας ήταν ο υπολογισμός της κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου, στοιχείο το οποίο δείχνει και αυτό ότι η ρουτίνα ανήκει στον μαθηματικό λόγο.

Τελετουργίας/Εξερεύνησης: Στην τρίτη και τελευταία κατηγοριοποίηση, χαρακτηρίσαμε τις ρουτίνες ως τελετουργίας ή εξερεύνησης. Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του Πίνακα 2 (βλέπε υποενότητα 3.5). Στα Διαγράμματα 5 και 6 φαίνονται τα αποτελέσματα αυτής της κατηγοριοποίησης. Στη δεύτερη στήλη κάθε διαγράμματος, όπου υπάρχει το όνομα κάθε ρουτίνας, οι ρουτίνες τελετουργίας έχουν μπει εντός παρενθέσεων (), ενώ οι ρουτίνες εξερεύνησης εντός αγκυλών { }. Έτσι, στο Διάγραμμα 5, η πρώτη ρουτίνα που εκτέλεσε ο Φώτης είναι τελετουργίας, ενώ η δεύτερη είναι εξερεύνησης. Στη συνέχεια αναλύουμε μία ρουτίνα τελετουργίας και μία εξερεύνησης.

Στο απόσπασμα του Πίνακα 7, φαίνεται το επεισόδιο κατά το οποίο ο μαθητής μετράει την απόσταση της εκπαιδευτικού από τον ίδιο, καθώς και το ύψος της. Η ρουτίνα έχει ξεκινήσει μετά από την παρότρυνση της εκπαιδευτικού. Τα προηγούμενα που προσπαθεί να ανακαλέσει ο μαθητής είναι οι μετρήσεις που έχει παρακολουθήσει στο βίντεο και η μέτρηση που έχει κάνει η εκπαιδευτικός (βλέπε Παράρτημα III: [4 έως 13]). Η διαδικασία που ακολουθεί ο μαθητής είναι απλή αναπαραγωγή αυτών των προηγούμενων. Ο μαθητής εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο αποτέλεσμα της ρουτίνας: το έργο, γι' αυτόν, είναι να επαναλάβει τις διαδικασίες για να ικανοποιήσει τις προσδοκίες του κοινωνικού του περιγύρου -της εκπαιδευτικού- και όχι γιατί έχει ως σκοπό να χρησιμοποιήσει την αφήγηση που θα παράγει στην απάντηση του αρχικού ερωτήματος. Για τους λόγους αυτούς, θεωρήθηκε ότι η ρουτίνα μέτρησης της απόστασης-ύψους εκπαιδευτικού είναι τελετουργίας και όχι

εξερεύνησης. Στον Πίνακα 1 του Παραρτήματος II, το κείμενο με πράσινο χρώμα παρουσιάζει πιο αναλυτικά αυτά που περιγράψαμε.

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
β. Εκπαιδευτικός	έλα μέτρα το ύψος μου να δούμε αν θα με βγάλει καλή, λοιπόν για πες.	
19. Φώτης	Από πού στοχεύω; Από τα πόδια κάτω- κάτω	
20. Εκπαιδευτικός	Ναι από τα πόδια	
21. Φώτης	Όπα, βλακεία.	Χωρίς να έχει στοχεύσει σωστά πάτησε το “get distance”.
22. Εκπαιδευτικός	Δεν πειράζει πάτα ριστάρτ.	
23. Φώτης	Ναι έχεις δίκιο... αμάν, ναι τέλεια!	Πάτησε κλείσιμο της εφαρμογής.
24. Εκπαιδευτικός	Τι έγινε; Έκλεισε;	
25. Φώτης	Την έβγαλα αλλά ντάξει.	Την ξανανοίγει (μετά από 5 δευτερόλεπτα)
26. Εκπαιδευτικός	Μόνο και δεν με βγάλει σωστά ε;! Κάτσε να τεντωθώ.	
27. α. Φώτης	Λοιπόν είναι στα 2 μέτρα ακριβώς ...	Πατάει το “get distance”
β. Φώτης	και πάμε για το height	Σηκώνει προς τα πάνω το κινητό
28. Εκπαιδευτικός	Μην με βγάλεις κοντή.	
29. Φώτης	Σ’ έβγαλε κοντή.	ψιλογελάει
30. Εκπαιδευτικός	Πόσο;	
31. Φώτης	Ένα πενήντα (1 50)	

Πίνακας 7: Μέτρηση ύψος εκπαιδευτικού

Στο απόσπασμα που υπάρχει στον Πίνακα 8, φαίνονται οι διαδικασίες της ρουτίνας κατά την οποία ο μαθητής περιστρέφει τη συσκευή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα y παρατηρώντας τις αλλαγές στις ενδείξεις του ραντάρ. Αν και η ρουτίνα ξεκίνησε μετά από την παρότρυνση της εκπαιδευτικού, ο μαθητής ξεφεύγει από την απλή μίμηση και, πειραματιζόμενος με την εφαρμογή, ακολουθεί νέες διαδικασίες. Σκοπός του είναι να βρει τις δυνατότητες της εφαρμογής και όχι να επαναλάβει συγκεκριμένες διαδικασίες. Με βάση αυτά τα στοιχεία χαρακτηρίσαμε τη ρουτίνα ως ρουτίνα εξερεύνησης. Στον Πίνακα 2 του Παραρτήματος II παρουσιάζεται πιο λεπτομερώς η παραπάνω ανάλυση.

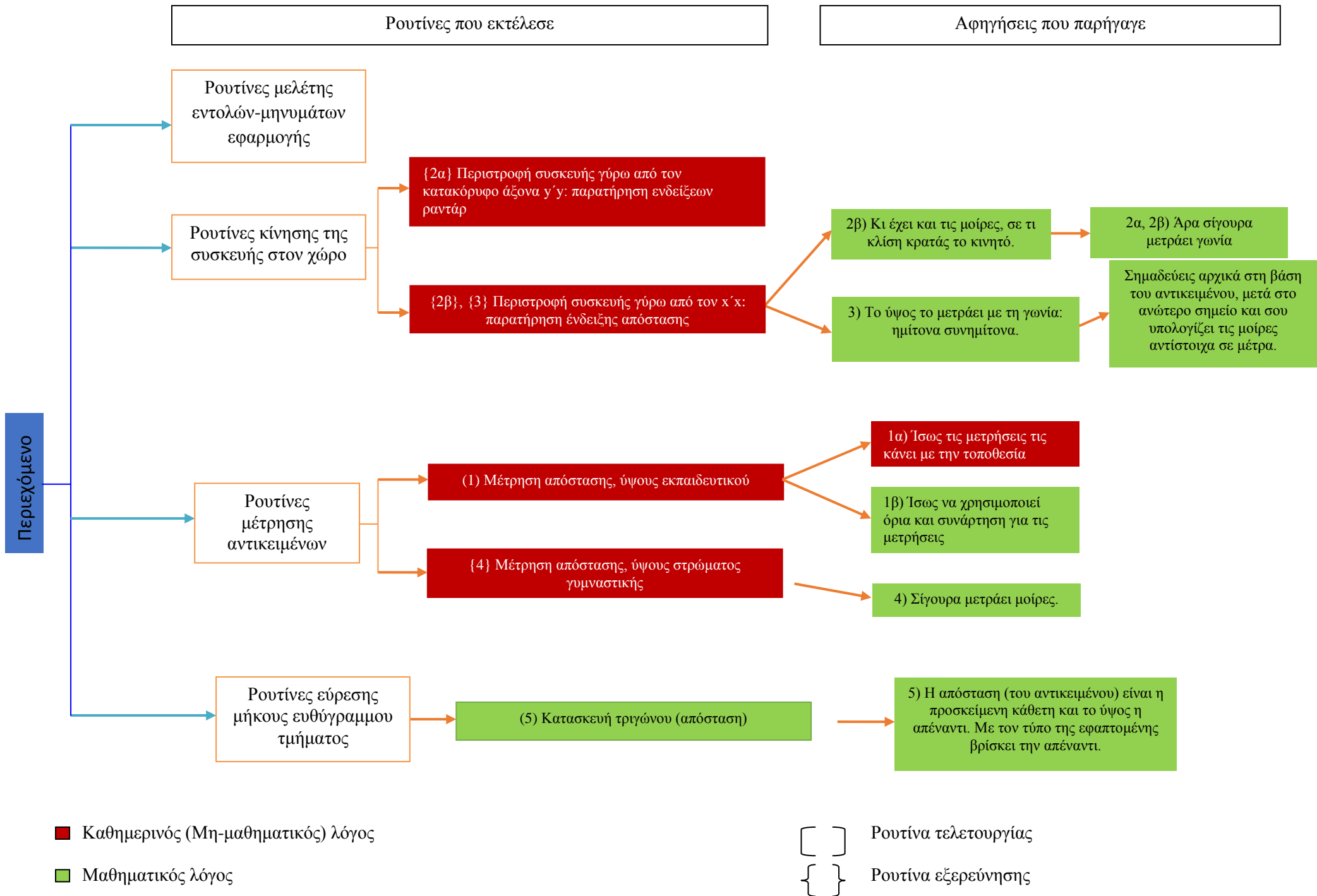
Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
48. β. Φώτης	Ξέρω.. καταρχάς γυρνάει και αυτό το ραντάρ ας πούμε...	Πατάει ρισέτ στην εφαρμογή. Διαγράφεται η τελευταία μέτρηση και ξεκινάει να περιστρέφει δεξιά-αριστερά και στη συνέχεια πάνω-κάτω το κινητό, παρατηρώντας το πώς αλλάζει ο προσανατολισμός στο ραντάρ.
γ. Φώτης	κι έχει και τις μοίρες!	
49. Εκπαιδευτικός	Άρα;	
50. Φώτης	Έχει μοίρες ρε.. έχει μοίρες σε τι κλίση κρατάς το κινητό!	Συνεχίζει να πειραματίζεται γυρνώντας πάνω-κάτω το κινητό και παρατηρώντας το πώς αλλάζει ο προσανατολισμός του ραντάρ.
51. Φώτης	Για να δει αν είσαι.. και σου λέει 40	Το γυρνάει δεξιά αριστερά

	Southwest...	
52. Φώτης	Άρα σίγουρα μετράει γωνία	

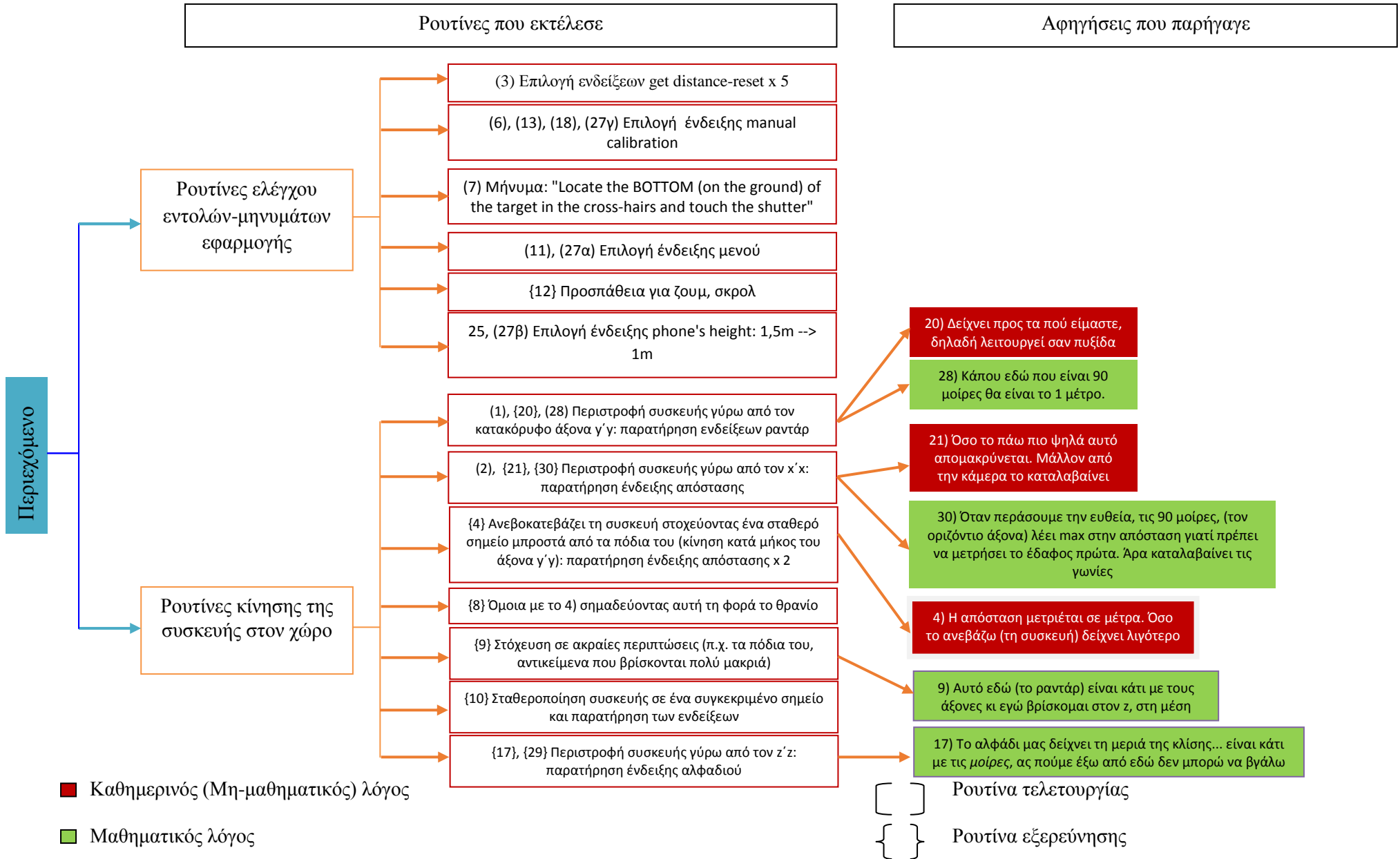
Πίνακας 8: Απόσπασμα «το ραντάρ με τις μοίρες»

