ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

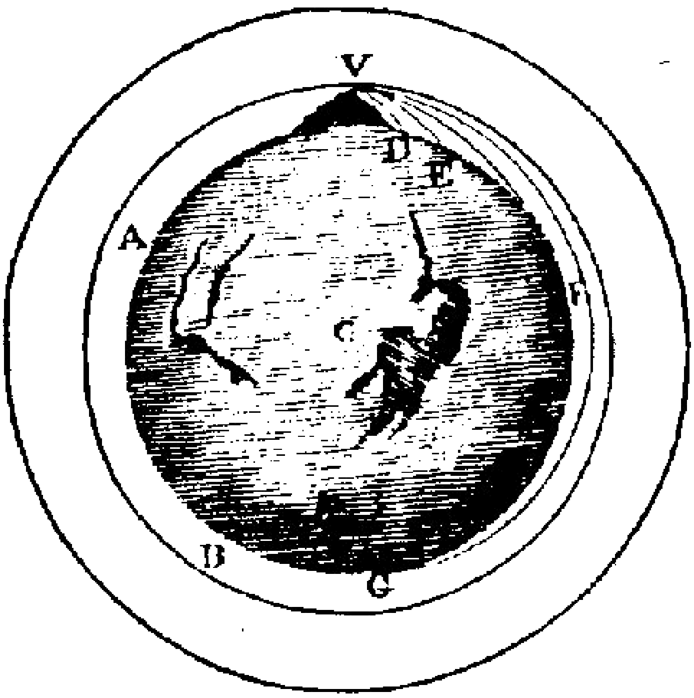
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

«Από τη μηχανική του Νεύτωνα στη Νευτώνεια μηχανική: η εξέλιξη της μηχανικής από τις *Principia* στην κλασική μηχανική του 18ου αιώνα»

Παναγούλα Κανέλλου

Α.Μ: 01015



Επιβλέπων Καθηγητής: Θεόδωρος Αραμπατζής

ΑΘΗΝΑ, 2019

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιάσει την εξέλιξη της μηχανικής από τις Principia στην κλασική μηχανική που διαμορφώθηκε κατά το 18 αιώνα. Τίθεται το ερώτημα πώς έγινε η ''μετάφραση'' από τη γεωμετρική δομή των Principia στην αναλυτική μηχανική του 18ου αιώνα. Ερευνώνται τα πρόσωπα, το πλαίσιο και οι συνθήκες μέσα στις οποίες γίνεται σταδιακά αυτή η μετάβαση ήδη από τα τέλη του δέκατου έβδομου αιώνα.

Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια σύντομη επισκόπηση της πραγματείας. Στις Principia περιέχεται η πρώτη συστηματική διατύπωση των τριών θεμελιωδών φυσικών νόμων που διέπουν τις κίνησεις όλων των σωμάτων. Παρουσιάζεται η μηχανική του Νεύτωνα που σε συνδυασμό με τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας (που διατύπωσε συγχρόνως ο ίδιος) δίνει μια θεμελιακή εξήγηση για την κίνηση των ουράνιων σωμάτων. Επιπλέον επεξηγούνται οι έννοιες του «απόλυτου χρόνου» και του «απόλυτου χώρου» στις οποίες θεμελιώνεται η πραγματεία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζεται η πρόσληψη των Principia στη Γαλλία του 17ου αιώνα ˙το έργο αρχικά θεωρήθηκε ως μια λαμπρή πραγματεία στη μηχανική αλλά όχι ως έργο φυσικής φιλοσοφίας. Επιπλέον παρουσιάζεται η περίφημη διαμάχη μεταξύ του Νεύτωνα και του Leibniz σχετικά με τον λογισμό. Μετά τη δημοσίευση των Principia η κοινότητα χωρίστηκε σε δύο ομάδες: εκείνους που χρησιμοποιούσαν το συμβολισμό και τους αλγόριθμους του Leibniz και εκείνους που χρησιμοποιούσαν το συμβολισμό και τις υπολογιστικές αρχές των Principia. Η αναλυτική μηχανική είναι το απόσταγμα της ιστορικής σύγκλισης πολλών μαθηματικών και λόγιων στη Γαλλία κατά τις δεκαετίες γύρω στο 1700.

Στο τρίτο κεφάλαιο αποτυπώνεται η μηχανική του 18ο αιώνα καθώς σταδιακά αποχωρίζεται η ανάλυση τη γεωμετρία. Κύριοι αντιπρόσωποι των αναλυτικών μαθηματικών υπήρξαν οι Leonard Euler και Joseph Luis Lagrange˙μαζί κυριάρχησαν στο θέμα από το 1740 ως τις αρχές του επόμενου αιώνας. Η έννοια της συνάρτησης ως αναλυτικής έκφρασης βρίσκεται σε κεντρική θέση. Αξιοσημείωτες αρχές, όπως της vis viva και η αρχή της ελάχιστης δράσης, αναπτύσσονται υπό μια νέα μορφή κατά το δέκατο όγδοο αιώνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ *PRINCIPIA*

1.1 *Principia*: Μια σύντομη επισκόπηση

Το εμβληματικό έργο του Νεύτωνα, *Mathematical Principles of Natural Philosophy* ή εν συντομία *Principia* δημοσιεύεται για πρώτη φορά το 1687 και σημαδεύει την ιστορία της επιστήμης αλλά και την ίδια την επιστήμη. Στον Πρόλογο του έργου του ο Νεύτωνας ανακοινώνει έναν νέο στόχο για τη φυσική φιλοσοφία και εκφράζει αισιοδοξία ότι μπορεί να επιτευχθεί:

> Και ως εκ τούτου η παρούσα εργασία παρουσιάζει τις μαθηματικές αρχές της φυσικής φιλοσοφίας. Όλη η δυσκολία της φιλοσοφίας φαίνεται ότι είναι να βρεί τις δυνάμεις της φύσης από τα φαινόμενα των κινήσεων και τότε να αναδείξει άλλα φαινόμενα από αυτές τις δυνάμεις. Πρός αυτό το σκοπό κατευθύνονται οι γενικές προτάσεις στα Βιβλία 1 και 2, ενώ στο Βιβλίο 3 η εξήγησή μας για το σύστημα του σύμπαντος απεικονίζει αυτές τις προτάσεις. Μακάρι να μπορούσαμε να παράγουμε και τα άλλα φαινόμενα της φύσης από μηχανικές αρχές με την ίδια συλλογιστική! (Newton,1962, Preface)

Οι *Principia* εμφανίζονται σε τρείς εκδόσεις (1687, 1713, 1726). Αποτελεί έκπληξη, όπως επισημαίνει ο G. Smith, το γεγονός ότι στην πρώτη έκδοση συμπεριλαμβάνονται μόνο δύο σχόλια σχετικά με την μεθοδολογία που ακολούθησε ο Νεύτωνας (Smith, 2002, σ.187). Στη δεύτερη έκδοση (1713), σαφώς σε απάντηση στις καταγγελίες για τη μεθοδολογία του, ο Νεύτωνας εισάγει ξεχωριστά κεφάλαια για τα Φαινόμενα και τους Κανόνες της Φυσικής Φιλοσοφίας και στην τρίτη έκδοση (1726) προσθέτει, επιπλέον, έναν τέταρτο κανόνα. Αξιοσημείωτο είναι ότι στη δεύτερη και τρίτη έκδοση ο Νεύτωνας έχει συμπεριλάβει ένα Γενικό Σχόλιο το οποίο αποτελεί την πιο γνωστή και αμφιλεγόμενη μεθοδολογική του δήλωση:

> Δεν είμαι ακόμη ικανός να συνάγω από τα φαινόμενα το λόγο για τις ιδιότητες της βαρύτητας, και δεν υπονοώ υποθέσεις. Οτιδήποτε δεν συνάγεται από τα φαινόμενα πρέπει να αποκαλείται υπόθεση: και οι υποθέσεις είτε μεταφυσικές ή φυσικές, ή βασισμένες σε απόκρυφες ιδιότητες, ή μηχανικές δεν έχουν καμία θέση στην

> πειραματική φιλοσοφία. Στην πειραματική φιλοσοφία, οι υποθέσεις συνάγονται από τα φαινόμενα και καθίστανται γενικές με επαγωγή (Newton, 1962, σ. 543).

Στο σχόλιο αυτό, όπως εξηγεί ο Cohen, εκφραζεται η φιλοσοφική άποψη ότι στόχος της επιστήμης δεν είναι να διερευνήσει τις τελικές αιτίες, όπως για παράδειγμα την αιτία της βαρύτητας (Cohen, 2002, σ.62). Ο Νεύτωνας υποστηρίζει ότι είναι αρκετό το γεγονός ότι η βαρύτητα υπάρχει και δρά σύμφωνα με τους νόμους που έχουμε θέσει και αυτό επαρκεί για να εξηγήσει τις κινήσεις των ουράνιων σωμάτων και της θάλασσας. Ο G. Smith, ωστόσο, επισημαίνει ότι η παραπάνω δήλωση εκλαμβάνεται κυρίως αρνητικά, διότι προκύπτει άμεσα το ερώτημα πώς συγκροτείται η θεωρία του Νεύτωνα (Smith, 2002, σ.188). Το ερώτημα είναι εύλογο, δεδομένου ότι ο Νεύτωνας τονίζει ότι η πειραματική του φιλοσοφία δεν παράγεται με βάση την υποθετικο-παραγωγική μέθοδο. Μιλάει αόριστα για «συμπεράσματα από τα φαινόμενα», που όμως δεν αποτελεί επαρκή απάντηση στο δεδομένο ερώτημα. Τέλος, και οι Smeenk και Schliesser αναφέρουν ότι οι σύγχρονοι αλλά και οι μεταγενέστεροι αναγνώστες των Principia είχαν *μεγάλη* δυσκολία στην κατανόηση αυτού του νέου τρόπου έρευνας. Ακόμη και οι διευκρινίσεις που έδωσε αργότερα ο Νεύτωνας σχετικά τη «νέα πειραματική φιλοσοφία» δεν φώτισαν το τοπίο (Smeenk &Schlisser, 2013, σ.110).

Αξιοσημείωτο είναι ότι ο Νεύτωνας έκανε τα πρώτα του βήματα προς την κατεύθυνση συγγραφής των *Principia* ως απάντηση σε ένα πρόβλημα που του έθεσε ο Edmond Halley το 1684. Ο Halley μαζί με τον Robert Hooke χρειάστηκε να αποδείξουν ότι οι ελλειπτικές τροχιές υπακούουν σε μια δύναμη που μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από τον Ήλιο. Αυτή η πρόκληση αποδείχτηκε εξαιρετικά δύσκολη για τους Halley και Hooke οπότε απευθύνθηκαν στον Νεύτωνα για βοήθεια. Ο Νεύτων απάντησε με ένα χειρόγραφο εννέα σελίδων που φέρει τον τίτλο *De Motu Corporum in Gyrum*. Τα αποτελέσματα του Νεύτωνα σε αυτό το χειρόγραφο, όχι μόνο έδιναν μια ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα των Halley και Hooke αλλά θα μπορούσαν να του εξασφαλίσουν μια θέση στην ιστορία της μηχανικής. Μπορούμε να περιγράψουμε αυτό το χειρόγραφο σαν ένα προοίμιο των *Principia*. Η πιο εντυπωσιακή συνεισφορά του *De Motu* είναι ότι ενοποιεί την *Galilean-Huygensian παράδοση* στην αστρονομία με την νέα αντίληψη της κεντρομόλου δύναμης. Αυτές οι αρχικές ιδέες που αποτυπώθηκαν στο χειρόγραφο ήταν μόνο το πρώτο βήμα μιας έρευνας που θα έκανε ο Νεύτωνας με απίστευτη προσήλωση και διορατικότητα για τα επόμενα τρία χρόνια (Smeenk & Schliesser, 2013, σ.115-119).

Η παράδοση στην οποία αναφέρονται οι Smeenk & Schliesser αφορά το γεγονός ότι ο Huygens στο έργο του με τίτλο *De vi centrifuga* το 1703 μελετώντας συστηματικά την κυκλική κίνηση εξέτασε αποκλειστικά την τάση των σωμάτων να απομακρυνθούν από το κέντρο της τροχιάς. Ονόμασε την τάση αυτή ΄΄φυγόκεντρη δύναμη΄΄ και τη μέτρησε με την απόσταση κατά την οποία το σώμα θα απέκλεινε από τον κύκλο σε μια μικρή μονάδα χρόνου και κινούνταν στην εφαπτομένη του κύκλου. Με όρους ΄΄φυγόκεντρης δύναμης΄΄ μελέτησε την κυκλική κίνηση και Γαλιλαίος. Αντίθετα ο Νεύτωνας, παίρνοντας το έναυσμα από την επιστολή του Hooke, αναδιατυπώνει τις έρευνές του για τις πλανητικές κινήσεις με όρους ελκτικών δυνάμεων προς το κέντρο, δηλαδή κεντρομόλων δυνάμεων (Ανδρεάκης, 2007, σ.492- 494).

Οι *Principia* εξελίθηκαν μέσα από μια σειρά ερωτημάτων που προκάλεσε το *De Motu.* Δύο συγκεκριμένες ερωτήσεις ήταν ιδιαίτερα πιεστικές για τον Halley κατά την ανάγνωση του χειρογράφου (Smeenk & Schliesser, 2013, σ.115-119). Πρώτον, αφού ο Νεύτωνας δέχεται τον ισχυρισμό ότι τα ουράνια σώματα κινούνται σύμφωνα με τους νόμους του Κέπλερ, πώς εξηγείται ένα αντιπαράδειγμα και συγκεκριμένα η κίνηση της Σελήνης; Όπως εξηγούν οι Smeenk και Schliesser, η κίνηση της σελήνης θεωρείτο πολύ πιο περίπλοκη από την κίνηση των πλανητών, και δεν ήταν ξεκάθαρο εάν οι νόμοι του Keppler ίσχυαν έστω και σαν χοντρική προσέγγιση. Η πρόκληση που αντιμετώπισε ο Νεύτωνας ήταν να εξετάσει εάν μια δύναμη αντίστροφου-τετραγώνου σχετίζεται με τη σεληνιακή κίνηση. Δεύτερον, πώς οι ιδέες του *De Motu* εφαρμόζονται στους κομήτες; Η φύση των κομητών ήταν το επίκεντρο μιας ανοιχτής συζήτησης μεταξύ των Hooke, Halley, Flamsteed, Newton, και άλλων. Ένα κεντρικό ζήτημα αυτής της συζήτησης ήταν εάν οι κανονικότητες που παρατηρούνται στην κίνηση των πλανητών ίσχυαν και για τους κομήτες. Οι εξελίξεις στο *De Motu,* με την εισαγωγή της έννοιας της κεντρομόλου δύναμης, έδωσαν την πιθανότητα για ακριβή ποσοτική μέτρηση στην κίνηση των κομητών.

Εξετάζοντας, τώρα, τη *δομή* των *Principia* βλέπουμε ότι χωρίζονται σε μια εισαγωγή και τρία βιβλία ή μέρη. Ο Νεύτων χρησιμοποίησε το κλασικό πρότυπο που είχε καθιερώσει ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία*, προκειμένου να δώσει έμφαση στο γεωμετρικό χαρακτήρα και τη λογική συνέπεια του κειμένου. Στην εισαγωγή διατυπώνει τους Ορισμούς των εννοιών και τα Αξιώματα που θα χρησιμοποιήσει, και συνεχίζει με Προτάσεις, Θεωρήματα, Πορίσματα, Λήμματα και Σχόλια. Η πραγματεία του Νεύτωνα διαφέρει παρόλα αυτά, όπως σημειώνει ο Cohen, από την κλασική (ελληνική) γεωμετρία σε δύο σημεία. Πρώτον, κατά τη διάρκεια του έργου του υπάρχει μια διαρκής επίκληση της μεθόδου των ορίων και δεύτερον η εγκυρότητα των προτάσεών του είναι απόλυτα συνδεδεμένη με τα πειραματικά τεκμήρια και την κριτική παρουσίαση. (Cohen, 2002, σ.61).

Σύμφωνα με το σχολικό εγχειρίδιο *Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας,* το πρώτο βιβλίο είναι μια πραγματεία που ασχολείται με την εφαρμογή των τριών νόμων-αξιωμάτων κίνησης σε σημειακές μάζες που βρίσκονται κυριώς σε κυκλική τροχιά. Στο πρώτο βιβλίο ο Νεύτωνας στοχεύει να εγκαθιδρύσει ένα ενιαίο σύστημα μελέτης της τροχιακής κίνησης τόσο ουράνιων όσο και γήινων σωμάτων εισάγοντας τον όρο «κεντρομόλος δύναμη», προκειμένου να τονίσει την αντίθεση προς τη «φυγόκεντρο δύναμη» του Huygens. Επιπλέον, αποδεικνύει ότι οι τρεις νόμοι του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών μπορούν να εξαχθούν από τη Δυναμική με χρήση των αξιωμάτων .Ο Νεύτωνας όχι μόνο αποδεικνύει ότι η τροχιά των πλανητών πρέπει να είναι ελλεπτική σε συγκεκριμένες περιπτωσεις αλλά λύνει και τα άλυτα από την αρχαιότητα προβλήματα, που σχετίζονται με την τροχιά των κομητών. Στο πρώτο βιβλίο, λοιπόν, ο Νεύτωνας αποδεικνύει ότι μια ελκτική δύναμη που μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα προς το τετράγωνο της απόστασης δημιουργεί μια κίνηση, όμοια με την κίνηση των πλανητών και, αντίστροφα ότι μια κίνηση όπως η κίνηση των πλανητών προυποθέτει απαραιτήτως μια τέτοιου είδους δύναμη. Αυτή είναι η πρώτη μεγάλη συμβολή του Νεύτωνα με τα *Principia*. Η δεύτερη είναι ότι απεδειξε ότι οι δυνάμεις αυτές είναι της ίδιας φύσης με τη γήινη βαρύτητα (Αραμπατζής, Γαβρόγλου, Διαλέτης, Χριστιανίδης, Κανδεράκης, Βερνίκιος, 1999, σ. 163).

Στο δεύτερο βιβλίο των *Principia*, ο Νεύτωνας ασχολείται συστηματικά με τις κινήσεις ρευστών και σωμάτων σε μέσα που παρουσιάζουν αντίσταση. Σκοπός του είναι όχι μόνο να αποδείξει ότι η πλανητική κίνηση μπορεί να περιγραφεί με τους τρείς νόμους της κίνησης, αλλά να αποδείξει με μαθηματικό τρόπο ότι η καρτεσιανή ερμηνεία των στροβίλων αδυνατεί να κάνει το ίδιο (Αραμπατζής, Γαβρόγλου, Διαλέτης, Χριστιανίδης, Κανδεράκης, Βερνίκιος, 1999, σ. 163- 164).

Στο τρίτο βιβλίο, σύμφωνα με αναφορά του Edmond Halley στη Βασιλική Εταιρία, παρουσιάζει το κοπερνίκειο σύστημα όπως αυτό τροποποιήθηκε από τον Keppler (Cohen, 2002, σ.62). Ο Νεύτωνας στο επονομαζόμενο *Σύστημα του Κόσμου* επικεντρώνεται στην έννοια της καθολικής βαρυτικής δύναμης, η οποία ενεργεί μεταξύ δύο οποιονδήποτε σωμάτων στο σύμπαν. Τέλος, αποδεικνύει ότι η βαρυτική δύναμη είναι ευθέως ανάλογη με την τιμή των μαζών των αλληλεπιδρώντων σωμάτων και αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης.

Στις *Principia*, όπως διαβάζουμε στους Smeenk και Schliesser, αποσαφηνίζεται η έννοια της δύναμης που χρησιμοποιείται στο συλλογισμό της κίνησης και συγκεντρώθηκαν στοιχεία για τη δύναμη της βαρύτητας (Smeenk & Schliesser, 2013, σ.110). Τα μαθηματικά αποτελέσματα που επιτυγχάνει ο Νεύτωνας δίνουν το αρχικό πλαίσιο για το έργο της ανακάλυψης των δυνάμεων που προκαλούν τις παρατηρούμενες κινήσεις και της εύρεσης περισσότερων αποδεικτικών στοιχείων για τη βαρύτητα. Έδωσε προσοχή στο ρόλο που έπαιζε η βαρύτητα σε μια μεγάλη ποικιλία φαινομένων (τις κινήσεις των πλανητών, των κομητών, της Σελήνης και της θάλασσας). Διευθέτησε το μεγάλο κοσμολογικό πρόβλημα της εποχής: την εγκυρότητα της θεωρίας του Κοπέρνικου. Υπερασπίστηκε ένα Κοπερνίκειο-Κεπλεριανό μοντέλο κίνησης των πλανητών, και έδειξε με βάση την παγκόσμια βαρύτητα ότι και ο ίδιος ο Ήλιος κινείται, αν και όχι μακριά από το κοινό κέντρο βαρύτητας του ηλιακού συστήματος (Newton, 1962, Πρόταση 12). Η σύλληψη του Νεύτωνα για την ουράνια μηχανική παραμένει μια ανθεκτική θεωρία, παρά το γεγονός ότι εμπλουτίστηκε το δέκατο όγδοο αιώνα και διορθώθηκε τον εικοστό αιώνα από τον Αινστάιν με τη Γενική Θεωρία της σχετικότητας.

Όπως σημειώνουν οι Smeenk και Schliesser, η μαθηματική τεχνοτροπία και προσέγγιση της μηχανικής των *Principia* θυμίζει το *Horologium Oscillatorium* του

Christian Huygens, το οποίο θαύμαζε πολύ ο Νεύτωνας (Smeenk & Schliesser, 2013, σ.110). Ακριβώς όπως ο Huygens γενίκευσε και εμπλούτισε τα αποτελέσματα του Γαλλιλαίου έτσι και ο Νεύτωνας γενικεύει τα αποτελέσματα του Huygens για την ομαλή κυκλική κίνηση στην περιγραφή τυχαίων καμπυλόγραμμων τροχιών. Ο Νεύτωνας ισχυρίστηκε ότι προσέφερε ασφαλέστερα συμπεράσματα από τους σύγχρονούς του. Όπως είδαμε, όμως, ήταν αμφιλεγόμενο εκείνη την εποχή το κατά πόσο κατάφερε να επιτύχει *μεγαλύτερη* βεβαιότητα.

Σημαντική είναι η αναφορά του *G. Smith* σχετικά με τη θέση που είχε η μέτρηση στις *Principia.* Σημειώνει ότι ο Νεύτωνας συνειδητοποίησε ότι η φυσική πρέπει να συμπεριλάβει τη δική της θεωρία μέτρησης. Φαίνεται, μάλιστα, ότι ο Νεύτωνας αναγνώρισε δύο συνέπειες της φυσικής. Πρώτον, ότι κάθε μέθοδος μέτρησης είναι προσωρινή και μπορεί να αντικατασταθεί αργότερα από μια άλλη προτιμότερη μέθοδο (Smith, 2012, σ.367). Και δεύτερον ότι κάθε μέτρηση που διαμεσολαβείται από τη θεωρία μπορεί να γίνει δεκτή. Μέχρι τότε όλες οι μετρήσεις προυπέθεταν θεωρητική εξέταση˙ δεν υπάρχει λόγος, όμως, να θεωρήσουμε ότι πρώτα πρέπει να εγκαθιδρύεται η θεωρία και κατόπιν να επιλέγονται οι σωστές μετρήσεις . Ως αντιπαράδειγμα δίνεται η περίπτωση του Huygens το 1659, ο οποίος χρησιμοποίησε τους θεωρητικούς του νόμους για το κωνικό εκκρεμές για να μετρήσει την επιφανειακή βαρύτητα. Ο Huygens, όμως, ποτέ δεν θεώρησε τη σταθερότητα, τη σύγκλιση, και την ακρίβεια των μετρήσεών του ως απόδειξη για τη θεωρία μιας ενιαίας βαρύτητας από την οποία προέρχονταν οι νόμοι του εκκρεμούς.

Κατά αυτόν τον τρόπο, ποσότητες όπως η *δύναμη* και ο *χρόνος* μπορούν να αυτονομηθούν από οποιοδήποτε συγκεκριμένο τρόπο μέτρησης και να θεωρηθούν ως αφηρημένες, μόνο, μαθηματικές ποσότητες ανεξάρτητες από κάθε φυσικό μηχανισμό (Smith, 2002, σ.369) Έτσι, ο Νεύτωνας εισάγει έναν νέο τρόπο παρουσίασης της μαθηματικής θεωρίας στη φυσική. Ο Γαλιλαίος και ο Huygens χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά για να εξάγουν συνέπεις από τις θεωρίες τους. Ο Νεύτωνας, αντιθέτως, αναπτύσσει μια γενική θεωρία κίνησης υπό την επίδραση κεντρομόλων δυνάμεων, εξάγοντας αποτελέσματα όχι μόνο για τις δυνάμεις αντίστροφου τετραγώνου αλλά και για τις δυνάμεις που μεταβάλλονται με άλλους τρόπους σε σχέση με την απόσταση.

Σε άλλο κείμενό του, ο G. Smith εντοπίζει τρείς επαναστατικές αλλαγές στις οποίες αποσκοπούσε ο Νεύτωνας με τη έλευση των *Principia* (Smith, 2012, σ.360). Οι επαναστατκές, αυτές, αλλαγές αφορούσαν στον τρόπο με τον οποίο διεξάγεται η έρευνα στη φυσική και την αστρονομία.

1. Η θεωρία της φυσικής θα πρέπει να επικεντρώνεται στον εντοπισμό των θεμελιωδών *δυνάμεων* της φύσης και να τις χαρακτηρίζει ως ποσότητες που σχετίζονται μέσω νόμων με άλλα μετρήσιμα μεγέθη.
2. Η αστρονομία πρέπει να εγκαταλείψει τη 1500ετή παράδοση να προσπαθεί να περιγράψει πολύπλοκες τροχιές απευθείας από τις παρατηρήσεις και αντί αυτού να να τις εξαγάγει από τις δυνάμεις που δρούν στα περιστρεφόμενα σώματα.
3. Η φυσική και η αστρονομία πρέπει να θέσουν ως στόχο ένα πολύ υψηλότερο επίπεδο απόδειξης των θεωριών τους από την απλή εξαγωγή των παρατηρούμενων φαινομένων από φανταστικές υποθέσεις.

Παρά το γεγονός ότι η τρίτη αλλαγή είναι λιγότερη εμφανής από τις δύο πρώτες, είναι κοινώς αποδεκτό, όπως σχολιάζει ο G. Smith, ότι οι Principia πέτυχαν και τις τρείς αυτές επαναστατικές αλλαγές.

1.2 Ο χώρος και ο χρόνος στις *Principia*

Οι ιδέες του Νεύτωνα σχετικά με τον «απόλυτο χώρο» και τον «απόλυτο χρόνο» συνάντησαν σοβαρές αντιρρήσεις από πολλούς σύγχρονούς του φιλόσοφους καθώς και από τη θεωρία της Σχετικότητας. Επιπλέον, πολλοί από αυτούς, είχαν κατανοήσει λάθος το σκοπο του έργου του (Disalle, 2002, σ.34) Ο Leibniz, για παράδειγμα, εκλάμβανε τις έννοιες του χώρου, του χρόνου και της κίνησης καθώς και τις λέξεις «απόλυτο» ή «ουσία» με βάση τη δική του ιδιόμορφη μεταφυσική. Ο ίδιος ο Νεύτωνας πρότεινε να αγνοηθεί η επικρατούσα φιλοσοφική χρήση των παραπάνω όρων ώστε να μπορέσει να εισαγάγει θεωρητικά τις ιδέες του . Όπως σημειώνουν και οι Smeenk και Schliesser, είναι λάθος θεώρηση ότι στόχος του Νέυτωνα ήταν να αποδείξει την ύπαρξη απόλυτου χώρου και χρόνου (Smeenk&Schliesser, 2013, σ.122).

Αντίθετα, ο στόχος του ήταν να αποσαφηνίσει τις υποθέσεις σχετικά με το χώρο και το χρόνο που περιέχονται στους νόμους της κίνησης.

Σύμφωνα με τον Δ. Αναπολιτάνο, ο Leibniz παρουσίασε τον χρόνο ως μια ιδεώδη οντότητα που δεν σχετίζεται με κάτι μοναδιαίο που έχει υπόσταση. Ο χρόνος, δηλαδή, δεν πληρεί τις προυποθέσεις προκειμένου να αναφερθεί ως ένα *πράγμα* από μόνο του ορθό αλλά μπορεί να νοηθεί, μόνο, ως σειρά σχέσεων διαδοχής κατά τις μεταβολές των φαινομένων. Με αυτήν την έννοια, για τον Leibniz, ο χρόνος είναι σχετικός ή σχεσιακός και ανήκει στη σφαίρα των μαθηματικών εννοιών. Πιο συγκεκριμένα, ο χρόνος φέρει τις εξής ιδιότητες: είναι μονοδιάστατος και συνεπώς γραμμικός, έχει κατεύθυνση και θεωρείται εξειδανικευμένα συνεχής, χωρίς διακοπές (Αναπολιτάνος, 1999, σ. 134- 135).

Ο Νεύτωνας, λοιπόν, προκειμένου να αποφύγει τις λανθασμένες ιδέες και προκαταλήψεις, παραθέτει διευκρινίσεις σχετικά με την έννοια του απόλυτου χρόνου, του απόλυτου χώρου και της απόλυτης κίνησης. Συγκεκριμένα για τον απόλυτο χρόνο διατυπώνει τα εξής:

> Ο απόλυτος, πραγματικός και μαθηματικός χρόνος ρέει ομοιόμορφα, από τον ίδιο του τον εαυτό και από την ίδια του τη φύση, χωρίς αναφορά σε οτιδήποτε εξωτερικό, και διαφορετικά ονομάζεται διάρκεια. Ο σχετικός, εμφανής και κοινός χρόνος είναι ένα αισθητό και εξωτερικό (ανεξάρτητα του αν είναι ακριβές ή όχι) μέτρο της διάρκειας μέσω της κίνησης, ο οποίος χρησιμοποιείται συνήθως αντί του πραγματικού χρόνου˙όπως για παράδειγμα η ώρα, η μέρα, ο χρόνος (Newton, 1962, Scholium).

Η επιχειρηματολογία του Νεύτωνα στα *Principia*, σε ότι αφορά τον «απόλυτο χρόνο», βασίζεται σε δύο βασικές αρχές (DiSalle, 2002, σ.40). Καταρχάς, θεωρεί ότι είναι ανεξάρτητος από το εάν οποιαδήποτε φυσική ή μηχανική διαδικασία ρέει ομοιόμορφα. Δεν εξαρτάται, για παράδειγμα, από το εάν ο δείκτης ενός ρολογιού ή η επιβατική ακτίνα ενός πλανήτη διανύουν ίσες γωνίες σε ίσους χρόνους. Υπάρχει μια αντικειμενική πραγματικότητα για το εάν δυο χρονικά διαστήματα είναι πράγματι ίσα. Επιπλεόν, ο «απόλυτος χρόνος» εξασφαλίζει την αντικειμενικότητα σχετικά με το εάν δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Ο Leibniz, ωστόσο, επιχειρηματολογεί ενάντια στην έννοια του «απόλυτου χρόνου», επισημαίνοντας ότι παραβιάζει την «Αρχή της Ταυτότητας των Αδιαιρέτων» Για τον Leibniz ο χρόνος δεν μπορεί να είναι «απόλυτος» , μπορεί μόνο να είναι μια σειρά διαδοχής (order of succession) (DiSalle, 2002, σ.41). Ο Νεύτωνας, όμως, απορρίπτει την ιδέα ότι στιγμές του χρόνου έχουν οποιαδήποτε ταυτότητα πάνω τους και δεν θεωρεί σημαντικό χαρακτηριστικό του «απόλυτου χρόνου» το διαχωρισμό των στιγμών. Τονίζει ότι καθοριστικό χαρακτηριστικό του χρόνου είναι η δομή του˙ ότι ρέει ισόποσα και τα ίσα χρονικά διαστήματα είναι αντικειμενικά ορισμένα.

