ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαθηματικά και Λογική Σκέψη

Αναστάσιος Κατσίκης
Α.Μ. Δ201401

Επιβλέπων

Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος Καθηγητής

Αθήνα
Ιανουάριος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 25η Ιανουαρίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Κ. Δημητρακόπουλος (Επιβλέπων)	Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Δ. Λάππας	Αναπλ. Καθηγητής

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενης από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Κ. Δημητρακόπουλος (Επιβλέπων)	Καθηγητής
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Α. Μούτσιος-Ρέντζος	Δρ., Εξωτερικός Συνεργάτης

στη Δήμητρα και στη Δανάη μας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο 1ο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της ιστορίας της Λογικής. Από τις απαρχές της Λογικής, εκεί δηλαδή που υπήρξε η ανάγκη χρήσης επιχειρημάτων, και τον Αριστοτέλη έως τη σύγχρονη συμβολική λογική.

Στο 2ο - και πιο «τεχνικό» - κεφάλαιο μελετάται η Προτασιακή Λογική, παρουσιάζοντας τη γλώσσα, τη σημασιολογία και τους πιο σημαντικούς νόμους της.

Στο 3ο κεφάλαιο και στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η σχέση της Λογικής με τη διδασκαλία. Στο 3ο κεφάλαιο γίνεται μία γενική συζήτηση σχετικά με την ιστορία της Λογικής στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, τον πολυσήμαντο ρόλο της στη μαθηματική δραστηριότητα και τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να διδάξουμε Λογική σήμερα. Στο 4ο και πιο ειδικό-εφαρμοσμένο κεφάλαιο παρουσιάζουμε και αναλύουμε κάποιες μελέτες που έχουν γίνει αναφορικά με το πως κατανοούν και πως εφαρμόζουν οι μαθητές βασικές έννοιες της Λογικής, όπως τη συνεπαγωγή, την αντιθετοαντιστροφή, την άρνηση.

Στο 5ο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσίαζουμε τη Θεωρία Τυπικής Πειθαρχίας και την επίδρασή της στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Λέξεις κλειδιά: *Προτασιακή Λογική, Διδακτική Λογικής, Θεωρία Νοητικών Μοντέλων, Θεωρία Τυπικής Πειθαρχίας*.

ABSTRACT

In Chapter 1 there is a brief presentation of the history of Logic. From the beginnings of Logic, where there was the need to use arguments, and Aristotle to modern symbolic Logic.

In Chapter 2, which is more "technical", Propositional Logic is studied, presenting its language, semantics and its most important laws.

Chapter 3 and Chapter 4 illustrate the correlation between Logic and teaching. In the third Chapter there is a general discussion about the history of Logic in the Greek educational system, its multifaceted role in mathematical activity and the way we can teach Logic today. In the 4th and more applied Chapter we present and analyze some studies that have been made about how students understand and use the basic concepts of Logic, such as implication, contraposition, negation.

In the 5th and final Chapter we present the Theory of Formal Discipline and its effect on the teaching of mathematics in Secondary Education.

Key words: *Propositional Logic, Logic Education, Theory of Mental Models, Theory of Formal Discipline*

1. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

1.1. Εισαγωγή

Η Λογική, ένα από τα πρώτα επιστημονικά αντικείμενα, έχει κατά βάση σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση και κατανόηση των επιχειρημάτων μας. Είναι δηλαδή η Λογική η επιστήμη που ασχολείται με τη μελέτη των διαδικασιών και των κανόνων, με τους οποίους μπορούμε να οδηγηθούμε με ορθό τρόπο από τις υποθέσεις (ή ένα σύνολο προκειμένων) στα συμπεράσματα.

Πατέρας της Λογικής θεωρείται ο Αριστοτέλης (384 π.Χ. - 322 π.Χ.), ωστόσο από ιστορικές πηγές γίνεται φανερό ότι υπήρξαν και άλλοι φιλόσοφοι πριν από αυτόν που ασχολήθηκαν τη Λογική. Από την μετά-αριστοτελική εποχή μέχρι το 19ο αιώνα η Λογική δε σημείωσε ιδιαίτερη πρόοδο, με κάποιες εξαιρέσεις φωτεινότερη από τις οποίες ήταν ο Gottfried Leibniz (1646-1716). Σημαντικά βήματα προόδου στο αντικείμενο σημειώνονται ξανά κατά τις απόπειρες αξιωματικοποίησης των διαφόρων κλάδων των μαθηματικών, με βασικό εκφραστή τον David Hilbert (1862-1943). Τα βήματα δε, γίνονται άλματα με το έργο του γερμανού μαθηματικού και φιλοσόφου Gottlob Frege (1848-1925), του μεγαλύτερου ίσως λογικού μετά τον Αριστοτέλη. Έκτοτε η Λογική αυτονομείται ως επιστημονικός κλάδος και βρίσκει εφαρμογή σε άλλους επιστημονικούς τομείς, όπως η Φιλοσοφία, τα Μαθηματικά, η Πληροφορική, η Γλωσσολογία κ.α.. Σήμερα, η τάχιστη ανάπτυξη της Λογικής έχει αποδώσει τομείς, όπως η Τυπική Λογική (formal logic), η Ασαφής Λογική (fuzzy logic), η Τροπική Λογική (modal logic), η Παρασυνεπής Λογική (paraconsistent logic) κ.α..

1.2. Απαρχές

Είναι φυσικό οι άνθρωποι να επιχειρηματολογούσαν, χωρίς βέβαια να σκεφτούν ή να διατυπώσουν κανόνες για τον τρόπο που το έπραταν, αιώνες πριν την εμφάνιση της Λογικής. Πού βρίσκονται όμως τα πρώτα ψήγματα Λογικής; Πότε δηλαδή η χρήση επιχειρημάτων ήταν τόσο έντονη, ώστε να ανακύψει η ανάγκη για τη συστηματική τους μελέτη; Η απάντηση “κρύβεται” στα εξής πεδία:

• στα Μαθηματικά. Είναι γνωστό ότι στην αρχαία Αίγυπτο, όταν ο Νείλος καταπλημμύριζε μια αγροτική έκταση, έπρεπε για τις ανάγκες της φορολογίας να υπολογίσουν πόσο έδαφος είχε χαθεί. *“Μου φαίνεται δε ότι αυτό έδωσε αφορμή να επινοηθεί η γεωμετρία την οποία [οι Έλληνες] μετέφεραν στην Ελλάδα” (Ηρόδοτος, Ιστορίαι, ΙΙ 109)*. Είναι δηλαδή αποδεκτό ότι οι αρχαίοι Έλληνες ήταν αυτοί που συστηματοποίησαν τις “αισθητηριακές” γνώσεις τον Αιγυπτίων, με τρόπο ώστε από κάποιες βασικές αρχές να αποδεικνύονται με αυστηρότητα και χωρίς επίκληση της εμπειρίας οι υπόλοιπες. Μάλιστα είναι ο Θαλής ο Μιλήσιος (640 π.Χ. - 546 π.Χ.) αυτός στον οποίο αποδίδεται η πρώτη γεωμετρική απόδειξη: “η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη”, σύμφωνα με τον Πρόκλο. Και είναι ο Ευκλείδης, περίπου τρεις αιώνες μετά το Θαλή και περίπου μισό αιώνα μετά τον Αριστοτέλη (στο εργο του οποίου θα αναφερθούμε εκτενώς στην επόμενη παράγραφο), που με το έργο του *Στοιχεία* έρχεται να καταλάβει μια περίοπτη θέση στην ιστορία της Λογικής και των Μαθηματικών, καθώς είναι ο πρώτος που συστηματοποίησε τη Γεωμετρία με τη μορφή αξιωματικού συστήματος. Είναι δηλαδή τα 13 βιβλία των Στοιχείων, (που ουσιαστικά δημιουργήθηκαν στην Ακαδημία του Πλάτωνα και μάλιστα λέγεται ότι ο αριθμός 13 είναι ουσιαστικά αναφορά του πλατωνιστή Ευκλείδη στα πλατωνικά στερεά), το πρώτο αυστηρά δομημένο και συνεκτικό σύστημα προτάσεων, με βάση ένα σύνολο από ορισμούς, αιτήματα και κοινές έννοιες, που παρά τις όποιες αδυναμίες ή ατέλειες έχουμε εντοπίσει σήμερα, κυριάρχησε για χιλιάδες χρόνια και κατέστησε τη Γεωμετρία τον πρώτο κλάδο της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη.

• στη Φιλοσοφία. Στους διάλογους του Πλάτωνα (427 π.Χ. - 347 π.Χ.) συχνά γίνεται αναφορά σε λογικές αρχές. Για παράδειγμα, στην *Πολιτεία α*ναφέρει τον «νόμο της αντίφασης», σύμφωνα με τον οποίο δεν είναι δυνατό κάτι να ισχύει και να μην ισχύει ταυτόχρονα. Ωστόσο, αν και ο Πλάτων ανακάλυψε κάποιες έγκυρες λογικές αρχές, ο Αριστοτέλης είναι ο πρώτος που θα δημιουργήσει ένα σύστημα τέτοιων αρχών. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο όρος «Λογική» με την έννοια που τον χρησιμοποιούμε σήμερα, αναφέρεται για πρώτη φορά τον 3ο αιώνα μ.Χ. από τον περιπατητικό φιλόσοφο, Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα, ο οποίος θεωρείται από τους σημαντικότερους σχολιαστές του Αριστοτέλη, καθώς σώζονται τα υπομνήματά του στα Αναλυτικά πρότερα.

• στην επιχειρηματολογία της καθημερινής ζωής. Για παράδειγμα στις δημόσιες διαλεκτικές μονομαχίες, μια αρκετά συνηθισμένη διαδικασία, κατά την οποία ο ένας συνομιλητής προσπαθούσε να καταρρίψει τη θέση που υποστήριζε ο άλλος. Τέτοιες μονομαχίες γίνονταν στα δικαστήρια, στα πλαίσια πολιτικών αντιπαραθέσεων ή ακόμα και για απλή διασκέδαση! Μάλιστα η μελέτη των συγκεκριμένων επιχειρημάτων οδήγησε στις λογικές μελέτες των *Μεγαρικών* και των *Στωικών* φιλοσόφων, οι οποίοι και προσπάθησαν να ταξινομήσουν τις μορφές των καθημερινών επιχειρημάτων. Ανάμεσα σε αυτά τα επιχειρήματα υπάρχουν και κάποια αληθοφανή μα άκυρα, όπως για παράδειγμα το εξής:

Όλες οι γάτες είναι θηλαστικά.
Ο Λέο είναι θηλαστικό.
Άρα, ο Λέο είναι γάτος.

Τέτοιου είδους επιχειρήματα είναι αυτά που ο Αριστοτέλης ονόμασε *σοφίσματα* και τον «απασχόλησαν» στο επίπεδο δημιουργίας κανόνων εντοπισμού τους. Ο όρος σοφίσματα προέρχεται από τον όρο *σοφιστής*, ο οποίος χαρακτήριζε τους ανθρώπους που ήταν ικανοί στην παραγωγή τέτοιων επιχειρημάτων. Πιθανά, οι σοφιστές επεδίωκαν μέσω των σοφισμάτων τους τη δημιουργία σύγχυσης, για παράδειγμα στην προσπάθεια επικράτησής τους σε μία δίκη. Πολύ γνωστό παράδειγμα αποτελούν τα επιχειρήματα που αντάλλαξαν ο περίφημος ρητοροδιδάσκαλος και πολιτικός Κόραξ ο Συρακούσιος (5ος π.Χ. αιώνας) και ο μαθητής του Τεισίας, σύμφωνα με την εξής ιστορία: Ο Τεισίας επισκέφθηκε τον Κόρακα και του ζήτησε να του μάθει την τέχνη της ρητορικής. Επειδή όμως δεν είχε όλα τα χρήματα που του ζήτησε ο Κόρακας ως δίδακτρα, συμφώνησαν ότι θα τον πλήρωνε μόνο αν τον έκανε καλό ρήτορα και κέρδιζε την πρώτη του δίκη στο δικαστήριο. Πράγματι ο Τεισίας έγινε εξαίρετος ρήτορας, αλλά απέφευγε να συνηγορήσει σε δίκη για να μην πληρώσει τα δίδακτρα και έτσι ο Κόρακας αναγκάστηκε να καταγγείλει το μαθητή του στα δικαστήρια. Την ημέρα της δίκης, ο Κόρακας εξήγησε στους δικαστές τη συμφωνία και απευθυνόμενος στον Τεισία είπε: «Θα υποχρεωθείς να μου πληρώσεις το ποσό, σε κάθε περίπτωση, είτε κερδίσεις είτε χάσεις τη δίκη. Αυτό γιατί αν χάσεις θα πρέπει να με πληρώσεις σύμφωνα με την ετυμηγορία, ενώ αν κερδίσεις τη δίκη, θα είναι η πρωτη σου κερδισμένη υπόθεση, οπότε θα πρέπει και πάλι να με πληρώσεις με βάση τη συμφωνία μας». Η απάντηση του Τεισία ήταν η εξής: «Θα μπορούσα να αντιμετωπίσω το σόφισμά σου, αναθέτοντας την υπόθεση σε κάποιο συνήγορο. Άκου όμως γιατί δε θα χρειαστεί να σε πληρώσω, ανεξάρτητα από την απόφαση των δικαστών: Αν το δικαστήριο αποφασίσει να μην πληρώσω το δάσκαλό μου, τότε φυσικά δεν θα πληρωθείς. Αν όμως οι δικαστές αποφασίσουν πως πρέπει να σε πληρώσω, τότε θα έχω χάσει την πρώτη μου δίκη, οπότε σύμφωνα με τη δική μας συμφωνία, δεν σου οφείλω τα δίδακτρα». Τότε, λέγεται ότι οι δικαστές αναφώνησαν την παροιμιώδη έκτοτε φράση: «Εκ κακού κόρακος, κακόν ωόν» και ανέβαλαν τη λήψη απόφασης, φοβούμενοι ότι η απόφασή τους θα θεωρούνταν άκυρη.

Συμπερασματικά, υπήρξαν αρκετοί φιλόσοφοι που ασχολήθηκαν με θέματα Λογικής ακόμα και πριν από τον Αριστοτέλη. Ακόμα και οι σοφιστές είναι πιθανόν μέσα από τα λανθασμένα επιχειρήματα να αναζητούσαν κάποιες λογικές αρχές. Ωστόσο είναι αδιαμφισβήτητο ότι το έργο του Αριστοτέλη αποτελεί την πρώτη συστηματική μελέτη λογικών αρχών και κανόνων.

1.3. Η Λογική του Αριστοτέλη

Οι διάφορες εργασίες του Αριστοτέλη που αφορούσαν στη Λογική, συγκεντρώθηκαν μετά το θάνατό του το 322 π.Χ. από τους μαθητές του σε μία συλλογή που ονομάστηκε Όργανον. Κατά πάσα πιθονότητα η χρονολογική σειρά συγγραφής των μερών του Οργάνου είναι η εξής:

- *Κατη*γορίαι: εδώ ο Αριστοτέλης κατατάσει τα κατηγορήματα σε 10 τύπους (ουσία, ποσόν, ποιόν, προς τι, πού, ποτέ, κείσθαι, έχειν, ποιείν, πάσχειν).

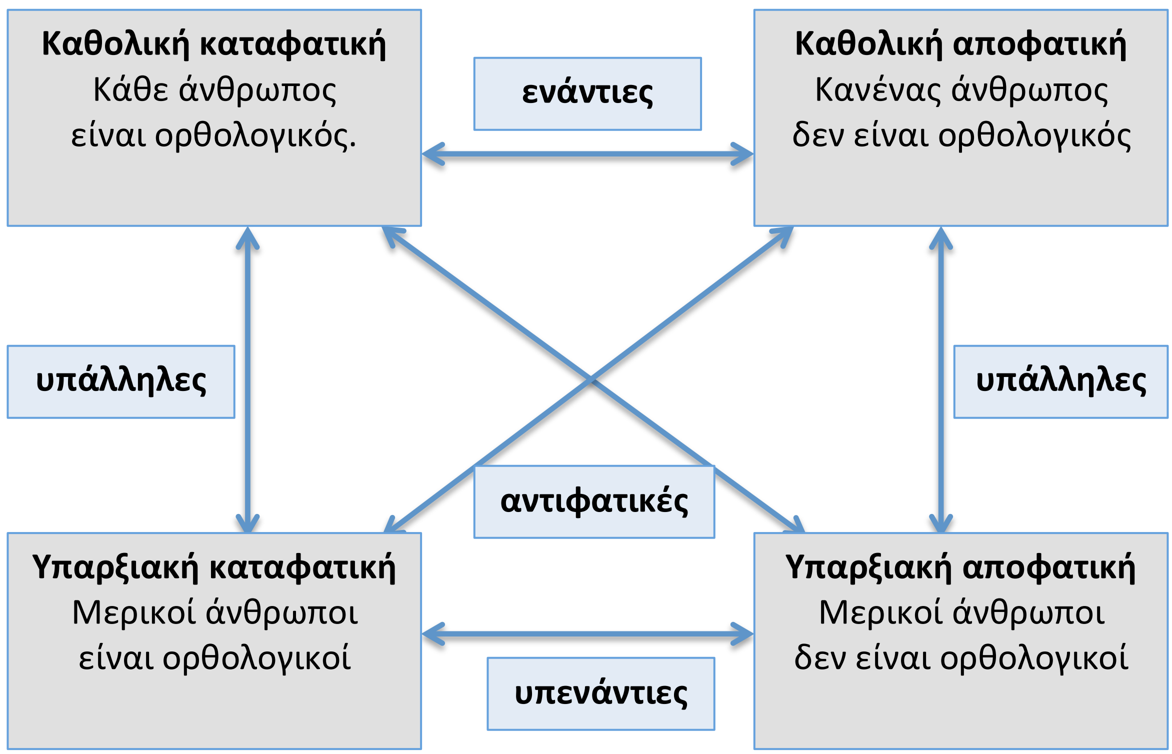
- *Τοπικά,* μαζί με το παράρτημα *Περί Σοφιστικών Ελέγχων:* και τα δύο αφορούν τη Διαλεκτική. Στα Τοπικά παραθέτει κανόνες κατασκευής ορθών συλλογισμών, ενώ στα Περί Σοφιστικών Ελέγχων παραθέτει τρόπους ανίχνευσης λανθασμένων επιχειρημάτων.

- *Περί Ερμηνείας* (γνωστό ως *De Interpretatione*): εδώ κάνει μια αναφορά στην έννοια της δηλωτικής πρότασης και εξετάζει ποια ζεύγη δηλωτικών προτάσεων έρχονται σε αντίθεση και με ποιο τρόπο.

- *Αναλυτικά Πρότερα* και *Αναλυτικά Ύστερα*: το πρώτο αποτελεί τη βασική συνεισφορά του Αριστοτέλη στη Λογική και είναι το έργο στο οποίο αναλύει τα επιχειρήματα με βάση τη μορφή τους. Το δεύτερο αφορά στους τρόπους απόκτησης της γνώσης και στις ειδικές απαιτήσεις των αποδείξεων.

Ο Αριστοτέλης διακρίνει τρία είδη προτάσεων του τύπου *υποκείμενο - κατηγόρημα*: τις *ατομικές*, τις *καθολικές* και τις *υπαρξιακές* (ή *μερικές).* Ατομική είναι μια πρόταση, αν το υποκείμενό της είναι το όνομα ενός συγκεκριμένου ατόμου, για παράδειγμα, «Ο Σωκράτης είναι ηθικός». Καθολική είναι μια πρόταση που έχει ως υποκείμενο το όνομα ενός είδους και αφορά όλα τα άτομα του είδους, για παράδειγμα, η πρόταση «Κάθε άνθρωπος είναι ορθολογικός». Τέλος, υπαρξιακή είναι μια γενική πρόταση, αν αφορά μερικά άτομα του είδους, όπως η πρόταση «Μερικοί άνθρωποι είναι ορθολογικοί». Το σπουδαιότερο μέρος της θεωρίας του Αριστοτέλη αφορά στην αντίθεση καθολικών και υπαρξιακών προτάσεων.

Αφού σε κάθε δηλωτική πρόταση η αναφορά στο υποκείμενο μπορεί να γίνει είτε με καθολικό είτε με μερικό τρόπο και συγχρόνως είτε καταφατικά είτε αποφατικά (δηλαδή, με άρνηση) προκύπτουν τέσσερις δυνατές περιπτώσεις γενικής πρότασης: καθολική καταφατική, καθολική αποφατική, υπαρξιακή καταφατική και υπαρξιακή αποφατική. Οι αντιθέσεις που υπάρχουν για τέτοιες προτάσεις φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα, που καλείται *τετράγωνο της αντίθεσης*.



Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη όταν δύο προτάσεις δεν είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα αληθείς ούτε ταυτόχρονα ψευδείς ονομάζονται *αντιφατικές* μεταξύ τους, ενώ όταν δύο προτάσεις δεν είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα αληθείς αλλά είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα ψευδείς ονομάζονται *ενάντιες.* Επίσης ο Αριστοτέλης λέει ότι υπάρχουν προτάσεις που δεν είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα ψευδείς, αλλά είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα αληθείς (και οι οποίες από μεταγενέστερους μελετητές ονομάστηκαν *υπενάντιες*). Τέλος σύμφωνα με τον Αριστοτέλη αν μία πρόταση συνεπάγεται μία δεύτερη πρόταση τότε η δεύτερη είναι *υπάλληλη* της πρώτης.

1.4. Η θεωρία Συλλογισμών

Ο Αριστοτέλης στα Τοπικά μελετά ορισμούς και κατατάξεις εννοιών, δηλαδή κατηγορικές προτάσεις με δύο όρους και ένα συνδετικό ρήμα (*copula*), της μορφής:

<table>
<tr><td>Το Α ανήκει σε κάθε Β</td><td rowspan="4">που αργότερα μετασχημα-τίζονται αντιστοίχως σε</td><td>Κάθε Β είναι Α</td></tr>
<tr><td>Το Α δεν ανήκει σε κανένα Β</td><td>Κανένα Β δεν είναι Α</td></tr>
<tr><td>Το Α ανήκει σε μερικά Β</td><td>Μερικά Β είναι Α</td></tr>
<tr><td>Το Α δεν ανήκει σε μερικά Β</td><td>Μερικά Β δεν είναι Α</td></tr>
</table>

Αξίζει να αναφέρουμε ότι κατά τον Αριστοτέλη, οι έννοιες μπορεί να οριστούν «*κατά πλάτος*» και «*κατά βάθος*». Το πλάτος μιας έννοιας είναι το σύνολο των αντικειμένων που αντιπροσωπεύει η έννοια αυτή και είναι αυτό που σήμερα καλούμε *έκταση* της έννοιας. Το βάθος της έννοιας «αποτελείται» από τα χαρακτηριστικά γνωρίσματά της και σήμερα περιγράφεται με τον όρο *ένταση*.