Συνοπτικά αποτελέσματα 1^{ου} ερευνητικού ερωτήματος

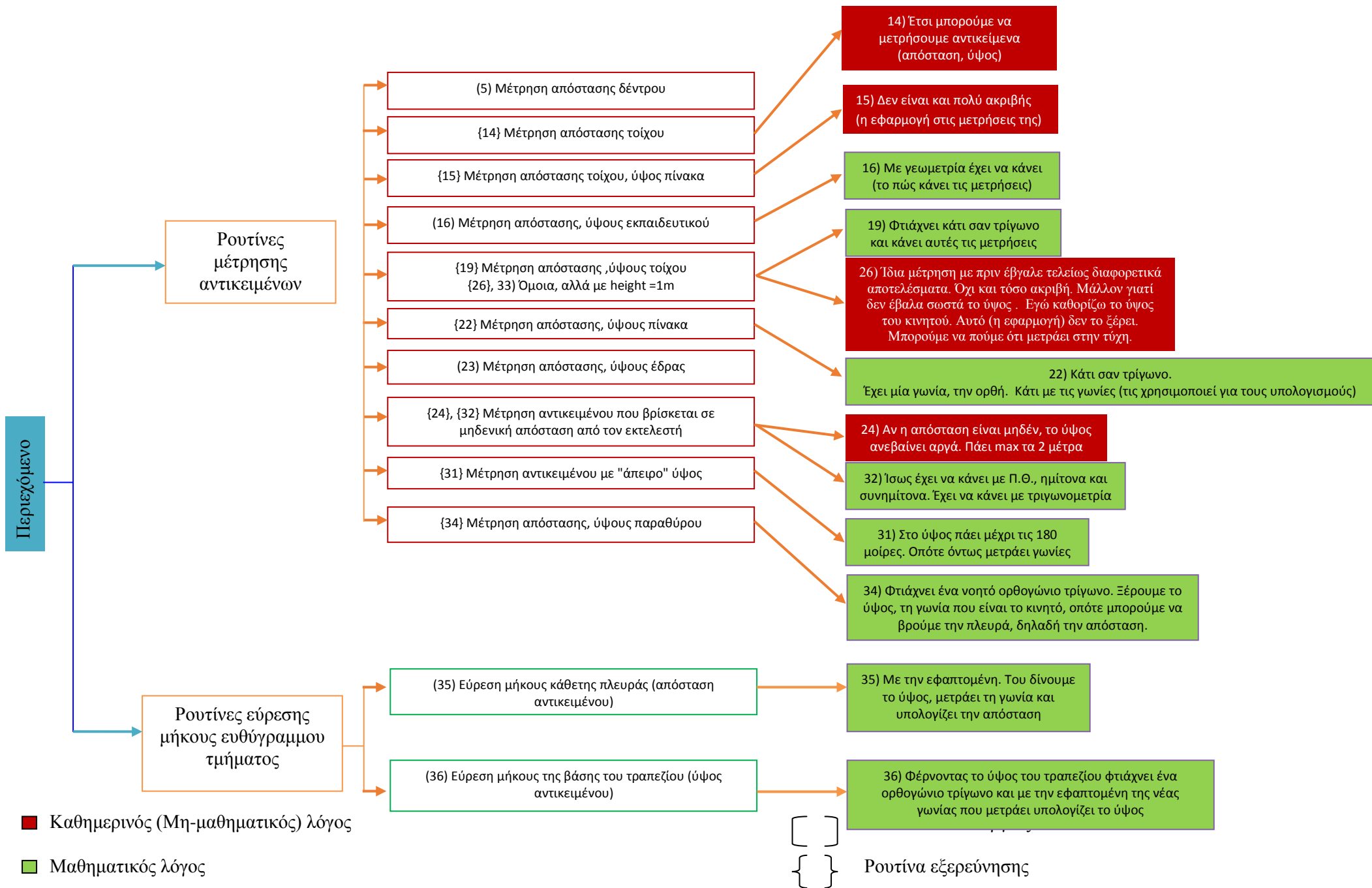
Για να απαντήσουμε το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που αφορά το είδος των ρουτινών, αρχικά εντοπίσαμε και ονομάσαμε τις ρουτίνες που εκτέλεσαν οι μαθητές. Το όνομα που δινόταν σε κάθε ρουτίνα ήταν εμπνευσμένο από την διαδικασία που ακολουθούσε ο μαθητής. Στη συνέχεια πραγματοποιήσαμε τρεις διαφορετικές κατηγοριοποιήσεις με βάση τρία κριτήρια. Με βάση το πρώτο κριτήριο που αφορά το περιεχόμενο των ρουτινών, δημιουργήθηκαν 4 κατηγορίες: (α) μελέτη εντολών-μηνυμάτων εφαρμογής, (β) κίνηση της συσκευής στον χώρο, (γ) μέτρηση απόστασης-ύψους αντικειμένων και (δ) εύρεση μήκους ευθύγραμμου τμήματος. Με βάση το δεύτερο, κριτήριο χωρίσαμε τις ρουτίνες σε αυτές που ανήκουν στον μαθηματικό λόγο και σε αυτές που δεν ανήκουν. Καμία από τις ρουτίνες των πρώτων τριών κατηγοριών, δηλαδή (α) μελέτη εντολών-μηνυμάτων εφαρμογής, (β) κίνηση της συσκευής στον χώρο και (γ) μέτρηση απόστασης-ύψους αντικειμένων, δεν ανήκει στον μαθηματικό λόγο. Μόνο οι ρουτίνες της τέταρτης κατηγορίας, δηλαδή της εύρεσης μήκους ευθύγραμμου τμήματος, ανήκουν στον μαθηματικό λόγο. Στην τρίτη και τελευταία κατηγοριοποίηση, χαρακτηρίσαμε τις ρουτίνες ως τελετουργίας ή εξερεύνησης. Οι ρουτίνες που ανήκουν στον μαθηματικό λόγο χαρακτηρίστηκαν όλες ως ρουτίνες τελετουργίας. Επίσης, παρατηρούμε ότι και οι δύο μαθητές, ερχόμενοι αντιμέτωποι για πρώτη φορά με την κατάσταση έργου, εκτελούν αρχικά ρουτίνες τελετουργίας.



Διάγραμμα 5: Ρουτίνες που πραγματοποίησε και αφηγήσεις που παράγαγε ο Φώτης



Διάγραμμα 5: Ρουτίνες που πραγματοποίησε και αφηγήσεις που παράγαγε ο Παναγιώτης



Διάγραμμα 6: Ρουτίνες που πραγματοποίησε και αφηγήσεις που παρήγαγε ο Παναγιώτης

4.2. Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: Παρατηρείται μεταφορά κατά την ενασχόληση των μαθητών με την εφαρμογή; Πώς καταφέρνουν να την πραγματοποιήσουν;

Η εμπλοκή του Φώτη με την εφαρμογή «smartmeasure» πραγματοποιήθηκε με την εκπαιδευτικό των μαθηματικών και αφού ολοκληρώθηκε ένα από τα τελευταία καλοκαιρινά μαθήματα για την προετοιμασία του προς τη Γ΄ Λυκείου. Η εμπλοκή του αυτή πραγματοποιήθηκε στο ίδιο χώρο που έκανε και τα μαθήματα προετοιμασίας. Προσπαθώντας, λοιπόν, να προσδιορίσουμε τα κοινωνικο-πολιτισμικά όρια του ΧΑΠ, θα λέγαμε ότι αποτελείται από τις πρόσφατες εμπειρίες που απέκτησε από την προετοιμασία αυτή. Αυτές οι εμπειρίες περιέχουν ρουτίνες που συνδέονται με τη συνάρτηση, τη γραφική παράσταση αυτής, τη σύνθεση συναρτήσεων, τη συνάρτηση 1-1, την αντίστροφη και τα όρια.

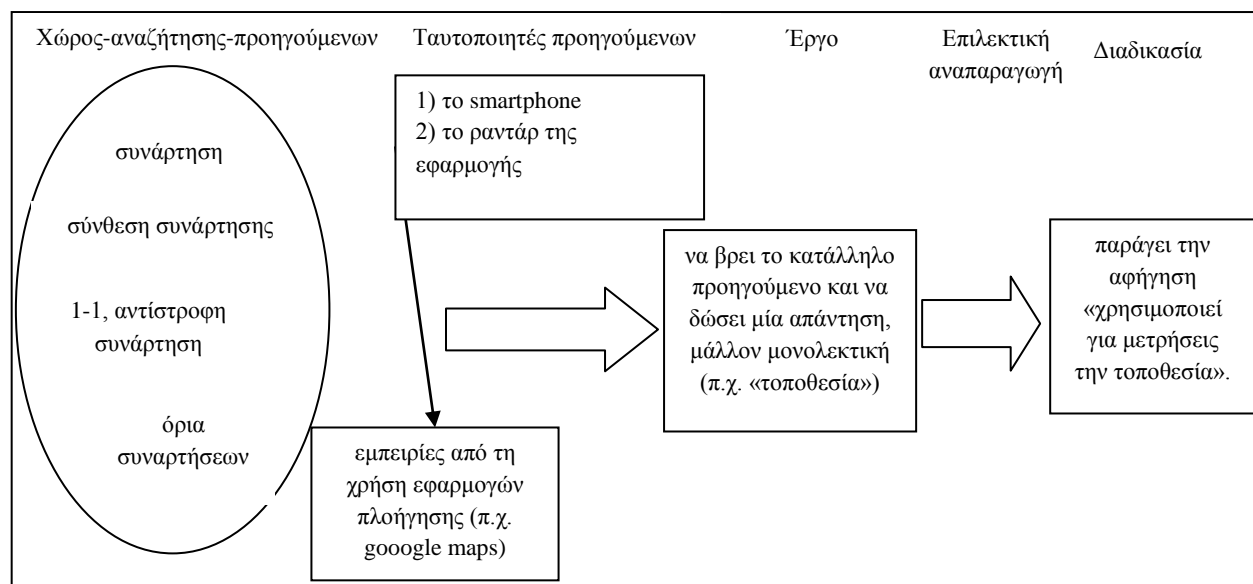
Όπως φαίνεται στο απόσπασμα του Πίνακα 9, η εκπαιδευτικός θέτει την κατάσταση έργου στον μαθητή, να βρει «πώς μετράει το ύψος αυτό το πράγμα» [41]. Το έργο, όπως το αντιλαμβάνεται η εκπαιδευτικός, είναι η δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου, το οποίο θα περιγράφει τη λειτουργία της εφαρμογής. Η, χρησιμοποιώντας το λεξιλόγιο της θεωρητικής μας προσέγγισης, η παραγωγή μίας αφήγησης που θα ερμηνεύει τη λειτουργία της εφαρμογής χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό λόγο. Ωστόσο, το έργο για τον Φώτη είναι διαφορετικό. Ο ΧΑΠ του αποτελείται από τις πρόσφατες εμπειρίες του στο μάθημα των μαθηματικών (όρια συναρτήσεων, κ.λπ.). Γι' αυτόν, το έξυπνο κινητό και το ραντάρ που έχει η εφαρμογή, έχουν λειτουργήσει ως ταυτοποιητές προηγούμενων. Καθώς ο Φώτης παρατηρεί ότι το ραντάρ δείχνει το πώς κινείται η συσκευή στον χώρο, ανακαλεί εμπειρίες από το παρελθόν με τη χρήση εφαρμογών πλοήγησης (π.χ. google maps), οι οποίες έχουν αντίστοιχες, με το ραντάρ, ενδείξεις. Επειδή, λοιπόν, αυτές οι εφαρμογές χρησιμοποιούν την τοποθεσία (GPS) της συσκευής, ο Φώτης θεωρεί ότι κάτι τέτοιο θα συμβαίνει και με αυτή την εφαρμογή.

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
41. Εκπαιδευτικός	Λοιπόν, για σκέψου τώρα, τι, πώς μετράει δηλαδή το ύψος αυτό το πράγμα;	
42. Φώτης	(Ξεφυσάει) Λοιπόν.. δεν έχω ιδέα αλλά κάτσε μπας και... .. με την τοποθεσία; Δεν νομίζω.	Οι ενδείξεις στην εφαρμογή έχουν μείνει στην προηγούμενη μέτρηση. Ο Φώτης κρατάει τη συσκευή αλλά δεν την κινεί. Το βλέμμα του είναι στραμμένο προς την εκπαιδευτικό.
43. Εκπαιδευτικός	Τοποθεσία, πώς θα το κάνει με την τοποθεσία;	
44. Φώτης	Δεν νομίζω.	

Πίνακας 9: Απόσπασμα «πώς μετράει το ύψος αυτό το πράγμα;»

Στην παραπάνω κατάσταση έργου, και με βάση την ανάλυση που κάναμε στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, δεν αναπτύσσεται με κάποιον τρόπο μαθηματικός λόγος. Ωστόσο,

μπορεί να παρατηρηθεί μεταφορά γνώσης: χρησιμοποιώντας ως ταυτοποιητές προηγούμενων την έξυπνη συσκευή και το ραντάρ της εφαρμογής, ο Φώτης καταφέρνει να επεκτείνει τον ΧΑΠ με εμπειρίες από τη χρήση εφαρμογών πλοήγησης. Η αφήγηση, όμως, ότι η εφαρμογή μετράει την απόσταση με την τοποθεσία, δεν θα παγιωθεί γιατί δεν εγκρίθηκε από την εκπαιδευτικό [43].