Επιπλέον, το κρίσιμο ερώτημα, στο πλαίσιο των *Principia*, δεν είναι αν αποδεικνύεται με επιτυχία ότι ο χρόνος είναι απόλυτος, αλλά αν ο ορισμός του απόλυτου χρόνου είναι καλός. Ο DiSalle θέτει ευθέως τα ερωτήματα: Τι κάνει αυτόν τον ορισμό να έχει αντικειμενικό φυσικό περιεχόμενο; Μπορούμε, χωρίς προσφυγή σε κάποιο αυθαίρετο πρότυπο, να καθορίσουμε ίσα διαστήματα μεταξύ του χρόνου που έχει παρέλθει; Υπάρχει ένας καλός ορισμός που να δείχνει τι σημαίνει «ίσα χρονικά διαστήματα», ακόμη και αν κανένα ρολόι δεν μετρά τέτοια διαστήματα ακριβώς; Η απάντηση, που διαβάζουμε στον Di Salle, είναι «ναι». Στα *Principia* ο ορισμός του «απόλυτου» χρόνου απορρέει από τους νόμους της κίνησης του Νεύτωνα καθώς έτσι διακρίνεται η αδρανειακή από την επιταχυνόμενη κίνηση. Συγκεκριμένα, ως αδρανειακή ορίζεται η κίνηση κατά την οποία διανύονται ίσες αποστάσεις σε ίσους χρόνους σε αντίθεση με την επιταχυνόμενη κίνηση κατά την οποία εξαιτίας της ασκούμενης δύναμης διανύονται συνεχώς μεγαλύτερα διαστήματα σε ίσους χρόνους. Σε αυτό το σημείο αναφέρονται και οι Smeenk &Schliesser επισημαίνοντας ότι οι νόμοι απεικονίζουν μια θεμελιώδη διάκριση μεταξύ αδρανειακής και μη ανδρανειακής κίνησης (Smeenk&Schliesser,2013, σ.122). Εν ολίγοις, το ιδανικό ρολόι που μετρά τον απόλυτο χρόνο είναι , απλά, ενα αδρανειακό ρολόι˙ αδύνατο να επιτευχθεί παρά μόνο σε έναν προσεγγιστικό βαθμό. Φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο ορισμός που δίνει ο Νεύτωνας για τον «απόλυτο χρόνο» είναι τόσο θεμελιώδης όσο και οι νόμοι της κίνησης και ήταν αναμενόμενο, λοιπόν, να επικρατήσει παρά τις τότε παραδοσιακές φιλοσοφικές αντιρρήσεις. Ανατράπηκε, μόνο, κατά τον 20ό αι. με την εισαγωγή των νέων θεμελιωδών φυσικών νόμων του Αινστάιν (DiSalle, 2002, σ.41).

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη διευκρίνηση που παραθέτει ο ίδιος ο Νεύτωνας στις *Principia* για τον «απόλυτο χώρο»:

> Ο απόλυτος χώρος, από την ίδια του τη φύση, χωρίς αναφορά σε οτιδήποτε εξωτερικό, παραμένει πάντα όμοιος και αμετακίνητος. Ο σχετικός χώρος είναι κάποια κινούμενη διάσταση ή μέτρο του απόλυτου χώρου˙ τον οποίο καθορίζουν οι αισθήσεις μας από τη θέση των σωμάτων, και ο οποίος συχνά θεωρείται ως αμετακίνητος χώρος˙ τέτοια είναι η διάσταση ενός υπόγειου, εναέριου ή ουράνιου χώρου που καθορίζεται από τη θέση του σε σχέση με τη γη. Ο απόλυτος και σχετικός χώρος είναι ίδιοι σε σχήμα και μέγεθος αλλά δεν παραμένουν πάντα αριθμητικά οι ίδιοι. Εάν η γή, για παράδειγμα, κινηθεί, ο χώρος που καταλαμβάνει ο αέρας μας, ο οποίος σε σχέση με τη γή παραμένει πάντα ο ίδιος, θα γίνει κάποια στιγμή κομμάτι του απόλυτου χώρου μέσα από τον οποίο περνά ο αέρας˙ κάποια άλλη στιγμή θα γίνει διαφορετικό κομμάτι του ίδιου, και έτσι, θα αλλάζει συνεχώς με την απόλυτη έννοια (Newton, 1962, Scholium).

Σύμφωνα με τον Di Salle, για τον ορισμό του «απόλυτου χώρου» μπορεί να δοθεί μια ανάλυση παρόμοια με αυτήν που προηγήθηκε για τον «απόλυτο χρόνο» (DiSalle, 2002, σ.42). Για τον Leibniz, η έννοια του «απόλυτου χώρου» ισοδυναμεί με την άποψη ότι ο χώρος είναι μια ουσία και άρα πρέπει να αποδίδεται μια ξεχωριστή ταυτότητα σε κάθε σημείο του χώρου. Και εδώ πάλι, στον ορισμό που δίνει ο Νεύτωνας για τον «απόλυτο χώρο» δεν αφήνεται να εννοηθεί καμία τέτοια διαφοροποίηση για τα σημεία του. Τα χαρακτηριστικά που τον αντιπροσωπεύουν είναι ότι παραμένει ομοιογενής και αμετακίνητος, έτσι ώστε «η μεταφορά από ένα απόλυτο μέρος σε ένα άλλο να είναι η απόλυτη κίνηση.... και πραγματική, απόλυτη ηρεμία του σώματος να είναι η παραμονή του στο ίδιο μέρος αυτού του ακίνητου χώρου» (Newton, 1962, Scholium).

Ο Di Salle, όμως, αναδεικνύει μια δυσκολία στον ορισμό του απόλυτου χώρου (DiSalle, 2002, σ.42). Σε αντίθεση με τον απόλυτο χρόνο, που θεμελιώθηκε μέσα από τους νόμους της κίνησης, ο απόλυτος χώρος συνεπάγεται τη διάκριση μεταξύ κίνησης και ηρεμίας που δεν είναι καλά καθορισμένη στους νόμους του Νεύτωνα. Σύμφωνα με τους νόμους της κίνησης, ένα σώμα κινείται κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέχρι μια δύναμη που ασκείται σε αυτό να το επιταχύνει˙ το αποτέλεσμα της δύναμης είναι ανεξάρτητο από την ταχύτητα του σώματος. Όπως φαίνεται και στο πόρισμα 5 των νόμων της κίνησης:

> Οι κινήσεις των σωμάτων, του ενός σε σχέση με το άλλο, που εσωκλείονται σε έναν δεδομένο χώρο, είναι ίδιες είτε ο χώρος βρίσκεται σε ηρεμία είτε κινείται ευθύγραμμα και ομαλά απουσία κυκλικής κίνησης (Newton, 1962, σ.20).

Ως εκ τούτου, τίποτα στη συμπεριφορά του ηλιακού μας συστήματος, για παράδειγμα, δεν μας επιτρέπει να καθορίσουμε εάν αυτό βρίσκε,ται σε ηρεμία ή κινείται αδρανειακά. Σύμφωνα με τους Smeenk και Schlisser (Smeenk 2013 & Schliesser, σ.125), από το πόρισμα 5 προκύπτει ότι οι απόλυτες θέσεις και ταχύτητες δεν σχετίζονται με τον καθορισμό των απόλυτων επιταχύνσεων. Δηλαδή, η διαβεβαίωση ότι η απόλυτη επιτάχυνση είναι καλά ορισμένη απαιτεί μια διαφορετική δομή από την αναγνώριση των θέσεων με την πάροδο του χρόνου. Σήμερα, η δομή αυτή καλείται *ομοπαράλληλη σύνδεση* (affine connection) και επιτρέπει να καθοριστεί το μέγεθος της καμπύλωσης του χωροχρόνου χωρίς να εισάγεται η απόλυτη θέση και ταχύτητα. Οι αδρανειακές τροχιές αναλύονται σε ευθύγραμμες πορείες και οι καμπυλόγραμμες παρουσιάζουν επιτάχυνση.

Η πόρισμα 6 των νόμων της κίνησης στις *Principia* υπονομεύει ακόμη περισσότερο την απόλυτη κίνηση.

> Εάν τα σώματα, κινούνται με οποιονδήποτε τρόπο το ένα σε σχέση με το άλλο και ωθούνται κατά μήκος παράλληλων γραμμών από ίσες επιταχυντικές δυνάμεις, θα συνεχίσουν όλα να κινούνται με τον ίδιο τρόπο μεταξύ τους σαν να μην είχαν ασκηθεί αυτές οι δυνάμεις (Newton, 1962, σ.21).

Δηλαδή, τίποτα στη συμπεριφορά του ηλιακού μας συστήματος δεν μπορεί να μας πει εάν το σύστημα κινείται αδρανειακά ή επιταχύνεται από κάποια εξωτερική δύναμη. Ο Di Salle καταλήγει, λοιπόν, εύλογα στο συμπέρασμα ότι μπορεί η έννοια του απόλυτου χώρου να παραμένει άτρωτη μπροστά στις κριτικές επιθέσεις του Leibniz, υπονομεύεται, όμως, από τις ίδιες τις ιδέες του Νεύτωνα σχετικά με τη δύναμη και την αδράνεια. Η διάκριση, λοιπόν, ανάμεσα σε απόλυτη κίνηση και απόλυτη ηρεμία, δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί σε έναν Νευτώνειο κόσμο. Το πόρισμα 6 πραγματεύονται και οι Smeenk και Schlisser επισημαίνοντας ότι ο

Νέυτωνας, θεωρούσε υπό μια έννοια και την επιτάχυνση σχετική (Smeenk&Schliesser, 2013, σ. 125). Αυτό το σημείο αποτελεί μια βαθιά δοκιμασία για τις Principia καθώς δειχνει οτι στην περίπτωση της βαρύτητας η διάκριση μεταξύ αδρανειακής και μη αδρανειακής κίνησης δεν είναι καλά θεμελιωμένη. Ήταν ο Einstein 220 χρόνια αργότερα που αναγνώρισε τη σημασία του προβλήματος και προκειμένου να το λύσει οδηγήθηκε σε μια νέα θεωρία βαρύτητας.

Ο Νεύτωνας γνώριζε το παραπάνω πρόβλημα, κάτι που είναι σαφές στην ανάλυσή του σχετικά με την απόλυτη κίνηση. Στο περίφημο Σχόλιο των *Principia* σημειώνει σχετικά με την απόλυτη κίνηση «Απόλυτη κίνηση είναι η μεταφορά ενός σώματος από μια απόλυτη θέση σε μια άλλη, σχετική κίνηση είναι η μεταφορά από μια σχετική θέση σε μια άλλη» (Newton, 1962, σ.7).

Στη συνέχεια του Σχολίου, η διάκριση της απόλυτης από τη σχετική κίνηση γίνεται από «τις ιδιότητες, τις αιτίες και τα αποτελέσματά της». Ο Di Salle απαριθμεί τις ιδιότητες που συναντά στην ανάλυση των *Principia* σχετικά με την απόλυτη μετατόπιση ως εξής: τα σώματα βρίσκονται σε ηρεμία όταν βρίσκονται σε ηρεμία το ένα σε σχέση με το άλλο, τα μέρη από τα οποία αποτελείται ένα σώμα συμμετέχουν στην κίνηση του σώματος και οτιδήποτε περιέχεται σε έναν δεδομένο χώρο μοιράζεται την κίνηση αυτού του χώρου. Γίνεται, λοιπόν, αντιληπτό από αυτές τις ιδιότητες ότι δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε την πραγματική κίνηση από την ηρεμία. Όπως αναφέρουν και οι Smeenk & Schliesser , οι παρατηρήσεις μας είναι πάντα για τις σχετικές κινήσεις, δεδομένου κάποιου καθορισμένου χώρου που μπορούμε υπό όρους να θεωρούμε ότι είναι απόλυτος (Smeenk&Schliesser, 2013, σ.124). Πώς, λοιπόν, είναι δυνατό να προσδιορίσουμε την πραγματική απόλυτη κινηση; Ο Νεύτωνας παρατηρεί ότι ολόκληρο το *Principia* συντάχθηκε για να διαφωτίσει αυτό το πρόβλημα και η κατάσταση δεν είναι εντελώς απελπιστική. Δεδομένης της σύνδεσης μεταξύ των δυνάμεων και της απόλυτης επιτάχυνσης, είναι δυνατό να καθοριστεί εάν οι κινήσεις που περιγράφονται με αναφορα έναν σχετικό χώρο μπορούν να ληφθούν ως απόλυτες κινήσεις. Μόνο στην περίπτωση των απόλυτων κινήσεων, οι ασκούμενες δυνάμεις αντιστοιχούν ακριβώς με τις επιταχύνσεις.

Οι αντιλήψεις του Νεύτωνα για το χώρο, το χρόνο και την κίνηση θεωρούνταν για καιρό ως μεταφυσικές ιδέες και η θέση τους στην εμπειρική επιστήμη αμφισβητείτο

(DiSalle, 2002, σ.55-56). Πλέον όμως, βλέπουμε ότι ήταν υποδειγματικές του τρόπου με τον οποίο η επιστήμη δίνει εμπειρική σημασία σε θεωρητικές έννοιες. Προκειμένου να ανήκει μια έννοια στη φυσική επιστήμη πρέπει να εξηγείται μέσα από φυσικούς νόμους πώς εφαρμόζεται και πώς μετράται. Ο Νεύτωνας ονόμασε απόλυτες εκείνες τις ποσότητες που θα μπορούσαν να καθοριστούν. Με αυτό το πρότυπο ο απόλυτος χώρος δεν ανήκει στη Νευτώνεια φυσική, καθώς η απόλυτη μετατόπιση δεν είναι μια φυσικώς μετρήσιμη ποσότητα. Αντίθετα, ο απόλυτος χρόνος, η απόλυτη επιτάχυνση και η απόλυτη περιστροφή είναι σαφώς καθορισμένες έννοιες, σύμφυτες με την κλασική σκέψη.

1.3 Τα Αξιώματα ή Νόμοι της κίνησης και οι έννοιες της μάζας και της δύναμης στις *Principia*

Το περίφημο έργο του Νεύτωνα Principia ξεκινά με ένα σύνολο οκτώ ορισμών, εκ των οποίων ο πρώτος αφορά τη «μάζα», μία νέα έννοια που εισάγεται τυπικά στη φυσική από τον Νεύτωνα:

> Η ποσότητα της ύλης είναι το μέτρο της ίδιας, που προκύπτει από κοινού από την πυκνότητα και τον όγκο της (Newton, 1962, Ορισμός Ι).

Όπως παρατηρούμε, ο Νεύτωνας δε χρησιμοποιεί στον ορισμό του τον όρο «μάζα», αντίθετα χρησιμποποιεί τη συνήθη έκφραση της εποχής «ποσότητα ύλης». Δηλώνει ότι το μέτρο αυτής της ποσότητας της ύλης εξαρτάται από δύο παράγοντες: τον όγκο και την πυκνότητα. Και στο σχόλιο που παραθέτει αμέσως μετά τον ορισμό σημειώνει ότι το συγκεκριμένο μέτρο είναι που ονομάζει «σώμα» ή «μάζα».

Σύμφωνα με τον I.B.Cohen, ο Νεύτωνας εισάγει την έννοια της μάζας διότι απαιτεί ένα μέτρο της ύλης που δεν υπόκειται σε συγκεκριμένες φυσικές περιστάσεις˙ δεν είναι, δηλαδή, χρησιμοποιώντας τη γλώσσα του Αριστοτέλη, μια ΄΄τυχαία΄΄ ιδιότητα (Cohen, 2002, σ.63). Ο Νεύτων, στον Ορισμό Ι, καταφέρνει να απορρίψει τα μέχρι τότε ισχύοντα μέτρα για την ποσότητα της ύλης, συγκεκριμένα την «έκταση» που χρησιμοποιούσε ο Descartes και το «βάρος» που ήταν το μέτρο του Γαλιλαίου. Απορρίπτει το «βάρος» ως μέτρο ποσότητας της ύλης επειδή μεταβάλλεται ανάλογα με το γεωγραφικό πλάτος στο οποίο βρίσκεται το σώμα. Ο Νεύτωνας παρατηρεί, κάνοντας πολύ ακριβή πειράματα με εκκρεμή, ότι σε κάθε δεδομένο τόπο,« η μάζα ενός σώματος μπορεί να γίνει γνωστή από το βάρος του σώματος». Αναφορά σχετικά με αυτά τα πειράματα γίνεται στο Βιβλίο 3, Πρόταση 6.

Ο I. B. Cohen τονίζει ότι οι απόψεις του Νεύτωνα για την πυκνότητα επηρεάστηκαν από πειράματα του Boyle και άλλων φυσικών˙γνώριζε ότι ένα αέριο μπορεί να διασταλεί ή να συμπιεστεί και υπό αυτές τις συνθήκες η πυκνότητα θα αλλάξει αλλά η ποσότητα της ύλης θα παραμείνει ίδια (Cohen, 2002, σ.63). Η «μάζα», σύμφωνα με τον Νεύτωνα, παραμένει αναλλοίωτη ακόμη κι αν μεταφερθεί από ένα μέρος της Γής σε ένα άλλο ή ακόμη και στη Σελήνη ή στο Δία. Σημαντική είναι η σημείωση του Cohen ότι η έννοια της μάζας του Νεύτωνα έχει επικριθεί έντονα για κυκλικότητα. Ο Ernst Mach έθεσε το ερώτημα πώς μπορεί να οριστεί η «μάζα» ως ανάλογη της πυκνότητας και του όγκου, εφόσον η πυκνότητα ορίζεται ως μάζα ανά μονάδα όγκου. Η απάντηση, όμως, έρχεται από τα *Principia* καθώς ο Νεύτωνας δεν προσδιορίζει την έννοια της πυκνότητας ούτε την επεξηγεί στον ορισμό 1. Θεωρείται ότι εκλαμβάνει την πυκνότητα ως μέτρο του αριθμού της συγκέντρωσης των θεμελιωδών σωματιδίων από τα οποία αποτελείται η ύλη. Ως εκ τούτου, η πυκνότητα δεν εξερτάται ούτε από την μάζα ούτε από τον όγκο.

Επιπλέον, αξιοσημείωτο είναι ότι η αντίληψη του Νεύτωνα για τη «μάζα» αποτυπώνεται ξεκάθαρα μόνο στα Principia (Cohen, 2002, σ.64). Η έννοια της μάζας δεν εμφανίζεται σε καμία από τις εκδόσεις του De Motu, ούτε σε μία λίστα με ορισμούς που συντάχθηκαν πριν τη συγγραφή των Principia. Στην εν λόγω λίστα, ο Νεύτωνας χρησιμοποίησε το ουσιαστικό ΄pondus΄ ή «βάρος» για να δηλώσει το μέτρο της ύλης˙ τονίζοντας, όμως, ότι δεν εννοούσε το «βάρος» κατά την κοινή αντίληψη. Και πράγματι σε προηγούμενη αναφορά του, έγραφε ότι με τη λέξη «βάρος» εννοεί «την ποσότητα της ύλης που μετακινείται, ανεξάρτητα από τις συνθήκες βαρύτητας».

Η φυσική του Νεύτωνα βασίζεται σε δύο θεμελιώδεις έννοιες: τη μάζα και τη δύναμη (Cohen, 2002, σ. 61). Στα *Principia* ο Νεύτωνας διερευνά τις ιδιότητες πολλών τύπων δυνάμεων. Οι πιο σημαντικές από αυτές είναι οι δυνάμεις που παράγουν επιταχύνσεις ή αλλαγές στην κινητική κατάσταση. Στον ορισμό 4 των *Principia* διατυπώνεται ότι «Μία ασκούμενη δύναμη είναι μια δράση πάνω σε ένα σώμα, προκειμένου να αλλάξει την κατάστασή του, είτε της στάσης, είτε της ευθύγραμης ομαλής κίνησης.» Ο Νεύτωνας διαχωρίζει αυτές τις δυνάμεις σε τρείς βασικές κατηγορίες: δυνάμεις κρούσης, δυνάμεις πίεσης και κεντρομόλες δυνάμεις. Επιπλέον, στο βιβλίο 2 των *Principia*, ο Νεύτωνας συμπεριλαμβάνει και τις δυνάμεις αντίστασης στα ρευστά. Ένα διαφορετικό είδος είναι η ΄΄δύναμη αδράνειας΄΄, η οποία δεν είναι ούτε επιταχυντική ούτε στατική, ούτε καν δύναμη στο πλαίσιο της μηχανικής.

Τα δύο πρώτα είδη δύναμης (κρούσης και πίεσης) γίνονται εύκολα αντιληπτά. Η έννοια, όμως, της κεντρομόλου δύναμης εισήχθη στην ουράνια μηχανική με τις *Principia* και συγκεκριμένα με τον Ορισμό 5: «Κεντρομόλος δύναμη είναι αυτή υπό την οποία τα σώματα έλκονται ή ωθούνται, ή με οποιοδήποτε τρόπο έχουν τάση προς ένα σημείο ως κέντρο.» Σημαντική διαφορά των δυνάμεων κρούσης και πίεσης με την κεντρομόλο δύναμη είναι ότι οι πρώτες είναι παρατηρήσιμες δυνάμεις επαφής που συνήθως παρέχουν οπτικές αποδέιξεις ύπαρξης ενώ η μόνη απόδειξη ότι κεντρομόλος δύναμη υπάρχει είναι η συνεχής απόκλιση από την ευθύγραμμη τροχιά (Cohen, 2002, σ.67). Είναι γεγονός ότι αρκετοί φιλόσοφοι- όπως ο Huygens και ο Leibniz- απέρριπταν τη Νευτώνεια φυσική διότι δέχονταν μόνο την κλασική έννοια της δύναμης που ασκείται από το ένα σώμα στο άλλο εξ΄ επαφής. Απέρριπταν, λοιπόν, την κεντρομόλο δύναμη καθώς δρά από απόσταση και όχι μέσω επαφής.

Στις *Principia* οι ορισμοί ακολουθούνται από τα ΄΄Αξιώματα ή νόμους της κίνησης΄΄ . Η ονομασία τους ήταν ένας μετασχηματισμός των αντίστοιχων κανόνων που εμφανίστηκαν στο έργο του Descartes ΄΄Regulae ….sive leges naturae ΄΄ . Όπως, επιπλέον, και ο τίτλος του έργου του Νεύτωνα *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* είχε προφανώς μεταπλασθεί απο τον τίτλο του έργου του Descartes *Philosophiae Principia* (Cohen, 2002, σ.69). Ας δούμε, αρχικά, τον πρώτο νόμο της κίνησης:

> Κάθε σώμα παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, εκτός αν χρειαστεί να μεταβάλει την κατάστασή του από δυνάμεις που ασκούνται πάνω του (Newton, 1962, σ. 13).

Ένας πρόδρομος του πρώτου νόμου του Νεύτωνα εμφανίζεται στο *De Motu* ως Υπόθεση 2: «Κάθε σώμα από την έμφυτη δύναμή του μόνο του συνεχίζει ομοιόμορφα σε άπειρη ευθεία γραμμή, εκτός και αν εμποδιστεί από κάτι εξωτερικό.» Αυτή η διατύπωση κάνει, ήδη, μια πρόοδο σε σχέση με πρότερες διατυπώσεις , όπως εκείνη του Descartes (Smeenk & Schliesser, 2013, σ.119). Ο Νεύτωνας παρατηρεί ότι η κίνηση θα είναι ομοιόμορφη, ότι δηλαδή, θα καλύπτει ίσες αποστάσεις σε ίσους χρόνους. Στις *Principia* σημειώνεται ότι δεν χρειάζεται, πλέον, να παρουσιαστεί ένα εξωτερικό εμπόδιο προκειμένου να εκτραπεί ένα σώμα από την αδρανειακή του κίνηση. Αρκεί να ασκηθεί μια δύναμη, ανεξάρτητα από τον τρόπο και την προέλευση αυτής της δύναμης. Όπως επισημαίνει και ο I. B. Cohen, οι ασκούμενες δυνάμεις τις οποίες αναφέρει ο Νεύτωνας στη διατύπωση του πρώτου νόμου μπορεί να είναι οποιουδήποτε απο τα τρία είδη: πίεσης, κρούσης ή κεντρομόλου δύναμης. Με άλλα λόγια, ο νόμος είναι εξίσου έγκυρος για στιγμιαίες ή συνεχώς ασκούμενες δυνάμεις.

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα, γνωστός και ως νόμος της αδράνειας, ακολουθείται από μια σύντομη παράγραφο η οποία αναφέρει τρία παραδείγματα αδρανειακής κίνησης. Τα παραδείγματα αυτά βασίζοντα στην ανάλυση της καμπυλόγραμμης κίνησης που παράγεται από μια κεντρομόλο δύναμη (Cohen, 2002, σ.69-70). Βασικός στόχος του πρώτου νόμου είναι να καταστήσει σαφή την κατάσταση υπό την οποία μπορούμε να συμπεράνουμε τη δράση μιας συνεχώς ασκούμενης δύναμης. Το πρώτο παράδειγμα είναι η κίνηση των βλημάτων. Αυτά «εμμένουν σε μια ευθύγραμμη κίνηση προς τα εμπρός», εκτός από το βαθμό στον οποίο καθυστερούν εξαιτίας της αντίστασης του αέρα και της «ώθησης προς τα κάτω από τη δύναμη της βαρύτητας». Το δεύτερο παράδειγμα που δίνει ο Νεύτωνας είναι η κυκλική κίνηση ενός περιστροφόμενου αντικειμένου και το τρίτο η τροχιακή κίνηση των πλανητών και των κομητών.

Όσον αφορά το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, αυτός εμφανίζεται έμμεσα στο *De Motu* ως ποσοτική διαχείριση των δυνάμεων, ως μέτρο της εκτροπής από μια αδρανειακή τροχιά (Smeenk &Schliesser, 2013, σ.119). Στις *Principia*, ο δεύτερος νόμος διατυπώνεται ως εξής:

> Η μεταβολή στην κίνηση είναι ανάλογη προς την κινητήρια δύναμη που ασκείται και συντελείται προς την κατεύθυνση της ευθείας γραμμής στην οποία ασκείται η δύναμη (Newton, 1962, σ.13).

Ορισμένοι σχολιαστές, έχουν προσθέσει στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα μια λέξη ή φράση ώστε να διατυπώνεται ως εξής: ο λόγος της ΄΄μεταβολής της κίνησης΄΄ (ή η μεταβολή της κίνησης ανά μονάδα χρόνου) είναι ανάλογος της δύναμης. Αυτή η τροποποίηση κάνει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα να θυμίζει τη σημερινή του μορφή, όπως αυτή διατυπώνεται στα σύγχρονα βιβλία φυσικής (Cohen, 2002, σ.70). Παρόλα αυτά ο Νεύτωνας δεν έκανε λάθος. Ο δεύτερος νόμος αφορά στιγμιαίες και όχι συνεχώς ασκούμενες δυνάμεις. Δηλώνει ότι μια αυθόρμητη δύναμη – μία δύναμη που δρά, δηλαδή, άμεσα ή σχεδόν στιγμιαία ή ενεργεί για ένα μικρό ΄΄κομμάτι΄΄ του χρόνου- παράγει μια αλλαγή στην ΄΄ποσότητα της κίνησης΄΄ ή ορμής.

Όπως σχολιάζει ο Cohen, ο Νεύτωνας εφάρμοσε το δεύτερο νόμο του και σε συνεχείς δυνάμεις και συγκεκριμένα στους Ορισμούς 7 και 8. Επίσης, στο Βιβλίο 2, στην Πρόταση 24 ο Νεύτωνας γράφει: «η ταχύτητα που μια ορισμένη δύναμη μπορεί να παραγάγει σε ορισμένο χρόνο και σε ορισμένη ποσότητα ύλης είναι εξίσου ευθέως ανάλογη με τη δύναμη και το χρόνο και αντιστρόφως ανάλογη με την ύλη» . Ο παράγοντας του χρόνου υπεισέρχεται στο νόμο για συνεχείς δυνάμεις. Ένας λόγος για τον οποίο ο Νεύτωνας θεωρείται ότι έδωσε προτεραιότητα στις στιγμιαίες δυνάμεις είναι ότι τέτοιου είδους ήταν οι δυνάμεις κρούσης και πίεσης, για τις οποίες, όπως εξηγήσαμε, υπήρχε άμεση αντίληψη (Cohen, 2002, σ.72). Οι πλέον σημαντικές συνεχώς ασκούμενες δυνάμεις είναι οι δυνάμεις στους πλανήτες, στους κομήτες, κτλ οι οποίες, όμως, δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Η μεγάλη έμφαση που δινόταν στις δυνάμεις μέσω επαφής, και συνεπώς στις στιγμιαίες δυνάμεις, δεν του ΄΄επέτρεψε'' να επεκτείνει σημαντικά το δεύτερο νόμο του και στις συνεχείς δυνάμεις.

Στη συνέχεια βλέπουμε τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα στον οποίο διατύπωσε την ισότητα δράσης-αντίδρασης. Ο νόμος αυτός χαρακτηρίστηκε από τον Ernst Mach ως ο πλέον πρωτότυπος από τους τρεις νόμους της κίνησης (Cohen, 2002, σ.73). Είναι ο μόνος από τους νόμους της κίνησης που ο Νεύτων δεν ισχυρίστηκε ότι είχε ανακαλυφθεί από τον Γαλιλαίο. Στις *Principia* αποτυπώνεται ως εξής:

> Σε κάθε δράση υπάρχει πάντα και μια αντίθετη και ίση αντίδραση. Με άλλα λόγια, οι αμοιβαίες δράσεις δύο σωμάτων είναι πάντα ίσες και αντίθετες σε κατεύθυνση (Newton, 1962, σ.13).

Ο τρίτος νόμος, σχολιάζουν οι Smeenk και Schliesser, απουσιάζει εντελώς από το *De Motu*, όπου οι κεντρομόλες δυνάμεις αντιμετωπίζονται ως επιταχυντικές ροπές προς ένα καθορισμένο κέντρο χωρίς να ενδιαφέρει εάν παράγονται από ένα σώμα. Στις *Principia*, όμως, ο τρίτος νόμος υποβοηθά τους δύο πρώτους επιτρέποντας το διαχωρισμό των πραγματικών δυνάμεων (Smeenk, Schliesser, 2002, σ.121). Όπως επισημαίνει ο Cohen, αν και απλός, αυτός ο νόμος μπορεί εύκολα να υποστεί παρερμηνεία. Για παράδειγμα, κλασική παρερμηνεία είναι να θεωρείται ότι αυτός ο νόμος εξασφαλίζει την ισορροπία ενός σώματος εξαιτίας των δύο ίσων και αντίθετων δυνάμεων˙της δράσης και της αντίδρασης. Είναι, όμως, λάθος να συμπεράνουμε την ισορροπία του σώματος, καθώς η δράση και η αντίδραση στις οποίες αναφέρεται ο Νεύτωνας, ασκούνται παντα σε διαφορετικά σώματα (Cohen, 2002, σ.73-74). Ο ίδιος ο Νεύτων είδε ότι αυτός ο νόμος μπορεί να υποστεί λανθασμένη ερμηνεία και συμπεριέλαβε στη δεύτερη έκδοση των *Principia* μία δήλωση σχετικά με τον τρίτο νόμο. «Με άλλα λόγια, οι αμοιβαίες δράσεις δύο σωμάτων είναι πάντα ίσες και αντίθετες σε κατεύθυνση.» Αξιοσημείωτο είναι ότι, σύμφωνα με τον Νεύτωνα, ο τρίτος νόμος του εφαρμόζεται στις κρούσεις σωμάτων και φαίνεται να σχετίζεται με το νόμο διατήρησης της ορμής, που είχε προηγουμένως ανακοινωθεί απο από τον μαθηματικό John Wallis.Το πλέον σημαντικό, όμως, όπως τονίζει ο Νεύτωνας είναι πως ο νόμος του είναι έγκυρος και για ελκτικές δυνάμεις οι οποίες δρούν από απόσταση. Τέλος, ο Νεύτωνας εξέτασε τις συνέπειες που συνεπάγεται ο τρίτος νόμος για το πλανητικό σύστημα και συμπέρανε ότι η κίνηση των πλανητών είναι αποτέλεσμα μιας αντίστροφου-τετραγώνου κεντρομόλου δύναμης.