Ως φυσικό επακόλουθο των αναζητήσεών του στα Τοπικά, ο Αριστοτέλης μελετά συλλογισμούς με χρήση τέτοιων προτάσεων. Συγκεκριμένα ο Αριστοτέλης στην αρχή των Αναλυτικών Πρότερων (24b,19-20) ορίζει την έννοια συλλογισμός, με τον τρόπο που τη χρησιμοποιούμε και σήμερα: *συλλογισμὸς δέ ἐστι λόγος ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι.* Δηλαδή, συλλογισμός είναι μία λεκτική μορφή στην οποία, όταν γίνουν κάποιες υποθέσεις, κάτι άλλο από αυτό που έχουμε υποθέσει έπεται αναγκαστικά από το ότι οι υποθέσεις είναι αυτές που είναι.

Ωστόσο, οι συλλογισμοί που χρησιμοποιεί αφορούν σε επιχειρήματα στα οποία από δύο και μόνο προκείμενες προτάσεις έπεται μία πρόταση-συμπέρασμα, όπου και οι τρεις προτάσεις είναι απλές και αναφέρονται σε γενικούς όρους, δηλαδή σε ονόματα κάποιων ειδών. Ακριβέστερα λέει ότι κάθε συλλογιστικό συμπέρασμα έπεται από τις δύο υποθέσεις, οι οποίες συσχετίζουν τους όρους (έννοιες) του συμπεράσματος προς ένα τρίτο όρο, το *“μέσο όρο”*. Ο όρος που εμφανίζεται ως κατηγόρημα του συμπεράσματος καλείται "μείζων όρος" (γιατί είναι ευρύτερος), ενώ ο όρος που εμφανίζεται ως υποκείμενο καλείται "ελάσσων όρος” (γιατί είναι λιγότερο εκτεταμένος). Το συμπέρασμα λοιπόν είναι της μορφής ελάσσων όρος - μείζων όρος.

Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, υπάρχουν συλλογιστικά σχήματα που χαρακτηρίζονται από προφάνεια. Αυτοί οι έγκυροι συλλογισμοί παρουσιάζονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα, συνοδευόμενοι από αντίστοιχα παραδείγματα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι κατά το Μεσαίωνα μελετητές του Αριστοτέλη εδώσαν μνημονικά ονόματα στους παρακάτω συλλογισμούς, με στόχο την εύκολη απομνημόνευσή τους. Αντιστοίχως τα ονόματα αυτά είναι: Barbara, Celarent, Darii και Ferio.

ΤΕΛΕΙΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΙ	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**
Κάθε Z είναι Y. Κάθε X είναι Z. Άρα, κάθε X είναι Y.	Κάθε αιλουροειδές είναι θηλαστικό. Κάθε λιοντάρι είναι αιλουροειδές. Άρα, κάθε λιοντάρι είναι θηλαστικό.
Κανένα Z δεν είναι Y. Κάθε X είναι Z. Άρα, κανένα X δεν είναι Y.	Κανένα αιλουροειδές δεν είναι φυτοφάγο. Κάθε λιονταρι είναι αιλουροειδές. Άρα, κανένα λιοντάρι δεν είναι φυτοφάγο.

Κάθε Ζ είναι Υ. Μερικά Χ είναι Ζ. Άρα, μερικά Χ είναι Υ.	Κάθε λιοντάρι είναι θηλαστικό. Μερικά σαρκοβόρα είναι λιοντάρια. Άρα, μερικά σαρκοβόρα είναι θηλαστικά.
Κανένα Ζ δεν είναι Υ. Μερικά Χ είναι Ζ. Άρα, μερικά Χ δεν είναι Υ.	Κανένα λιοντάρι δεν είναι φυτοφάγο. Μερικά θηλαστικά είναι φυτοφάγα. Άρα, μερικά θηλαστικά δεν είναι λιοντάρια.

Επιπλέον ο Αριστοτέλης μας ¨δίνει¨ τέσσερις αναγκαίες συνθήκες εγκυρότητας συλλογισμών:

α) Τουλάχιστον μία προκειμένη να είναι καθολική.

β) Τουλάχιστον μία προκειμένη να είναι καταφατική.

γ) Αν μία από τις προκείμενες είναι μερική, το ίδιο να είναι και το συμπέρασμα.

δ) Αν μία από τις προκείμενες είναι αρνητική, το ίδιο να είναι και το συμπέρασμα.

Προφανώς κάθε ένας από τους τέλειους συλλογισμούς που παρουσιάσαμε στον παραπάνω πίνακα ικανοποιεί τουλάχιστον ένα από τα τέσσερα κριτήρια ελέγχου εγκυρότητας.

Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ο Αριστοτέλης στο Περί Ερμηνείας και στα Αναλυτικά Πρότερα ασχολήθηκε με “τροπικές” προτάσεις. Δηλαδή, εκτός από τους συλλογισμούς που είδαμε παραπάνω, μελέτησε και συλλογισμούς στους οποίους υπάρχουν προτάσεις της μορφής «Είναι αναγκαίο ότι...» ή «Είναι δυνατόν να...».

1.5. Η Λογική των Στωικών

Στην ύστερη αρχαιότητα δύο ήταν οι μεγάλες σχολές Λογικής: η *Περιπατητική σχολή*, η οποία ήταν συνέχεια της σχολής του Αριστοτέλη και η *Στωική*, η οποία ήταν συνέχεια της σχολής των μεγαρικών φιλοσόφων και είχε ως επιφανέστερο μέλος της τον Χρύσιππο. Δυστυχώς μόνο ένα μικρό μέρος του έργου των στωικών διασώζεται σήμερα.

Η Λογική των μεγαρικών και κατ' επέκταση των στωικών αφορά σε επιχειρήματα διαλεκτικού χαρακτήρα. Γι' αυτό άλλωστε είναι γνωστή ως "Διαλεκτική". Έτσι, ενώ το έργο του Αριστοτέλη και των Περιπατητικών εστιάζει στη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων με έμφαση στην εσωτερική δομή των προτάσεων (λογική κατηγορημάτων), το έργο των στωικών εστιάζει στη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων λαμβάνοντας κάθε πρόταση ως ένα ιδιαίτερο όλον (λογική προτάσεων).

Ιδρυτής της Μεγαρικής σχολής ήταν ο *Ευκλείδης ο Μεγαρεύς*, που έζησε την εποχή του Πλάτωνα. Ο μαθητής του, ο *Ευβουλίδης* ο Μιλήσιος ήταν σύμφωνα με τον Διογένη Λαέρτιο ο δημιουργός επτά παράδοξων. Χαρακτηριστικά είναι

• του *ψευδομένου*: Ένας άνθρωπος λέει ότι ψεύδεται. Αυτό που λέει είναι αληθές ή ψευδές;

• του *φαλακρού*: Θα έλεγες ότι ένας άνδρας με μία τρίχα είναι φαλακρός; Ναι. Θα έλεγες ότι ένας άνδρας με δυο τρίχες είναι φαλακρός; Ναι. ... Μέχρι ποιο αριθμό τριχών θα έλεγες ότι είναι φαλακρός;

• του *άνδρα με κέρατα*. Αυτό που δεν έχεις χάσει το έχεις ακόμη. Όμως δεν έχεις χάσει κέρατα. Άρα έχεις ακόμη κέρατα.

Πρόκειται για παράδοξα που καταδεικνύουν αντιστοίχως το πρόβλημα της αυτοαναφορικότητας μιας πρότασης ή την ασάφεια ορισμένων εκφράσεων ή την προσοχή που χρειάζεται να δείχνουμε όταν σχηματίζουμε την άρνηση μιας πρότασης, η οποία προϋποθέτει κάποια άλλη. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο Ευβουλίδης εφεύρε τα παράδοξα αυτά χωρίς κάποιο ιδιαίτερο σκοπό, παρά μόνο να εξηγήσει κάποιες θέσεις της Μεγαρικής φιλοσοφίας. Μάλιστα, η ισχυρή διαφωνία του Ευβουλίδη με τον Αριστοτέλη είναι ο λόγος της ισχυρής αντιπαλότητας μεταξύ των περιπατητικών και τον μεγαρικών. Έπρεπε ήδη να φτάσουμε στην αναγέννηση για να γίνει σαφές ότι οι δύο αυτές θεωρίες είναι στην ουσία συμπληρωματικές και όχι αντικρουόμενες.

Ιδρυτής της Στωικής σχολής ήταν ο *Ζήνωνας ο Κιτιέας*, που είχε ως διάδοχο τον Κλεάνθη, του οποίου διάδοχος ήταν ο κατά πολλούς μεγαλύτερος Λογικός της αρχαιότητας: ο *Χρύσιππος* (280 π.Χ. – 207 π.Χ.). Χαρακτηριστικά, ο Διογένης ο Λαέρτιος στο έργο του: «*Βίοι και γνώμαι των εν φιλοσοφία ευδοκιμησάντων και των εκάστη αιρέσει αρεσκόντων εν επιτόμω συναγωγή*» (συνήθως ονομάζεται Βίοι επιφανών φιλοσοφων) αναφέρει ότι “*αν υπήρχε διαλεκτική στους θεούς, αυτή δεν θα ήταν άλλη από του Χρίσιππου*”.

Αν και οι πληροφορίες που έχουμε για την Λογική των στωικών προέρχονται από υποστηρικτές άλλων σχολών, με επικριτική διάθεση απέναντί τους, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τις κύριες θέσεις της Λογικής τους, καθώς υπάρχει συμφωνία μεταξύ των πηγών για πολλά σημεία του έργου τους. Συνοπτικά ο Χρύσιππος και οι διάδοχοί του:

• μελέτησαν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια υποθετική πρόταση, δηλαδή μια πρόταση της μορφής «Αν..., τότε...», μπορεί να χαρακτηρισθεί ως "αληθής".

• έκαναν πρώτοι τη διάκριση ανάμεσα στο "*σημαίνον*" δηλαδή στη λέξη ή στην ακολουθία λέξεων που είναι φορέας του νοήματος και στο "*σημαινόμενο*" δηλαδή στο νόημα καθεαυτό.

• εισήγαγαν πέντε βασικά συμπερασματικά σχήματα, που συχνά αναφέρονται ως “*αναπόδεικτοι τρόποι*”. Τα σχήματα αυτά, τα οποία εξέφρασαν χρησιμοποιώντας διατακτικούς αριθμούς (1^{ος}, 2^{ος} κ.λ.π.) και όχι μεταβλητές όπως ο Αριστοτέλης, είναι τα εξής:

α.	Αν το 1^{ο}, τότε το 2^{ο}.	Αλλά το 1^{ο}.	Άρα το 2^{ο}.
β.	Αν το 1^{ο}, τότε το 2^{ο}.	Αλλά όχι το 2^{ο}.	Άρα όχι το 1^{ο}.
γ.	Όχι και το 2^{ο} και το 1^{ο}.	Αλλά το 1^{ο}.	Άρα όχι το 2^{ο}.
δ.	Ή το 1^{ο} ή το 2^{ο}.	Αλλά το 1^{ο}.	Άρα όχι το 2^{ο}.
ε.	Ή το 1^{ο} ή το 2^{ο}.	Αλλά όχι το 2^{ο}.	Άρα το 1^{ο}.

1.6. Η Λογική στην Ύστερη Αρχαιότητα, στους Άραβες και στο Μεσαίωνα

Η διαμάχη μεταξύ των Περιπατητικών και των Στωικών, στην οποία αναφερθήκαμε παραπάνω, άρχισε να αμβλύνεται στο τέλος του 1ου αιώνα μ.Χ.. Είναι τότε που ο διάσημος γιατρός Γαληνός (129 μ.Χ. – 199 μ.Χ.) μελέτησε αμφότερες τις θεωρίες, διεξήγαγε σοβαρές λογικές έρευνες, καθώς επίσης και συνέγραψε κριτικό σχολιασμό στα έργα του Αριστοτέλη, του Θεόφραστου και του Χρύσιππου. Μετά το Γαληνό και για πολλούς αιώνες η μόνη δραστηριότητα σχετική με τη Λογική ήταν η συγγραφή σχολιασμών για το έργο του Αριστοτέλη.

Ακολουθούν οι Αραβες, οι οποίοι ήρθαν σε επαφή με την ελληνική επιστήμη και τον Αριστοτέλη, μετά την κατάκτηση της Συρίας, οπότε χριστιανοί μελετητές συγγράφουν τα πρώτα έργα λογικής στα αραβικά. Ο Αλ Κιντί ήταν ο πρώτος Άραβας που έγραψε για θέματα Λογικής, ενώ σημαντικό έργο παρούσιασαν επίσης και ο Αμπού ιμπν Σινά (Αβικέννας) που υποστήριξε την καινοτόμο άποψη ότι η Λογική πρέπει να μελετάται ανεξάρτητα από τα κείμενα του Αριστοτέλη, αλλά και ο Ιμπν Ρουσντ (Αβερρόης), ο οποίος στον αντίποδα έκανε λεπτομερείς σχολιασμούς του Οργάνου. Αργότερα βέβαια έγινε σαφές ότι το επιστημονικά ορθό ήταν ο συγκερασμός των αντίθετων αυτών θέσεων. Έτσι οδηγηθήκαμε στην επονομαζόμενη “Μεσαιωνική Λογική”, που περιλαμβάνει τις λογικές μελέτες που πραγματοποιήθηκαν στη Δυτική Ευρώπη μεταξύ 11ου και 15ου αιώνα, με σημαντικότερο ίσως εκπρόσωπο τον Peter Abelard (Αβελάρδος). Δυστυχώς η άνθηση της λογικής σταματά το 15ο αιώνα.

1.7. Η νεότερη και η σύγχρονη Λογική

Μαθηματικοί και Φιλόσοφοι που καθόρισαν την εξέλιξη και ουσιαστικά διαμόρφωσαν την επιστήμη που σήμερα καλούμε Μαθηματική (ή Συμβολική ή Τυπική) Λογική, κατά χρονολογική σειρά θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι:

• ο *Gottfried Leibniz* (Λάιμπνιτς, 1646-1716), ένας πραγματικός homo universalis της εποχής του, ο οποίος -πέρα από το έργο του στο διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό- είχε το μεγαλόπνοο σχέδιο της ανάπτυξης μίας παγκόσμιας γλώσσας (characteristica universalis), μέσω της οποίας όλες οι επιστημονικές και φιλοσοφικές αναζητήσεις θα μπορούσαν να αναχθούν σε υπολογισμούς. Αναγνωρίζουμε προφανώς στην ιδέα του αυτή ένα προάγγελο μεγάλου μέρους αναζητήσεων της Μαθηματικής Λογικής.
• ο *Bernard Bolzano* (Μπολζάνο, 1781-1848), ο οποίος χρησιμοποιώντας μια εν μέρει τυπική γλώσσα (τη μητρική του γλώσσα τη γερμανική εμπλουτισμένη με διάφορες σταθερές και μεταβλητές) ανέπτυξε κεντρικές έννοιες της Λογικής, όπως π.χ. την έννοια της λογικής συνέπειας.
• ο *Augustus De Morgan* (Ντε Μόργκαν, 1806-1871) με το έργο του Formal Logic (Τυπική Λογική) που δημοσιεύτηκε το 1847.
• ο George Boole (Μπουλ, 1815-1864) με το έργο του Mathematical Analysis of Logic (Μαθηματική Ανάλυση της Λογικής) που επίσης δημοσιεύτηκε το 1847.
Πρέπει να αναφέρουμε ότι αμφότεροι οι δυο τελευταίοι, ουσιαστικά θεμελίωσαν με τα έργα που προαναφέραμε τη νεώτερη Λογική!

Φτάνοντας στο τέλος του 19ου αιώνα, οι μελετητές της Λογικής μπορούν να «χωριστούν» σε τρεις σχολές, όχι κατ' ανάγκη ξένες μεταξύ τους:

• την *αλγεβρική σχολή* με κυριότερους εκπρόσωπους, εκτός από τον Μπουλ που προαναφέραμε, τους *John Venn* (Βεν, 1834-1923), *Charles Peirce* (Περς, 1839-1914) και *Ernst Schröder* (Σρέντερ, 1841-1902). Επίκεντρο των ερευνών της συγκεκριμένης σχολής ήταν η σχέση που υπάρχει μεταξύ αριθμητικών-αλγεβρικών πράξεων και λογικών πράξεων στα πλαίσια επιχειρηματολογίας, με στόχο την ανάπτυξη χειρισμών με εφαρμογή σε περιπτώσεις όπως οι προτάσεις, τα σύνολο κ.α. .

• τη *λογικιστική σχολή* με κυριότερους εκπροσώπους τον *Gottlob Frege* (Φρέγκε, 1848-1925) που προσπάθησε να ανάγει τα Μαθηματικά στη Λογική και τον

Bertrand Russell (Ράσελ, 1872- 1970), που με την ανακάλυψη του περίφημου παραδόξου του κατέρριψε το σύστημα του Φρέγκε ως αντιφατικό.

• τη φορμαλιστική σχολή με σημαντικότερους εκπροσώπους της, τους *Richard Dedekind* (Ντέντεκιντ, 1831-1916), το *Giuseppe Peano* (Πεάνο, 1858-1932) και το *David Hilbert* (Χίλμπερτ, 1862-1943). Σκοπός των μελετών της σχολής αυτής ήταν η κατασκευή μη αντιφατικών αξιωματικών συστημάτων για κλάδους των μαθηματικών, όπως η γεωμετρία, η θεωρία αριθμών, η θεωρία συνόλων κ.α. .

Στον 20ο αιώνα η μαθηματική λογική γνώρισε εκπληκτική ανάπτυξη. Κορυφαίος λογικός του αιώνα αυτού θεωρείται ο *Kurt Gödel* (Γκέντελ, 1906-1978), που μεταξύ άλλων απέδειξε τα θεμελιώδη θεωρήματα "πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού" και "μη πληρότητας της τυπικής αριθμητικής". Σημαντικοί λογικοί ήταν ακόμα και οι *Leopold Löwenheim* (Λέβενχαϊμ, 1878-1957), Thoralf Skolem (Σκόλεμ, 1887-1963), Stephen Kleene (Κλίνι, 1909-1994) και ο Paul Cohen (Κοέν 1934-2007), που απέδειξε ότι το "αξίωμα επιλογής" και η "υπόθεση του συνεχούς" στη Θεωρία Συνόλων είναι προτάσεις ανεξάρτητες από τα συνήθη αξιώματα της θεωρίας αυτής.

Ολοκληρώνοντας πρέπει να αναφέρουμε ότι τις τελευταίες δεκαετίες η Λογική έχει “εξειδικευτεί” και οι επιστήμονες έχουν στρέψει τις μελέτες τους σε ειδικά θέματα, όπως είναι η "Τροπική Λογική", οι "Πλειότιμες Λογικές", η "Επιστημική Λογική", η "Ασαφής Λογική", η "Γραμμική Λογική" κ.λ.π. .

2. ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

2.1. Η γλώσσα της Προτασιακής Λογικής

Η γλώσσα της προτασιακής Λογικής, ας τη συμβολίσουμε με $Γ_0$, είναι σαφώς φτωχότερη από τη φυσική μας γλώσσα, αφού αποτελείται αποκλειστικά από τα εξής στοιχεία:

α) p, q, r, s, …
Πρόκειται για μεταβλητές που εκφράζουν προτάσεις (*προτασιακές μεταβλητές*) και το σύνολό τους θα το συμβολίζουμε με $M(Γ_0)$.

β) ¬ (άρνηση), ∧ (σύζευξη), ∨ (διάζευξη), → (συνεπαγωγή) και ↔ (ισοδυναμία), που καλούνται *συνδέσμοι*.

γ) (,), που καλούνται αντιστοίχως αριστερή και δεξιά *παρένθεση*.

Στο «λεξιλόγιο» του προτασιακού λογισμού, *έκφραση* ονομάζουμε κάθε πεπερασμένη ακολουθία από τα παραπάνω σύμβολα, π.χ. ¬p→ , p∧q∨↔), r(¬→s.

Μια έκφραση θα ονομάζεται *προτασιακός τύπος* αν και μόνο αν
- είναι προτασιακή μεταβλητή ή
- είναι της μορφής (¬ φ), (φ∧ψ), (φ∨ψ), (φ→ψ), (φ↔ψ), όπου φ και ψ είναι ήδη κατασκευασμένοι προτασιακοί τύποι.

Το σύνολο των προτασιακών τύπων της $Γ_0$ συμβολίζεται με $T(Γ_0)$. Έτσι, προτασιακοί τύποι είναι π.χ. οι: ((p∨q)→r), (¬ s), ((r→s)↔ (¬ t)), p.

Επιπλέον θα πρέπει να αναφέρουμε ότι για λόγους ευκολίας, στην αναγνώριση της δομής ενός προτασιακού τύπου, έχουμε κάνει τις ακόλουθες συμβάσεις:
α) Οι εξωτερικές παρενθέσεις ενός προτασιακού τύπου μπορεί να παραλείπονται.

β) Η σύζευξη και η διάζευξη είναι μεταξύ τους ισοδύναμα και προηγούνται της συνεπαγωγής και της διπλής συνεπαγωγής, που επίσης είναι μεταξύ τους ισοδύναμα (σύμβολα).

γ) Η άρνηση προηγείται όλων των υπόλοιπων συνδέσμων.

Έτσι π.χ. όταν γράφουμε $p \wedge q \rightarrow r$ εννοούμε $((p \wedge q) \rightarrow r)$ και όταν γράφουμε $\neg s \leftrightarrow p$ εννοούμε $((\neg s) \leftrightarrow p)$.

2.1. Η σημασιολογία της Προτασιακής Λογικής

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε το συντακτικό της Γ_0, δηλαδή το πως συντάσσονται οι προτασιακοί τύποι. Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε το πως αποκτούν νόημα. Μιλώντας λοιπόν για τη σημασιολογική πλευρά της Προτασιακής Λογικής:

α) οι προτασιακές μεταβλητές αντιστοιχούν σε στοιχειώδεις προτάσεις της φυσικής μας γλώσσας, οι οποίες είναι αληθείς ή ψευδείς (δηλαδή ισχύει η αρχή της δισθένειας).

β) οι σύνδεσμοι $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ αντιστοιχούν στις λέξεις – εκφράσεις: “δεν”, “και”, “ή”, ”αν … τότε …”, ”… αν και μόνο αν”.

γ) οι παρενθέσεις υποδηλώνουν την αρχή και το τέλος μιας πρότασης.

Έτσι, παραδείγματος χάρη αν η p αντιστοιχεί στην στοιχειώδη πρόταση «η Μαρία θα περάσει το μάθημα στην πρώτη εξεταστική», η q αντιστοιχεί στην πρόταση «η Μαρία θα μελετήσει πολύ» και η r αντιστοιχεί στην πρόταση «Η Μαρία θα περάσει το μάθημα στη δεύτερη εξεταστική» τότε ο προτασιακός τύπος “$\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$” αντιστοιχεί στην πρόταση: «αν η Μαρία δεν περάσει το μάθημα στην πρώτη εξεταστική, τότε αν μελετήσει πολύ θα το περάσει στη δεύτερη εξεταστική».

Χρειαζόμαστε, τώρα, ένα συναρτησιακό μηχανισμό, που θα απονέμει τιμές αλήθειας στις μεταβλητές της γλώσσας προτασιακού λογισμού και κατ' επέκταση στους προτασιακούς τύπους. Έτσι λοιπόν ορίζουμε:

Αποτίμηση (ή *εκτίμηση* ή *απονομή αλήθειας*) είναι μία συνάρτηση α: $M(\Gamma_0) \mapsto \{Α,Ψ\}$ (εναλλακτικά στο {T,F} ή ακόμα και στο {0,1}).