Διάγραμμα 7: Πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου «πώς μετράει το ύψος;»

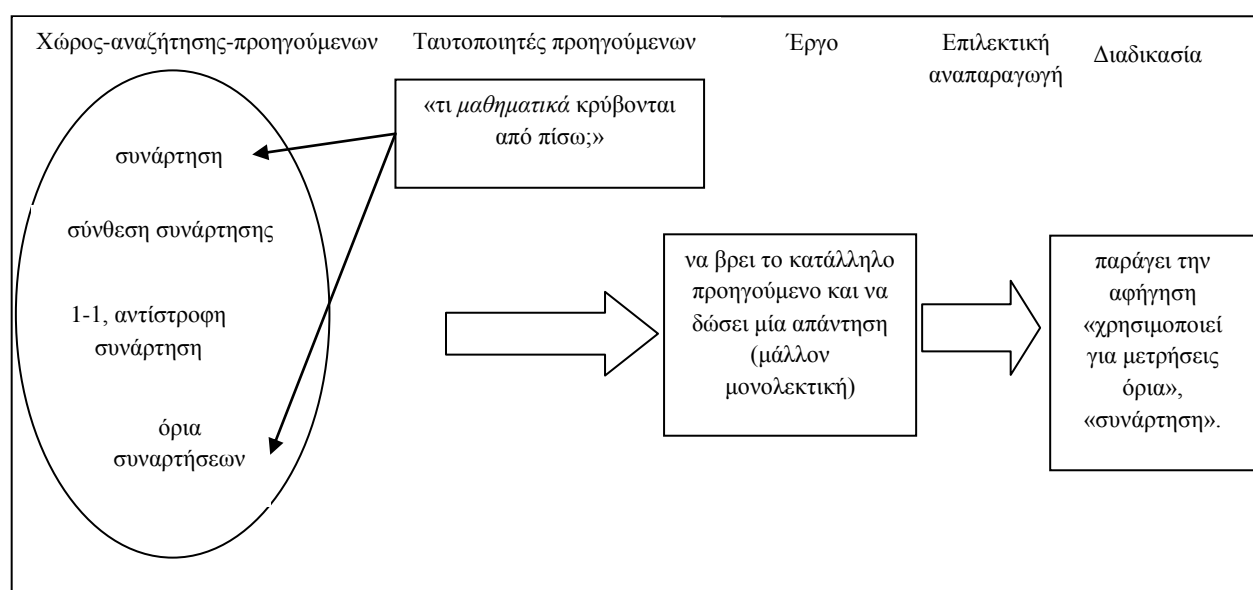
Η εκπαιδευτικός θέτει ξανά το ερώτημα, αυτή τη φορά με διαφορετική διατύπωση. Πλέον, η ερώτηση δεν είναι «πώς μετράει το ύψος αυτό το πράγμα», αλλά «τι μαθηματικά κρύβονται από πίσω» [45, η έμφαση προστέθηκε]. Αυτή η ερώτηση λειτουργεί ως ταυτοποιητής προηγούμενων για τον μαθητή κι έτσι αναζητά προηγούμενα από τον μαθηματικό λόγο. Καθώς δεν υπάρχει κάποιο άλλο χαρακτηριστικό της παρούσας κατάστασης έργου, το οποίο μπορεί να λειτουργήσει ως ταυτοποιητής προηγούμενων για τον Φώτη, και καθώς ο ΧΑΠ περιορίζεται στις πρόσφατες εμπειρίες από την τάξη των μαθηματικών, οι μόνες απαντήσεις που μπορεί να δώσει είναι ότι η εφαρμογή χρησιμοποιεί όρια ή συναρτήσεις. Ο τρόπος που διατύπωσε την απάντησή του γελώντας («λες να κρύβονται όρια;!»), ενισχύει τα λεγόμενά μας ότι η απάντηση αυτή δόθηκε ελλείψει άλλων προηγούμενων.

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
45. Εκπαιδευτικός	Παίξτο λίγο... να δεις τι φάση μπορεί να ισχύει.. τι μαθηματικά κρύβονται από πίσω.	
46. Φώτης	...λες να κρύβονται όρια; ...	Γελώντας
47. α. Εκπαιδευτικός		Γελάει
β. Εκπαιδευτικός	Καλά γενικά παντού κρύβονται όρια αλλά	

48. α. Φώτης	συνάρτηση ας πούμε...	
--------------	-----------------------	--

Πίνακας 10: Απόσπασμα «τι μαθηματικά κρύβονται από πίσω;»

Αν και στην παραπάνω κατάσταση έργου -και με βάση την ανάλυση που κάναμε στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα- μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τον λόγο που αναπτύσσει ο Φώτης ως μαθηματικό, το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε με βάση τη θεωρητική προσέγγιση που έχουμε υιοθετήσει, είναι ότι δεν υπάρχει μεταφορά: ο ΧΑΠ στην παρούσα κατάσταση έργου έχει περιοριστεί στις πρόσφατες εμπειρίες από την τάξη των μαθηματικών και δεν πραγματοποιείται επέκτασή του με κάποιον τρόπο. Σε αντίθετα αποτελέσματα θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε μία άλλη θεωρητική προσέγγιση. Στο παράδοξο αυτό επανερχόμαστε στην ενότητα 5.



Διάγραμμα 8: Πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου «τι μαθηματικά κρύβονται;»

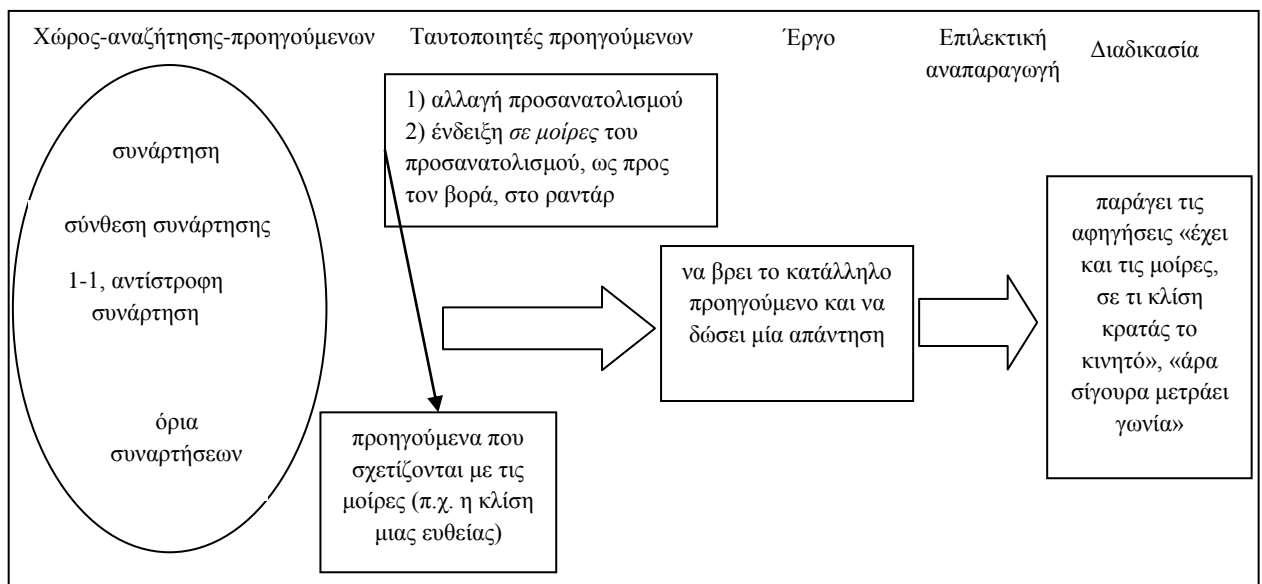
Μετά τις δύο αποτυχημένες προσπάθειες να βρει πώς λειτουργεί η εφαρμογή, ο Φώτης καταφεύγει στην εκτέλεση δύο άλλων ρουτινών, περιστροφή γύρω από τον $y'y$ και γύρω από τον $x'x$ [48β-51]. Η εκτέλεση της πρώτης ρουτίνας έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή της αφήγησης «καθώς περιστρέφουμε τη συσκευή γυρνάει και το ραντάρ». Η εκτέλεση της δεύτερης ρουτίνας οδηγεί στην παραγωγή των αφηγήσεων «έχει και τις μοίρες, σε τι κλίση κρατάς το κινητό», «άρα σίγουρα μετράει γωνία», οι οποίες ανήκουν στον μαθηματικό λόγο.

48. β. Φώτης	Ξέρω.. καταρχάς γυρνάει και αυτό το ραντάρ ας πούμε...	Πατάει ρισέτ στην εφαρμογή. Διαγράφεται η τελευταία μέτρηση και ξεκινάει να περιστρέφει δεξιά-αριστερά και στη συνέχεια πάνω-κάτω το κινητό, παρατηρώντας το πώς αλλάζει ο προσανατολισμός στο ραντάρ.
γ. Φώτης	κι έχει και τις μοίρες!	
49. Εκπαιδευτικός	Άρα;	
50. Φώτης	Έχει μοίρες ρε.. έχει μοίρες σε τι	Συνεχίζει να πειραματίζεται

	κλίση κρατάς το κινητό!	γυρνώντας πάνω-κάτω το κινητό και παρατηρώντας το πώς αλλάζει ο προσανατολισμός του ραντάρ.
51. Μαθητής	Για να δει αν είσαι.. και σου λέει 40 Southwest...	Το γυρνάει δεξιά αριστερά
52. Μαθητής	Άρα σίγουρα μετράει γωνία	

Πίνακας 11: Απόσπασμα «το ραντάρ με τις μοίρες»

Η μεταφορά αυτή έγινε εφικτή χάρη στις αλλαγές των ενδείξεων του ραντάρ, το οποίο εκπραγματώνει την κίνηση της συσκευής στον χώρο [48β-50]. Λειτουργώντας ως ταυτοποιητές προηγούμενων, η αλλαγή της ένδειξης του προσανατολισμού στο ραντάρ καθώς και η ένδειξη σε μοίρες, βοήθησαν τον Φώτη να επεκτείνει τον ΧΑΠ και να συμπεριλάβει εμπειρίες με ρουτίνες από τον μαθηματικό λόγο που σχετίζονται με τις μοίρες. Έτσι, αρχικά παρήγαγε την αφήγηση ότι «έχει και τις μοίρες, σε τι κλίση κρατάς το κινητό» [50] και στη συνέχεια ότι «σίγουρα μετράει γωνία» [52].



Διάγραμμα 9: Πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου «το ραντάρ με τις μοίρες»

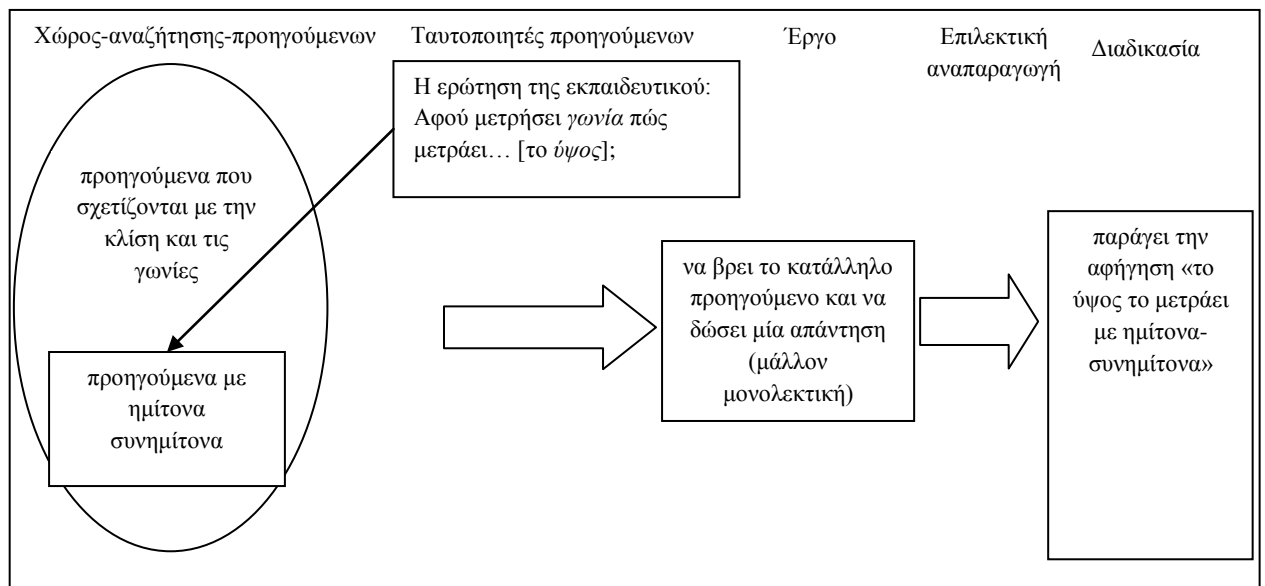
Αφού παγιώθηκαν αυτές οι δύο αφηγήσεις, η εκπαιδευτικός θέτει μία καινούρια κατάσταση έργου (για την ακρίβεια χωρίζει το έργο σε «υπο-καταστάσεις έργου») μέσω της ερώτησης: «αφού μετρήσει γωνία πώς μετράει... [το ύψος]» [53-54]. Παρά την προσπάθεια της εκπαιδευτικού να βοηθήσει τον Φώτη κατακερματίζοντας την κατάσταση έργου σε απλούστερες, το έργο για τον Φώτη συνεχίζει να είναι διαφορετικό από το πώς το βλέπει εκείνη και γενικότερα ένας εσωτερικός στον μαθηματικό λόγο. Το έργο για τον Φώτη είναι να δώσει μία μονολεκτική απάντηση για το ποια μαθηματικά χρησιμοποιεί η εφαρμογή. Αυτό φαίνεται από τις μέχρι τώρα απαντήσεις του, όλες μονολεκτικές: «τοποθεσία» [42], «όρια» [46], «συνάρτηση» [48], από την «απροθυμία» του να πιάσει μολύβι και χαρτί παρά την παρότρυνση της εκπαιδευτικού [52-53], καθώς και από την έκπληξη που δείχνει όταν η

εκπαιδευτικός επανέρχεται παροτρύνοντάς τον να κάνει «ένα σχεδιάκι» για να τον βοηθήσει [83-84]. Έτσι, το έργο για τον Φώτη ολοκληρώνεται, όταν -χρησιμοποιώντας ως ταυτοποιητές προηγούμενων τη γωνία και το ύψος- παράγει μία αφήγηση που ανήκει στον τριγωνομετρικό λόγο: «η εφαρμογή χρησιμοποιεί ημίτονα-συνημίτονα».