Τίθεται, όμως, το ερώτημα, από πολλούς κριτικούς σχολιαστές γιατί να υπάρχει ξεχωριστός Νόμος Ι και Νόμος ΙΙ, αφού ο πρώτος νόμος φαίνεται να προκύπτει από τον δεύτερο εάν η συνολική εξωτερική δύναμη είναι μηδέν (Cohen, 2002, σ.74). Στην περίπτωση αυτή η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν και συνεπώς το σώμα δεν μπορεί να αλλάξει την κινητική του κατάσταση. Καταγράφονται δύο βασικοί λόγοι για τους ο οποιους ο Νεύτωνας διατύπωσε ξεχωριστά τον πρώτο νόμο. Πρώτον, την εποχή του Νεύτωνα ήταν κοινή πεποίθηση ότι η κίνηση απαιτεί μια κινητήρια δύναμη. Η δήλωση του πρώτου νόμου ως αξιώματος ήταν ένα πολύ σημαντικό βήμα, μια νεα αρχή για την κίνηση, εξαιρετικά σημαντική ώστε να είναι υποπερίπτωση ενός άλλου νόμου.

Δεύτερον, ο Νεύτωνας είχε επηρεαστεί σε σημαντικό βαθμό από τις *Principia* του Descartes, από τον Γαλιλαίο και το Huygens κάτι που φαίνεται και από το γεγονός ότι διαχωρίζει τον πρώτο από τον δεύτερο νόμο και από τη γλώσσα που χρησιμοποιεί στην εκφώνηση αυτού. Συγκεκριμένα, ο τρόπος που χειρίστηκε το πρόβλημα της αδράνειας ο Γαλιλαίος αποτέλεσε ένα εύφορο έδαφος για τον μεταγενέστερο πρώτο νόμο του Νεύτωνα (Αραμπατζής και συν, 1999, κεφ. 6). Παραθέτουμε το σχετικό απόσπασμα από το έργο του του Γαλιλαίου *Οι δύο νέες επιστήμες (1638):* «*Θα μπορούσαμε να σημειώσουμε πως η ταχύτητα που αποκτά ένα σώμα θα συνεχίζει να συντηρείται όσο δεν υπάρχουν αιτίες που δημιουργούν επιτάχυνση ή επιβράδυνση, κατάσταση που παρατηρείται μόνο σε οριζόντια επίπεδα. (...)Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η κίνηση σε οριζόντια επίπεδα [χωρίς τριβή] είναι αέναη».* Εξίσου καταλυτική ήταν και η επιρροή του Descartes ο οποίος στον πρώτο νόμο των *Philosophiae Principia (1644)* διατύπωσε ότι «*Το καθένα και όλα τα πράγματα, όσο μπορούν, πάντοτε συνεχίζουν στην ίδια κατάσταση˙ και έτσι ό,τι βρίσκεται σε κίνηση, πάντοτε συνεχίζει να κινείται...»* Ο Νεύτωνας στο διαχωρισμό των δύο νόμων ακολούθησε, επίσης, το παράδειγμα του Christiaan Huygens στο *Horologium Oscillatorium* το 1673, ένα έργο το οποίο ο Νεύτων θαύμαζε πολύ.

1.4 Μαθηματικές μέθοδοι στις *Principia*

Η μαθηματική ιδιοφυία του Νεύτωνα φανερώνεται σε όλη την έκταση του έργου του *Principia*, καθώς πραγματεύεται ένα συναρπαστικό εύρος διαφορετικών προβλημάτων χρησιμοποιώντας μια ποικιλία καινοτόμων τεχνικών (Smeenk &Schliesser, 2013, σ.148). Εντούτοις το μαθηματικό του ύφος μπορεί να είναι δυσνόητο για έναν σημερινό αναγνώστη και ίσως θα είχε υπάρξει εξίσου δυσνόητο για πολλούς αναγνώστες της γενιάς της πρώτης έκδοσης του έργου του. Ο Νεύτωνας υιοθετεί στις *Principia* ένα γεωμετρικό ύφος συλλογισμού και αποφεύγει πολλές από τις τότε πρόσφατες μαθηματικές του τεχνικές.

Τα δύο πιο σημαντικά βιβλία που παρουσιάζουν μαθηματικές θεωρίες της κίνησης πριν τις *Principia* ήταν το βιβλίο του Γαλιλαίου *Two New Sciences* (1638) και του Huygens το *Horologium Oscillatorium* (1673). Εξωτερικά, οι *Principia* φαίνεται να ακολουθούν τη μαθηματική προσέγγιση των δύο προαναφερθέντων βιβλίων˙ προχωρώντας από τα Αξιώματα σε μια σειρά αυστηρά αποδεδειγμένων Προτάσεων (Smith, 2002, σ. 192-194). Στην πραγματικότητα, όμως, οι μαθηματικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στα Βιβλία 1 και 2 διαφέρουν από εκείνες του Γαλιλαίου και του Huygens σε δύο καίρια σημεία. Η πρώτη διαφορά είναι λεπτή. Στις *Principia*, σχεδόν όλες οι αποδεδειγμενες προτάσεις των Βιβλίων 1 και 2 αποτυπώνονται με τη λογική μορφή «εάν- τότε», ενώ οι αποδεδειγμένες προτάσεις του Γαλιλαίου και του Huygens περιγράφονται καλύτερα από τη λογική μορφή «όταν- τότε». Πρωταρχικός στόχος τους είναι να εξαγάγουν παρατηρήσιμες συνέπειες από τα αξιώματά τους, οι οποίες μπορούν να υποστηρίξουν αυτά τα αξιώματα ή να διευκολύνουν πρακτικές εφαρμογές, όπως ο σχεδιασμός ρολογιών εκκρεμούς. Αντιθέτως, ο Νεύτωνας τοποθετεί τα «Αξιώματα ή Νόμους της κίνησης», στο ξεκίνημα των Βιβλίων 1 και 2 των *Principia*. Όπως ο ίδιος ο Νεύτωνας επισημαίνει στον Πρόλογο της πρώτης έκδοσης, στόχος των μαθηματικών θεωριών του είναι πρώτα να εγκαθιδρύσει τα μέσα (τις μεθόδους) για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τις ασκούμενες δυνάμεις στις κινήσεις και μετά να καταδείξει και άλλα φαινόμενα από αυτά τα συμπεράσματα.

Η δεύτερη κρίσιμη διαφορά ανάμεσα στις μαθηματικές μεθόδους του Νεύτωνα και των προγενέστερών του, την οποία καταγράφει ο G. Smith, αφορά τους αντικειμενικούς σκοπούς τους. Ο Γαλιλαίος διατύπωσε μια θεωρία για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και ο Huygens επέκτεινε αυτήν τη θεωρία σε καμπυλόγραμμες τροχιές και ομαλή κυκλική κίνηση. Αντίθετα, ο Νεύτωνας δεν διατυπώνει μια θεωρία κίνησης υπό την επίδραση μιας δύναμης αντίστροφου τετραγώνου, ούτε υπό την επίδραση της βαρύτητας. Αναπτύσσει μια γενική θεωρία κίνησης υπό την επίδραση δυνάμεων που ποικίλλουν ως προς τη σχέση τους με την απόσταση από το κέντρο (δύναμη που μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με τον κύβο της απόστασης, κτλ..).

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε το ερώτημα εάν ο Νεύτωνας χρησιμοποίησε στις *Principia* το «λογισμό» του (Smeenk&Schliesser, 2013, σ.148). Έχει θεωρηθεί ως το σημαντικότερο αβάσιμο ερώτημα από τον Whiteside (1991). Η γεωμετρική προσέγγιση επέτρεψε στο Νεύτωνα να χειριστεί προβλήματα που αφορούν μεταβολές της στιγμιαίας τιμής ποσοτήτων, τα οποία αντιμετωπίζονται σήμερα από τον απειροστικό λογισμό. Την εποχή εκείνη, όμως, η διαφορά ανάμεσα στις τεχνικές του Νεύτωνα και το λογισμό ήταν εν μέρει θέμα στυλιστικό και εν μέρει θέμα ουσίας. Σύμφωνα με τον Νεύτωνα, η εστίαση στα σχήματα ήταν καθοριστική πηγή βεβαιότητας για τη μαθηματική αναπαράσταση. Αντίθετα, ο Leibniz προτιμούσε την διαχείριση κατάλληλων συμβόλων, ισχυριζόμενος ότι έτσι η φαντασία απελευθερώνεται από την προσήλωση στα σχήματα. Οι δύο μέθοδοι διέφεραν ως προς το βαθμό γενικότητας και κάθε μια χρησιμοποιείτο σε διαφορετικά προβλήματα. Όπως ισχυρίζονται οι Smeenk και Schliesser, η διαφορά μεταξύ του λογισμού και του γεωμετρικού συλλογισμού του Νεύτωνα δεν ήταν τόσο έντονη όσο υπονοεί το ερώτημα και επιπλέον, τα *Principia* δε βασίζονται σε μία μόνο μέθοδο.

Ιδιαίτερη πρωτοτυπία των *Principia*, και ειδοποιός διαφορά τους με την αρχαία γεωμετρία, είναι ότι οι ποσότητες μελετώνται ως παραγόμενες μέσω συνεχούς κίνησης (Smeenk & Schliesser, 2013, σ.149-150). Επιπλέον, οι απειροστές ποσότητες μελετώνται σε σχέση με Όρια, η ύπαρξη και η μοναδικότητα των οποίων προκύπτουν από τη συνέχεια της κίνησης αυτής. Σε πολλά από τα Λήμματα της Ενότητας 1, εμφανίζεται η χρήση των Ορίων αντί της *μεθόδου των αδιαίρετων* την οποία θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Η γεωμετρική προσέγγιση του Νεύτωνα μπορεί να θυσιάζει τη γενικότητα αλλά, σε αντίθεση με το λογισμό του Leibniz, του επιτρέπει να ασχοληθεί πολύ πιο άμεσα με τις διαφορικές ιδιότητες των καμπυλών. Το τμήμα 1 φαινομενικά παρέχει το μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται για το υπόλοιπο Βιβλίο του, αλλά σε πολλά σημεία ο Νεύτωνας χρησιμοποιεί εξελιγμένα μαθηματικά που δεν ήταν κοινή γνώση. Μετά την πρώτη έκδοση των *Principia*, ο Νεύτωνας αύξησε τα μαθηματικά παραρτήματα προκειμένου να αποσαφηνίσει τις τεχνικές που χρησιμοποιούσε κατά τη διάρκεια του κειμένου.

Σύμφωνα με τον Guicciardini, στις *Principia* συναντάμε μια πληθώρα μαθηματικών μεθόδων που προέρχονται από διαφορετικές περιόδους της πνευματικής ανάπτυξης του Νεύτωνα. Παρόλα αυτά, μπορούμε να τις ταξινομήσουμε ευρέως σε τρεις ομάδες (Guicciardini, 1999, σ.95-98). Πρώτον, ορισμένες από τις τεχνικές παρουσίασης του Νέυτωνα βασίζονται κυρίως σε φυσικές, παρά σε μαθηματικές μεθόδους. Δεύτερον, οι περισσότερες αποδείξεις στις *Principia* βασίζονται σε γεωμετρικά όρια˙ στην αποκαλούμενη «method of first and ultimate ratios», την οποία ο Νεύτωνας ανέπτυξε στα τέλη του 1670 και αργότερα ονομάστηκε «συνθετική μέθοδος των ροών». Και τρίτον, συναντάμε την αναλυτική μέθοδο των ροών, την οποία ο Νεύτωνας είχε αναπτύξει χρόνια πριν την έκδοση των *Principia*. Με αυτήν εμφανίζονται άπειρες σειρές σε πολλά σημεία στις *Principia*˙ ο Νεύτωνας κατανοεί τις κινηματικές έννοιες με όρους δυναμικών σειρών. Μία ακόμη «αναλυτική» τεχνική, που εντάσσεται στις προηγούμενη ομάδα, είναι η μείωση των τετραγώνων (quadrature avoidance). Αυτή τεχνική αξιοποιεί τη γεωμετρία απειροελάχιστα μικρών ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα το απειροελάχιστο τόξο μιας τροχιάς και την απειροελάχιστη αύξηση της ταχύτητας που αποκτάται στο χρόνο που είναι απαραίτητος για τη διέλευση αυτού του τόξου.

Στο Βιβλίο 1, που αποτελείται από 14 τμήματα, ο Νεύτωνας ασχολείται με την «κίνηση των σωμάτων» σε έναν χώρο χωρίς αντίσταση (Guicciardini, 1999, σ.41-43). Στην ενότητα 1 παρουσιάζεται η «method of first and ultimate ratios», η οποία, ήδη, είχε αναπτυχθεί στη *Geometria curvilinea*, ως θεμέλιο για τις οριακές γεωμετρικες διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στις Principia. Στα τμήματα 2 και 3 ο Νεύτωνας θέτει τα τις βάσεις για τη διαχείριση του προβλήματος των κεντρικών (κεντρομόλων) δυνάμεων˙ με το πρόβλημα αυτό οι φυσικοί του 17ου αι. εννοούσαν το πρόβλημα προσδιορισμού του νόμου της κεντρομόλου δύναμης. Κατόπιν, στα τμήματα 2,3,6,7,8 και 9 διατυπώνει ένα μαθηματικό μοντέλο που περιέχει ένα σώμα που βρίσκεται σε καθορισμένη θέση P (Planet) και επιταχύνεται με μια κεντρομόλο δύναμη, με το κέντρο της δύναμης στο S (Sun). Ο Νεύτωνας, φυσικά, γνωρίζει ότι αυτό το απλοποιημένο μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί εντελώς προσεγγιστικά στην περίπτωση του πλανητικού συστήματος, καθώς περιέχει μόνο δύο σώματα. Μόνο στο τμήμα 11, εξετάζει την περίπτωση δύο ή περισσότερων σωμάτων τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και στα τμήματα 12 και 13 ασχολείται με το σχήμα των σωμάτων και τις συνέπειες της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης στις κινήσεις τους.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα τμήματα 4 και 5 διαφοροποιούνται σημαντικά από τις υπόλοιπες *Principia* καθώς δεν παίζουν σημαντικό ρόλο στη μαθηματική φιλοσοφία του Νεύτωνα. Σχετίζονται με προβλήματα καθαρής γεωμετρίας με τα οποία ασχολήθηκε ο Νεύτωνας τη δεκαετία του 1670 και βρήκε, κυρίως, στις συλλογές του Πάππου.

Ο Νεύτωνας ασχολείται με τις δυναμικές εφαρμογές του νόμου των εμβαδών του Kepler. Αποδεικνύει ότι μια δύναμη είναι κεντρική αν και μόνο αν ισχύει ο νόμος των εμβαδών. Η παραπάνω απόδειξη σχετικά με το νόμο του Kepler αποτελεί μια από τις σημαντικότερες επιστημονικές ιδέες του Νεύτωνα.

Το Βιβλίο 2 ασχολείται με την κίνηση των σωμάτων σε μέσα που προβάλλουν αντίσταση (Guicciardini, 1999, σ.81). Περιέχει πολλές σελίδες αφιερωμένες σε αποτελέσματα πειμαμάτων και απορρίπτει τη θεωρία του στροβιλισμού των πλανητών που είχε αναπτύξει ο Descartes. Ο Νεύτωνας δεν χρησιμοποιεί προηγμένες μαθηματικές μεθόδους σε αυτό το βιβλίο˙ είναι περισσότερο πειραματικό παρά μαθηματικό βιβλίο. Επιπλέον, σε σύγκριση με τις μεθόδους του πρώτου βιβλίου, αυτές θεωρήθηκαν, κατά τη διάρκεια της ζωής του, λιγότερο ικανοποιητικές και σε μερικες περιπτώσεις λανθασμένες.

Το Βιβλίο 3 δεν έχει το ίδιο μαθηματικό επίπεδο με τα δύο πρώτα. Ο Guicciardini επισημαίνει την αναφορά του Cohen ότι στο τρίτο βιβλίο εγκαταλείπεται η καθαρή μελέτη των «μαθηματικών κατασκευών» και εφαρμόζονται ορισμένα μαθηματικά αποτελέσματα στον πραγματικό κόσμο (Guicciardini, 2002, σ.90-95). Στο «Σύστημα του Κόσμου» αναπτύσσεται η θεωρία της παγκόσμιας βαρύτητας, η οποία προσέλκυσε το ενδιαφέρον πολλών φιλοσόφων και αστρονόμων. Αντιθέτως, οι μαθηματικοί της εποχής έδωσαν μεγαλύτερη προσοχή στα πρώτα δύο βιβλία όπου είχαν επιτευχθεί τα περισσότερα μαθηματικά αποτελέσματα. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι στο «Σύστημα του Κόσμου» ο Νεύτωνας παραλείπει να ολοκληρώσει τις αποδείξεις, οι οποίες μόνο σκιαγραφούνται. Ακόμη και ο Johann Bernoulli, ένας από τους καλύτερους μαθηματικούς της εποχής, στην αλληλογραφία του με τον Maupertuis παραδέχτηκε ότι βρήκε ορισμένα τμήματα του τρίτου βιβλίου σκοτεινά και αδιαπέραστα (Guicciardini, 2002, σ. 91).

Το τρίτο βιβλίο, λοιπόν, στηρίχθηκε κατά κύριο λόγο σε προηγούμενα μαθηματικά αποτελέσματα. Ανέπτυξε σε περιορισμένο βαθμό νέα μαθηματικά για να πραγματευθεί με τους κομήτες, το σχήμα των πλανητών, την κίνηση της Σελήνης και τις παλίρροιες. Από μια σύντομη επισκόπηση, προκύπτει ότι ορισμένα από τα πλέον σημαντικά θέματα στη βαρύτητα μαθηματικοποιήθηκαν από τον Νεύτωνα χάρη στη φυσική του διαίσθηση και στα γεωμετρικά και αναλυτικά του εργαλεία. Ο υπολογισμός της καμπυλότητας, των δυναμικών σειρών και η ολοκλήρωση αναπτύχθηκαν σταδιακά. Είναι γεγονός ότι ο Νεύτωνας χρησιμοποίησε τα εργαλεία του κατά βούληση, άλλοτε έκανε χρήση γεωμετρικών μεθόδων και άλλοτε αναλυτικών. Η μόνη σταθερή στρατηγική του ήταν να μην καταγράψει αναλυτικά τις αποδείξεις των προτάσεών του. Ως εκ τούτου, οι προτάσεις του στο βιβλίο 3 θεωρήθηκαν από τους αναγνώστες του αμφισβητήσιμες και συγκεχυμένες. Μόνο από τα τέλη της δεκαετίας του 1730, μετά τη δημιουργία της «νεότερης ανάλυσης», που περιελάμβανε τον λογισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, τον λογισμό των μερικών παραγώγων, τη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων και τον λογισμό των μεταβολών, και χάρη σε μαθηματικούς όπως ο Euler, ο Clairaut και ο D΄Alembert το βιβλίο 3 έπαψε να αποτελεί αντικείμενο απορίας και έγινε αφετηρία για περαιτέρω έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΤΑ ΤΕΛΗ ΤΟΥ 17ου ΕΩΣ ΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ 18ΟΥ ΑΙΩΝΑ

2.1 Η πρόσληψη των *Principia* στη Γαλλία

Το έργο του Νεύτωνα *Principia*, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, δημοσιεύεται το 1687. Ένα χρόνο αργότερα, δημοσιεύτεται μια ανώνυμη κριτική των *Principia* στο φημισμένο περιοδικό *Journal des savants.* Ο συγγραφέας αυτής της κριτικής δεν είναι γνωστός˙ είναι σχεδόν βέβαιο, όμως, ότι ήταν μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας ή κάποιος από αυτόν τον κύκλο. Πρόκειται για μια εκπληκτικά σύντομη κριτική, περίπου 300 λέξεων, η οποία, όμως, συμπυκνώνει την ουσιαστική σχέση μεταξύ της πραγματείας και της νέας μηχανικής που δημιουργείται αργότερα από τον Varignon. Ο κριτικός εγκωμιάζει, αρχικά, το έργο του Νεύτωνα δίνοντας συγκεκριμένα παραδείγματα:

> Το πιο τέλειο έργο μηχανικής που μπορούμε να φανταστούμε...Δεν είναι δυνατόν να δοθούν ακριβέστερες ή τελειότερες αποδείξεις σχετικά με το βάρος, την ελαφρότητα, την ελαστικότητα, την αντοχή των ρευστών σωμάτων ή τις ελκτικές και απωστικές δυνάμεις που είναι το βασικό θεμέλιο της *φυσικής* από αυτές που δίνει στα πρώτα δύο βιβλία (Shank, 2018, σ.117).

Ωστόσο, ο κριτικός συνέχισε αμέσως μετά το εγκώμιό του επισημαίνοντας αδυναμίες της πραγματείας:

> Θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι αυτοί δεν είναι τίποτε άλλο από μηχανικοί ορισμοί, αφού ο συγγραφέας (όπως αναγνωρίζει και ο ίδιος στο τέλος της σελίδας 4 και στην αρχή της σελίδας 5) δεν έχει αναλογιστεί τις αρχές τους ως *φυσικός*, αλλά μόνο ως απλός *γεωμέτρης*. Ομολογεί το ίδιο στην αρχή του τρίτου βιβλίου, όπου προσπαθεί, ωστόσο, να εξηγήσει το σύστημα του κόσμου. Εδώ, εντούτοις, καταφεύγει σε υποθέσεις που είναι κατά το πλείστον αυθαίρετες και οι οποίες χρησιμεύουν μόνο στη θεμελίωση μιας πραγματείας καθαρής μηχανικής.

Η συνέχεια αυτής της ανώνυμης κριτικής βρίσκει λανθασμένη την εξήγηση του Νεύτωνα για τις παλίρροιες «που βασίζονται στην αρχή ότι όλοι οι πλανήτες έλκονται αμοιβαία ο ένας προς τον άλλον» αναφέροντας συγκεκριμένα ότι:

> Το επιχείρημά του είναι ακαταμάχητο σύμφωνα με την υπόθεσή του. Αλλά επειδή η ίδια η υπόθεση είναι αυθαίρετη και δεν έχει αποδειχθεί, η απόδειξη που εξαρτάται από αυτήν αποδεικνύεται μόνο μηχανικά. ….. Για να μπορέσει να κάνει το κατά το δυνατόν πιο τέλειο έργο, ο Νεύτωνας χρειάζεται μόνο να μας δώσει ένα έργο φυσικής τόσο ακριβές όσο και το έργο του στην *μηχανική.* Θα το επιτύχει αυτό όταν αντικαταστήσει τις κινήσεις που έχει υποθέσει με τις αληθινές κινήσεις.

Το πιο σημαντικό στοιχείο αυτής της κριτικής είναι ότι βλέπει τα *Principia* πρώτα και κύρια σαν πραγματεία στη μηχανική. Για να κατανοήσουμε αυτό το στοιχείο πρέπει να γνωρίζουμε το πλαίσιο της εποχής (Shank, 2018, σ.118-119). Όπως εξηγεί ο Shank, στη δεκαετία του 1650 και του ΄60 τα φυσικομαθηματικά ήταν ένα ακμάζον πεδίο με μια τάση προς μια ολοένα και πιο έντονη μαθηματικοποίηση, γεγονός που ξεκίνησε από την γεωμετρικοποίηση της επιστήμης της κίνησης από τον Galileo και συνεχίστηκε με την προσπάθεια του Descartes να καθιερώσει μαθηματικούς νόμους της κίνησης και με το έργο του Huygens για την κίνηση του εκκρεμούς. Ο κριτικός του Journal des Savants αναγνώρισε αυτήν την καινοτομία στις *Principia* και έγραψε αρκετά επαινετικά σχόλια για τη συμβολή τους στη μηχανική. Παρόλα αυτά, οι *Principia* υποστήριζαν ότι προσφέρουν και μαθηματικές αρχές της *φυσικής* φιλοσοφίας. Αυτό ήταν μια προκλητική δήλωση στο πλαίσιο των τότε αποδεκτών επιστημολογικών κανόνων, καθώς η μηχανική αφορούσε την πραγματική φύση και κίνηση των σωμάτων. Τα μαθηματικά μπορύσαν μόνο περιγράψουν τις κινήσεις και όχι να αντικαταστήσουν τις αιτιακές, φυσικές εξηγήσεις με μαθηματικούς υπολογισμούς. Η παραδοσιακή αυτή διάκριση μεταξύ μηχανικής και φυσικής φιλοσοφίας είναι κεντρικό ζήτημα στην κριτική του *Journal des Savants*. Ως εκ τούτου, ανακηρύσσει τη *μηχανική* των *Principia* λαμπρή επιτυχία, ενώ η *φυσική* τους θεωρείται αποτυχία. Ο γάλλος κριτικός, λοιπόν, προσφέρει το 1688 έναν ακριβοδίκαιο απολογισμό του έργου του Νεύτωνα. Ακόμα και αν πρόκειται για μια ιδιαίτερη εκτίμηση.

Προκειμένου να κατανοήσουμε τις ιδιαιτερότητες της πρώτης κριτικής,σύμφωνα με τον Shank, πρέπει να ανατρέξουμε σε μια άλλη, σύγχρονη των *Principia*, κριτική που γράφτηκε από τον Edmund Halley και δημοσιεύτηκε στα Πεπραγμένα της Βασιλικής Εταιρίας του Λονδίνου (Shank, 2018, σ.120-121). Κεντρική διαφορά μεταξύ των δύο είναι το πώς η κάθε κριτική αντιμετωπίζει το Βιβλίο 2 των *Principia*. Κατά κοινή ομολογία, τα Βιβλία I και II προσφέρουν γεωμετρικές αποδείξεις της μαθηματικής συμπεριφοράς των κινούμενων σωμάτων και το Βιβλίο III παρουσιάζει μια σειρά εμπειρικών και πειραματικών αποτελεσμάτων που θεωρητικά απορρέουν από τα δύο πρώτα βιβλία. Ο γάλλος κριτικός, λοιπόν, μιλάει για ξεχωριστά έργα μηχανικής και φυσικής και θεωρεί επιστημονικό λάθος τη γέφυρα μεταξύ τους. Ο Halley, ωστόσο, εξετάζει κάθε βιβλίο ξεχωριστά, οπότε οδηγείται στην παρακάτω αξιολόγηση για το Βιβλίο II:

> Το τελευταίο τμήμα του δεύτερου βιβλίου αναφέρεται στην κυκλική κίνηση των ρευστών, όπου εξετάζεται η φύση των στροβιλοειδών κινήσεων και από εκεί το καρτεσιανό δόγμα των στροβίλων της ουράνιας ύλης που φέρουν τους πλανήτες γύρω από τον ήλιο αποδεικνύεται εντελώς αδύνατο.

Ένα χρόνο αργότερα, ο John Locke δημοσίευσε μια παρόμοια τοποθέτηση στο πρωτοποριακό περιοδικό *Bibliotheque universelle et historique* (Shank, 2018, σ.122). Στην τοποθέτηση αυτή, συγκεκριμένα, αναφέρεται ότι «ο συγγραφέας καταλήγει.... ότι η υπόθεση των στροβίλων[...] δεν εξυπηρετεί καθόλου για να εξηγήσει τις κινήσεις των ουράνιων σωμάτων». Στην ουσία οι Halley και Locke επαναλαμβάνουν τα λόγια του Νεύτωνα στις τελευταίες προτάσεις του βιβλίου II «η υπόθεση των στροβίλων δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να συμφιλιωθεί με τα αστρονομικά φαινόμενα και συσκοτίζει παρά αποσαφηνίζει τις ουράνιες κινήσεις». Ο Shank τονίζει ότι οι παραπάνω κριτικές σχετικά με το Βιβλίο 2 των *Principia* διαφέρουν ριζικά από αυτήν του γάλλου κριτικού, καθώς θεωρούν ότι ο Νεύτωνας είχε έναν συγκεκριμένο στόχο κατά τη σύνταξη της πραγματείας του: το σύστημα της ουράνιας και της επίγειας μηχανικής που αναπτύχθηκε από τον Descartes τη δεκαετία του 1640. Θεωρούν, δηλαδή, ότι οι *Principia* αποσκοπούν στο να ΄΄εκθρονίσουν΄΄ την επικρατούσα καρτεσιανή κατανόηση του Κόσμου και να την αντικαταστήσουν με μια νεα επιστημονικά τεκμηριωμένη θεωρία.

Αναλυτικότερα, όπως αναφέρει ο Shank, στην καρτεσιανή θεωρία το σύμπαν αποτελείται από στροβιλιζόμενους ωκεανούς ρευστής ύλης και οι πλανήτες κινούνται στις τροχιές τους ΄΄κολυμπώντας΄΄ σε στροβιλώδη ρεύματα που παράγονται από αυτήν την ρευστή ύλη (Shank, 2018,σ.122). Το επίγειο βάρος παράγεται από τη φυγόκεντρη δύναμη που ασκούν αυτοί οι ρευστοί στρόβιλοι και όχι από την ελκτική δύναμη της βαρύτητας που πρότεινε ο Νεύτωνας. Ως εκ τούτου, το βιβλίο II στοχεύει στην υπονόμευση της καρτεσιανής φυσικής και συχνά αναφέρεται ως το αντι-Καρτεσιανό τμήμα των *Principia*. Ωστόσο, δεδομένου ότι είναι έργο γεωμετρικής μηχανικής, ο γάλλος κριτικός δεν το αποδέχεται ως βιβλίο φυσικής φιλοσοφίας και ούτε το εκλαμβάνει ως ΄΄αντίπαλο΄΄ της καρτεσιανής θεωρίας. Γενικότερα για τον επιστημονικό στοχαστή του 17^{ου} αιώνα, το να αμφισβητήσει κάποιος την καρτεσιανή μηχανική απαιτούσε αυστηρές φυσικές φιλοσοφικές αποδείξεις, ανεξάρτητα από το πόσο λαμπρές ήταν οι μαθηματικές του αποδείξεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα μαθηματικά δεν είχαν επιστημολογικό έρεισμα για να αμφισβητήσουν αυστηρά αποδεδειγμένες φυσικές φιλοσοφικές θεωρίες. Δηλαδή, για τον γάλλο κριτικό, η αξιολόγηση του Νεύτωνα για την καρτεσιανή φυσική ήταν χτισμένη πάνω σε επιστημολογική άμμο (Shank, 2018, σ.124). Σε μια επιστολή, μάλιστα, προς τον Marin Mersenne το 1638, ο Καρτέσιος γράφει για τη διάκριση αυτή αναφερόμενος στη μηχανική του Γαλιλαίου: «χωρίς να έχει εξετάσει τις πρώτες αιτίες της φύσης, έχει αναζητήσει μόνο τις εξηγήσεις μερικών συγκεκριμένων φαινομένων και έχει δημιουργήσει έτσι χωρίς θεμέλια» (Shank, 2018, σ.119). Αντίθετα, η μηχανική και η φυσική του ίδιου του Ντεκάρτ ήταν συμβατές με την άποψη αυτή, δεδομένου ότι δεν εφαρμόζεται η μηχανική στη φυσική φιλοσοφία αλλά αναφέρονται τα αίτια και οι πρώτες αρχές που διέπουν τις φυσικές αλλαγές.