Είναι προφανές ότι αν έχω δύο προτασιακές μεταβλητές p, q υπάρχουν $2^2 = 4$ διαφορετικές αποτιμήσεις, ενώ αν έχω τρεις προτασιακές μεταβλητές p, q, r υπάρχουν $2^3 = 8$ διαφορετικές αποτιμήσεις:

	p	q
$α_1$	Α	Α
$α_2$	Α	Ψ
$α_3$	Ψ	Α
$α_4$	Ψ	Ψ

	p	q	r
$α_1$	Α	Α	Α
$α_2$	Α	Α	Ψ
$α_3$	Α	Ψ	Α
$α_4$	Α	Ψ	Ψ
$α_5$	Ψ	Α	Α
$α_6$	Ψ	Α	Ψ
$α_7$	Ψ	Ψ	Α
$α_8$	Ψ	Ψ	Ψ

Προκειμένου να αποδόσουμε μία από τις τιμές αλήθειας σε κάθε προτασιακό τύπο της Γ_0, επεκτείνουμε την αποτίμηση *α* σε μια συνάρτηση $\overline{\alpha}$: $T(\Gamma_0) \mapsto \{Α,Ψ\}$, αναδρομικά σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες.

Αν φ, ψ οποιοιδήποτε προτασιακοί τύποι, ορίζουμε:

• $\overline{\alpha}(φ) = Α$ αν και μόνο αν $\overline{\alpha}(\neg φ) = Ψ$

• $\overline{\alpha}(φ) = Α$ και $\overline{\alpha}(ψ) = Α$ αν και μόνο αν $\overline{\alpha}(φ \wedge ψ) = Α$

• $\overline{\alpha}$ (φ) = Α ή $\overline{\alpha}$ (ψ) = Α αν και μόνο αν $\overline{\alpha}$ (φ∨ψ) = Α

• $\overline{\alpha}$ (φ) = Ψ ή $\overline{\alpha}$ (ψ) = Α αν και μόνο αν $\overline{\alpha}$ (φ→ψ) = Α

• $\overline{\alpha}$ (φ) = $\overline{\alpha}$ (ψ) αν και μόνο αν $\overline{\alpha}$ (φ↔ψ) = Α

Τα παραπάνω περιγράφονται συνοπτικά στους ακόλουθους πίνακες αλήθειας:

$\overline{\alpha}$ (φ)	$\overline{\alpha}$ (¬φ)
Α	Ψ
Ψ	Α

$\overline{\alpha}$ (φ)	$\overline{\alpha}$ (ψ)	$\overline{\alpha}$ (φ∧ψ)	$\overline{\alpha}$ (φ∨ψ)	$\overline{\alpha}$ (φ→ψ)	$\overline{\alpha}$ (φ↔ψ)
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

Επιπλέον ορίζουμε:

• *Ικανοποιήσιμος* λέγεται ένας προτασιακός τύπος αν υπάρχει τουλάχιστον μία αποτίμηση για την οποία να παίρνει την τιμή Α.

• *Ταυτολογία* λέγεται ένας προτασιακός τύπος όταν παίρνει την τιμή Α, για κάθε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών του.

Π.χ. ο τύπος p→ (p ∨ q) είναι ταυτολογία αφού εύκολα, από τον παρακάτω πίνακα αλήθειας, δια.πιστώνουμε ότι για καθε αποτίμηση των p, q παίρνει την τιμή Α

p	q	$(p \vee q)$	$p \to (p \vee q)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α

• *Αντίφαση* λέγεται ενός προτασιακός τύπος, όταν παίρνει την τιμή Ψ, για κάθε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών του.

Π.χ. ο τύπος $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ είναι αντίφαση, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από τον παρακάτω πίνακα αλήθειας:

p	q	$(p \vee q)$	$(\neg p)$	$(\neg q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ

• Δύο προτασιακοί τύποι φ και ψ της γλώσσας Γ_0 του προτασιακού λογισμού λέγονται αληθοσυναρτησιακά ισοδύναμοι αν και μόνο αν παίρνουν τις ίδιες τιμές αλήθειας για κάθε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών τους. Συμβολίζουμε με $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Έυκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\varphi \Leftrightarrow \psi$ αν και μόνο αν ο προτασιακός τύπος $\varphi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.

Οι πιο γνώστες ταυτολογίες ή όπως αλλιώς καλούνται “νόμοι της προτασιακής λογικής” είναι οι εξής:
Για τους προτασιακούς τύπους φ, χ, ψ ισχύουν:

$\varphi \wedge \chi \Leftrightarrow \chi \wedge \varphi$	(νόμος αντιμεταθετικότητας)
$\varphi \vee \chi \Leftrightarrow \chi \vee \varphi$	(νόμος αντιμεταθετικότητας)
$\varphi \wedge (\chi\wedge\psi) \Leftrightarrow (\varphi\wedge\chi) \wedge \psi$	(νόμος προσεταιριστικότητας)
$\varphi \vee (\chi\vee\psi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \chi) \vee \psi$	(νόμος προσεταιριστικότητας)
$\varphi \wedge (\chi\vee\psi) \Leftrightarrow (\varphi\wedge\chi) \vee (\varphi\wedge\psi)$	(νόμος επιμεριστικότητας)
$\varphi \vee (\chi\wedge \psi) \Leftrightarrow (\varphi\vee\chi) \wedge (\varphi\vee\psi)$	(νόμος επιμεριστικότητας)
$\neg\neg \varphi \Leftrightarrow \varphi$	(νόμος διπλής άρνησης)
$\neg (\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$	(νόμος άρνησης συνεπαγωγής)
$\neg (\varphi\wedge\chi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\chi$	(νόμος De Morgan)
$\neg (\varphi\vee\chi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\chi$	(νόμος De Morgan)
$\varphi \vee \neg\varphi$	(νομός απόκλεισης τρίτου)
$(\varphi \rightarrow \chi) \Leftrightarrow (\neg\chi \rightarrow \neg\varphi)$	(νομός αντιθετοαντιστροφής)
$\varphi \rightarrow \chi \Leftrightarrow \neg \varphi \vee \chi$	(νόμοι αντικατάστασης)
$\varphi \leftrightarrow \chi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$	

Τέλος, ορίζουμε ότι:

• Δύο προτασιακοί τύποι της γλώσσας Γ_0 του προτασιακού λογισμού λέγονται *αληθοσυναρτησιακά αντιφατικοί* αν και μόνο αν παίρνουν αντίθετες τιμές αλήθειας για κάθε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών τους.

• Δύο ή περισσότεροι προτασιακοί τύποι λέγονται *συνεπείς* (μεταξύ τους) αν υπάρχει τουλάχιστον μία αποτίμηση που να καθιστά τους τύπους συγχρόνως αληθείς. Μια τέτοια αποτίμηση λέγεται *μοντέλο* του συνόλου αυτών των τύπων.

3. Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

3.1. Εισαγωγή

Η απόδειξη, ένα από τα σημαντικότερα διανοητικά επιτεύγματα του ανθρώπου, ήταν και παραμένει μια έννοια που καθορίζει τη μαθηματική επιστήμη. Στον πυρήνα της αποδεικτικής διαδικασίας (μιας συλλογιστικής διαδικασίας που ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσω μιας σειράς διαδοχικών συμπερασμάτων καταλήγει σ' ένα τελικό συμπέρασμα) βρίσκονται έννοιες-κλειδιά, όπως η συνεπαγωγή και η ισοδυναμία. Σίγουρα, ενδεικτικό όσο και αποκαλυπτικό είναι το γεγονός ότι στις εργασίες του 19ου συνεδρίου της ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) υπήρξε ειδική αναφορά στην ανάγκη για περαιτέρω έρευνα στην κατεύθυνση του να αποσαφηνιστεί ο ρόλος της λογικής στη διδασκαλία της απόδειξης.

Εκτός από την καθεαυτή σύνδεση της Λογικής με τη διαδικασία επιχειρηματολογίας, αδιαμφισβήτητο είναι το γεγονός ότι η Μαθηματική Λογική συνδέεται άμεσα και με γλωσσικά ζητήματα, που αφορούν στη σύνταξη αποδείξεων και γενικότερα στη διατύπωση μαθηματικού λόγου.

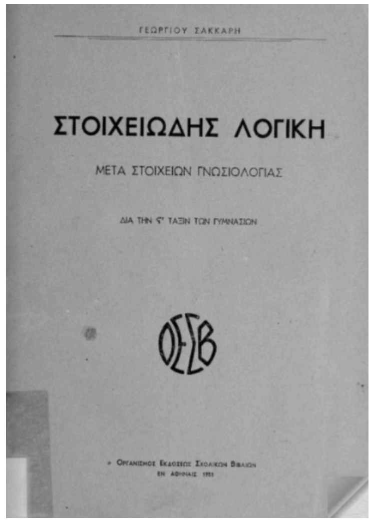
Είναι λοιπόν ο πολυσήμαντος ρόλος της Λογικής γεγονός που εξηγεί το ότι το πρόσφατο παρελθόν, στα πλαίσια της παρεχόμενης μαθηματικής παιδείας στο Λύκειο, βρίθει προσπαθειών διδασκαλίας στοιχείων της Μαθηματικής Λογικής. Συγχρόνως είναι αυτός ο πολυσήμαντος ρόλος, παράγοντας που εντείνει τις αποκλίσεις στις απόψεις σχετικά με τη διδασκαλία της Λογικής. Έτσι, παρότι είναι κοινή πεποίθηση των εκπαιδευτικών και όχι μόνο ότι η Λογική είναι απαραίτητο εργαλείο για κάθε μαθητή (στην προσπάθεια για απόκτηση της αναγκαίας και ικανής γνώσης ώστε να μπορέσει να αποδείξει μαθηματικές προτάσεις και γενικότερα για να «κάνει μαθηματικά»), το καθεαυτό περιεχόμενο της διδασκαλίας και η διδακτική προσέγγιση ήταν και είναι τουλάχιστον ασαφή.

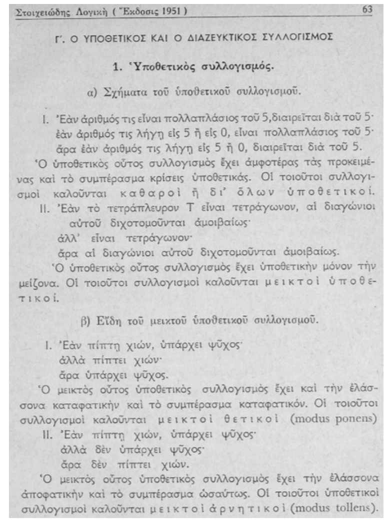
3.2. Η Λογική στα ελληνικά σχολεία

Επιγραμματικά, η πολύπαθη - ας μας επιτραπεί - ιστορία της διδασκαλίας της Λογικής στη χώρα μας, έχει ως εξής:

Ήδη από τις δεκαετίες του 1950 και 1960 οι μαθητές έρχονταν σε επαφή (όχι με τη Μαθηματική Λογική, αλλά) με στοιχεία λογικής και γνωσιολογίας, από τα βιβλία αρχικά του Σακκάρη και κατόπιν του Σούλια. Επρόκειτο μάλιστα για ένα μάθημα που διδασκόταν από φιλόλογους καθηγητές!

Αργότερα, στις δεκαετίες του 1970 και του 1980 τα σχολικά βιβλία του Λυκείου περιείχαν (συνήθως σε ένα εισαγωγικό κεφάλαιο) αναφορές σε λογικές πράξεις,




Στοιχειώδης Λογική (Ἔκδοσις 1951) 63

Γ'. Ο ΥΠΟΘΕΤΙΚΟΣ ΚΑΙ Ο ΔΙΑΖΕΥΚΤΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Ὑποθετικὸς συλλογισμός.

α) Σχήματα τοῦ ὑποθετικοῦ συλλογισμοῦ.

I. Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι πολλαπλάσιος τοῦ 5, διαιρεῖται διὰ τοῦ 5·
ἐὰν ἀριθμός τις λήγῃ εἰς 5 ἢ εἰς 0, εἶναι πολλαπλάσιος τοῦ 5·
ἄρα ἐὰν ἀριθμός τις λήγῃ εἰς 5 ἢ 0, διαιρεῖται διὰ τοῦ 5.

Ὁ ὑποθετικὸς οὗτος συλλογισμὸς ἔχει ἀμφοτέρας τὰς προκειμένας καὶ τὸ συμπέρασμα κρίσεις ὑποθετικάς. Οἱ τοιοῦτοι συλλογισμοὶ καλοῦνται καθαροὶ ἢ δι' ὅλων ὑποθετικοί.

II. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον Τ εἶναι τετράγωνον, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται ἀμοιβαίως·
ἀλλ' εἶναι τετράγωνον·
ἄρα αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται ἀμοιβαίως.

Ὁ ὑποθετικὸς οὗτος συλλογισμὸς ἔχει ὑποθετικὴν μόνον τὴν μείζονα. Οἱ τοιοῦτοι συλλογισμοὶ καλοῦνται μεικτοὶ ὑποθετικοί.

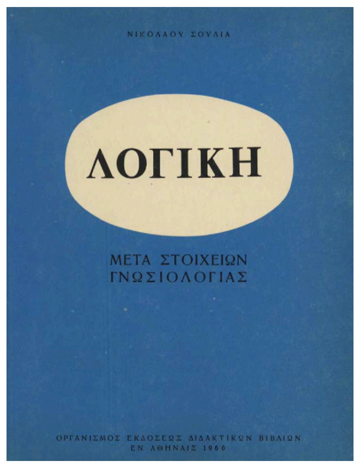
β) Εἴδη τοῦ μεικτοῦ ὑποθετικοῦ συλλογισμοῦ.

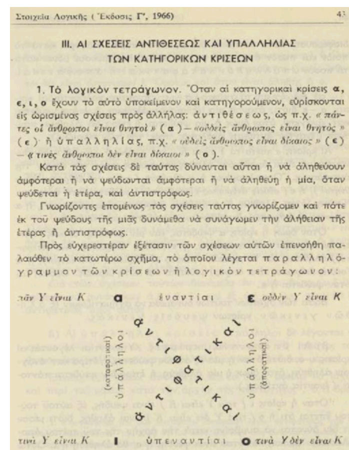
I. Ἐὰν πίπτῃ χιών, ὑπάρχει ψῦχος·
ἀλλὰ πίπτει χιών·
ἄρα ὑπάρχει ψῦχος.

Ὁ μεικτὸς οὗτος ὑποθετικὸς συλλογισμὸς ἔχει καὶ τὴν ἐλάσσονα καταφατικὴν καὶ τὸ συμπέρασμα καταφατικόν. Οἱ τοιοῦτοι συλλογισμοὶ καλοῦνται μεικτοὶ θετικοὶ (modus ponens)

II. Ἐὰν πίπτῃ χιών, ὑπάρχει ψῦχος·
ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει ψῦχος·
ἄρα δὲν πίπτει χιών.

Ὁ μεικτὸς οὗτος ὑποθετικὸς συλλογισμὸς ἔχει τὴν ἐλάσσονα ἀποφατικὴν καὶ τὸ συμπέρασμα ὡσαύτως. Οἱ τοιοῦτοι ὑποθετικοὶ συλλογισμοὶ καλοῦνται μεικτοὶ ἀρνητικοὶ (modus tollens).




Στοιχεία Λογικής (Ἔκδοσις Γ', 1966) 43

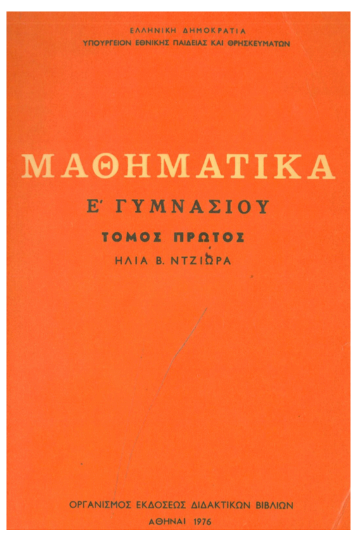
III. ΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΥΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΩΝ ΚΡΙΣΕΩΝ

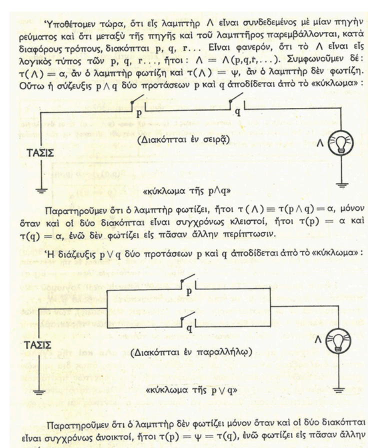
1. Τὸ λογικὸν τετράγωνον. Ὅταν αἱ κατηγορικαὶ κρίσεις α, ε, ι, ο ἔχουν τὸ αὐτὸ ὑποκείμενον καὶ κατηγορούμενον, εὑρίσκονται εἰς ὡρισμένας σχέσεις πρὸς ἀλλήλας: ἀντιθέσεως, ὡς π.χ. «πάντες οἱ ἄνθρωποι εἶναι θνητοὶ» (α) — «οὐδεὶς ἄνθρωπος εἶναι θνητὸς» (ε) ἢ ὑπαλληλίας, π.χ. «οὐδεὶς ἄνθρωπος εἶναι δίκαιος» (ε) — «τινὲς ἄνθρωποι δὲν εἶναι δίκαιοι» (ο).

Κατὰ τὰς σχέσεις δὲ ταύτας δύνανται αὗται ἢ νὰ ἀληθεύουν ἀμφότεραι ἢ νὰ ψεύδωνται ἀμφότεραι ἢ νὰ ἀληθεύῃ ἡ μία, ὅταν ψεύδεται ἡ ἑτέρα, καὶ ἀντιστρόφως.

Γνωρίζοντες ἑπομένως τὰς σχέσεις ταύτας γνωρίζομεν καὶ πότε ἐκ τοῦ ψεύδους τῆς μιᾶς δυνάμεθα νὰ συνάγωμεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἑτέρας ἢ ἀντιστρόφως.

Πρὸς εὐχερεστέραν ἐξέτασιν τῶν σχέσεων αὐτῶν ἐπενοήθη παλαιόθεν τὸ κατωτέρω σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται παραλληλόγραμμον τῶν κρίσεων ἢ λογικὸν τετράγωνον:




Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι εἷς λαμπτὴρ Λ εἶναι συνδεδεμένος μὲ μίαν πηγὴν ρεύματος καὶ ὅτι μεταξὺ τῆς πηγῆς καὶ τοῦ λαμπτῆρος παρεμβάλλονται, κατὰ διαφόρους τρόπους, διακόπται p, q, r... Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ Λ εἶναι εἷς λογικὸς τύπος τῶν p, q, r..., ἤτοι: $\Lambda = \Lambda(p,q,r,\ldots)$. Συμφωνοῦμεν δέ: $\tau(\Lambda) = \alpha$, ἂν ὁ λαμπτὴρ φωτίζῃ καὶ $\tau(\Lambda) = \psi$, ἂν ὁ λαμπτὴρ δὲν φωτίζῃ. Οὕτω ἡ σύζευξις $p \wedge q$ δύο προτάσεων p καὶ q ἀποδίδεται ἀπὸ τὸ «κύκλωμα»:

«κύκλωμα τῆς $p \wedge q$»

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λαμπτὴρ φωτίζει, ἤτοι $\tau(\Lambda) \equiv \tau(p \wedge q) = \alpha$, μόνον ὅταν καὶ οἱ δύο διακόπται εἶναι συγχρόνως κλειστοί, ἤτοι $\tau(p) = \alpha$ καὶ $\tau(q) = \alpha$, ἐνῶ δὲν φωτίζει εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν.

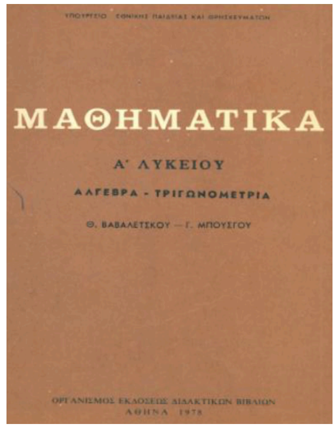
Ἡ διάζευξις $p \vee q$ δύο προτάσεων p καὶ q ἀποδίδεται ἀπὸ τὸ «κύκλωμα»:

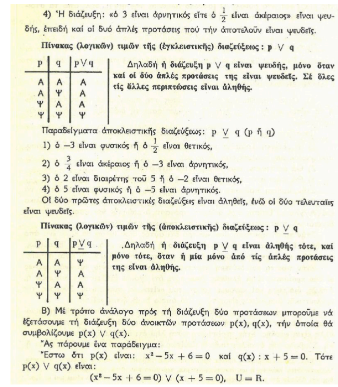
«κύκλωμα τῆς $p \vee q$»

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λαμπτὴρ δὲν φωτίζει μόνον ὅταν καὶ οἱ δύο διακόπται εἶναι συγχρόνως ἀνοικτοί, ἤτοι $\tau(p) = \psi = \tau(q)$, ἐνῶ φωτίζει εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν.

πίνακες αλήθειας, ποσοδείκτες κ.τ.λ..

Πιο πρόσφατα, το 1990, το νέο βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, κυκλοφορεί χωρίς τα στοιχεία Μαθηματικής Λογικής που υπήρχαν στα προηγούμενα εγχειρίδια. Αυτό το βιβλίο διατηρήθηκε μέχρι και το 2010, οπότε και «επανέρχεται» στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου μία εισαγωγική παράγραφος με τίτλο "το λεξιλόγιο της Λογικής". Παράλληλα από το σχολικό έτος 1999-2000 αρχίζει η διδασκαλία της Λογικής σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου, ως μάθημα





4) Ἡ διάζευξη: «ὁ 3 εἶναι ἀρνητικός εἴτε ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἀκέραιος» εἶναι ψευδής, ἐπειδή καί οἱ δυό ἁπλές προτάσεις πού τήν ἀποτελοῦν εἶναι ψευδεῖς.

Πίνακας (λογικῶν) τιμῶν τῆς (ἐγκλειστικῆς) διαζεύξεως: $p \vee q$

p	q	p∨q
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Δηλαδή **ἡ διάζευξη $p \vee q$ εἶναι ψευδής, μόνο ὅταν καί οἱ δύο ἁπλές προτάσεις της εἶναι ψευδεῖς. Σέ ὅλες τίς ἄλλες περιπτώσεις εἶναι ἀληθής.**

Παραδείγματα ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως: $p \underline{\vee} q$ (p ἤ q)

1) ὁ -3 εἶναι φυσικός ἤ ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι θετικός,

2) ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἀκέραιος ἤ ὁ -3 εἶναι ἀρνητικός,

3) ὁ 2 εἶναι διαιρέτης τοῦ 5 ἤ ὁ -2 εἶναι θετικός,

4) ὁ 5 εἶναι φυσικός ἤ ὁ -5 εἶναι ἀρνητικός.