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
53. Εκπαιδευτικός	Αφού μετρήσει γωνία, πώς μετράει...	Κουνάει τους δείκτες των χεριών της πάνω-κάτω ευθύγραμμα.
54. Φώτης	Το ύψος; Α, με τη γωνία! ημίτονα συνημίτονα;!	
55. Εκπαιδευτικός	Εσύ πες μου.	
56. α. Φώτης	Με τις μοίρες. Κάνεις εσύ αυτό	δείχνει το σημείο που η κάμερα σημαδεύει το έδαφος στη μέτρηση της ντουλάπας
β. Φώτης	το κάνεις πάνω, οπότε μετράει μια γωνία...	δείχνει με τα δάχτυλα την γωνία που η απέναντι πλευρά αντιστοιχεί στο ύψος Με τον αντίχειρα και τον δείκτη δημιουργεί το τρίγωνο που σχηματίζεται απομακρύνοντάς τους σιγά- σιγά.
γ. Φώτης	και σου υπολογίζει... τις μοίρες αντίστοιχα σε μέτρα;!	Ξύνει το κεφάλι του. Διστάζει να το πει.
57. Εκπαιδευτικός	Τις μοίρες αντίστοιχα σε μέτρα;!	<i>Με απορία (σαν να του λέει ότι είναι λάθος αυτό)</i>
58. Φώτης	Που δεν γίνεται αυτό, αλλά	

Πίνακας 12: Απόσπασμα «αφού μετρήσει γωνία, πώς μετράει το ύψος;»

Οι αφηγήσεις που παγιώθηκαν: «έχει και τις μοίρες, σε τι κλίση κρατάς το κινητό», «άρα σίγουρα μετράει γωνία», διαμορφώνουν τον ΧΑΠ ώστε να περιλαμβάνει προηγούμενα που να σχετίζονται με την κλίση και την γωνία. Η ερώτηση που κάνει η εκπαιδευτικός και λειτουργεί ως ταυτοποιητής προηγούμενων [53-54], κρατάει αρκετά «κλειστό» το έργο για τον Φώτη. Έτσι, καταφέρνει αμέσως και συνδέει την κατάσταση έργου με προηγούμενα σχετικά με τα ημίτονα και τα συνημίτονα. Αν και ο λόγος που αναπτύσσεται στην παραπάνω κατάσταση έργου είναι φανερά μαθηματικός, δεν έχουμε επέκταση του ΧΑΠ και άρα μεταφορά γνώσης. Το φαινόμενο αυτό προσπαθούμε να ερμηνεύσουμε στην επόμενη ενότητα.



Διάγραμμα 10: Πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου «αφού μετρήσει γωνία, πώς μετράει το ύψος;»

Η κατάσταση έργου δεν έχει τελειώσει για την εκπαιδευτικό, η οποία αναμένει τη δημιουργία ενός τριγωνομετρικού μοντέλου από τον Φώτη [54-55], [60]. Όμως, για τον Φώτη το έργο έχει ολοκληρωθεί -έχει βρει ότι η εφαρμογή χρησιμοποιεί ημίτονα και συνημίτονα. Έτσι, στην πρώτη παρότρυνση της εκπαιδευτικού αρκείται σε μία περιγραφή της διαδικασίας μέτρησης, όπως φαίνεται στο απόσπασμα [56]: «Με τις μοίρες. Κάνεις εσύ αυτό... το κάνεις πάνω, οπότε μετράει μια γωνία... και σου υπολογίζει... τις μοίρες αντίστοιχα σε μέτρα;!», ενώ στη δεύτερη επαναλαμβάνει την ρουτίνα μέτρησης [61-63].

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε
59. Φώτης	Που δεν γίνεται αυτό, αλλά	
60. Εκπαιδευτικός	Τι πώς, περίμενε περίμενε, βάλτα όλα σε μια σειρά. Αν θέλεις εδώ κάνε με το χαρτί μολύβι	
61. Φώτης	Θα παίξω ναι, έτσι	Συνεχίζει να «παίζει» με την εφαρμογή
62. Εκπαιδευτικός	Παίξε	
63. α Φώτης	Θα παίξω με το τέτοιο να δω πόσο ψηλό είναι	Βλέπει το βιβλίο
β Φώτης	Ο καφές μου	Κάνει στην άκρη το βιβλίο για να βλέπει καλά τον καφέ

Πίνακας 13: Με μολύβι και χαρτί

Η αφήγηση ότι «μετράει μία γωνία και σου υπολογίζει τις μοίρες αντίστοιχα σε μέτρα» δεν θα μπορούσε να γίνει αποδεκτή (*endorsed*) από την μαθηματική κοινότητα (*literate mathematical discourse*), αλλά θα μπορούσε να παγιωθεί στον μη επίσημο-καθημερινό μαθηματικό λόγο. Αν, δηλαδή, υιοθετήσουμε μία οπτική η οποία είναι εσωτερική στον λόγο των μαθηματικών (Sfard, 2008), δεν πρέπει να αποδεχτούμε την αφήγηση που παρήγαγε ο Φώτης ως «αληθή», όπως ακριβώς κάνει η εκπαιδευτικός [57]. Αν, όμως, η οπτική μας είναι εξωτερική στον λόγο των μαθηματικών, η αφήγηση του Φώτη μπορεί να θεωρηθεί «αληθής».

Πράγματι, για έναν απλό χρήστη, η εφαρμογή, με κάποιον τρόπο, μετατρέπει τις μοίρες σε μέτρα.

Μελετώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, γεννιέται το εξής ερώτημα: «γιατί, αν και ο Φώτης κατάφερε να βρει τα μαθηματικά που χρησιμοποιεί η εφαρμογή –που ίσως ήταν και το πιο δύσκολο μέρος-, αδυνατεί να παράγει μία αφήγηση στον τριγωνομετρικό λόγο που θα εξηγεί τη λειτουργία της εφαρμογής;». Στην ενότητα 5 προσπαθούμε να δώσουμε μία απάντηση στο παραπάνω ερώτημα.

Αποτελέσματα 2^ο ερευνητικού ερωτήματος: περίπτωση Φώτη

Για να απαντήσουμε το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα που αφορά την μεταφορά που παρατηρείται κατά την κατάσταση έργου, χρησιμοποιήσαμε αρχικά την ανάλυση των ρουτινών του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος. Έχοντας ήδη εντοπίσει τον ΧΑΠ και τους ταυτοποιητές προηγούμενων από το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, προχωρήσαμε στον προσδιορισμό των ρουτινών κατά τις οποίες επεκτείνεται ο ΧΑΠ. Εκεί ακριβώς θεωρούμε ότι υπάρχει και η μεταφορά, εκεί δηλαδή που ξεπερνιούνται τα κοινωνικο-πολιτισμικά όρια της κατάστασης έργου. Το παραπάνω φαινόμενο εντοπίστηκε δύο φορές κατά την ανάλυσή μας. Την πρώτη, η έξυπνη συσκευή και το ραντάρ της εφαρμογής είναι τα χαρακτηριστικά της κατάστασης που λειτούργησαν ως ταυτοποιητές προηγούμενων, συνδέοντας την υπάρχουσα κατάσταση με εμπειρίες από τη χρήση εφαρμογών πλοήγησης. Την δεύτερη, η εκπραγμάτωση της κίνησης της συσκευής από το ραντάρ και ιδιαίτερα η ένδειξη του προσανατολισμού σε μοίρες, λειτούργησαν ως ταυτοποιητές συνδέοντας την υπάρχουσα κατάσταση με εμπειρίες από τον μαθηματικό λόγο που σχετίζονται με την κλίση και τις μοίρες. Σε κάθε περίπτωση, οι ταυτοποιητές προηγούμενων ήταν τα χαρακτηριστικά εκείνα της κατάστασης έργου που έκαναν εφικτή την μεταφορά.

Στην παραπάνω ανάλυση παρουσιάσαμε και δύο περιπτώσεις κατά τις οποίες δεν παρατηρήθηκε μεταφορά, όπως την έχουμε θεωρήσει. Αυτό έγινε, αφενός για να παρουσιαστεί στον αναγνώστη πιο συνολικά η πορεία αντιμετώπισης της κατάστασης έργου από τον Φώτη, αφετέρου γιατί και αυτές οι περιπτώσεις παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Αν υιοθετήσουμε μία άλλη θεώρηση, θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρείται μεταφορά, καθώς ο Φώτης, κατά την εμπλοκή του με το μη μαθηματικό πλαίσιο της εφαρμογής, διατυπώνει ισχυρισμούς στον μαθηματικό λόγο. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας την θεώρησή μας, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει μεταφορά, καθώς ο

Φώτης δεν ανακαλεί διαδικασίες από άλλον ΧΑΠ. Στην ενότητα 5 σχολιάζουμε τα δύο διαφορετικά αποτελέσματα.

Αποτελέσματα 2^ο ερευνητικού ερωτήματος: περίπτωση Παναγιώτη

Και στην περίπτωση του Παναγιώτη, η ανάλυση έγινε με τον ίδιο τρόπο. Έχοντας ήδη εντοπίσει τον ΧΑΠ και τους ταυτοποιητές προηγούμενων από το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, προχωρήσαμε στον προσδιορισμό των ρουτινών κατά τις οποίες επεκτείνεται ο ΧΑΠ, δηλαδή των ρουτινών που θεωρούμε ότι υπάρχει μεταφορά. Εντοπίσαμε τέσσερις τέτοιες περιπτώσεις κατά την ανάλυσή μας. Στην πρώτη περίπτωση, ο Παναγιώτης κατάφερε να επεκτείνει τον, περιορισμένο στις πρόσφατες εμπειρίες της τάξης, ΧΑΠ, με την συσκευή του κινητού να έχει λειτουργήσει ως ταυτοποιητής προηγούμενων. Η αφήγηση που παρήγαγε ανήκει στον καθημερινό λόγο: «τις αποστάσεις τις καταλαβαίνει με την κάμερα», μία αφήγηση η οποία προφανώς και δεν παγιώθηκε. Στη συνέχεια, ο Παναγιώτης πέρασε ένα, σχετικά, μεγάλο χρονικό διάστημα προσπαθώντας να εξοικειωθεί με την εφαρμογή, καθώς δεν είχε παρακολουθήσει το βίντεο στο youtube που έδειχνε το πώς κανείς μπορεί να την χρησιμοποιήσει. Στο διάστημα αυτό, παγιώθηκαν αφηγήσεις οι οποίες άλλαξαν τον ΧΑΠ. Έτσι, στη δεύτερη περίπτωση, ο ΧΑΠ περιλαμβάνει τις εμπειρίες από την χρήση της εφαρμογής. Καθώς το ραντάρ δείχνει τη θέση της συσκευής ως προς το επίπεδο, λειτουργεί ως ταυτοποιητής, οδηγώντας τον Παναγιώτη να ανακαλέσει εμπειρίες από τον μαθηματικό λόγο που σχετίζονται με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και να παράγει, έτσι, την αφήγηση: «είναι κάτι με τους άξονες κι εγώ βρίσκομαι στον z, στη μέση». Στην τρίτη περίπτωση, το αλφάδι της εφαρμογής λειτούργησε ως ταυτοποιητής και η αφήγηση που παρήγαγε ήταν: «είναι η μεριά της κλίσης, είναι κάτι με τις μοίρες». Στην τέταρτη περίπτωση, η ερώτηση του εκπαιδευτικού «τι υπολογισμούς κάνει, πώς καταφέρνει δηλαδή να μετρήσει αποστάσεις;» λειτούργησε ως ταυτοποιητής, οδηγώντας τον να ανακαλέσει εμπειρίες από τον μαθηματικό λόγο, τις οποίες χρησιμοποίησε για να παράγει την αφήγηση «Κάτι σαν τρίγωνο. Έχει μία γωνία, την ορθή. Κάτι με τις γωνίες (τις χρησιμοποιεί για τους υπολογισμούς)». Καθώς παγιωνόντουσαν αφηγήσεις από τον μαθηματικό λόγο, ο ΧΑΠ του Παναγιώτη διαμορφωνόταν κατάλληλα, ώστε να περιλαμβάνει εμπειρίες σχετικές με αυτές τις αφηγήσεις. Στη συνέχεια, με τις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού να παίζουν, ως ταυτοποιητές, καθοριστικό ρόλο, ο Παναγιώτης δημιούργησε ένα μοντέλο παρόμοιο με αυτό που περιγράφουμε στην ενότητα 3, το οποίο εξηγούσε, με τριγωνομετρικό λόγο, το πώς λειτουργεί η εφαρμογή. Αν και, σε αυτή την πορεία, παρατηρήθηκαν κάποιοι «ισομορφισμοί» μεταξύ μη μαθηματικού

και μαθηματικού λόγου, όπως «η συσκευή μετράει τη γωνία», άρα «έχουμε ως δεδομένη αυτή τη γωνία στο τρίγωνο», δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι πραγματοποιείται μεταφορά σε αυτές τις περιπτώσεις, με βάση τη θεώρησή μας.

Βλέποντας και τις δύο περιπτώσεις συνολικά

Βλέποντας συνολικά τα αποτελέσματά μας, παρατηρούμε τρία είδη μεταφοράς: (α) από τα περιορισμένα -στα όρια της τάξης- μαθηματικά, στον καθημερινό λόγο, (β) από τα περιορισμένα -στα όρια της τάξης- μαθηματικά, στα χρήσιμα, για την δημιουργία ενός μοντέλου, (γ) από τον καθημερινό λόγο ή από τον μη επίσημο μαθηματικό (colloquial) στον μαθηματικό (literate mathematical discourse).

Τρία ήταν και τα είδη των ταυτοποιητών που παρατηρήθηκαν: (α) η ίδια η συσκευή, (β) οι οπτικοί διαμεσολαβητές της εφαρμογής, δηλαδή το ραντάρ και το αλφάδι, που εκπραγμάτωναν την κίνηση της συσκευής στον χώρο και (γ) κάποιες από τις ερωτήσεις των εκπαιδευτικών.

5. Συζήτηση-Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε τις ενέργειες των μαθητών κατά την εμπλοκή τους με μία εφαρμογή για έξυπνες συσκευές, καθώς και το πώς γίνεται εφικτή η μεταφορά κατά την προσπάθεια των μαθητών να εξηγήσουν το πώς λειτουργεί η εφαρμογή.