Από την άλλη πλευρά, ο Halley υποδέχτηκε την πραγματεία ακριβώς με τον τρόπο που την παρουσίασε ο Νεύτωνας (Shank, 2018, σ.124). Θεώρησε, δηλαδή, το έργο ως πρόκληση για την επικρατούσα κοσμολογική θεωρία του Καρτέσιου και ως λόγο επανεξέτασης της επιστημολογικής σχέσης μεταξύ μαθηματικής και φυσικής εξήγησης.Από αυτήν την άποψη οι *Principia* δεν ήταν τίποτα λιγότερο από μια μνημειώδη αναθεώρηση των ίδιων των θεμελίων της φυσικής φιλοσοφίας. Η άποψη του Halley γίνεται η επικρατούσα άποψη μέχρι τη δεκαετία του 1720, οπότε και ξεκινά μια εκτεταμένη συζήτηση για τα θεμελιώδη στοιχεία της φυσικής φιλοσοφίας. Οι *Principia* θεωρήθηκαν ένα έργο το οποίο επικεντρώνεται στη δύναμη της παγκόσμιας έλξης διατυπώνοντας τον σχετικό νόμο: τα σώματα αλληλεπριδρούν με μια ελκτική δύναμη που είναι ανάλογη των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης. Ο Νεύτωνας φαίνεται να έχει δείξει τα λάθη της ριζικά διαφορετικής κοσμολογίας του Descartes, οπότε όπως επισημαίνει ο Shank, φυσική συνέπεια της υποδοχής των *Principia* ήταν η μάχη μεταξύ ΄΄Νευτωνιστών΄΄ και ΄΄Καρτεσιανών΄΄ σχετικά τα θεμέλεια της φυσικής φιλοσοφίας. Ο Πιερ Μπρουνέ, μάλιστα, ήταν ένθερμος υποστηρικτής της παραπάνω ερμηνείας ισχυριζόμενος ότι «οι θεωρίες του Νεύτωνα αντιμετώπισαν κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αι. ιδιαίτερα βίαιη αντίσταση στη Γαλλία επειδή συγκρούστηκαν εκεί με καρτεσιανά δόγματα που ήταν ήδη σταθερά εδραιωμένα» (Shank, 2018, σ.125).

Δεν μπορούμε, όμως, να βρούμε ενδείξεις για τη διαμάχη μεταξύ ΄΄Νευτωνιστών΄΄και ΄΄Καρτεσιανών΄΄ αμέσως μετά την πρώτη έκδοση των *Principia* και ούτε ο γάλλος κριτικός δίνει τέτοια στοιχεία το 1688. Είναι, πράγματι, δύσκολο για τους ιστορικούς της επιστήμης να βρούν στοιχεία μιας μεγάλης διαμάχης πριν το 1710. Η απουσία τέτοιων ενδείξεων οδήγησε μερικές φορές τους ιστορικούς να ισχυριστούν ότι το έργο του Νεύτωνα αρχικά αγνοήθηκε εντελώς.Μια τέτοια εκτίμηση, όμως, διαψεύδεται και από τον γάλλο κριτικό μας και από τον Pierre Varignon ο οποίος διαβάζει εντατικά και χρησιμοποιεί το έργο του Νεύτωνα χωρίς να δηλώνει ΄΄Νευτωνιστής΄΄ ή ΄΄Καρτεσιανός΄΄(Shank, 2018, σ.126). Ο Varignon δεν είδε στα *Principia* μια νεα πλανητική θεωρία ή ένα έργο αντι-καρτεσιανής φυσικής. Ως γάλλος μαθηματικός και μηχανικός αναθρεμένος στο καλούπι της γαλλικής παράδοσης είδε μια λαμπρή πραγματεία στη μηχανική που είχε παραπλανητικές αξιώσεις φυσικής φιλοσοφίας. Δεν απέρριψε τις *Principia* συνολικά, αλλά αντιθέτως επικεντρώθηκε στη μαθηματική μηχανική που περιείχαν τα Βιβλία Ι και ΙΙ.

Εν κατακλείδι, ο κριτικός του *Journal des Savants* αναδεικνύει το πλαίσιο της πρόσληψης των *Principia* στο οποιο διαχωρίζεται ο Νεύτωνας ως λαμπρός μηχανικός από το Νεύτωνα ως φυσικό φιλόσοφο. Μέχρι τη δεκαετία του 1720 κανένας στη Γαλλία δεν ενστερνίστηκε την άποψη του Halley σχετικά με την ενότητα και των τριών βιβλίων. Μόνο αργότερα εξετάζονται πλήρως οι συνέπειες της διμερούς μαθηματικοφυσικής δομής των *Principia*˙ χωρίς αυτό να σημαίνει ότι πριν το 1720 η πραγματεία δεν άσκησε σημαντική επιρροή ακόμη και αν το έκανε με μερικό ή έμμεσο τρόπο.

2.2 Γεωμετρία ή Ανάλυση: Μεταξύ παράδοσης και καινοτομίας

Η επιλογή του Νεύτωνα να παρουσιάσει τις *Principia* με τον κλασικό γεωμετρικό τρόπο και όχι με τον αναλυτικό λογισμό, έχει αποτελέσει σημείο ενδιαφέροντος και συζήτησης των σύγχρονών του επιστημόνων αλλά και των μεταγενέστερων. Η επιλογή αυτή συνοψίζεται σε δύο κύριους παράγοντες: Πρώτον, ο Νεύτωνας σεβόταν τα αρχαία πρότυπα και ήταν παραδοσιακός σε σχέση με τα νεότερα μαθηματικά ρεύματα της εποχής. Θεωρούσε τη γεωμετρία ως την υψηλότερη μορφή μαθηματικών εξαιτίας της άψογης αποδεικτικής της ικανότητας. Και δεύτερον, ο λογισμός το 1687 αποτελούσε μια νέα, υπό ανάπτυξη, μαθηματική μέθοδο την οποία λίγοι αναγνώστες των *Principia* μπορούσαν να γνωρίζουν και να χρησιμοποιήσουν, γεγονός που καθιστούσε τη γεωμετρική παρουσίαση των *Principia* καλύτερη επιλογή.

Σε αυτό το σημείο, φαίνεται χρήσιμη η διευκρίνηση του Shank σχετικά με τον όρο ανάλυση, καθώς επισημαίνει ότι ο όρος αφορά δύο έννοιες (Shank, 2018, σ.129). Η πρώτη έννοια της ανάλυσης σχετίζεται με την αλγεβρική αντί για γεωμετρική προσέγγιση επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων με τη χρήση αριθμών και εξισώσεων αντί εμβαδών και σχημάτων. Μια δεύτερη έννοια της ανάλυσης έχει επιστημολογικό χαρακτήρα και αναφέρεται στο ότι η γεωμετρία έχει σχέση με τη συνθετική μέθοδο ή με τον αποδεικτικό τρόπο εξαγωγής συμπερασμάτων από αδιαμφισβήτητες πρώτες αρχές. Υπό αυτήν την έννοια, η ανάλυση είναι το επιστημολογικό αντίθετο της γεωμετρικής σύνθεσης˙ αρχίζει με το να τίθεται το συμπέρασμα που πρεπει να αποδειχτεί και έπειτα επαγωγικά εντοπίζονται οι γενικές αρχές που επικυρώνουν αυτό το συμπέρασμα. Δεδομένου ότι η μέθοδος ανάλυσης λειτουργεί προς τα πίσω, δηλαδή από το συμπέρασμα προς τις βασικές αρχές, ονομάζεται συχνά μέθοδος ανακάλυψης, σε αντίθεση με τη συνθετική μέθοδο απόδειξης. Οι δύο μέθοδοι θεωρήθηκαν συμπληρωματικές οπότε ήταν συνηθισμένο στις επιστημολογικές συζητήσεις του 17ου αιώνα να αντιμετωπίζονται ως ζεύγος.

Όπως σημειώνει ο Shank, ο Νεύτωνας δεν ήταν εχθρός της ανάλυσης αρχικά, και τη χρησιμοποίησε ως μέθοδο στη δουλειά του με καρποφόρα αποτελέσματα. Η απόφαση, παρόλα αυτά, του Νεύτωνα να μην χρησιμοποιήσει το λογισμό του στα *Principia* και η επιλογή του να αναπτύξει αντ' αυτού μια ριζικά προσωπική μορφή συνθετικής γεωμετρίας, δείχνει τη σχέση του με τα νέα αναλυτικά μαθηματικά της εποχής. Συγκεκριμένα, όπως επισημαίνει ο Guicciardini ότι ο Νεύτωνας το 1670 αποστασιοποιείται απο τη «Νέα Ανάλυση» και ψάχνει στις συλλογές του Πάππου για τη χαμένη γεωμετρική «Ανάλυση των Αρχαίων». Κατά τη δεκαετία του 1690, μάλιστα, δημοσιεύει ορισμένα σχόλια αναφερόμενος στο ότι η φυσική του φιλοσοφία στις *Principia* είναι μια ΄΄επανεύρεση'' της αρχαίας σοφίας. Συγκεκριμένα γράφει για τον ατομισμό:

> Ότι η ύλη αποτελείται από άτομα ήταν μια πολύ αρχαία άποψη. Αυτή ήταν η διδασκαλία ενός πλήθους φιλοσόφων πριν τον Αριστοτέλη, όπως ο Επίκουρος, ο Δημόκριτος, ο Έκφαντος, ο Εμπεδοκλής, ο Ηρακλείδης, ο Ασκληπιάδης, ο Διόδωρος, ο Μητρόδωρος ο Χίος, ο Πυθαγόρας... Επειδή πιστεύω ότι η ίδια άποψη βρίσκεται στη μυστική φιλοσοφία που διέρρευσε στους Έλληνες από την Αίγυπτο και τη Φοινίκη, δεδομένου ότι τα άτομα ορισμένες αναφέρονται από τους μυστικιστές ως μονάδες (Guicciardrini, 1999, σ.101).

Γεγονός είναι, όπως σημειώνει ο Guicciardrini, ότι τα λεγόμενα «κλασικά σχόλια» δεν δημοσιεύτηκαν στην δεύτερη έκδοση των *Principia*. Παρόλα αυτά η ιδέα της επανεύρεσης μιας αρχαίας σοφίας ήταν βαθιά ριζωμένη στο μυαλό του Νεύτωνα και εμφανίζεται ήδη στις πρωτες γράμμες του βιβλίου του *De mundi systemate*, που γράφτηκε το 1686. Σε αυτό το έργο ο Νεύτωνας υποστηρίζει ότι η Κοπερνίκεια θεωρία διδάσκόταν «από τον Φιλόλαο, τον Αρίσταρχο, τον Πλάτωνα, ...από ολόκληρη τη σχολή των Πυθαγορείων, ... από τον Αναξίμανδρο, και τον Numa Pompilius» (Guicciardini, 1999, σ.101). Και ενώ ο Νεύτωνας επισημαίνει ότι δεν είναι σαφές το πώς οι αρχαίοι εξηγούσαν τις κινησεις των πλανητών στο κενό, σε ένα πρόλογο που προοριζόταν για την δεύτερη έκδοση των *Principia* αποδίδει στους Χαλδαίους, στους Αρχαίους, στους Πυθαγόρειους, στους Έλληνες και τους Ρωμαίους μια γνώση της παγκόσμιας βαρύτητας. Ο Νεύτωνας δήλωσε, μάλιστα, ότι το ίδιο του το έργο *Principia* ήταν μια επανεύρεση των αρχαίων γεωμετρικών μεθόδων.

Πράγματι, τον δέκατο έβδομο αιώνα είναι βαθιά ριζωμένη η άποψη πως η φυσική φιλοσοφία πρέπει να είναι διατυπωμένη με γεωμετρικό τρόπο, όχι μόνο στο μυαλό του Νεύτωνα αλλά και σε ολόκληρη την επιστημονική κοινότητα (Guicciardini, 1999, σ.104). Και επιπλέον, η γεωμετρία αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμη για τη μελέτη της κινηματικής, καθώς επιτρέπει τη μοντελοποίηση βασικών κινηματικών μεγεθών όπως η ταχύτητα και η μετατόπιση. Για τον Νεύτωνα, η ανάλυση ήταν απλά ένα εργαλείο ανακάλυψης και μια χρήσιμη πηγή αποτελεσμάτων στην ιδιωτική μαθηματική του έρευνα (Shank, 2018, σ.130). Δεν θεωρούσε, όμως, τα αποτελέσματα τόσο σίγουρα όσο τα αποτελέσματα που προσέφερε η συνθετική γεωμετρία και θεωρούσε απαράδεκτο να παρουσιάζει αναλυτικές λύσεις ως αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις. Ως εκ τούτου, όταν παρουσίασε την πραγματεία του δημόσια χρησιμοποίησε το καθιερωμένο επιστημονικό πρότυπο της συνθετικής γεωμετρίας.

Ο δεύτερος, κύριος, λόγος για τη γεωμετρική δομή των *Principia* είναι ότι γράφτηκαν για να διαβαστούν από σύγχρονούς του. Ωστόσο, μεταξύ της πρώτης (1687) και της δεύτερης έκδοσης (1713) των *Principia* συντελέστηκε μια σημαντική αλλαγή: η μέθοδος των ροών και σειρών καθώς και ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός από σχεδόν αδημοσίευτες ανακαλύψεις το 17ο αιώνα έγιναν ευρέως γνωστές στους κύκλους των μαθηματικών την πρώτη δεκαετία του 18ου αιώνα (Guicciardini, 1999, σ.106). Επομένως, οι αναγνώστες στους οποίους απευθυνόταν το magnus opus του Νεύτωνα είχαν αποκτήσει νέες μαθηματικές γνώσεις. Το 1713 υπήρχαν πολλά βιβλία και «σχολές» όπου μπορούσε κάποιος να διδαχθεί τη νέα ανάλυση, ενώ το 1687 μόνο το *Nova Methodus* και η *De geometria recondita* του Leibniz ήταν διαθέσιμα σε έντυπη μορφή.

Σημαντική είναι η εξής παρατήρηση του Shank: το πρόβλημα με τη στάση του Νεύτωνα ήταν ότι, υιοθετώντας έναν αυστηρή παραδοσιακή εκδοχή της μαθηματικής μεθόδου, απέκλειε μερικά από πιο πρωτοποριακά και αποτελεσματικά μαθηματικά που αναπτύσσονταν την εποχή του (Shank, 2018, σ.130). Οι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν την ανάλυση διότι τους έδινε μια νέα και ισχυρή ικανότητα να απλοποιούν πολύπλοκα προβλήματα και να εξοικονομούν μαθηματικούς συλλογισμούς. Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η αμοιβαία σχέση που υπήρχε μεταξύ ανάλυσης και σύνθεσης επέτρεπε πολύ συχνά την αυστηρή απόδειξη αναλυτικών αποτελεσμάτων εκ των υστέρων, οπότε ήταν σύνηθες να εμπιστεύονται απλώς τα αποτελέσματα της ανάλυσης από μόνα τους και να αντιμετωπίζουν τις αναλυτικές (αλγεβρικές) προσεγγίσεις ως ισοδύναμη μέθοδο. Ο Νεύτωνας συνειδητοποιεί στα τέλη της δεκαετίας του 1710 ότι οι ικανότητες των αναγνωστών του έχουν αλλάξει, γράφοντας ότι:

> Για τους μαθηματικούς του παρόντος αιώνα, ωστόσο, που είναι σχεδόν αποκλειστικά εξοικειωμένοι με την άλγεβρα, το συνθετικό στύλ των *Principia* είναι λιγότερο ευχάριστο, είτε επειδή μπορεί να φαίνεται υπερβολικά σχοινοτενές και παρόμοιο με τη μέθοδο των αρχαίων, είτε επειδή είναι λιγότερο αποκαλυπτικό όσον αφορά τον τρόπο της ανακάλυψης. Και σίγουρα θα μπορούσα να έχω γράψει αναλυτικά αυτά που ανακάλυψα αναλυτικά με λιγότερη προσπάθεια από αυτήν που έκανα προκειμένου να τις συνθέσω. Έγραφα για τους φιλοσόφους που ήταν εξοικειωμένοι με τα στοιχεία της γεωμετρίας, και έγραψα θέτοντας γεωμετρικές βάσεις για τη φυσική επιστήμη. Και τα γεωμετρικά ευρήματα που δεν αφορούσαν την αστρονομία και τη φυσική είτε τα προσπέρασα εντελώς είτε ασχολήθηκα μαζί τους ελάχιστα (Guicciardini, 1999, σ.107).

Κατά τη διάρκεια της διαμάχης μεταξύ του Νεύτωνα και του Leibniz σχετικά με την προτεραιότητα στην ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού, ο Νεύτωνας έπεσε σε μια διπλή παγίδα σύμφωνα με τον Guicciardini. Από τη μια πλευρά, θέλοντας να χρησιμοποιήσει τις *Principia* ως απόδειξη της γνώσης του για το λογισμό πριν τη δημοσίευση του *Nova Methodus* του Leibniz, δήλωσε ότι οι προτάσεις στις *Principia* έχουν βρεθεί μέσω της «Νέας Ανάλυσης», ακόμη και αν δημοσιεύτηκαν με διαφορετική «συνθετική» μορφή. Από την άλλη πλευρά, δεν ήθελε να θεωρηθούν οι συνθετικές μέθοδοι των *Principia* ως ισοδύναμες με την αναλυτική μέθοδο των ροών. Για τον Νεύτωνα, η επιλογή μεταξύ γεωμετρίας ή ανάλυσης δεν ήταν απλώς θέμα παρουσίασης ή γλώσσας αλλά καθορίστηκε από την πεποίθηση του ότι ο γεωμετρικός τρόπος ήταν ανώτερος από τον λογισμό τον οποίο υποστήριζε σθεναρά ο Leibniz. Γεγονός το οποίο φαίνεται και από τα λεγόμενα του Shank ο οποίος αναφέρει ότι ο έργο του Leibniz δημοσιεύεται το 1684 στο *Acta Eruditorum* οπότε καθίσταται ο πρώτος συγγραφέας που δημοσίευσε τους βασικούς κανόνες του λογισμού, παρότι υπάρχουν χειρόγραφα που αποδεικνύουν ότι ο Νεύτωνας είχε ήδη στην κατοχή του τον ίδιο το λογισμό πριν από αυτή την ημερομηνία (Shank, 2018, σ.132-133). Ακόμα κι αν ο Νεύτωνας επιδοκίμαζε την αλγοριθμική τυποποίηση της μεθόδου που προσέφερε ο Leibniz (στην πραγματικότητα την θεωρούσε αποτρόπαια) ήταν μία μέθοδος έντονα αναχρονιστική σε σχέση με το μαθηματικό κλίμα που επικρατούσε στο τέλος του 17ου αιώνα. Για τον Νεύτωνα, το να δημοσιεύσει με αυτήν την μέθοδο ήταν σαν να δημοσιεύει τα προσχέδια, και όχι τις αυστηρές αποδείξεις που υπάρχουν στις *Principia*. Όπως έχουμε αναφέρει, το 1687 κανείς δεν είχε σκεφτεί τον λογισμό ως κάτι περισσότερο από ένα καινοτόμο νέο εργαλείο για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και η απουσία αυτών των μαθηματικών στις *Principia* αποκαλύπτει κάτι παραπάνω από την αδυναμία μετατροπής των γεωμετρικών μεθόδων στα νέα μαθηματικά.

Μετά τις ραγδαίες μαθηματικές εξελίξεις,όμως, ο Νεύτωνας εισάγει στη δεύτερη έκδοση των Principia,το 1713, μια ρητή αναφορά στη μέθοδο των ροών στο Λήμμα 2 της Πρότασης 38 του τρίτου Βιβλίου. Περιγράφει ως παραδείγματα της αναλυτικής μεθόδου τρείς προτάσεις όπου εφαρμόζονται οι σειρές (45,Βιβλιο 1; Σχόλιο 93, Βιβλίο 1; 10, Βιβλίο2) (Guicciardini, 1999, σ.114). Σε ορισμένα κομμάτια αναφέρει τις προτάσεις που οδηγούν σε προβλήματα τετραγώνων ως παραδείγματα της αναλυτικής μεθόδου. Οι αξιολογήσεις του αυτές δεν είναι εντελώς αναξιόπιστες, παρόλο που γράφτηκαν κατά τη διάρκεια της διαμάχης του με τον Leibniz. Φαίνεται σωστό να πούμε ότι τα παραπάνω κομμάτια είναι παραδείγματα εφαρμογής της αναλυτικής και συνθετικής μεθόδου των ροών. Ωστόσο, δεν φαίνεται σωστή η περίφημη δήλωση του Νέυτωνα ότι «κάθε άνθρωπος που κατανοεί την ανάλυση μπορεί να αναγάγει τις αποδείξεις των Προτάσεων από τη σύνθεση πίσω στην Ανάλυση» (Guicciardini, 1999, σ.115). Αρκεί να σημειώσουμε πόσο δύσκολη ήταν η μετάφραση των *Principia* με βάση τις αναλυτικές μεθόδους ακόμη και για τους καλύτερους μαθηματικούς της Ευρώπης.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει μία ακόμη τοποθέτηση του Guicciardini σχετικά με το γεγονός ότι ο Νεύτωνας ήξερε να εφαρμόζει την αναλυτική μέθοδο των ροών σε μερικά απλά προβλήματα δυναμικής, ακόμη και αν δεν δημοσίευσε τα αποτελέσματα αυτά (Guicciardini,1999, σ. 116-117). Η αναλυτική μέθοδος είχε περιορισμένο ρόλο στις *Principia.* Η αποφυγή της χρήσης τετραγώνων (quadrature avoidance) από τον Νεύτωνα στην πρώτη έκδοση των *Principia* θα μπορούσε να δικαιολογηθεί από την ανάγκη του να λάβει υπόψη τις περιορισμένες ικανότητες των αναγνωστών. Ο Guicciardini, επίσης, παρατηρεί ότι οι πρακτικές δημοσίευσης τον δέκατο έβδομο αιώνα δεν απαιτούσαν τη δημοσίευση των μεθόδων ανακάλυψης. Αυτή η παρατήρηση, ωστόσο, δεν ευσταθεί για τις επόμενες εκδόσεις. Στις αρχές της δεκαετίας του 1710, ο χρόνος ήταν ώριμος για την αποκάλυψη της «κρυφής ανάλυσης» με την οποία οποία πολλές προτάσεις είχαν αποδειχθεί. Ο Νεύτωνας επέλεξε να αποκαλύψει αυτήν τη μέθοδο μόνο σε ιδιωτικές ανταλλαγές-αλληλογραφίες με στενούς συνεργάτες του: Fatio De Duillier, Gregory, Cotes, De Moivre και Keill. Οι λόγοι για τους οποίους ο Νεύτωνας δεν δημοσίευε τις μεθόδους του σχετίζονται με τις αξίες που κατευθύνουν την έρευνά του στην ώριμη φάση της ζωής του, αξίες οι οποίες, όπως είδαμε παραπάνω, τον οδήγησαν να αποστασιοποιηθεί από τον λογισμό υπέρ της γεωμετρίας. Ένα επεισόδιο, το οποίο αναφέρει ο Guicciardini, είναι ενδεικτικό της επιφυλακτικότητας του Νεύτωνα απέναντι στη γεωμετρία. Όταν ο Johann Bernoulli πρότεινε το πρόβλημα του βραχυστόχρονου ως μια πρόκληση για τα καλύτερα μαθηματικά μυαλά του κόσμου, ο Νεύτωνας παρουσίασε ανώνυμα μια λύση στο περιοδικό *Philosophical Transactions*. Ο Νεύτωνας πιθανότατα είχε βρει αυτήν την λύση μέσω μιας ροολογικής εξίσωσης, ωστόσο, στα γραπτά του Νεύτωνα παρουσιάστηκε η γεωμετρική και οχι η ροολογική λύση.

Έτσι, ο Guicciardini υποστηρίζει ότι ο Νεύτωνας ήξερε πως να εφαρμόζει την αναλυτική μέθοδο των ροών σε απλά προβλήματα δυναμικής. Σώζονται χειρόγραφα στα οποία ο Νεύτωνας γράφει διαφορικές εξισώσεις της κίνησης για προβλήματα που αφορούν την κίνηση ενός σώματος και ήταν ικανός να συνυφαίνει το λογισμό και τη γεωμετρία στον υπολογισμό των διαταραχών (Guicciardni, 1999, σ.116-117). Ωστόσο, η παγκόσμια βαρύτητα είναι μια υπόθεση που συνεπάγεται πολύ δύσκολα μαθηματικά προβλήματα. Η πιθανότητα της μαθηματικοποίησης της θεωρίας των πλανητικών τροχιών ή της θεωρίας των παλιρροιών ήταν κρίσιμη για τον Νεύτωνα και τους οπαδούς του. Η αναλυτική μέθοδος των ροών δεν ήταν ακόμη αρκετά ισχυρή ώστε να επιτρέπει τέτοιες δυναμικές μελέτες. Η γεωμετρία, από την άλλη πλευρά, προσέφερε τα μέσα για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων, τουλάχιστον σε ποιοτικό επίπεδο. Η εφαρμογή γεωμετρικών μεθόδων δεν ήταν, επομένως, αμυντική με μοναδικό κίνητρο την προσκόλληση στην κλασική παράδοση, αλλά και μια επιλογή μιας ισχυρότερης και ενοποιητικής μεθόδου.

Μία ακόμη διάσταση σχετικά με τον ισχυρισμό ότι ο Νεύτωνας δεν χρησιμοποίησε τον λογισμό του στα *Principia* δίνει ο Shank., επισημαίνοντας ότι είναι τόσο αληθινός όσο και παραπλανητικός ταυτόχρονα (Shank, 2018, σ.132). Μια ακριβής απάντηση σε αυτό τον ισχυρισμό εξαρτάται εξ΄ ολοκλήρου από το τι εννοούμε με τον όρο "λογισμός". Αν με τον όρο αυτό εννοούμε αλγοριθμικούς κανόνες για την εξαγωγή διακριτών λύσεων από αλγεβρικές εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν συνεχείς καμπύλες στην καρτεσιανή αναλυτική γεωμετρία, τότε ο Νεύτωνας σίγουρα δεν χρησιμοποίησε τον λογισμό στα *Principia*, αφού απέφευγε τις αλγεβρικές εκδοχές της νέας ανάλυσης και χρησιμοποιούσε μόνο παραδοσιακή συνθετική γεωμετρία. Παρόλα αυτά, αν με τον λογισμό του Νεύτωνα εννοούμε τις μεθόδους του για τη συμφιλίωση των διακριτών και συνεχών μεγεθών μέσα στην γεωμετρική επίλυση του προβλήματος, τότε η απάντηση είναι ρητά ναι, δεδομένου ότι *η μέθοδος του ''πρώτου και τελευταίου λόγου''* που αναπτύχθηκε στις Principia ήταν ένα είδος λογισμού ή τουλάχιστον ένα μαθηματικό εργαλείο που είχε ακριβώς την ίδια χρήση.

Ο Shank παρουσιάζει και σχηματικά αυτό που ονομάζουμε λογισμό προκειμένου να εξετάσει την παρουσία του στις *Principia* (Shank, 2018,σ.133). Θεωρεί ότι ο λογισμός πηγάζει από τη σύγκλιση τουλάχιστον τριών ιστορικών μετασχηματισμών και προσπαθεί να τους απομονώσει. Πρώτον, ο λογισμός για εμάς προϋποθέτει τη χρήση αλγεβρικών εξισώσεων για να λυθούν γεωμετρικά προβλήματα. Δεύτερον, ο λογισμός προϋποθέτει ότι οι λύσεις στο πρόβλημα της συμφιλίωσης διακριτών και συνεχών μεγεθών όπως στην περίπτωση του τετραγωνισμού, μπορούν να θεωρηθούν δεδομένες, έτσι ώστε οι γεωμετρικές τεχνικές να μπορούν να περιληφθούν στους αλγεβρικούς κανόνες συλλογιστικής. Τέλος, ο λογισμός προϋποθέτει την αποδοχή αλγεβρικών λύσεων σε γεωμετρικά προβλήματα, έτσι ώστε η λύση μιας εξίσωσης να μπορεί νόμιμα να αντιπροσωπεύει μια γεωμετρική κατασκευή και μια απόδειξη ενός γεωμετρικού θεωρήματος (όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα). Και οι τρεις παραδοχές μαζί συνθέτουν τους αλγοριθμικούς κανόνες του Leibniz και του Νεύτωνα για την επίλυση προβλημάτων. Χρησιμοποιώντας αυτό το πρότυπο, ο Shank υποστηρίζει ότι δεν βλέπουμε την πρώτη και τρίτη πτυχή στις

Principia, αλλά ένα μεγάλο μέρος της δεύτερης. Οι παραδοσιακές αντιλήψεις του Νεύτωνα τον οδήγησαν να αποφύγει οποιαδήποτε χρήση αλγεβρικών συμβόλων ή εξισώσεων στα *Principia*. Στο βιβλίο 3 χρησιμοποίησε τους αριθμούς ως διακριτούς, σύμβολα ποσοτικών μετρήσεων, αναπτύσσοντας ως εκ τούτου εκλεπτυσμένα επιχειρήματα. Αλλά στα βιβλία με μαθηματικές αποδείξεις που προηγούνται του βιβλίου 3, αποφεύγει εντελώς τους αριθμούς, αναπτύσσοντας τις ιδέες του γεωμετρικά. Η ανάγκη του Νεύτωνα να καινοτομεί στο πλαίσιο των παραδοσιακών μεθόδων αποκαλύπτει τη δυσκολία που αντιμετώπισε να προσαρμόσει την αρχαία γεωμετρία στη νέα μαθηματική φυσική που ανέπτυσσε.

Αξιοσημείωτη είναι η δήλωση του ιστορικού των μαθηματικών Jean Francois Montucla σχετικά με την παρουσία του λογισμού στις *Principia* (Shank, 2018, σ.134)

> Αν και τα *Principia* του Νεύτωνα μας προσφέρουν σε πολλά σημεία παραδείγματα της αρχαίας διαδικασίας, γενικά ο λογισμός διαφαίνεται στις μεταμφιέσεις με τις οποίες τον κάλυψε ο Νεύτωνας. Αυτό είναι ένα ελάττωμα, το οποίο είναι συνηθισμένο σε εκείνα τα βιβλία που παρουσιάζονται σαν να έχουν γραφεί σύμφωνα με την αρχαία μέθοδο, αλλά ενώ είναι στην πραγματικότητα μόνο μεταμφιεσμένη άλγεβρα.

Συνολικά, όπως σχολιάζει ο Shank, το αποτέλεσμα των υβριδικών και ιδιοσυγκρασιακών μαθηματικών του Νεύτωνα στις *Principia* ήταν ένα έργο που παρουσιάστηκε ως μαθηματικά καινοτόμο και συντηρητικό ταυτόχρονα (Shank, 2018, σ.135). Για να επιτύχει τη νέα μαθηματικοποίηση της φυσικής που ήταν ο κεντρικός του στόχος, ο Νεύτωνας έπρεπε να αξιοποιήσει όλες τις ικανοτητες και τα εργαλεία που είχε αναπτύξει, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που ήταν πιο καινοτόμα. Αλλά επειδή ο Νεύτωνας ήταν παραδοσιακός όσον αφορά τη δημοσιοποίηση των μαθηματικών αποδείξεων, παρουσίασε τα επιχειρήματά του όσο το δυνατόν περισσότερο με τους όρους της κλασικής γεωμετρίας.

2.3 Ο λογισμός του Leibniz σε σχέση με τον λογισμό του Νεύτωνα

Το 1684, ο Leibniz δημοσιεύει το έργο του με τον τίτλο «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangetibus, quae nec fractas nec irationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus» στο επιστημονικό περιοδικό *Acta Eruditorum* (Suicky, 2000, σ. 85). Από την άλλη πλευρά, ο Νεύτωνας ανέπτυξε τις βασικές αρχές του λογισμού του στις αρχές της επιστημονικής του καριέρας ανάμεσα στο 1665 και το 1666, αλλά δημοσίευσε ορισμένα μόνο κομμάτια του στο παράρτημα της πραγματείας του *Opticks* το 1704 (Suisky, 2009, σ.67). Όπως ήδη γνωρίζουμε, τα *Principia* δημοσιεύτικαν το 1687 και βασίστηκαν σε προηγούμενες μελέτες που σκιαγραφούνται στο *De motu* και στις μαθηματικές μεθόδους των ροών (fluxions). Όμως, όπως τονίζει ο Suisky, η επιστημονική κοινότητα δεν έλαβε γνώση της νέας μεθόδου από τον Νεύτωνα, αλλά από το «Nova Methodus».