Οἱ δύο πρῶτες ἀποκλειστικές διαζεύξεις εἶναι ἀληθεῖς, ἐνῶ οἱ δύο τελευταῖες εἶναι ψευδεῖς.

Πίνακας (λογικῶν) τιμῶν τῆς (ἀποκλειστικῆς) διαζεύξεως: $p \underline{\vee} q$

p	q	p⊻q
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

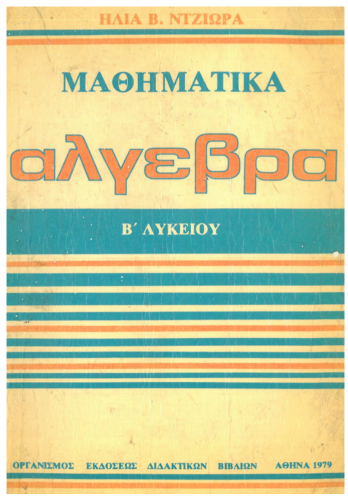
.Δηλαδή **ἡ διάζευξη $p \underline{\vee} q$ εἶναι ἀληθής τότε, καί μόνο τότε, ὅταν ἡ μία μόνο ἀπό τίς ἁπλές προτάσεις της εἶναι ἀληθής.**

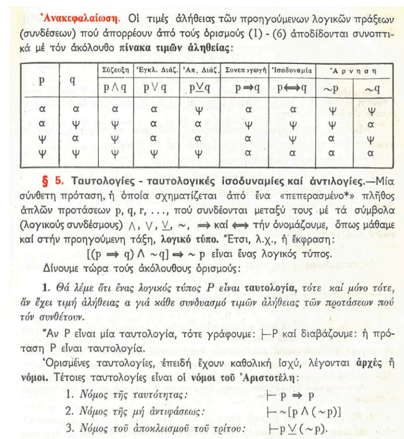
B) Μέ τρόπο ἀνάλογο πρός τή διάζευξη δύο προτάσεων μποροῦμε νά ἐξετάσουμε τή διάζευξη δύο ἀνοικτῶν προτάσεων $p(x)$, $q(x)$, τήν ὁποία θά συμβολίζουμε $p(x) \vee q(x)$.

Ἄς πάρουμε ἕνα παράδειγμα:

Ἔστω ὅτι $p(x)$ εἶναι: $x^2-5x+6=0$ καί $q(x): x+5=0$. Τότε $p(x) \vee q(x)$ εἶναι:

$$(x^2-5x+6=0) \vee (x+5=0), \quad U=R.$$





Ἀνακεφαλαίωση. Οἱ τιμές ἀλήθειας τῶν προηγούμενων λογικῶν πράξεων (συνδέσεων) πού ἀπορρέουν ἀπό τούς ὁρισμούς (1) - (6) ἀποδίδονται συνοπτικά μέ τόν ἀκόλουθο **πίνακα τιμῶν ἀληθείας**:

p	q	Σύζευξη	Ἐγκλ. Διάζ.	Ἀπ. Διάζ.	Συνεπαγωγή	Ἰσοδυναμία	Ἄρνηση	
		$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
α	α	α	α	ψ	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	α	α

§ 5. Ταυτολογίες - ταυτολογικές ἰσοδυναμίες καί ἀντιλογίες.—Μία σύνθετη πρόταση, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπό ἕνα «πεπερασμένο*» πλῆθος ἁπλῶν προτάσεων $p, q, r, \ldots$, πού συνδέονται μεταξύ τους μέ τά σύμβολα (λογικούς συνδέσμους) $\wedge, \vee, \underline{\vee}, \sim, \Longrightarrow$ καί $\Longleftrightarrow$ τήν ὀνομάζουμε, ὅπως μάθαμε καί στήν προηγούμενη τάξη, **λογικό τύπο.** Ἔτσι, λ.χ., ἡ ἔκφραση:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p \text{ εἶναι ἕνας λογικός τύπος.}$$

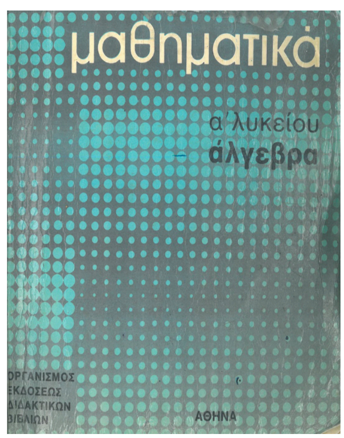
Δίνουμε τώρα τούς ἀκόλουθους ὁρισμούς:

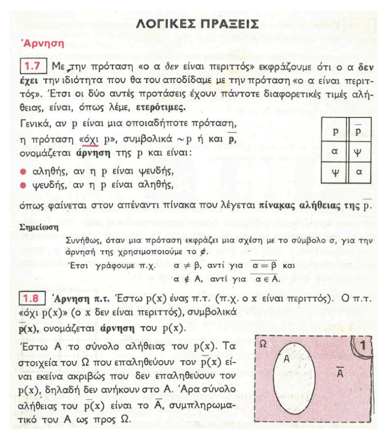
1. *Θά λέμε ὅτι ἕνας λογικός τύπος P εἶναι* **ταυτολογία,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἔχει τιμή ἀλήθειας α γιά κάθε συνδυασμό τιμῶν ἀλήθειας τῶν προτάσεων πού τόν συνθέτουν.*

Ἄν P εἶναι μία ταυτολογία, τότε γράφουμε: $\vdash P$ καί διαβάζουμε: ἡ πρόταση P εἶναι ταυτολογία.

Ὁρισμένες ταυτολογίες, ἐπειδή ἔχουν καθολική ἰσχύ, λέγονται **ἀρχές** ἤ **νόμοι.** Τέτοιες ταυτολογίες εἶναι οἱ **νόμοι τοῦ Ἀριστοτέλη**:

1. *Νόμος τῆς ταυτότητας:* $\vdash p \Rightarrow p$
2. *Νόμος τῆς μή ἀντιφάσεως:* $\vdash \sim[p \wedge (\sim p)]$
3. *Νόμος τοῦ ἀποκλεισμοῦ τοῦ τρίτου:* $\vdash p \underline{\vee} (\sim p)$.





ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Άρνηση

$\boxed{1.7}$ Με την πρόταση «ο α *δεν* είναι περιττός» εκφράζουμε ότι ο α **δεν έχει** την ιδιότητα που θα του αποδίδαμε με την πρόταση «ο α είναι περιττός». Έτσι οι δύο αυτές προτάσεις έχουν πάντοτε διαφορετικές τιμές αλήθειας, είναι, όπως λέμε, **ετερότιμες.**

Γενικά, αν p είναι μια οποιαδήποτε πρόταση, η πρόταση «όχι p», συμβολικά $\sim p$ ή και $\overline{p}$, ονομάζεται **άρνηση** της p και είναι:

- αληθής, αν η p είναι ψευδής,
- ψευδής, αν η p είναι αληθής,

p	$\overline{p}$
α	ψ
ψ	α

όπως φαίνεται στον απέναντι πίνακα που λέγεται **πίνακας αλήθειας της** $\overline{p}$.

Σημείωση

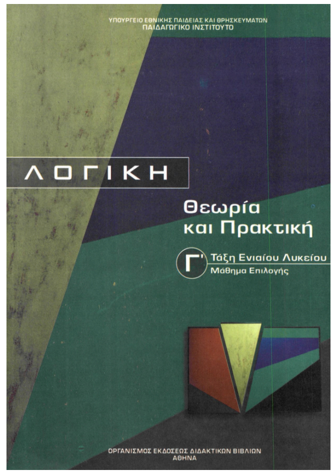
Συνήθως, όταν μια πρόταση εκφράζει μια σχέση με το σύμβολο σ, για την άρνησή της χρησιμοποιούμε το ⌀.

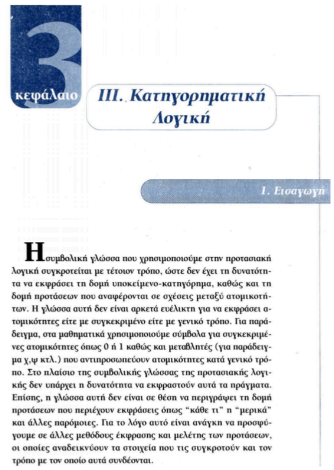
Έτσι γράφουμε π.χ. $\alpha \neq \beta$, αντί για $\overline{\alpha = \beta}$ και $\alpha \notin A$, αντί για $\overline{\alpha \in A}$.

$\boxed{1.8}$ **Άρνηση π.τ.** Έστω $p(x)$ ένας π.τ. (π.χ. ο x είναι περιττός). Ο π.τ. «όχι $p(x)$» (ο x δεν είναι περιττός), συμβολικά $\overline{p(x)}$, ονομάζεται **άρνηση** του $p(x)$.

Έστω A το σύνολο αλήθειας του $p(x)$. Τα στοιχεία του Ω που επαληθεύουν τον $\overline{p(x)}$ είναι εκείνα ακριβώς που δεν επαληθεύουν τον $p(x)$, δηλαδή δεν ανήκουν στο A. Άρα σύνολο αλήθειας του $\overline{p(x)}$ είναι το $\overline{A}$, συμπληρωματικό του A ως προς Ω.

επιλογής.



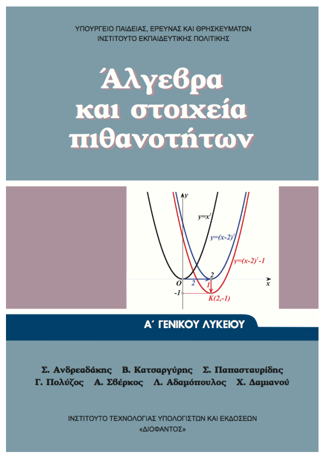


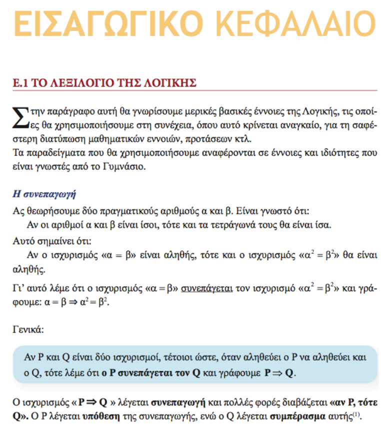
3 κεφάλαιο

III. Κατηγορηματική Λογική

1. Εισαγωγή

Η συμβολική γλώσσα που χρησιμοποιούμε στην προτασιακή λογική συγκροτείται με τέτοιον τρόπο, ώστε δεν έχει τη δυνατότητα να εκφράσει τη δομή υποκείμενο-κατηγόρημα, καθώς και τη δομή προτάσεων που αναφέρονται σε σχέσεις μεταξύ ατομικοτήτων. Η γλώσσα αυτή δεν είναι αρκετά ευέλικτη για να εκφράσει ατομικότητες είτε με συγκεκριμένο είτε με γενικό τρόπο. Για παράδειγμα, στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε σύμβολα για συγκεκριμένες ατομικότητες όπως 0 ή 1 καθώς και μεταβλητές (για παράδειγμα χ,ψ κτλ.) που αντιπροσωπεύουν ατομικότητες κατά γενικό τρόπο. Στο πλαίσιο της συμβολικής γλώσσας της προτασιακής λογικής δεν υπάρχει η δυνατότητα να εκφραστούν αυτά τα πράγματα. Επίσης, η γλώσσα αυτή δεν είναι σε θέση να περιγράψει τη δομή προτάσεων που περιέχουν εκφράσεις όπως "κάθε τι" η "μερικά" και άλλες παρόμοιες. Για το λόγο αυτό είναι ανάγκη να προσφύγουμε σε άλλες μεθόδους έκφρασης και μελέτης των προτάσεων, οι οποίες αναδεικνύουν τα στοιχεία που τις συγκροτούν και τον τρόπο με τον οποίο αυτά συνδέονται.





ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ.
Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β. Είναι γνωστό ότι:
Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνά τους θα είναι ίσα.
Αυτό σημαίνει ότι:
Αν ο ισχυρισμός «$\alpha = \beta$» είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός «$\alpha^2 = \beta^2$» θα είναι αληθής.

Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός «$\alpha = \beta$» συνεπάγεται τον ισχυρισμό «$\alpha^2 = \beta^2$» και γράφουμε: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$.

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q** και γράφουμε **P ⇒ Q**.

Ο ισχυρισμός «**P ⇒ Q**» λέγεται **συνεπαγωγή** και πολλές φορές διαβάζεται **«αν P, τότε Q».** Ο P λέγεται **υπόθεση** της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται **συμπέρασμα** αυτής(1).

Σχολικά βιβλία Άλγεβρας, τάξεων Α΄ ή Β΄ Λυκείου, από τη δεκαετία του 1950 έως σήμερα και αντίστοιχες εικόνες από τα κεφάλαια με αναφορές σε στοιχεία (Μαθηματικής) Λογικής.

Στο σημείο αυτό και αμέσως μετά από την παραπάνω περιγραφή θα πρέπει να επισημάνουμε-διευκρινίσουμε το προφανές: Η αδυναμία των μαθητών στο να διατυπώνουν αποδεικτικό και γενικότερα μαθηματικό λόγο, υπήρχε ανεξάρτητα από το αν στο σχολικό τους εγχειρίδιο περιλαμβάνονταν ή όχι κάποιο κεφάλαιο με βασικές έννοιες Λογικής. Πρέπει δηλαδή να γίνει σαφές ότι για να αντιμετωπιστούν «διαχρονικά προβλήματα» των μαθητών όπως π.χ. η σύγχυση μεταξύ υπόθεσης και συμπεράσματος σε μια υποθετική πρόταση ή η αδυναμία διάκρισης μεταξύ συνεπαγωγής και ισοδυναμίας, απαιτούνται πολλά περισσότερα από μία απλή παράθεση κάποιων βασικών εννοιών Λογικής.

Από τους στόχους αυτής της εργασίας είναι το να συμβάλλει στον προβληματισμό σχετικά με το «ποια Λογική» πρέπει να διδάσκεται, αλλά και το ποια πρέπει να είναι η κατάρτιση των εκπαιδευτικών στη λογική προκειμένου να είναι σε θέση να λειτουργήσουν.

Αναφερόμενοι στην εμπειρία που έχουμε αποκομίσει σχετικά με τη διδασκαλία της Λογικής στο Λύκειο, από τα χρόνια των λεγόμενων «νέων μαθηματικών», θα πρέπει ίσως να αναγνωρίσουμε ότι αυτή η προσέγγιση δεν παρείχε στους μαθητές εκείνα τα χειροπιαστά όσο και αποτελεσματικά εργαλεία για να βελτιώσουν άμεσα τις ικανότητές τους στην έκφραση μαθηματικού λόγου και στην επιχειρηματολογία. Στον αντίποδα θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η αποκαθήλωση της Λογικής το 1990, αισθητοποιήθηκε με την ολοένα διευρυνόμενη αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν τις βασικές αρχές της αποδεικτικής διαδικασίας, κάτι που αποτυπώθηκε με οδυνηρό για τους μαθητές τρόπο κυρίως στις Πανελλαδικές εκείνων των ετών. Ίσως μάλιστα αυτός να ήταν ο λόγος της μερικής επανεισαγωγής της λογικής στο αναλυτικό πρόγραμμα του 2000.

Ερχόμενοι στο «σήμερα», οι μαθητές της Α΄ Λυκείου πραγματεύονται σε ένα εισαγωγικό κεφάλαιο δύο παραγράφων μερικές βασικές έννοιες της Λογικής και την έννοια του συνόλου. Σύμφωνα με τις οδηγίες, η πρώτη από τις δύο παραγράφους, θα πρέπει ”*να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα* $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ *και* $\beta \neq 0$ *μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»*).”

Εδώ είναι το σημείο στο οποίο τίθεται το θεμελιώδες ερώτημα: “Έχουν οι καθηγητές την κατάρτιση εκείνη που θα τους επιτρέψει να κάνουν αυτού του είδους τη διδασκαλία;”. Δυστυχώς για τη συντριπτική πλειοψηφία εκείνων που σήμερα είναι κάτω των 45 ετών, η απάντηση είναι αρνητική. Και αυτό όχι μόνο λόγω των ποικίλων ερμηνειών που επιδέχεται η παραπάνω οδηγία, αλλά κυρίως γιατί:

• η «βασανισμένη» ιστορία της διδασκαλίας της Λογικής στα σχολεία, όπως την περιγράψαμε παραπάνω, ουσιαστικά απέκλεισε, από το να διδαχθούν τις σχετικές έννοιες, όσους από τους σημερινούς καθηγητές φοίτησαν στην Α΄ Λυκείου από το 1990 κ.ε..

• οι σημερινοί εκπαιδευτικοί, δεδομένης της απουσίας της Μαθηματικής Λογικής ως μάθημα (ή έστω ως «κομμάτι» μαθήματος), δεν αισθάνθηκαν ποτέ την ανάγκη να ασχοληθούν με αυτό. Μάλιστα αυτό ίσχυε και για τα χρόνια των πανεπιστημιακών τους σπουδών, καθώς η «Μαθηματική Λογική» ήταν, στα περισσότερα τμήματα Μαθηματικών της χώρας, μάθημα ελεύθερης επιλογής.

Καθίσταται λοιπόν φανερό ότι προκειμένου να εντοπίσουμε (και έτσι να προσπαθήσουμε να ξεπεράσουμε) τις αντικειμενικές δυσκολίες και τους περιορισμούς που έχει ο καθηγητής των Μαθηματικών όταν καλείται να διδάξει έμμεσα ή άμεσα στοιχεία Λογικής, θα πρέπει να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ της διδασκαλίας των Μαθηματικών και της Λογικής και κάνοντας ένα βήμα πιο πίσω να μελετήσουμε τη δομική σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Λογικής.

3.3. Η λογική και η γλώσσα στη μαθηματική δραστηριότητα

Αν και η σύνδεση λογικής – συλλογιστικής είναι πανθομολογούμενη, συχνά «ξεχνάμε» τη σύνδεση της Λογικής με τη σύσταση και τη χρήση της γλώσσας εκείνης, που επιτρέπει την περιγραφή της δομής των προτάσεων που χρησιμοποιούνται στη συλλογιστική. Θα πρέπει δηλαδή να αντιλαμβανόμαστε ότι η Μαθηματική Λογική μας παρέχει, μεταξύ άλλων, και το θεωρητικό υπόβαθρο για την ανάλυση του μαθηματικού μας λόγου αλλά και για την κατανόηση των ασαφειών που αναπόφευκτα προκύπτουν στη μαθηματική γλώσσα λόγω της χρήσης ανεπίσημων ή ακόμα και υπονοούμενων σχημάτων.

Διατρέχοντας διαφορετικές στιγμές στην ιστορία της Λογικής, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όλες οι προσπάθειες για σύνταξη και περιγραφή μιας Λογικής διέπονται από μια απαραίτητη τυποποίηση της γλώσσας. Αυτονόητα η τυποποίηση-μορφοποίηση ποικίλλει ανάλογα με την εποχή και την αντίστοιχη πρόοδο της Λογικής αλλά και τη ματιά του συγγραφέα. Για παράδειγμα, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3. , ο Αριστοτέλης στο Όργανον έδωσε τον ορισμό της πρότασης (δήλωση, αληθής ή ψευδής) και ταξινόμησε τις προτάσεις με βάση δύο κριτήρια: την ποιότητα (καταφατική ή αρνητική) και την ποσότητα (καθολική ή μερική). Έτσι μας «παρουσίασε», ως δομικά στοιχεία των συλλογισμών, τέσσερις τύπους προτάσεων που μπορούν να αντικατασταθούν από μεταβλητές, δηλαδή να τυποποιηθούν.

Σε αδρές γραμμές, υπάρχουν μαθηματικοί που θεωρούν ότι η υπερβολική τυποποίηση της γλώσσας δε επιτρέπει την διαισθητική πρόοδο της συλλογιστικής. Υπάρχουν κάποιοι άλλοι μαθηματικοί που αναζητούν το αναγκαίο και ικανό επίπεδο τυποποίησης της γλώσσας, ώστε να εξασφαλίζεται το αλάθητο της συλλογιστικής. Και βέβαια, υπάρχουν και εκείνοι οι μαθηματικοί που θεωρούν ότι μόνο μέσω μιας εξ ολοκλήρου τυποποιημένης γλώσσας θα μπορέσουμε να φτάσουμε στη μοναδικότητα του νοήματος των εκφράσεων και έτσι στη δυνατότητα για «διαχείριση» των εκφράσεων αυτών, ανεξάρτητα από το νόημά τους. Αποκορύφωμα όλων αυτών των αναζητήσεων μπορεί να θεωρηθεί η μαθηματική λογική, που μέσα από τη μοντελοποίηση της μαθηματικής γλώσσας και της συλλογιστικής, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε καθεαυτά μαθηματικά εργαλεία, για περαιτέρω διερεύνηση των ιδιοτήτων των λογικών συστημάτων.

Είναι λοιπόν η Μαθηματική Λογική το απαραίτητο εργαλείο, όχι μόνο για το μαθητή, αλλά πρωτίστως για τον ίδιο το μαθηματικό. Πιο συγκεκριμένα είναι η Μαθηματική Λογική για τον καθηγητή μαθηματικών το μέσο για να μπορέσει να αναλύσει τη γλώσσα που ο ίδιος χρησιμοποιεί στη μαθηματική του δραστηριότητα έτσι ώστε να την απλουστεύσει όπου αυτό είναι εφικτό αλλά και να την διορθώσει όπου εντοπίσει ασάφειες. Επιπλέον, είναι το μέσο για ενδελεχή ανάλυση και συνεπώς για ουσιαστική κατανόηση της συλλογιστικής των μαθητών και των διαφορετικών επιπέδων κατανόησης (ή μη κατανόησης) που αυτοί επιδεικνύουν. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι προτάσεις της μορφής « αν ... , τότε ... », οι οποίες συχνά οδηγούν τους μαθητές σε μη αναμενόμενες τοποθετήσεις. Π.χ. ο ισχυρισμός « αν $\alpha^2 = \beta^2$, τότε $\alpha = \beta$ » αν και για ένα μαθηματικό είναι ξεκάθαρα ψευδής, πολλοί μαθητές θα απαντήσουν ότι είναι αληθής βλέποντας ότι υπάρχουν τιμές των α, β που τον επιβεβαιώνουν ή θα απαντήσουν ότι δεν είναι ούτε αληθής ούτε ψευδής! Αυτό γιατί, έστω και αν μπορούν από αλγεβρικής απόψεως να παρουσιάσουν ένα ορθό συλλογισμό, δεν έχουν κατανοήσει ότι προτάσεις της παραπάνω μορφής είναι – έστω υπόρρητα – καθολικά ποσοδεικτούμενες. Αποτελεί συνεπώς «ευθύνη» του καθηγητή μαθηματικών να ξεκλειδώσει τις έννοιες εκείνες που άπτονται στη Λογική, καθιστώντας σαφείς τις όποιες συμβάσεις έχουν γίνει, αλλά και το ευρύτερο πλαίσιο μέσα στο οποίο θα δράσουν οι μαθητές.