Υιοθετώντας την επικοινωνιακο-γνωστική προσέγγιση (Sfard, 2008) και θεωρώντας την μάθηση ως τη ρουτινοποίηση των ενεργειών των μαθητών (Lavie κ.ά.,2018), πρώτον, αναλύσαμε τις ρουτίνες που εντοπίσαμε με βάση την θεώρηση των Lavie κ.ά. (2018) σε συνδυασμό με το διάγραμμα που κατασκευάσαμε (βλέπε Εικόνα 1), δεύτερον, δημιουργήσαμε ένα εργαλείο το οποίο μας βοήθησε να χαρακτηρίσουμε τις ρουτίνες ως τελετουργίας ή εξερεύνησης (βλέπε Πίνακα 1), και τρίτον, εννοιοποιήσαμε τη μεταφορά, στηριζόμενοι στη θεωρητική προσέγγιση των Lavie κ.ά. (2018) ως την υπέρβαση κοινωνικο-πολιτισμικών ορίων: οι λόγοι που αναπτύσσονται περιορίζονται –χωρίς να καθορίζονται- από την παρούσα κατάσταση έργου, που λαμβάνει χώρα εντός του υπάρχοντος θεσμού, σε συνδυασμό με τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των ανθρώπων. Ωστόσο, αυτά τα όρια αλλάζουν, καθώς εξελίσσεται η κατάσταση έργου. Στηριζόμενοι σε θεωρητικά εργαλεία που εστιάζουν στο πώς ο μαθητής αντιλαμβάνεται την κατάσταση έργου –η οποία μπορεί να είναι διαφορετική από το πώς την αντιλαμβάνεται ο εκπαιδευτικός και να αλλάζει στην πορεία της- (Lavie κ.ά., 2018), δημιουργήσαμε μία θεώρηση η οποία προσπαθεί να εντοπίσει την υπέρβαση των ορίων, όπως, κάθε φορά, τα αντιλαμβάνεται ο μαθητής. Δεν αναζητήσαμε, λοιπόν, τη μεταφορά σε ένα στατικό μοντέλο, εντοπίζοντας τις μεταβάσεις από τον καθημερινό στον μαθηματικό λόγο. Θεωρήσαμε ένα δυναμικό μοντέλο, όπου στην μία πλευρά βρίσκεται το πώς ο μαθητής αντιλαμβάνεται κάθε φορά την κατάσταση έργου (π.χ. μία άσκηση σχολικού τύπου σαν τις πρόσφατες που έχει αντιμετωπίσει, μία πραγματική κατάσταση για την οποία πρέπει να δημιουργήσει ένα μαθηματικό μοντέλο ή μία καθημερινή κατάσταση, η αντιμετώπιση της οποίας απαιτεί καθημερινές ρουτίνες) και στην άλλη πλευρά βρίσκεται η μετάβαση που πραγματοποιεί, δηλαδή η καινούρια του οπτική για την κατάσταση έργου. Τα αποτελέσματα, λοιπόν, του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος προέρχονται από τον προσδιορισμό αυτού του, συνεχώς μεταβαλλόμενου, δίπολου.

Στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, αφού εντοπίσαμε τις ρουτίνες που πραγματοποίησαν οι μαθητές, τις κατηγοριοποιήσαμε ως προς το περιεχόμενο, ως προς το είδος του λόγου και ως προς το είδος τους, δηλαδή τελετουργίας ή εξερεύνησης. Ως προς το περιεχόμενο,

παρατηρήθηκαν τέσσερις κατηγορίες: (α) μελέτη εντολών-μηνυμάτων εφαρμογής, (β) κίνηση της συσκευής στον χώρο, (γ) μέτρηση απόστασης-ύψους αντικειμένων και (δ) εύρεση μήκους ευθύγραμμου τμήματος. Ως προς το είδος του λόγου, οι ρουτίνες των τριών πρώτων κατηγοριών άνηκαν όλες στον καθημερινό λόγο ή στον μη επίσημο μαθηματικό (colloquial mathematical discourse) (Sfard, 2008), ενώ οι ρουτίνες της τέταρτης κατηγορίας άνηκαν στον επίσημο μαθηματικό λόγο (literate mathematical discourse) (Sfard, 2008). Ως προς το είδος τους, παρατηρήθηκε ότι οι πρώτες ρουτίνες που εκτέλεσαν και οι δύο μαθητές ήταν στην πλειονότητά τους τελετουργίας. Επίσης, οι ρουτίνες της τέταρτης κατηγορίας, τις οποίες κατατάξαμε στον μαθηματικό λόγο, χαρακτηρίστηκαν όλες ως ρουτίνες τελετουργίας.

Ως προς το είδος του λόγου, οι ρουτίνες που παρατηρήθηκαν, συμπεριλαμβανομένου του έλεγχου εικασιών και της διατύπωσης συμπερασμάτων, ήταν στην πλειονότητά τους καθημερινού ή μη επίσημου μαθηματικού λόγου (Sfard, 2008). Επιπλέον, οι μαθηματικές ρουτίνες χαρακτηρίστηκαν όλες ως τελετουργίας· μόνο στις ρουτίνες καθημερινού και μη επίσημου μαθηματικού λόγου παρατηρήθηκαν ρουτίνες εξερεύνησης. Αυτό εγείρει ερωτήματα, αν σκεφτεί κανείς ότι πρόκειται για μία κατάσταση έργου όπου απαιτείται η κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου. Ωστόσο, σε αντίστοιχα αποτελέσματα έχουν καταλήξει και οι Viirman και Nardi (2018). Στην έρευνά τους, μελέτησαν την εμπλοκή φοιτητών βιολογίας με δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης και παρατήρησαν ρουτίνες εξερεύνησης κυρίως στον βιολογικό λόγο, ενώ οι μαθηματικές ρουτίνες ήταν στην πλειονότητά τους τελετουργίας. Επίσης η Sfard (2008, σελ.188), χρησιμοποιώντας έναν συνδυασμό εμπειρικών και θεωρητικών επιχειρημάτων, συμπεραίνει ότι «καθημερινές καταστάσεις προκαλούν κυρίως μη επίσημο μαθηματικό λόγο, ενώ στις μαθηματικές καταστάσεις έργου κυριαρχεί ο μαθηματικός λόγος». Αναφορικά με το είδος των ρουτινών, όπως αναφέραμε, οι πρώτες ρουτίνες που εκτέλεσαν οι μαθητές –και τους βοήθησαν στην εξοικείωση με την εφαρμογή– ήταν στην πλειονότητά τους τελετουργίας. Σε αντίστοιχα αποτελέσματα έχουν καταλήξει και άλλες έρευνες με παρόμοια θεωρητική προσέγγιση. Οι Nachlieli και Katz (2017), συμπέραναν ότι η αρχική προσέγγιση μελλοντικών δασκάλων με προβλήματα μαθηματικών, που σκοπό είχαν την «προώθηση της μαθηματικής σκέψης», ήταν τελετουργικού τύπου. Όμοια, και οι Viirman και Nardi (2018), παρατήρησαν μετάβαση από τελετουργικές σε εξερευνητικές ρουτίνες στα προβλήματα μοντελοποίησης. Φαίνεται ότι, όταν κανείς αναπτύσσει μία νέα ρουτίνα, είναι κυρίως τελετουργικού τύπου, καθώς ο εκτελεστής της ρουτίνας δεν μπορεί να παρακινηθεί από τη χρησιμότητά της –κάτι το οποίο είναι χαρακτηριστικό μίας ρουτίνας εξερεύνησης– μιας και κάτι τέτοιο απαιτεί την εξοικείωση

με αυτή τη ρουτίνα (Lavie κ.ά., 2018). Μία τέτοια ρουτίνα πραγματοποιείται, κυρίως, γιατί ο εκτελεστής της αναζητά την κοινωνική αποδοχή ικανοποιώντας τις προσδοκίες των άλλων (π.χ. εκπαιδευτικού), κάτι το οποίο κυριαρχεί στις ρουτίνες τελετουργίας (Sfard, 2008). Οι τελευταίες, φαίνεται να είναι το πρώτο αναγκαίο βήμα, ο θεμέλιος λίθος προς τις ρουτίνες εξερεύνησης (Nachlieli & Tabach, 2018). Ο μόνος τρόπος να συμμετάσχει κανείς σε έναν νέο λόγο, είναι εκτελώντας τέτοιες ρουτίνες (Sfard, 2008).

Στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, προσπαθήσαμε να εντοπίσουμε πού παρατηρείται μεταφορά. Δύο φορές παρατηρήθηκε μεταφορά στην περίπτωση του πρώτου μαθητή και τέσσερις στην περίπτωση του δεύτερου. Κατατάσσοντας αυτές τις μεταφορές, παρατηρούμε τρεις κατηγορίες μεταφοράς όπως την έχουμε θεωρήσει, δηλαδή τρεις περιπτώσεις όπου οι μαθητές υπερβαίνουν τα κοινωνικο-πολιτισμικά όρια της κατάστασης έργου, όπως οι ίδιοι την αντιλαμβάνονται: (α) από τα περιορισμένα -στα όρια της τάξης- μαθηματικά, στον καθημερινό λόγο, (β) από τα περιορισμένα -στα όρια της τάξης- μαθηματικά, στα χρήσιμα, για την δημιουργία ενός μοντέλου, (γ) από τον καθημερινό λόγο ή από τον μη επίσημο μαθηματικό (colloquial) στον μαθηματικό (literate mathematical discourse).

Προσπαθήσαμε, επίσης, να εντοπίσουμε πώς οι μαθητές καταφέρνουν αυτού του είδους τις μεταφορές. Με βάση τη θεωρητική μας προσέγγιση, οι ταυτοποιητές προηγουμένων είναι τα χαρακτηριστικά της παρούσας κατάστασης που μπορούν να βοηθήσουν στην επέκταση του ΧΑΠ των μαθητών και, άρα, στην υπέρβαση των κοινωνικο-πολιτισμικών ορίων της κατάστασης έργου, όπως την αντιλαμβάνεται ο κάθε μαθητής. Μετά την ανάλυσή μας, καταλήξαμε σε τρία είδη ταυτοποιητών: (α) η ίδια η συσκευή, (β) οι οπτικοί διαμεσολαβητές της εφαρμογής, δηλαδή το ραντάρ και το αλφάδι, που εκπραγμάτωναν την κίνηση της συσκευής στον χώρο και (γ) κάποιες από τις ερωτήσεις των εκπαιδευτικών.

Στην έρευνά του ο Evans (1999), συμπεραίνει ότι ένα σημαίνον (signifier) μπορεί να διεισδύσει σε άλλα πλαίσια, δημιουργώντας συνδέσμους μεταξύ διαφορετικών λόγων. Έτσι, για την μελέτη της μεταφοράς, επιχειρηματολογεί υπέρ της εστίασης στα σημαίνοντα και τα σημαινόμενα, στις αναπαραστάσεις και άλλες γλωσσικές συσκευές. Αυτά έρχονται σε αντιστοιχία με τα αποτελέσματά μας, όπου οι οπτικοί διαμεσολαβητές βοήθησαν τους μαθητές να «διαπεράσουν» τα κοινωνικο-πολιτισμικά όρια που τους «περιορίζανε», και στη συνέχεια να δημιουργήσουν τους, εν λόγω, συνδέσμους, όπου αυτό ήταν εφικτό. Επίσης, η Sfard (2008, σελ. 210), θέτει τον προβληματισμό, ότι «ακόμα και άτομα που έχουν δεχθεί την τυπική μόρφωση, αδυνατούν να εφαρμόσουν αλγόριθμους που έχουν μάθει στο σχολείο για

την πραγματοποίηση υπολογισμών σε πραγματικές καταστάσεις [...] μάλλον γιατί αυτές οι ρουτίνες έχουν καθιερωθεί ως ρουτίνες του σχολικού λόγου και μόνο». Και συνεχίζει μιλώντας για τους *πλαισιωτές λόγων (discourse framers)*, ως παράγοντες που ενεργοποιούν συγκεκριμένους λόγους, ενώ καταστέλλουν άλλους. Στην περίπτωση μας, οι πλαισιωτές λόγων αντιστοιχούν στους ταυτοποιητές προηγούμενων.

Έχουμε αφήσει κάποια ερωτήματα αναπάντητα, τα οποία δημιουργήθηκαν από τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε. Για παράδειγμα, «γιατί, αν και ο Φώτης κατάφερε να βρει τα μαθηματικά που χρησιμοποιεί η εφαρμογή –που ίσως ήταν και το πιο δύσκολο μέρος-, αδυνατεί να παράγει μία αφήγηση στον τριγωνομετρικό λόγο που να εξηγεί τη λειτουργία της εφαρμογής; Πού οφείλεται η «αντίστασή» του να πιάσει μολύβι και χαρτί;». Το έργο, όπως το αντιλαμβάνεται ένας εσωτερικός στον λόγο των μαθηματικών, ήταν η παραγωγή μίας αφήγησης που θα ερμηνεύει τη λειτουργία της εφαρμογής χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό λόγο. Ωστόσο, το έργο για τους δύο μαθητές μας ήταν διαφορετικό. Και οι δύο, έχοντας ερμηνεύσει τις καταστάσεις έργου ως μαθηματικές, καθώς εισήχθησαν από τον εκπαιδευτικό των μαθηματικών, ψάχνουν μία μονολεκτική απάντηση από το μαθηματικό ρεπερτόριό τους για να απαντήσουν την ερώτηση «πώς λειτουργεί η εφαρμογή», όπως «όρια», «συναρτήσεις» ή «με την γωνία». Άλλωστε, οι Edelstein-Keshet Madlung κ.ά. τονίζουν ότι αποτελεί προϋπόθεση η εξοικείωση με τις μαθηματικές έννοιες και την μαθηματική μοντελοποίηση στο σχολείο, για να μπορέσει κανείς να αντιμετωπίζει αποτελεσματικά τέτοιες καταστάσεις έργου (αναφέρεται στους Viirman & Nardi, 2018). Η, για να το θέσουμε λίγο διαφορετικά, απαιτείται μετάβαση από τις ρουτίνες τελετουργίας προς τις ρουτίνες εξερεύνησης (*de-ritualization*, Lavie κ.ά., 2018· Sfard, 2008). Όσο οι μαθηματικές ρουτίνες που απαιτούνται για την μοντελοποίηση ενός τέτοιου έργου μένουν στο στάδιο της τελετουργίας, αυτές θα συνδέονται με συγκεκριμένους ταυτοποιητές προηγούμενων. Για παράδειγμα, η παρουσία των ατόμων με τα οποία η ρουτίνα είχε εκτελεστεί, καθώς και η ύπαρξη των ίδιων αντικειμένων με τα οποία η διαδικασία είχε πραγματοποιηθεί (π.χ. μολύβι και χαρτί), είναι απαραίτητα για να εκτελεστεί ξανά η ρουτίνα. Αυτό μπορεί να εξηγήσει γιατί η ρουτίνα δεν είναι «διαθέσιμη» σε άλλα πλαίσια. Το ίδιο συνέβη και με τον 12χρονο πωλητή από την Βραζιλία, ο οποίος, για να εκτελέσει στο σχολείο την ίδια ρουτίνα που εκτέλεσε στην αγορά, θα έπρεπε ίσως να είχε στη διάθεσή του τις καρύδες, τον πάγκο του, τους άλλους πωλητές της αγοράς κλπ.