Ο λογισμός παρουσιάστηκε από τον Νεύτωνα και τον Leibniz σε διαφορετικές εκδοχές, οι παρουσιάσεις των οποίων μπορεί να θεωρηθούν ως διαφορετικές θεμελιώσεις του λογισμού (Suisky, 2009, σ.65). Ο Νεύτωνας προτιμούσε μια γεωμετρική θεμελίωση η οποία ήταν βασισμένη στη συνεχή παραγωγή των ευθείων γραμμών, επιφάνειας και στερεών [Newton, Quadrature (Harris)]. Ο Leibniz, από την άλλη πλευρά, πρότεινε μια γεωμετρία που σχετίζεται με την προσέγγιση στην ανάλυση καμπύλων και ευθείων γραμμών (εφαπτομένες) [Leibniz, Nova Methodus] και, επιπροσθέτως τη μέθοδο των διαφορών και των αθροισμάτων (sums) η οποία δεν σχετίζεται άμεσα με τη γεωμετρία, αλλά βασίζεται στην εξέταση σειρών αριθμών των οποίων οι διαφορές και τα σύνολα είναι οι βασικές ποσότητες. Επιπλέον, σε αντίθεση με τον Νεύτωνα, ο Leibniz προτίμησε μια θεμελίωση του λογισμού του που ήταν ανεξάρτητη του χρόνου (Suisky, 2009, σ. 85). Κατά αυτόν τον τρόπο, η επιστημονική κοινότητα ήρθε σε επαφή με το διαφορικό λογισμό που εισήγαγε ο Leibniz και επιπλέον προετοιμάστηκε για την εκδοχή που παρουσίασε ο Νεύτωνας το 1687. Μετά την δημοσίευση των *Principia* η κοινότητα χωρίστηκε σε δύο ομάδες˙ εκείνους που χρησιμοποιούσαν τον συμβολισμό και τους αλγόριθμους του Leibniz και εκείνους που χρησιμοποιούσαν τον συμβολισμό και τις υπολογιστικές αρχές των *Principia.*

Η θεμελίωση του λογισμού του Leibniz, όπως και η θεωρια των ροών του Νεύτωνα, είναι συνδεδεμένη με δύο προβλήματα (Suicky, 2009, σ.81). Πρώτον, πηγάζει από το ίδιο ζητούμενο˙ να καταδείξει τη σχέση μεταξύ καμπυλών και εμβαδών ή μεταξύ καμπυλών και εφαπτομένων σε μια γενική μορφή.Και δεύτερον, συσχετίζει την γεωμετρική καμπύλη, τις εφαπτόμενες και τα εμβαδά με την κίνηση των σωμάτων. Επομένως, οι σχέσεις μεταξύ γεωμετρίας και μηχανικής πρέπει να οριστούν σε ένα νέο πλαίσιο που περιλαμβάνει τη σχέση μεταξύ γεωμετρικών μορφών διαφορετικού τύπου. Συνοπτικά, ο Suicky εξηγεί ότι η θεμελίωση του λογισμού σχετίζεται είτε με τις ροές όπου ο χρόνος έμμεσα ή ρητά συμπεριλαμβάνεται και συνδέεται στενά με την κίνηση των σωμάτων, είτε με σημεία, εφαπτόμενες, καμπύλες και εμβαδά που δεν είναι έμμεσα ή ρητά συσχετιζόμενες με το χρόνο και την κίνηση των σωμάτων, ή τέλος με την αρχή (beginning) της κίνησης [Newton, Principia], [Leibniz, Specimen] σε αντιδιαστολή με την κίνηση που σχετίζεται με τις πεπερασμένες αποστάσεις σε πεπερασμένο χρόνο.

Όπως είδαμε, το 1684 ο Leibniz δημοσίευσε τη συστηματική, αλλά πολύ σύντομη παρουσίαση του λογισμού όπου περιέγραψε για πρώτη φορά όλους τους βασικούς αλγορίθμους. Όμως, χρειάστηκαν κάποια χρόνια για τις πρώτες αντιδράσεις, εκτιμήσεις και για την πρώτη κριτική (Suisky, 2009, σ.92). Σύντομα, οι Jacob και Johann Bernoulli εκτίμησαν τη νέα μέθοδο και απέδειξαν ότι είναι γόνιμη εφαρμόζοντάς την σε διάφορα προβλήματα. Τρία χρόνια αργότερα, ο Νεύτωνας σχολίασε τη μέθοδό του Leibniz με ένα σύντομο σχόλιο που δημοσιεύτηκε στις *Principia* [Νεύτωνας, Principia, Book I, Sect.I, Lemma II] και δήλωσε έμμεσα ότι είναι πεπεισμένος για τη σημασία και το πλεονέκτημα της μεθόδου αφού την ίδια προσέγγιση είχε ανακαλύψει και ο ίδιος είκοσι χρόνια πριν και την είχε εφαρμόσει επιτυχώς σε μαθηματικά και μηχανικά προβλήματα των *Principia*. Ως εκ τούτου, ο μεγάλος Νεύτωνας και ο διάσημος Leibniz ανέπτυξαν τις ίδιες μεθόδους, με τη διαφορά ότι τις παρουσίασαν με ΄΄διαφορετικές λέξεις΄΄. Αυτή η ωραία άποψη, σχολιάζει ο Suisky, επικράτησε μόνο για μερικά χρόνια έως ότου οι πρώτοι κριτικοί απαίτησαν την αυστηρή θεμελίωση της νέας μεθόδου και, επιπλέον, οι Fatio και Keill κατηγόρησαν τον Leibniz για λογοκλοπή. Οι Fatio και Keill έδωσαν έμφαση στο κοινό υπόβαθρο των δύο μεθόδων, τονίζοντας τη διαφορά τους ως προς τις κοινώς αποδεκτές μεθόδους των προκατόχων τους. Ο Suisky, όμως, τονίζει ότι στην περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου κυριαρχούν δύο ερωτήματα: πρώτον τι διαφορές παρατηρούνται όχι μόνο στα θεμέλια αλλά και στην παρουσίαση του λογισμού από τον Νεύτωνα και τον Leibniz, και, δεύτερον τι πρόοδος επιτεύχθηκε από τους δύο συγγραφείς σε σύγκριση με τους προκατόχους τους.

Όπως επισημαίνει ο Guicciardini, κατά τη διάρκεια της διάσημης διαμάχης για την προτεραιότητα της επινόησης του λογισμού, οι Βρετανοί ισχυρίζονταν όχι μόνο ότι ο Νεύτωνας ήταν ο εφευρέτης του λογισμού αλλά και ότι ήταν ο πρώτος που καθόρισε τα πραγματικά θεμέλιά του (Guicciardini, 1999, σ.156). Κατηγόρησαν τον Leibniz για λογοκλοπή: την αντιγραφή της τεχνικής και την αλλαγή μόνο του συμβολισμού της χωρίς κατανόηση των θεμελιακών της πτυχών. Παρά τις προσπάθειες των Νευτώνειων, η σύγκριση μεταξύ του λογισμού του Leibniz και του Νεύτωνα δεν ήταν εύκολο έργο. Ο λόγος ήταν ότι ο Leibniz και ο Νεύτωνας παρουσίασαν διάφορες εκδοχές του λογισμού τους. Ο Leibniz ποτέ δε δημοσίευσε μια συστηματική πραγματεία αλλά ανέπτυξε το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό του με μια σειρά εγγράφων και επιστολών. Οι απόψεις του σε θεμελιώδη θέματα άλλαζαν αρκετά συχνά, γεγονός που καθιστούσε ακόμη πιο δύσκολο το έργο των Νευτώνειων. Το 1670, ο Νεύτωνας εγκατέλειψε την πρώτη εκδοχή του λογισμού του (την αναλυτική μέθοδο των ροών), με βάση τις απειροστές στιγμές, προκειμένου να τον θεμελιώσει με τη μέθοδο *πρώτων και τελικών αναλογιών* (first and ultimate ratios). Ο Νεύτωνας ανέπτυξε τη μέθοδο αυτή στο έργο του *Geometria curvilinea* και αποτελεί τη μαθηματική θεμελίωσει για τις περισσότερες δηλώσεις των *Principia.* Στο Βιβλίο Ι, στο λήμμα 1 της πρώτης ενότητας, ο Νεύτωνας σημειώνει σχετικά με τη μέθοδο:

« Ποσότητες, και επίσης, λόγοι ποσοτήτων, οι οποίοι σε ΄΄κάθε πεπερασμένο χρόνο΄΄ σταθερά τείνουν να είναι ίσοι, και οι οποίοι πριν το τέλος αυτής της χρονικής προσέγγισης είναι τόσο κοντά ο ένας στον άλλον ώστε οι διαφορές τους είναι μικρότερες από κάθε δεδομένης ποσότητας, γίνονται τελικά ίσοι» (Guicciardini, 1999, σ. 43).

Η προσπάθεια των ιστορικών για τη σύγκριση των δύο λογισμών επεσήμανε ορισμένες σημαντικές διαφορές μεταξύ τους,τις οποίες παραθέτει ο Guicciardini χωρίς να συμφωνεί απόλυτα (Guicciardini, 2009, σ.157). Στη Νευτώνεια εκδοχή οι μεταβλητές ποσότητες θεωρείται ότι μεταβάλλονται συνεχώς με το χρόνο, ενώ στη

Λαϊβνίτεια θεωρείται ότι εκτείνονται σε μια ακολουθία απείρως κοντινών τιμών. Επιπλέον, θεωρείται ότι στην ροολογική ανάλυση ο ΄΄χρόνος΄΄, και γενικώς οι κινηματικές έννοιες, όπως ΄ροή΄ και ΄΄ταχύτητα΄, παίζουν έναν ρόλο που διαφέρει από αυτούς στο διαφορικό λογισμό. Παρατηρείται συχνά ότι ο Leibniz και ο Νεύτωνας βλέπουν με διαφορετικό τρόπο τις γεωμετρικές ποσότητες. Για παράδειγμα, για τον Leibniz μια καμπύλη νοείται ως ένα πολύγωνο με άπειρες απειροελάχιστες πλευρές, ενώ για τον Νεύτωνα οι καμπύλες είναι λείες. Όπως σχολιάζει ο Guicciardini, αυτές οι διαφορές μπορεί να είναι εν μέρει υπαρκτές, μόνο, όμως, μετά την απλοποίηση των δύο λογισμών. Για την ακρίβεια, είναι εμφανείς μόνο όταν συγκρίνουμε τις απλουστευμένες εκδόσεις του Λαϊβνίτειου και του Νευτώνιου λογισμού, που παρουσιάζονται σε εγχειρίδια όπως το *Analyse des infiniment petits* (1696) του L΄Hospital και το *The Doctrine and Application of Fluxions* (1750) του Simpson, παρά στη σύγκριση μεταξύ των έργων του Νεύτωνα και του Leibniz.

Ο Guicciardini υποστηρίζει ότι οι διαφορές μεταξύ Λαϊβνίτειου και Νευτώνειου λογισμού δεν πρέπει να αναζητώνται στο συντακτικό και σημασιολογικό επίπεδο, αλλά στο επίπεδο της πρακτικής. Υπάρχει στην πραγματικότητα μια δυνατότητα μετάφρασης ανάμεσα στο ροολογικό και διαφορικό αλγόριθμο (μέσω των αντιστοιχιών μεταξύ $\dot{x}$ και dx). Αυτές οι μεταφράσεις πραγματοποιήθηκαν από Λαϊβνίτειους και Νευτώνειους μαθηματικούς, οι οποίοι κατέληξαν ότι δεν υπάρχει ούτε ένα θεώρημα το οποίο να μπορεί να αποδειχθεί σε έναν από τους δύο λογισμούς και να μην έχει αντίστοιχο στον άλλον. Είναι ακριβώς αυτή η ΄΄ισοδυναμία΄΄, τονίζει ο Guicciardini, που προκάλεσε τη διαμάχη σχετικά με την προτεραιότητα.

Από την άλλη πλευρά, ο Sculi Sigurdsson έχει προτείνει τον χαρακτηρισμό «όχι ισοδύναμοι στην πράξη», υποστηρίζονται ότι:

> Αυτή η ισοδυναμία καταρρέει όταν συνειδητοποιείται ότι οι ανταγωνιστικοί φορμαλισμοί προτείνουν διαφορετικές κατευθύνσεις έρευνας και ως εκ τούτου δημιουργούν διαφορετικά είδη γνώσης (Guicciardini, 1999, σ. 158).

Ομοίως, ο Ivo Schneider έχει δηλώσει ότι το σημείο εκκίνησης, η κύρια έμφαση και οι προσδοκίες των δύο πρωτοπόρων δεν ήταν καθόλου ταυτόσημες. Επιπλέον, ο Bertoloni Meli τοποθετείται ως εξής σχετικά με τη σύγκριση:

> Ακόμη και αν τα δύο προγράμματα έχουν σχεδιαστεί για να εκτελέσουν τις ίδιες διαδικασίες, οι δεξιότητες που απαιτούνται για το χειρισμό τους μπορεί να διαφέρουν σημαντικά. Έτσι, οι μεταγενέστερες τροποποιήσεις και εξελίξεις μπορεί να ακολουθούν διαφορετικές διαδρομές, και αυτό ακριβώς συνέβει στη Βρετανία και στην Ηπειρωτική Ευρώπη το δέκατο όγδοο αιώνα: παρά την αρχική ισοδυναμία μεταξύ ΄΄ροών΄΄ και ΄΄διαφορικών΄΄ (Guicciardini, 1999, σ. 158).

Ο Guicciardini συμφωνεί με την προσέγγιση των προαναφερθέντων μελετητών και προτείνει ακριβώς αυτό: να αναζητούμε πιο λεπτές και λιγότερο προφανείς πτυχές των διαφορών μεταξύ των δύο λογισμών. Θεωρεί ότι ο Νεύτωνας και ο Leibniz είχαν δύο ΄΄μαθηματικά ισοδύναμους΄΄ συμβολισμούς. Στο συντακτικό επίπεδο μπορούσαν να μεταφράσουν τα αποτελέσματα ο ένας του άλλου, ενώ στο σημασιολογικό επίπεδο συμφωνούσαν σε σημαντικά θεμελιώδη ερωτήματα. Παρόλα αυτά, στο επίπεδο της πρακτικής, προσανατολίζαν τις έρευνές τους σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Έτσι, το να ανήκεις στη Νευτώνεια ή Λαϊβνίτεια σχολή σημαίνει να έχεις διαφορετικές δεξιότητες και διαφορετικές προσδοκίες, δηλαδή να ακολουθείς διαφορετικές γραμμές έρευνας και διαφορετικές αξίες.

Μια ακόμη σημαντική τοποθέτηση του Guicciardini, στο ίδιο μήκος κύματος, είναι ότι δεν βρίσκει μια ισχυρή εννοιολογική αντίθεση μεταξύ του Leibniz και του Νευτωνα, αλλά περισσότερο μια διαφορά ΄πολιτικής΄ (Guicciardini, 1999, σ.164). Τα όρια παρέχουν μια στέρεα βάση για το λογισμό και των δύο, με τη διαφορά, όμως ,ότι για τον Leibniz ήταν περισσότερο μια ρητορική κίνηση για να υπερασπιστεί τη νομιμότητα του διαφορικού αλγορίθμου, ενώ για τον Νεύτωνα ήταν ένα πρόγραμμα που έπρεπε να εφαρμόσει. Η θεωρία ορίων αναπτύχθηκε επακριβώς από τον Νεύτωνα σε αναλυτική και συνθετική μορφή, ενώ ο Leibniz έκανε απλώς μια νύξη για τη δυνατότητα κατασκευής του λογισμού με βάση μια τέτοια θεωρία. Έτσι, αρχίζουμε να αντιλαμβανόμαστε γιατί είναι γόνιμο να συλλάβουμε τον Νευτώνειο και Λαϊβνίτειο λογισμό ως ΄΄μη ισοδύναμους στην πράξη΄΄ (Guicciardini, 1999, σ.164-165). Παρά τις ομοιότητες σχετικά με την δικαιολόγηση του αλγορίθμου, στην πράξη η προσέγγιση των δύο ανδρών ήταν διαφορετική. Σκοπός του Νεύτωνα ήταν να αναπτύξει τα όρια ως την αυστηρή του γλώσσα, ενώ ο Leibniz προτίμησε να προωθήσει τη χρήση των απειροστών ως μέσο για την ανακάλυψη νέων αληθειών. Επιπλέον, το ζήτημα της συνέχειας με τις αρχαίες γεωμετρικές μεθόδους είχε διαφορετική βαρύτητα για τον Νεύτωνα, ο οποίος το θεωρούσε καθοριστικό για την αποδοχή των μεθόδων του. Ο Leibniz, από την άλλη πλευρά, είτε τόνισε τη συνέχεια αυτή με διαφορετικούς τρόπους είτε, σε άλλες δηλώσεις του, τόνισε την καινοτομία και τον επαναστατικό χαρακτήρα του αλγορίθμου και όχι τη συνέχεια με τα αρχαία υποδείγματα.

Ο Guicciardini εξηγεί ότι η δημοσίευση του *Nova Methodus* έρχεται σε αντίθεση με τον κλασικισμό του Νεύτωνα, διότι ο Leibniz αναφέρεται συχνά στον ευρετικό χαρακτήρα του λογισμού, νοημένου ως αλγόριθμου ανεξάρτητου από γεωμετρία (Guicciardini, 1999, σ.166). Σύμφωνα με τον Leibniz, η ανεξαρτησία αυτή καθιστά το λογισμό τόσο αποτελεσματικό., Εκεί έγκειται η αξία του και όχι στο που αναφέρεται το περιεχόμενό του. Ο Leibniz υποστήριζε ότι μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς με σύμβολα που στερούνται αναφοράς (πχ √ -1), αρκεί να οδηγούν σε σωστά αποτελέσματα. Αντιθέτως, για τον Νεύτωνα τα μαθηματικά που στερούνται αναφοράς δεν ήταν αποδεκτά.

Ο Leibniz επαινούσε το λογισμό και προωθούσε την ΄΄τυφλή χρήση της λογικής (reasoning)΄΄ στους μαθητές του. Ο Νεύτωνας, αντιθέτως, απαιτούσε διαφορετικά πρότυπα αυστηρότητας και δεν εκτιμούσε τους μηχανικούς αλγορίθμους. Όπως έχουμε δει, μιλούσε πάντα με θαυμασμό για τις γεωμετρικές παρουσιάσεις του Huygens και τις κομψές γεωμετρικές μεθόδους των αρχαίων. Επιπλέον, ο Νεύτωνας έκανε σαφές ότι τα σύμβολα της ΄΄αναλυτικής μεθόδου των ροών΄΄ πρέπει να ερμηνεύονται με βάση τη ΄΄συνθετική μεθόδο΄΄, ώστε η γεωμετρική ερμηνεία να διασφαλίζει την ύπαρξη οντολογικού περιεχομένου.

Παρόλα αυτά, είναι γεγονός ότι ο Leibniz αντιλαμβανόταν τον αλγόριθμο με γεωμετρικούς όρους (Guicciardini, 1999, σ.167). Ο Guicciardini εξηγεί ότι ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός του Leibniz αναφέρονται σε γεωμετρικά αντικείμενα και πάντα έδινε προσοχή στις γεωμετρικές διαστάσεις των συμβόλων που εμφανίζονται σε μια διαφορική εξίσωση. Ο λόγος είναι ότι η πλήρης αλγεβροποίηση του λογισμού επιτεύχθηκε μόνον στα τέλη του 18ου αιώνα˙ την εποχή του Leibniz, ο λο3γισμός ως ΄΄τυφλός συλλογισμός΄΄ ήταν περισσότερο ένας ευσεβής πόθος παρά μια πραγματικότητα και η γεωμετρική επανερμηνεία του συμβολισμού ήταν σε πολλές περιπτώσεις απαραίτητη. Η ειδοποιός διαφορά με τον Νευτωνα είναι ότι για το Leibniz η γεωμετρική επανερμηνεία δεν ήταν μια επιβεβλημένη στρατηγική.

Η εστίαση του Leibniz στο συμβολισμό, εξηγεί ο Guicciardini, τον οδήγησε να αναπτύξει μια άλγεβρα διαφορικών με κύριο στόχο να κατασκευάσει ένα σύνολο αλγοριθμικών κανόνων: το λογισμό. Οι κανόνες του λογισμού αποτελούν οδηγίες για το χειρισμό του ds και του ∫s, και επιτρέπουν αλγοριθμικές διαδικασίες οι οποίες είναι, στο μέγιστο δυνατό βαθμό, ανεξάρτητες από το γεωμετρικό πλαίσιο της εποχής. Ο Νεύτωνας, όμως, προτιμούσε να δίνει παραδείγματα τα οποία έδειχναν τον κανόνα, παρά τον ίδιο τον κανόνα.

Ο Leibniz θεώρησε πολύ πιθανή την εφαρμογή του αλγορίθμου του στη φυσική φιλοσοφία και προκειμένου να την επιτύχει έγραψε τα έργα του *Schediasma* και *Tentamen* σε απάντηση των *Principia*, αλλά και επίσης για να δείξει την ισχύ και τη δυνατότητα επέκτασης του λογισμού. (Guicciardini, 167-168) Ενώ το magnus opus του Νεύτωνα είχε δημοσιευθεί αρχικά σε μια γλώσσα η οποία εκ πρώτης όψεως δε φαινόταν επαναστατική, ο Leibniz, στην πρώτη και μοναδική του προσπάθεια να μαθηματικοποιήσει τη φυσική φιλοσοφία, ανυπομονούσε να αντιπαραθέσει τον νέο ΄΄τυφλό΄΄ του αλγόριθμο με τις Νευτώνειες γεωμετρικές μεθόδους. Ο Leibniz, όμως, σχολιάζει ο Guicciardrini, δεν γνώριζε ότι ο Νεύτωνας είχε ήδη στην κατοχή του έναν ισοδύναμο αλγόριθμο, ούτε ότι ο Νεύτωνας είχε ήδη εφαρμόσει τις εξελιγμένες τεχνικές της ροολογικής ανάλυσης σε διάφορα προβλήματα.

2.4 Οι κύριοι συντελεστές της διαμόρφωσης της αναλυτικής μηχανικής

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιαστούν οι μαθηματικοί-λόγιοι που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της Αναλυτικής Μηχανικής στο τελευταίο τέταρτο του δέκατου έβδομου αιώνα.

Αναμφίβολα, ο Νεύτωνας με τις *Principia* και ο Leibniz με το λογισμό του διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της αναλυτικής μηχανικής˙ δεν αποτελούν, όμως, τις μοναδικές επιρροές. Σύμφωνα με τον Shank, η διαμόρφωση της αναλυτικής μηχανικής είναι ένα ιδιόμορφο αποτέλεσμα μιας πολύ πιο περίπλοκης ιστορίας (Shank, 2018, σ.139). Μόνο στο πλαίσιο μιας συνοπτικής επισκόπησης μπορεί η αναλυτική μηχανική, η οποία μετεξελίχθηκε στηΝευτώνεια μηχανική, να φαίνεται ότι προέρχεται άμεσα και απρόσκοπτα από τις *Principia* του Νεύτωνα. Τα μαθηματικά τα οποία ήταν το καθοριστικό στοιχείο για την πραγματοποίηση αυτής της επαναστατικής μεταμόρφωσης, στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν καθόλου στην πραγματεία του Νεύτωνα. Όπως είδαμε, οι *Principia* είχαν διατυπωθεί σε μια πολύ διαφορετική μαθηματική γλώσσα και όχι με το διαφορικό λογισμό που ήταν η βασική καινοτομία της αναλυτικής μηχανικής, γεγονός που υποδεικνύει ότι δεν αποτελούν τη μοναδική πηγή αυτής της επιστήμης. Όπως τονίζει ο Shank, δεν ήταν ούτε ο Νεύτωνας, ούτε ο Leibniz ούτε ο Pierre Varignon (τη συμβολή του οποίου θα εξετάσουμε αμέσως μετά) που διαμόρφωσαν την αναλυτική μηχανική, αλλά η ιστορική σύγκλιση όλων αυτών στη Γαλλία κατά τις δεκαετίες γύρω από το 1700.

Ο Pierre Varignon, μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας επιστημών, βρίσκεται στο επίκεντρο αυτής της ιστορίας, διότι ήταν ένας από τους πολύ λίγους γάλλους μαθηματικούς που έμαθε αμέσως για τα νέα μαθηματικά του Leibniz και τα χρησιμοποίησε για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Το 1690 ανέπτυξε την επονομαζόμενη nouvelle theorie du movement ή ΄΄νέα επιστήμη της κίνησης΄΄ (Shank, 2018, σ. 24 -26). Η καινοτομία του συνδύαζε μια μηχανική κατανόηση της σύνθετης φύσης των δυνάμεων στην κίνηση των σωμάτων με τις εξαιρετικά νέες, τότε, μεθόδους του διαφορικού λογισμού. Αυτή η νέα επιστήμη ήταν η πρώτη διατύπωση της αποκαλούμενης σήμερα ΄΄αναλυτικής μηχανικής΄΄, από την οποία χτίστηκε το δέκατο όγδοο αιώνα η μαθηματική φυσική. Πολλοί ιστορικοί θεωρούν τον Varignon ως έναν μεταφραστή που μετέφερε τις *Principia* στους Ευρωπαίους λογίους ως κάτι αποδεκτό και κατανοητό. Παρουσίασε, δηλαδή, την πραγματεία του Νεύτωνα στους μαθηματικούς της Ηπειρωτικής Ευρώπης σύμφωνα με τη γλώσσα του διαφορικού λογισμού, παρά με το γεωμετρικό στύλ των *Principia*. Μια άλλη οπτική παρουσιάζει τον Varignon ως τον δημιουργικό μεταφραστή που μεταμόρφωσε την πρώτη ύλη των *Principia* στο υλικό από το οποίο οι Euler και Langrange οικοδόμησαν τη σύγχρονη μαθηματική φυσική. Παρόλα αυτά, ο Shank προτιμά να κατανοηθεί ο ρόλος του Varignon ως ενός ελεύθερου υποκειμένου που δεν υπήρξε ποτέ σκλάβος της Νευτώνειας ή κάποιας άλλης επιρροής και που διάβασε και έμαθε πολλά πράγματα από τα *Principia*, χωρίς όμως να βρει σε αυτά κάποιο ιστορικό ΄΄πεπρωμένο που έπρεπε να εκπληρώσει΄΄. Η επιστήμη του Varignon κατανοείται καλύτερα ως αποτέλεσμα πολλών διαφορετικών επιρροών και όχι μίας μοναδικής και καθοριστικής επιρροής.

Οι αλλαγές που έγιναν το 1699 στη Βασιλική Ακαδημία Επιστημών έφεραν στο επίκεντρο της ακαδημαϊκής ζωής τον Bernard le Bovier de Fontelle, ο οποίος είχε τεράστια επιρροή στην ακαδημαϊκή επιστήμη της Γαλλίας και, πιο συγκεκριμένα, στην αναλυτική μηχανική (Shank, 2018, σ.33). Στενός φίλος και συνεργάτης του Varignon, ήταν ένθερμος υποστηρικτής του διαφορικού λογισμού και, φυσικά, στη διαμάχη που είχε ξεσπάσει μεταξύ ΄΄Αρχαίων –Μοντέρνων΄ , στον πυρήνα της Γαλλικής Ακαδημίας, πήρε το μέρος των Μοντέρνων. Σύμφωνα με τους νέους κανονισμούς της Ακαδημίας, όπως σημειώνει ο Shank, όλοι ανεξαιρέτως έπρεπε πρώτα να δηλώνουν τις επιστημονικές τους μεθόδους στην Ακαδημία και μετά να προχωρούν σε δημοσίευση. Ο Fontenelle εκλέχθηκε γραμματέας της Ακαδημίας το 1699, προωθώντας αυτούς τους νέους κανονισμούς. Η αναλυτική μηχανική που γεννήθηκε τότε διαμορφώθηκε, αρχικά, μέσω αυτών των νέων καναλιών επικοινωνίας που διαχειριζόταν ο Fontenelle και, όπως τονίζει ο Shank, τις επόμενες δύο δεκαετίες διαμορφώνεται ως αποτέλεσμα της συνδυασμένης προσπάθειας και των δύο (Varignon και Fontenelle).

Συνάδελφος και σύμμαχος του Varignon στη Βασιλική Ακαδημία υπήρξε ο γαλαζοαίματος αριστοκράτης Guillaume-Francois-Antoine de l'Hopital, Μαρκήσιος de Saint-Mesme et du Montellier, Conte d'Etremont, Λόρδος Ouques-la-Chaise, le Breau, ή εν συντομία de l΄Hospital, ο οποίος εξελίχθηκε σε μαθηματικό πλήρους δραστηριότητας και αποτέλεσε βασικό παράγοντα στις μαθηματικές εξελίξεις (Shank, 2018, σ.140). Το πλήρες όνομα του l΄ Hospital είναι ενδεικτικό της κοινωνικής του θέσης και της δύναμης που κατείχε στο παλαιό καθεστώς της Γαλλικής κοινωνίας˙ δύναμη η οποία μπορούσε να διαμορφώσει τα μαθηματικά που παράγονταν στη

Γαλλία εκείνη την περίοδο. Στα τέλη της δεκαετίας των 20 χρόνων του αφοσιώνεται πλήρως στα μαθηματικά και αποκτά φήμη χάρις στις λαμπρές λύσεις που παρέχει σε προβλήματα-πρόκληση που δημοσιεύονται σε επιστημονικά περιοδικά όπως το *Acta Eruditorum* και το *Journal des savants*. Ο ίδιος ο Fontenelle τονίζει για τον de lʹHospital ότι η αναγνώριση του ως μαθηματικός ήταν ισάξια της αναγνώρισης των Huygens, Newton, Leibniz και Bernoulli. «Η γέννησή του απαιτούσε την ενασχόληση με πολλές υποθέσεις», συνοψίζει ο Fontenelle, γεγονός που του έδωσε λίγο χρόνο για να συνεχίσει το μαθηματικό έργο του (Shank, 2018, σ. 142). Ωστόσο, «η σπουδαία μαθηματική του μεγαλοφυία φαινόταν να μην απαιτεί καμία πληρωμή [χρόνου και εργασίας] σε αντάλλαγμα». Ήταν επίσης «γρήγορος στο να δηλώνει την άγνοιά του και να λαμβάνει οδηγίες, ακόμη και σε μαθηματικά θέματα» και «ποτέ δεν μετέδιδε ζήλια, όχι λόγω της δικής του αίσθησης ανωτερότητας, αλλά λόγω της φυσικής αίσθησης δικαιοσύνης που είχε». Ο Shank καταλήγει ότι οι τρόποι του de lʹHospital δεν ήταν τίποτα λιγότερο από την προσωποποίηση αυτού που ήταν: ένας μεγάλος άνδρας.