Συμφωνούμε ότι, η επιχειρηματολογία στην τάξη βασίζεται στην κοινή οπτική των μελών της σχετικά με το υπό συζήτηση θέμα (Van Oers, 1996). Εξάλλου, ακόμα και οι μαθηματικοί ανάλογα με τη φύση των δραστηριοτήτων τους (έρευνα, σύνταξη άρθρου για επιστημονικό περιοδικό, μάθημα στην τάξη κ.λ.π.) διαφοροποιούν τη λογική δομή της γλώσσας που χρησιμοποιούν, διατυπώνοντας ένα λόγο άλλοτε περισσότερο, άλλοτε λιγότερο τυπικό. Έτσι μια πρόταση της μορφής "*υπάρχει* N_0 *τέτοιο ώστε για κάθε* $v > N_0$ *να ισχύει …*" μέσα στην τάξη και ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών θα μπορούσε να διατυπωθεί ως "*για επαρκώς μεγάλες τιμές του ν ισχύει ότι …*" ή ακόμα " *για όλες τις τιμές του ν πέρα από μία συγκεκριμένη θα ισχύει …*". Αυτή η μετάβαση από τη μία διατύπωση στην άλλη μπορεί να προκύπτει φυσικά για ένα μαθηματικό, σίγουρα όμως δεν είναι εξίσου αυτονόητη για τους μαθητές! Είναι λοιπόν «πρόκληση» αλλά και υποχρέωση, ο εκπαιδευτικός να επινοήσει δραστηριότητες που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν την ικανότητα αναδιαμόρφωσης – αναδιατύπωσης. Αναμφισβήτητα η απόκτηση μιας τέτοιας δεξιότητας συμβάλλει στην πιο ουσιαστική κατανόηση επιχειρημάτων, συλλογισμών και αποδείξεων. Και είναι αυτός ο «παράπλευρος» στόχος του κάθε καθηγητή μαθηματικών, που επαναφέρει το ερώτημα σχετικά με το ποια θα πρέπει να είναι η κατάρτισή του σε θέματα Λογικής, ώστε να καταφέρει να τον εκπληρώσει.

Συνεπικουρώντας σε αυτό τον προβληματισμό, η S. Epp (1999) αναφέρει ότι: όταν ο καθηγητής διατυπώνει ορθή και συμπαγή μαθηματική γλώσσα συνδυασμένη με τις αρχές της Λογικής, η ανατροφοδότηση που έχει ο μαθητής, του προσδίδει τεράστιο όφελος αναφορικά ακόμα και με αυτή την πνευματική του ανάπτυξη!

3.4. Πώς μπορούμε να διδάξουμε Λογική σήμερα;

Πώς μπορούμε να διδάξουμε Λογική σήμερα; Προφανώς η απάντηση δεν είναι απλό να δωθεί! Πολύ περισσότερο η απάντηση αυτή δε θα μπορούσε να είναι μια σειρά από διακεκριμένα βήματα είτε ρητές «εντολές» που θα πρέπει να ακολουθήσει ο εκπαιδευτικός. Μπορούμε ίσως να σκιαγραφήσουμε την απάντηση, ερευνώντας τα εξής: Ποιες πρέπει να είναι οι επιστημονικές γνώσεις για τη διδασκαλία της Λογικής; Ποιες έννοιες της Λογικής διδάσκονται; Πού και πώς εντοπίζουμε στοιχεία Λογικής στη διδακτέα ύλη των μαθηματικών; Αναζητήσαμε απαντήσεις στα σχολικά βιβλία, που εμπεριέχουν στοιχεία Λογικής, από τη δεκαετία του ’60 μέχρι σήμερα. Χρειάζεται σφαιρική εικόνα του παρελθόντος για να κατανοήσεις το παρόν και να προσπαθήσεις να βελτιώσεις το αύριο! Επιπλέον αναζητήσαμε άρθρα σχετικά με τη διδασκαλία της Λογικής. Όλες οι αναζητήσεις καταδεικνύουν το δύσκολο έργο του καθηγητή μαθηματικών, ο οποίος καλείται να διδάξει κάτι «ασαφές», που μάλιστα υπόκειται και σε ισχυρούς περιορισμούς! Συγκεκριμένα:

• *Ποιες επιστημονικές γνώσεις πρέπει να έχει ο καθηγητής που θα διδάξει Λογική;*

Αυτό που θα πρέπει να γίνει σαφές είναι ότι ο καθηγητής δεν καλείται να διδάξει μαθηματική λογική ως κλάδο των μαθηματικών, αλλά λογική στα πλαίσια της ευρύτερης μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη. Θα πρέπει δηλαδή ο καθηγητής να αναζητά κάθε ευκαιρία ώστε τόσο ο προφορικός όσο και ο γραπτός λόγος, είτε προέρχεται από αυτόν είτε από τους μαθητές, να φιλτράρεται «λογικά» σε συντακτικό αλλά και σε σημασιολογικό επίπεδο.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό της σωστής χρήσης των λογικών συνδέσμών «*και*» και «*ή*». Στην περίπτωση αυτή στόχος, μεταξύ άλλων, είναι και η διάκριση της έννοιας των συνδέσμων αυτών, από την έννοια που έχουν κατά την καθημερινή χρήση τους, στη συνήθη και όχι στη μαθηματική γλώσσα.

Συγκεκριμένα ο σύνδεσμος «και» στη φυσική γλώσσα χρησιμοποιείται με ποικιλία σημασιών. Μπορεί π.χ. να πούμε «θα βγω για φαγητό με τους φίλους μου και θα γυρίσω να κοιμηθώ», οπότε το «και» υποδηλώνει χρονική διαδοχή, μπορεί όμως να πούμε «θα βγω για φαγητό με τους φίλους μου και γι' αυτό θα κοιμηθώ αργά απόψε» οπότε το «και» υποδηλώνει σχέση αιτιότητας μεταξύ των καταστάσεων που περιγράφουν οι δύο προτάσεις που συνδέει. Επίσης στη φυσική γλώσσα το «και» μπορεί να συνδέει περισσότερες από δύο προτάσεις, ενώ στη μαθηματική γλώσσα συνδέει δύο.

Επίσης, και ο σύνδεσμος «ή» κατά τη χρήση του στα πλαίσια της φυσικής μας γλώσσας είναι ένα σχήμα λόγου με το οποίο παρατίθενται δύο διαφορετικές επιλογές και που η υιοθέτηση της μίας συνεπάγεται τον μερικό ή ολικό αποκλεισμό της άλλης. Π.χ. μπορεί να πούμε «θα βγω για φαγητό με τους φίλους μου ή θα πάω κινηματογράφο» υπονοώντας ότι θα πραγματοποιήσω μόνο μία από τις δύο δραστηριότητες που περιγράφουν οι δύο προτάσεις που συνδέονται. Πρόκειται για αυτό που ονομάζουμε *αποκλειστική διάζευξη* και διαφέρει από την *εγκλειστική διάζευξη* (όπως ορίστηκε στην παράγραφο 2.1 από τον αντίστοιχο πίνακα αλήθειας) κατά το ότι, όταν και οι δύο συνδεόμενες προτάσεις είναι αληθείς, τότε η σύνθετη πρόταση που προκύπτει είναι ψευδής. Ακόμα, όπως συμβαίνει και με το «και», το «ή» στην καθομιλουμένη μπορεί να συνδέει περισσότερες από δύο προτάσεις.

Σε όλες αυτές τις εκφράσεις εντοπίζουμε κάποιες λεπτές σημασιολογικές διαφοροποιήσεις των συνδέσμων, που άλλοτε έχουν ακριβώς την ίδια λογική συμπεριφορά με τον τρόπο που ορίστηκαν στο 2ο κεφάλαιο και άλλοτε όχι. Αυτό καταδεικνύει το ότι ακόμη και αν ο διδάσκων μαθηματικός έχει παρακολουθήσει το μάθημα της Μαθηματικής Λογικής και γνωρίζει τις βασικές αρχές τόσο της Προτασιακής όσο και της Κατηγορηματικής Λογικής, κάτι τέτοιο δεν είναι αρκετό για να υποστηρίξει τη διδασκαλία ορισμένων εννοιών λογικής στους μαθητές. Θα πρέπει να έχει τις γνώσεις ώστε να εντοπίσει, να μελετήσει και να αναδείξει τη σύνδεση της Λογικής με τη Γλώσσα (το βασικό μέσο με το οποίο επικοινωνούν οι άνθρωποι: από τις πιο απλές προτάσεις έως τους πιο πολύπλοκους συλλογισμούς!).

• *Ποιες έννοιες της Λογικής διδάσκονται;*

Όπως είδαμε, η Λογική άρχισε να διδάσκεται στις δεκαετίες του ’50 και του ’60 και κυρίως του ’70 και του ’80, οπότε και η διδασκαλία των Μαθηματικών ακολουθεί το ρεύμα των «νέων Μαθηματικών». Το να μπορούν οι μαθητές να «χειριστούν» τη μαθηματική γλώσσα κρίθηκε απαραίτητο και η Λογική ήταν ο καθ’ ύλην αρμόδιος κλάδος των Μαθηματικών για να εκπληρώσει το στόχο αυτό. Έτσι η ιδέα της ενοποίησης των μαθηματικών θεωριών, που θα έβρισκε εφαρμογή από τις εφαρμοσμένες-πειραματικές μέχρι τις ανθρωπιστικές-κοινωνικές επιστήμες, έφερε στα σχολικά εγχειρίδια ένα κεφάλαιο Λογικής και Θεωρίας Συνόλων! Στη διδακτέα ύλη περιλαμβανόταν γενικά τόσο το συντακτικό όσο και το σημασιολογικό κομμάτι της Λογικής, ωστόσο αυτό που φαίνεται να συνέβαινε στην πράξη ήταν μια απλή – τυπική παρουσίαση των εννοιών της Λογικής, χωρίς κανενός είδους διασύνδεση με τη μαθηματική δραστηριότητα.
Στις αρχές της δεκαετίας του ’90 πραγματοποιείται στροφή 180°. Τα «νέα μαθηματικά» κατηγορούνται ως υπερβολικά τυποποιημένα, αποκομμένα από μαθηματικές εφαρμογές και ελιτίστικα! Σαν άμεση συνέπεια η Λογική αποκλείεται ρητά από τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

«Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνον αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός».

Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P και Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που <u>και οι δύο</u> ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός «**P και Q**» λέγεται **σύζευξη** των P και Q .
Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x-1) = 0 \text{ και } (x-1)(x+1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για x = 1 .

Αυτό διήρκεσε μέχρι το 2000. Σήμερα στο σχολικό εγχειρίδιο της άλγεβρας της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου, περιέχεται η Λογική, αποφεύγοντας κάθε μορφή φορμαλισμού, για τον οποίο κατηγορήθηκε άλλωστε στο παρελθόν.

Για παράδειγμα, αναφορικά με το σύνδεσμο «*και*» οι συγγραφείς δεν παραθέτουν ούτε το σύμβολο ($\wedge$) ούτε τον αντίστοιχο πίνακα αλήθειας, αλλά όπως βλέπουμε στην παραπάνω εικόνα (απόκομμα από την παράγραφο Ε.1. στη σελ. 11 του σχολικού) περιγράφουν ουσιαστικά τη «λειτουργία» του, χρησιμοποιώντας ως μέσο αισθητοποίησης μια γνωστή αλγεβρική ιδιότητα.

Όπως έχουμε προαναφέρει, οι περιορισμοί αναφορικά με τη διδασκαλία της Λογικής είναι ισχυροί (η παράγραφος “*Το Λεξιλόγιο της Λογικής*” είναι εκτός διδακτέας ύλης και δε διδάσκεται ως αυτόνομο κεφάλαιο). Επίσης ο στόχος που τίθεται για το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο είναι ασαφής, αφού σύμφωνα με την οδηγία ο καθηγητής καλείται να παρουσιάσει το νόημα και τη χρήση των στοιχείων της Λογικής σε πρόσφορες ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη. Επιπρόσθετα το γεγονός ότι η λογική πρέπει να διδάσκεται μαζί με άλλες έννοιες δημιουργεί ζητήματα σχετικά με τον απαιτούμενο αλλά και το διαθέσιμο χρόνο για τη συγκεκριμένη διδασκαλία.

Αυτή είναι η πολύπαθη ιστορία της διδασκαλίας της Λογικής, που χαρακτηρίζεται από ολοκληρωτική έλλειψη μακροχρόνιου σχεδιασμού και έχει ως συνέπεια γενιές μαθηματικών με διαφορετική εκπαίδευση στις έννοιες τις Λογικής, που ωστόσο καλούνται να διδάξουν έννοιες Λογικής, χωρίς να είναι ξεκάθαρο πόσο χρόνο θα αφιερώσουν και πόσο «βαθιά» θα φτάσουν...

• *Πού και πώς εντοπίζουμε στοιχεία Λογικής στη διδακτέα ύλη των μαθηματικών;*

Σε όλα σχεδόν τα βιβλία που είδαμε στην παράγραφο 3.2. μπορούμε να βρούμε μια σύντομη επισκόπηση των εννοιών της Λογικής και στη συνέχεια μία αναλυτική παρουσίαση, με μια προσέγγιση άλλοτε πιο «προτασιακή», ως ένα είδος γραμματικής των μαθηματικών προτάσεων και άλλοτε πιο «φυσική», που με αφετηρία τη φυσική μας γλώσσα και μέσα από κάποιους επιπλέον κανόνες καταλήγει στη μαθηματική γλώσσα. Σε κάθε περίπτωση η ασάφεια ως προς τον καθορισμό των προς διδασκαλία εννοιών της Λογικής είναι μεγάλο πρόβλημα για τον καθηγητή μαθηματικών σήμερα.

Η απάντηση στο «πού» της υπερκείμενης ερώτησης είναι μάλλον εύκολο να δοθεί από κάθε καθηγητή μαθηματικών, αρκεί να ξεφυλλίσει το σχολικό εγχειρίδιο της άλγεβρας και να εντοπίσει σύνθετες προτάσεις, περιπτώσεις σύζευξης, διάζευξης και άρνησης προτάσεων, όπως επίσης και συνεπαγωγές αλλά και ισοδυναμίες. Το πραγματικά δύσκολο (όσο και προκλητικό) είναι να δοθεί απάντηση στο «πώς». Είναι να καταφέρει να μετατρέψει όλα τα παραπάνω σε «ευκαιρίες» για διδασκαλία της Λογικής! Και προκειμένου να τα καταφέρει χρειάζεται κατάρτιση, τόσο για την αντιμετώπιση των γλωσσικών προβλημάτων όσο και για θέματα συλλογισμών που προκύπτουν συνεχώς, κατά τη μαθηματική δραστηριότητα σε κάθε τάξη.

4. Η ΛΟΓΙΚΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ. Η ΛΟΓΙΚΗ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ.

4.1. Η συνεπαγωγή και ο τρόπος που την κατανοούν οι μαθητές

Σε κάθε επιχείρημά μας, είτε αυτό σχετίζεται με ζητήματα της καθημερινής μας ζωής είτε έχει να κάνει με τη μαθηματική δραστηριότητα, υποστηρίζουμε μια θέση βάσει κάποιων λόγων. Οι προτάσεις (συνήθως υπάρχουν περισσότερες από μία) που χρησιμοποιούμε για να διατυπώσουμε αυτούς τους λόγους, ονομάζονται *προκείμενες*, ενώ η πρόταση-θέση που υποστηρίζεται από τις προκείμενες ονομάζεται *συμπέρασμα*. Το πιο “μικρό" και δομικά απλούστερο επιχείρημα αποτελείται από δύο αποφαντικές προτάσεις, μία προκείμενη και ένα συμπέρασμα.

Αρκετά συχνά στα επιχειρήματα που διατυπώνουμε χρησιμοποιούμε υποθετικές προτάσεις ως προκείμενες. Πρόκειται για προτάσεις της μορφής «αν … , τότε ...», οι οποίες εκτός των άλλων είναι θεμελιώδεις και για την απόδειξη στα μαθηματικά και γι’ αυτό αποτελούν (ή θα πρέπει να αποτελούν) βασική μέριμνα για τους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών σε κάθε επίπεδο. Σε αυτή την ανάγκη συντείνουν μάλιστα αρκετοί ερευνητές όπως π.χ. οι C. Hoyles και D. Küchemann (2002), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η διαχείριση υποθετικών προτάσεων από τους μαθητές κρύβει δυσκολίες και γίνεται με τρόπο σίγουρα όχι ενστικτώδη. Ένας πιθανός λόγος για αυτές τις δυσκολίες είναι ο διαφορετικός τρόπος με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν αυτές τις προτάσεις.

Ας δούμε δύο διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης προτάσεων της μορφής «αν p, τότε q» που μπορούμε να έχουμε. Πρόκειται αφενός για τον κλασικό ορισμό της συνεπαγωγής που διδάσκεται σε κάθε μάθημα Μαθηματικής Λογικής και περιγράφεται από τη στήλη (α) του παρακάτω πίνακα και αφετέρου για τον «ελλιπή», που περιγράφεται από τον πίνακα αλήθειας της στήλης (β).

p	q	αν p τότε q	αν p τότε q
		(α)	(β)
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	δεν έχει σημασία
ψ	Ψ	A	δεν έχει σημασία

Οι πίνακες αλήθειας της «υλικής» (α) και της «ελλιπούς» (β) υποθετικής πρότασης.

Σύμφωνα με τον πίνακα αληθειας (α), η πρόταση «αν p, τότε q» είναι αληθής σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από αυτή κατά την οποία η ηγουμένη (p) είναι αληθής και η επομένη (q) ψευδής. Αυτό οδηγεί στην παράξενη ή έστω αμήχανη στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να αναγνωρίσουμε προτάσεις όπως π.χ. την "εάν το 10 είναι πρώτος, τότε ο π είναι άρρητος" αλλά και την "εάν το 10 είναι πρώτος, τότε ο π είναι ρητός" ως λογικά αληθείς. Όπως σημείωσε και ο Quine (1966) αυτή η προσέγγιση δε χρησιμοποιείται γενικά στην καθημερινή ζωή, καθώς η δήλωση «αν p τότε q» δε γίνεται αντιληπτή ως επιβεβαίωση (ή μη) μιας υποθετικής πρότασης αλλά ως υπό όρους επιβεβαίωση της επομένης.

Πιο κοντά στην κοινή αντίληψη (αξίζει να αναφέρουμε ότι ο όρος «*κοινή αντίληψη*» είναι αυτός ακριβώς που χρησιμοποίησε η Durand-Guerrier (2003) για να περιγράψει την εναλλακτική προσέγγιση της συνεπαγωγής) είναι η κατανόηση της υποθετικής πρότασης έτσι όπως περιγράφεται από τη (β) στήλη του παραπάνω πίνακα. Σύμφωνα με αυτή την αντίληψη οι περιπτώσεις όπου η ηγουμένη είναι ψευδής, απλώς δε μας απασχολούν! Μάλιστα όπως υποστήριξαν οι M.Inglis και A.Simpson (2009) η δεύτερη αυτή προσέγγιση δεν εμποδίζει τους μαθητές από το να αντλούν ορθά *modus tollens* («αν p τότε q» και «όχι q» συνεπώς «όχι p») συμπεράσματα!

Είναι λοιπόν αυτές οι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις της υποθετικής πρότασης που αναπόφευκτα μας φέρνουν αντιμέτωπους με το ερώτημα: Ποια από τις δύο είναι καταλληλότερη για την τάξη των μαθηματικών;

Αν την απάντηση στο καίριο αυτό ερώτημα καλούνταν να δώσουν οι Tall και Vinner (1981) θα περιμέναμε να «υποστηρίξουν» τον αυστηρό ορισμό της έννοιας ως τον πιο ενδεδειγμένο, ώστε οι μαθητές να σχηματίσουν την ορθή εικόνα της έννοιας της συνεπαγωγής. Υπέρ αυτής της θέσης τάχθηκε και η Durand-Guerrier (2003) επιχειρηματολογώντας για το ότι αν οι μαθητές υιοθετήσουν την «ελλιπή» συνεπαγωγή, δε θα είναι σε θέση να εξάγουν ορθά συμπεράσματα μέσω του modus tollens κανόνα.

Ωστόσο υπάρχουν πολλοί ερευνητές που στο παραπάνω ερώτημα θα τασόντουσαν άμεσα υπέρ της διδασκαλίας της «ελλιπούς» συνεπαγωγής: οι Hoyles και Küchemann (2002) υποστήριξαν ότι στα πλαίσια των μαθηματικών του σχολείου, οι μαθητές πρέπει να εκτιμήσουν υποθετικές προτάσεις μόνο στην περίπτωση που η ηγουμένη είναι αληθής. Επίσης οι Inglis και Simpson (2009) διεξήγαγαν έρευνα με στόχο να διαπιστώσουν αν η ελλιπής κατανόηση της συνεπαγωγής εμποδίζει την παραγωγή συμπερασμάτων και ειδικότερα κατά την εφαρμογή του modus tollens. Τα αποτελέσματά τους θέτουν υπό αμφισβήτηση τον ισχυρισμό της Durand-Guerrier και ενισχύουν τη θέση των Hoyles και Küchemann. Συγκεκριμένα έδειξαν ότι σχεδόν όλοι οι προπτυχιακοί μαθηματικοί που συμμετείχαν στην έρευνα, υιοθέτησαν την ελλιπή κατανόηση της συνεπαγωγής χωρίς αυτό να επηρεάζει αρνητικά ούτε την ικανότητά τους να αντλούν ορθά συμπεράσματα ούτε τις επιδόσεις τους στις εξετάσεις των πανεπιστημιακών μαθημάτων.

Συμπερασματικά, φαίνεται ότι από μαθηματικής πλευράς, δεν υπάρχει κάποιο μειονέκτημα, αν η πρώτη επαφή των μαθητών με τη συνεπαγωγή γίνει με τους όρους της ελλιπούς προσέγγισης.

4.2. Η αντιθετοαντιστροφή και η διδακτική προσέγγισή της.

Όπως είδαμε στο 2ο κεφάλαιο, ένας από τους πιο γνωστούς νόμους της προτασιακής λογικής είναι και αυτός της *αντιθετοαντιστροφής* (*contraposition*):

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Εύκολα, με τη βοήθεια αληθοπινάκων, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι πράγματι πρόκειται για λογική ισοδυναμία:

p	q	(p → q)	(¬p)	(¬q)	(¬q → ¬p)
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Αρκεί ο παραπάνω πίνακας για να γίνει ουσιαστικά κατανοητή η αντιθετοαντιστροφή στους μαθητές; Δυστυχώς (ή ευτυχώς) η απάντηση είναι όχι! Και τότε ποια διδακτική προσέγγιση θα πρέπει να έχει ο εκπαιδευτικός, ώστε να βοηθήσει το μαθητή να κατανοήσει και να εφαρμόσει ορθά το νόμο της αντιθετοαντιστροφής;

Όπως έχουμε προαναφέρει η λογική-συλλογιστική και η απόδειξη είναι τα πλέον καθοριστικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών. Προφανώς αυτός είναι και ο λόγος για το μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον (βλ. Fischbein & Kedem (1982), Chazan (1993), Edwards (1999), Healy & Hoyles (2000), Hoyles & Küchemann (2002).) σχετικά με τις δεξιότητες συλλογιστικής των μαθητών και την κατανόηση των αποδείξεων.

Συγκεκριμένα για την αντιθετοαντιστροφή και τις αποδείξεις που «στηρίζονται» στο νόμο αυτό, ο Goetting (1995) στη διατριβή του σχετικά με την κατανόηση των διαφόρων ειδών απόδειξης από προπτυχιακούς φοιτητές σημειώνει ότι: εμφανίστηκαν δυσκολίες στη διάκριση μεταξύ αποδείξεων με απαγωγή σε άτοπο και με αντιθετοαντιστροφή, μερικοί φοιτητές μπέρδεψαν αυτό που έπρεπε να αποδείξουν με αυτό που είχαν ως δεδομένο και ορισμένοι δεν αναγνώρισαν καν την απόδειξη με αντιθετοαντιστροφή ως απόδειξη της δεδομένης πρότασης. Αν λοιπόν οι φοιτητές μαθηματικών, παιδαγωγικών και πληροφορικής, που συμμετείχαν στην έρευνα του Goetting, εμφάνισαν τόσο μεγάλες δυσκολίες στην κανανόηση και εφαρμογή της αντιθετοαντιστροφής, εύκολα μπορούμε να καταλάβουμε το βαθμό δυσκολίας που εμφανίζει η αντίστοιχη διαδικασία για τους μαθητές… Επανερχόμαστε συνεπώς στο ερώτημα που θέσαμε μόλις παραπάνω!

Οι A. Stylianides, G. Stylianides και G. Philippou (2004) διεξήγαγαν επίσης έρευνα, στην οποία συμμετείχαν φοιτητές του παιδαγωγικού και του μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου της Κύπρου, με αντικείμενο την αντιθετοαντιστροφή. Προφανώς τα αποτελέσματα αφορούν σε αυτούς τους φοιτητές· πιστεύουμε ωστόσο ότι με σχετική ασφάλεια μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τον τρόπο που θα πρέπει να προσεγγίσουμε τη διδασκαλία του νόμου της αντιθετοαντιστροφής (και γιατί όχι και άλλων παρόμοιων «θεμάτων» λογικής!).

Ειδικότερα, οι ερευνητές εστίασαν στο να απαντήσουν (εκτός από το ποιο είναι γενικά το επίπεδο κατανόησης του νόμου της αντιθετοαντιστροφής) στα ακόλουθα κρίσιμα ερωτήματα:

1. Πώς οι επιδόσεις των συμμετεχόντων σε δραστηριότητες σχετικές με τον κανόνα της αντιθετοαντιστροφής σχετίζονται με το πλαίσιο (συμβολικό - μαθηματικό / λεκτικό) στο οποίο τοποθετείται ο κανόνας αυτός;
2. Ποια είναι η σχέση μεταξύ του αντικειμένου που σπουδάζουν οι συμμετέχοντες (παιδαγωγικά ή μαθηματικά) και των επιδόσεών τους σε δραστηριότητες σχετικές με την αντιθετοαντιστροφή, τοποθετημένη σε διαφορετικά πλαίσια (συμβολικό / λεκτικό);

Εν συντομία παρουσιάζουμε τη «βασική» δοκιμασία της έρευνας, κατά την οποία οι 95 συμμετέχοντες κλήθηκαν να απαντήσουν σε τρεις ερωτήσεις. Θα πρέπει να επισημάνουμε τους διαφορετικούς τύπους πλαισίων στα οποία τοποθετούνται οι ερωτήσεις σχετικά με τον κανόνα της αντιθετοαντιστροφής (συμβολικό στην πρώτη ερώτηση, λεκτικό στη δεύτερη και την τρίτη).

<table>
<tr><td colspan="2">Ερώτηση 1η</td></tr>
<tr><td colspan="2">Έστω η ακόλουθη πρόταση:
Αν $x^2 = y^2$ τότε $x = y$ (όπου $x, y \in N$).

Μελετήστε προσεκτικά την ακόλουθη απόδειξη για την παραπάνω πρόταση.
<u>Απόδειξη</u>:
Αν $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$. Ως εκ τούτου, η πρόταση είναι αληθής.
Επιλέξτε την καλύτερη απάντηση για την παραπάνω απόδειξη:
1. Η απόδειξη είναι λάθος.
2. Η απόδειξη δείχνει ότι η πρόταση είναι πάντα αληθής.
3. Η απόδειξη δείχνει ότι η πρόταση είναι αληθής σε ορισμένες περιπτώσεις.
4. Δεν έχω γνώμη.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Μελετήστε τις προτάσεις και το συμπέρασμα που τις ακολουθεί. Κυκλώστε την απάντηση που αντιπροσωπεύει καλύτερα αυτό που σκέφτεστε για κάθε συμπέρασμα και εξηγήστε τη σκέψη σας.</td></tr>
<tr><td>Ερώτηση 2η</td><td>Ερώτηση 3η</td></tr>
<tr><td>Προτάσεις:
• Εάν ο Κώστας έπασχε από πνευμονία, θα είχε υψηλό πυρετό.
• Ο Κώστας δεν έχει υψηλό πυρετό.
Συμπέρασμα:
• Ο Κώστας σίγουρα δεν πάσχει από πνευμονία.

1. Το συμπέρασμα είναι σωστό.
2. Το συμπέρασμα είναι λάθος.
3. Δεν έχω αρκετές ενδείξεις για να αποφασίσω.</td><td>Προτάσεις:
• Αν το αυτοκίνητο δεν έχει καύσιμο, δεν θα κινηθεί.
• Το αυτοκίνητο έχει καύσιμο.
Συμπέρασμα:
• Το αυτοκίνητο θα κινηθεί σίγουρα.

1. Το συμπέρασμα είναι σωστό.
2. Το συμπέρασμα είναι λάθος.
3. Δεν έχω αρκετές ενδείξεις για να αποφασίσω.</td></tr>
</table>

Στο σημείο αυτό πρέπει επίσης να αναφέρουμε ότι αρκετοί επιστήμονες έχουν διερευνήσει την επίλυση προβλημάτων και τη συλλογιστική σε διαφορετικά πλαισία. Χαρακτηριστικά η Epp (1998) υποστήριξε ότι η εισαγωγή των προπτυχιακών φοιτητών στη Λογική μέσω προτάσεων στη φυσική τους γλώσσα, μπορεί να επιφέρει καλύτερα αποτελέσματα από τη χρήση της συμβολικής Λογικής. Γενικότερα, μελετώντας αρκετές έρευνες, θα μπορούσαμε να πούμε ότι στον τομέα της λογικής σκέψης η επικρατούσα πεποίθηση είναι πως οι φοιτητές - μαθητές αντιμετωπίζουν λιγότερες δυσκολίες σε λεκτικές παρά σε ισοδύναμες συμβολικές δραστηριότητες.

Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της έρευνας στην οποία αναφερθήκαμε παραπάνω δείχνουν ότι

• όταν οι συμμετέχοντες φοιτητές θεωρήθηκαν ένα σύνολο, η απόδοσή τους ήταν σημαντικά καλύτερη στο λεκτικό πλαίσιο, δηλαδή στη 2η και στην 3η ερώτηση (με ποσοστό επιτυχίας 70% και 72% αντίστοιχα), παρά στο συμβολικό πλαίσιο δηλαδή στην 1η ερώτηση (στην οποία απάντησε ορθά το 32%).

• όταν οι συμμετέχοντες διαχωρίστηκαν - εξετάστηκαν σύμφωνα με το τμήμα στο οποίο σπουδάζουν, παρατηρήθηκε εμφανής διαφοροποίηση μεταξύ των φοιτητών του παιδαγωγικού και του μαθηματικού. Ειδικότερα οι φοιτητές του παιδαγωγικού απάντησαν ορθά σε ποσοστό 20%, 67% και 76%, ενώ αυτοί του μαθηματικού σημείωσαν ποσοστά 64%, 76% και 60% αντίστοιχα στις τρεις ερωτήσεις του πίνακα που προηγήθηκε. Δηλαδή, ενώ οι φοιτητές του μαθηματικού φαίνεται να λειτουργούν εξίσου καλά στους τομείς της συμβολικής και και της λεκτικής συλλογιστικής που σχετίζονται με την αντιθετοαντιστροφή, οι φοιτητές του παιδαγωγικού δεν απέδωσαν καλά στο συμβολικό πλαίσιο της πρώτης ερώτησης, που εξέτασε τον κανόνα της αντιθετοαντιστροφής μέσω μιας μαθηματικής απόδειξης.

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό το πόσο προσεκτικοί πρέπει να είμαστε κατά τη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων σχετικά με τη σημασία των παραγόντων που εξετάστηκαν σε κάποια έρευνα, δεδομένης της ποικιλομορφίας των πληθυσμών και των μεθοδολογικών πρακτικών. Για παράδειγμα στη συγκεκριμένη έρευνα που μελετάμε θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η μαθηματική παιδεία των συμμετεχόντων πιθανά διαφέρει από αυτή που παρέχεται στη χώρα μας. Ακόμα και το ευρύτερο πολιτιστικό περιβάλλον στο οποίο διεξάγεται η έρευνα είναι παράγοντας που μπορεί να επηρεάσει τα αποτελέσματα. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της έρευνας που διεξήχθη σε φοιτητές της Βραζιλίας και οι οποίοι βρέθηκε να έχουν μεγαλύτερη επιτυχία όταν επιλύουν αριθμητικά προβλήματα σε λεκτικό περιβάλλον, παρά όταν επιλύουν ισοδύναμα προβλήματα με καθαρά μαθηματικό συμβολισμό (Carraher et al., 1987). Ωστόσο, το ίδιο πειραματικό υπόδειγμα της συγκεκριμένης έρευνας δεν «έδωσε» τα ίδια αποτελέσματα όταν εφαρμόστηκε από άλλους ερευνητές (Baranes et al., 1989) σε παιδιά των Η.Π.Α..

Με αυτές τις σκέψεις και μέσα από την ανάλυση των παραπάνω αποτελεσμάτων ας προσπαθήσουμε να αντλήσουμε ένα minimum συμπερασμάτων σχετικά με τη διδασκαλία του νόμου της αντιθετοαντιστροφής: Σίγουρα, μέσα στο μαθητικό πληθυσμό υπάρχουν κάποιοι που έχουν μεγάλη εξοικείωση με την τυπική μαθηματική γλώσσα (και που ίσως υπό προϋποθέσεις να είναι αυτοί που θα αποτελέσουν τους επόμενους φοιτητές κάποιου Τμήματος Μαθηματικών!). Μάλιστα είναι πολύ πιθανό κάποιοι από αυτούς να είναι σε θέση να μεταφράσουν τις λεκτικά διατυπωμένες δραστηριότητες και να εφαρμόσουν σε αυτές τη συμβολική γνώση της αντιθετοαντιστροφής. Ωστόσο θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η λεκτική προσέγγιση – ειδικά όταν έχουμε να κάνουμε με μαθητές και όχι με «προχωρημένους» φοιτητές – νοηματοδοτεί τους κανόνες και αισθητοποιεί το περιεχόμενό τους. Βέβαια, όταν δουλεύουμε σε λεκτικό πλαίσιο δε θα πρέπει να αγνοήσουμε το ενδεχόμενο οι μαθητές να επηρεαστούν από τις προσωπικές τους γνώσεις ή πεποιθήσεις σχετικά με το περιεχόμενο των επιχειρημάτων. Αυτό άλλοτε μπορεί να φανεί χρήσιμο και άλλοτε παραπλανητικό γι' αυτούς· σε κάθε περίπτωση είναι μία παράμετρος που θα πρέπει να συνυπολογίζεται από τον διδάσκοντα και για την επιλογή των επιχειρημάτων και για την αξιολόγηση της απόδοσης των μαθητών.

Συμπερασματικά η διδασκαλία του κανόνα της αντιθετοαντιστροφής αλλά και άλλων βασικών λογικών αρχών μπορεί και πρέπει να ποικίλλει ανάλογα με την ηλικία και το γνωστικό επίπεδο των μαθητών. Παρόλα αυτά συντασσόμαστε με τη θέση του O'Brien (1972) ότι στην περίπτωση δραστηριοτήτων που δεν έχουν νόημα λόγου, η απόδοση των μαθητών είναι πιθανό να μειωθεί. Έτσι ακόμα και για αυτούς τους μαθητές με ανεπτυγμένη ικανότητα στη χρήση συμβολικής γλώσσας, είναι ενδεδειγμένο η πρώτη επαφή με λογικές αρχές να γίνεται μέσω λεκτικών δραστηριοτήτων.

Εξάλλου, όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, η Λογική αναπτύχθηκε με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση και την κατανόηση όχι μόνο των μαθηματικών επιχειρημάτων μας, αλλά και αυτών της καθημερινής ζωής! Ας ακολουθήσουμε λοιπόν και στη διδασκαλία μας την ιστορική πορεία της επιστήμης της Λογικής και ας «νοηματοδότησουμε» τους κανόνες της, μέσω εμπειρικών - βιωματικών λεκτικών δραστηριοτήτων, πριν εισάγουμε τους μαθητές στην τυπική, συμβολική, φορμαλιστική έκφρασή της.

4.3. Πώς κατανοούμε την άρνηση της σύζευξης, της διάζευξης και της συνεπαγωγής;

Όπως είδαμε στο $2^{ο}$ κεφάλαιο, άρνηση μιας πρότασης p είναι μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με ¬p (διαβάζεται «όχι p») και είναι αληθής εάν η p είναι ψευδής και ψευδής εάν η p είναι αληθής.

Η άρνηση εμφανίζεται σε κάθε έκφανση της μαθηματικής δραστηριότητας. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι:

- η συνεπαγωγή (p → q), βλ. παράγραφο 4.1., η οποία «εκφράζεται» και μέσω του λογικά ισοδύναμου τύπου (¬ p ∨ q).

p	q	(¬p)	(¬ p ∨ q)	(p → q)
Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

• ο αντιθετοαντίστροφος αποδεικτικός κανόνας, που μελετήσαμε στην παράγραφο 4.2., σύμφωνα με τον οποίο όταν έχουμε να αποδείξουμε ότι $(p \rightarrow q)$, μπορούμε ισοδύναμα να αποδείξουμε την αντιθετοαντίστροφη πρόταση $(\neg q \rightarrow \neg p)$.

• αποδείξεις με τη μέθοδο της *εις άτοπον απαγωγής* :

$$(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg r)]$$

Δηλαδή για να αποδείξουμε ότι η p συνεπάγεται την q αρκεί να αποδείξουμε ισοδύναμα ότι η $(p \wedge \neg q)$ συνεπάγεται μία αντίφαση. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο να υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η πρόταση $(p \rightarrow q)$, δηλαδή να υποθέσουμε ότι ισχύει $\neg(p \rightarrow q)$. Όμως $\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg (\neg p \vee q) \equiv \neg (\neg p) \wedge (\neg q) \equiv p \wedge (\neg q)$. Δηλαδή αντί να υποθέσουμε την $\neg(p \rightarrow q)$ κατά κανόνα υποθέτουμε ότι $p \wedge (\neg q)$. Αν αυτή η πρόταση μας οδηγήσει σε άτοπο (αντίφαση), τότε συμπεραίνουμε ότι η $\neg(p \rightarrow q)$ είναι ψευδής και επομένως σύμφωνα με την αρχή της αποκλίσεως του τρίτου η $(p \rightarrow q)$ είναι αληθής.

• η *αρχή της του τρίτου αποκλείσεως* είναι η δήλωση ότι για κάθε πρόταση p, ή η p είναι αληθής ή η $\neg p$. Μέση κατάσταση δεν υπάρχει!

Θα μπορούσαμε να παραθέσουμε πολλά ακόμα παραδείγματα. Κάτι τέτοιο ωστόσο δεν κρίνεται αναγκαίο, καθώς η θεμελιώδης σημασία της άρνησης στα μαθηματικά - κι όχι μόνο - είναι μάλλον αυτονόητη! Αυτό που κρίνεται αναγκαίο ωστόσο, είναι να σκιαγραφήσουμε ένα τρόπο για να διδάξουμε την άρνηση στους μαθητές μας. Και προκειμένου να το καταφέρουμε θα πρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα: Πώς κατανοούν και πώς διατυπώνουν οι μαθητές τις αρνήσεις, ιδιαιτέρως όταν πρόκειται για αρνήσεις σύνθετων προτάσεων, όπως άρνηση σύζευξης, άρνηση διάζευξης κ.λ.π.;

Ανατρέχοντας σε πρώιμες ψυχολογικές έρευνες με θέμα την ερμηνεία αρνητικών προτάσεων μπορούμε να αναφέρουμε ως σημαντικότερο πόρισμά τους την αλληλεπίδραση μεταξύ της «πολικότητας» μιας πρότασης (καταφατική ή αρνητική) και της τιμής αλήθειας που της αποδίδεται (αληθής ή ψευδής): οι αληθείς καταφάσεις είναι πιο εύκολο να εξακριβωθούν από τις ψευδείς καταφάσεις, ενώ οι αληθείς αρνήσεις είναι πιο δύσκολο να εξακριβωθούν από τις ψευδείς αρνήσεις (Wason & Jones, 1963).

Περνώντας τώρα σε σύνθετες προτάσεις και στον τρόπο που κατανοούμε τις συνέπειες της άρνησής τους, σύμφωνα με τη θεωρία PSYCOP του L.J.Rips (*The Psychology of Proof*, 1994) όσοι γνωρίζουν τους νόμους του De Morgan για την αλληλεπίδραση των αρνήσεων συζεύξεων – διαζεύξεων, μπορούν να τους εφαρμόσουν και να συνάγουν ορθά συμπέρασμα αναφορικά με αυτό που εκφράζει η άρνηση. Σύμφωνα με τους νόμους αυτούς:

1. όχι (p και q) συνεπάγεται (όχι p) ή (όχι q)
2. όχι (p ή q) συνεπάγεται (όχι p) και (όχι q)

Ας δούμε πώς εφαρμόζεται η συγκεκριμένη θεωρία, μέσω τριών λεκτικών παραδειγμάτων:

• Έστω ότι θέλουμε να κατανοήσουμε τις συνέπειες του ισχυρισμού:

- *Δεν ισχύει ότι ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα και είδε την Ακρόπολη.*

Το πρώτο βήμα είναι να αναγνωρίσουμε ότι η λογική δομή της πρότασης είναι “όχι (p και q)”, όπου p: ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα και q: ο Φοίβος είδε την Ακρόπολη. Το δεύτερο βήμα είναι να να εφαρμόσουμε τον νόμο (1) για να εξάγουμε το συμπέρασμα: “(όχι p) ή (όχι q)”. Και το τελευταίο βήμα είναι να «επαναφέρουμε» το συμπέρασμα στη φυσική γλώσσα, δηλαδή:

- *Ο Φοίβος δεν ήρθε στην Αθήνα ή δεν είδε την Ακρόπολη.*

• Η θεωρία του Rips (PSYCOP) προβλέπει ότι ο προσδιορισμός των συνεπειών της άρνησης μιας σύζευξης (όπως αυτή στο παραπάνω παράδειγμα) είναι πιο εύκολος από τον προσδιορισμό των συνεπειών της άρνησης μιας διάζευξης. Ας προσπαθήσουμε για παράδειγμα να εξάγουμε ένα συμπέρασμα από την παρακάτω πρόταση:

- *Δεν ισχύει ότι ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα ή είδε την Ακρόπολη.*

Στην περίπτωση αυτή, αφού διαπιστώσουμε ότι η παραπάνω πρόταση είναι της μορφής “όχι (p ή q)”, θα εφαρμόσουμε τον κανόνα (2) προκειμένου να καταλήξουμε στο συμπέρασμα:

- *Δεν ισχύει ότι ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα και δεν ισχύει ότι ο Φοίβος είδε την Ακρόπολη.*

- Όπως είδαμε παραπάνω, ισχύει ότι $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$. Αυτός ο λογικός κανόνας δεν περιλαμβάνεται στη θεωρία PSYCOP του Rips, καθώς δεν τον θεωρεί διαισθητικό. Αντίθετα υπάρχουν ερευνητές, όπως π.χ. οι Beth και Piaget (1966), που υποστήριξαν ότι το συμπέρασμα “$p \wedge (\neg q)$”, προκύπτει με φυσικό τρόπο, καθώς αν έχουμε μια πρόταση της μορφής “όχι (εάν p τότε q)”, η αναζήτηση ενός αντιπαραδείγματος μας οδηγεί στο συμπέρασμα “p και όχι q”. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, από την πρόταση:

- *Δεν ισχύει ότι αν ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα τότε είδε την Ακρόπολη*,

το συμπέρασμα στο οποίο θα πρέπει να καταλήξουμε είναι:

- *Ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα και δεν είδε την Ακρόπολη.*

Συμπερασματικά, η χρήση τυπικών κανόνων οδηγεί στην «ψυχολογική» πρόβλεψη ότι η άρνηση μιας διάζευξης είναι πιο δύσκολα κατανοητή από την άρνηση μιας σύζευξης και η άρνηση μιας συνεπαγωγής είναι - αν όχι αδύνατη - η πιο δύσκολα κατανοητή από τις άλλες δύο περιπτώσεις.

Μια διαφορετική θεώρηση στον τρόπο που κατανοούμε τις αρνήσεις σύνθετων προτάσεων, μας παρέχει η *θεωρία νοητικών μοντέλων* (*theory of mental models*). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, τα συμπεράσματα που προκύπτουν από σύνθετες αρνητικές προτάσεις δε βασίζονται στην εφαρμογή τυπικών-λογικών κανόνων, αλλά στη δημιουργία νοητικών μοντέλων όλων των δυνατοτήτων που «απογορεύει», και συνεπώς και αυτών που «επιτρέπει» η εκάστοτε αρνητική πρόταση. Δηλαδή, αντιλαμβανόμαστε τη σημασία ενός ισχυρισμού όταν γνωρίζουμε τις δυνατότητες που ανακύπτουν από αυτόν (P.N. Johnson-Laird, 1983). Ας δούμε πώς εφαρμόζεται η θεωρία νοητικών μοντέλων:

• Ένα απλό παράδειγμα άρνησης σύζευξης είναι το εξής:

  ◆ *Ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα και είδε την Ακρόπολη.*

Από την πρόταση αυτή ανακύπτει μία μόνο δυνατότητα, αυτή κατά την οποία εκπληρώνονται και οι δύο όροι της. Αντίθετα στην άρνησή της:

  ◆ *Δεν ισχύει (συγχρόνως) ότι ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα και είδε την Ακρόπολη*,

εμπεριέχονται οι εξής τρεις δυνατότητες: “¬p και ¬q”, “¬p και q” και “p και ¬q”, όπου p: *ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα* και q: *ο Φοίβος είδε την Ακρόπολη*. Πρόκειται ουσιαστικά για τα μοντέλα που χτίζουμε στο μυαλό μας προκειμένου να κατανοήσουμε την άρνηση της σύζευξης.

• Αντίστοιχα, ένα παράδειγμα άρνησης διάζευξης είναι το εξής:

  ◆ *Ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα ή είδε την Ακρόπολη.*

  ◆ *Δεν ισχύει ότι ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα ή είδε την Ακρόπολη*.

Στην περίπτωση αυτή, η κατάφαση αναφέρεται σε τρεις δυνατότητες: “p και ¬q”, “p και ¬q” και “p και q”, ενώ η άρνηση αναφέρεται μόνο σε μία δυνατότητα: “¬p και ¬q”. Παρατηρούμε ότι και σε αυτό το παράδειγμα η άρνηση προσδιορίζεται μέσα από μοντέλο ή μοντέλα που ουσιαστικά προκύπτουν, θεωρώντας το συμπλήρωμα των μοντέλων της κατάφασης στο σύνολο όλων των δυνατών μοντέλων.

• Τέλος , ας δούμε ένα παράδειγμα άρνησης συνεπαγωγής:

  ◆ Αν ο *Φοίβος ήρθε στην Αθήνα τότε είδε την Ακρόπολη.*

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι οι προτάσεις της μορφής “εάν p τότε q” είναι σαφώς πιο περίπλοκες αλλά και πιο αμφιλεγόμενες από τις προηγούμενες περιπτώσεις (Handley, Evans, & Thompson, 2006), αφού σε αντίθεση με τις συζεύξεις και τις διαζεύξεις υπάρχει μεταξύ των όρων τους μια σχέση εξάρτησης. Έτσι, για κάποιους το νοητικό μοντέλο που αντιστοιχεί στην πρόταση του παραδείγματος είναι το «απλό» “p και q”. Για κάποιους άλλους στην πρόταση αυτή αντιστοιχούν οι δυνατότητες “p και q” αλλά και “¬p και ¬q”. (Στην περίπτωση αυτή υποκρύπτεται η διπλή ερμηνεία "αν και μόνο αν"). Ωστόσο υπάρχουν και κάποιοι που αντιστοιχούν στην συνεπαγωγή την τριπλή ερμηνεία “p και q”, “¬p και q” και “¬p και ¬q”.

Πολλές απόψεις έχουν ειπωθεί σχετικά με τους λόγους που οδηγούν σε αυτές τις διαφορετικές ερμηνείες. Χαρακτηριστικά, αναφέρουν οι Johnson-Laird, Byrne και Girotto (2009) ότι όταν εφαρμόζουμε άρνηση σε υποθετικές προτάσεις, συχνά θεωρούμε ότι η άρνηση αυτή αφορά μόνο στο συμπέρασμα. Στο παράδειγμά μας, η άρνηση της αρχικής πρότασης:

- *Δεν ισχύει ότι αν ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα τότε είδε την Ακρόπολη*,

μπορεί να θεωρηθεί ότι σημαίνει: “Αν ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα τότε δεν είδε την Ακρόπολη” αν και προφανώς οι δύο προτάσεις δεν έχουν το ίδιο νόημα. Σε κάθε περίπτωση, η σωστή άρνηση της πρότασης του παραδείγματός μας είναι αυτή που αναφέρεται σε κάθε δυνατότητα που είναι ασυμβίβαστη με την αρχική πρόταση. Εδώ υπάρχει μόνο μία τέτοια δυνατότητα και είναι αυτή κατά την οποία “ο Φοίβος ήρθε στην Αθήνα, αλλά δεν είδε την Ακρόπολη”.

Συμπερασματικά, σύμφωνα με τη θεωρία νοητικών μοντέλων τα άτομα κατασκευάζουν νοητικά μοντέλα και μάλιστα όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των πιθανών μοντέλων που αναφέρονται σε μια πρόταση, τόσο πιο δύσκολη είναι η κατανόηση του ισχυρισμού. Ειδικά, η άρνηση μιας πρότασης, γίνεται κατανοητή μέσω ενός συνόλου δυνατοτήτων, συμπληρωματικών προς εκείνες στις οποίες αναφέρεται η αντίστοιχη καταφατική πρόταση.
Συνεπώς, σε αντίθεση με την περίπτωση χρήσης τυπικών κανόνων, η θεωρία νοητικών μοντέλων προβλέπει για καταφατικές προτάσεις ότι οι συζεύξεις (ένα μοντέλο) είναι πιο εύκολα κατανοητές από τις συνεπαγωγές (ένα ή δύο ή τρία μοντέλα) που με τη σειρά τους κατανοούνται πιο εύκολα από τις διαζεύξεις (δύο ή τρία μοντέλα). Ωστόσο, αναφορικά με τις αντίστοιχες αποφατικές προτάσεις η σειρά αλλάζει: οι διαζεύξεις (ένα μοντέλο) κατανοούνται πιο εύκολα από τις συνεπαγωγές (ένα ή τρία μοντέλα) που είναι πιο εύκολα κατανοητές από τις συζεύξεις (τρία μοντέλα).

Πρόσφατα οι S.Khemlani, I.Orenes, P.N.Johnson-Laird (2014) διεξήγαγαν έρευνα (μέσω δύο πειραμάτων, σε δύο διαφορετικές ομάδες τυχαίως επιλεγμένων ενηλίκων) σχετικά με την άρνηση σύνθετων προτάσεων, εξετάζοντας το θέμα τόσο από λογική (θεωρία PSYCOP), όσο και από ψυχολογική σκοπιά (θεωρία νοητικών μοντέλων).

• Στο πρώτο πείραμα οι ερευνητές θέλησαν να εξετάσουν το επίπεδο κατανόησης σύνθετων αρνητικών ισχυρισμών και να ελέγξουν τις προβλέψεις της θεωρίας μοντέλου, μέσα από μία δραστηριότητα με έξι συνολικά ερωτήματα (χωρισμένα σε δύο ομάδες, τρία για καταφατικές και τρία για τις αντίστοιχες αποφατικές προτάσεις):

ο Bob **επιβεβαίωσε** ότι φορούσε κίτρινο πουκάμισο **και** φορούσε μπλε παντελόνι τη Δευτέρα.	ο Bob **αρνήθηκε** ότι φορούσε κίτρινο πουκάμισο **και** φορούσε μπλε παντελόνι τη Δευτέρα.
ο Bob **επιβεβαίωσε** ότι φορούσε ένα κίτρινο πουκάμισο **ή** φορούσε μπλε παντελόνι τη Δευτέρα.	ο Bob **αρνήθηκε** ότι φορούσε ένα κίτρινο πουκάμισο **ή** φορούσε μπλε παντελόνι τη Δευτέρα.
ο Bob **επιβεβαίωσε** ότι **αν** φορούσε κόκκινο πουκάμισο **τότε** φορούσε ροζ παντελόνι τη Δευτέρα.	ο Bob **αρνήθηκε** ότι **αν** φορούσε κόκκινο πουκάμισο **τότε** φορούσε ροζ παντελόνι τη Δευτέρα.

Οι συμμετέχοντες καλούνταν να επιλέξουν ό,τι έκριναν ότι είναι δυνατό να συμβαίνει, δεδομένων των παραπάνω ισχυρισμών, από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Ο Bob φορούσε ένα **κίτρινο** πουκάμισο και φορούσε **μπλε** παντελόνι.
Ο Bob φορούσε ένα **κίτρινο** πουκάμισο και φορούσε **όχι μπλε** παντελόνι.
Ο Bob φορούσε ένα **όχι κίτρινο** πουκάμισο και φορούσε **μπλε** παντελόνι.
Ο Bob φορούσε ένα **όχι κίτρινο** πουκάμισο και φορούσε **όχι μπλε** παντελόνι.

• Στο δεύτερο πείραμα οι ερευνητές ζήτησαν από τους συμμετέχοντες να διατυπώσουν οι ίδιοι τις αρνήσεις σύνθετων προτάσεων της μορφής “p και q”, “p ή q” και “αν p τότε q”, που τους δόθηκαν. Για παράδειγμα έπρεπε να διατυπώσουν την άρνηση της πρότασης:

Η Mary αγαπάει τον εσπρέσσο και απολαμβάνει τα μπισκότα.

Αναμένονταν οι συμμετέχοντες να είναι πιο ακριβείς στην άρνηση των διαζεύξεων, λιγότερο ακριβείς στην άρνηση συνεπαγωγών και να δυσκολευτούν περισσότερο κατά τη λεκτική απόδοση των αρνήσεων των συζεύξεων.

Σχετικά με τα αποτελέσματα αναφέρουμε επιγραμματικά:

• στο πρώτο πείραμα για τις καταφάσεις, οι συζεύξεις απέδωσαν 86% ορθές ερμηνείες, οι διαζεύξεις 59% και οι συνεπαγωγές 45%, επιβεβαιώνοντας τη θεωρία PSYCOP. Για τις αρνήσεις ωστόσο τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν αρκετά διαφορετικά και μάλιστα αντίθετα από όσα προβλέπει η συγκεκριμένη θεωρία. Οι συζεύξεις απέδωσαν μόνο 18% σωστές απαντήσεις, οι συνεπαγωγές 14% και οι διαζεύξεις 86%.

• στο δεύτερο πείραμα οι συμμετέχοντες επιβεβαίωσαν την προβλεπόμενη (από τη θεωρία νοητικών μοντέλων) τάση: διατύπωσαν ορθές αρνήσεις για το 67% των διαζεύξεων, για το 28% των συνεπαγωγών και για το 0% των συζεύξεων.

Θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η θεωρία νοητικών μοντέλων σχετικά με τον τρόπο κατανόησης των αρνητικών σύνθετων προτάσεων επιβεβαιώθηκε σε μεγάλο βαθμό από τις επιδόσεις των συμμετεχόντων. Το γεγονός δε, ότι η επιλογή των συμμετεχόντων ήταν τυχαία – και συνεπώς κατά πάσα πιθανότητα δεν είχαν ειδικές γνώσεις λογικής – μας οδηγεί με σχετική ασφάλεια στο συμπέρασμα ότι και οι μαθητές που καλούνται να φέρουν σε πέρας, ακόμα και για πρώτη φορα, αντίστοιχες δραστηριότητες θα «λειτουργήσουν» με παρόμοιο τρόπο. Διδακτικά λοιπόν κρίνεται σκόπιμο πριν από την αυστηρή, τυπική, λογική προσέγγιση της άρνησης να προσφέρουμε στους μαθητές τη δυνατότητα να δημιουργήσουν τα μοντέλα του κόσμου της κάθε πρότασης (και τα συμπληρωματικά τους για την άρνηση της αντίστοιχης πρότασης). Πιστεύουμε ότι με αυτόν τον τρόπο όταν έρθει η στιγμή να μάθουν τους τυπικούς κανόνες της λογικής, π.χ. το νόμο De Morgan, αυτοί θα νοηματοδοτηθούν ορθά, η κατανόησή τους θα είναι ουσιαστική και η εφαρμογή τους θα γίνει με φυσικό τρόπο.

5. ΘΕΩΡΙΑ ΤΥΠΙΚΗΣ ΠΕΙΘΑΡΧΙΑΣ

Τί δέ; τόδε ἤδη ἐπεσκέψω, ὡς οἵ τε φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα ὡς ἔπος εἰπεῖν ὀξεῖς φύονται, οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσιν καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν; (Πλάτων, Πολιτεία, 526 b5)

5.1. Εισαγωγή

Η *Θεωρία Τυπικής Πειθαρχίας* (ΘΤΠ, *Theory of Formal Discipline*) υποστηρίζει ότι τα Μαθηματικά βοηθούν σε σημαντικό βαθμό την ανάπτυξη της λογικής σκέψης. Οι Smith, Langston και Nisbett (1992) την περιγράφουν ως μία από τις αρχαιότερες απόψεις για τη φύση της σκέψης, που απορρέει από τις θέσεις του Πλάτωνα περί συλλογισμού και εκπαίδευσης. Πράγματι, ο *Πλάτωνας* στην *Πολιτεία* παρατηρεί ότι: « Κι ακόμη έχεις προσέξει και αυτό, ότι δηλαδή όσοι έχουν ταλέντο στους αριθμητικούς υπολογισμούς παρουσιάζουν μια φυσική ευχέρεια σχεδόν σε όλες τις μαθήσεις, επίσης ότι και όσοι έχουν αργοκίνητα μυαλά, αν εκπαιδευτούν και ασκηθούν σε αυτό το πράγμα, έστω κι αν δεν αντλήσουν κανένα άλλο όφελος, πάντως όλοι τους πραγματοποιούν κάποια πρόοδο ώστε τουλάχιστον να γίνεται πιο κοφτερό το μυαλό τους». Μάλιστα στο ίδιο κείμενο αναφέρει: «*Προσῆκον δὴ τὸ μάθημα ἂν εἴη, ὦ Γλαύκων, νομοθετῆσαι καὶ πείθειν τοὺς μέλλοντας ἐν τῇ πόλει τῶν μεγίστων [525c] μεθέξειν ἐπὶ λογιστικὴν ἰέναι καὶ ἀνθάπτεσθαι αὐτῆς μὴ ἰδιωτικῶς, ἀλλ᾽ ἕως ἂν ἐπὶ θέαν τῆς τῶν ἀριθμῶν φύσεως ἀφίκωνται τῇ νοήσει αὐτῇ*» (525 b11). Δηλαδή « Έτσι, η σπουδή αυτή θα είναι κατάλληλη, Γλαύκων, να την καθιερώσουμε με νόμο και να πείθουμε όσους μέλλει να αναλάβουν τα ανώτατα αξιώματα, στην πόλη να στραφούν στη σπουδή των αριθμών και να καταπιαστούν με αυτή όχι ερασιτεχνικά αλλά ίσαμ΄ εκεί που θα φτάσουν - αποκλειστικά διαμέσου της νόησης - στη θέαση της φύσης των αριθμών».

Όπως αναφέρουν οι Lehman, Lampert & Nisbett (1988) και ο Nisbett (2009), μετά από τους αρχαίους Έλληνες, οι Ρωμαίοι «συμφώνησαν» για την αξία της αριθμητικής, πρόσθεσαν ωστόσο τη μελέτη της γραμματικής στο πρόγραμμα σπουδών, ως μάθημα «πειθαρχίας» που επίσης βοηθά στη βελτίωση της συλλογιστικής. Το μεσαίωνα, χωρίς να αμφισβητηθεί η σοφία των αρχαίων προγόνων, προστέθηκε στο πρόγραμμα σπουδών η λογική και ειδικά η μελέτη συλλογισμών, ενώ κατά την Αναγέννηση και την άνθιση των ανθρωπιστικών σπουδών προστίθεται η μελέτη Λατινικών και Αρχαίων Ελληνικών, δημιουργώντας ένα πρόγραμμα σπουδών που καθόρισε την ευρωπαϊκή εκπαίδευση για τους επόμενους τέσσερις αιώνες! Προφανώς η ιδέα ότι η μελέτη ορισμένων «αυστηρών» αντικειμένων, όπως τα Μαθηματικά και ακόμα τα Λατινικά ή τα Αρχαία Ελληνικά, μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη δεξιοτήτων συλλογιστικής και κριτικής σκέψης ήταν κυρίαρχη για εκατοντάδες χρόνια. Ήταν δηλαδή η ΘΤΠ ιστορικά παρούσα όλα αυτά τα χρόνια, έχοντας βρεί υποστήριξη από πολλούς μαθηματικούς και φιλοσόφους. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τον John Locke (1706), που πρότεινε ότι τα μαθηματικά θα πρέπει να διδάσκονται σε όσους έχουν το χρόνο και την ευκαιρία, όχι τόσο για να γίνουν μαθηματικοί όσο να γίνουν λογικά όντα!

5.2. Η Θεωρία Τυπικής Πειθαρχίας στην ελληνική εκπαίδευση

Παίρνοντας στοιχεία από το ΦΕΚ (Αρ.Φύλλου 303, 13 Μαρτίου 2003) για το Δ.Ε.Π.Π.Σ. (*Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών*) και τα Α.Π.Σ. (*Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών*) της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, μεταξύ άλλων εντοπίζουμε τα εξής:

• *Ο σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών εντάσσεται στους γενικότερους σκοπούς της Εκπαίδευσης και αφορά τη συμβολή στην ολοκλήρωση της* *προσωπικότητας του μαθητή και την επιτυχή κοινωνική ένταξή του, εφόσον τα Μαθηματικά: Ασκούν τον μαθητή στην μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες και τον διδάσκουν να διατυπώνει τα διανοήματά του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια. Αναπτύσσουν …, την επιμονή, …, την ελεύθερη σκέψη, … και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.*

• *Ειδικά για το Δημοτικό Σχολείο με τη διδασκαλία των Μαθηματικών επιδιώκεται: … Η καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας. Η κατανόηση στοιχειωδών Μαθηματικών μεθόδων. Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία. Η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.*

• *Με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο επιδιώκονται οι παρακάτω επιμέρους σκοποί: ... Η καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων. … Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία. Η σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων.*

Πολλά μπορεί να ειπωθούν για τους λόγους που διδάσκονται τα Μαθηματικά: είναι εγγενώς πολύτιμα, αποτελούν σημαντικό μέρος της πανανθρώπινης πολιτιστικής κληρονομιάς που πρέπει να συνεχιστεί, είναι απαραίτητα στην καθημερινή ζωή και στο χώρο εργασίας, είναι προϋπόθεση για την ανάπτυξη της τεχνολογίας και την εξέλιξη άλλων επιστημών. Σε κάθε περίπτωση, το παραπάνω κείμενο καθιστά φανερό ότι *η μοναδική συμβολή των Μαθηματικών στην ανάπτυξη της ικανότητας συλλογισμού του ατόμου*, δηλαδή η κεντρική ιδέα της ΘΤΠ είναι - αν όχι το κύριο κίνητρο για τη μαθηματική εκπαίδευση - ένας από τους σημαντικότερους λόγους για τους οποίους τα παιδιά διδάσκονται Μαθηματικά.

5.3. Ισχύει η ΘΠΤ;

Παρά τη μακρά ιστορία της, η ΘΤΠ έχει δοκιμαστεί ελάχιστα. Αν και αναφέρεται κατά κόρον, τόσο στο ελληνικό (όπως είδαμε παραπάνω) όσο και σε πολλά άλλα ευρωπαϊκά αναλυτικά προγράμματα σπουδών, ως «δικαιολογία» για τη σπουδαιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο, τα εμπειρικά στοιχεία που έχουμε από την εφαρμογή της είναι πολύ λίγα.

Δεν ήταν παρά οι αρχές του 20ού αιώνα όταν ο Thorndike (1924) εξέτασε αρχικά τον Μάιο του 1922 και επανεξέτασε τον Μάιο του 1923 πάνω από 8.500 μαθητές Λυκείου, με στόχο να διερευνήσει με «τεστ νοημοσύνης» το κέρδος που είχαν μετά από ένα έτος σχολικής φοίτησης ανάλογα με τα μαθήματα που παρακολούθησαν. Διαπίστωσε ότι οι μαθητές που διδάσκονταν μαθηματικά, αύξησαν την ικανότητά τους να σκέφτονται κατά ένα μικρό ποσοστό, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις μαθήματα όπως το μαγείρεμα, το ράψιμο και η βιολογία παρουσίαζαν εξίσου μεγάλα κέρδη με αυτά που παρατηρήθηκαν στην ομάδα των μαθηματικών!

Αντίθετα με τα παραπάνω ήταν τα ευρήματα των Lehman και Nisbett (1990), σε έρευνα που διενήργησαν σε φοιτητές φυσικών, ανθρωπιστικών και κοινωνικών επιστημών στο πρώτο και στο τέταρτο έτους φοίτησής τους σε Πανεπιστήμιο των Η.Π.Α.. Συγκεκριμένα εξετάστηκε το αν βελτιώθηκαν σε επαγωγικούς συλλογισμούς και σε προβλήματα με υποθετικές προτάσεις της μορφής "αν … τότε…". Η στατιστική επεξεργασία των δεδομένων που συνέλεξαν έδειξε ότι η φοίτηση στις σχολές φυσικών και ανθρωπιστικών επιστημών επέφερε βελτίωση στη λογική σκέψη. Μάλιστα διαπιστώθηκε συσχέτιση μεταξύ του αριθμού των Μαθηματικών μαθημάτων που παρακολούθησε ο φοιτητής και της αλλαγής στη συλλογιστική του ικανότητα.

Αντίστοιχες έρευνες πραγματοποιήθηκαν και στο Ηνωμένο Βασίλειο από τους Inglis και Simpson (2008) και (2009), σε προπτυχιακούς φοιτητές Μαθηματικών και Καλών Τεχνών. Στην πρώτη εργασία, διερευνήθηκε η ικανότητά τους στο να κρίνουν την εγκυρότητα υποθετικών συλλογισμών. Διαπιστώθηκε ότι οι φοιτητές Μαθηματικών είχαν συνολικά περισσότερες σωστές επιλογές, ωστόσο ενώ ήταν καλύτεροι από τους φοιτητές των Καλών Τεχνών στην απόρριψη άκυρων συμπερασμάτων, δεν ήταν σημαντικά καλύτεροι στην επικύρωση των έγκυρων. Ένα ζήτημα που ανέκυψε ήταν αν οι διαφορές που εμφανίστηκαν οφείλονται σε διαφορετικά επιπέδα ευφυΐας μεταξύ των ομάδων ή αν οι φοιτητές μαθηματικών – όπως προτείνεται από τη Θεωρία Τυπικής Πειθαρχίας – έχουν πράγματι «επηρεαστεί» από τη μελέτη των μαθημάτων τους. Στη δεύτερη εργασία τους οι Inglis και Simpson, επέκτειναν τα αρχικά τους ευρήματα: Πρώτον, κατέδειξαν (σύμφωνα με τις βαθμολογίες τους σε ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο τεστ νοημοσύνης) ότι οι διαφορές που διαπιστώθηκαν δεν οφείλονται σε διαφορετικά επίπεδα νοημοσύνης μεταξύ των ομάδων. Δεύτερον, διαπίστωσαν ότι δεν παρατηρήθηκε αξιοσημείωτη βελτίωση της απόδοσης των φοιτητών των Μαθηματικών, όταν αυτοί δοκιμάστηκαν εκ νέου στο τέλος του πρώτου έτους σπουδών τους και παρότι όλοι είχαν παρακολουθήσει μαθήματα σχετικά με μαθηματικές αποδείξεις και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Μάλιστα οι ερευνητές εκτιμούν ότι υπάρχουν δύο πιθανές εξηγήσεις για την αρχική διαφορά μεταξύ των φοιτητών με διαφορετικές κατευθύνσεις σπουδών, κατά την είσοδό τους στο πανεπιστήμιο: πρώτον η διαφορετική μορφή μελέτης και η εν γένει διαφορετική προ-πανεπιστημιακή εκπαιδευσή τους και δεύτερον η ύπαρξη κάποιου «εξωγενούς» παράγοντα, όπως π.χ. η διάθεση του ατόμου για σκέψη!

Θα πρέπει να σχολιάσουμε ότι με μία πρώτη ματιά, τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται αντιφατικά. Το πρώτο – ότι δηλαδή υπάρχουν διαφορές μεταξύ των φοιτητών των Μαθηματικών και των φοιτητών των Καλών Τεχνών, χωρίς αυτό να οφείλεται σε διαφορετικό επίπεδο ευφυΐας – είναι σύμφωνο με τη Θεωρία Τυπικής Πειθαρχίας. Το δεύτερο – ότι δηλαδή οι φοιτητές των Μαθηματικών δεν παρουσίασαν σημαντική βελτίωση, ως προς την ανάπτυξη της λογικής τους σκέψης, μετά το πέρας ενός έτους σπουδών – αντίκειται σ’ αυτή. Ωστόσο και οι δύο πιθανές εξηγήσεις που έδωσαν οι ερευνητές σχετικά με τα ευρήματα τους, μάλλον συνηγορούν υπέρ της ΘΤΠ. Είτε δηλαδή οφείλονται στην μαθηματικού ενδιαφέροντος προ-πανεπιστημιακή εκπαίδευση τους, είτε στη γενικότερη διάθεση για σκέψη, η επίδραση της μαθηματικής παιδείας είναι εμφανής.

Η έρευνα του Thorndike (1924) απαντά “όχι”, η έρευνα των Lehman και Nisbett (1990) απαντά “μάλλον ναι” και οι έρευνες των Inglis και Simpson (2008) και (2009) απαντούν “ναι, υπό προϋποθέσεις”! Το ομιχλώδες τοπίο αναφορικά με την απάντηση στο κεφαλαιώδες ερώτημα: «ισχύει η ΘΠΤ;» ανέλαβαν να φωτίσουν οι Attridge και Inglis (2013). Ας μας επιτραπεί η εκτίμηση ότι πρόκειται – συγκριτικά με τις προαναφερθείσες – για την πιο ολοκληρωμένη έρευνα, με ξεχωριστό ενδιαφέρον καθώς έγινε σε μαθητές (μέσης ηλικίας 16 ετών και 6 μηνών).

Οι ερευνητές αποφάσισαν να ελέγξουν την εγκυρότητα της ΘΤΠ παρακολουθώντας συγκριτικά την εξέλιξη της λογικής σκέψης 77 μαθητών που είχαν επιλέξει κατεύθυνση με Μαθηματικά και 47 που σπούδαζαν αγγλική λογοτεχνία και δεν έκαναν μάθημα Μαθηματικών. (Σημειώνεται ότι οι συμμετέχοντες στην ομάδα των μαθηματικών μελέτησαν μεταξύ άλλων άλγεβρα, γεωμετρία, τριγωνομετρία, πιθανότητες κ.λ.π. αλλά δε διδάχθηκαν μαθηματικά που βασίζονται σε τυπικές αποδείξεις ούτε τον ορισμό της συνεπαγωγής). Οι μαθητές εξετάστηκαν δύο φορές, την πρώτη όσο το δυνατόν πιο κοντά στην αρχή της σχολικής χρονιάς και τη δεύτερη μετά την ολοκλήρωσή της, στο ίδιο σύνολο 32 ερωτήσεων σχετικών με κανόνες συμπερασμού.

Οι ερευνητές έθεσαν τα εξής δύο βασικά ερευνητικά ερωτήματα. Πρώτον: η μελέτη των Μαθηματικών επηρεάζει το επίπεδο κατανόησης λογικών συμπερασμών; Δεύτερον: αν υπάρχει ανάπτυξη των λογικών δεξιοτήτων, αυτό είναι το αποτέλεσμα μιας γενικότερης αλλαγής στον τομέα της γνωστικής ικανότητας ή μπορεί να οφείλεται σε περισσότερη διάθεση για σκέψη;

Η συλλογή των αποτελεσμάτων και η στατιστική επεξεργασία τους έδειξαν ότι «η ομάδα των Μαθηματικών» σημείωσε σημαντικά μεγαλύτερη βελτίωση στη δοκιμασία (ειδικά στην ορθή εφαρμογή του modus ponens) από ότι «η ομάδα της Λογοτεχνίας», επιβεβαιώνοντας ότι το ένα έτος σπουδών των μαθηματικών ωφέλησε ουσιαστικά. Αντίθετα, η ομάδα «σύγκρισης» δεν παρουσίασε σημαντικές διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων στην αρχή και στο τέλος της χρονιάς. Αναφορικά με την αιτία που επέφερε τη βελτίωση αυτή, η ανάλυση δείχνει ότι πιθανότατα σχετίζεται με τις εμπειρίες που αποκτήθηκαν κατά τη μελέτη των Μαθηματικών και όχι με γενικές αλλαγές στον τομέα της γνωστικής ικανότητας ή στη διάθεση για σκέψη.

Σχολιάζοντας τα αποτελέσματα των δύο τελευταίων ερευνών που παρουσιάσαμε αξίζει να σταθούμε σε ένα σημείο με σαφείς εκπαιδευτικές προεκτάσεις: Ενώ οι Inglis και Simpson (2009) δε διαπίστωσαν βελτίωση στη συλλογιστική σκέψη κατά το πρώτο έτος σπουδών των φοιτητών των Μαθηματικών, παρά την ενασχόλησή τους με μαθηματικές αποδείξεις και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, οι Attridge και Inglis (2013) διαπίστωσαν ουσιαστική βελτίωση των μαθητών στο ίδιο χρονικό διάστημα. Είναι δυνατόν τα μαθηματικά των τελευταίων τάξεων του σχολείου να καλλιεργούν συλλογιστικές δεξιότητες και τα «πανεπιστημιακά» όχι; Πιθανά ναι! Μια εξήγηση θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι μέσα από τη μελέτη των σχολικών μαθηματικών, οι μαθητές προσεγγίζουν τις υποθετικές επιχειρηματικές μορφές με τελείως διαφορετικό τρόπο από ότι με τη μελέτη της τυπικής Λογικής. Και μάλιστα τις προσεγγίζουν με ένα τρόπο που – κρινοντας από τα αποτελέσματα της έρευνας – φαίνεται να είναι εκπαιδευτικά πιο αποτελεσματικός! Είναι η φύση των Μαθηματικών να ασχολούνται συνεχώς με την έκφραση των συνεπειών κάποιων υποθέσεων. Είναι δηλαδή η καθημερινή αλλά και άρρητη χρήση συναγωγών, και κυρίως modus ponens, στην τάξη που παρέχει στους μαθητές εμπειρίες χρήσης λογικών εννοιών, οι οποίες δεν παρέχονται από τη μελέτη της τυπικής Λογικής. Γι’ αυτό ίσως οι μαθητές δεν βελτιώθηκαν σταθερά σε όλους τους τύπους συμπερασμάτων, κάτι που μάλλον θα συνέβαινε αν είχαν διδαχθεί Λογική με πιο τυπικό τρόπο.

Ολοκληρώνοντας τις παρατηρήσεις πάνω στην έρευνα των Attridge και Inglis (2013) πρεπει να επισημάνουμε ένα βασικό περιορισμό που οφείλεται στη δομή του εκπαιδευτικού συστήματος στο Ηνωμένο Βασίλειο. Η έρευνα έδειξε ότι η ΘΤΠ ισχύει για τους μαθητές που επέλεξαν να διδαχθούν το μάθημα των Μαθηματικών κατά τα τελευταία χρόνια του σχολείου και όχι για τους μαθητές που δε διδάσκονται Μαθηματικά στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Το ερώτημα που τίθεται εδώ προκύπτει φυσικά: Σε κάποια άλλη χώρα που η μελέτη των

Μαθηματικών είναι υποχρεωτική μέχρι τα 18, θα βελτίωναν όλοι οι μαθητές τη συλλογιστική τους ικανότητα; Θα ίσχυε δηλαδή η ΘΤΠ;

Σε κάθε περίπτωση τα ερευνητικά στοιχεία που έχουμε είναι ακόμα λίγα για να συμπεράνουμε με απόλυτο και αναντίρρητο τρόπο την ισχύ της ΘΤΠ. Φαίνεται ότι ο Πλάτων είχε δίκιο στον ισχυρισμό του ότι η μελέτη των Μαθηματικών βοηθά στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης. Όμως η φύση της ανάπτυξης αυτής παραμένει ανεξερεύνητη!

5.4. Διδακτικές προεκτάσεις της Θεωρίας Τυπικής Πειθαρχίας

Όπως είδαμε, παρότι τα εμπειρικά στοιχεία επαλήθευσης της ΘΤΠ είναι λίγα, η εμφάνισή της, ως δικαιολογία για τη σπουδαιότητα των Μαθηματικών, στο ελληνικό – και όχι μόνο – αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών είναι περισσότερο από συχνή.

Πρόσφατα οι Wainwright, Attridge, Wainwright, Alcock, and Inglis (2017) διενήργησαν έρευνα, μέσω συνεντεύξεων με οχτώ σημαίνουσες προσωπικότητες (πρώην υπουργός με επιρροή στην εκπαιδευτική πολιτική, καθηγητές Μαθηματικού τμήματος Πανεπιστημίου, σύμβουλοι) στην κοινότητα της εκπαίδευσης-διδακτικής των Μαθηματικών του Ηνωμένου Βασιλείου. Οι συμμετέχοντες, εκτός από τις συνεντεύξεις, απάντησαν και σε ερωτηματολόγιο (με κλίμακα Likert: 1 - διαφωνώ έως 5 - συμφωνώ) για να αξιολογήσουν την έκταση στην οποία θεωρούσαν ότι η μελέτη των μαθηματικών των δύο τελευταίων ετών του σχολείου θα βελτίωνε την απόδοσή τους σε συλλογιστικές δραστηριότητες.

Στόχος της εργασίας ήταν να διερευνήσει το βαθμό στον οποίο - οι άνθρωποι που χαράζουν την εκπαιδευτική πολιτική στο Ηνωμένο Βασίλειο - συμφωνούν με τη ΘΤΠ καθώς επίσης και τις απόψεις τους για τα επιχειρήματα που έχουν διατυπωθεί είτε προς υπεράσπιση είτε προς απόρριψη της ΘΤΠ.

Η ποσοτική και ποιοτική ανάλυση των δεδομένων αποκάλυψε τα εξής βασικά θέματα:

• Πρώτον, υπήρξε μία ευρεία υιοθέτηση της ΘΤΠ, που δικαιολογήθηκε βάσει των γνώσεων των προπτυχιακών φοιτητών. Επισημάνθηκε ωστόσο ότι η μελέτη Μαθηματικών δρα υποστηρικτικά στην ανάπτυξη κάποιων και όχι όλων των τύπων λογικής σκέψης.

• Δεύτερον, πολλοί συμμετέχοντες αναφέρθηκαν αυθόρμητα σε στοιχεία σχετικά με την εργασιακή επιτυχία ατόμων με μετα-υποχρεωτικές μαθηματικές σπουδές, συνδέοντας την εργασιακή επιτυχία με δεξιότητες ορθού συλλογισμού και επίλυσης προβλημάτων. Κάποιοι από αυτούς γνώριζαν ότι αυτή η θέση δεν αποτελεί επιχείρημα στήριξης της ΘΤΠ.

• Τρίτον, οι συμμετέχοντες σχολίασαν τους πιθανούς περιορισμούς της ΘΤΠ: Σημείωσαν ότι η μελέτη των μαθηματικών δεν μπορεί να εξασφαλίσει την ανάπτυξη της συλλογιστικής ικανότητας του ατόμου, καθώς προσωπικοί ή παιδαγωγικοί παράγοντες μπορεί να δράσουν περιοριστικά και ακόμα ότι υπάρχουν και άλλοι επιστημονικοί κλάδοι που μπορούν να καλλιεργήσουν τη λογική σκέψη. Αναφέρθηκαν στην πιθανότητα οι άνθρωποι που είναι ήδη καλοί στη Λογική να είναι δυσανάλογα «φιλτραρισμένοι» μεταξύ αυτών που μελετούν Μαθηματικά. Ακόμα διατύπωσαν την ανησυχία τους για το ότι δεν μπορεί να αξιολογηθεί η παράλληλη συνεισφορά άλλων επιστημονικών κλάδων στη βελτίωση των συλλογιστικών δεξιότητων. Τέλος αναγνώρισαν ότι είχαν προκαταλήψεις, αφού ως άνθρωποι με υψηλή μαθηματική εκπαίδευση ήθελαν να συμφωνήσουν με τη ΘΤΠ!

Συμπερασματικά οι συμμετέχοντες υποστηρίζουν τη ΘΤΠ, παρά το γεγονός ότι είναι ενήμεροι για τους περιορισμούς της.

Αυτό που θέλουμε να επισημάνουμε είναι το γεγονός ότι η ΘΤΠ παραμείνει κραταιά εδώ και αιώνες, αρχικά διατυπωμένη σε φιλοσοφικές πραγματείες και πρόσφατα σε επίσημα έγγραφα εκπαιδευτικής πολιτικής! Η ευγενής καταγωγή της και ο σαρωτικός χαρακτήρας των ισχυρισμών της, σκεπάζουν τα αντικειμενικά ελάχιστα αποδεικτικά στοιχεία για την ισχύ της και μαζί καλύπτουν μια σειρά από ενδιαφέρουσες ερωτήσεις σχετικά με τους περιορισμούς που ενέχει, αλλά και τις ειδικές περιπτώσεις ανάπτυξης της γνώσης που εξασφαλίζει.

Για παράδειγμα, *ποιοι ειδικοί τομείς των Μαθηματικών και ποιες διδακτικές προσεγγίσεις υποστηρίζουν την ανάπτυξη διαφορετικών δεξιοτήτων συλλογισμού*; Ενδεικτικά αναφέρουμε την έρευνα των Attridge, Doritou και Inglis (2015) που έγινε στην Κύπρο, σε μαθητές ίδιας ηλικίας με αυτούς που συμμετείχαν στην έρευνα των Attridge και Inglis (2013) και που μας αποκάλυψε ότι οι Κύπριοι μαθητές βελτιώθηκαν περισσότερο από ότι αυτοί του Ηνωμένου Βασιλείου. Το γεγονός ότι στην Κύπρο οι μαθητές διδάσκονται Ευκλείδια Γεωμετρία, ενώ στο Ηνωμένο Βασίλειο όχι, προσδίδει στο πόρισμα της συγκεκριμένης έρευνας προφανείς όσο και σημαντικές διδακτικές προεκτάσεις.

Δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία ότι η σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση βασίζεται στη Θεωρία Τυπικής Πειθαρχίας και επί του παρόντος δεν υπάρχει κανένας λόγος να εγκαταλείψουμε την πίστη μας σε αυτή! Υπάρχει ωστόσο επιτακτική ανάγκη να επιλέξουμε με ποια από τα «συστατικά» της θα εργαστούμε και ποια από αυτά θα χρησιμοποιήσουμε στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών του αύριο. Υπάρχει επιτακτική ανάγκη ώστε οι ερωτήσεις και οι περιορισμοί που αναφέραμε παραπάνω να μη γίνουν τροχοπέδη, αλλά πλούσια πηγή έμπνευσης για μελλοντικές έρευνες.

Όπως αναφέρει και η Sfard (1998), στη συνέντευξή του ο Shimshon Amitsur υποστήριξε ότι μέσω των μαθηματικών θέλουμε επίσης να διδάξουμε λογική σκέψη και μέχρι στιγμής δεν έχει βρεθεί ένα καλύτερο εργαλείο για αυτό…

5.5. Επίλογος

Στο 3ο κεφάλαιο είδαμε ότι η Λογική είναι απαραίτητο εργαλείο για κάθε μαθητή στην προσπάθειά του να αποκτήσει την αναγκαία και ικανή γνώση, ώστε να αποδείξει μαθηματικές προτάσεις και γενικότερα να «κάνει μαθηματικά». Είδαμε επίσης ότι είναι απαραίτητη ως γνώση και για κάθε καθηγητή Μαθηματικών, που θα πρέπει να φιλτράρει «λογικά», τόσο σε συντακτικό όσο και σε σημασιολογικό επίπεδο, και τον προφορικό και το γραπτό λόγο που διατυπώνεται στη τάξη.

Στο $5^{ο}$ κεφάλαιο αναλύσαμε τα χαρακτηριστικά της Θεωρίας Τυπικής Πειθαρχίας και αναπτύξαμε επιχειρήματα υπέρ της θέσης ότι η μελέτη Μαθηματικών βοηθά στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης.

Τελικά, κάνουμε Λογική για τα Μαθηματικά ή Μαθηματικά για τη Λογική; Αν καταφέρουμε να δούμε τα πράγματα πιο ολιστικά, θα καταλάβουμε ότι επί της ουσίας αυτό είναι ένα ψευδοδίλημμα. Θα καταλάβουμε ότι αυτό που πραγματικά πρέπει να μας απασχολεί είναι να βρούμε τον τρόπο να κάνουμε Λογική για τα Μαθηματικά ΚΑΙ Μαθηματικά για τη Λογική. Να βρούμε τον τρόπο ώστε οι μαθητές μας να διδάσκονται Μαθηματικά για να καλλιεργούν τη Λογική σκέψη τους και να διδάσκονται Λογική για να μπορέσουν να καταλάβουν Μαθηματικά!

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Αναπολιτάνος, Δ., Γαβαλάς, Δ., Δέμης, Α., Δημητρακόπουλος, Κ., Καρασμάνης, Β. (1999). *Λογική: θεωρία και πρακτική, Γ΄ Τάξη Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., (2009). *Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Βαβαλέσκου Θ., Μπούσγου Γ., (1978). *Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα-Τριγωνομετρία*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Αλεξανδρής Ν., Παπακωνσταντίνου Δ.Α., Παπαμικρούλης Α., (1980). *Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Δημητρακόπουλος, Κ.Ι. (1999). *Σημειώσεις μαθηματικής λογικής*. ΑΘΗΝΑ

Δημητρακόπουλος Κ.Ι. (2007). Ιστορία αρχαίας ελληνικής λογικής. ΑΘΗΝΑ

Ντζιώρας Η.Β., (1979). *Μαθηματικά Β΄ Λυκείου, Άλγεβρα*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Ντζιώρας Η.Β., (1976). *Μαθηματικά Ε΄ Γυμνασίου, Θετικής Κατευθύνσεως, Τόμος Πρώτος, Άλγεβρα.* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Πορτίδης, Δ., Ψύλλος, Στ., Αναπολιτάνος, Δ. (2007). *Λογική. Η δομή του επιχειρήματος.* Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη και οι συγγραφείς.

Πλάτων (375 π.Χ./2002). *Πολιτεία*. Μετάφραση: Σκουτερόπουλος. Αθήνα: εκδόσεις ΠΟΛΙΣ.

Σούλιας, Ν. (1966). *Λογική μετά στοιχείων γνωσιολογίας, Τάξεως ΣΤ΄*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Ξένη

Aristotle (1984). In J. Barnes (Ed.), *The complete works of Aristotle, Vols. 1 and 2*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Attridge, N. & Inglis, M. (2013). *Advanced Mathematical Study and the Development of Conditional Reasoning* Skills.PLoS ONE 8(7):e69399.doi:10.1371/journal.pone.0069399

Attridge, N., Doritou, M. & Inglis, M. (2015). *The development of reasoning skills during compulsory 16 to 18 mathematics education*. Research in Mathematics Education, 17 (1), pp. 20-37.

Baranes, R., Perry, M. & Stigler, J. (1989). *Activation of real-world knowledge in the solution of word problems*, Cognition and Instruction 6(4), 287–318.

Beth, E.W., Piaget, J. (1966). Mathematical epistemology and psychology. Dordrecht: Reidel.

Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1987). *Written and oral mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education. 18, 83–97.

Chazan, D. (1993). *'High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof*, Educational Studies in Mathematics. 24, 359–387

Diogenes Laertius. *Lives of Eminent Philosophers*. Ed. R. D. Hicks. London, 1925.

Durand-Guerrier, V. (2003). *Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. Educational Studies in Mathematics*. *53*, 5-34.

Hanna, G., de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education.* The 19th ICMI Study.

Inglis, M., Simpson, A. (2009). *The defective and material conditionals in mathematics : does it matter?* , Psychology of Mathematics Education 33, pp. 225-232.

Edwards, L. (1999). *Odds and evens: Mathematical reasoning and informal proof among high school students*. Journal of Mathematical Behavior, 17(4), 489–504.

Epp, S. (1998). *A unified framework for proof and disproof.* Mathematics Teacher 9(8), 708–713.

Fischbein, E. & Kedem, I.: (1982). *Proof and certitude in development of mathematical thinking*. in A. Vermandel (ed.), Proceedings of the Sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Universitaire Instelling, Antwerpen, pp. 128–131.

Goetting, M. (1995). *The College Students' Understanding of Mathematical Proof*, Doctoral Dissertation, University of Maryland.

Handley, S. J., Evans, J. St. B. T., & Thompson, V. A. (2006). *The negated conditional: A litmus test for the suppositional conditional?* Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, Cognition, 32, 559–569.

Healy, L., Hoyles, C. (2000). *A study of proof conceptions in algebra.* Journal for Research in Mathematics Education 31(4), 396–428.

Hoyles, C. Küchemann, D. (2002). *'Students' understanding of logical implication'*. Educational Studies in Mathematics, 51, 193–223.

Inglis, M., Simpson, A. (2008). *Conditional inference and advanced mathematical study*. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 187-204.

Inglis, M., & Simpson, A. (2009). *Conditional inference and advanced mathematical study: Further evidence.* Educational Studies in Mathematics, 72(2), 185-198.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Johnson-Laird, P. N., Byrne, R. M. J., & Girotto, V. (2009). *The mental model theory of conditionals: A reply to Guy Politzer*. Topoi, 28, 75–80.

Khemlani, S., Orenes, I., & Johnson-Laird, P. N. (2014). *The negation of conjunctions, conditionals, and disjunctions*, Acta Psychologica, 151, pp. 1-7.

Lehman, D. R., Lampert, R. O., & Nisbett, R. E. (1988). *The effects of graduate training on reasoning: Formal discipline and thinking about everyday-life events*. American Psychologist, 43, 431.

Lehman, D. R. & Nisbett, R. E. (1990). *A longitudinal study of the effects of undergraduate training on reasoning.* Developmental Psychology, 26, 952-960.

Locke, J. (1706). *Conduct of the Understanding,* 1971. New York: Burt Franklin.

Nisbett, R. E. (2009). *Can Reasoning be Taught?* Cambridge, MA: American Academy of Arts and Sciences.

O'Brien, T.C. (1972). *Logical thinking in adolescents*, Educational Studies in Mathematics 4, 401–428.

Rips, L. J. (1994). *The psychology of proof*. Cambridge, MA: MIT Press.

Sfard A. (1998) *A mathematician's view of research in mathematics education: An interview with Shimson A. Amitsur.* In Sierpinska A., Kilpatrick J. Mathematics education as a research domain: A search for identity (Vol. 2, 445–458). Dordrecht: Kluwer.

Smith, E. E., Langston, C., & Nisbett, R. E. (1992). *The case for rules in reasoning*. Cognitive Science, 16, 1-40.

Stylianides, A.J., Stylianides, G.J., Philippou, G.N.(2004). *Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts*. Educational Studies in Mathematics 55 (1-3): 133-162.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Van Oers, B. (1996). *Learning mathematics as a meaningful activity*. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A.

Wainwright, E., Attridge, N., Wainwright, D., Alcock, L. and Inglis, M., (2017). *Support with caveats: advocates' views of the Theory of Formal Discipline as a reason for the study of advanced mathematics*. Research in Mathematics Education, 19 (1), pp. 20-41.

Wason, P. C., & Jones, S. (1963). *Negatives: denotation and connation*. British Journal of Psychology, 54, 299–307.