Κλείνοντας αυτήν τη συζήτηση, οφείλουμε να παρουσιάσουμε τους περιορισμούς που είχε η παρούσα έρευνα, όπως εμείς τους αντιλαμβανόμαστε. Πρώτον, οι Lavie κ.ά. (2018) σημειώνουν τη σημασία πρόσβασης σε διαχρονικά δεδομένα για τον εντοπισμό και την ανάλυση των ρουτινών. Η πρόσβαση που είχαμε σε προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών ήρθε, κυρίως, από τα όσα ανέφεραν οι εκπαιδευτικοί των μαθητών, και όχι από διαθέσιμα δεδομένα τα οποία αναλύσαμε. Δεύτερον, πρέπει να τονίσουμε ότι τα αποτελέσματα μπορεί να ήταν τελείως διαφορετικά, αν αυτή η δραστηριότητα γινόταν σε ένα διαφορετικό περιβάλλον. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η παρουσία του εκπαιδευτικού των μαθηματικών καθόρισε τον χώρο αναζήτησης προηγούμενων των μαθητών, κάνοντας τους μαθητές να αναμένουν να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά κατά την αντιμετώπιση της κατάστασης έργου.

Η παρούσα εργασία συνεισφέρει στην έρευνα τόσο θεωρητικά, όσο και εμπειρικά. Το διάγραμμα που κατασκευάσαμε (Εικόνα 1) χρησιμοποιώντας τη θεωρητική οπτική των Lavie κ.ά. (2018) μπορεί να βοηθήσει στην ανάλυση των ρουτινών. Επίσης, ο Πίνακας 1 που βασίστηκε στην ίδια θεωρητική οπτική, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο ανάλυσης για τον προσδιορισμό του είδους των ρουτινών, δηλαδή τελετουργίας ή εξερεύνησης. Τέλος, η θεώρησή μας για τη μεταφορά προσπαθεί να δει την κατάσταση έργου από τη σκοπιά του μαθητή, δείχνοντας ότι πρέπει να ξεφύγουμε από τα στατικά μοντέλα ανάλυσης της μεταφοράς ανάμεσα στον καθημερινό και στον μαθηματικό λόγο.

Όσον αφορά την εκπαιδευτική πρακτική, θα λέγαμε ότι, πρώτον, η παρούσα εργασία τονίζει τη σημασία των πρόσφατων εμπειριών των μαθητών. Κατά την αντιμετώπιση μίας κατάστασης έργου, οι μαθητές αναμένουν να χρησιμοποιήσουν τα πρόσφατα μαθηματικά που μάθανε στην τάξη. Έτσι, πραγματικές καταστάσεις έργου, η αντιμετώπιση των οποίων απαιτεί μαθηματικά που βρίσκονται ήδη στον χώρο αναζήτησης προηγούμενων των μαθητών, ίσως να μην συμβάλουν τόσο στην ανάπτυξη της δεξιότητας της μοντελοποίησης όσο νομίζαμε. Δεύτερον, σημαντικό ρόλο για την πραγματοποίηση μεταφοράς έπαιξαν οι ταυτοποιητές προηγούμενων, δηλαδή (α) κάποια στοιχεία του περιβάλλοντος που είχαν συνδεθεί με συγκεκριμένες εμπειρίες από το παρελθόν, (β) οι οπτικοί διαμεσολαβητές, δηλαδή αντικείμενα που έχουν κατασκευασθεί με σκοπό τη διευκόλυνση της επικοινωνίας του μαθηματικού λόγου και που μπορούν να γίνουν αντιληπτά από τις αισθήσεις μας, και (γ) οι ερωτήσεις των εκπαιδευτικών. Ιδιαίτερα, οι οπτικοί διαμεσολαβητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εκπαιδευτική πρακτική για την ανάπτυξη της δεξιότητας της

μοντελοποίησης, καθώς φάνηκε ότι μέσω αυτών μπορεί να διεισδύσει νόημα από τον έναν λόγο στον άλλον.

Η παρούσα εργασία χρησιμοποίησε τις ρουτίνες ως μονάδα ανάλυσης του λόγου και της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Η ρουτίνα έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν σε διάφορα πεδία, όπως στην κοινωνιολογία, στην ψυχολογία, στην ανθρωπολογία, ενώ φαίνεται να έχει μπει δυναμικά και στην εκπαίδευση των μαθηματικών, όπως δείχνει και το πρόσφατο ειδικό τεύχος του *Educational Studies in Mathematics*. Η θεωρητική αυτή προσέγγιση φαίνεται να φέρνει νέες προοπτικές στην έρευνα, όπως φάνηκε με την έρευνα των Nachlieli & Tabach (2018), όπου παρά το ότι ανέλυσαν δεδομένα από βίντεο της έρευνας TIMSS 1999, δηλαδή από δεδομένα τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί από πολλές έρευνες, κατέληξαν σε νέα χρήσιμα συμπεράσματα. Στις προτάσεις μας, λοιπόν, για περαιτέρω έρευνα, είναι η πραγματοποίηση ερευνών με τη συγκεκριμένη θεωρητική οπτική, ακόμα και σε ερευνητικά προβλήματα τα οποία πιστεύεται ότι έχουν «εξαντληθεί». Επίσης, αναφέραμε νωρίτερα ότι καθοριστικό ρόλο στην παραγωγή των δεδομένων μας έπαιξε το γεγονός ότι η δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε στην τάξη των μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών. Θα είχε ενδιαφέρον το πώς θα διαμορφωνόταν ο ΧΑΠ, αν η ίδια δραστηριότητα δινόταν από έναν εκπαιδευτικό άλλης ειδικότητας. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να μας διαφωτίσει για το πώς διαμορφώνονται οι ΧΑΠ, τι ρόλο παίζουν οι εμπειρίες των μαθητών στην πορεία της κατάστασης έργου και, γενικότερα, στην ανάπτυξη των ρουτινών και, άρα, στη μάθηση.

Βιβλιογραφία

- Adler, J. (2019). Learning about mathematics teaching and learning from studying rituals and ritualization? A commentary. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 291-299.
- Βασιλείου, Ε. (2015). *Θέματα Γεωμετρίας*. Αδημοσίευτες σημειώσεις, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Ελλάδα.
- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2015). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.
- Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Linchevski, L., & Sfard, A. (2005). Doing Wrong with Words: What Bars Students' Access to Arithmetical Discourses. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(3), 176-247. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/30034835>
- Bronner, P. (2015). *How do smartphone apps work?* Ανακτήθηκε Μάρτιος, 15, 2018 από <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28425/>
- Ernest, P. (1984). Mathematical induction: a pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 173-189.
- Hancock, D. R., & Algozzine, B. (2016). *Doing case study research: A practical guide for beginning researchers*. New York: Teachers College Press, Columbia University.
- Heyd-Metzuyanim, E. & Graven, M. (2019). Rituals and explorations in mathematical teaching and learning: introduction to the special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 1-11.
- Heyd-Metzuyanim, E., Smith, M., Bill, V., & Resnick, L. B. (2018). From ritual to explorative participation in discourse-rich instructional practices: A case study of teacher learning through professional development. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 273-289.
- Heyd-Metzuyanim, E., Tabach, M., & Nachlieli, T. (2015). Opportunities for learning in a prospective mathematics teachers' classroom – between ritual and explorative instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(6), 547-574.
- Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2018). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 153-176.
- Nachlieli, T., & Katz, Y. (2017). Ritual towards explorative classroom participation of pre-service elementary school mathematics teachers. Στο *CERME 10*, Dublin, Ireland.
- Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge University Press.

- McCloskey, A., Lloyd, G., & Lynch, C. (2017). Theorizing mathematics instruction using ritual: Tensions in teaching fractions in a fifth grade classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 9-19.
- Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom – the case of function. *International Journal of Educational Research*, 51&52, 10-27.
- Nachlieli, T., & Tabach, M. (2018). Ritual-enabling opportunities-to-learn in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 253-271.
- Robertson, S. A., & Graven, M. (2018). Exploratory mathematics talk in a second language: A sociolinguistic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 215-232.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.
- Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction*, 23(2), 237-309.
- Triantafyllou, C., & Potari, D. (2014). Revisiting the place value concept in the workplace context: the issue of transfer development. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 337-358.
- Viirman, O., & Nardi, E. (2018). Negotiating different disciplinary discourses: biology students' ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 233-252.

Διαδικτυακές αναφορές

- TPHMX (2012, 31, Ιανουάριος). Smart Measure. Ανακτήθηκε από <https://www.youtube.com/watch?v=4nnxvKmlcpQ>.
- Screen Recorder & Music, Video Editor, Record Free (n.d.) Ανακτήθηκε από <https://play.google.com/store/apps/details?id=mobi.charmer.myscreenrecorder>

Παράρτημα I

Πώς λειτουργούν οι εφαρμογές των smart phones;

Μέρος της δουλειάς ενός προγραμματιστή είναι να μελετά πώς λειτουργούν οι εφαρμογές ανταγωνιστικών εταιρειών. Αυτό ακριβώς καλείστε να κάνετε κι εσείς.



- Ερευνήστε με την ομάδα σας πώς λειτουργεί η εφαρμογή. Το βίντεο της ανταγωνιστικής εταιρείας με το οποίο διαφημίζει την εφαρμογή της μπορεί να σας βοηθήσει:
<https://www.youtube.com/watch?v=4nnxvKmlcpQ>
- Περιγράψτε:
 - τον τρόπο λειτουργίας της εφαρμογής,
 - την ακρίβειά της,
 - τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της.

Πηγή



Mathematics and Science for Life

www.mascil-project.eu

Autor: P. Bronner, Friedrich-Gymnasium Freiburg

<http://www.mascil-project.eu/classroom-material>

Παράρτημα II

Όνομα ρουτίνας:	Μέτρηση ύψος εκπαιδευτικού ([14] έως [33])		
Μέρη ρουτίνας		Ρουτίνα τελετουργίας (Ritual)	Ρουτίνα εξερεύνησης (Exploration)
1. Εισαγωγή ρουτίνας (Initiation)	Με ποια αφορμή ξεκινάει η ρουτίνα; (<i>performer's agentivity</i>)	Αμέσως μετά από ένα ερώτημα που θέτει ο εκπαιδευτικός. Η εκπαιδευτικός ζητά από τον μαθητή να μετρήσει ό,τι θέλει [14]. Καθώς ο μαθητής ψάχνει στον χώρο ένα αντικείμενο για να μετρήσει την απόσταση και το ύψος του, η εκπαιδευτικός ζητά από τον μαθητή να μετρήσει το ύψος της [18β]. Είναι φανερό ότι η ρουτίνα ξεκινάει από την παρότρυνση της εκπαιδευτικού (<i>performer's agentivity</i>) και όχι από τον μαθητή με σκοπό να τη χρησιμοποιήσει στην εξωτερική ρουτίνα (εύρεσης των μαθηματικών που χρησιμοποιεί η εφαρμογή) (<i>bondedness</i>).	Από τον μαθητή, προκειμένου να χρησιμοποιήσει την απάντηση σε μία άλλη ρουτίνα (<i>bondedness</i>) ή να απαντήσει το αρχικό ερώτημα.
2. Διαδικασία (Procedure)	Ποια είναι η ερώτηση που ο μαθητής προσπαθεί να απαντήσει; (<i>orientation</i>)	Πώς συνεχίζω; (<i>process-oriented</i>) Υπάρχουν σημεία όπου φαίνεται ο μαθητής να εστιάζει στο πώς συνεχίζει: «Από πού στοχεύω; Από τα πόδια κάτω-κάτω» [19].	Σε τι θέλω να καταλήξω; (<i>product-oriented</i>) Δεν είναι ξεκάθαρο αν ο μαθητής εστιάζει στο αποτέλεσμα
	Ευελιξία (<i>flexibility</i>) Από ποιον έχει εισαχθεί η ρουτίνα;	Ο μαθητής πραγματοποιεί μία ρουτίνα με μη ευέλικτο τρόπο (<i>flexibility</i>), η οποία έχει ήδη εφαρμοστεί από άλλους σε παρόμοιες καταστάσεις. Σπάνια ενεργεί αυτόνομα (<i>performer's agentivity</i>). Η ρουτίνα έχει εισαχθεί από τον εκπαιδευτικό.	Διάφορες εναλλακτικές διαδικασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον μαθητή για το ίδιο έργο (<i>flexibility</i>). Ο μαθητής ενεργεί αυτόνομα (<i>performer's agentivity</i>). Η ρουτίνα έχει εισαχθεί από τον ίδιο τον μαθητή ή και από άλλους, ωστόσο δεν πρόκειται για μία απλή μίμηση, αλλά μία επιλεκτική αναπαραγωγή προηγούμενων.