Ο Johan Bernoulli αποτελεί έναν, ακόμη, συνδετικό κρίκο στην αλυσίδα που επιχειρείται να ξετυλιχτεί. Ο Bernoulli, κατά την πρώτη του συνάντηση με τον l'Hopital, διατύπωσε την άποψη ότι ήταν «ένας καλός μαθηματικός, τουλάχιστον όσον αφορούσε τη συνηθισμένη γεωμετρία» (Shank, 2018, σ.142-143). Ο Bernoulli πρόσθεσε, ωστόσο, ότι «δεν ήξερε ουσιαστικά τίποτα για το διαφορικό λογισμό, εκτός από το όνομά του και ακόμα λιγότερα για τον ολοκληρωτικό λογισμό, ο οποίος μόλις πρόσφατα είχε αναπτυχθεί». Σύντομα, ο Bernoulli άρχισε να μυεί τον lʹHospital στα νέα μαθηματικά, άλλοτε δια αλληλογραφίας και άλλοτε μέσω επισκέψεων. Όπως σημειώνει ο Shank, η συνεργασία τους μέσω αλληλογραφίας συνεχίστηκε χωρίς διακοπή μέχρι το θάνατο του l'Hopital το 1704. Η επιρροή της συνάντησης Bernoulli-Hopital ήταν τεράστια για την περαιτέρω ανάπτυξη των γαλλικών μαθηματικών. Άσκησαν, επίσης, σημαντική επιρροή στον Varignon, ο οποίος μέσω αυτής της συνάντησης εκπαιδεύτηκε στα νέα μαθηματικά.

Η ιστορία υφαίνεται βλέποντας όλο και περισσότερους μαθηματικούς της εποχής να συνεργάζονται μέσω αλληλογραφίας: ο Leibniz με τον l'Hopital το 1692 και, επίσης, ο Varignon με τον lʹHospital το 1702 (Shank, 2018, σ.144). Ακόμη και ο Huygens αλληλογραφεί με τους l'Hopital και Leibniz μέχρι το θάνατό του το 1695. Ενδιαφέρουσα είναι η παρατήρηση του Shank ότι, αν και όλοι σε αυτήν την κοινότητα γνώριζαν για τις *Principia*, η αποστροφή του Νεύτωνα προς κάθε είδους κοινωνικές συνδιαλέξεις τον κράτησε μακρυά από τις τακτικές συζητήσεις αυτού του κύκλου. Κανείς δεν αμφέβαλε για τη λαμπρότητα των *Principia*, αλλά είχαν πολλές απορίες σχετικά με την «ιδιοσυγκρασιακή μαθηματική επιστήμη αυτού του σκοτεινού και, μάλλον, απομονωμένου Άγγλου».

Κατά αυτόν τον τρόπο, η διάδοση του νέου διαφορικού λογισμού του Leibniz, μέσω του Malebranche, του l'Hopital, του Varignon και των δικτύων που τους συνέδεαν, και η συγκρότηση της γαλλικής αναλυτικής μηχανικής λειτούργησαν σαν αρχική ώθηση. Εν ολίγοις, η καινοτομία της νέας επιστήμης της κίνησης του Varignon προέρχεται από τη διατύπωση της μηχανικής των κινούμενων σωμάτων, ιδιαίτερα των πλανητικών σωμάτων, με όρους διαφορικών εξισώσεων του λογισμού του Leibniz.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, η καινοτομία του Leibniz ήταν η πλέον αμφισβητούμενη καθώς ενσωμάτωσε στη νέα του μέθοδό του τα απειροστικά μαθηματικά (Shank, 2018, σ.150). Ο Leibniz δημιούργησε μια αλγεβρική αντίληψη για τα απειροστικά μαθηματικά κατάλληλη για χρήση στην καρτεσιανή αναλυτική γεωμετρία σε μια εποχή που η χρήση των απειροστικών μαθηματικών οποιουδήποτε είδους στη λύση των τεταρτημοριακών προβλημάτων ήταν λόγος διαμάχης των Αρχαίων έναντι των Σύγχρονων. Σύμφωνα με τον Shank, άμεσο γεωμετρικό πρόδρομο του αναλυτικού λογισμού του Leibniz αποτελεί η μέθοδος των αδιαίρετων του Bonaventura Cavalieri· η μέθοδος προσφέρει ένα βολικό τρόπο εύρεσης των εμβαδών γεωμετρικών μορφών και ως τέτοια παρέχει και μια ισχυρή λύση στα προβλήματα του τετραγωνισμού.

Αυτό που μας ενδιαφέρει στη μέθοδο των αδιαιρέτων είναι η πολύπλοκη αλληλεπίδραση των κλασικών και μηχανικών γεωμετρικών τεχνικών που περιέχονται σε αυτήν (Shank, 2018, σ.150-151). Η δημιουργία σχημάτων με τον διαδοχικό ή "κινούμενο" τρόπο που ζητούσε ο Cavalieri είναι απολύτως αποδεκτή στο πλαίσιο των αξιωμάτων της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Η μέθοδος των αδιαιρέτων, όμως, παρήγαγε επίσης βαθιά επιστημολογικά προβλήματα, τα οποία ο Cavallieri δεν αγνοούσε καθώς επικεντρώθηκε στη δημιουργία έξυπνων τρόπων για να αποδείξει με κλασικούς ευκλείδειους όρους αυτό που πραγματικά ήταν ένα μη-ευκλείδειο ή μηχανικό σύνολο μαθηματικών καινοτομιών (Shank, 2018, σ. 151). Στην πραγματικότητα, πέρασε όλη του τη ζωή προσπαθώντας να βρει ασφαλή θεμέλια για το έργο του, ενώ ένας συνάδελφος του, του οποίου τη στήριξη επιζητούσε, ο Γαλιλαίος, παρέμεινε σκεπτικιστής σχετικά με την αυστηρότητα της μεθόδου έως τον θάνατο του. Η περίπτωση του Cavallieri είναι ενδεικτική της ταραχώδους και αμφισβητούμενης φύσης των μαθηματικών του 17ου αιώνα: γεωμετρία έναντι αλγεβρικής ανάλυσης, απόδειξη έναντι μηχανικής ανάλυσης, συνθετική αυστηρότητα έναντι αναλυτικής οικονομίας, αρχαία παράδοση έναντι της σύγχρονης καινοτομίας .Όπως είδαμε, ο Νεύτωνας αντιπροσωπεύει πολύ καλά το σημείο αυτό, καθώς τα μαθηματικά του είναι μια εμβληματική συγχώνευση του μαθηματικού κλασικισμού του 17ου αιώνα με τη μηχανική καινοτομία.

Ο λογισμός του Leibniz, όπως σχολιάζει ο Shank, ήταν ένα σημαντικό βήμα πέρα από τις άλλες προσεγγίσεις, παρόλο που οφειλόταν στη μέθοδο των αδιαιρέτων του Cavalieri και άλλες μεθόδους στα απειροστικά μαθηματικά του 17ου αιώνα (Shank, 2018, σ. 153). Η συνεισφορά του Leibniz έγκειται στο γεγονός ότι έσπασε τους δεσμούς του με τη γεωμετρία, παρέχοντας ένα καθαρά αλγεβρικό αλγόριθμο που επέτρεψε την απόκτηση του τετραγωνισμού των συνεχών καμπυλών με αλγεβρικό μόνο τρόπο. Προσέφερε επίσης αυτούς τους κανόνες όχι ως προσέγγιση, αλλά ως ακριβές εργαλείο για τον τετραγωνισμό οποιωνδήποτε καμπυλών. Πράγματι και οι προηγούμενες μέθοδοι τετραγωνισμού είχαν επεκτείνει τη γεωμετρία των απειροστών, αλλά ο Leibniz απελευθέρωσε την άλγεβρα από τη γεωμετρία συνολικά και έδειξε πως μπορούσαν να βρεθούν οι γεωμετρικές λύσεις μέσω της χρήσης μόνο αλγεβρικών εξισώσεων. Όπως σημειώνει ο Shank, τα διλήμματα που παρουσιάστηκαν έστρεψαν ακόμη περισσότερο το ενδιαφέρον από τη γεωμετρία στην άλγεβρα. Συγκεκριμένα, δημιουργήθηκε μια σύγχυση καθώς τα απείρως μικρά μεγέθη dx και dy έπρεπε να θεωρηθούν αμέσως ως πραγματικές ποσότητες που έχουν θετικό μέγεθος και ως μηδενικές ποσότητες που δεν έχουν μέγεθος. Τέθηκε, λοιπόν, το ερώτημα πώς μπορούν να διατηρηθούν και τα δύο ταυτόχρονα χωρίς να προκαλέσουν αντίφαση.

Ο λογισμός, όμως, όπως και η μέθοδος των αδιαίρετων του Cavalieri, απέφυγαν τέτοια προβλήματα παραβλέποντας τους συνηθισμένους συνθετικούς γεωμετρικούς κανόνες αυστηρότητας και χρησιμοποιώντας τη νέα αλγοριθμική άλγεβρα που δεν διακρινόταν από εναλλακτικούς κανόνες αυστηρότητας (Shank, 2018, σ.155-156). Ο Cavalieri τελικά κατέστησε τα αδιαίρετά του πιο εύπεπτα, τοποθετώντας τα στο ευκλείδειο γεωμετρικό πλαίσιο του έργου του, αλλά ο Leibniz δεν έδωσε καμία τέτοια καθησυχαστική γεωμετρική ερμηνεία. Ο λογισμός του Leibniz προσέφερε, όμως, μια νέα αλγοριθμική σαφήνεια και οικονομία που, σε συνδυασμό με τη μεγάλη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων, ήταν αρκετές ώστε να θεωρηθεί από ορισμένους, όπως ο Bernoulli, ο l'Hopital και ο Varignon, μια νέα καθολική επιστήμη. Ωστόσο, η θέση αυτή δεν ήταν καθολικά αποδεκτή. Ο Huygens, για παράδειγμα. πρώην δάσκαλος και μέντορας του Leibniz, βρήκε το νέο λογισμό αδιαφανή και λιγότερο καινοτόμο από ότι ισχυριζόταν ο εφευρέτης του. Ο Huygens δεν ήταν αντίθετος στη χρήση απειροστικών μεθόδων, καθώς τις χρησιμοποίησε συχνά στο δικό του μαθηματικό έργο. Διαφωνούσε, όμως, με τον ισχυρισμό του Leibniz ότι είχε αναπτύξει μια νέα καθολική επιστήμη ικανή να λύσει ταυτόχρονα όλα τα προβλήματα τετραγωνισμού. Ο L'Hopital ήταν εκείνος που άλλαξε γνώμη στον Huygens, όταν του έδειξε πώς ο λογισμός θα μπορούσε να παραγάγει καινοτόμες λύσεις, οι οποίες δεν ήταν καθόλου εμφανείς όταν χρησιμοποιούνταν συνηθισμένες μέθοδοι. Κατόπιν ο Huygens επαίνεσε τον πρώην μαθητή του για την ανακάλυψη αυτής της νέας μαθηματικής τέχνης, αλλά δεν την αναγνώρισε ως μια νέα μαθηματική επιστήμη.

Όπως ήδη αναφέραμε, και ο Νεύτωνας παρουσίασε έναν λογισμό με αλγεβρικούς κανόνες για την επίλυση προβλημάτων τετραγωνισμού. Ήταν, όμως, πιο απρόθυμος από ό, τι ο Leibniz να προσδώσει σε αυτή την καινοτομία το κύρος μιας νέας μαθηματικής επιστήμης (Shank, 2018, σ.156). Η σχέση του Νεύτωνα με το νέο λογισμό ήταν πολύπλοκη, διότι τη δεκαετία του 1690 αναγνώρισε την αξία των νέων απειροστικών τεχνικών αλλά ανησυχούσε ταυτόχρονα για την εγκυρότητά τους και την επιστημολογική τους αυστηρότητα˙ σε αντίθεση με τον Leibniz που επέδειξε απεριόριστη εμπιστοσύνη στα νέα μαθηματικά, όπως και ο Bernoulli στην Ελβετία και ο l'Hopital και ο Varignon στη Γαλλία.

Οι υποστηρικτές του απειροστικού λογισμού άρχισαν να τον εφαρμόζουν σε μαθηματικά προβλήματα τα οποία προηγουμένως θεωρούνταν άλυτα, με αποτέλεσμα να προκύπτουν νέες, εξωτικές καμπύλες που είχαν αποκλειστεί από την κλασική γεωμετρία λόγω της μηχανικής τους προέλευσης. Οι υπάρχουσες μαθηματικές τεχνικές απλουστεύθηκαν και έγιναν γενικότερες με την εφαρμογή της νέας απειροστικής μεθόδου πάνω σε αυτές. Με τον τρόπο αυτό, ο λογισμός προσέλκυσε μια μικρή ομάδα από μαθηματικούς που πίστευαν ότι η νέα καθολική επιστήμη του Leibniz αποτελούσε μεγάλη μαθηματική πρόοδο. Δημιουργός αυτού του προγράμματος ήταν ο Bernoulli και, κατόπιν, προσχώρησαν στην ομάδα ο l'Hopital και ο Varignon (Shank, 2018, σ.157). Η αναλυτική μηχανική αναπτύχθηκε στο πλαίσιο αυτής της συνεργασίας μετά το 1692. Το έργο τους αφορούσε σε μεγάλο βαθμό την επέκταση του νέου διαφορικού λογισμού, ενώ ταυτόχρονα αγωνίζονταν να αναπτύξουν και τον ολοκληρωτικό λογισμό. Ο ίδιος ο Leibniz συμμετείχε επίσης σε αυτές τις προσπάθειες, όπως και ο Newton, ακόμη και θεωρείτο ως περιθωριακή φιγούρα από την πλευρά του ηπειρωτικού κέντρου.

Η τελευταία γαλλική επιρροή που θα εξετάσουμε, η οποία υπήρξε αποφασιστική στη διαμόρφωση και δημιουργία της αναλυτικής μηχανικής, είναι αυτή του πατέρα Nicolas Malebranche. Όπως τονίζει ο Shank, όλες οι βασικές φιγούρες που έπαιξαν ρόλο στην ανάπτυξη της αναλυτικής μηχανικής θεωρούσαν τον Malebranche ως πνευματικό οδηγό. Η επιρροή του στο γαλλικό πολιτισμό γενικά στις δεκαετίες γύρω στο 1700 ήταν τεράστια και, όπως υποστηρίζει ο Shank, η περίοδος αυτή στη Γαλλία υπήρξε η «στιγμή του Malebranche» (Malebranchian moment) (Shank, 2018, σ.31). Ο Malebranche, με το έργο του *De la recherché de la verite*, που δημοσιεύτηκε 1674 και επανεκδόθηκε το 1712,εισήγαγε το λογισμό του Leibniz στη Γαλλία και του προσέδωσε ευρύτερη επιστημονική σημασία.

Ο Malebranche υποστήριξε ότι η αριθμητική μπορεί να εκφράσει όλες τις απλές και σύνθετες σχέσεις και μάλιστα θεωρούσε την αριθμητική ισχυρότερη από τη γεωμετρία διότι (Shank, 2018,σ. 165):

> Παρέχει τα μέσα για να εκφράσουμε όλες τις απλές και σύνθετες σχέσεις που είναι δυνατές ανάμεσα σε δύο μεγέθη. Δείχνει πώς να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς που συνάγουν αυτές τις σχέσεις από τη μια στην άλλη, και πώς να ανακαλύψουμε τις σχέσεις των μεγεθών που ίσως είναι χρήσιμες από τις ήδη γνωστές. Επίσης, μας

δείχνει πώς να κάνουμε όλα αυτά με επιδεξιότητα, σαφήνεια, και αξιοσημείωτη εκμετάλλευση της περιορισμένης ικανότητας του νου.

Στη συνέχεια, ο Malebranche τονίζει ότι η άλγεβρα και η ανάλυση κάνουν το ίδιο πράγμα με την αριθμητική, αλλά σε πολύ υψηλότερο επίπεδο (Shank, 2018, σ. 165):

> Απλοποιούν τις ιδέες με τον απλούστερο και ευκολότερο τρόπο που μπορούμε να συλλάβουμε. Ότι μπορεί να επιτευχθεί με την αριθμητική μόνο σε πολύ χρόνο, μπορεί να γίνει με την άλγεβρα και την ανάλυση σε ένα λεπτό, και χωρίς το μυαλό να εμπλακεί σε μακροσκελείς διεργασίες. Μια μεμονωμένη αριθμητική διαδικασία ανακαλύπτει μια μόνο αλήθεια, ενώ μια παρόμοια αλγεβρική διαδικασία ανακαλύπτει άπειρες από αυτές.

Φαίνεται, λοιπόν, ότι η άλγεβρα είναι ο βασιλικός δρόμος για τον Malebranche που ανάγει τις σύνθετες σχέσεις στους απλούστερους δυνατούς χαρακτήρες, το αλφάβητο, ενώ η ανάλυση δίνει τη δυνατότητα στην άλγεβρα να προχωρήσει ακόμη περισσότερο. Είναι η ανάλυση που ενοποιεί τις επιμέρους επιστήμες των μεγεθών που αφορούν σχέσεις , συνδυάζοντας τες σε έναν καθολικό λογισμό. Όπως καταλήγει ο Melebranche, ο νέος διαφορικός λογισμός προσέδωσε στη νέα επιστήμη της ανάλυσης απεριόριστο πεδίο εφαρμογής (Shank, 2018, σ.166).

Υπάρχει ένα ολόκληρο δίκτυο επιστημόνων που συνεργάζονται για να φθάσει ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός στη Γαλλία. Ο ιστορικός Andre Robinet χρησιμοποιεί τον όρο «κύκλος του Malebranche», αναφερόμενος στη συνεργασία του με τον Bernoulli και μια ευρύτερη κοινότητα μαθηματικών στη Γαλλία˙ αυτός ο κύκλος είναι που υποδέχτηκε τον λογισμό του Leibniz το 1690 (Shank, 2018, σ.159). Εκτός από τον Bernoulli, αυτός ο κύκλος περιλαμβάνει τον l΄Hospital όπως και πολλούς άλλους που εκπαιδεύονται σε αυτόν. Ακόμη και ο Malebranche γίνεται μαθητής του Bernoulli, μετά από τη συνάντησή του με τον Ελβετό μαθηματικό (Shank, 2018, σ.166). Στη συνέχεια, ο νέος λογισμός διαδόθηκε από τον Malebranche στο εκκλησιαστικό τάγμα όπου ανήκε, στους Oratorians , με βάση τις χειρόγραφες διαλέξεις του Bernoulli. Γεγονός είναι ότι χάρις στην εκτίμηση που είχε το έργο του Malebranche *Recherche* τα νέα μαθηματικά διαδόθηκαν με ακόμη μεγαλύτερη ταχύτητα.

Ακριβώς, λοιπόν, σε αυτά τα χρόνια ο Malebranche αποτελεί μια θεμελιώδη επιρροή στη διαμόρφωση της διανοητικής ζωής στη Γαλλία καθώς και στην ανάπτυξη και διάδοση της αναλυτικής μηχανικής. Από το 1715 και μετά, η αναλυτική μηχανική γίνεται πόλος έλξης για ένα συνεχώς αυξανόμενο πλήθος επιστημόνων˙ καταλυτική επίδραση, όμως, είχε η μηχανική των Euler, d΄Alembert και Langrange, τη συνεισφορά των οποίων θα εξετάσουμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑ ΤΟ 18^{Ο} ΑΙΩΝΑ

3.1 Ο αιώνας της ανάλυσης και της μηχανικής

Ο δέκατος όγδοος αιώνας είναι κοινώς αποδεκτός ως ο αιώνας της ανάλυσης και της μηχανικής. Σύμφωνα με τον C. Fraser, η μεγάλη πρόοδος του λογισμού σχετίζεται με την ανάπτυξη εξειδικευμένων μαθηματικών και τη λεπτομερή παρουσίαση της αδρανειακής μηχανικής που ιδρύθηκε κατά τη διάρκεια της επιστημονικής επανάστασης. Σημειώθηκαν εξελίξεις και σε άλλους μαθηματικούς τομείς – όπως στις εξισώσεις, στη θεωρία αριθμών, στις πιθανότητες και τη στατιστική, ακόμη και στη γεωμετρία - αλλά καμία από αυτές δεν έφτασε στο βάθος και στο πεδίο εφαρμογής που επιτεύχθηκε στην ανάλυση και τη μηχανική (Fraser, 2008, σ. 305).

Η στενή σχέση μεταξύ των μαθηματικών και της μηχανικής είχε μια βάση που επεκτεινόταν βαθιά στη σκέψη του Διαφωτισμού. Ο Jean d'Alembert διακρίνει τα μαθηματικά στα "καθαρά" (γεωμετρία, αριθμητική, άλγεβρα, λογισμός) και στα "μικτά" (μηχανική, οπτική). Ταξινομεί τα μαθηματικά γενικότερα ως «επιστήμη της φύσης» και τα διαχωρίζε από τη λογική, την «επιστήμη του ανθρώπου». Εκείνη την περίοδο ανθίζει ένα εσωτερικευμένο και κριτικό πνεύμα διερεύνησης που σχετίζεται με την εύρεση νέων μαθηματικών δομών (Fraser, 2008, σ.305).

Ο Fraser επιχειρεί να δώσει τη γενική εικόνα που κατέχουν τα μαθηματικά το δέκατο όγδοο αιώνα. Η έρευνα στην Ηπειρωτική Ευρώπη συνδυάστηκε με τις εθνικές επιστημονικές ακαδημίες, εκ των οποίων οι σημαντικότερες ήταν οι ακαδημίες του Παρισιού, του Βερολίνου και της Αγίας Πετρούπολης. Ο Fraser επισημαίνει ότι, σύμφωνα με τον Roger Hahn, η ακαδημαϊκή κοινότητα του δέκατου όγδοου αιώνα επέτρεψε «τη σύζευξη της σχετικής θεωρητικής ελευθερίας σε επιστημονικά ερωτήματα με τις αυστηρές αξιολογήσεις τους από ομότιμους επαγγελματίες» (Fraser, 2008, σ.305). Τα μαθηματικά εξαπλώνονται πλέον και σε πρακτικά θέματα όπως στη ναυσιπλοΐα, στην πειραματική φυσική, τη μηχανική, τη δημογραφία, κ.α. και χάρις σε αυτά οι κατασκευαστές οργάνων πέτυχαν νέα επίπεδα ακρίβειας στη μέτρηση. Και στις γαλλικές σχολές μηχανικής, τα εξελιγμένα μαθηματικά - συμπεριλαμβανομένου του λογισμού - εισήχθησαν για πρώτη φορά στο πρόγραμμα σπουδών (Fraser, 2008, σ.306).

Κύριοι αντιπρόσωποι των αναλυτικών μαθηματικών του δέκατου όγδοου αιώνα υπήρξαν οι Leonhard Euler και Joseph Luis Lagrange. Μαζί κυριάρχησαν στην περιοχή των αναλυτικών μαθηματικών από το 1740 έως τις αρχές του επόμενου αιώνα. Τα γραπτά τους, και πιο συγκεκριμένα οι εκτεταμένες συνεισφορές τους στην ανάλυση, καθόριζαν την προηγμένη μαθηματική δραστηριότητα. Ο Fraser τονίζει ότι είναι πολύ σημαντική η ιδιαίτερη αντίληψη της αλγεβρικής ανάλυσης που παρουσιάστηκε στις εργασίες τους διότι διαφέρει από τη σημερινή. Η διαφορά έγκειται στο πώς επιτυγχάνεται η καθολική εγκυρότητα στα μαθηματικά (Fraser, 2008, σ.307).

Ένας άλλος ιστορικός των μαθηματικών, ο H. J. M Bos, επιχειρεί να παρουσιάσει τις εξελίξεις στα μαθηματικά και τη μηχανική του δέκατου όγδοου όπως τις αντιλαμβάνεται ένας σύγχρονος αυτού του αιώνα, ο J. E. Montucla (Bos, 1980, σ. 329). Ο Montucla (1725-1799). διαχωρίζει τα ΄΄καθαρά μαθηματικά΄΄, που αφορούν τις σχέσεις των ποσοτήτων ανεξάρτητα από τα αντικείμενα που μετρούν, από τα ΄΄μικτά μαθηματικά΄΄ που αφορούν τις ποσότητες και τις σχέσεις τους όπως προκύπτουν από τα φυσικά αντικείμενα που μετρώνται. Η παραπάνω διάκριση είναι καλύτερη από την αντίστοιχη σύγχρονη διάκριση σε ΄΄καθαρά΄΄ και ΄΄εφαρμοσμένα΄΄ μαθηματικά, διότι με βάση τη σύγχρονη διάκριση υπονοείται εσφαλμένα ότι είτε κάποιος εξασκεί τα μαθηματικά είτε παίρνει ένα έτοιμο πακέτο μαθηματικών και το εφαρμόζει παντού (Bos, 1980, σ.329).

Στην εικόνα που σκιαγραφεί ο Montucla για τα καθαρά μαθηματικά αναφέρει ότι επικρατεί τόσο στασιμότητα όσο και εξέλιξη, ότι η γεωμετρία θεωρείται μεν αξιοπρεπής αλλά όχι γόνιμη και ότι στην άλγεβρα η πολυπλοκότητα των υπολογισμών θέτει αξεπέραστα εμπόδια στην πρόοδο. Παρουσιάζονται τα προβλήματα και οι αρχές (η αρχή των ζώσων δυνάμεων, η αρχή της ελάχιστης δράσης) που διαμορφώνονται το δέκατο όγδοο αιώνα και αναδεικνύεται το έργο του Langrange διότι κατορθώσε να μειώσει και να επιλύσει τα προβλήματα ομαδοποιώντας τα σε γενικούς τύπους (Bos, 1980, σ.329-330).

Ο Bos παρουσιάζει και μια πιο πρόσφατη προσπάθεια να σκιαγραφηθεί η εικόνα των μαθηματικών του δέκατου όγδοου αιώνα. Σύμφωνα με τον Klein (1972), το δέκατο όγδοο αιώνα υποχωρούν οι γεωμετρικες μέθοδοι, μειώνεται ο βαθμός αυστηρότητας των αποδείξεων και σημειώνεται τεράστιο ενδιαφέρον για την ανάλυση. Σημειώνεται αύξηση των τρόπων επικοινωνίας μέσα στην επιστημονική κοινότητα και οι ακαδημίες σηματοδοτούνται ως βάσεις για την ανάπτυξη των μαθηματικών. Το 1980 αυτή ήταν η επικρατούσα εικόνα του δέκατου όγδοου αιώνα που δεν τόνιζε πρόσωπα, επιτεύγματα και θεωρίες αλλά στύλ, προβλήματα και συνθήκες (Bos, 1980, σ.332).

Μια ακόμη εικόνα για τις εξελίξεις στη μηχανική το δέκατο όγδοο αιώνα δίνει ο E. Mach στο αξιοσημείωτο έργο του Die Mechanik (1883). Σύμφωνα με τον Mach, οι διάφορες αρχές της μηχανικής, όπως η διατήρηση της vis viva, η αρχή της ελάχιστης δράσης κ.α. άλλες, υποδηλώνονται στους νόμους του Νεύτωνα και αποτελούν προσπάθειες για την οικονομική οργάνωση των συμπερασμάτων στη μηχανική (Bos, 1980, σ. 333).

Στο ίδιο πνεύμα κινείται και ο R. Dugas στο έργο του *Historie de la mechanique*, καθώς δηλώνει ότι: «Η κλασική μηχανική δημιουργήθηκε το δέκατο έβδομο αιώνα. Η εργασία που απέμεινε ήταν να ταξινομηθεί και να αναπτυχθεί σε γενικές αρχές: αυτό ήταν το έργο του δέκατου όγδοου αιώνα» (Dugas, 1950, σ. 221). Συγκεκριμένα, η μηχανική του δέκατου έβδομου αιώνα δημιουργείται από τον Γαλιλαίο, το Huygens και το Νεύτωνα ενώ η μηχανική του δέκατου όγδοου αιώνα βασίζεται σε *αρχές* και όχι σε πρόσωπα. Αξιοσημείωτη είναι η δήλωση του Dugas ότι «Μέσω του Lagrange η συλλογική εργασία του δέκατου όγδοου αιώνα τελικά οδήγησε σε μια οργανωμένη επιστήμη της οποίας η μορφή αγγίζει την τελειότητα» (Dugas, 1950, σ. 221).

Αποτελεί, λοιπόν, κοινή άποψη, σημειώνει ο Bos, ότι ολόκληρη η μηχανική μέχρι τον Αινστάιν στηριζόταν στους νόμους του Νεύτωνα. Απο τη δεκαετία του 1950, όμως, αυτή η άποψη αμφισβητήθηκε και ο δέκατος όγδος αιώνας δεν θεωρείται πλέον ως ο αιώνας που απλώς αξιοποίησε το πλούσιο υλικό των Principia (Bos, 1980, σ.334).Την ανατρεπτική αντίληψη ότι τα θεμέλια της μηχανικής οικοδομήθηκαν, κυρίως, το δέκατο όγδοο παρά το δέκατο έβδομο αιώνα υποστήριξε ο ιστορικός της επιστήμης C. A. Truesdell III. Τη δεκαετία του 1730 η μηχανική και τα μαθηματικά βρίσκονται σε διαρκή αλληλεπίδραση. Ο Truesdell ισχυρίζεται ότι η «μηχανική συνεχών μέσων πυροδότησε όλα τα νέα θεμελιώδη προβλήματα στην ανάλυση». Οι ελλειπτικές συναρτήσεις προέρχονται από τις μελέτες του Jacob Bernoulli στα ελαστικά μέσα. Η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές του Euler προήλθε από τη μελέτη των ταλαντώσεων μιας ελαστικής χορδής. Οι δονήσεις μεμβρανών, που μελετήθηκαν από τον Euler, οδήγησαν στη μελέτη των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιοσυναρτήσεων (Βος, 1980, σ. 338).

Σύμφωνα με τη αφήγηση του Truesdell, ο δέκατος όγδοος αιώνας είναι πολύ γόνιμος για τη μηχανική. Παρέχει σαφήνεια και τάξη, ιδιότητες που δίνουν τη δυνατότητα απάντησης σε σημαντικές ερωτήσεις. Διερευνώνται καίρια ερωτήματα, όπως αν και κατά πόσο έχει υπερεκτιμηθεί η επιρροή του Νεύτωνα και ποιος ήταν ο ρόλος που διαδραμάτισαν τα Principia στην ανάπτυξη της μηχανικής το δέκατο όγδοο αιώνα. Επισημαίνονται, λοιπόν, μέρη της μηχανικής τα οποία ο Νεύτωνας δεν άγγιξε καθόλου (μηχανική συνεχών μέσων και υδρομηχανική), προκειμένου να αποδειχθεί ότι πολλές παραδόσεις, έννοιες και προβλήματα αυτών των πεδίων εισήλθαν το δέκατο όγδοο αιώνα παρακάμπτοντας τα Principia (Bos, 1980, σ.338).

Θεμελιωτής της μηχανικής του δέκατου όγδοου αιώνα, στο έργο του Truesdell, θεωρείται ο Euler και υποβαθμίζεται η επίδραση των d΄Alembert και Langrange. Η διάκριση, όμως, αυτή δεν είναι κοινώς αποδεκτή και μπορεί να αμφισβητηθεί από την ίδια την ιστορία της μηχανικής (Bos, 1980, σ.339). Ο Truesdell υπερασπίζεται την άποψή του δηλώνοντας ότι οι περισσότερες αρχές που διατυπώθηκαν το δέκατο όγδοο αιώνα δεν διαχωρίστηκαν ξεκάθαρα από τους μαθηματικούς τύπους. Συγκεκριμένα, η αρχή της ελάχιστης δράσης, η αρχή της vis viva και ο φορμαλισμός του Langrange δεν αποτέλεσαν κεντρικό θέμα σε αυτήν την ιστορία της μηχανικής διότι δεν διαχώρισαν ξεκάθαρα τις αρχές από τις μαθηματικές εξισώσεις. Ενώ, λοιπόν, ο φορμαλισμός του Lagrange αναγνωρίστηκε ως εξέχων από τον Dugas και σχεδόν όλους τους προηγούμενους συγγραφείς, στην αφήγηση του Truesdell ο Langrange βρίσκεται στη σκιά του Euler (Bos, 1980, σ.340-341).

Κατά το δέκατο όγδοο αιώνα παρουσιάζεται μια νέα προσέγγιση στα μαθηματικά που ονομάζεται μη- κλασική ανάλυση (non-standard analysis). Σύμφωνα με τον Bos, η μη κλασική ανάλυση αποτελεί μια αυστηρή μαθηματική θεωρία για τους πάρα πολύ μικρούς ή μεγάλους αριθμούς. Από την άποψη αυτή, ο λογισμός μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως μια θεωρία βασισμένη στην ιδέα των απείρως μικρών διαφορικών. Για παράδειγμα, η μη κλασική ανάλυση μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης ως το πηλίκο των αντίστοιχων διαφορικών της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής (Βος, 1980, σ. 342).

Ο C. B. Boyer, στο έργο του The history of the Calculus and its Conceptual Development (1949), παρουσιάζει το δέκατο όγδοο αιώνα ως μια ΄΄περίοδο αναποφασιστικότητας΄΄ ως προς τη θεμελίωση του λογισμού λόγω της έλλειψης ισχυρής βάσης από τον προηγούμενο αιώνα. Ο Leibniz θεώρησε τις απείρως μικρές διαφορικές ποσότητες ως βασική ιδέα του λογισμού του ενώ ο Νεύτωνας χρησιμοποίησε τη ροή, την ταχύτητα ή το ρυθμό μεταβολής ως βασική του ιδέα. Σύμφωνα με τον Boyer, και τα δύο πλαίσια ήταν ανεπαρκώς θεμελιωμένα, διότι ο Leibniz δεν όρισε τις ΄΄απειροστά μικρές΄΄ ποσότητες και ο Νεύτωνας εξέλαβε την ταχύτητα ως μια μη ορισμένη πρωταρχική έννοια. Η έλλειψη αποσαφήνισης αποτυπώθηκε από την αρχή του αιώνα και το πρόβλημα έγινε πιο πιεστικό μετά την εξαιρετικά αιχμηρή κριτική του επίσκοπου Berkeley που δήλωσε ότι ο λογισμός βασίστηκε σε έννοιες πολύ λιγότερο προφανείς από αυτές που χρησιμοποιούνται συνήθως στα θεολογικά ζητήματα. Παρά την κριτική, όμως, στη Βρετανία μεγάλος αριθμός μαθηματικών υπερασπίστηκε τις ροές του Νεύτωνα. Ο Maclaurin, συγκεκριμένα, παρουσίασε τη θεωρία σε αυστηρά κλασικό γεωμετρικό στυλ, αλλά δεν μπορούσε να λύσει το βασικό πρόβλημα του ορισμού της ροής (Bos, 1980, σελ. 342).

Στην Ηπειρωτική Ευρώπη η αντίδραση των μαθηματικών της Λαιβνίτιας σχολής ήταν ανάμεικτη (Bos, 1980, σ.343). Ο Euler, όπως οι περισσότεροι επαγγελματίες μαθηματικοί, δεν ενδιαφέρθηκε πολύ για την ερώτηση. Πρότεινε ότι τα διαφορικά ήταν κυρίως σύμβολα που χρησιμοποιούνται για το 0, χρήσιμα για να διαχωρίσουν ανάμεσα στις πολλές τιμές που μπορεί να πάρει ο λόγος 0/0. Ο D΄Alembert πρότεινε το 1754 ότι η λύση του προβλήματος έγκειται στη θεώρηση του λόγου dy/dx ως το όριο της ποσότητας (y1 - y)/ (x1 - x). Αργότερα, ο Lagrange ήλπιζε να εξαλείψει το ζήτημα εντελώς με μια καθαρά τυπική προσέγγιση (Bos, 1980, σ.343). Ο Boyer θεωρεί ότι αν ο Νεύτωνας είχε ξοδέψει περισσότερο χρόνο σχετικά με τη θεμελίωση του λογισμού, η αναποφασιστικότητα του δέκατου όγδοου αιώνα δεν θα υπήρχε (Bos, 1980, σ. 343).

Η έννοια των απειροστών στη μη-κλασική ανάλυση διαφοροποιεί το δέκατο όγδοο από τον δέκατο έβδομο αιώνα, καθώς η απόδειξη της ύπαρξης των απειροελάχιστων ποσοτήτων δεν θα μπορούσε ποτέ να έχει δοθεί στα τέλη του δέκατου έβδομου. Δεύτερον, πριν τον Euler, κανένας μαθηματικός δεν αντιλήφθηκε τα απειροστά ως ενδιάμεσης τάξης. Στο λογισμό των διαφορικών, όπως δημιουργήθηκε από τον Leibniz, η σειρά των απειροστών αποτελείται καθαρά από διαφορικά πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης. Αυτό σημαίνει ότι για το πρώτο μισό του δέκατου όγδοου αιώνα η έννοια της σειράς απειροστών ήταν αρκετά διαφορετική από αυτήν στη μη-κλασική ανάλυση (Bos, 1980, σ. 344-345). Και τρίτον, ο Bos σημειώνει ότι η μη-κλασική ανάλυση σχετίζεται με αριθμούς και συναρτήσεις ενώ στη αρχή του δέκατου όγδοου αιώνα η ανάλυση ασχολήθηκε κυρίως με γεωμετρικά μεγέθη και μεταβλητές (Bos, 1980, σ. 344- 345).

Το πρώτο μισό του δέκατου όγδοου αιώνα χαρακτηρίζεται από τον σταδιακό διαχωρισμό της ανάλυσης από τη γεωμετρία. Το δέκατο έβδομο αιώνα η ανάλυση εμφανίζεται ως μια συλλογή μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων, που περιείχαν αλγεβρικούς κανόνες και τύπους. Ο Leibniz και ο Νεύτωνας εισήγαγαν σύμβολα για τις απειροελάχιστες ποσότητες μέσα σε αυτό το σώμα αλγεβρικών τεχνικών αλλά η ανάλυση παρέμεινε μόνο μια συλλογή μεθόδων και τα προβλήματα στα οποία εφαρμόστηκε ήταν γεωμετρικά. Το δέκατο όγδοο αιώνα, σημειώνει ο Bos, το ενδιαφέρον μετατοπίστηκε από αυτό το γεωμετρικό πλαίσιο, και συγκεκριμένα από τις καμπύλες και τις μεταβλητές που σχετίζονται με τις καμπύλες, στις αναλυτικές εκφράσεις και στις τυπικές αλγεβρικές πράξεις με αυτές τις εκφράσεις. Σε αυτήν τη διαδικασία ΄΄απογεωμετρικοποίησης΄΄ της ανάλυσης η έννοια της ΄συνάρτησης΄ εμφανίστηκε ως κεντρική και απέκτησε σημανική θέση όταν ο Euler τη χρησιμοποίησε ως θεμελιώδη έννοια στο έργο του Introduction to the Analysis of Infinites (1748) (Bos, 1980, σ. 345).

Σημαντικό είναι, επίσης, να ληφθεί σοβαρά υπόψη ο πρόδρομος της έννοιας της συνάρτησης. Σύμφωνα με τον Bos, το γεγονός ότι η έννοια της συνάρτησης διατυπώθηκε ρητά το δέκατο όγδοο αιώνα μπορεί να σημαίνει είτε ότι είχε ήδη προυπάρξει σιωπηρά χωρίς να έχει τυπικά οριστεί είτε ότι αντικατέστησε μια άλλη ιδέα. Ο Bos υποστηρίζει ότι η συνάρτηση αντικατέστησε την έννοια της μεταβλητής ποσότητας, ή τη ΄΄μεταβλητή΄΄ εν συντομία. Οι μεταβλητές διαφέρουν από τις συναρτήσεις και είναι, για παράδειγμα, η τετμημένη, η τεταγμένη, και το μήκος τόξου ή, σε ένα πρόβλημα φυσικής, ο χρόνος, η ταχύτητα και η μετατόπιση. Η έννοια της συνάρτησης συνεπάγεται μια καθορισμένη κατεύθυνση μεταξύ ΄΄ανεξάρτητης΄΄ και ΄΄εξαρτημένης΄΄ μεταβλητής, σε αντίθεση με την περίπτωση των μεταβλητών, όπως αυτές χρησιμοποιούνται σε προβλήματα μαθηματικών και φυσικής, όπου δεν υπάρχει τέτοιος διαχωρισμός ρόλων. Δεν αποδίδεται, δηλαδή, στις μεταβλητές ένας ιδιαίτερος ρόλος (Bos, 1980, σ. 347-348).

Το γεγονός ότι οι μεταβλητές δεν εμφανίζονται μεμονωμένα αλλά σε προβλήματα μηχανικής ή γεωμετρίας συνδέεται με τη διαδικασία αποχωρισμού της ανάλυσης από τη γεωμετρία. Επιπλέον, ο Bos θεώρησε πολύτιμο τον εξειδικευμένο ρόλο των μεταβλητών, καθώς διευκολύνει την κατανόηση της πρώιμης μορφής της απειροστικής ανάλυσης όπως εφαρμόστηκε από τον Leibniz και τους ακολούθους του το 1690 μέχρι και τις αρχές του δέκατου όγδοου αιώνα (Bos, σ.348). Στο πρώτο μισό του αιώνα εμφανίζεται η θεωρία της μερικής διαφόρισης και των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ο απειροστικός λογισμός που δημιουργήθηκε αρχικά για προβλήματα σε μια διάσταση (κυρίως καμπυλών) επεκτάθηκε σε προβλήματα δύο ή και περισσότερων διαστάσεων. Αυτή η μετάβαση χαρακτηρίζεται από σημαντική εννοιολογική δυσκολία (Bos, 1980, σ.349).

Συγκεκριμένα, όπως αναλύει ο Bos, η σημασία των προβλημάτων που αφορούν ομάδες καμπυλών γίνεται σαφής. Τέτοιου είδους προβλήματα μελετήθηκαν εκτενώς στις αρχές του δέκατου όγδοου αιώνα και δημιούργησαν ένα ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ δύο τύπων προβλημάτων. Από τη μια πλευρά, προβλήματα που αφορούσαν καμπύλες και θεωρούνται υπόδειγμα για την πρώιμη μορφή προβλημάτων του απειριστικού λογισμού. Και από την άλλη πλευρά, όπως σημειώνει ο Bos, προβλήματα δύο ή περισσότερων διαστάσεων (όπως είναι οι επιφάνειες) τα οποία μελετήθηκαν με τη βοήθεια τεχνικών μερικής διαφόρισης. Τα προβλήματα τροχιάς συνδέονται στενά με τα άρθρα του Euler του 1740, όπου εμφανίστηκαν για πρώτη φορά οι μερικές διαφορικές εξισώσεις. Η μελέτη, λοιπόν, του Euler στις μερικές διαφορικές εξισώσεις μπορεί να θεωρηθεί ως λογικό αποτέλεσμα των μελετών του πάνω στις τροχιές και στην αναλυτική αναπαράσταση ομάδων καμπυλών (Bos, 1980, σ. 350).

Εν κατακλείδι, ο Bos διατυπώνει την άποψη ότι μπορούμε να διακρίνουμε τρεις φάσεις στην εξέλιξη της ανάλυσης κατά το δέκατο όγδοο αιώνα. Στην πρώτη φάση, που εκτείνεται στο πρώτο μισό του δέκατου όγδοου αιώνα, εμφανίζεται ως κεντρικό πρόβλημα η εφαρμογή των νέων μεθόδων σε προβλήματα με περισσότερες διαστάσεις. Ταυτόχρονα στην ανάλυση πραγματοποιείται μια σταδιακή ΄απογεωμετρικοποίηση΄. Στη δεύτερη φάση, στα μέσα του αιώνα, η έννοια της συνάρτησης ως αναλυτικής έκφρασης καταλαμβάνει κεντρική θέση. Η ανάλυση ενοποιήθηκε γύρω από την έννοια της συνάρτησης ως μια θεωρία που αφορά κανόνες και τύπους υπολογισμού, μακριά από οποιοδήποτε γεωμετρικό υπόβαθρο. Και στην τρίτη φάση, που εξελίσσεται το δεύτερο μισό του δέκατου όγδοου αιώνα, εμφανίζονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι αναλυτικοί μαθηματικοί διότι έρχονται αντιμέτωποι με τις αντιφάσεις που ενέχει η αποκλειστικά αναλυτική προσέγγιση. Αποδεικνύεται αδύνατη, όπως σημειώνει ο Bos, η θεμελίωση του λογισμού χωρίς την προσφυγή σε γεωμετρικά επιχειρήματα για τη φύση των ποσοτήτων (Bos, 1980, σ. 350).

3.2 Η διαμάχη για τη vis -viva

Στα τέλη του δέκατου έβδομου αιώνα λαμβάνει χώρα μια διαμάχη σχετική με το ερώτημα αν η φύση μπορεί αδιάκοπα να λειτουργεί, σύμφωνα με τους αποδεδειγμένους νόμους, χωρίς την παρέμβαση του Θεού ή αν η παρέμβασή του είναι αναγκαία. Η αντιπαράθεση αυτή ονομάστηκε «διαμάχη για τη vis-viva» (διαμάχη για τη ζώσα δύναμη). Βασικοί εκπρόσωποι των δύο αντιμαχόμενων πλευρώντης αντιπαράθεσης υπήρξαν από τη μια πλευρά ο Leibniz, που θεωρούσε ότι η διατήρηση της ποσότητας της δύναμης στο σύμπαν καθιστά περιττή την παρέμβαση του Θεού, και από την άλλη πλευρά ο Νεύτωνας που υποστήριζε ότι ήταν αναγκαία η παρέμβαση του Θεού. Η διαμάχη, λοιπόν, στράφηκε στην εύρεση ή απουσία μιας ποσότητας που να παραμένει αναλλοίωτη. Ο Descartes θεώρησε ότι το μέγεθος που διατηρείται είναι το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα. Ο Leibniz, αργότερα, θεώρησε ότι η ποσότητα που διατηρείται είναι η vis viva, δηλαδή η μάζα επί την ταχύτητα στο τετράγωνο (Θ. Αραμπατζής, Κ.Γαβρόγλου, Δ. Διαλέτης, Γ. Χριστιανίδης, Ν. Κανδεράκης, Σ. Βερνίκος, 1999, σ. 172- 173).

Συγκεριμένα, όπως επισημαίνει ο Τ. Hankins, η διαμάχη ξεκίνησε το 1686 με τη δημοσίευση του άρθρου του Leibniz ΄Μια σύντομη απόδειξη ενός αξιοσημείωτου σφάλματος του Descartes΄. Σε αυτό το άρθρο ο Leibniz υποστήριζει ότι ήταν λανθασμένη η θεώρηση του Descartes σχετικά με την ποσότητα κίνησης που διατηρείται. Ο Descartes, όπως προαναφέραμε, είχε θεωρήσει ότι η ποσότητα που διατηρείται στο σύμπαν είναι το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα (mu), ενώ ο Leibniz εξετάζει το ζήτημα διακρίνοντας δύο είδη ΄δύναμης΄ (Hankins, 1970, σ. 204-205). Το πρώτο είδος δύναμης είναι η νεκρή δύναμη ή vis mortua που σχετίζεται άμεσα με την πίεση και το δεύτερο είδος είναι η ζώσα δύναμη ή vis viva που σχετίζεται με την κίνηση του σώματος. Ο Leibniz μελέτησε τους νόμους του Γαλιλαίου για την πτώση των σωμάτων και πρότεινε ότι είναι το δεύτερο είδος δύναμης, η vis viva, αυτή που διατηρείται και το μέτρο της είναι η ποσότητα mu2 (Hankins, 1970, σ. 205).

Η διαμάχη για τη *vis viva* εντείνεται συνεχώς και διακεκριμένοι φιλόσοφοι της εποχής παίρνουν θέση στο ζήτημα. Οι άγγλοι φιλόσοφοι, ειδικά ο Samuel Clarke και ο Colin Maclaurin, παρέμειναν πιστοί στην καρτεσιανή οπτική. Σημαντικοί, όμως, ΄΄Νευτωνιστές΄΄ και ΄΄Καρτεσιανοί΄΄ όπως ο Jean Bernouli, η Μαρκησία du Châtelet και ο 's Gravesande τοποθετήθηκαν υπέρ του Leibniz και της vis viva. Ο Huygens προσπάθησε να αποσαφηνίσει την κατάσταση στο έργο του De motu corporum (1669), δηλώνοντας ότι διατήρηση της ποσότητας κίνησης υφίσταται μόνο όταν η ορμή θεωρείται διανυσματικό μέγεθος ενώ η διατήρηση της vis viva ισχύει μόνο για απόλυτα ελαστικές κρούσεις. Δεν κατάφερε, όμως, να επιλύσει τη διαμάχη διότι αντιμετώπισε το πρόβλημα μεμονωμένα και όχι εγκαθιδρύοντας γενικούς νόμους (Hankins, 1970, σ. 205-206).

Όπως τονίζει ο Τ. Hankins, ο σύγχρονος αναγνώστης κατανοεί εύκολα το πώς η διαμάχη έπρεπε να επιλυθεί και, επομένως, βρίσκει περίεργο το γεγονός ότι η διαμάχη κράτησε πενήντα χρόνια. Πλέον, η διατήρηση της ΄΄ποσότητας κίνησης΄΄ του

Descartes είναι ισοδύναμη με την αρχή διατήρησης της ορμής ενώ η διατήρηση της vis viva του Leibniz είναι ισοδύναμη με την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Γνωρίζουμε ότι και οι δύο νόμοι, σε μία διαφορετική εκδοχή, είναι έγκυροι στην κλασική μηχανική, οπότε συμπεραίνουμε ότι ο Descartes και ο Leibniz δεν αναφέρονταν, στην πραγματικότητα, στο ίδιο φυσικό μέγεθος. Το γεγονός, όμως, ότι όλα τα μαθηματικά εργαλεία ήταν διαθέσιμα ήδη στην εποχή τους δείχνει ότι το πρόβλημα αφορούσε τη σύνδεση της σωστής φυσικής ερμηνείας με τους τύπους (Hankins. 1970, σ. 206).

Στο επίκεντρο της διαμάχης βρέθηκε η φύση των σωματιδίων της ύλης. Συγκεκριμένα, θεωρώντας τα άτομα απολύτως ελαστικές σφαίρες ισχύουν και οι δύο νόμοι αλλά οι αποδείξεις για την ύπαρξη απόλυτα ελαστικών ατόμων ήταν υπερβολικά αφηρημένες και ασαφείς. Αντιθέτως, εάν τα άτομα θεωρούνταν ως σκληρές, μη ελαστικές σφαίρες παρέμενε έγκυρος μόνο ο νόμος διατήρησης της ορμής. Ο Jean Le Rond d΄Alembert, όπως σημειώνει ο T. Hankins, κατακρίνει όλες τις σύγχρονές του θεωρίες στο άρθρο του ΄ Elasticité΄ και αποδέχεται τη διατήρηση της vis viva μόνο ως καθαρά μαθηματικής έκφρασης για τη λύση συγκεκριμένων προβλημάτων και όχι ως καθολικό νόμο (Hankins, 1970, σ. 206).

Η δημοσίευση του έργου Traité de dynamique από τον D΄ Alembert το 1743 φάνηκε να εξομαλύνει τη διαμάχη. Παρόλο, όμως, που την έκδοση του βιβλίου ακολούθησε μια περίοδος ηπιότερης αντιπαράθεσης, δεν επιτεύχθηκε πλήρης συμφωνία. Όπως επισημαίνει ο B. Hepburn, κατά τη δεκαετία του 1960 εμφανίζονται έγγραφα που αποδεικνύουν ότι ο d΄Alembert δεν ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να υποβαθμίσει τη διαμάχη σε μια απλή διαμάχη λέξεων. Και αποδεικνύεται, επιπλέον, από αυτά τα έγγραφα ότι η έκβαση της προσπάθειάς του ήταν αρνητική (Hepburn 2009, σ. 120).

Η επικριτική στάση του D΄Alembert, σχετικά με την έννοια της δύναμης, επισήμανε την πλάνη στις θεωρίες που τοποθέτησαν μια δύναμη στο εσωτερικό ενός άυλου σώματος. Η επίθεση, λοιπόν, του D΄Alembert στην έννοια της δύναμης ενός σώματος σε ΄κίνηση΄ υπήρξε πολύτιμη για την αποσαφήνιση μηχανικών εννοιών. Η υποβάθμιση, όμως, της διαμάχης για τη vis viva σε μια ΄΄διαμάχη λέξεων΄΄ δεν έπεισε ουσιαστικά. Ο T. Hankins υποστηρίζει, μαλιστα, ότι D΄Alembert δεν μπορούσε να κατανοήσει σε βάθος όλα τα σημεία των ζητημάτων. Είχαν εκφράσει και άλλοι προγενέστεροί του την άποψη ότι η vis viva είναι μια διαμάχη λέξεων, οπότε ουσιαστικά είναι σαν ο D΄Alembert να προσθέτει τη φωνή του σε αυτούς. Σύμφωνα τον Hankins, η vis viva δεν είναι σε καμία περίπτωση απλά μια διαμάχη λέξεων, καθώς απαιτείται μια εις βάθος κατανόηση των φυσικών φαινομένων που περιγράφονται από τις λέξεις (Hankins, 1970, σ. 207).

Ο D΄Alembert δεν παίρνει ξεκάθαρα θέση σχετικά με τη διαμάχη της *vis viva* στην πραγματεία του *Traité de dynamique*, τη στιγμή που σημαντικοί μαθηματικοί όπως ο Leibniz, ο Bernoulli και ο Maclaurin είχαν, ήδη, τοποθετηθεί. Οι δηλώσεις του D΄Alembert ότι η διαμάχη είναι ΄΄μια εντελώς μάταιη μεταφυσική συζήτηση΄΄ και ότι πρόκειται για ΄΄μια διαμάχη λέξεων ανάξια για να αποσχολεί φιλοσόφους΄΄ δεν κρίνονται ως ουσιαστικές. Η δήλωση, όμως, του D΄Alembert ότι οι δυνάμεις μπορούν να μετρηθούν μόνο από τα αποτελέσματά τους είναι, σύμφωνα με τον Hankins, σημαντική, παρόλο που παραμένει ασαφές το ποια αποτελέσματα ήταν ανάλογα της ταχύτητας και ποια αποτελέσματα ήταν ανάλογα με το τετράγωνο της ταχύτητας. (Hankins, 1970, σ. 207-208). Ο ίδιος ο D΄Alembert επιχείρησε να κατηγοριοποιήσει τα αποτελέσματα της δύναμης παρουσιάζοντας τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

> Στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα ανάγεται σε μια απλή τάση η οποία, ορθά μιλώντας, δεν έχει κανένα ακριβές μέτρο, αφού καμία κίνηση δεν απορρέει από αυτή. Στη δεύτερη περίπτωση το αποτέλεσμα είναι η ομοιόμορφη κίνηση του σώματος σε ένα δεδομένο χρόνο και αυτό το αποτέλεσμα είναι ανάλογο της ταχύτητας. Στην τρίτη περίπτωση το αποτέλεσμα είναι η διάσχιση του χώρου μέχρι η κίνηση να σταματήσει εντελώς και το αποτέλεσμα αυτό είναι ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας (D΄Alembert, 1758, σ. xxii-xxiii).

Στο παραπάνω απόσπασμα θεωρείται ότι η στιγμιαία ταχύτητα είναι η ίδια είτε είναι ΄΄εικονική΄΄ (virtual), είτε είναι πραγματική και ομοιόμορφη, είτε είναι σταθερά μεταβαλλόμενη. Όπως, όμως, επισημαίνει ο Hankins τα παραδείγματα δεν βοηθούν στην αποσαφήνιση του θέματος, διότι η πρώτη περίπτωση δεν σχετίζεται άμεσα με τη διατήρηση της vis viva καθώς δεν συμβαίνει καμία αλλαγή κίνησης, στη δεύτερη περίπτωση δεν εξηγείται επακριβώς το πώς η ομοιόμορφη κίνηση προκύπτει ως

΄αποτέλεσμα΄, και στην τρίτη μπορούν να μετρηθούν και η vis viva και η ορμή (Hankins, 1970, σ. 208).

Ο Hankins σχολιάζει ότι η διαμάχη για τη *vis viva* δεν μπορούσε μόνο να επιλυθεί από μια απλή μελέτη των μαθηματικών εκφράσεων, δεδομένου ότι οι μαθηματικοί τύποι ήταν, ήδη, διαθέσιμοι. Η διαφορική έκφραση $F dx = mu\, du$ εμφανίζεται από την αρχή του λογισμού σε διάφορες πραγματείες, όπως του Leibniz, του Varignon, του Hermann, του Euler, του Jean Bernoulli και του D΄Alembert, και η έκφραση $F\, dt = m\, du$ ήταν εξίσου συνήθης. Χρειάστηκε μια πειραματική κατανόηση των κρούσεων προκειμένου να φανεί ποια ποσότητα πράγματι διατηρείται και ποια όχι. Τέτοιου είδους πειράματα εκτελέστηκαν από τους William ΄sGravesande, από τον Jean Poleni, και Edmée Mariotte (Hankins, 1970, σ. 209).

Ο Hankins σημειώνει τη θέση του D΄Alembert ότι η *vis viva* δεν διατηρείται στην κρούση τέλεια σκληρών σφαιρών και ότι ο νόμος διατήρησης είναι έγκυρος μόνο όταν υπάρχει μια μη πεπερασμένη στιγμιαία αλλαγή στην ταχύτητα. Στη δεύτερη έκδοση του Traité de dynamique καταγράφονται προβλήματα που δείχνουν τη διατήρηση της vis viva χωρίς όμως σαφή αιτιολόγηση (Hankins, 1970, σ. 211). Ο τρόπος που αντιμετώπισε ο D΄Alembert την αρχή διατήρησης της vis viva δείχνει τις αδυναμίες της μηχανικής του. Σε ένα σύστημα σκληρών σωμάτων που συγκρούονται μπορεί να εφαρμοστεί μόνο η αρχή διατήρησης της ορμής διότι η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται σε ενα τέτοιο σύστημα. Το γεγονός, μάλιστα, ότι εξαιρείται και η έννοια της δύναμης από το σύστημα έχει ως αποτέλεσμα μια πολύ περιορισμένη βάση στη μηχανική του D΄Alembert (Hankins, 1970, σ. 213).

Ο B. Hepburn παρουσιάζει την προσέγγιση του Leonard Euler για το ζήτημα της vis viva εστιάζοντας, αρχικά, στη φύση της αδράνειας (Hepburn, 2009, σ. 121). Τα σώματα παραμένουν στην ίδια κατάσταση είτε ηρεμούν είτε κινούνται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Η αδράνεια δεν είναι μια δύναμη με τη συνήθη έννοια. Ο ίδιος ο Euler δηλώνει ότι «Εάν κάποιος δώσει το όνομα Δύναμη στην αιτία που προκαλεί την αλλαγή της κινητικής κατάστασης των σωμάτων, τότε η αδράνεια, που είναι η ιδιότητα να παραμένουν τα σώματα στην κινητική τους κατάσταση, δεν μπορεί κανονικά να ονομαστεί Δύναμη» (Euler, 1746, σ. 22).

Η αδράνεια, όμως, μπορεί να θεωρηθεί ως δύναμη υπό μια πιο διευρυμένη έννοια (Hepburn, 2009, σ. 122). Νοείται ως δύναμη, σύμφωνα με τον Euler, όταν ένα σώμα λειτουργεί ως εμπόδιο και αλλάζει την κινητική κατάσταση άλλων σωμάτων:

> Συμβαίνει συνεχώς σε αυτόν τον Κόσμο που είναι γεμάτος από ποικιλοτρόπως διαταραγμένα σώματα να συγκρούονται μεταξύ τους και το ένα να εμποδίζει το άλλο να παραμείνει στην κατάστασή του. Έτσι, η κατάσταση των σωμάτων υπόκειται σε ασταμάτητες αλλαγές και η αιτία όλων αυτών των αλλαγών είναι η ίδια, η αδράνεια, υπό την οποία όλα τα σώματα τείνουν να παραμένουν στην κατάστασή τους (Euler, 1746, σ. 24).

Και συνεχίζει

> Δεν είμαστε υποχρεωμένοι από τις αλλαγές που βλέπουμε να συμβαίνουν αδιάκοπα στον Κόσμο να αποδώσουμε στα Σώματα κινητήριες δυνάμεις διαφορετικές από την αδράνεια. Η αδράνεια από μόνη της σε κάθε σώμα, μπορεί και πρέπει να παράγει όλες τις αλλαγές που παρατηρούνται (Euler, 1746, σ. 24).

Ο Euler πίστευε ότι η διαμάχη για τη vis viva οφείλεται στη λανθασμένη θεώρηση ότι οι δυνάμεις διακρίνονται σε δύο ειδών: τις ζώσες δυνάμεις ή vis viva που εμφανίζονται ως δυνάμεις σύγκρουσης και τις νεκρές δυνάμεις ή vis mortua που εμφανίζονται ως δυνάμεις πίεσης (Hepburn, 2009, σ. 122). Συνεπώς, τα φαινόμενα της απευθείας σύγκρουσης δύο σωμάτων και της περιστροφής ενός σώματος γύρω από ένα σημείο στήριξης εμφανίζονται ως διαφορετικά είδη φαινομένων. Ο Leibniz και οι ακόλουθοί του έδωσαν μεγάλη έμφαση σε αυτά τα δύο είδη δύναμης που αποκαλούσαν ΄΄νεκρές δυνάμεις΄΄ πίεσης και ΄ζώσες δυνάμεις΄΄ κρούσης. Ο Euler, όμως, υποστήριξε ότι αυτό αποτελεί μια σύγχυση, μια αποτυχία να αναγνωριστεί ότι και τα δύο είδη οφείλονται στον ίδιο λόγο: στην ιδιότητα της αδράνειας να παραμένουν τα σώματα στην κατάστασή τους. Ο Euler προσπαθεί να υπονομεύσει τη διαμάχη για τη vis viva, όπως σημειώνει ο Hepburn, ενθαρύνοντας την οντολογική ενοποίηση των δύο ειδών φαινομένων. Θεωρεί ότι και η πίεση και κρούση που εμφανίζονται σε ένα σώμα οφείλονται στην αδράνεια ενός άλλου σώματος (Hepburn, 2009, σ. 122).

Η ιδέα, λοιπόν, ότι η πίεση και η κρούση είναι διαφορετικά είδη φαινομένων προϋπέθετε ότι χρειάζονταν διαφορετικά μέτρα και εξαιτίας αυτού προέκυψε η διαμάχη για τη vis viva. Οι δύο δυνάμεις θεωρήθηκαν ασύμμετρες. Πρώτον, διότι η vis viva θεωρήθηκε ως μια επαύξηση της vis mortua, δεδομένου ότι ο Descartes πίστευε ότι η vis viva έχει δύο διαστάσεις και άρα υπερέχει της vis mortua που έχει μια διάσταση. Ακριβώς όπως ένα επίπεδο υπερέχει μιας ευθείας. Ο Hepburn αναφέρει ότι για τον Descartes το μέτρο των ζώσων δυνάμεων ήταν η μάζα επί την ταχύτητα ενώ το μέτρο των νεκρών δυνάμεων ήταν μόνο η μάζα (Hepburn, 2009, σ. 122 -123).

Ο δεύτερος λόγος στον οποίο βασίστηκε η ασυμμετρία, σημειώνει ο Hepburn, είναι ότι η δύναμη κρούσης επιτυγχάνει τα αποτελέσματά της στιγμιαία σε αντίθεση με τη δύναμη πίεσης που παράγει τα ίδια αποτελέσματα σε πολύ μεγαλύτερη χρονική διάρκεια. Ο Euler θεώρησε αυτόν το δεύτερο λόγο ασυμμετρίας αρκετά πιο σημαντικό και αντικειμενικό από τον πρώτο και προσπάθησε να τον καταρρίψει δηλώνοντας ότι οι κρούσεις δεν είναι αυστηρά στιγμιαίες παρόλο που φαίνονται να είναι. Ο Euler αποδίδει τη χρονική διάρκεια κρούσης σε εύλογες παραμέτρους όπως η σκληρότητα ή η ελαστικότητα των σωμάτων που συγκρούονται (Hepburn, 2009, σ. 123).