	Σε ποιον απευθύνεται; (<i>performer's agentivity</i>)	<p>Η ρουτίνα απευθύνεται στον εκπαιδευτικό (<i>performer's agentivity</i>).</p> <p>Η ρουτίνα της μέτρησης της απόστασης-ύψους έχει εισαχθεί από το βίντεο στο youtube ([1]) και από την εκπαιδευτικό στην αρχή της διαδικασίας ([3] έως [13]). Ο μαθητής δεν προσπαθεί να αναπτύξει μία νέα ρουτίνα ή να προσαρμόσει την υπάρχουσα, εστιάζοντας στο πού θέλει να καταλήξει (<i>product-oriented</i>), αλλά μιμείται τη ρουτίνα μέτρησης απόστασης- ύψους που εισήγαγε η εκπαιδευτικός, εφαρμόζοντάς τη χωρίς κάποια προσαρμογή (<i>flexibility</i>). Ο μαθητής δεν παίρνει κάποια πρωτοβουλία σε στιγμές που θα μπορούσε [15], [17], [18β] (<i>performer's agentivity</i>).</p>	Η ρουτίνα απευθύνεται στον ίδιο τον μαθητή (<i>performer's agentivity</i>) για την παραγωγή μίας νέας αφήγησης (<i>product-oriented</i>).
3. Κλείσιμο (Closure)	Πώς ο μαθητής αιτιολογεί την επιτυχία της ρουτίνας; (<i>substantiability</i>)	<p>Η ρουτίνα κρίνεται ως επιτυχής, όταν μία συγκεκριμένη διαδικασία έχει ολοκληρωθεί. Σκοπός του ήταν η πραγματοποίηση της συγκεκριμένης διαδικασίας, δηλαδή για τον μαθητή η <i>διαδικασία</i> και το <i>έργο</i> ταυτίζονται. Έτσι, αν ζητηθεί αιτιολόγηση, περιγράφει τα βήματα της διαδικασίας που ακολούθησε.</p> <p>Ο μαθητής δεν δίνει μία ερμηνεία-αιτιολόγηση στο γιατί η μέτρηση βγήκε 1,5μ και πού παρουσιάζεται το σφάλμα. Δεν μπορούμε, λοιπόν, εδώ να κατατάξουμε τη ρουτίνα ως τελετουργίας ή εξερεύνησης. Κοιτώντας λίγο παρακάτω, όπου η εκπαιδευτικός εξηγεί το πώς προκαλείται το σφάλμα [37-40], ο μαθητής γνέφει συγκαταβατικά ([38], [40]). Ούτε αυτό, όμως, αρκεί για να κατατάξουμε τη ρουτίνα με βάση τον υπό εξέταση άξονα.</p>	Η ρουτίνα κρίνεται ως επιτυχής, όταν μία <i>νέα αφήγηση</i> έχει παραχθεί. Αν ζητηθεί αιτιολόγηση, περιγράφει τον μαθηματικό συλλογισμό της διαδικασίας ή δίνει μία εναλλακτική διαδικασία (<i>substantiability</i>).
	Ποιος καθορίζει το τέλος της ρουτίνας; (<i>performer's agentivity</i>) Χρησιμοποιείται η αφήγηση που παρήγαγε ως δεδομένο κατά την πραγματοποίηση μίας άλλης αφήγησης	<p>Η ρουτίνα κλείνει όταν ολοκληρώνεται η διαδικασία που ο μαθητής «έπρεπε» να ακολουθήσει, καθώς σκοπός του ήταν η πραγματοποίηση της συγκεκριμένης διαδικασίας. Συχνά, όμως, δεν είναι σε θέση να κρίνει το τέλος της ρουτίνας και χρειάζεται ο εκπαιδευτικός να το κάνει αυτό. (<i>performer's agentivity, authority</i>)</p>	Ο μαθητής (<i>performer's agentivity, authority</i>). Αν αυτή δεν ήταν η εξωτερική ρουτίνα (απάντηση αρχικού ερωτήματος), χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα της ρουτίνας ως δεδομένο κατά την πραγματοποίηση μίας άλλης ρουτίνας (<i>bondedness</i>).

	(bondedness);	Η εκπαιδευτικός σημάνει το τέλος της ρουτίνας [32]. Η νέα αφήγηση δεν χρησιμοποιείται ως δεδομένο σε επόμενη ρουτίνα.	
4. Μερικά χαρακτηριστικά της ρουτίνας που αφορούν και τα τρία μέρη της (εισαγωγή, διαδικασία, κλείσιμο).	Εξουσία, Αυθεντία, Διαμεσολάβηση εκτελεστή (Authority, performer's agentivity)	Ο δάσκαλος (ή άλλα άτομα). Ο μαθητής εξαρτάται πλήρως από άλλους για το τι πρέπει να κάνει και το πότε. Η παρουσία άλλων (φυσική ή και φανταστική) είναι απαραίτητη για όλα τα στάδια πραγματοποίησης της ρουτίνας (έναρξη, διαδικασία, κλείσιμο, αξιολόγηση επιτυχίας). Η ρουτίνα πραγματοποιείται επειδή υπάρχει προσδοκία από άλλους να συμβεί αυτό κι έχει ως σκοπό την κοινωνική ανταμοιβή ή την αποφυγή τιμωρίας. Η έναρξη της ρουτίνας [14], το αντικείμενο που ο μαθητής θα μετρήσει [18β], καθώς και η λήξη της ρουτίνας [32] καθορίζονται από την εκπαιδευτικό. Η παρέμβαση της εκπαιδευτικού είναι απαραίτητη σε όλα τα στάδια εκτέλεσης της ρουτίνας. Δεν φαίνεται κάποιο σημείο στο οποίο ο μαθητής να έχει πάρει κάποια πρωτοβουλία.	Ο ίδιος ο μαθητής, ο οποίος δεν χρειάζεται την παρέμβαση άλλων ατόμων για την πραγματοποίηση της ρουτίνας.
	Εφαρμοσιμότητα	Η ρουτίνα έχει συνδεθεί με συγκεκριμένο ανθρώπινο και φυσικό περιβάλλον (precedent identifiers) και μπορεί να ξαναχρησιμοποιηθεί μόνο σε περιβάλλοντα που σχεδόν ταυτίζονται.	Η ρουτίνα μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορετικού είδους περιβάλλοντα (πχ σχολείο-καθημερινότητα).
		Για να μπορέσουμε να κάνουμε εδώ την κατηγοριοποίηση, πρέπει να έχουμε διαχρονικά δεδομένα σε καταστάσεις όπου η συγκεκριμένη ρουτίνα θα μπορούσε να φανεί χρήσιμη.	

Πίνακας 1: Μέτρηση απόστασης-ύψος εκπαιδευτικού

Όνομα ρουτίνας:	Περιστροφή συσκευής γύρω από τον κατακόρυφο άξονα y'y: παρατήρηση ενδείξεων ραντάρ		
Μέρη ρουτίνας		Ρουτίνα τελετουργίας (Ritual)	Ρουτίνα εξερεύνησης (Exploration)
1. Εισαγωγή ρουτίνας (Initiation)	Με ποια αφορμή ξεκινάει η ρουτίνα; (performer's agentivity)	Αμέσως μετά από ένα ερώτημα που θέτει ο εκπαιδευτικός.	Από τον μαθητή, προκειμένου να χρησιμοποιήσει την απάντηση σε μία άλλη ρουτίνα (bondedness) ή να απαντήσει το αρχικό

		<p>Η εκπαιδευτικός ζητάει από τον μαθητή να παίξει με την εφαρμογή [45]. Η ρουτίνα ξεκινάει από την παρότρυνση της εκπαιδευτικού (<i>performer's agentivity</i>) και όχι από τον μαθητή με σκοπό να τη χρησιμοποιήσει στην εξωτερική ρουτίνα (εύρεσης των μαθηματικών που χρησιμοποιεί η εφαρμογή) (<i>bondedness</i>).</p>	<p>ερώτημα.</p>
2. Διαδικασία (Procedure)	<p>Ποια είναι η ερώτηση που ο μαθητής προσπαθεί να απαντήσει; (<i>orientation</i>)</p>	<p>Πώς συνεχίζω; (<i>process-oriented</i>)</p>	<p>Σε τι θέλω να καταλήξω; (<i>product-oriented</i>)</p> <p>Ο μαθητής πραγματοποιεί αυτή την υπο-ρουτίνα, ύστερα από τις αποτυχημένες προσπάθειες να απαντήσει το αρχικό ερώτημα [42-48α]. Ο σκοπός της υπο-ρουτίνας είναι να βρει τις δυνατότητες της εφαρμογής (<i>product-oriented</i>).</p>
	<p>Ευελιξία (<i>flexibility</i>)</p>	<p>Ο μαθητής πραγματοποιεί μία ρουτίνα με μη ευέλικτο τρόπο (<i>flexibility</i>), η οποία έχει ήδη εφαρμοστεί από άλλους σε παρόμοιες καταστάσεις. Σπάνια ενεργεί αυτόνομα (<i>performer's agentivity</i>).</p>	<p>Διάφορες εναλλακτικές διαδικασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον μαθητή για το ίδιο έργο (<i>flexibility</i>). Ο μαθητής ενεργεί αυτόνομα (<i>performer's agentivity</i>). Η ρουτίνα απευθύνεται στον ίδιο τον μαθητή (<i>performer's agentivity</i>) για την παραγωγή μίας νέας αφήγησης (<i>product-oriented</i>).</p>

	<p>Από ποιον έχει εισαχθεί η ρουτίνα;</p> <p>Σε ποιον απευθύνεται; (<i>performer's agentivity</i>)</p>	<p>Η ρουτίνα έχει εισαχθεί από τον εκπαιδευτικό.</p> <p>Η ρουτίνα απευθύνεται στον εκπαιδευτικό (<i>performer's agentivity</i>).</p>	<p>Η ρουτίνα έχει εισαχθεί από τον ίδιο τον μαθητή ή και από άλλους, ωστόσο δεν πρόκειται για μία απλή μίμηση, αλλά μία επιλεκτική αναπαραγωγή προηγούμενων.</p> <p>Η ρουτίνα έχει εισαχθεί από τον ίδιο ή και από άλλους, ωστόσο δεν πρόκειται για μία απλή μίμηση.</p> <p>Σε αυτό το σημείο ο μαθητής ακολουθεί μία νέα διαδικασία [48β], [50], [52]. Πειραματιζόμενος με την εφαρμογή ξεφεύγει από την απλή μίμηση της ρουτίνας μέτρησης απόστασης- ύψους που έχει εισαχθεί από την εκπαιδευτικό. (<i>flexibility</i>)</p>
3. Κλείσιμο (Closure)	<p>Πώς ο μαθητής αιτιολογεί την επιτυχία της ρουτίνας; (<i>substantiability</i>)</p>	<p>Η ρουτίνα κρίνεται ως επιτυχής, όταν μία συγκεκριμένη διαδικασία έχει ολοκληρωθεί. Σκοπός του ήταν η πραγματοποίηση της συγκεκριμένης διαδικασίας, δηλαδή για τον μαθητή η διαδικασία και το έργο ταυτίζονται. Έτσι, αν ζητηθεί αιτιολόγηση, περιγράφει τα βήματα της διαδικασίας που ακολούθησε.</p>	<p>Η ρουτίνα κρίνεται ως επιτυχής, όταν μία νέα αφήγηση έχει παραχθεί. Αν ζητηθεί αιτιολόγηση, περιγράφει τον μαθηματικό συλλογισμό της διαδικασίας ή δίνει μία εναλλακτική διαδικασία (<i>substantiability</i>).</p> <p>Ο μαθητής παράγαγε μία νέα αφήγηση: «η εφαρμογή αντιλαμβάνεται την κλίση στην οποία κρατάς το κινητό» ([50]) «και μετράει γωνία» ([54]).</p>
	<p>Ποιος καθορίζει το τέλος της ρουτίνας; (<i>performer's agentivity</i>)</p>	<p>Η ρουτίνα κλείνει όταν ολοκληρώνεται η διαδικασία που ο μαθητής «έπρεπε» να ακολουθήσει, καθώς σκοπός του ήταν η πραγματοποίηση της</p>	<p>Ο μαθητής (<i>performer's agentivity, authority</i>). Αν αυτή δεν ήταν η εξωτερική ρουτίνα (απάντηση αρχικού</p>

	Χρησιμοποιείται η αφήγηση που παρήγαγε ως δεδομένο κατά την πραγματοποίηση μίας άλλης αφήγησης (<i>bondedness</i>);	συγκεκριμένης διαδικασίας. Συχνά, όμως, δεν είναι σε θέση να κρίνει το τέλος της ρουτίνας και χρειάζεται ο εκπαιδευτικός να το κάνει αυτό. (<i>performer's agentivity, authority</i>) Η εκπαιδευτικός κλείνει την υπο-ρουτίνα εισάγοντας μία νέα ρουτίνα [55].	ερωτήματος), χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα της ρουτίνας ως δεδομένο κατά την πραγματοποίηση μίας άλλης ρουτίνας (<i>bondedness</i>). Η νέα αφήγηση χρησιμοποιείται ως δεδομένο σε επόμενη ρουτίνα [58α], [58β], [58γ].
4. Μερικά χαρακτηριστικά της ρουτίνας που αφορούν και τα τρία μέρη της (εισαγωγή, διαδικασία, κλείσιμο).	Εξουσία-Αυθεντία, Διαμεσολάβηση εκτελεστή (<i>Authority, performer's agentivity</i>)	Ο δάσκαλος (ή άλλα άτομα). Ο μαθητής εξαρτάται πλήρως από άλλους για το τι πρέπει να κάνει και το πότε. Η παρουσία άλλων (φυσική ή και φανταστική) είναι απαραίτητη για όλα τα στάδια πραγματοποίησης της ρουτίνας (έναρξη, διαδικασία, κλείσιμο, αξιολόγηση επιτυχίας).	Ο ίδιος ο μαθητής, ο οποίος δεν χρειάζεται την παρέμβαση άλλων ατόμων για την πραγματοποίηση της ρουτίνας. Αν και η έναρξη της ρουτίνας πραγματοποιείται με την παρότρυνση της εκπαιδευτικού [45], ο μαθητής ενεργεί αυτόνομα στην πραγματοποίηση της ρουτίνας και όχι ύστερα από υπόδειξη της εκπαιδευτικού ([48β], [50], [52]). Παίρνει πρωτοβουλίες καθώς πειραματίζεται με την εφαρμογή.
	Εφαρμοσιμότητα	Η ρουτίνα έχει συνδεθεί με συγκεκριμένο ανθρώπινο και φυσικό περιβάλλον (<i>precedent identifiers</i>) και μπορεί να ξαναχρησιμοποιηθεί μόνο σε περιβάλλοντα που σχεδόν ταυτίζονται.	Η ρουτίνα μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορετικού είδους περιβάλλοντα (πχ σχολείο-καθημερινότητα).
		Για να μπορέσουμε να κάνουμε εδώ την κατηγοριοποίηση, πρέπει να έχουμε διαχρονικά δεδομένα σε καταστάσεις που η συγκεκριμένη ρουτίνα θα μπορούσε να φανεί χρήσιμη.	

Πίνακας 2: Περιστροφή συσκευής γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $y'y'$: παρατήρηση ενδείξεων ραντάρ

Παράρτημα III

Απομαγνητοφώνηση Φώτη

Ομιλητής	Τι ειπώθηκε	Τι έγινε – Σχόλια
1.		βλέπει το βίντεο στο youtube:
2. α. Φώτης	Μ: γιατί να καθορίσω το ύψος μου;	
β. Εκπαιδευτικός	Ε, μάλλον αν κρατάει το κινητό κάποιος δύο μέτρα και κάποιος 1 50 (ένα πενήντα) έχει κάποια διαφορά, θα το βρεις μετά.	
γ. Ολοκληρώθηκε η παρακολούθηση του βίντεο.		
3. Εκπαιδευτικός	Για να είμαστε πιο ακριβείς, να μπορούμε να ρυθμίσουμε το ύψος στο οποίο κρατάμε το κινητό.	
4. Εκπαιδευτικός	Οπότε πάμε να παίξουμε. Τι θες να μετρήσουμε; Να μετρήσουμε την ντουλάπα;	
5. Φώτης	Ναι τη ντουλάπα του καθρέφτη;!	
6. α. Εκπαιδευτικός	Έλα από 'δω.	Πηγαίνει δίπλα στην εκπαιδευτικό, ώστε να μπορεί να βλέπει την οθόνη του κινητού.
β. Εκπαιδευτικός	Θα το κάνω μία εγώ. Ή θέλεις να το κάνεις απ' ευθείας εσύ;	
7. Φώτης	Όχι καν' το, δεν έχω θέμα.	
8. Εκπαιδευτικός	Λοιπόν, θεωρητικά..	Η εκπαιδευτικός κρατάει το κινητό και εκτελεί τη ρουτίνα της μέτρησης, ενώ ο Φώτης στέκεται δίπλα της, ώστε να βλέπει την οθόνη. Αρχίζει να στρέφει το κινητό ώστε το σκόπευτρο της κάμερας να στοχεύσει στο κάτω μέρος της ντουλάπας.
9. Φώτης	πρέπει να πας στη... α στη ντουλάπα στο τέλος, σωστά.	Εννοεί στο κατώτερο σημείο της
10. α. Εκπαιδευτικός	η απόστασή μας είναι..	Πατάει το κουμπί "get distance"
β.	ένα κόμμα εννιά (1,9)	
11. Εκπαιδευτικός		Πατάει το κουμπί "height". Περιστρέφει το κινητό ώστε να σημαδέψει την κορυφή.
12. Φώτης	Πάμε να δούμε και για το height	
13. Φώτης	1,9... χα... τρελό	
14. Εκπαιδευτικός	Λοιπόν, μέτρα ό,τι άλλο θες...	Η εκπαιδευτικός δίνει το κινητό στον μαθητή.
15. Φώτης	Μμμ...	Γυρνάει δεξιά και μετά αριστερά το κινητό για να βρει τι θα μετρήσει.
16. Εκπαιδευτικός	Για κάτσε λίγο... γιατί θέλω να κάνω ριστάρτ (πατάει το ριστάρτ)... έλα παίξε και μέτρα ό,τι θες..	Η εφαρμογή έχει μείνει στην πρώτη μέτρηση. Απαιτείται να επιλέξει ο Φώτης το ριστάρτ, ώστε να κάνει νέα μέτρηση.
17. Φώτης	Να μετρήσω..	Γυρνάει το κινητό δεξιά αριστερά και ψάχνει αντικείμενο
18. α. Εκπαιδευτικός	..και σκέψου τι μαθηματικά κρύβονται από πίσω, όσο	

	παίξεις,	
β. Εκπαιδευτικός	έλα μέτρα το ύψος μου να δούμε αν θα με βγάλει καλή, λοιπόν για πες.	
19. Φώτης	Από πού στοχεύω; Από τα πόδια κάτω- κάτω	
20. Εκπαιδευτικός	Ναι από τα πόδια	
21. Φώτης	Όπα, βλακεία.	<i>Χωρίς να έχει στοχεύσει σωστά πάτησε το "get distance".</i>
22. Εκπαιδευτικός	Δεν πειράζει πάτα ριστάρτ.	
23. Φώτης	Ναι έχεις δίκιο... αμάν, ναι τέλεια!	Πάτησε κλείσιμο της εφαρμογής.
24. Εκπαιδευτικός	Τι έγινε; Έκλεισε;	
25. Φώτης	Την έβγαλα αλλά ντάξει.	Την ξανανοίγει (μετά από 5 δευτερόλεπτα)
26. Εκπαιδευτικός	Μόνο και δεν με βγάλει σωστά ε;! Κάτσε να τεντωθώ.	
27. α. Φώτης	Λοιπόν είναι στα 2 μέτρα ακριβώς ...	Πατάει το "get distance"
β. Φώτης	και πάμε για το height	Σηκώνει προς τα πάνω το κινητό
28. Εκπαιδευτικός	Μην με βγάλεις κοντή.	
29. Φώτης	Σ' έβγαλε κοντή.	ψιλογελάει
30. Εκπαιδευτικός	Πόσο;	
31. Φώτης	Ένα πενήντα (1 50)	
32. Εκπαιδευτικός	Τι ένα πενήντααα;; Οκ, άρα εδώ υπάρχει σφάλμα, ντάξει ένα πενήντα (1 50) δεν είμαι. Για σκέψου λίγο πόσο τέτοιο...	
33. Φώτης	Πόσο; Τι μαθηματικά μπορεί να χρησιμοποιεί από πίσω;	
34. α. Εκπαιδευτικός	Ναι... .. για να μετρήσω λίγο το δικό σου ύψος...	παίρνει το κινητό, πατάει ρισέτ
β. Εκπαιδευτικός	... ε, πες εδώ να είναι στο ένα πενήντα (1 50)... ..	Κάτι πήγε στραβά με την εφαρμογή (δεν πάτησε το height) κάνει ρισέτ και ξαναδοκιμάζει. Έχουν περάσει 20 δευτερόλεπτα από όταν ξεκίνησε την προσπάθεια.
35. Εκπαιδευτικός	Ένα ογδόντα (1 80) σε έβγαλε.	
36. Φώτης	1 80 είμαι, 181;!	
37. Εκπαιδευτικός	Οουυ καλό! Κοίτα εσύ τώρα είσαι 1 80 και μου το κράταγες εδώ.	Δείχνει χαμηλά στο στήθος του.
38. Φώτης	Μμ	<i>Κάπως συγκαταβατικά.</i>
39. α. Εκπαιδευτικός	Οπότε δεν είναι αυτό 1 50,	Δείχνει από κάτω προς τα πάνω.
β. Εκπαιδευτικός	δεν είναι αυτό μόνο 30... Ε;	Δείχνει με τα χέρια της από το σημείο που κράταγε ο Φώτης το κινητό έως την κορυφή του κεφαλιού του.
40. Φώτης	Μμ	
41. Εκπαιδευτικός	Λοιπόν, για σκέψου τώρα, τι μαθηματικά, πώς μετράει δηλαδή το ύψος αυτό το πράγμα;	
42. Φώτης	(Ξεφυσάει) Λοιπόν.. δεν έχω ιδέα αλλά κάτσε μπας και... .. με την τοποθεσία δεν νομίζω.	
43. Εκπαιδευτικός	Τοποθεσία, πώς θα το κάνει με	

	την τοποθεσία;	
44. Φώτης	Δεν νομίζω.	
45. Εκπαιδευτικός	Παίξτο λίγο... να δεις τι φάση μπορεί να ισχύει.. τι μαθηματικά κρύβονται από πίσω.	
46. Φώτης	λες να κρύβονται όρια; ...	Γελάει
47. α. Εκπαιδευτικός		Γελάει
β. Εκπαιδευτικός	Καλά γενικά παντού κρύβονται όρια αλλά	
48. α. Φώτης	συνάρτηση ας πούμε...	
β. Φώτης	Ξέρω.. καταρχάς γυρνάει και αυτό το ραντάρ ας πούμε... κι έχει και τις μοίρες	γυρνάει δεξιά και αριστερά το κινητό και αλλάζει ο προσανατολισμός.
49. Εκπαιδευτικός	Άρα;	
50. Φώτης	έχει μοίρες ρε.. έχει μοίρες σε τι κλίση κρατάς το κινητό	Συνεχίζει να πειραματίζεται γυρνώντας πάνω-κάτω το κινητό και παρατηρώντας το πώς αλλάζει ο προσανατολισμός του ραντάρ.
51. Εκπαιδευτικός	Λογικό δεν είναι;	
52. Φώτης	Ναι για να δει αν είσαι.. και σου λέει 40 SW...	Το γυρνάει δεξιά αριστερά
53. Εκπαιδευτικός	Άρα σίγουρα μετράει γωνία την ώρα που αλλάζει	
54. Φώτης	Άρα σίγουρα μετράει γωνία	
55. Εκπαιδευτικός	Αφού μετρήσει γωνία πώς μετράει	
56. Φώτης	Το ύψος; Α, με τη γωνία! ημίτονα συνημίτονα;!	
57. Εκπαιδευτικός	Εσύ πες μου.	
58. α. Φώτης	Με τις μοίρες. Κάνεις εσύ αυτό	δείχνει το σημείο που η κάμερα σημαδεύει το έδαφος στη μέτρηση της ντουλάπας
β. Φώτης	το κάνεις πάνω, οπότε μετράει μια γωνία...	δείχνει με τα δάχτυλα την γωνία που η απέναντι πλευρά αντιστοιχεί στο ύψος με τον αντίχειρα και τον δείκτη δημιουργεί το τρίγωνο που σχηματίζεται απομακρύνοντας τους σιγά- σιγά. <i>meditational mode: concrete</i>
γ. Φώτης	και σου υπολογίζει... τις μοίρες αντίστοιχα σε μέτρα;!	Ξύνει το κεφάλι του. Διστάζει να το πει.
59. Εκπαιδευτικός	Τις μοίρες αντίστοιχα σε μέτρα;!	<i>Με απορία (σαν να του λέει ότι είναι λάθος αυτό)</i>
60. Φώτης	Που δεν γίνεται αυτό, αλλά	
61. Εκπαιδευτικός	Τι πώς, περίμενε περίμενε, βάλτα όλα σε μια σειρά. Αν θέλεις εδώ κάνε με το χαρτί μολύβι	
62. Φώτης	Θα παίξω ναι, έτσι	Συνεχίζει να «παίζει» με την εφαρμογή
63. Εκπαιδευτικός	Παίξε	
64. α. Φώτης	Θα παίξω με το τέτοιο να δω πόσο ψηλό είναι	Βλέπει το βιβλίο
β. Φώτης	Ο καφές μου	Μεριάζει το βιβλίο για να βλέπει καλά τον καφέ

γ. Φώτης	Καταρχάς σε τι απόσταση είμαστε	Είναι ακόμα καθιστός στην καρέκλα μπροστά από το γραφείο
65. Εκπαιδευτικός	Καταρχάς δεν είσαι στο ενάμισι μέτρο	
66. Φώτης	Α θέλει να είμαι στο ενάμισι μέτρο;	
67. Εκπαιδευτικός	Άμα θέλεις μπορούμε να το κάνουμε adjust	
68. Φώτης		Κάνει προς τα πίσω συνεχίζοντας να σημαδεύει τον καφέ
69. Φώτης	Πόσο είμαι στο ενάμισι μέτρο;	
70. Εκπαιδευτικός	Όχι ρε όχι απόσταση, ύψος. Σε τι ύψος κρατάς το κινητό από το έδαφος	
71. Φώτης		Σηκώνεται συνεχίζοντας να σημαδεύει προς τον καφέ
72. Φώτης	Τώρα δεν θα είμαι στο ενάμισι μέτρο;	
73. α. Εκπαιδευτικός	Ε πιστεύω πως ναι. Όχι όχι κάτσε	Σηκώνεται όρθια δίπλα του
β. Εκπαιδευτικός	Εγώ είμαι 1 64.. παίζει να ναι εδώ το ενάμισι μέτρο	Μουρμουρίζοντας Σηκώνει το κινητό λίγα εκατοστά.
74. α. Φώτης		Σημαδεύει το κάτω μέρος του καφέ, μένει για 2 δευτερόλεπτα και μετά φεύγει
75. α. Φώτης	Θα βγάλω- θα βγάλω τι θα βγάλω... το- το- το	Αρχίζει και στρίβει το κινητό προς τα αριστερά στο υπόλοιπο δωμάτιο για να βρει αντικείμενο. Βλέπει ένα στρώμα γυμναστικής το οποίο είναι διπλωμένο και όρθιο (σαν κύλινδρος)
β. Φώτης	Α, αυτό εδώ πέρα	Το στρώμα γυμναστικής
76. α. Φώτης	Πάρτο από εδδδδδ	Σημαδεύει το κάτω μέρος του. Όταν πατάει το κουμπί «get distance» ολοκληρώνει τη λέξη «εδώ»
β. Φώτης		περιστρέφει το κινητό ώστε να σημαδέψει την κορυφή του στρώματος και πατάει το κουμπί για το ύψος
77. Φώτης	Και το έβγαλε 80 εκατοστά.	
78. Εκπαιδευτικός	Ε, να μην είναι;!	
79. Φώτης	Ένα μέτρο πάντως δεν είναι	
80. Εκπαιδευτικός	Όχι όχι.	
81. Φώτης	Με τίποτα.	
82. Εκπαιδευτικός	Ωραία, για σκέψου τώρα.	
83. Φώτης	... Σίγουρα μετράει μοίρες, ναι. Τώρα πώς να υπολογίζει το ύψος...	
84. Εκπαιδευτικός	Κάνε εδώ ένα σχεδιάκι να σε βοηθήσει	
85. Φώτης	Σχεδιάκι;	Με έκπληξη