Πράγματι, εάν η κρούση ήταν στιγμιαία δε θα παρέμενε καμία αμφιβολία ότι νέκρες και ζώσες δυνάμεις εμφανίζονται ως εντελώς διαφορετικές (Hepburn, 2009, σ. 124). Ο Euler στην αρχική του απόπειρα να αποδείξει ότι οι κρούσεις δεν είναι στιγμιαίες επικαλείται έναν ανώτερο νόμο:

> Η στιγμιαία δράση δε θα συμφωνούσε με τον ανώτερο, σταθερό Νόμο της Φύσης λόγω του οποίου τίποτα δε μπορεί να συμβεί ξαφνικά και ως αποτέλεσμα ενός άλματος. Σύμφωνα με αυτόν τον Νόμο, τόσο μεγάλη αλλαγή στην κατάσταση των σωμάτων, όπως συντελείται με την κρούση αυτών, δεν μπορεί να συμβεί χωρίς να μεσολαβεί κάποιο χρονικό διάστημα (Euler, 1746, σ. 31-32).

Ο Hepburn, όμως, παρατηρεί ότι δεν υπάρχουν αποδείξεις σχετικά με το γιατί κάποιος πρέπει να αποδεχτεί τον παραπάνω ισχυρισμό ως σταθερό Νόμο της φύσης. Η δεύτερη προσπάθεια του Euler να επιχειρηματολογήσει κατά της στιγμιαίας κρούσης απορρέει από το γεγονός ότι όλα τα μαλακά σώματα παραμορφώνονται σε μια κρούση. Η παραμόρφωση των σωμάτων, υποστηρίζει ο Euler, δεν γίνεται στιγμιαία, γεγονός που αποδεικνύει ότι η κρούση συντελείται σε κάποιο χρονικό διάστημα. Ο Euler αρνείται την πιθανότητα ύπαρξης τέλεια σκληρών σωμάτων και συνεπώς εξετάζει μόνο την περίπτωση των μαλακών σωμάτων που παραμορφώνονται (Hepburn, 2009, σ. 124).

Ο Euler, λοιπόν, υποστηρίζει την οντολογική ενοποίηση της νεκρής και ζώσας δύναμης. Μαζί γεννήθηκαν από την αδράνεια και την ιδιότητα των σωμάτων να παραμένουν στην κατάσταση της ηρεμίας ή της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. Η αδράνεια δρα ως δύναμη σε άλλα σώματα και αυτή η δύναμη μπορεί να εκδηλωθεί είτε ως πίεση είτε ως κρούση (Hepburn,2009, σελ. 124).

3.3 Η αρχή της ελάχιστης δράσης

Η αρχή της ελάχιστης δράσης αποτελεί το καταστάλαγμα της προσπάθειας πολλών ετών με σημαντικότερες τις συνεισφορές των Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, Leonhard Euler και Joseph Luis Lagrange κατά τον δέκατο όγδοο αιώνα καθώς και του William Rowan Hamilton στις αρχές του δέκατου ένατου αιώνα.

Οι Ιωάννου & Αποστολάτος παρουσιάζουν μια σύντομη ιστορική αναδρομή σχετικά με την πορεία της έννοιας του ελαχίστου που εμφανίζεται τελικά ως ΄΄αρχή της ελάχιστης δράσης΄΄. Ο Ήρωνας ο Αλεξανδρινός, ήδη από τον 1ο μ.Χ αιώνα, διαπιστώνει ότι όταν το φώς ανακλάται σε ένα επίπεδο κάτοπτρο ακολουθεί πάντοτε τη συντομότερη διαδρομή. Με βάση αυτή τη διαπίστωση και απλά γεωμετρικά επιχειρήματα προκύπτει ο νόμος της ανάκλασης. Ο μαθηματικός Pierre de Fermat, στα μέσα του 17 ου αιώνα, υποστηρίζει ότι δεν είναι το μήκος της διαδρομής του φωτός ελάχιστο, αλλά ο χρόνος της κίνησης του φωτός, καταλήγοντας στο νόμο της διάθλασης. Το 1744, ο Maupertuis υποστηρίζει ότι τα σώματα κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε η συνολική ΄΄δράση΄΄ να είναι ελάχιστη. Η ποσότητα, όμως, την οποία θεωρεί ο Maupertuis ως δράση δεν είναι σωστή και οι αποδείξεις του δεν είναι τεκμηριωμένες. Η σωστή μορφή της δράσης προσδιορίζεται το δέκατο όγδοο αιώνα από τον Leonard Euler και τον Joseph Louis Lagrange. Και είναι στις αρχές του επόμενου αιώνα που παρουσιάζεται, τελικά, από τον Hamilton η ακριβής διατύπωση της ΄΄αρχής της ελάχιστης δράσης΄΄ (Ιωάννου & Αποστολάτος, 2004, σ.2-3).

Όπως σημειώνει M. Panza, τα απομνημονεύματα του Maupertuis το 1744 εκφράζουν ξεκάθαρα την ιδέα της συνθήκης ισορροπίας ως συνθήκης μεγίστου ή ελαχίστου μιας ποσότητας. Ασφαλώς η ιδέα αποδεικνύεται χρήσιμη στα μαθηματικά αλλά το κύριο ενδιαφέρον του Maupertuis είναι η σύνδεση των συνθηκών ισορροπίας με μια αρχή οικονομίας. Ο Maupertuis προσπαθεί να δείξει ότι ο νόμος της διάθλασης του φωτός, που ήταν γνωστός στην εποχή του, σχετίζεται με έναν άλλον νόμο που η φύση ακολουθεί απαραβίαστα. Θεωρεί ότι το φώς, κατά τη διάθλασή του, ακολουθεί την τροχιά εκείνη στην οποία η ποσότητα της δράσης είναι ελάχιστη. Παρά την αξία της ιδέας του Maupertuis, ότι κατά τη διάθλαση η φύση παντα δρά με στόχο την ελαχιστοποίηση, δεν κατάφερε να παραγάγει μια γενική μέθοδο που να σχετίζεται με την κίνηση ή την ισορροπία οποιουδήποτε συστήματος (Panza, 2003, σ. 4-5).

Σύμφωνα με τον C. Fraser, στο δεύτερο παράρτημα της κλασικής πραγματείας Methodus Inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes του Euler εφαρμόζονται τεχνικές του Λογισμού των Μεταβολών για την ανάλυση της κίνησης ενός σωματιδίου υπό την επίδραση κεντρικών δυνάμεων (Fraser, 1983, σ. 200). Συγκεκριμένα, ο Euler δείχνει ότι η διαδρομή που καλύπτεται είναι η ελάχιστη, υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα της ταχύτητας του σωματιδίου πολλαπλασιασμένο με ένα διαφορικό στοιχείο του μήκους τόξου. Η παραπάνω διαπίστωση αποτελεί τη βάση του δοκιμίου που δημοσιεύτηκε από τον Maupertuis το 1744. Η ανάλυση του Maupertuis ήταν λιγότερο ακριβής από εκείνη του Euler, όμως ήταν ο πρώτος που δημιούργησε τον όρο ΄΄δράση΄΄ για να αναφερθεί στο γινόμενο της μάζας, της ταχύτητας και του μήκους τόξου (Fraser,1983, σ.200).

Όπως τονίζει ο M. Panza, στην πραγματεία Methodus Inveniendi, ο Euler πραγματεύεται την επίλυση μηχανικών προβλημάτων αναφερόμενος σε μια γενική αρχή: ότι ΄΄απολύτως τίποτα δεν συμβαίνει στον κόσμο, μέσα στο οποίο να μην εμφανίζεται κάποια συνθήκη μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης΄΄. Δεν αποτελούσε κύριο ενδιαφέρον του Euler η διατύπωση ενός νόμου κίνησης αλλά η σύγκριση του νευτώνειου νόμου κίνησης με έναν άλλον βασισμένο στην εύρεση ενός μεγίστου ή ελαχίστου. Ο νέος νόμος βασιζόταν στην απαίτηση υπολογισμού του ολοκληρώματος της δύναμης F, όταν απαιτείται F = Max/min (Panza, 2003, σ. 5).

Στην πραγματεία του Euler Harmonie entre les principes generaux de repos et de movement, το 1751, εμφανίζεται πάλι η έρευνά του σχετικά με την αρχή της ελάχιστης δράσης (Fraser, 1983, σ. 200). Η πραγματεία είναι γραμμένη με έναν τρόπο πιο εκτενή και γενικό από ότι οι προηγούμενες πραγματείες του Euler και στοχεύει στο να δείξει ότι η αρχή της ελάχιστης δράσης ΄΄εναρμονίζεται΄΄ με το νόμο της αδράνειας. Η παραγωγή της αρχής της ελάχιστης δράσης από τον καλά εδραιωμένο νόμο της αδράνειας σηματοδοτεί την καθιέρωσή της. Τέλος, η πραγματεία καταλήγει σε μερικές ενδιαφέρουσες σκέψεις σχετικά με τις συνθήκες ισορροπίας εξαναγκασμένων συστημάτων (Fraser, 1983, σ. 201).

Ο Euler προσπάθησε να γενικεύσει τον καλά εδραιωμένο νόμο της αδράνειας και στην κίνηση (Fraser, 1983, σ. 202). Ο C. Fraser θεωρεί διαφωτιστικό το σχετικό απόσπασμα από τη μελέτη του Euler:

> ΄Εχοντας καθιερώσει την αρχή της αδράνειας ή ισορροπίας, τι είναι πιο φυσικό από το να ισχυριστεί κανείς ότι η ίδια αρχή είναι επίσης έγκυρη για την κίνηση των σωμάτων, υπό παρόμοιες δυνάμεις; Διότι εάν είναι πρόθεση της Φύσης να κάνει οικονομία όσο το δυνατόν στο σύνολο των προσπαθειών της, αυτή η πρόθεση πρέπει να επεκταθεί και στην κίνηση, υπό την προϋπόθεση ότι λαμβάνουμε υπόψη την προσπάθεια όχι μόνο μια στιγμή, αλλά όλες τις στιγμές κατά τις οποίες διαρκεί η κίνηση. Έτσι αν θεωρήσουμε την προσπάθεια, ή το σύνολο των προσπαθειών, για κάθε στιγμή της κίνησης = Φ, και συμβολίζοντας τον στοιχειώδη χρόνο = dt, είναι αναγκαίο το ολοκλήρωμα $\int \Phi\, dt$ να είναι ελάχιστο. Έτσι, εάν στις περιπτώσεις ισορροπίας η ποσότητα Φ πρέπει να είναι ελάχιστη, οι ίδιοι νόμοι της Φύσης φαίνεται να απαιτούν ότι στην κίνηση το ολοκλήρωμα $\int \Phi\, dt$ είναι το μικρότερο δυνατό (Euler, 1998, σ.156).

Το παραπάνω απόσπασμα αναφέρεται μόνο σε ένα ελάχιστο αλλά είναι ξεκάθαρο από τα άλλα σχόλια του Euler ότι εννοεί ενα ακρότατο, είτε μέγιστο είτε ελάχιστο (Fraser, 1983, σ. 202).

Στη συνέχεια, ο Euler, ξεκινώντας από τον νόμο κίνησης ενός μεμονωμένου σωματιδίου, εισάγει την ποσότητα την οποία αποκαλεί ΄΄δράση΄΄ (Fraser, 1983, σ.

202). Έστω ότι T είναι η εφαπτομενική συνιστώσα του συνόλου των δυνάμεων που δρούν στο σωματίδιο M. Από τις αρχές της μηχανικής ισχύει η σχέση

Mdu = T dt,

όπου με u συμβολίζεται η ταχύτητα του σώματος. Όπως σημειώνει ο Fraser, αυτός είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα που έλαβε την πρώτη γενική του διατύπωση από τον Euler τα προηγούμενα χρόνια. Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχεση με την ποσότητα u = ds/dt, μετά από ολοκλήρωση προκύπτει η διατήρηση της vis viva :

1/2 Mu2 = constant + ∫ Tds ή

1/2 Mu2 = constant – Φ

Και πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με dt προκύπτει ότι:

1/2 Mu ds = (constant) dt – Φdt

Ολοκληρώνουμε αυτήν την εξίσωση για να φτάσουμε στην τελική σχέση:

1/2 Mu ds = (constant) t – Φdt.

O Euler δηλώνει ότι ποσότητα (constant) t δεν υπεισέρχεται ΄΄στην εξέταση των μεγίστων ή ελαχίστων΄΄ και θεωρεί μια μεταβαλλόμενη διαδικασία στην οποία, όμως, ο ίδιος ο χρόνος δε μεταβάλλεται (Fraser, 1983, σ. 203). Από την παραπάνω σχέση και το γεγονός ότι ∫ Φ dt είναι ένα μέγιστο ή ελάχιστο υπονοείται ότι ∫ Mu ds (αγνοώντας το παράγοντα ½) είναι αντίστοιχα μέγιστο ή ελάχιστο. Τέλος, όπως επισημαίνει ο Fraser, την ποσότητα ∫Muds ο Euler την αποκαλεί ΄΄δράση΄΄ και δείχνει ότι αποτελεί ένα ακρότατο. O C.Fraser τονίζει ότι η προσέγγιση του Euler ήταν καινούρια και ότι ήταν ο πρώτος που όρισε τη δράση με την ποσότητα ∫ Mu ds (Fraser, σ.203).

O Euler γενικεύει το αποτέλεσμα που βρήκε για τη μια μάζα σε δύο μάζες και με την παρουσίαση και αυτού του αποτελέσματος ολοκληρώνει τη μελέτη του για την αρχή της ελάχιστης δράσης (Fraser, 1983, σ.203).

Στη συνέχεια, ο νεαρός Joseph Luis Lagrange, επηρεασμένος από τη μελέτη του Euler, ενδιαφέρεται για την αρχή της ελάχιστης δράσης και τη θεμελίωση της μηχανικής. Όπως σημειώνει ο M.Panza, ήταν μόλις 18 ετών όταν ξεκίνησε να αλληλογραφεί με τον Euler προκειμένου να τον ενημερώσει για τα αποτελέσματα της εργασίας του σχετικά με το πρόβλημα του μεγίστου και του ελαχίστου καθώς και την εφαρμογή της στη μηχανική (Panza, 2003, σ. 12). Ο Euler αναγνωρίζει τη σημασία της δουλειάς του Lagrange και οι δύο άνδρες γίνονται τακτικοί αλληλογράφοι. Το 1756 ο Lagrange υποβάλλει ένα υπόμνημα στην Ακαδημία του Βερολίνου σχετικά με την αρχή της ελάχιστης δράσης (Fraser, σ. 199). Παρόλο που το υπόμνημα αυτό χάθηκε, είναι δυνατό να εντοπιστεί η μεταγενέστερη πρόοδος της μελέτης του Lagrange στις επιστολές του προς τον Euler. Επίσης, ο C. Fraser σημειώνει ότι ο Lagrange ήταν πολύ περήφανος για το έργο του, καθώς γενίκευσε και ολοκλήρωσε την προγενέστερη έρευνα του Euler και κατέστησε την αρχή της ελάχιστης δράσης ως βάση για τη δυναμική (Fraser, σ.199).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η επισήμανση του C. Fraser ότι η αρχή της ελάχιστης δράσης εμφανίζεται σε δύο μέρη στην έρευνα του Euler. Κατ' αρχάς, το 1744, σε ένα παράρτημα της πραγματείας του Methodus Inveniendi και στη συνέχεια, το 1751, σε ένα δοκίμιο του, προκειμένου να θεωρηθεί η αρχή ως γενικός νόμος της δυναμικής. Ο Lagrange, όμως, αναφέρεται μόνο στο παράρτημα του 1744 ενώ υπάρχουν σημαντικά στοιχεία που δείχνουν ότι ήταν εξοικειωμένος και με τη μεταγενέστερη έρευνα του Euler. Ο C. Fraser παραθέτει τα στοιχεία που υποστηρίζουν αυτήν την άποψη. Κατ' αρχάς, θεωρεί λογικό να υποθέσουμε ότι είχε πρόσβαση στα πρόσφατα δημοσιευμένα δοκίμια της Ακαδημίας Επιστημών του Βερολίνου. Επιπλέον, η επιλογή του συμβολισμού στην παρουσίαση της αρχής είναι όμοια με αυτήν που υιοθέτησε ο Euler στο δοκίμιο του 1751. Και τέλος, κυριαρχεί η αίσθηση ότι ο τρόπος που αντιμετωπίζει την αρχή της ελάχιστης δράσης ο Lagrange είναι πιο κοντά στο μεταγενέστερο έργο του Euler (Fraser, σ. 203-204).

Το 1761, ο Lagrange παρουσιάζει στην Ακαδημία του Τορίνου δύο άρθρα: το ΄΄Essai d΄une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules indefinies΄΄ και το ΄΄Application de la methode exposee dans le memoire precedent a la solution de differentes problemes de dynamique΄΄ (Fraser, σ. 198). Ο Lagrange, στο πρώτο του άρθρο, εισάγει μια νέα μέθοδο επίλυσης του προβλήματος μεγίστου και ελαχίστου, βασισμένη σε ένα νέο φορμαλισμό. Σύμφωνα με τον M. Panza, αυτός ο φορμαλισμός αποτελεί την πρώτη εκδοχή του νεότερου Λογισμού των Μεταβολών

(Panza, 2003, σ. 12). Στο δεύτερο άρθρο του Lagrange περιέχεται η πρώτη ξεκάθαρη διατύπωση της αρχής της ελάχιστης δράσης και περιγράφονται οι μαθηματικές τεχνικές που χρειάστηκαν για να μελετηθεί. Ο Lagrange απλουστεύει τη μελέτη της κίνησης ενός συστήματος πολλών σωμάτων σε μια απλή εφαρμογή της αλγεβρικής του αρχής των απροσδιορίστων συντελεστών. Ο ίδιος ο Lagrange θεώρησε την παραπάνω απλοποίηση ως βασική επιτυχία του δεύτερου άρθρου του (Panza, 2003, σ. 14).

Επιπλέον, σχετικά με το δεύτερο άρθρο, ΄΄Application de la methode exposee dans le memoire precedent a la solution de differentes problemes de dynamique΄΄, ο C. Fraser σχολιάζει ότι ο ίδιος ο τίτλος προαναγγέλει ότι ο Lagrange θα εφαρμόσει αποτελέσματα από προηγούμενες μελέτες. Το άρθρο είναι αρκετά μακροσκελές -103 σελίδες σε σύγκριση με τις 27 σελίδες των προηγούμενων μελετών - και επομένως πρόκειται για ένα γενικό θεμέλιο της μηχανικής και όχι για μεμονωμένη επεξήγηση των μαθηματικών μεθόδων του Lagrange στη μηχανική (Fraser, σ. 204).

Το δεύτερο άρθρο του Lagrange ξεκινά με αναφορά στο δεύτερο παράρτημα του Methodus Inveniendi και με μια διατύπωση της δικής του γενικευμένης αρχής της ελάχιστης δράσης (Fraser, σ. 204):

> Γενική Αρχή. Έστω ότι υπάρχουν τόσα σώματα όσα επιθυμείτε Μ, Μ΄, Μ΄΄,...., τα οποία αλληλεπιδρούν αμοιβαία με οποιονδήποτε τρόπο, και τα οποία είναι επιπλέον, εάν κάποιος το επιθυμεί, κινούμενα από κεντρικές δυνάμεις ανάλογες με οποιαδήποτε συνάρτηση των αποστάσεων s, s΄, s΄΄, … υποδηλώνουν τα διαστήματα που καλύπτουν αυτά τα σώματα σε χρόνο t και αποκτούν ταχύτητες u, u΄, u΄΄, …. στο τέλος αυτού του χρόνου˙ ο τύπος
>
> $M \int u\, ds + M' \int u' ds + M'' \int u''\, ds + \ldots.$
>
> θα είναι είναι πάντα ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο (Lagrange, 1987, σ. 365).

Ο Lagrange αναπτύσσει το άρθρο με πολύ τυπικούς συλλογισμούς, με λίγες εξηγήσεις, και είναι συχνά δύσκολο να διαπιστωθεί η ακριβής βάση της κατανόησής του. Παρόλα αυτά, το νόημα της αρχής της ελάχιστης δράσης φαίνεται ξεκάθαρα. Υποθέτοντας δύο διατάξεις του συστήματος, τα σώματα κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε η μεταβολή της ποσότητας ∫ΣMu ds να είναι μηδέν. Η αρχή, λοιπόν, μας επιτρέπει να επιλέξουμε την πραγματική κίνηση μεταξύ όλων των πιθανών. Δηλαδή, όπως εξηγεί ο Fraser, αυτό σημαίνει για το έργο του Lagrange να διατυπωθούν οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση (Fraser, σ.205).

Ο Fraser συγκρίνει τη μεθόδο του Lagrange για την αρχή της ελάχιστης δράσης με τη μέθοδο του Euler στην πραγματεία του 1751 ΄΄Harmonie entre les principes generaux de repos et de movement΄΄. Από τη μια πλευρά, ο Euler ξεκίνησε από την υπόθεση ότι το χρονικό ολοκλήρωμα του δυναμικού είναι ένα ακρότατο και χρησιμοποίησε αυτό το γεγονός και το νόμο διατήρησης της vis viva για να εδραιώσει την αρχή. Ο Lagrange, από την άλλη, ξεκίνησε με την αρχή της ελάχιστης δράσης και χρησιμοποίησε το νόμο διατήρησης της vis viva προκειμένου να εισαγάγει τη μεταβολή του δυναμικού στο ολοκλήρωμα της δράσης. Επιπλέον, η αντιμετώπιση του Euler είναι γενική ενώ η μέθοδος του Lagrange είναι εξειδικευμένη και εστιάζει στην παραγωγή των εξισώσεων κίνησης (Fraser, σ. 208).

Ο C. Fraser εντοπίζει, όμως, ορισμένες σημαντικές ομοιότητες στις δύο προσεγγίσεις. Τόσο ο Euler όσο και ο Lagrange υποθέτουν ότι ο χρόνος δε μεταβάλλεται στην κατά τα άλλα μεταβαλλόμενη διαδικασία. Επιπλέον, και οι δύο θεωρούν έγκυρο το νόμο διατήρησης της vis viva. Το γεγονός, όμως, ότι ο Lagrange αναπτύσσει την προσέγγισή του με περισσότερες λεπτομέρειες του επιτρέπει να φτάσει σε έναν ακριβέστερο υπολογισμό (Fraser, σ. 208).

Κατόπιν, ο Fraser σχολιάζει οτι η εφαρμογή του φορμαλισμού του Langragne στην αρχή της ελάχιστης δράσης φαίνεται να καθοδηγείται περισσότερο από την επιτυχία του Lagrange στους αλγεβρικούς χειρισμούς παρά από οποιαδήποτε φυσική ή γεωμετρική διαίσθηση. Στόχος του Lagrange ήταν η παραγωγή των εξισώσεων κίνησης, κάτι το οποίο έκανε με επιτυχία (Fraser, σ. 209).

Είναι, τελικά, στις αρχές του 19ου αιώνα που ο William Rowan Hamilton διατυπώνει με απόλυτη σαφήνεια την ΄΄αρχή της ελάχιστης δράσης΄΄. Οι Ιωάννου & Αποστολάτος εξηγούν ότι η θεμελιώδης συνάρτηση που χαρακτηρίζει κάθε φυσικό σύστημα είναι η λαγκρανζιανή συνάρτηση (L). Για μηχανικά συστήματα υπό την επίδραση διατηρητικών δυνάμεων η λαγκρανζιανή συνάρτηση είναι η διαφορά μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος

L = EKIN – Eδυν = 1/2 mu2 - V(x)

Έτσι, η αρχή της ελάχιστης δράσης παρουσιάζεται ως εξής:

> Ένα σωματίδιο που ξεκινά από το σημείο A τη χρονική στιγμή tA, και φτάνει στο σημείο B τη χρονική στιγμή tB, ακολουθεί στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα τη διαδρομή εκείνη για την οποία η δράση, δηλαδή η ποσότητα
>
> S = $\int_{tA}^{tB} L\, dt$
>
> καθίσταται στάσιμη (Ιωάννου & Αποστολάτος, 2004, σ. 2-3).

Σύμφωνα με τους Ιωάννου & Αποστολάτο, ο Hamilton θεωρεί τον όρο ΄΄στάσιμο΄΄ ως συνώνυμο του όρου ΄΄ακρότατο΄΄ και αποδεικνύει ότι η αρχή της ελάχιστης δράσης είναι ισοδύναμη με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στα μηχανικά συστήματα. Επιβεβαιώνει, δηλαδή, ότι η διαδρομή που καθιστά τη δράση στάσιμη είναι εκείνη που ακολουθεί το σωματίδιο υπακούοντας στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Η αρχή αυτή έχει μεγαλύτερη ισχύ από τους νόμους του Νεύτωνα καθώς μπορεί να παράγει αντίστοιχες συναρτήσεις δράσης για ηλεκτρομαγνητικά και άλλα πεδία που δεν μπορούμε να εξετάσουμε στο πλαίσιο της νευτώνειας μηχανικής (Ιωάννου &Αποστολάτος, 2004, σ.11-12).

Μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα επιβεβαιώνεται ότι η διαδρομή που καθιστά τη δράση στάσιμη είναι εκείνη που ακολουθεί το σωματίδιο υπακούοντας στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. την κλασική θεώρηση που το σωματίδιο έχει καθορισμένη θέση κάθε χρονική στιγμή και η σχέση αιτίου- αιτιατού μπορεί να εφαρμοστεί στις κινησεις, σε αυτήν τη θεωρηση η αρχή ελάχιστης δράσης απορρέει από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (Ιωάννου & Αποστολάτος, 2004, σ.14).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο Ισαάκ Νεύτων ασχολείται για περισσότερα από 30 χρόνια με τα ζητήματα της μηχανικής και την αρχή της αδράνειας. Οι έρευνές του παίρνουν την τελική τους μορφή στις Principia όπου περιγράφει τις πλανητικές κινήσεις με όρους ελκτικών βαρυτικών δυνάμεων προς το κέντρο (κεντρομόλες δυνάμεις) και όχι πλεόν με όρους φυγόκεντρης δύναμης. Η Νευτώνεια δύναμη θεωρείται εξωτερική για το σώμα πάνω στο οποίο δρά, μπορεί να μεταβάλλει την κίνηση αλλά δεν είναι απαραίτητη για να συντηρηθεί η κίνηση. Το εννοιολογικό περιεχόμενο της Νευτώνειας δύναμης προσδιορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τους τρείς νόμους της κίνησης, γεγονός που σημαίνει ότι η μηχανική του Νεύτωνα πρέπει να προσεγγίζεται ολιστικά (Κανδεράκης, 2007, σ. 496-497).

Στη Γαλλία η Νευτώνια Μηχανική συνδιαλέγεται με τον κυρίαρχο καρτεσιανισμό ενώ συγχρόνως τροποποιείται από αυτόν. Πρακτικά, η Νευτώνεια μηχανική γίνεται αποδεκτή ως μια καλή μαθηματική περιγραφή του κόσμου, κρατείται ,όμως, η καρτεσιανή Φυσική για την αιτιακή εξήγηση. Αυτό που ενοχλεί τους ηπειρωτικούς είναι η έννοια της δύναμης από απόσταση την οποία θεωρούν απόκρυφη και μυστικιστική. Αρκετοί μαθηματικοί, όπως ο d΄Alembert και ο Maupertois προσπαθούν να θεμελίωσουν τη μηχανική απουσία των νευτώνειων δυνάμεων, χωρίς, όμως, επιτυχία. Παράλληλα, οι ηπειρωτικοί μαθηματικοί εξοικειώνονται και χρησιμοποιούν τον Απειροστικό λογισμό στη Μηχανική, αναδιατυπώνοντάς την σταδιακά στη γλώσσα της Άλγεβρας. Κύριοι συντελεστές στη διαδικασία της αλγεβρικής-αναλυτικής αναδιατύπωσης της μηχανικής είναι ο Pierre Varignon, ο L΄Hospital, ο Johan Bernoulli, ο Euler και ο Lagrange.

Η μηχανική του δέκατου όγδοου αιώνα στηρίζεται, πλέον, σε αρχές και όχι σε πρόσωπα. Η «ποσότητα κίνησης» (mu) του Descartes θα μετεξελιχθεί τελικά στην «ορμή», ενω τον 19ο αιώνα η «vis viva» (mu2) θα ονομαστεί «κινητική ενέργεια». Η ιστορία της συγκρότησης και αναδιατύπωσης της κλασικής μηχανικής είναι μια εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία που κρατά πάνω από δύο αιώνες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

C. Smeenk & E. Schliesser, (2013), Newton΄s Principia. In J. Buchwald & R. Fox (Eds), The Oxford Handbook of the History of Physics (p.109 – 164), Oxford University Press.

N. Guicciardini, (1999), Reading The Principia (p. 30 – 98, 99-117, 136- 168), Cambridge University Press.

R. DiSalle, (2002), Newton΄s philosophical analysis of space and time. In R. Iliffe & G. Smith (Eds), The Cambridge Companion to Newton (p.34 – 60), Cambridge University Press.

I. B. Cohen, (2002), Newton΄s concepts of force and mass, with notes on the laws of motion. In R. Iliffe & G. Smith (Eds), The Cambridge Companion to Newton (p. 61 – 92), Cambridge University Press.

G.E. Smith, (2002), The methodology of the Principia. In R. Iliffe & G. Smith (Eds), The Cambridge Companion to Newton (p. 187 -228), Cambridge University Press.

G. E. Smith, (2012), How Newton΄s Principia changed physics. In A. Janiak & E. Schliesser (Eds), Interpreting Newton (p.360 – 395), Cambridge University Press.

J. B. Shank, (2018), Before Voltaire: The French origins of ΄΄ Newtonian΄΄ Mechanics, 1680-1715, The University of Chicago Press.

D. Suisky, (2009), Euler as Physicist (p.65 – 100), Springer.

H. J. M. Bos, (1980), Mathematics and rational mechanics. In G. S. Rousseau, R. Porter (Eds.), The ferment of Knowledge (p. 327-355), Cambridge Univesity Press.

C. Fraser, (2008), Mathematics, In R. Porter (Ed), The Cambridge History of Science, vol.4, (p.305- 327), Cambridge University Press.

R. Dugas, (1950), Historie de la mechanique, Neuchatel.

B. Hepburn, (2009), ΄Euler, vis viva, and equilibrium΄, Studies in History and Philosophy of Science.

M. Panza, (2003), ΄The origins of analytic Mechanics in the 18th Century΄, In H. N. Jahnke (ed.), A History of Analysis, (p. 137-153), American Methematical Society and London Mathematical Society.

T. Hankins, (1970), Jean d΄Alembert Science and the enlightenment, (p.195 -213), Clarendon Press –Oxford.

L. Euler, (1743), Traite de dynamique.

C. Fraser, (1983), ΄΄Lagrange΄s Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics΄΄, Archive for History of Exact Sciences.

S. I. Newton, (1962), Principia (Vol.I). Rev. by F.Cajory, University of California Press.

S. I. Newton, (1962), Principia (Vol.III). Rev. by F.Cajory, University of California Press.

D. A. Anapolitanos, (1999), Leibniz: Representation, Continuity and the Spatiotemporal, Spinger Science + Business Media.

Θ. Αποστολάτος& Π. Ιωάννου, (2004), Στοιχεία Θεωρητικής Μηχανικής, Leader Books.

Θ. Αραμπατζής, Κ.Γαβρόγλου, Δ. Διαλέτης, Γ. Χριστιανίδης, Ν. Κανδεράκης, Σ. Βιρβιδάκης, (1999), Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Ν. Κανδεράκης, (2007), Οι έννοιες της «δύναμης» κατά τον 17ο και τον 18ο αιώνα. Παρουσιάστηκε στο 5ο Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτικής Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών.