



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

ΜΔΕ Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

Διπλωματική Εργασία

Αστρικοί Άνεμοι

Δημήτρης Παρασκευόπουλος

A.M. 201318

Επιβλέπων Καθηγητής: Νεκτάριος Βλαχάκης

Αθήνα 2017

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον κύριο Νεκτάριο Βλαχάκη για τη βοήθεια που μου προσέφερε όχι μόνο κατά τη συγγραφή της διπλωματικής αυτής εργασίας, αλλά καθ' όλη τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών, σε πληθώρα μαθημάτων Φυσικής και Αστροφυσικής.

Εξεταστική Τριμελής Επιτροπή

- Νεκτάριος Βλαχάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Κανάρης Τσίγκανος, Καθηγητής
- Ιωάννης Δαγκλής, Καθηγητής

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 1: Δύναμη Ακτινοβολίας	4
Παρατηρησιακά Δεδομένα.....	4
Εκτίμηση του ρυθμού απώλειας μάζας \dot{M}	5
Δύναμη Ακτινοβολίας.....	6
Συνεχές Φάσμα.....	6
Γραμμικό Φάσμα.....	8
Κεφάλαιο 2: Άνεμοι από Περιστρεφόμενα, Μαγνητισμένα, Θερμά Άστρα ..	16
Σύμβολα.....	16
Παραδοχές.....	16
Εξίσωση υπ' αριθμόν 1: Εξίσωση Συνέχειας για τη Μάζα.....	17
Εξισώσεις υπ' αριθμόν 2 και 3: Εξίσωση Ορμής.....	18
Εξίσωση υπ' αριθμόν 4: Η εξίσωση Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	24
Ολοκλήρωση εξίσωσης ορμής στη $\hat{\phi}$ -διεύθυνση.....	25
Εξίσωση υπ' αριθμόν 5: Η εξίσωση Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	26
Αριθμός Alfvén.....	27
Οι συνιστώσες v_ϕ και B_ϕ συναρτήσει του M_r	27
Εισαγωγή αδιάστατων μεταβλητών.....	28
Αδιάστατη εξίσωση ορμής στην \hat{r} -διεύθυνση.....	29
Κεφάλαιο 3: Όταν η \vec{g}_L εξαρτάται από την επιτάχυνση $v \frac{dv}{dr}$	31
Εξίσωση Ορμής.....	31
Εύρεση Κρίσιμου Σημείου.....	34
Αριθμητική Λύση.....	36
Κεφάλαιο 4: Όταν η \vec{g}_L εξαρτάται μόνο από την απόσταση r	41
Η συνάρτηση W του Lambert (Lambert W function).....	41
Εξίσωση Ορμής.....	43
Άνεμος Parker.....	45
Αριθμητική Λύση.....	47
Βιβλιογραφία	48

Εισαγωγή

Ο Αμερικανός αστροφυσικός E.N. Parker, υποστήριξε το 1958 ότι το ηλιακό στέμμα δεν είναι στατικό, αλλά διαστέλλεται με υπερηχητική ταχύτητα. Η υπερηχητική αυτή εκτόνωση του πλάσματος του Ήλιου ονομάστηκε *ηλιακός άνεμος*. Γενικά, ονομάζουμε *αστρικό άνεμο* τη συνεχή¹, υπερηχητική εκροή μάζας από ένα άστρο.

Η δημιουργία ενός αστρικού ανέμου προϋποθέτει, μεταξύ άλλων, την άσκηση στα σωματίδια της αστρικής ατμόσφαιρας κάποιας δύναμης με ακτινική, προς τα έξω, συνιστώσα, η οποία από κάποια ακτίνα και πέρα υπερβαίνει τη δύναμη της βαρύτητας. Με άλλα λόγια, πρέπει κάποιο ή κάποια είδη ενέργειας του αστρικού υλικού να μετατραπούν, σε κάποιο ύψος της ατμόσφαιρας, σε κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}\rho v^2$, όπου ρ και v η πυκνότητα και η ταχύτητα, αντίστοιχα, του ρευστού, δηλαδή του πλάσματος.

Η κατηγορία αστρικών ανέμων, την οποία θα μελετήσουμε στην παρούσα εργασία, είναι αυτή που περιλαμβάνει ανέμους από άστρα μεγάλης μάζας ($M \approx 10 - 100 M_{\odot}$). Τα άστρα αυτά είναι προγενέστερων φασματικών τύπων (early-type stars), δηλαδή O, B, A και Wolf-Rayet. Από τα 10^{11} άστρα που περιέχει ο Γαλαξίας μας, τα άστρα αυτά είναι μερικές εκατοντάδες χιλιάδες, άρα πρόκειται για σχετικώς σπάνια σώματα. Εξαιτίας της υψηλής τους μάζας, έχουν μικρή διάρκεια ζωής, της τάξης των $10^6 yr$.

Τα άστρα αυτά έχουν υψηλή επιφανειακή θερμοκρασία $T > 10^4 K$, η οποία συνεπάγεται, σύμφωνα με το νόμο Stefan-Boltzmann για μέλαν σώμα, μεγάλη λαμπρότητα ($\frac{erg}{s}$) ($L \approx 10^4 - 10^6 L_{\odot}$) και μεγάλη πίεση ακτινοβολίας P_{rad} ². Η συνεπαγόμενη δύναμη ακτινοβολίας \vec{g}_{rad} ($\frac{dyn}{gr}$) παίζει τον κυρίαρχο ρόλο στη δημιουργία αυτών των ανέμων, σε αντίθεση με τον ηλιακό άνεμο και γενικότερα τους ανέμους από άστρα μεταγενέστερων φασματικών τύπων (late-type stars), η δημιουργία των οποίων οφείλεται στη *θερμική πίεση* P_{gas} , δηλαδή στην πίεση του αερίου³.

¹ Λέμε “συνεχή” για να διαχωρίσουμε την εκροή μάζας υπό μορφή ανέμου από την ξαφνική απώλεια μάζας που συμβαίνει, για παράδειγμα, κατά τις εκρήξεις καινοφανών ή υπερκαινοφανών.

² Σύμφωνα με το νόμο Stefan-Boltzmann, η επιφανειακή λαμπρότητα F_0 ($\frac{erg}{cm^2s}$) ενός μέλανος σώματος θερμοκρασίας T , δηλαδή η ενέργεια υπό μορφή Η/Μ ακτινοβολίας, που εκπέμπει το μέλαν σώμα σε όλα τα μήκη κύματος, προς όλες τις διευθύνσεις, ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας κάθετης στη ροή ενέργειας, είναι $F_0 = \sigma T^4$, όπου σ η σταθερά Stefan-Boltzmann. Άρα, η αντίστοιχη λαμπρότητα L ($\frac{erg}{s}$), είναι $L = \sigma T^4 4\pi R^2 \propto T^4$, όπου R η ακτίνα του μέλανος σώματος, το οποίο θεωρούμε ότι έχει σφαιρικό σχήμα. Για την πίεση ακτινοβολίας P_{rad} ισχύει επίσης ότι $P_{rad} \propto T^4$.

³ Η συνεπαγόμενη δύναμη \vec{F}_{gas} οφείλεται στη χωρική μεταβολή της πίεσης του αερίου και ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη σχέση $\vec{F}_{gas} = -\nabla P_{gas}$. Η δύναμη αυτή μπορεί να δημιουργήσει τον ηλιακό άνεμο, λόγω της υψηλής θερμοκρασίας του στέμματος, η οποία είναι της τάξης των $10^6 K$, παρόλο που η επιφανειακή θερμοκρασία του Ήλιου είναι περίπου $6000 K$.

Η απορρόφηση ή/και σκέδαση των φωτονίων από τα σωματίδια της αστρικής ατμόσφαιρας, δημιουργεί ένα *συνεχές φάσμα*, στο οποίο συνυπάρχουν *φασματικές γραμμές*. Η δύναμη ακτινοβολίας οφείλεται τόσο στους μηχανισμούς που παράγουν το συνεχές φάσμα (\vec{g}_C), όσο και στις φυσικές διαδικασίες που παράγουν τις φασματικές γραμμές (\vec{g}_L). Μάλιστα, όπως θα δούμε, σημαντικότερο ρόλο στη δημιουργία του ανέμου παίζει η \vec{g}_L (*line force*). Αυτό, εκ πρώτης όψευς, φαίνεται παράξενο, διότι μία φασματική γραμμή προκύπτει από απορρόφηση φωτονίων ορισμένης συχνότητας $\nu_0 \pm \Delta\nu$ όπου $\Delta\nu$ η πλάτυνση της γραμμής, δηλαδή μία φασματική γραμμή δημιουργείται από σχετικώς περιορισμένο αριθμό φωτονίων. Όπως θα δούμε όμως, η επιτάχυνση της αστρικής ατμόσφαιρας σε συνδυασμό με το φαινόμενο Doppler, έχει ως αποτέλεσμα κάθε φασματική γραμμή να “σαρώνει” ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων $\delta\nu = \frac{v_\infty}{c}\nu_0$ και άρα να προκαλεί απορρόφηση ενός σχετικώς μεγάλου αριθμού φωτονίων.

Οι γραμμές που συνεισφέρουν στη \vec{g}_L είναι τόσο οι γραμμές συντονισμού (*resonance lines*)⁴ (Lucy and Solomon 1970, ApJ, 159, 879), όσο και οι δευτερεύ-

⁴Ένα φωτόνιο μπορεί να αλληλεπιδράσει με ένα άτομο με τους εξής τρόπους:

1. *Αληθής απορρόφηση (true or pure absorption)*: Το άτομο απορροφά φωτόνιο ενέργειας $h\nu_1$ και διεγείρεται. Κατά την αποδιέγερσή του εκπέμπει φωτόνιο ενέργειας $h\nu_2 \neq h\nu_1$, διότι στον χρόνο που μεσολαβεί (μεταξύ διέγερσης και αποδιέγερσης), το άτομο υφίσταται πληθώρα συγκρούσεων με άλλα σωματίδια, οι οποίες διαταράσσουν την ενεργειακή του κατάσταση.

Το φαινόμενο αυτό περιγράφεται συνολικά ως *ασύμφωνη σκέδαση (noncoherent scattering)*, δηλαδή ως σκέδαση κατά την οποία η ενέργεια του σκεδασθέντος φωτονίου είναι *τελείως ασυσχέτιστη* με την ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου.

Ο μηχανισμός αυτός οδηγεί στη δημιουργία φασματικών γραμμών απορρόφησης που ονομάζονται *pure absorption lines*.

2. *Σκέδαση συντονισμού (resonance scattering)*: Το άτομο απορροφά φωτόνιο ενέργειας $h\nu_1$ και διεγείρεται. Κατά την αποδιέγερσή του εκπέμπει φωτόνιο ενέργειας $h\nu_2 = h\nu_1$, διότι πρώτον, ο χρόνος που μεσολαβεί (μεταξύ διέγερσης και αποδιέγερσης), δεν είναι αρκετός ώστε να διαταραχθεί η ενεργειακή κατάσταση του ατόμου λόγω συγκρούσεων με άλλα σωματίδια και δεύτερον, επειδή είναι σχετικώς πολύ υψηλή η πιθανότητα, κατά την αποδιέγερση, το άτομο να επανέλθει στην αρχική του κατάσταση με ένα άλμα.

Το φαινόμενο αυτό περιγράφεται συνολικά ως *σύμφωνη σκέδαση (coherent scattering)*, δηλαδή ως σκέδαση κατά την οποία το σκεδασθέν φωτόνιο έχει διαφορετική διεύθυνση κίνησης από το προσπίπτον, αλλά την ίδια ενέργεια.

Ο μηχανισμός αυτός οδηγεί στη δημιουργία φασματικών γραμμών απορρόφησης που ονομάζονται *scattering lines*. Σε αυτές ανήκουν οι *γραμμές συντονισμού (resonance lines)*, δηλαδή γραμμές υψηλής έντασης που αντιστοιχούν σε μεταβάσεις των οποίων η χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη είναι η θεμελιώδης.

Παράδειγμα *σκέδασης συντονισμού* είναι η *σκέδαση Thomson* (βλέπε υποσημείωση 6). Σημειώνουμε ότι η σκέδαση Thomson από ελεύθερα ηλεκτρόνια στις αστρικές ατμόσφαιρες, θεωρείται, ως επί το πλείστον, *ισότροπη σκέδαση (isotropic scattering)*, δηλαδή η διεύθυνση κίνησης του σκεδασθέντος φωτονίου είναι *τελείως ασυσχέτιστη* με τη διεύθυνση κίνησης του προσπίπτοντος φωτονίου.

Τέλος, σημειώνουμε ότι στην πραγματικότητα, οι *pure absorption lines* και οι *resonance scattering lines* αποτελούν δύο ακραία φαινόμενα. Στις περισσότερες φασματικές γραμμές συ-

ουσες φασματικές γραμμές (*subordinate lines*) (Castor, Abbot & Klein 1975, ApJ, 195, 157). Σημειώνουμε ότι στη \bar{g}_L συνεισφέρουν κυρίως οι φασματικές γραμμές από τα βαριά ιόντα (π.χ. άνθρακα), ενώ οι γραμμές του ιονισμένου υδρογόνου και ιονισμένου ηλίου δεν παίζουν σημαντικό ρόλο.

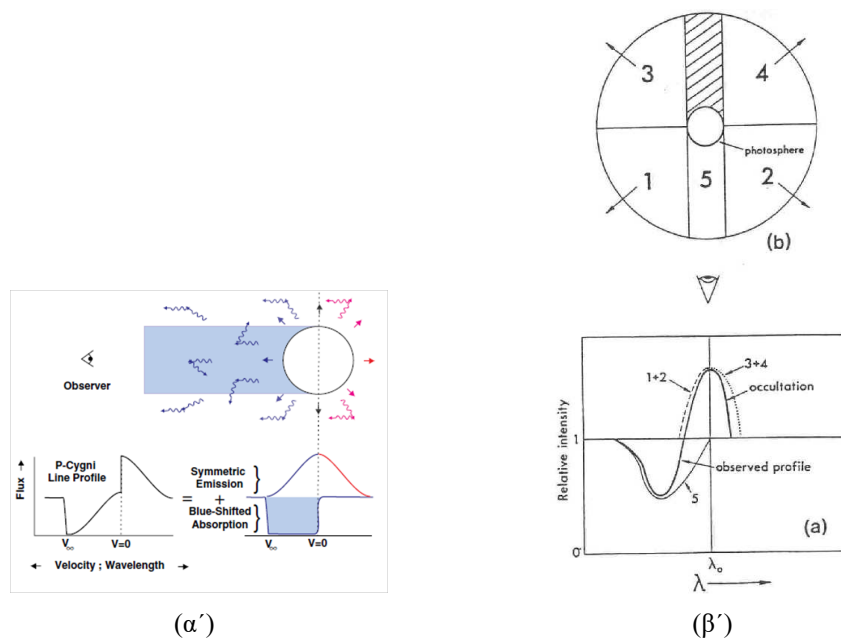
Οι βασικές ποσότητες που θέλουμε να υπολογίσουμε από τη θεωρητική μελέτη αστρικών ανέμων, είναι η τερματική ταχύτητα του ανέμου v_∞ ($\frac{km}{s}$) και ο ρυθμός απώλειας μάζας \dot{M} ($\frac{g}{s}$). Αφού βρούμε τις τιμές αυτών των μεγεθών για άστρα δεδομένων παραμέτρων όπως μάζα, λαμπρότητα, ακτίνα, μαγνητικό πεδίο, κ.ά., στη συνέχεια συγκρίνουμε τις θεωρητικές αυτές τιμές, με τις αντίστοιχες που προκύπτουν παρατηρησιακά, αφού τόσο η τερματική ταχύτητα, όσο και ο ρυθμός απώλειας μάζας, μπορούν να υπολογιστούν μελετώντας τα αστρικά φάσματα.

Η παρατηρούμενη τερματική ταχύτητα των ανέμων από θερμά άστρα μεγάλης μάζας κυμαίνεται από $100 \frac{km}{s}$ έως $3000 \frac{km}{s}$, δηλαδή μπορεί να είναι έως περίπου μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από την τερματική ταχύτητα των $400 \frac{km}{s}$ του ηλιακού ανέμου. Ωστόσο, ο ρυθμός απώλειας μάζας είναι $\dot{M} \approx 10^{-4} - 10^{-7} \frac{M_\odot}{yr}$, άρα πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερος από την τιμή των $10^{-14} \frac{M_\odot}{yr}$ που χαρακτηρίζει τον ηλιακό άνεμο, εξαιτίας του οποίου ο Ήλιος, παρόλο που θα μείνει στην Κύρια Ακολουθία για $10^{10} yr$, θα χάσει μόλις το 0,01% της μάζας του.

Αντίθετα, η μεγάλη απώλεια μάζας των θερμών άστρων μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την εξελικτική τους πορεία, παρά το μικρό χρόνο ζωής τους ($\approx 10^6 yr$), αφού ένα σημαντικό κλάσμα (π.χ. $\frac{1}{2}$ ή $\frac{1}{3}$) της μάζας του άστρου μπορεί να χαθεί όσο το άστρο είναι στην Κύρια Ακολουθία. Εξάλλου, τα θερμά άστρα στο τέλος της ζωής τους μετατρέπονται σε αστέρες Wolf-Rayet, οι οποίοι συνήθως έχουν κάψει όλο το υδρογόνο γύρω από τον πυρήνα, με αποτέλεσμα στην επιφάνειά τους να έχουν φτάσει πυρηνικά παράγωγα όπως άνθρακας, άζωτο και οξυγόνο. Επίσης, η απώλεια μάζας παίζει καθοριστικό ρόλο στην έκρηξη *supernovae* που θα συμβεί στο τέλος της ζωής του άστρου, καθώς και στο είδος του αντικειμένου που θα απομείνει μετά την έκρηξη αυτή (άστρο νετρονίων ή μελανή οπή). Η εκροή μάζας από τα άστρα αυτά επηρεάζει και τον περιβάλλοντα μεσοαστρικό χώρο, εμπλουτίζοντάς τον με ύλη και ενέργεια. Κατ' επέκταση, παίζει σημαντικό ρόλο στη δομή, τη χημική σύσταση και την εξέλιξη των γαλαξιών.

Τέλος, σημειώνουμε ότι η μελέτη των ανέμων από θερμά άστρα μεγάλης μάζας είναι σημαντική και για τον εξής λόγο: Στο πρώιμο Σύμπαν, ένα σημαντικό ποσοστό των πρώτων άστρων που σχηματίστηκαν αποτελείτο πιθανώς από άστρα μεγάλης μάζας, οι άνεμοι των οποίων θα έπαιζαν καθοριστικό ρόλο για τον μετέπειτα σχηματισμό των γαλαξιών.

υπάρχουν, έως κάποιο βαθμό, και τα δύο φαινόμενα.



Σχήμα 1: Δημιουργία φασματικής γραμμής τύπου P Cygni (το σχήμα 1α έχει παρθεί από τον Owocki S. *Radiatively Driven Stellar Winds from Hot Stars*, Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, Nature Publishing Group 2001, ενώ το σχήμα 2α έχει παρθεί από την Ryden B. *Chapter 12: Winds from Hot & Cool Stars*, Notes for the course: Astronomy 825: Radiative Gas Dynamics, Ohio University, 2011).

Κεφάλαιο 1: Δύναμη Ακτινοβολίας

Παρατηρησιακά Δεδομένα

Τα παρατηρησιακά δεδομένα που υποδηλώνουν την ύπαρξη ανέμων από θερμά άστρα έγκεινται στο ιδιαίζον προφίλ ορισμένων φασματικών γραμμών, το οποίο ονομάζεται προφίλ τύπου P Cygni⁵ (P Cygni Line Profile). Πρόκειται για ένα προφίλ, το οποίο, όπως φαίνεται στα σχήματα 1α και 1β, εμπεριέχει στο ίδιο μήκος κύματος (UV συνήθως), τόσο απορρόφηση όσο και εκπομπή. Η δημιουργία ενός τέτοιου προφίλ μπορεί να ερμηνευθεί αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μία σφαιρικά συμμετρική εκροή μάζας από το άστρο. Θεωρώντας έναν παρατηρητή στη Γη έχουμε:

⁵Το όνομα αυτό οφείλεται στο άστρο P του αστερισμού του Κύκνου (P Cygni), που ήταν το πρώτο άστρο στο οποίο παρατηρήθηκε αυτό το προφίλ. Το άστρο P Cygni είναι ένας μεταβλητός μπλε υπεργίγαντας (B1 Ia). Παρόλο που απέχει από τη Γη περίπου 2 kpc , είναι ορατό με γυμνό μάτι λόγω της μεγάλης του λαμπρότητας.

Εκπομπή: Η συνιστώσα της εκπομπής οφείλεται σε φωτόνια, τα οποία λόγω αλληλεπίδρασης με τα σωματίδια του ανέμου, σκεδάζονται προς τον παρατηρητή. Αν θεωρήσουμε ότι η οπτική ακτίνα, δηλαδή η ευθεία που συνδέει τον παρατηρητή με το κέντρο του άστρου, είναι ο άξονας z και ότι το μοναδιαίο άνυσμα $+\hat{z}$ έχει κατεύθυνση από το άστρο προς τον παρατηρητή, τότε τα σωματίδια του ανέμου που απορροφούν στο εν λόγω μήκος κύματος, μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες: σε αυτά των οποίων η συνιστώσα της ταχύτητας v_z στον άξονα z είναι $v_z < 0$ και σε αυτά τα οποία έχουν $v_z > 0$. Τα σωματίδια δηλαδή, μπορεί είτε να απομακρύνονται από τον παρατηρητή ($v_z < 0$, περιοχές 3 και 4 σχήματος 1β), είτε να τον πλησιάζουν ($v_z > 0$, περιοχές 1 και 2 σχήματος 1β), άρα εκπέμπουν σε μήκη κύματος μετατοπισμένα, λόγω φαινομένου Doppler, προς το ερυθρό (*redshift*) ή το μπλε (*blueshift*) αντίστοιχα.

Απορρόφηση: Η συνιστώσα της απορρόφησης οφείλεται σε φωτόνια, τα οποία αλληλεπιδρούν με τα σωματίδια του ανέμου που βρίσκονται σε μία στήλη μεταξύ παρατηρητή και άστρου (περιοχή 5 σχήματος 1β). Επειδή τα σωματίδια αυτά πλησιάζουν τον παρατηρητή, τα απορροφούμενα μήκη κύματος είναι μετατοπισμένα, λόγω φαινομένου Doppler, προς το μπλε. Σημειώνουμε ότι από το μπλε άκρο της συνιστώσας απορρόφησης, μπορούμε να υπολογίσουμε την τερματική ταχύτητα v_∞ του ανέμου, όπως φαίνεται στο σχήμα 1α.

Εκτίμηση του ρυθμού απώλειας μάζας \dot{M}

Υποθέτουμε ότι κάθε φωτόνιο συχνότητας ν που εκπέμπεται από τη φωτόσφαιρα, μεταφέρει την ορμή του $\frac{h\nu}{c}$ σε κάποιο σωματίδιο της διαστελλόμενης αστρικής ατμόσφαιρας. Θεωρώντας ότι αυτή είναι η μοναδική αλληλεπίδραση στην οποία συμμετέχουν τα σωματίδια, πρέπει η ορμή της εκπεμπόμενης από τη φωτόσφαιρα ακτινοβολίας ανά μονάδα χρόνου ($\approx \frac{L}{c}$) να ισούται με την ορμή ανά μονάδα χρόνου που “χάνει” το άστρο λόγω του ανέμου ($\approx \dot{M}v_\infty$). Άρα πρέπει

$$\frac{L}{c} \approx \dot{M}v_\infty \quad (1)$$

απ’ όπου προκύπτει μία εκτίμηση για τον ρυθμό απώλειας μάζας \dot{M}

$$\dot{M} \approx \frac{L}{v_\infty c} \quad (2)$$

Θεωρώντας τυπικές τιμές λαμπρότητας και τερματικής ταχύτητας για άστρα O και B ($L = 10^5 L_\odot$, $v_\infty = 10^3 \frac{km}{s}$), από τη σχέση (2) βρίσκουμε $\dot{M} = 10^{-6} \frac{M_\odot}{yr}$, τιμή που συμφωνεί με τις παρατηρήσεις.

Δύναμη ακτινοβολίας

Κάθε φωτόνιο συχνότητας ν έχει ενέργεια \mathcal{E} ίση με $\mathcal{E} = h\nu$ και ορμή ίση με $\frac{\mathcal{E}}{c}$ όπου h η σταθερά του Planck και c η ταχύτητα του φωτός. Επειδή τα φωτόνια μεταφέρουν ορμή, όταν απορροφώνται ή σκεδάζονται από υλικά σωματίδια, τα σωματίδια δέχονται δύναμη από τα φωτόνια. Η δύναμη αυτή, ανά μονάδα μάζας, ταυτίζεται με την επιτάχυνση λόγω ακτινοβολίας \vec{g}_{rad} , η οποία, θεωρώντας το άστρο σημειακή πηγή ακτινοβολίας, είναι

$$\vec{g}_{rad}(r) = \hat{r}g_{rad}(r) \quad (3)$$

όπου $g_{rad}(r)$ το μέτρο του ανύσματος \vec{g}_{rad} .

Προκειμένου να μελετήσουμε ξεχωριστά την επιτάχυνση λόγω ακτινοβολίας \vec{g}_C που οφείλεται στο συνεχές φάσμα και την \vec{g}_L που οφείλεται στο γραμμικό φάσμα, γράφουμε

$$\vec{g}_{rad} = \vec{g}_C + \vec{g}_L \quad (4)$$

Συνεχές φάσμα

Αν L ($\frac{erg}{s}$) η λαμπρότητα του άστρου, τότε η ροή της ακτινοβολίας σε ακτίνα r είναι $\frac{L}{4\pi r^2}$, άρα η αντίστοιχη ροή ορμής είναι $\frac{L}{4\pi r^2 c}$. Θεωρώντας ότι το συνεχές φάσμα οφείλεται σε σκέδαση Thomson⁶ με συντελεστή απορρόφησης μάζας σ_e

⁶Στα θερμά άστρα μεγάλης μάζας, ο σημαντικότερος μηχανισμός δημιουργίας του συνεχούς φάσματος είναι η σκέδαση Thomson, άρα αγνοούμε άλλες φυσικές διαδικασίες, όπως δέσιμες-ελεύθερες μεταβάσεις (*bound-free transitions*) κατά τις οποίες το άτομο απορροφά ενέργεια και ιονίζεται, και ελεύθερες-ελεύθερες μεταβάσεις (*free-free transitions*), κατά τις οποίες ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο αλληλεπιδρά με κάποιο θετικό ιόν και ως αποτέλεσμα είτε επιβραδύνεται, άρα χάνει ενέργεια εκπέμποντας φωτόνιο (η εκπεμπόμενη ακτινοβολία ονομάζεται ακτινοβολία πέδησης ή *bremmstrahlung*), είτε επιταχύνεται, άρα κερδίζει ενέργεια απορροφώντας φωτόνιο.

Σκέδαση Thomson είναι η σκέδαση ελεύθερου ηλεκτρονίου από φωτόνιο, κατά την οποία το φωτόνιο δεν αλλάζει ενέργεια, παρά μόνο διεύθυνση κίνησης. Αποτελεί το κλασικό όριο (δηλαδή όταν στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου η ενέργεια $h\nu$ του φωτονίου είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα ηρεμίας m_e του ηλεκτρονίου, δηλαδή όταν $h\nu \ll m_e c^2$) της σκέδασης Compton, κατά την οποία το σκεδασθέν φωτόνιο έχει μικρότερη ενέργεια από το προσπίπτον.

Η ενεργός διατομή της σκέδασης Thomson είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα του φωτονίου, ονομάζεται ενεργός διατομή Thomson και ορίζεται ως $\sigma_T \equiv \frac{8\pi}{3} r_0^2$ όπου $r_0^2 \equiv \frac{e^4}{m_e^2 c^4}$ η κλασική ακτίνα του ηλεκτρονίου, άρα $\sigma_T = 0.665 \text{ barn} = 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Αν σ_e ο συντελεστής απορρόφησης μάζας ($\frac{cm^2}{gr}$) για τη σκέδαση Thomson, ισχύει ότι $\sigma_e = \frac{\sigma_T}{m_p}$, όπου m_p η μάζα του πρωτονίου.

Η τελευταία σχέση προκύπτει από τη γενικότερη σχέση $\sigma_e = \frac{\sigma_T}{\mu_e u}$ όπου μ_e το μέσο μοριακό βάρος του ηλεκτρονίου και $1 u \simeq 931,5 \text{ MeV}$ η ατομική μονάδα μάζας που είναι περίπου ίση με τη μάζα του πρωτονίου.

Το μέσο μοριακό βάρος μ ορίζεται ως εξής: Έστω μίγμα αερίων πυκνότητας μάζας ρ ($\frac{gr}{cm^3}$) και αριθμητικής πυκνότητας n ($\frac{1}{cm^3}$). Ισχύει ότι $\rho = n\bar{m}$ όπου \bar{m} η μέση μάζα κάθε σωματιδίου του

$\left(\frac{cm^2}{gr}\right)$, έχουμε ότι η προκύπτουσα δύναμη ανά μονάδα μάζας είναι

$$\vec{g}_C = \hat{r} \frac{\sigma_e}{c} \frac{L}{4\pi r^2} \quad (5)$$

Θεωρώντας τη λαμπρότητα Eddington $L_E = \frac{4\pi Gc}{\sigma_e} M$, ορίζουμε την αδιάστατη σταθερά

$$\Gamma \equiv \frac{L}{L_E} \quad (6)$$

άρα

$$\Gamma = \frac{\sigma_e}{4\pi Gc} \frac{L}{M} \quad (7)$$

Για $\sigma_e = 0.4 \frac{cm^2}{gr}$ (βλ. υποσημείωση 6) έχουμε

$$\Gamma \approx 3 \cdot 10^{-5} \frac{(L/L_\odot)}{(M/M_\odot)} \quad (8)$$

Η επιτάχυνση \vec{g} λόγω βαρύτητας είναι

$$\vec{g} = -\hat{r} \frac{GM}{r^2} \quad (9)$$

Βάσει των σχέσεων (5), (7) και (9) μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{g}_C = -\Gamma \vec{g} \quad (10)$$

Η \vec{g}_C δεν μπορεί να υπερνικήσει τη βαρύτητα \vec{g} , διότι $\Gamma < 1$. Π.χ., για ένα πολύ λαμπρό άστρο φασματικού τύπου O με $L = 10^6 L_\odot$ και $M = 60 M_\odot$, η σχέση (8) δίνει $\Gamma \approx \frac{1}{2}$, ενώ για μικρότερες τιμές της λαμπρότητας, η τιμή του Γ είναι ακόμα μικρότερη.

μίγματος (το σωματίδιο μπορεί να είναι ένα ουδέτερο άτομο, ένα ιόν ή ένα ηλεκτρόνιο). Ορίζουμε $\bar{m} \equiv \mu u$.

Το μέσο μοριακό βάρος του ηλεκτρονίου μ_e ορίζεται ως εξής: Κατ' αντιστοιχία με τον ορισμό του μέσου μοριακού βάρους μ ($\rho \equiv n\mu u$) ορίζουμε επιπλέον ότι $\rho \equiv n_e \mu_e u$, όπου n_e η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων. Ισχύει όμως ότι $\rho = \frac{m_{o\lambda}}{V}$ και $n_e = \frac{N_e}{V}$, όπου $m_{o\lambda}$ η ολική μάζα του μίγματος, V ο όγκος του μίγματος και N_e ο ολικός αριθμός των ηλεκτρονίων. Άρα $m_{o\lambda} = N_e \mu_e u$. Άρα $\mu_e u \equiv m_{e,v\pi o\theta}$ η υποθετική μάζα που θα έπρεπε να έχει κάθε ηλεκτρόνιο, αν όλη η μάζα του μίγματος αερίων ήταν συγκεντρωμένη στα ηλεκτρόνια. Άρα το μέσο μοριακό βάρος του ηλεκτρονίου μ_e δείχνει πόσες φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του πρωτονίου είναι η προαναφερθείσα υποθετική μάζα του ηλεκτρονίου.

Για πλήρη ιονισμό, ισχύει ότι $\mu_e = \frac{2}{1+X}$ όπου X η σχετική περιεκτικότητα του αστρικού υλικού σε υδρογόνο. Άρα, για $X = 1$ είναι $\mu_e = 1$, άρα $\sigma_e = \frac{\sigma_T}{u}$, άρα προκύπτει ότι $\sigma_e \approx 0.4 \frac{cm^2}{gr}$.

Εξάλλου, μελετάμε άστρα στα οποία επικρατεί *υδροστατική ισορροπία* μέχρι κάποια ακτίνα πάνω από τη φωτόσφαιρα, πέρα από την οποία ακτίνα, η ατμόσφαιρα παύει να είναι στατική και παρουσιάζει διαστολή, την οποία καλούμε *άνεμο*. Δε μελετάμε ασταθή άστρα, τα οποία ξεπερνούν τη λαμπρότητα Eddington. Άρα η \vec{g}_C δεν είναι ικανή να δημιουργήσει άνεμο. Η υπεύθυνη δύναμη για τη δημιουργία του ανέμου είναι η δύναμη ακτινοβολίας \vec{g}_L που οφείλεται στο γραμμικό φάσμα, την οποία μελετάμε αμέσως παρακάτω.

Γραμμικό φάσμα

Κατ' αντιστοιχία με τη σχέση (5), η δύναμη ανά μονάδα μάζας που οφείλεται *μόνο* σε μία ορισμένη φασματική γραμμή είναι

$$\vec{g}_L = \hat{r} \frac{\kappa_L}{c} \int_0^\infty d\nu F_\nu(\nu) \phi(\nu) \quad (11)$$

όπου κ_L ο συντελεστής απορρόφησης μάζας $\left(\frac{cm^2}{gr}\right)$ που σχετίζεται με τη συγκεκριμένη φασματική γραμμή, όπου $\phi(\nu)$ η συνάρτηση - προφίλ της φασματικής γραμμής, κανονικοποιημένη ώστε $\int_0^\infty d\nu \phi(\nu) = 1$, και όπου F_ν η μονοχρωματική ροή της ακτινοβολίας $\left(\frac{erg}{Hz s cm^2}\right)$

Θεωρούμε ότι η αστρική ατμόσφαιρα διαστέλλεται με ακτινική ταχύτητα $v(r)\hat{r}$ και έστω ότι από τη φωτόσφαιρα εκτοξεύονται φωτόνια με συχνότητα ν για παρατηρητή ακίνητο ως προς το κέντρο του άστρου. Λόγω φαινομένου Doppler, τα σωματίδια της ατμόσφαιρας “βλέπουν” τα προαναφερθέντα φωτόνια με συχνότητα $\nu' < \nu$ (redshift).

Αν θεωρήσουμε ένα πληθυσμό ιόντων που απορροφούν σε συχνότητα ν_0 , τότε ένα φωτόνιο συχνότητας $\nu > \nu_0$ που εκπέμπεται από το άστρο, θα απορροφηθεί από ιόντα που βρίσκονται σε ακτίνα r και έχουν ταχύτητα

$$v(r) = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} c \quad (12)$$

άρα το ιόντα θα αλληλεπιδράσουν με φωτόνια που έχουν συχνότητα από ν_0 έως $\nu_0 + \delta\nu$ όπου

$$\delta\nu = \frac{v_\infty}{c} \nu_0 \quad (13)$$

Φωτόνια συχνότητας κοντά στο ν_0 θα απορροφηθούν από την περιοχή του ανέμου που το πεδίο ταχυτήτων τείνει στο μηδέν, δηλαδή από τη “βάση” του ανέμου, ενώ φωτόνια συχνότητας κοντά στο $\nu_0 + \delta\nu$ θα απορροφηθούν από τα εξώτατα στρώματα του ανέμου, τα οποία απομακρύνται με την τερματική ταχύτητα v_∞ .

Μία εκτίμηση για το ρυθμό απώλειας μάζας \dot{M}_L που οφείλεται σε ορισμένη φασματική γραμμή, μπορεί να βρεθεί αν εξισώσουμε την ορμή της εκπεμπόμενης

από τη φωτόσφαιρα ακτινοβολίας ανά μονάδα χρόνου με συχνότητα από ν_0 έως $\nu_0 + \delta\nu$ ($\approx \frac{L_\nu \delta\nu}{c}$) με την ορμή ανά μονάδα χρόνου που “χάνει” το άστρο λόγω της απορρόφησης των προαναφερθέντων φωτονίων από τα σωματίδια του ανέμου ($\approx \dot{\mathcal{M}}_L v_\infty$), άρα

$$\frac{L_\nu \delta\nu}{c} \approx \dot{\mathcal{M}}_L v_\infty \quad (14)$$

Η τελευταία σχέση, με τη βοήθεια της (13), δίνει

$$\dot{\mathcal{M}}_L \approx \frac{L_\nu \nu_0}{c^2} \quad (15)$$

Θεωρώντας ότι το μέγιστο της ακτινοβολίας του άστρου παρουσιάζεται κοντά στη συχνότητα ν_0 , μπορούμε να γράψουμε $L_\nu \nu_0 \approx L$, άρα η (15) δίνει

$$\dot{\mathcal{M}}_L \approx \frac{L}{c^2} \quad (16)$$

Η τελευταία τιμή αποτελεί ένα μικρό κλάσμα ($\frac{v_\infty}{c}$) της αντίστοιχης τιμής στη σχέση (2), αφού η παρατηρούμενη τερματική ταχύτητα των ανέμων δεν ξεπερνά το 1% της ταχύτητας του φωτός. Άρα για να μπορέσει η \vec{g}_L να δημιουργήσει τον άνεμο, πρέπει να υπάρχουν πολλές φασματικές γραμμές κοντά στη συχνότητα που το άστρο εμπέμπει το μέγιστο της ακτινοβολίας του. Θεωρώντας ότι υπάρχουν N τέτοιες γραμμές, έχουμε ότι

$$\dot{\mathcal{M}} \approx N \frac{L}{c^2} \quad (17)$$

Κάθε γραμμή δημιουργείται από απορρόφηση φωτονίων συχνότητας από ν_0 έως $\nu_0 + \delta\nu$, δηλαδή φωτονίων που καταλαμβάνουν ένα κλάσμα $\frac{v_\infty}{c}$ του ολικού φάσματος. Άρα μπορούν να υπάρξουν το πολύ $\frac{c}{v_\infty}$ μη αλληλοεπικαλυπτόμενες γραμμές, δηλαδή $N < \frac{c}{v_\infty}$. Άρα

$$\dot{\mathcal{M}} v_\infty < \frac{L}{c} \quad (18)$$

που σημαίνει ότι υπάρχει ένα θεωρητικό άνω όριο για την ορμή ανά μονάδα χρόνου που “χάνει” το άστρο λόγω ανέμου. Οι παρατηρησιακές τιμές των $\dot{\mathcal{M}}$ και v_∞ από ανέμους άστρων φασματικών τύπων O και B είναι, εν γένει, τέτοιες που ικανοποιούν τη σχέση (18).

Ωστόσο, το γινόμενο $\dot{\mathcal{M}} v_\infty$ από ανέμους άστρων Wolf-Rayet ξεπερνά την τιμή $\frac{L}{c}$ από 10 έως 50 φορές. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως “πρόβλημα ορμής” (*momentum problem*) και οι προσπάθειες για την ερμηνεία του περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων, υποθέσεις περί ύπαρξης αλληλοεπικαλυπτόμενων φασματικών γραμμών ή μαγνητικών πεδίων.

Η σημαντικότερη πλάτυνση των φασματικών γραμμών που μελετάμε είναι η *θερμική πλάτυνση* λόγω φαινομένου Doppler, η οποία είναι ίση με

$$\Delta\nu_D = \frac{v_{th}}{c}\nu_0 \quad (19)$$

όπου v_{th} είναι η θερμική ταχύτητα των ιόντων, η οποία ισούται με

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_{ion}}} \quad (20)$$

όπου k_B η σταθερά του Boltzmann, T η θερμοκρασία της αστρικής ατμόσφαιρας και m_{ion} η μάζα του ιόντος.

Λόγω της θερμικής πλάτυνσης, η συνάρτηση $\phi(\nu)$ της σχέσης (11) που περιγράφει το προφίλ της φασματικής γραμμής είναι γκαουσιανή, και αποδεικνύεται τελικά ότι

$$\vec{\mathcal{G}}_L(r) = \hat{r} \frac{\kappa_L}{c} \Delta\nu_D F_\nu(\nu_0) \frac{1 - e^{-\tau_L}}{\tau_L} \quad (21)$$

όπου τ_L είναι το *οπτικό βάθος* της γραμμής, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$\tau_L(r) = \frac{\rho(r)\kappa_L v_{th}}{\frac{dv}{dr}} \quad (22)$$

Η τελευταία έκφραση για το οπτικό βάθος δεν είναι τετριμμένη και αποτελεί μία έκφραση της *προσέγγισης Sobolev (Sobolev approximation)* που οφείλεται στο Ρώσο αστροφυσικό V V Sobolev. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, σε μια διαστελλόμενη αστρική ατμόσφαιρα, το οπτικό βάθος οφείλεται μόνο σε απορροφητές, οι οποίοι βρίσκονται σε μια περιοχή στην οποία η ταχύτητα αλλάζει κατά v_{th} . Αντίθετα, σε μια στατική ατμόσφαιρα, το οπτικό βάθος είναι

$$\tau_L(r) = \int_r^\infty dr \rho \kappa_L \quad (23)$$

δηλαδή οφείλεται σε όλους τους απορροφητές της ατμόσφαιρας.

Με την προσέγγιση Sobolev, το οπτικό βάθος δεν υπολογίζεται από ολοκλήρωση σε όλη την έκταση της αστρικής ατμόσφαιρας, αλλά από τις τοπικές συνθήκες που επικρατούν σε περιοχή μήκους l_{Sob} , με

$$l_{Sob} \equiv \frac{v_{th}}{\frac{dv}{dr}} \quad (24)$$

όπου το μήκος l_{Sob} λέγεται *μήκος Sobolev (Sobolev length)* (σχήμα 2).

Η προσέγγιση $\tau_L = \rho \kappa_L l_{Sob}$ είναι αποδεκτή, εφόσον σε μήκος l_{Sob} τα φυσικά μεγέθη, όπως η πυκνότητα και η ταχύτητα της ατμόσφαιρας, παραμένουν πρακτικά αμετάβλητα, εφόσον δηλαδή

$$l_{Sob} \ll H \quad (25)$$

όπου H η χωρική κλίμακα μεταβολής της πυκνότητας ή της ταχύτητας, δηλαδή $H \equiv \frac{\rho}{|\frac{d\rho}{dr}|} \approx \frac{v}{\frac{dv}{dr}}$.

Προκειμένου να εκτιμήσουμε πότε ισχύει η προσέγγιση Sobolev, θεωρούμε $\frac{dv}{dr} \approx \frac{v}{H}$, άρα από τον ορισμό του l_{Sob} (σχέση 24), έχουμε

$$\frac{l_{Sob}}{H} = \frac{v_{th}}{v} \quad (26)$$

Δεδομένου όμως ότι η ταχύτητα των αστρικών ανέμων είναι υπερηχητική, έχουμε ότι $\frac{v_{th}}{v} \ll 1$, άρα η σχέση (25) ισχύει και συνεπώς η προσέγγιση Sobolev, η οποία λέγεται και *υπερηχητική προσέγγιση* (*supersonic approximation*) ή *προσέγγιση μεγάλων κλίσεων της ταχύτητας* (*large velocity gradient approximation*), είναι αποδεκτή.

Η προσέγγιση Sobolev επιτρέπει τον αναλυτικό υπολογισμό της $\vec{\mathcal{G}}_L$. Αυτό φαίνεται αν αρχικά γράψουμε την $\vec{\mathcal{G}}_L$ στη γενική περίπτωση, χωρίς να υποθέσουμε ότι είναι ακτινική

$$\vec{\mathcal{G}}_L(\vec{r}) = \frac{\kappa_L}{c} \int_0^\infty d\nu \vec{F}_\nu(\vec{r}; \nu) \phi(\nu) \quad (27)$$

όπου $\vec{F}_\nu(\vec{r}; \nu)$ ($\frac{erg}{Hz s cm^2}$) το άνυσμα της μονοχρωματικής ροής ακτινοβολίας, το οποίο ορίζεται έτσι, ώστε η βαθμωτή ποσότητα $\vec{F}_\nu \cdot d\vec{S}$ να δίνει τη συνολική ακτινοβολούμενη ισχύ ανά μονάδα συχνότητας, η οποία διέρχεται από τη στοιχειώδη επιφάνεια $d\vec{S}$, άρα

$$\vec{F}_\nu(\vec{r}; \nu) = \oint d\Omega \hat{n} I_\nu(\vec{r}; \hat{n}, \nu) \quad (28)$$

όπου I_ν η μονοχρωματική ειδική ένταση της ακτινοβολίας ($\frac{erg}{Hz s cm^2 sr}$) στη θέση \vec{r} , κατά τη διεύθυνση που ορίζεται από το μοναδιαίο άνυσμα \hat{n} και αποτελεί τον άξονα της στοιχειώδους στερεάς γωνίας $d\Omega$ (θεωρούμε ότι η ένταση I_ν δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, γι' αυτό δεν γράφουμε $I_\nu(\vec{r}, t; \hat{n}, \nu)$). Από τις σχέσεις (27) και (28) έχουμε

$$\vec{\mathcal{G}}_L(\vec{r}) = \frac{\kappa_L}{c} \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega \hat{n} I_\nu(\vec{r}; \hat{n}, \nu) \phi(\nu) \quad (29)$$

Λόγω φαινομένου Doppler και εισάγοντας την αδιάστατη μεταβλητή x με

$$x \equiv \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \quad (30)$$

έχουμε

$$\vec{\mathcal{G}}_L(\vec{r}) = \frac{\kappa_L}{c} \Delta\nu_D \int_{-\infty}^\infty dx \oint d\Omega \hat{n} \phi\left(x - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}(\vec{r})}{v_{th}}\right) I_\nu(\vec{r}; \hat{n}, \nu) \quad (31)$$

όπου στο κάτω όριο του ολοκληρώματος ως προς x γράψαμε $-\infty$ αντί για $-\frac{v_{th}}{c} \ll -1$ που είναι το ακριβές αποτέλεσμα, χωρίς σημαντικό σφάλμα, αφού το προφίλ ϕ της φασματικής γραμμής θα “κόψει” τις πολύ χαμηλές συχνότητες.

Προκειμένου να βρούμε μία έκφραση για την ένταση I_ν , γράφουμε την εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (32)$$

όπου S_ν η *συνάρτηση πηγής*, η οποία ορίζεται ως

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad (33)$$

όπου j_ν ($\frac{1}{\text{Hz s cm}^3 \text{sr}}$) ο συντελεστής εκπομπής, α_ν ($\frac{1}{\text{cm}}$) ο συντελεστής απορρόφησης και τ_ν το *οπτικό βάθος*, το οποίο ορίζεται ως

$$\tau_\nu(x, s) = \int_0^s ds' \kappa_L \rho(s') \phi \left(x - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}(\vec{r}')}{v_{th}} \right) \quad (34)$$

όπου s είναι το στοιχείο μήκους πάνω στη διεύθυνση διάδοσης \hat{n} της ακτινοβολίας, $\vec{r}' = \vec{r}_0 + s'\hat{n}$ και \vec{r}_0 η θέση της αστρικής επιφάνειας.

Η λύση της εξίσωσης διάδοσης ακτινοβολίας είναι

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} d\tau'_\nu S_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} \quad (35)$$

δηλαδή αποτελείται από δύο όρους. Ο Castor (1974, MNRAS, 169, 279) απέδειξε ότι ο λόγος της δύναμης ακτινοβολίας που οφείλεται στον όρο $\int_0^{\tau_\nu} d\tau'_\nu S_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)}$ προς τη δύναμη ακτινοβολίας που οφείλεται στον όρο $I_\nu(0)e^{-\tau_\nu}$, είναι της τάξης του λόγου $\frac{v_{th}}{v} \ll 1$, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{\mathcal{G}}_L(\vec{r}) = \frac{\kappa_L}{c} \Delta\nu_D \int_{-\infty}^{\infty} dx \oint d\Omega \hat{n} \phi \left(x - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}(\vec{r})}{v_{th}} \right) I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} \quad (36)$$

Θεωρώντας το πεδίο ακτινοβολίας ακτινικό ($\hat{n} = \hat{r}$) και $I_\nu(0) = F_\nu(\nu_0)$, έχουμε

$$\vec{\mathcal{G}}_L(r) = \hat{r} \frac{\kappa_L}{c} \Delta\nu_D F_\nu(\nu_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi \left(x - \frac{v(r)}{v_{th}} \right) e^{-\tau_\nu} \quad (37)$$

όπου το οπτικό βάθος τ_ν είναι

$$\tau_\nu(x, r) = \int_R^r dr' \kappa_L \rho(r') \phi \left(x - \frac{v(r')}{v_{th}} \right) \quad (38)$$

όπου R η ακτίνα του άστρου.

Προκειμένου να υπολογίσουμε το οπτικό βάθος από το τελευταίο ολοκλήρωμα, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής

$$x'(r') = x - \frac{v(r')}{v_{th}} \quad (39)$$

άρα

$$dx' = -\frac{1}{v_{th}} \frac{dv}{dr'} dr' \quad (40)$$

και συνεπώς η σχέση (38) γράφεται

$$\tau_\nu(x, r) = - \int_{x'(R)}^{x'(r)} dx' \phi(x') \frac{\rho(x') \kappa_L v_{th}}{\frac{dv}{dr'}} \quad (41)$$

Σύμφωνα με την προσέγγιση Sobolev, και θεωρώντας $x'(R) \rightarrow \infty$, έχουμε

$$\tau_\nu(x, r) \approx \tau_L(r) \int_{x - \frac{v(r)}{v_{th}}}^{\infty} dx' \phi(x') \quad (42)$$

όπου, όπως έχουμε προαναφέρει, $\tau_L = \rho \kappa_L l_{Sob}$.

Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης, η (37) δίνει

$$\vec{\mathcal{G}}_L(r) = \hat{r} \frac{\kappa_L}{c} \Delta \nu_D F_\nu(\nu_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi \left(x - \frac{v(r)}{v_{th}} \right) e^{-\tau_L(r) \int_{x - \frac{v(r)}{v_{th}}}^{\infty} dx' \phi(x')} \quad (43)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται αναλυτικά. Δεδομένου ότι $\int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi(x') = 1$, έχουμε ότι

$$\vec{\mathcal{G}}_L(r) = \hat{r} \frac{\kappa_L}{c} \Delta \nu_D F_\nu(\nu_0) \frac{1 - e^{-\tau_L}}{\tau_L} \quad (44)$$

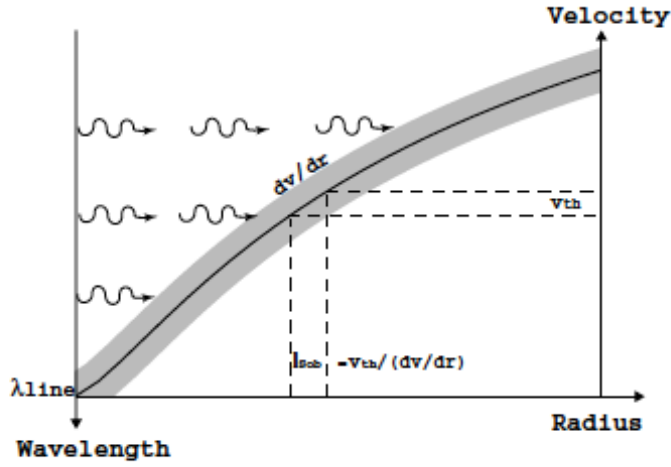
δηλαδή καταλήξαμε στη σχέση (21).

Θεωρώντας ότι το μέγιστο της ακτινοβολίας του άστρου παρουσιάζεται κοντά στη συχνότητα ν_0 , μπορούμε να γράψουμε $F_\nu(\nu_0) \nu_0 \approx F = \frac{L}{4\pi r^2}$, άρα η σχέση (21), με τη βοήθεια των (19) και (5), δίνει

$$\vec{\mathcal{G}}_L = \vec{g}_C \frac{\kappa_L}{\sigma_e} \frac{v_{th}}{c} \frac{1 - e^{-\tau_L}}{\tau_L} \quad (45)$$

Για $\tau_L \ll 1$, δηλαδή για αμυδρές γραμμές (*thin lines*), είναι $e^{-\tau_L} \approx 1 - \tau_L$, άρα $\frac{1 - e^{-\tau_L}}{\tau_L} \approx 1$, άρα η σχέση (45), δίνει

$$\vec{\mathcal{G}}_{L,thin} = \vec{g}_C \frac{\kappa_L}{\sigma_e} \frac{v_{th}}{c} \quad (46)$$



Σχήμα 2: Sobolev length (το σχήμα 2 έχει παρθεί από τον Owocki S. *Radiatively Driven Stellar Winds from Hot Stars*, Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, Nature Publishing Group 2001).

Για $\tau_L \gg 1$, δηλαδή για έντονες γραμμές (*thick lines*), είναι $e^{-\tau_L} \approx 0$, άρα $\frac{1-e^{-\tau_L}}{\tau_L} \approx \frac{1}{\tau_L}$, άρα η σχέση (45), με τη βοήθεια της (22), καθώς και της (56) που αποδεικνύουμε παρακάτω, η οποία δίνει το σταθερό ρυθμό \dot{M} ($\frac{gr}{s}$) με τον οποίο το άστρο χάνει μάζα υπό μορφή ανέμου, έχουμε

$$\vec{G}_{L,thick} = \hat{r} \cdot \frac{L}{\mathcal{M}c^2} v \frac{dv}{dr} \quad (47)$$

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση Sobolev για το οπτικό βάθος έχει ως αποτέλεσμα η $\vec{G}_{L,thick}$ να μην εξαρτάται από την αδιαφάνεια κ_L της γραμμής, αφού η τελευταία απλοποιείται. Επίσης, η δύναμη ανά μονάδα μάζας $\vec{G}_{L,thick}$ έχει την ιδιαιτερότητα να είναι ανάλογη της επιτάχυνσης $v \frac{dv}{dr}$. Άρα η $\vec{G}_{L,thick}$ αποτελεί ταυτόχρονα αίτιο και αποτέλεσμα της επιτάχυνσης. Αυτό οφείλεται στην προσέγγιση Sobolev, η οποία με τη σειρά της βασίζεται στο φαινόμενο Doppler. Στο σχήμα 2 φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η κλίση $\frac{dv}{dr}$, τόσο μεγαλύτερο είναι το εύρος της συχνότητας των φωτονίων που “φαίνονται” από τον άνεμο, λόγω redshift, σαν φωτόνια συχνότητας ν_0 , και άρα απορροφώνται, σχηματίζοντας τη φασματική γραμμή.

Προκειμένου να έχουμε ένα νέο οπτικό βάθος t το οποίο δεν εξαρτάται από την αδιαφάνεια κ_L της γραμμής, ορίζουμε

$$\tau_L = \frac{\kappa_L t}{\sigma_e} \quad (48)$$

άρα, η σχέση (22) δίνει

$$t = \frac{\rho \sigma_e v_{th}}{\frac{dv}{dr}} \quad (49)$$

Άρα, η σχέση (45) δίνει

$$\vec{g}_L = \vec{g}_C \frac{v_{th}}{c} \frac{1 - e^{-\frac{\kappa_L}{\sigma_e} t}}{t} \quad (50)$$

Η ολική επιτάχυνση \vec{g}_L του ανέμου που οφείλεται στο γραμμικό φάσμα, μπορεί να εκφραστεί ως ένα άθροισμα πάνω σε όλες τις αμυδρές και σε όλες τις έντονες γραμμές (*lines*), ως εξής

$$\vec{g}_L = \sum_{lines} \vec{G}_L \quad (51)$$

άρα

$$\vec{g}_L = \vec{g}_C M(t) \quad (52)$$

όπου

$$M(t) = \sum_{lines} \frac{v_{th}}{c} \frac{1 - e^{-\frac{\kappa_L}{\sigma_e} t}}{t} \quad (53)$$

Οι Castor, Abbott και Klein (1975, ApJ, 195, 157), παραμετροποίησαν τη συνάρτηση $M(t)$ ως εξής

$$M(t) = kt^{-\alpha} \quad (54)$$

όπου η παράμετρος α ικανοποιεί τη σχέση $0 \leq \alpha \leq 1$, αφού όπως φαίνεται από τις σχέσεις (46) και (47), ισχύει ότι $\alpha = 0$ αν όλες οι γραμμές είναι αμυδρές, ενώ $\alpha = 1$ αν όλες οι γραμμές είναι έντονες.

Οι Muller και Vink (2008, A&A 492, 493-509), προσπάθησαν να εκφράσουν την \vec{g}_L ως συνάρτηση μόνο της ακτινικής απόστασης r . Απαιτώντας η συνάρτηση αυτή να είναι ίση με μηδέν κοντά στη φωτόσφαιρα, δηλαδή για $r = r_0$ με $r_0 \approx R$, να είναι θετική για $r > r_0$ και να πέφτει σαν $\frac{1}{r^2}$ για $r \rightarrow \infty$ (και άρα να παρουσιάζει σε κάποια απόσταση $r > r_0$ ολικό μέγιστο), μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{g}_L = \hat{r} \frac{g_0}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^\gamma \quad (55)$$

όπου g_0 , r_0 , γ είναι σταθερές, οι οποίες υπολογίζονται με μεθόδους Monte Carlo.

Κεφάλαιο 2: Άνεμοι από Περιστρεφόμενα, Μαγνητισμένα, Θερμά Άστρα

Σύμβολα

Θεωρούμε άστρο μάζας M , ακτίνας R , λαμπρότητας L ($\frac{erg}{s}$), το οποίο χάνει μάζα υπό μορφή ανέμου με ρυθμό \dot{M} ($\frac{gr}{s}$).

Ο αστρικός άνεμος προσεγγίζεται ως ένα ρευστό πυκνότητας μάζας $\rho(\vec{r}, t)$, πίεσης $P(\vec{r}, t)$, ταχύτητας $\vec{v}(\vec{r}, t)$, πυκνότητας φορτίου $\delta(\vec{r}, t)$, πυκνότητας ρεύματος $\vec{J}(\vec{r}, t)$, το οποίο βρίσκεται εντός βαρυτικού πεδίου $\vec{g}(\vec{r})$, ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}(\vec{r}, t)$, μαγνητικού πεδίου $\vec{B}(\vec{r}, t)$, πεδίου ακτινοβολίας $\vec{g}_{rad}(\vec{r}) \equiv \vec{g}_C + \vec{g}_L$ όπου \vec{g}_C και \vec{g}_L τα πεδία ακτινοβολίας που σχετίζονται με το συνεχές και το γραμμικό φάσμα αντίστοιχα.

Εκφράζουμε το άνωσμα θέσης \vec{r} σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) , άρα $\vec{r} = r\hat{r}$.

Παραδοχές

- I. Το υλικό που εκτονώνεται προσεγγίζεται ως ένα ρευστό, με αμελητέο ιξώδες.
- II. Θεωρούμε *στάσιμη κατάσταση* (*steady state*), δηλαδή τα μεγέθη δεν εξαρτώνται (άμεσα) από το χρόνο $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$.
- III. Υπάρχει συμμετρία ως προς τον άξονα περιστροφής $z \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$.
- IV. Η μελέτη γίνεται μόνο στο ισημερινό επίπεδο $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.
- V. $\vec{v}_\theta = 0 \Rightarrow \vec{v} = v_r(r)\hat{r} + v_\phi(r)\hat{\phi}$.
- VI. $\vec{B}_\theta = 0 \Rightarrow \vec{B} = B_r(r)\hat{r} + B_\phi(r)\hat{\phi}$.
- VII. Στο ρευστό, εκτός από την κλίση της πίεσης, ασκούνται δυνάμεις από: το βαρυτικό πεδίο, το μαγνητικό πεδίο και την ακτινοβολία που εκπέμπει το άστρο.
- VIII. Το άστρο περιστρέφεται (σαν στερεό σώμα) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω .
- IX. Το άστρο θεωρείται σημειακή πηγή ακτινοβολίας⁷.
- X. Η θερμοκρασία θεωρείται σταθερή.

⁷Η παραδοχή περί σημειακής πηγής έχει ως αποτέλεσμα σε μικρές ακτινικές αποστάσεις, η υπολογιζόμενη δύναμη ακτινοβολίας, που οφείλεται στις γραμμές συντονισμού, να είναι μεγαλύτερη από την πραγματική, ενώ σε μεγάλες αποστάσεις να είναι μικρότερη από την πραγματική.

Εξίσωση υπ' αριθμόν 1: Εξίσωση Συνέχειας για τη μάζα⁸

Η εξίσωση συνέχειας για τη μάζα αποτυπώνει το φυσικό νόμο διατήρησης της μάζας⁹.

Παρακάτω, ολοκληρώνουμε την εξίσωση συνέχειας και συμβολίζουμε με \dot{M} τη σταθερά ολοκλήρωσης (ολοκλήρωμα) που προκύπτει. Η σταθερά αυτή μετριέται σε $\frac{gr}{s}$ και ταυτίζεται, όπως θα δείξουμε, με το ρυθμό εκροής μάζας, δηλαδή με τη μάζα που χάνει το άστρο, υπό μορφή ανέμου, ανά μονάδα χρόνου.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \stackrel{(V)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} (\rho v_r r^2) = 0 \stackrel{f}{\Rightarrow} \rho v_r r^2 = const \Rightarrow \dot{M} = const$$

όπου $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v_r \Rightarrow$

$$\rho = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v_r} \quad (56)$$

Επίσης, έχουμε

$$\frac{d}{dr} (\rho v_r r^2) = 0 \Rightarrow v_r r^2 \frac{d\rho}{dr} + \rho r^2 \frac{dv_r}{dr} + \rho v_r 2r = 0 \stackrel{\div \rho v_r r^2}{\Rightarrow}$$

⁸Εστω σταθερός όγκος V με συνοριακή επιφάνεια $S(V)$, μέσα σε ρευστό πυκνότητας μάζας $\rho(\vec{r}, t)$. Η μάζα M που περικλείεται στον όγκο V ισούται με $M(t) = \iiint_V \rho dV$ και είναι συνάρτηση του χρόνου, διότι καθώς αυτός περνά, ρευστό εισέρχεται και εξέρχεται διαμέσου της $S(V)$. Έστω ότι σε χρόνο dt η M αυξήθηκε κατά dM . Αυτό σημαίνει ότι στο χρόνο αυτό, ρευστό μάζας dM εισήλθε από την $S(V)$. Για να βρούμε τη μάζα που ρέει διαμέσου της $S(V)$, θεωρούμε την ανυσματική ποσότητα $\rho \vec{v}$, η οποία μετριέται σε $\frac{gr}{cm^2 s}$ και εκφράζει τη *ροή μάζας*, δηλαδή τη μάζα που ρέει, ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας, τοποθετημένης κάθετα στη \vec{v} . Έστω da το στοιχείο της επιφάνειας $S(V)$. Εφοδιάζουμε την da με ένα μοναδιαίο άνυσμα \hat{n} , κάθετο στην da , με φορά προς τα έξω. Έτσι, το στοιχείο της επιφάνειας είναι $d\vec{a} = \hat{n} da$. Η ποσότητα $\rho \vec{v} \cdot d\vec{a}$ μετριέται σε $\frac{gr}{s}$ και εκφράζει τη μάζα ανά μονάδα χρόνου που εξέρχεται, αν $(\vec{v} \cdot \hat{n}) < \frac{\pi}{2}$, ή εισέρχεται, αν $(\vec{v} \cdot \hat{n}) > \frac{\pi}{2}$, από την da . Άρα, η μάζα ανά μονάδα χρόνου που διαπερνά όλη την $S(V)$ είναι $\oiint_{S(V)} \rho \vec{v} \cdot d\vec{a}$. Δεδομένου ότι στον όγκο V δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες μάζας, ισχύει ότι: $\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \oiint_{S(V)} \rho \vec{v} \cdot d\vec{a}$. Η τελευταία σχέση λέει ότι αν μέσα σε χρόνο dt η μάζα που περικλείεται στον όγκο V αυξηθεί κατά π.χ. $5 gr$, αυτό σημαίνει ότι στο χρόνο αυτό, $5 gr$ ρευστού εισήλθαν στον όγκο V διαμέσου της επιφάνειας $S(V)$ (το " $-$ " στην εξίσωση υπεισέρχεται, διότι όταν εξέρχεται μάζα από την $S(V)$, άρα $\vec{v} \cdot d\vec{a} > 0$, η μάζα που περικλείεται στον όγκο V μειώνεται, άρα $dM < 0$). Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauss στο δεξί μέλος, έχουμε $\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iiint_V [-\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})] dV$, σχέση που ισχύει $\forall V$, άρα $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$. Η τελευταία εξίσωση καλείται *εξίσωση συνέχειας*.

⁹Αντίστοιχα, υπάρχει *εξίσωση συνέχειας για το ηλεκτρικό φορτίο*, η οποία αποτυπώνει το φυσικό νόμο διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου: $\frac{\partial \delta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. Η τελευταία εξίσωση όμως εμπεριέχεται στις εξισώσεις Maxwell, αφού προκύπτει από την ταυτότητα $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ Ampere's law

$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{4\pi} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ Gauss's law $\frac{\partial \delta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{v_r} \frac{dv_r}{dr} - \frac{2}{r} \quad (57)$$

όπου η τελευταία σχέση μπορεί να προκύψει και από παραγωγή της (56).

Εξισώσεις υπ' αριθμόν 2 και 3: Εξίσωση Ορμής

Η εξίσωση ορμής ή εξίσωση συνέχειας για την ορμή, αποτυπώνει το φυσικό νόμο διατήρησης της ορμής, που ισοδυναμεί με τον 2ο νόμο Newton.

Θα γράψουμε την εξίσωση ορμής στη μορφή του 2ου νόμου Newton (και όχι στην μορφή εξίσωσης συνέχειας για την ορμή)¹⁰.

Επειδή η ορμή είναι τρισδιάστατο άνυσμα, η εξίσωση ορμής είναι ανυσματική και ισοδυναμεί με τρεις εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα της ορμής. Λόγω των παραδοχών (V) και (VI), θα πάρουμε τελικά δύο εξισώσεις ορμής, μία στην \hat{r} -διεύθυνση και μία στη $\hat{\phi}$ -διεύθυνση.

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι απλώς να παραγάγουμε τις δύο προαναφερθέντες εξισώσεις, και όχι να τις ολοκληρώσουμε. Σε επόμενη ενότητα θα ολοκληρώσουμε την εξίσωση ορμής στη $\hat{\phi}$ -διεύθυνση, ενώ, όπως θα δούμε, η εξίσωση

¹⁰Εστω σταθερός όγκος V με συνοριακή επιφάνεια $S(V)$, μέσα σε ρευστό πυκνότητας μάζας $\rho(\vec{r}, t)$. Η $S(V)$ δέχεται από το περιβάλλον ρευστό δύναμη $-\oint_{S(V)} P d\vec{a} = -\iiint_V \vec{\nabla} P dV$ όπου $P(\vec{r}, t)$ η πίεση του ρευστού. Άρα, οι χωρικές μεταβολές της πίεσης δημιουργούν μια δύναμη ανά μονάδα όγκου ίση με $-\vec{\nabla} P$. Η επιτάχυνση ενός στοιχείου ρευστού μάζας δM και όγκου δV (αρκούντως μικρού σε σχέση με τον ολικό όγκο του ρευστού και αρκούντως μεγάλου σε σχέση με τον όγκο των μορίων του ρευστού), σύμφωνα με το 2ο νόμο Newton, είναι $\delta M \frac{d\vec{v}}{dt} = -\delta V \vec{\nabla} P + \delta V \Sigma \vec{f}$ όπου $\Sigma \vec{f}$ οι υπόλοιπες δυνάμεις ανά μονάδα όγκου που ασκούνται στο ρευστό (π.χ. αν το ρευστό βρίσκεται εντός βαρυτικού πεδίου \vec{g} και Η/Μ πεδίου \vec{E}, \vec{B} είναι $\Sigma \vec{f} = \rho \vec{g} + \delta \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$, όπου δ η χωρική πυκνότητα φορτίου και c η ταχύτητα του φωτός). Για $\Sigma \vec{f} = 0$ έχουμε $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P$, όπου η \vec{v} αναφέρεται σε συγκεκριμένο στοιχείο μάζας για το οποίο είναι $\vec{r} = \vec{r}(t)$ και $\vec{v} = \vec{v}(t)$ (περιγραφή Lagrange), άρα διαφέρει από το πεδίο ταχύτητας $\vec{v}(\vec{r}, t)$ (περιγραφή Euler). Για να συνδεθούν οι δύο περιγραφές γράφουμε $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}(t), t) \Rightarrow v_i = v_i(x_j(t), t) \Rightarrow \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$. Ομοίως δείχνουμε ότι για τυχόν ανυσματικό ή βαθμωτό πεδίο $\Phi(\vec{r}, t)$ ισχύει $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \Phi$, δηλαδή για συνκινούμενο με το στοιχείο μάζας δM παρατηρητή, ο οποίος τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση \vec{r} και μετακινείται σε χρόνο dt κατά $d\vec{r} = \vec{v} dt$, το μέγεθος Φ μεταβάλλεται πρώτον, διότι έχοντας άμεση χρονική εξάρτηση, είναι διαφορετικό, εν γένει, στη δεδομένη θέση \vec{r} τις χρονικές στιγμές t και $t + dt$ (αυτή η μεταβολή εκφράζεται μέσω του $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$), και δεύτερον, διότι έχοντας χωρική εξάρτηση, είναι διαφορετικό, εν γένει, τη δεδομένη χρονική στιγμή t στις θέσεις \vec{r} και $\vec{r} + d\vec{r}$ (αυτή η μεταβολή εκφράζεται μέσω του $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \Phi$). Άρα $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P$. Η τελευταία εξίσωση καλείται *εξίσωση Euler* και ισχύει για ιδανικά ρευστά, δηλαδή δε λαμβάνει υπόψη ιξώδες και θερμική αγωγιμότητα.

ορμής στην \hat{r} -διεύθυνση δεν μπορεί να ολοκληρωθεί αναλυτικά, άρα θα πρέπει να λυθεί αριθμητικά.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{g} + \vec{g}_C + \vec{g}_L + \frac{1}{\rho c}\vec{J} \times \vec{B} \quad (58)$$

Μελετούμε κάθε όρο της παραπάνω εξίσωσης ξεχωριστά:

1ος όρος

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \stackrel{(II)}{=} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

Ισχύει όμως η ταυτότητα

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

η οποία για $\vec{A} = \vec{B}$ δίνει

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\frac{A^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{A}$$

Άρα

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τους όρους $\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)$ και $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) &\stackrel{(V)}{=} \hat{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{v_r^2}{2} + \frac{v_\phi^2}{2} \right) = \hat{r} \left(v_r \frac{dv_r}{dr} + v_\phi \frac{dv_\phi}{dr} \right). \\ (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} &\stackrel{(V)}{=} \left[\vec{\nabla} \times (v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi}) \right] \times (v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi}) \stackrel{\vec{\nabla} \times v_r(r)\hat{r}=0}{=} \\ &= (\vec{\nabla} \times v_\phi \hat{\phi}) \times v_r \hat{r} + (\vec{\nabla} \times v_r \hat{r}) \times v_\phi \hat{\phi} = \\ &= -\hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) \times v_r \hat{r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) \times v_\phi \hat{\phi} = \\ &= \hat{\phi} \frac{v_r}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) - \hat{r} \frac{v_\phi}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) = \\ &= \hat{\phi} \frac{v_r}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) - \hat{r} \frac{v_\phi}{r} \left(v_\phi + r \frac{dv_\phi}{dr} \right) = \end{aligned}$$

$$= \hat{r} \left(-\frac{v_\phi^2}{r} - v_\phi \frac{dv_\phi}{dr} \right) + \hat{\phi} \frac{v_r}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} &= \hat{r} \left(v_r \frac{dv_r}{dr} + v_\phi \frac{dv_\phi}{dr} - \frac{v_\phi^2}{r} - v_\phi \frac{dv_\phi}{dr} \right) + \hat{\phi} \frac{v_r}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) \Rightarrow \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \hat{r} \left(v_r \frac{dv_r}{dr} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) + \hat{\phi} \frac{v_r}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) \end{aligned} \quad (59)$$

2ος όρος

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \stackrel{(III,IV)}{=} -\hat{r} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

Έστω c_s η ταχύτητα του ήχου για ισόθερμο ρευστό. Είναι

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{P}{\rho}} \Rightarrow P = c_s^2 \rho \Rightarrow \frac{dP}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}$$

Άρα

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = -\hat{r} c_s^2 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}$$

Η τελευταία σχέση, με τη βοήθεια της (57) δίνει

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \hat{r} \left(\frac{c_s^2}{v_r} \frac{dv_r}{dr} + \frac{2c_s^2}{r} \right) \quad (60)$$

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων ισχύει $P = \rho k_B T$, όπου k_B η σταθερά του Boltzmann και T η θερμοκρασία. Αν n η αριθμητική πυκνότητα, ισχύει ότι $\rho = n \bar{m}$ όπου \bar{m} η μέση μάζα κάθε σωματιδίου του πλάσματος. Θεωρώντας $\bar{m} = \frac{m_p}{2}$ όπου m_p η μάζα του πρωτονίου, έχουμε ότι $\frac{P}{\rho} = \frac{2k_B T}{m_p}$, και συνεπώς

$$c_s = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_p}} \quad (61)$$

3ος όρος

$$\vec{g} = -\hat{r} \frac{GM}{r^2} \quad (62)$$

όπου $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{gr \cdot s^2}$ η βαρυτική σταθερά.

4ος όρος

Από τις σχέσεις (9) και (10) συνεπάγεται

$$\vec{g}_C = \hat{r}\Gamma \frac{GM}{r^2} \quad (63)$$

5ος όρος

Την \vec{g}_L μπορούμε να την εκφράσουμε με δύο τρόπους: Πρώτον, ως συνάρτηση της επιτάχυνσης $v_r \frac{dv_r}{dr}$ και δεύτερον, ως συνάρτηση μόνο της ακτινικής απόστασης r .

1. Ως συνάρτηση της επιτάχυνσης: Από τις σχέσεις (52) και (54) συνεπάγεται

$$\vec{g}_L = \vec{g}_C kt^{-a} \quad (64)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5), (7), (49), (56), η \vec{g}_L γράφεται

$$\vec{g}_L = \hat{r}C \frac{1}{r^2} \left(r^2 v_r \frac{dv_r}{dr} \right)^a \quad (65)$$

όπου η σταθερά C είναι:

$$C \equiv k(\Gamma GM)^{1-a} \left(\frac{L}{\dot{M}v_{th}c} \right)^a \quad (66)$$

2. Ως συνάρτηση της απόστασης: Η σχέση (55) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί

$$\vec{g}_L = \hat{r} \frac{g_0}{r^{2+\gamma}} (r - r_0)^\gamma \quad (67)$$

6ος όρος

Η δύναμη \vec{F}_{EB} που ασκείται σε σημειακό φορτίο q , το οποίο κινείται με ταχύτητα \vec{v} εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (\vec{E}, \vec{B}) είναι $\vec{F}_{EB} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$. Εάν έχουμε κατανομή φορτίου χωρικής πυκνότητας δ , τότε η αντίστοιχη δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι $\vec{f}_{EB} = \delta \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$, όπου \vec{J} η χωρική πυκνότητα ρεύματος, η οποία σύμφωνα με το νόμο του Ohm είναι $\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$, όπου σ η αγωγιμότητα του πλάσματος. Στην ιδεατή, μη σχετικιστική Μαγνητουδροδυναμική (MHD), θεωρούμε $\sigma \rightarrow \infty$ ¹¹, άρα, αφού $J < \infty$, ο νόμος του Ohm γράφεται $\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}$. Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι $\frac{E}{B} \approx \frac{v}{c}$,

¹¹ Από τους νόμους Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$ και Ohm $\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$ απαλοίφοντας

άρα για μη σχετικιστικές ταχύτητες ($v \ll c$) $\Rightarrow E \ll B$.

Ο λόγος της ηλεκτρικής δύναμης $f_E = \delta \vec{E}$ προς τη μαγνητική δύναμη $f_B = \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$ είναι $\frac{f_E}{f_B} \approx \frac{\delta E}{JB/c} = c \frac{E}{B} \frac{\delta}{J}$. Όμως, από τους νόμους Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\delta$ και Ampère ¹² $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$ έχουμε ότι $\delta \approx \frac{E}{4\pi L}$ και $J \approx \frac{cB}{4\pi L}$ αντίστοιχα, όπου L το χαρακτηριστικό μήκος μεταβολής των πεδίων. Άρα $\frac{f_E}{f_B} \approx c \frac{E}{B} \frac{\frac{E}{4\pi L}}{\frac{cB}{4\pi L}} = \left(\frac{E}{B}\right)^2 \approx \left(\frac{v}{c}\right)^2$, άρα για $v \ll c \Rightarrow f_E \ll f_B$. Γι' αυτό, στην ιδεατή MHD, δε λαμβάνουμε υπόψη

το \vec{J} , λύνοντας ως προς \vec{E} και αντικαθιστώντας στο νόμο Faraday $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, έχουμε $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{c^2}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$. Θεωρώντας $\sigma = \text{σταθ}$, θέτοντας $\eta \equiv \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ (συντελεστής διάχυσης) και λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$ και το νόμο $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

Η τελευταία εξίσωση καλείται *εξίσωση δυναμό*, και σύμφωνα με αυτήν, η χρονική μεταβολή του \vec{B} σε δεδομένο σημείο του χώρου $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ οφείλεται στους εξής δύο λόγους:

1. Στη μεταφορά του \vec{B} λόγω κίνησης του πλάσματος $\left(\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})\right)$.
2. Στη διάχυση του \vec{B} λόγω του ότι $\sigma < \infty$ $\left(\eta \nabla^2 \vec{B}\right)$.

Για $\sigma \rightarrow \infty \Leftrightarrow \eta \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$, που σημαίνει ότι το πλάσμα, καθώς κινείται, συμπαρασέρνει το \vec{B} : στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το \vec{B} είναι *παγωμένο εντός* του πλάσματος. Εν γένει:

- Αν κυριαρχεί η μεταφορά $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})\right)$, τότε ο χαρακτηριστικός της χρόνος, έστω t_{tr} , είναι $\frac{B}{t_{tr}} = \frac{vB}{L} \Rightarrow t_{tr} = \frac{L}{v}$, όπου L το χαρακτηριστικό μήκος χωρικής μεταβολής του \vec{B} .
- Αν κυριαρχεί η διάχυση $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 \vec{B}\right)$ τότε ο χαρακτηριστικός της χρόνος, έστω t_d , είναι $\frac{B}{t_d} = \eta \frac{B}{L^2} \Rightarrow t_d = \frac{L^2}{\eta}$.

Ορίζοντας το *μαγνητικό αριθμό Reynolds* $R_m \equiv \frac{t_d}{t_{tr}} \Rightarrow R_m = \frac{Lv}{\eta}$, έχουμε ότι:

- Αν $R_m \gg 1 \Leftrightarrow t_d \gg t_{tr}$ κυριαρχεί η μεταφορά.
- Αν $R_m \ll 1 \Leftrightarrow t_d \ll t_{tr}$ κυριαρχεί η διάχυση.

¹²Ο νόμος Ampère, με την προσθήκη του ρεύματος μετατόπισης από τον Maxwell, γράφεται $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{J} + \vec{J}_D)$, όπου $\vec{J}_D = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ το ρεύμα μετατόπισης. Ο λόγος του ρεύματος μετατόπισης \vec{J}_D προς το ολικό ρεύμα $\vec{J} + \vec{J}_D = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B}$ είναι $\frac{J_D}{J+J_D} \approx \frac{\frac{cE}{4\pi L}}{\frac{cE}{4\pi L} + \frac{cB}{4\pi L}} = \frac{1}{c} \frac{E}{B} \frac{L}{T} \approx \frac{E}{B} \frac{v}{c}$ διότι $v \approx \frac{L}{T}$, όπου L και T το χαρακτηριστικό μήκος και ο χαρακτηριστικός χρόνος, αντίστοιχα, μεταβολής των πεδίων. Άρα $\frac{J_D}{J+J_D} \approx \left(\frac{v}{c}\right)^2$, και συνεπώς για $v \ll c \Rightarrow J_D \ll J + J_D$. Γι' αυτό, στην ιδεατή MHD, αγνοούμε το ρεύμα μετατόπισης, και συνεπώς ο νόμος Ampère γράφεται $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$.

στη διατήρηση της ορμής, τη δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο.

Με βάση τα παραπάνω, ο όρος στη διατήρηση της ορμής που αναφέρεται στο Η/Μ πεδίο είναι $\frac{1}{\rho c} \vec{J} \times \vec{B}$, δηλαδή η δύναμη ανά μονάδα μάζας από το μαγνητικό πεδίο.

Από το νόμο Ampère όμως, έχουμε ότι $\vec{J} = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B}$, άρα

$$\frac{1}{\rho c} \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi\rho} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \times \vec{B} \quad (68)$$

Όταν δουλεύαμε τον 2ο όρο, είχαμε δείξει ότι

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \times \vec{v} = \hat{r} \left(-\frac{v_\phi^2}{r} - v_\phi \frac{dv_\phi}{dr} \right) + \hat{\phi} \frac{v_r}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την παραδοχή (VI), έχουμε κατ' αντιστοιχία

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \times \vec{B} = \hat{r} \left(-\frac{B_\phi^2}{r} - B_\phi \frac{dB_\phi}{dr} \right) + \hat{\phi} \frac{B_r}{r} \frac{d}{dr} (rB_\phi)$$

Άρα

$$\frac{1}{4\pi\rho} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \times \vec{B} = \hat{r} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{B_\phi^2}{4\pi r} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi^2}{8\pi} \right) \right] + \hat{\phi} \frac{B_r}{4\pi\rho r} \frac{d}{dr} (rB_\phi) \quad (69)$$

Βάσει όλων των παραπάνω...

...και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (59), (60), (62), (63), (65), (68) και (69), έχουμε ότι:

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής (58) στην \hat{r} -διεύθυνση είναι η εξής:

$$\left(1 - \frac{c_s^2}{v_r^2} \right) v_r v_r' = \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM(1-\Gamma)}{r^2} + \frac{C}{r^2} (r^2 v_r v_r')^a + \frac{v_\phi^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{B_\phi^2}{4\pi r} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi^2}{8\pi} \right) \quad (70)$$

όπου ο τόνος “ ’ ” σημαίνει παραγώγιση ως προς r .

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής (58) στην $\hat{\phi}$ -διεύθυνση είναι η εξής:

$$\frac{d}{dr} (rv_\phi) = \frac{B_r}{4\pi\rho v_r} \frac{d}{dr} (rB_\phi) \quad (71)$$

Οι όροι στην εξίσωση ορμής στην \hat{r} -διεύθυνση έχουν την εξής φυσική σημασία:

Δυνάμεις (ανά μονάδα μάζας) με κατεύθυνση $+\hat{r}$

- $\frac{2c_s^2}{r} + \frac{c_s^2}{v_r} \frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \text{δύναμη λόγω χωρικής μεταβολής της πίεσης.}$
- $\frac{C}{r^2} (r^2 v_r v_r')^a = \text{δύναμη ακτινοβολίας που οφείλεται στο γραμμικό φάσμα.}$
- $\frac{v_\phi^2}{r} = \text{φυγόκεντρος δύναμη.}$
- $-\frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi^2}{8\pi} \right) = \text{δύναμη λόγω χωρικής μεταβολής της μαγνητικής πίεσης.}$

Δυνάμεις (ανά μονάδα μάζας) με κατεύθυνση $-\hat{r}$

- $-\frac{GM(1-\Gamma)}{r^2} = \text{βαρυτική δύναμη, ελαττωμένη κατά τη δύναμη ακτινοβολίας που οφείλεται στο συνεχές φάσμα.}$
- $-\frac{1}{\rho} \frac{B_\phi^2}{4\pi r} \propto \text{μαγνητική τάση.}$

Εξίσωση υπ' αριθμόν 4: η εξίσωση Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Η εξίσωση $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ αποτελεί μία εκ των τεσσάρων εξισώσεων Maxwell, καλείται συνήθως νόμος Gauss στο μαγνητισμό και αποτυπώνει το φυσικό νόμο ανυπαρξίας μαγνητικών μονοπόλων.

Παρακάτω, ολοκληρώνουμε την εξίσωση $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ και συμβολίζουμε με \mathcal{F}_B τη σταθερά ολοκλήρωσης (ολοκλήρωμα) που προκύπτει. Η σταθερά αυτή εκφράζει, όπως θα δούμε, τη μαγνητική ροή.

Σημειώνουμε, ότι η ολοκλήρωση της εξίσωσης $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ θα βοηθήσει τόσο στην ολοκλήρωση της εξίσωσης ορμής στη $\hat{\phi}$ -διεύθυνση, όσο και στην ολοκλήρωση του νόμου Faraday.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \stackrel{(VI)}{=} \frac{d}{dr} (r^2 B_r) = 0 \Rightarrow r^2 B_r = \mathcal{F}_B$$

όπου \mathcal{F}_B σταθερά που εκφράζει τη μαγνητική ροή¹³. Άρα

$$B_r = \frac{\mathcal{F}_B}{r^2} \quad (72)$$

¹³Η μαγνητική ροή F_B που διέρχεται από επιφάνεια S , με στοιχείο επιφανείας $d\vec{a}$ ορίζεται ως εξής: $F_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$, άρα η μαγνητική ροή που διέρχεται από σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r είναι $F_B = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oiint B_r \hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \oiint \frac{\mathcal{F}_B}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi \mathcal{F}_B$.

Ολοκλήρωση εξίσωσης ορμής στη $\hat{\phi}$ -διεύθυνση

Παρακάτω, ολοκληρώνουμε την εξίσωση ορμής στη $\hat{\phi}$ -διεύθυνση, και συμβολίζουμε με \mathcal{L} τη σταθερά ολοκλήρωσης (ολοκλήρωμα) που προκύπτει. Η σταθερά αυτή ταυτίζεται, όπως θα δούμε, με την *ολική στροφορμή* ανά μονάδα μάζας.

Από τις σχέσεις (56) και (72) συνεπάγεται ότι

$$\frac{4\pi\rho v_r}{B_r} = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{\mathcal{F}_B}$$

Όμως $\dot{\mathcal{M}} = const$ και $\mathcal{F}_B = const$. Άρα

$$\frac{4\pi\rho v_r}{B_r} = \Psi_A \quad (73)$$

όπου $\Psi_A \equiv \frac{\dot{\mathcal{M}}}{\mathcal{F}_B} = const$, δηλαδή Ψ_A είναι μία σταθερά που εκφράζει το πηλίκο του (σταθερού) *ρυθμού μάζας* $\dot{\mathcal{M}}$ προς τη (σταθερή) *μαγνητική ροή* \mathcal{F}_B .

Η σχέση (71), με τη βοήθεια της (73), γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rv_\phi) &= \frac{d}{dr}\left(\frac{rB_\phi}{\Psi_A}\right) \stackrel{f}{\Rightarrow} \\ rv_\phi - \frac{rB_\phi}{\Psi_A} &= \mathcal{L} \end{aligned} \quad (74)$$

όπου \mathcal{L} σταθερά που ισούται με την *ολική στροφορμή* ανά μονάδα μάζας. Ειδικότερα, ο όρος rv_ϕ εκφράζει τη *στροφορμή του πλάσματος* (ανά μονάδα μάζας), ενώ ο όρος $-\frac{rB_\phi}{\Psi_A}$ εκφράζει τη *στροφορμή του μαγνητικού πεδίου* (ανά μονάδα μάζας).

Εξίσωση υπ' αριθμόν 5: η εξίσωση Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Η εξίσωση $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ αποτελεί μία εκ των τεσσάρων εξισώσεων Maxwell, καλείται *νόμος Faraday* και αποτυπώνει το φυσικό νόμο σύμφωνα με τον οποίο η (άμεση) *χρονική μεταβολή ενός μαγνητικού πεδίου προκαλεί τη δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου*.

Παρακάτω, ολοκληρώνουμε την εξίσωση $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ και συμβολίζουμε με Ω τη σταθερά ολοκλήρωσης (ολοκλήρωμα) που προκύπτει. Η σταθερά αυτή ταυτίζεται με τη *γωνιακή ταχύτητα* του άστρου, την οποία υποθέτουμε σταθερή (παράδοχη VIII).

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \stackrel{(II)}{\Rightarrow} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Όμως, όπως έχουμε προαναφέρει ¹⁴, ο νόμος του *Ohm* για $\sigma \rightarrow \infty$ γράφεται

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B} \stackrel{(V;VI)}{\Rightarrow} \vec{E} = \frac{1}{c}(v_\phi B_r - v_r B_\phi)\hat{\theta}$$

Άρα ο νόμος *Faraday*, με τη βοήθεια του νόμου *Ohm*, γράφεται

$$\vec{\nabla} \times (v_\phi B_r - v_r B_\phi)\hat{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}[r(v_\phi B_r - v_r B_\phi)] = 0 \xrightarrow{f} r(v_\phi B_r - v_r B_\phi) = \tilde{\Omega}$$

όπου $\tilde{\Omega}$ μία σταθερά. Η τελευταία σχέση, για $r = R$, όπου R η ακτίνα του άστρου, θεωρώντας ότι $v_r(r = R) \approx 0$ και $v_\phi(r = R) = \Omega R$ με $\Omega = const$ (παραδοχή VIII), και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (72) για $r = R$, γράφεται $\Omega \mathcal{F}_B = \tilde{\Omega}$, άρα

$$r(v_\phi B_r - v_r B_\phi) = \Omega \mathcal{F}_B$$

Όμως, από τη σχέση (72) συνεπάγεται $\mathcal{F}_B = r^2 B_r$. Άρα

$$v_\phi B_r - v_r B_\phi = \Omega r B_r \Rightarrow v_\phi = v_r \frac{B_\phi}{B_r} + \Omega r$$

Από τη σχέση (73) συνεπάγεται $\frac{v_r}{B_r} = \frac{\Psi_A}{4\pi\rho}$, άρα

$$v_\phi = \frac{\Psi_A^2}{4\pi\rho} \frac{B_\phi}{\Psi_A} + \Omega r \quad (75)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (74) και (75) μπορεί να λυθεί ως προς v_ϕ και B_ϕ , και συνεπώς να βρούμε τις σχέσεις που δίνουν τα v_ϕ και B_ϕ συναρτήσει της συνάρτησης ρ (καθώς και του r , και των σταθερών \mathcal{L} και Ω). Ωστόσο, είναι χρήσιμο στο σημείο αυτό, να εισάγουμε τον αριθμό Alfβέν M_r , ώστε τελικά τα v_ϕ και B_ϕ να προκύψουν συναρτήσει του M_r (αντί της ρ).

Αριθμός Alfβέν

Η συνιστώσα της ταχύτητας Alfβέν στην \hat{r} -διεύθυνση, έστω $v_{Ar}(r)$, ορίζεται:

$$v_{Ar}(r) \equiv \frac{B_r}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

Ο αντίστοιχος αριθμός Alfβέν, έστω $M_r(r)$ ορίζεται ως το πηλίκο της ακτινικής ταχύτητας του πλάσματος, προς την ακτινική ταχύτητα Alfβέν:

$$M_r(r) \equiv \frac{v_r(r)}{v_{Ar}(r)}$$

¹⁴βλέπε μελέτη βου όρου, σελ. 25, 26.

Ισοδύναμα, το τετράγωνο του αριθμού Alfνέν, μπορεί να οριστεί ως το πηλίκο της ακτινικής κινητικής ενέργειας υποβάθρου, προς την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου:

$$M_r^2 \equiv \frac{\frac{1}{2}\rho v_r^2}{\frac{B_r^2}{8\pi}}$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$M_r = \frac{v_r \sqrt{4\pi\rho}}{B_r} \Rightarrow M_r^2 = 4\pi\rho \frac{v_r^2}{B_r^2}$$

Επίσης, από τη σχέση (73) συνεπάγεται $\Psi_A^2 = (4\pi\rho)^2 \frac{v_r^2}{B_r^2}$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις, έχουμε

$$M_r^2 = \frac{\Psi_A^2}{4\pi\rho} \quad (76)$$

Οι συνιστώσες v_ϕ και B_ϕ συναρτήσκει του M_r

Η σχέση (75), με τη βοήθεια της σχέσης (76) γράφεται

$$v_\phi = M_r^2 \frac{B_\phi}{\Psi_A} + \Omega r \quad (77)$$

Λύνουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων (74) και (77) ως προς v_ϕ και B_ϕ .

Αντικαθιστώντας το $\frac{B_\phi}{\Psi_A}$ από την (74) $\left(\frac{B_\phi}{\Psi_A} = v_\phi - \frac{\mathcal{L}}{r}\right)$, στην (77) έχουμε

$$v_\phi = \frac{\mathcal{L}}{r} \frac{\Omega r^2 - M_r^2}{1 - M_r^2} \quad (78)$$

Αντικαθιστώντας το v_ϕ από την τελευταία σχέση, στην (74) $\left(\frac{B_\phi}{\Psi_A} = v_\phi - \frac{\mathcal{L}}{r}\right)$, έχουμε

$$B_\phi = -\Psi_A \frac{\mathcal{L}}{r} \frac{1 - \frac{\Omega r^2}{\mathcal{L}}}{1 - M_r^2} \quad (79)$$

Για $r = r_A$, όπου r_A η ακτίνα Alfνέν, δηλαδή η απόσταση στην οποία $v_r = v_{Ar} \Leftrightarrow M_r = 1$, οι παρονομαστές των σχέσεων (78) και (79) μηδενίζονται. Προκειμένου οι συνιστώσες v_ϕ και B_ϕ να είναι πεπερασμένες για $r = r_A$, πρέπει κατ' ανάγκη για $r = r_A$ να μηδενίζονται και οι αριθμητές των σχέσεων (78) και (79). Ο μηδενισμός

του αριθμητή της σχέσης (78) για $r = r_A$, όσο και ο μηδενισμός του αριθμητή της σχέσης (79) για $r = r_A$, συνεπάγονται ότι

$$\mathcal{L} = \Omega r_A^2 \quad (80)$$

Βάσει της τελευταίας σχέσης, οι (78) και (79) γράφονται

$$v_\phi = \Omega r_A \frac{r_A}{r} \frac{\left(\frac{r}{r_A}\right)^2 - M_r^2}{1 - M_r^2} \quad (81)$$

$$B_\phi = -\Psi_A \Omega r_A \frac{r_A}{r} \frac{1 - \left(\frac{r_A}{r}\right)^2}{1 - M_r^2} \quad (82)$$

Εισαγωγή αδιάστατων μεταβλητών

Η σχέση (76), με τη βοήθεια της (56), γράφεται

$$M_r^2 = \frac{\Psi_A^2}{\mathcal{M}} v_r r^2$$

Η τελευταία σχέση, για $r = r_A$, δίνει $1 = \frac{\Psi_A^2}{\mathcal{M}} v_A r_A^2$,

όπου $v_A \equiv v_r(r = r_A) \equiv v_{Ar}(r = r_A)$.

Άρα $\frac{\Psi_A^2}{\mathcal{M}} = \frac{1}{v_A r_A^2}$ και συνεπώς

$$M_r^2 = \frac{v_r}{v_A} \left(\frac{r}{r_A}\right)^2$$

Εισάγοντας τις αδιάστατες μεταβλητές

$$x \equiv \frac{r}{r_A} \quad \text{και} \quad u \equiv \frac{v_r}{v_A}$$

έχουμε

$$M_r^2 = ux^2 \quad (83)$$

Προκειμένου να αδιαστατικοποιήσουμε την εξίσωση ορμής στην \hat{r} -διεύθυνση (70), θα εκφράσουμε τα μεγέθη ρ , v_ϕ και B_ϕ , συναρτήσει των αδιάστατων μεταβλητών x και u .

Από τις σχέσεις (76), (81) και (82), λαμβάνοντας υπόψη την (83) και τους ορισμούς των αδιάστατων μεταβλητών x και u , έχουμε αντίστοιχα

$$\rho = \frac{\Psi_A^2}{4\pi} \frac{1}{ux^2} \quad (84)$$

$$v_\phi = \Omega r_A \frac{x(1-u)}{1-ux^2} \quad (85)$$

$$B_\phi = -\Psi_A \Omega r_A \frac{1-x^2}{x(1-ux^2)} \quad (86)$$

Αδιάστατη εξίσωση ορμής στην \hat{r} -διεύθυνση

Η εξίσωση ορμής στην \hat{r} -διεύθυνση (70), εκπεφρασμένη στις αδιάστατες μεταβλητές x και u , δεδομένου ότι $\frac{d}{dr} = \frac{1}{r_A} \frac{d}{dx}$, και απλοποιώντας τον παράγοντα $\frac{v_A^2}{r_A}$, ο οποίος είναι κοινός και στα δύο μέλη, γράφεται

$$\left(1 - \frac{\check{B}}{u^2}\right) uu' = \frac{2\check{B}}{x} - \frac{\check{A}}{x^2} + \frac{\check{C}}{x^2} (x^2 uu')^a + \mathcal{W}(x, u) \quad (87)$$

όπου ο τόνος “'” σημαίνει παραγώγιση ως προς x , και όπου \check{A} , \check{B} , \check{C} σταθερές, για τις οποίες έχουμε

$$\check{A} \equiv \frac{GM(1-\Gamma)}{r_A v_A^2} \quad (88)$$

Φυσική Σημασία σταθεράς \check{A} : Η ταχύτητα διαφυγής¹⁵ v_{esc} για $r = r_A$ είναι

$$v_{esc, r_A} \equiv \sqrt{\frac{2GM(1-\Gamma)}{r_A}} \quad (89)$$

άρα

$$\check{A} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{v_{esc, r_A}}{v_A} \right)^2 \quad (90)$$

Για τη σταθερά \check{B} ισχύει ότι

$$\check{B} \equiv \left(\frac{c_s}{v_A} \right)^2 \quad (91)$$

¹⁵Στην προκειμένη περίπτωση, ορίζουμε ως ταχύτητα διαφυγής v_{esc} σε απόσταση r , την ελάχιστη ταχύτητα που απαιτείται να έχει το σώμα στην απόσταση r , ώστε να δραπετεύσει από το πεδίο βαρύτητας του άστρου, δεδομένου ότι στο σώμα ασκείται μόνο η βαρυτική δύναμη, *ελαττωμένη όμως κατά τη δύναμη ακτινοβολίας που σχετίζεται με το συνεχές φάσμα.*

Για τη σταθερά \check{C} ισχύει ότι

$$\check{C} \equiv \frac{C}{(r_A v_A^2)^{1-a}} \quad (92)$$

άρα λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (66) έχουμε

$$\check{C} \equiv k \left(\frac{\Gamma GM}{r_A v_A^2} \right)^{1-a} \left(\frac{L}{\dot{M} v_{th} c} \right)^a \quad (93)$$

Η συνάρτηση $\mathcal{W}(x, u)$ αποτελεί το άθροισμα της φυγόκεντρης και της μαγνητικής δύναμης, άρα

$$\mathcal{W} \equiv \check{D} \left\{ \frac{x(1-u)^2}{(1-ux^2)^2} - \frac{u(1-x^2)^2}{x(1-ux^2)^2} - \frac{1}{2} ux^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{(1-x^2)}{x(1-ux^2)} \right]^2 \right\} \quad (94)$$

όπου \check{D} σταθερά, η οποία ορίζεται ως εξής

$$\check{D} \equiv \left(\frac{\Omega r_A}{v_A} \right)^2 \quad (95)$$

Φυσική Σημασία σταθεράς \check{D} : Θεωρώντας ότι το άστρο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω (δηλαδή σαν στερεό σώμα) μέχρι την ακτίνα Alfvén, η περιστροφική του ταχύτητα v_{rot} για $r = r_A$ είναι $v_{rot,A} = \Omega r_A$. Άρα

$$\check{D} \equiv \left(\frac{v_{rot,A}}{v_A} \right)^2 \quad (96)$$

Εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει ότι

$$\mathcal{W} = -\frac{\check{D}}{(1-ux^2)^3} \left\{ (1-x^2)^2 x^2 uu' - x(1-u) [(1-u)(1-ux^2) + 2u(1-x^2)] \right\} \quad (97)$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης, και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με x^2 , η (87) γράφεται

$$\left(1 - \frac{\check{B}}{u^2} \right) x^2 uu' = 2\check{B}x - \check{A} + \check{C} (x^2 uu')^a - \frac{\check{D}x^2}{(1-ux^2)^3} \cdot \left\{ (1-x^2)^2 x^2 uu' - x(1-u) [(1-u)(1-ux^2) + 2u(1-x^2)] \right\} \quad (98)$$

Κεφάλαιο 3: Όταν η \vec{g}_L εξαρτάται από την επιτάχυνση $v \frac{dv}{dr}$

Εξίσωση Ορμής

Η εξίσωση ορμής (70), απουσία μαγνητικού πεδίου και περιστροφής (άρα $v_r = v$) και θεωρώντας για την \vec{g}_L την έκφραση (65), γράφεται

$$\left(1 - \frac{c_s^2}{v^2}\right) vv' = \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM(1-\Gamma)}{r^2} + \frac{C}{r^2} (r^2 vv')^a \quad (99)$$

Εισάγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές

$$\tilde{r} \equiv \frac{r}{R} \quad \text{και} \quad \tilde{v} \equiv \frac{v}{c_s}$$

όπου R η ακτίνα του άστρου. Η εξίσωση (99), εκπεφρασμένη στις αδιάστατες μεταβλητές \tilde{r} και \tilde{v} , δεδομένου ότι $\frac{d}{dr} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\tilde{r}}$, και απλοποιώντας τον παράγοντα $\frac{c_s^2}{R}$, ο οποίος είναι κοινός και στα δύο μέλη, γράφεται

$$\left(1 - \frac{1}{\tilde{v}^2}\right) \tilde{v}\tilde{v}' = \frac{2}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{A}}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{C}}{\tilde{r}^2} (\tilde{r}^2 \tilde{v}\tilde{v}')^a \quad (100)$$

όπου ο τόνος “ ’ ” σημαίνει παραγώγιση ως προς \tilde{r} , και όπου \tilde{A} και \tilde{C} σταθερές, για τις οποίες έχουμε

$$\tilde{A} \equiv \frac{GM(1-\Gamma)}{Rc_s^2} \quad (101)$$

Φυσική Σημασία σταθεράς \tilde{A} : Η ταχύτητα διαφυγής¹⁶ v_{esc} για $r = R$ είναι

$$v_{esc,R} \equiv \sqrt{\frac{2GM(1-\Gamma)}{R}} \quad (102)$$

άρα

$$\tilde{A} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{v_{esc,R}}{c_s}\right)^2 \quad (103)$$

Για τη σταθερά \tilde{C} ισχύει ότι

$$\tilde{C} \equiv \frac{C}{(Rc_s^2)^{1-a}} \quad (104)$$

¹⁶βλ. υποσημείωση 15.

άρα λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (66) έχουμε

$$\tilde{C} \equiv k \left(\frac{\Gamma GM}{Rc_s^2} \right)^{1-a} \left(\frac{L}{\mathcal{M}v_{th}c} \right)^a \quad (105)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τη σχέση (100) με \tilde{r}^2 , έχουμε

$$\left(1 - \frac{1}{\tilde{v}^2} \right) \tilde{r}^2 \tilde{v} \tilde{v}' = 2\tilde{r} - \tilde{A} + \tilde{C} (\tilde{r}^2 \tilde{v} \tilde{v}')^a \quad (106)$$

Η τελευταία εξίσωση, εισάγοντας τις νέες αδιάστατες μεταβλητές

$$u \equiv -\frac{1}{\tilde{r}} \quad \kappa \alpha \iota \quad w \equiv \frac{\tilde{v}^2}{2}$$

παίρνει την απλούστερη μορφή

$$F(u, w, w') = 0 \quad (107)$$

όπου

$$F(u, w, w') = \left(1 - \frac{1}{2w} \right) w' - \tilde{C}(w')^a + \tilde{A} + \frac{2}{u} \quad (108)$$

όπου ο τόνος “ ’ ” σημαίνει παραγώγιση ως προς u .

Προκειμένου να βρούμε πόσες τιμές παίρνει η w' για κάθε ζεύγος (u, w) , αρκεί να βρούμε το πλήθος των ριζών της $F(w')$ θεωρώντας τα u και w σταθερά. Έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial w'} = 1 - \frac{1}{2w} - \tilde{C}a(w')^{-(1-a)} \quad (109)$$

Άρα για $1 - \frac{1}{2w} < 0 \Leftrightarrow v < c_s$ η $F(w')$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ για $1 - \frac{1}{2w} > 0 \Leftrightarrow v > c_s$, η $\frac{\partial F}{\partial w'}$ μηδενίζεται στη θέση

$$w'_c = \left(\frac{\tilde{C}a}{1 - \frac{1}{2w_c}} \right)^{\frac{1}{1-a}} \quad (110)$$

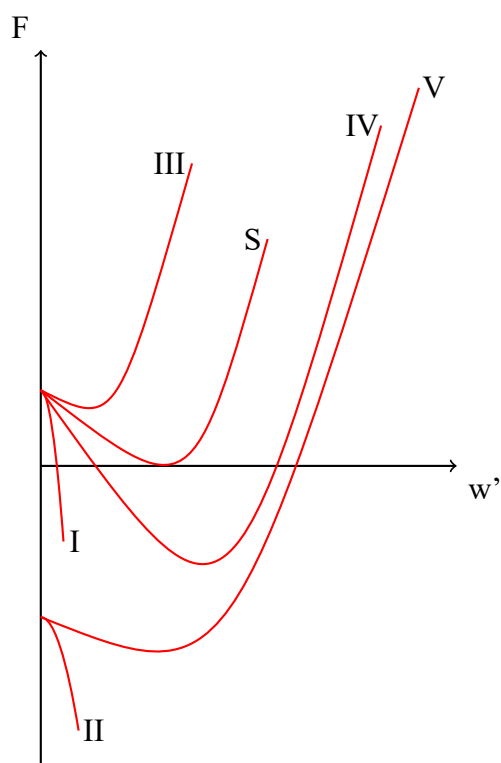
Επειδή $\frac{\partial^2 F}{\partial w'^2} = \tilde{C}a(1-a)(w')^{-(2-a)} > 0 \forall w' > 0$, η παραπάνω θέση αποτελεί θέση ολικού ελαχίστου, το οποίο ολικό ελάχιστο ισούται με

$$F(w' = w'_c) \equiv F_{min} = -\tilde{C}(1-a) \left(\frac{\tilde{C}a}{1 - \frac{1}{2w_c}} \right)^{\frac{a}{1-a}} + \tilde{A} + \frac{2}{u} \quad (111)$$

Δεδομένου ότι $F(w' = 0) = \tilde{A} + \frac{2}{u}$, διακρίνουμε τις εξής έξι περιπτώσεις:

- Αν $1 - \frac{1}{2w} < 0 \Leftrightarrow \tilde{v} < 1$ και $\tilde{A} + \frac{2}{u} > 0 \Leftrightarrow \tilde{r} < \frac{\tilde{A}}{2}$ τότε η $F(w')$ έχει ακριβώς μία ρίζα (περιοχή I).
- Αν $1 - \frac{1}{2w} < 0 \Leftrightarrow \tilde{v} < 1$ και $\tilde{A} + \frac{2}{u} < 0 \Leftrightarrow \tilde{r} > \frac{\tilde{A}}{2}$ τότε η $F(w')$ δεν έχει καμία ρίζα (περιοχή II).
- Αν $1 - \frac{1}{2w} > 0 \Leftrightarrow \tilde{v} > 1$ και $\tilde{A} + \frac{2}{u} > 0 \Leftrightarrow \tilde{r} < \frac{\tilde{A}}{2}$ και $F_{min} > 0$ τότε η $F(w')$ δεν έχει καμία ρίζα (περιοχή III).
- Αν $1 - \frac{1}{2w} > 0 \Leftrightarrow \tilde{v} > 1$ και $\tilde{A} + \frac{2}{u} > 0 \Leftrightarrow \tilde{r} < \frac{\tilde{A}}{2}$ και $F_{min} = 0$ τότε η $F(w')$ έχει ακριβώς μία διπλή ρίζα (καμπύλη S).
- Αν $1 - \frac{1}{2w} > 0 \Leftrightarrow \tilde{v} > 1$ και $\tilde{A} + \frac{2}{u} > 0 \Leftrightarrow \tilde{r} < \frac{\tilde{A}}{2}$ και $F_{min} < 0$ τότε η $F(w')$ έχει ακριβώς δύο ρίζες (περιοχή IV).
- Αν $1 - \frac{1}{2w} > 0 \Leftrightarrow \tilde{v} > 1$ και $\tilde{A} + \frac{2}{u} < 0 \Leftrightarrow \tilde{r} > \frac{\tilde{A}}{2}$ και $F_{min} < 0$ τότε η $F(w')$ έχει ακριβώς μία ρίζα (περιοχή V).

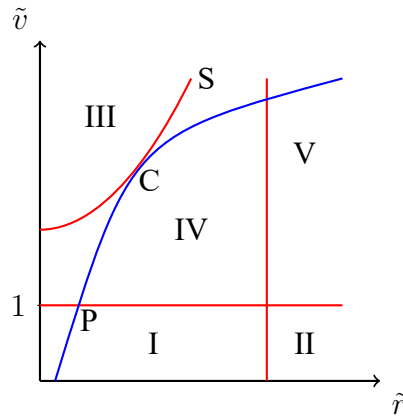
Οι 6 παραπάνω περιπτώσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, όπου δίπλα σε κάθε καμπύλη έχουμε γράψει το λατινικό αριθμό της περιοχής στην οποία αντιστοιχεί.



Άρα, οι γραμμές:

- $1 - \frac{1}{2w} = 0 \Leftrightarrow \tilde{v} = 1$
- $\tilde{A} + \frac{2}{u} = 0 \Leftrightarrow \tilde{r} = \frac{\tilde{A}}{2}$
- $F_{min} = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1}{2 \left\{ 1 - \tilde{C}a \left[\frac{\tilde{C}(1-a)}{\tilde{A} + \frac{2}{u}} \right]^{\frac{1-a}{a}} \right\}} \Leftrightarrow \tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{C}a \left[\frac{\tilde{C}(1-a)}{\tilde{A} - 2\tilde{r}} \right]^{\frac{1-a}{a}}}}$

χωρίζουν το επίπεδο (u, w) ή ισοδύναμα το επίπεδο (\tilde{r}, \tilde{v}) , σε πέντε περιοχές (I, II, III, IV, V), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Βάσει του παραπάνω σχήματος, η φυσικώς αποδεκτή λύση $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ εκκινεί από το σημείο $(1, 0)$ (θεωρούμε δηλαδή ότι η βάση του ανέμου είναι η φωτόσφαιρα, στην οποία η ταχύτητα είναι μηδενική) και σε κάποια απόσταση, η οποία είναι όπως θα δούμε ένα μικρό κλάσμα της ακτίνας R , τέμνει την ευθεία $\tilde{v} = 1$ στο ηχητικό σημείο P . Στη συνέχεια συνεχίζει στην περιοχή IV παίρνοντας την μικρότερη από τις δύο λύσεις της \tilde{v}' . Προκειμένου να μην εισχωρήσει στην “απαγορευμένη” περιοχή III, τέμνει εφαιπτομενικά την καμπύλη S και συνεχίζει παίρνοντας την μεγαλύτερη από τις δύο λύσεις της \tilde{v}' . Ύστερα, εισέρχεται στην περιοχή V, στην οποία αποκτά τελικά την τερματική ταχύτητα v_∞ .

Το σημείο, έστω C , στο οποίο η λύση τέμνει την καμπύλη S , αποτελεί κρίσιμο σημείο, το οποίο θα μελετηθεί στη συνέχεια. Σημειώνουμε ότι όλα τα σημεία της καμπύλης S είναι κρίσιμα.

Εύρεση Κρίσιμου Σημείου

Το κρίσιμο σημείο χαρακτηρίζεται από μία τριάδα αριθμών (u_c, w_c, w'_c) δοθείσης της σταθεράς \tilde{C} , ή ισοδύναμα από την τριάδα (w_c, w'_c, \tilde{C}) δοθέντος του u_c . Άρα χρειαζόμαστε τρεις σχέσεις. Οι δύο από αυτές είναι οι $\frac{\partial F}{\partial w'}|_c = 0$ και $F|_c = 0$. Η τρίτη σχέση προκύπτει αν θεωρήσουμε το ολικό διαφορικό της $F(u, w(u), w'(u))$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{dw}{du} du + \frac{\partial F}{\partial w'} \frac{dw'}{du} du \quad (112)$$

Δεδομένου ότι η διαφορική εξίσωση που έχουμε να λύσουμε γράφεται $F = 0$ (σχέση 107), ισχύει ότι $dF = 0$, άρα

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} w' + \frac{\partial F}{\partial w'} w'' = 0 \quad (113)$$

Επειδή όμως στο κρίσιμο σημείο ισχύει ότι $\frac{\partial F}{\partial w'}|_c = 0$, η (113) δίνει ότι στο κρίσιμο σημείο ισχύει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial u}|_c + \frac{\partial F}{\partial w}|_c w'_c = 0 \quad (114)$$

Άρα, στο κρίσιμο σημείο ισχύουν οι εξής σχέσεις

- $\frac{\partial F}{\partial w'}|_c = 0 \Leftrightarrow w'_c = \left(\frac{\tilde{C}a}{1 - \frac{1}{2w_c}} \right)^{\frac{1}{1-a}}$
- $F|_c = 0 \Leftrightarrow F_{min} = 0 \stackrel{(111)}{\Leftrightarrow} 1 - \frac{1}{2w_c} = \tilde{C}a \left[\frac{\tilde{C}(1-a)}{\tilde{A} + \frac{2}{u_c}} \right]^{\frac{1-a}{a}}$
- $\frac{\partial F}{\partial u}|_c + \frac{\partial F}{\partial w}|_c w'_c = 0 \stackrel{w'_c > 0}{\Leftrightarrow} \frac{w'_c}{w_c} = -\frac{2}{u_c}$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα των τριών εξισώσεων ως προς w_c, w'_c και \tilde{C} , βρίσκουμε

$$w_c = \frac{1}{2} - \frac{u_c}{2} \frac{a}{1-a} \left(\tilde{A} + \frac{2}{u_c} \right) \quad (115)$$

$$w'_c = -\frac{1}{u_c} + \frac{a}{1-a} \left(\tilde{A} + \frac{2}{u_c} \right) \quad (116)$$

$$\tilde{C} = \frac{1}{1-a} \left(\tilde{A} + \frac{2}{u_c} \right) \left[-\frac{1}{u_c} + \frac{a}{1-a} \left(\tilde{A} + \frac{2}{u_c} \right) \right]^{-a} \quad (117)$$

Από την τελευταία σχέση και τον ορισμό της σταθεράς \tilde{C} (σχέση (105)), προκύπτει ότι

$$\dot{M} = k^{\frac{1}{a}} \frac{L}{v_{thc}} (1-a)^{\frac{1}{a}} \left(\tilde{A} \frac{\Gamma}{1-\Gamma} \right)^{\frac{1-a}{a}} \left(\tilde{A} + \frac{2}{u_c} \right)^{-\frac{1}{a}} \left[-\frac{1}{u_c} + \frac{a}{1-a} \left(\tilde{A} + \frac{2}{u_c} \right) \right] \quad (118)$$

Επειδή, όπως θα δείξουμε παρακάτω, το κρίσιμο σημείο βρίσκεται πολύ κοντά στη φωτόσφαιρα, μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους που οφείλονται στην θερμική πίεση. Τότε οι τέσσερις τελευταίες σχέσεις γράφονται¹⁷

$$w_c = -\frac{u_c}{2} \frac{a}{1-a} \tilde{A} \quad (119)$$

¹⁷Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις (120) και (121) (άρα και η (122)) θα μπορούσαν να προκύψουν πιο γρήγορα, αν εξ αρχής γράφαμε την εξίσωση ορμής στην \hat{r} -διεύθυνση χωρίς την κλίση της θερμικής πίεσης. Τότε προκύπτει η εξίσωση $F = 0$ με $F = w' - \tilde{C}(w')^a + \tilde{A}$ και οι σχέσεις $\frac{\partial F}{\partial w'}|_c = 0$ και $F|_c = 0$ δίνουν απ' ευθείας τις σχέσεις (120) και (121) και άρα τα \dot{M} και v_∞ .

$$w'_c = \frac{a}{1-a} \tilde{A} \quad (120)$$

$$\tilde{C} = \frac{\tilde{A}^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}} \quad (121)$$

$$\dot{M} = k^{\frac{1}{a}} \frac{L}{v_{th}c} a(1-a)^{\frac{1-a}{a}} \left(\frac{\Gamma}{1-\Gamma} \right)^{\frac{1-a}{a}} \quad (122)$$

Η εξίσωση (120) ισχύει όσο ο όρος $\frac{2c_s^2}{r}$ της εξίσωσης (99) μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος σε σχέση με τον όρο $\frac{GM(1-\Gamma)}{r^2}$. Επειδή αυτό συμβαίνει για αποστάσεις έως και $100R$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση (120) δεν ισχύει μόνο στο κρίσιμο σημείο, και συνεπώς μπορούμε να την ολοκληρώσουμε. Θεωρώντας ότι $v(r=R) = 0$ και δεδομένης της σχέσης (101), η ολοκλήρωση δίνει

$$v = v_\infty \left(1 - \frac{R}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (123)$$

όπου η τερματική ταχύτητα v_∞ του ανέμου είναι

$$v_\infty = v_{esc,R} \left(\frac{a}{1-a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (124)$$

Τέλος, από τη σχέση (119), με τη βοήθεια των (123) και (124), βρίσκουμε ότι $r_c = \frac{3}{2}R$, ή ισοδύναμα

$$u_c = -\frac{2}{3} \quad (125)$$

Άρα, η σχέση (119) δίνει

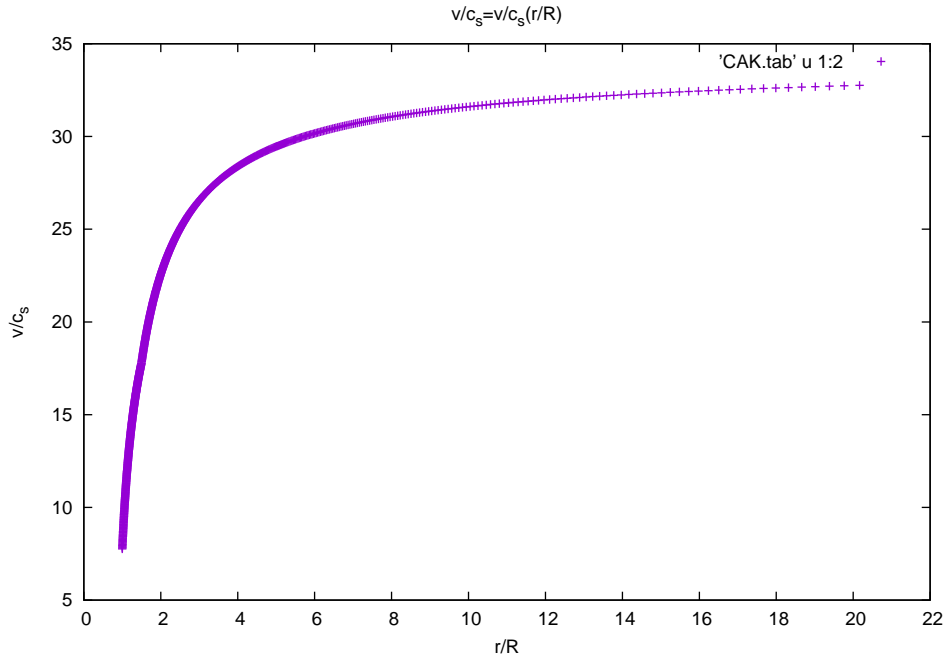
$$w_c = \frac{1}{3} \frac{a}{1-a} \tilde{A} \quad (126)$$

Αριθμητική Λύση

Θεωρούμε άστρο φασματικού τύπου O με μάζα $M = 60M_\odot$, $L = 10^6 L_\odot$, $R = 14R_\odot$, $T = 5 \cdot 10^4 K$. Θεωρώντας $\sigma_e = 0.4 \frac{cm^2}{gr}$ (υποσημείωση 6) και παίρνοντας για τις παραμέτρους k και a τιμές $k = \frac{1}{30}$ και $a = 0.5$, οι σχέσεις (8), (61), (101), (105), (126), (120), (122), (124), δίνουν $\Gamma = 0.52$, $c_s = 28.7 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 475.7$, $\tilde{C} = 43.62$, $w_c = 158.6$, $w'_c = 475.7$, $\dot{M} = 1.36 \cdot 10^{19} \frac{gr}{s} = 2.16 \cdot 10^{-7} \frac{M_\odot}{yr}$, $v_\infty = 30.85c_s = 886 \frac{km}{s}$.

Για $a = 0.5$ η εξίσωση (107) μπορεί να λυθεί ως προς w'

$$w' = \left[\frac{\tilde{C} \pm \sqrt{\tilde{C}^2 - 4 \left(1 - \frac{1}{2w} \right) \left(\tilde{A} + \frac{2}{u} \right)}}{2 \left(1 - \frac{1}{2w} \right)} \right]^2 \quad (127)$$



Σχήμα 3: $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$

Δεδομένου του κρίσιμου σημείου (u_c, w_c) , και παίρνοντας τα "−" και "+ της (127) για $u < u_c$ και $u > u_c$ αντίστοιχα, ολοκληρώνουμε αριθμητικά¹⁸ την εξίσωση (127) και παρουσιάζουμε τη λύση $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ στο σχήμα 3.

Θεωρώντας $M = 50M_\odot$ (και τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες), παίρνουμε $\Gamma = 0.62$, $c_s = 28.7 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 310.6$, $\tilde{C} = 35.25$, $w_c = 103.5$, $w'_c = 310.6$, $\dot{M} = 2.08 \cdot 10^{19} \frac{gr}{s} = 3.30 \cdot 10^{-7} \frac{M_\odot}{yr}$, $v_\infty = 24.92c_s = 716 \frac{km}{s}$.

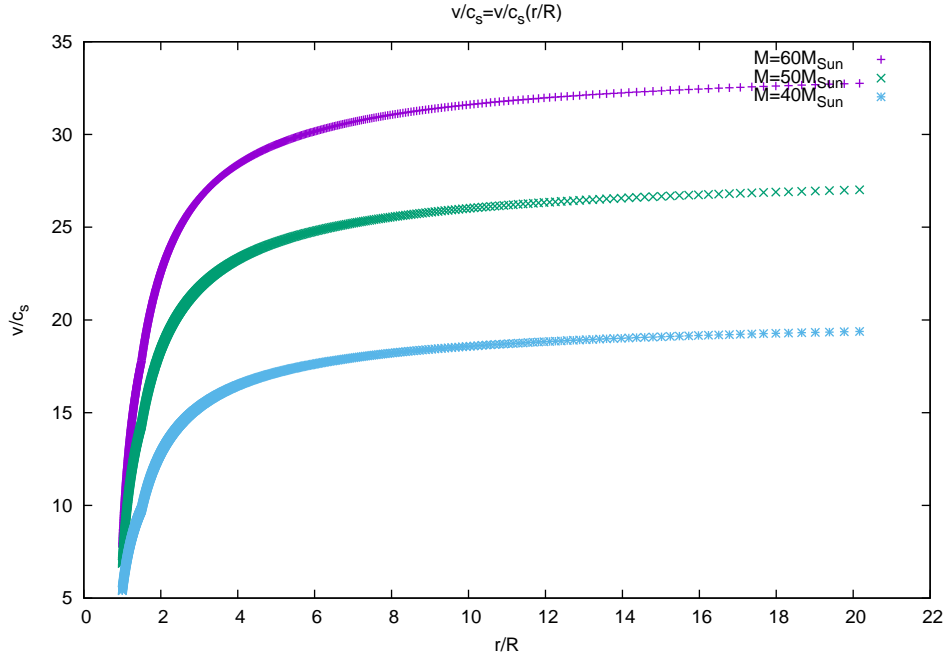
Θεωρώντας $M = 40M_\odot$, παίρνουμε $\Gamma = 0.78$, $c_s = 28.7 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 145.5$, $\tilde{C} = 24.13$, $w_c = 48.51$, $w'_c = 145.5$, $\dot{M} = 4.45 \cdot 10^{19} \frac{gr}{s} = 7.05 \cdot 10^{-7} \frac{M_\odot}{yr}$, $v_\infty = 17.06c_s = 490 \frac{km}{s}$.

Οι λύσεις $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ για τις τρεις προαναφερθείσες τιμές της μάζας M φαίνονται στο σχήμα 4.

Παρατηρούμε ότι η αύξηση της μάζας M οδηγεί σε αύξηση της τερματικής ταχύτητας v_∞ και σε μείωση του ρυθμού απώλειας μάζας \dot{M} , όπως αναμέναμε βάσει των σχέσεων (124), (102), (8), (122), (61).

Θεωρώντας $L = 10^{5.5}L_\odot$ (και $M = 60M_\odot$, $R = 14R_\odot$, $T = 5 \cdot 10^4 K$, $\sigma_e =$

¹⁸Χρησιμοποιούμε μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης και ξεκινάμε την αριθμητική ολοκλήρωση από το σημείο $(u_c \pm \delta u, w_c \pm w'_c \delta u)$ με $\delta u = 10^{-5}$.



Σχήμα 4: $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ για τρεις τιμές της μάζας M

$0.4 \frac{cm^2}{gr}$, $k = \frac{1}{30}$, $a = 0.5$), παίρνουμε $\Gamma = 0.16$, $c_s = 28.7 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 827.7$, $\tilde{C} = 57.54$, $w_c = 275.9$, $w'_c = 827.7$, $\dot{M} = 7.82 \cdot 10^{17} \frac{gr}{s} = 1.24 \cdot 10^{-8} \frac{M_\odot}{yr}$, $v_\infty = 40.69 c_s = 1169 \frac{km}{s}$.

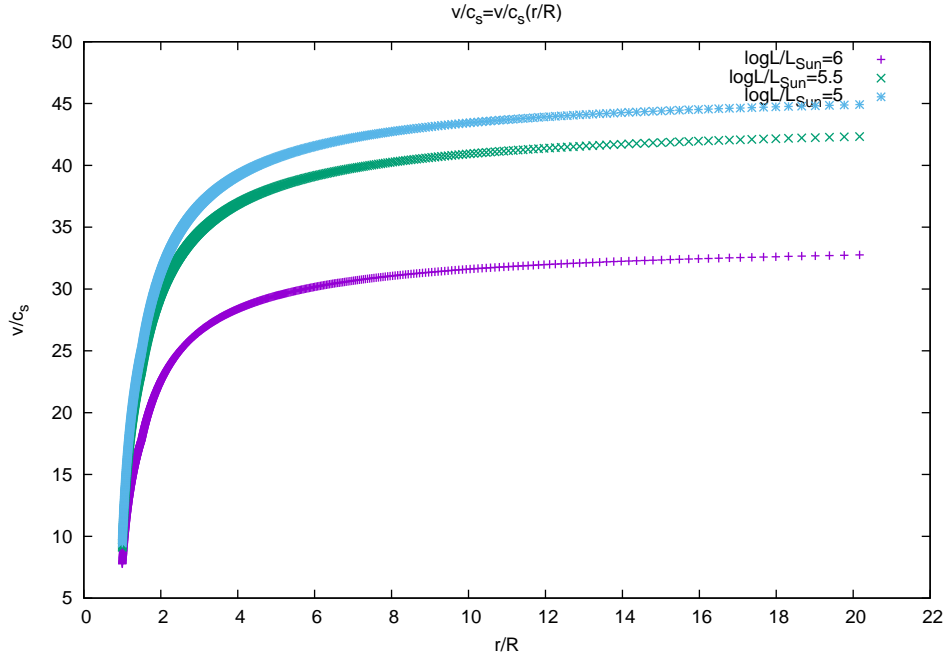
Θεωρώντας $L = 10^5 L_\odot$ (και τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες), παίρνουμε $\Gamma = 0.052$, $c_s = 28.7 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 939.1$, $\tilde{C} = 61.29$, $w_c = 313$, $w'_c = 939.1$, $\dot{M} = 6.90 \cdot 10^{16} \frac{gr}{s} = 1.09 \cdot 10^{-9} \frac{M_\odot}{yr}$, $v_\infty = 43.34 c_s = 1245 \frac{km}{s}$.

Οι λύσεις $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ για τις τρεις προαναφερθείσες τιμές της λαμπρότητας L φαίνονται στο σχήμα 5.

Παρατηρούμε ότι η αύξηση της λαμπρότητας L οδηγεί σε μείωση της τερματικής ταχύτητας v_∞ και σε αύξηση του ρυθμού απώλειας μάζας \dot{M} , όπως αναμέναμε βάσει των σχέσεων (124), (102), (8), (122), (61).

Θεωρώντας $T = 10^5 K$ (και $M = 60 M_\odot$, $L = 10^6 L_\odot$, $R = 14 R_\odot$, $\sigma_e = 0.4 \frac{cm^2}{gr}$, $k = \frac{1}{30}$, $a = 0.5$), παίρνουμε $\Gamma = 0.52$, $c_s = 40.63 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 237.9$, $\tilde{C} = 30.85$, $w_c = 79.28$, $w'_c = 237.9$, $\dot{M} = 9.63 \cdot 10^{18} \frac{gr}{s} = 1.53 \cdot 10^{-7} \frac{M_\odot}{yr}$, $v_\infty = 21.81 c_s = 886 \frac{km}{s}$.

Θεωρώντας $T = 2 \cdot 10^4 K$ (και τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες), παίρνουμε $\Gamma = 0.52$, $c_s = 18.2 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 1189$, $\tilde{C} = 68.97$, $w_c = 396.4$, $w'_c = 1189$,



Σχήμα 5: $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ για τρεις τιμές της λαμπρότητας L

$$\dot{M} = 2.15 \cdot 10^{19} \frac{gr}{s} = 3.41 \cdot 10^{-7} \frac{M_{\odot}}{yr}, v_{\infty} = 48.77 c_s = 886 \frac{km}{s}.$$

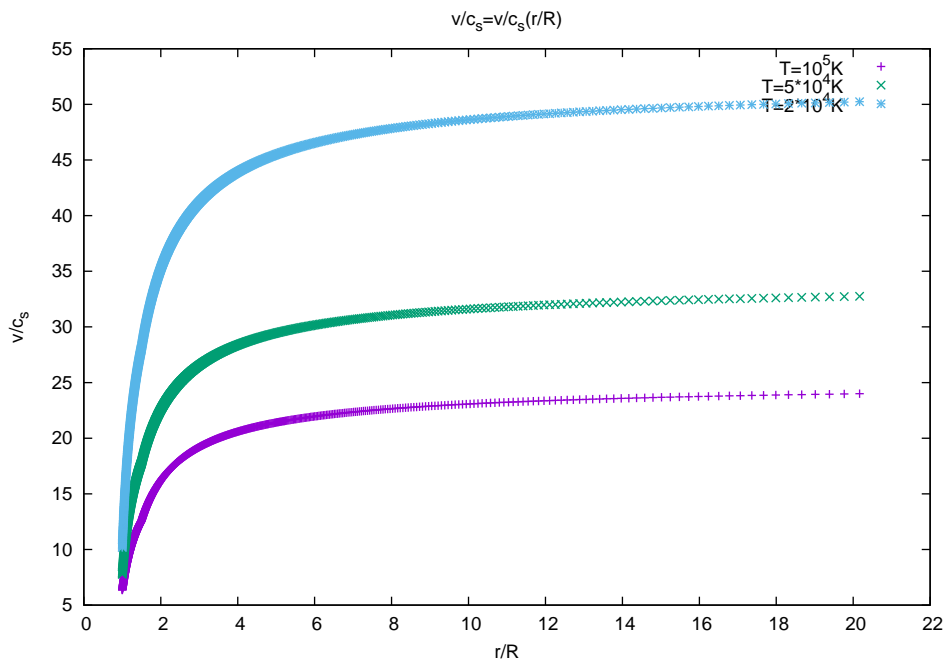
Οι λύσεις $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ για τις τρεις προαναφερθείσες τιμές της θερμοκρασίας T φαίνονται στο σχήμα 6.

Σημειώνουμε ότι επειδή $c_s = c_s(T)$ (σχέση 101), ενώ η v_{∞} είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας (σχέσεις (124), (102), (8)), η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί σε μείωση του λόγου $\frac{v_{\infty}}{c_s}$, χωρίς να αλλάζει την τερματική ταχύτητα v_{∞} . Επίσης, η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί σε μείωση του ρυθμού απώλειας μάζας \dot{M} , όπως αναμέναμε βάσει των σχέσεων (122), (61).

Θεωρώντας $R = 8R_{\odot}$ (και $M = 60M_{\odot}$, $L = 10^6 L_{\odot}$, $T = 5 \cdot 10^4 K$, $\sigma_e = 0.4 \frac{cm^2}{gr}$, $k = \frac{1}{30}$, $a = 0.5$), παίρνουμε $\Gamma = 0.52$, $c_s = 28.73 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 832.5$, $\tilde{C} = 57.71$, $w_c = 277.5$, $w'_c = 832.5$, $\dot{M} = 1.36 \cdot 10^{19} \frac{gr}{s} = 2.16 \cdot 10^{-7} \frac{M_{\odot}}{yr}$, $v_{\infty} = 40.80 c_s = 1172 \frac{km}{s}$.

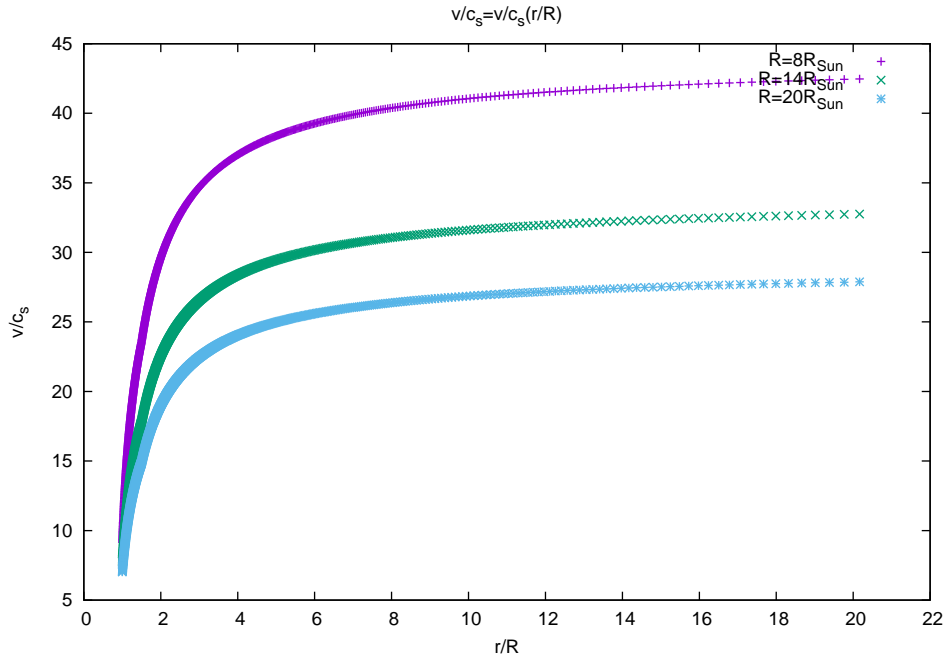
Θεωρώντας $R = 20R_{\odot}$ (και τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες), παίρνουμε $\Gamma = 0.52$, $c_s = 28.73 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 333.0$, $\tilde{C} = 36.50$, $w_c = 111.0$, $w'_c = 333.0$, $\dot{M} = 1.36 \cdot 10^{19} \frac{gr}{s} = 2.16 \cdot 10^{-7} \frac{M_{\odot}}{yr}$, $v_{\infty} = 25.81 c_s = 741 \frac{km}{s}$.

Οι λύσεις $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ για τις τρεις προαναφερθείσες τιμές της ακτίνας R φαίνονται στο σχήμα 7.



Σχήμα 6: $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ για τρεις τιμές της θερμοκρασίας T

Παρατηρούμε ότι η αύξηση της ακτίνας R οδηγεί σε μείωση της τερματικής ταχύτητας v_∞ , ενώ δεν μεταβάλλει τον ρυθμό απώλειας μάζας \dot{M} , όπως αναμέναμε βάσει των σχέσεων (124), (102), (8), (122), (61).



Σχήμα 7: $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$ για τρεις τιμές της ακτίνας R

Κεφάλαιο 4: Όταν η \vec{g}_L εξαρτάται μόνο από την απόσταση r

Η συνάρτηση W του Lambert (Lambert W function)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = xe^x$, η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο σχήμα 8. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και πεδίο τιμών το διάστημα $[-\frac{1}{e}, \infty)$.

Θέτουμε $f(x) = y$. Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(y) = x$ ικανοποιεί τη σχέση $x(y)e^{x(y)} = y$, ή με εναλλαγή των μεταβλητών x και y , τη σχέση

$$y(x)e^{y(x)} = x \quad (128)$$

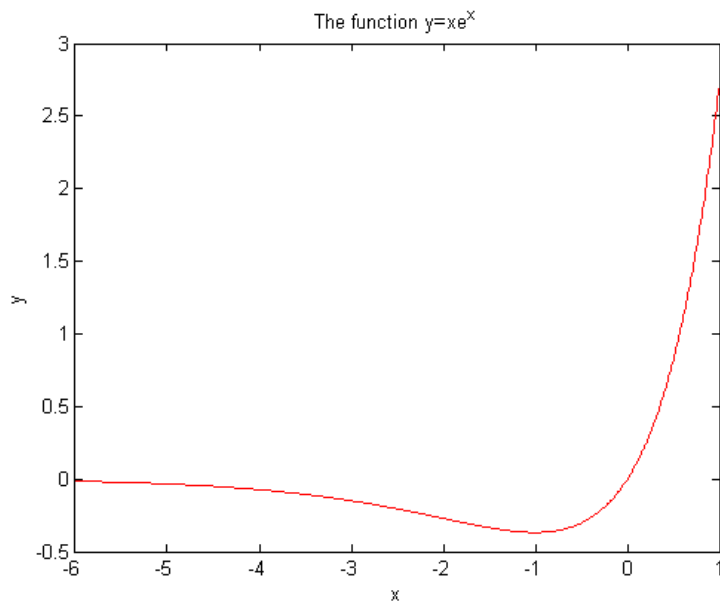
Θέτοντας στην τελευταία σχέση $x = z$ και $y = W$ και θεωρώντας ότι $z, W \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι

$$W(z)e^{W(z)} = z \quad (129)$$

Η συνάρτηση $W(z)$ που ορίζεται από την τελευταία σχέση ονομάζεται *συνάρτηση W του Lambert (Lambert W function)*.

Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στη συνάρτηση $W(z)$ με $z, W \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $z = x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι η συνάρτηση $W(x)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$W(x)e^{W(x)} = x, \quad x \geq -\frac{1}{e} \quad (130)$$



Σχήμα 8: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = xe^x$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $W(x)$ είναι συμμετρική με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ ως προς την ευθεία $y = x$, και φαίνεται στο σχήμα 9. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $W(x)$ δεν είναι μονότιμη αλλά πλειονότιμη. Αυτό το αναμέναμε, διότι η συνάρτηση $f(x) = xe^x$ δεν είναι 1-1, αφού $\forall x \in (-\infty, 0) \exists x_1, x_2 : f(x_1) = f(x_2) \in (-\frac{1}{e}, 0)$ (με άλλα λόγια, κάθε ευθεία της μορφής $y = a$ με $a \in (-\frac{1}{e}, 0)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = xe^x$ σε δύο ακριβώς σημεία).

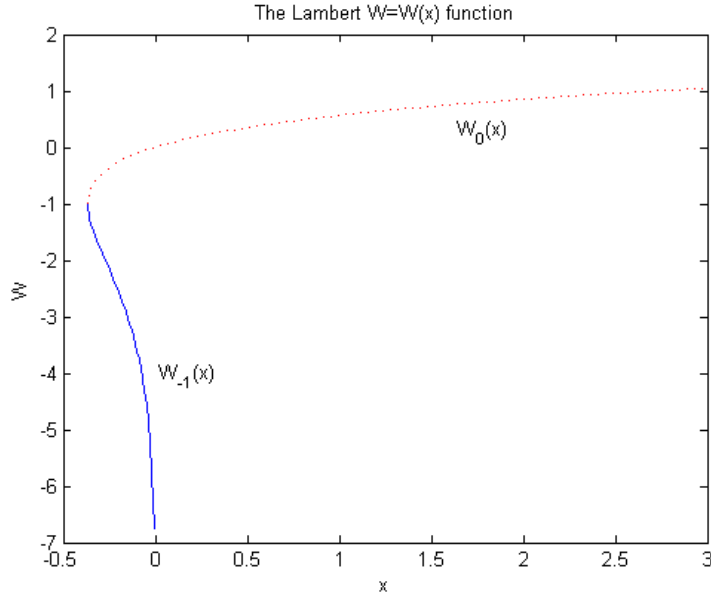
Στο σχήμα 9 φαίνεται ότι η συνάρτηση $W(x)$ αποτελείται από δύο κλάδους:

- Ο κλάδος για τον οποίο ισχύει $W(x) \geq -1 \forall x \in [-\frac{1}{e}, \infty)$ συμβολίζεται $W_0(x)$ και λέγεται *κύριος κλάδος*.
- Ο κλάδος για τον οποίο ισχύει $W(x) \leq -1 \forall x \in [-\frac{1}{e}, 0)$ συμβολίζεται $W_{-1}(x)$.

Οι δύο κλάδοι συναντώνται στο σημείο $(-\frac{1}{e}, -1)$, αφού $W_0(-\frac{1}{e}) = W_{-1}(-\frac{1}{e}) = -1$.

Δεδομένων των δύο προαναφερθέντων κλάδων, η (130) μπορεί να γραφεί

$$W_k(x)e^{W_k(x)} = x, \quad x \geq -\frac{1}{e}, \quad k = 0, 1 \quad (131)$$



Σχήμα 9: Γραφική παράσταση της συνάρτησης W του Lambert

Εξίσωση Ορμής

Η αδιάστατη εξίσωση ορμής (100), απουσία μαγνητικού πεδίου και περιστροφής (άρα $v_r = v$) και θεωρώντας για την \tilde{g}_L την έκφραση (67), γράφεται

$$\left(1 - \frac{1}{\tilde{v}^2}\right) \tilde{v}\tilde{v}' = \frac{2}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{A}}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{g}_0}{\tilde{r}^{2+\tilde{\gamma}}} (\tilde{r} - \tilde{r}_0)^{\tilde{\gamma}} \quad (132)$$

όπου \tilde{g}_0 , \tilde{r}_0 , $\tilde{\gamma}$ είναι αδιάστατες σταθερές, οι οποίες υπολογίζονται με μεθόδους Monte Carlo. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί αναλυτικά με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert.

Η εξίσωση (132) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} = \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^{2+\tilde{\gamma}}} \frac{2\tilde{r}^{1+\tilde{\gamma}} - \tilde{A}\tilde{r}^{\tilde{\gamma}} + \tilde{g}_0(\tilde{r} - \tilde{r}_0)^{\tilde{\gamma}}}{\tilde{v}^2 - 1} \quad (133)$$

Το κρίσιμο σημείο της τελευταίας εξίσωσης καθορίζεται από το γεγονός ότι όταν ο παρονομαστής του δεξιού μέλους μηδενίζεται, πρέπει να μηδενίζεται και ο αριθμητής, διότι διαφορετικά η επιτάχυνση \tilde{v}' θα ήταν άπειρη. Ο παρονομαστής μηδενίζεται για $\tilde{v} = 1 \Leftrightarrow v = c_s$. Άρα, το κρίσιμο σημείο είναι, όπως στον άνεμο Parker, το ηχητικό σημείο $(\tilde{r}_s, 1)$, όπου η αδιάστατη απόσταση \tilde{r}_s είναι λύση της εξίσωσης

$$2\tilde{r}_s^{1+\tilde{\gamma}} - \tilde{A}\tilde{r}_s^{\tilde{\gamma}} + \tilde{g}_0(\tilde{r}_s - \tilde{r}_0)^{\tilde{\gamma}} = 0 \quad (134)$$

Για $\tilde{\gamma} = 1$ η τελευταία εξίσωση δίνει

$$\tilde{r}_s = \frac{\tilde{A} - \tilde{g}_0 + \sqrt{(\tilde{A} - \tilde{g}_0)^2 + 8\tilde{g}_0\tilde{r}_0}}{4} \quad (135)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση ορμής (132) ως προς \tilde{r} έχουμε

$$\int \tilde{v} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} d\tilde{r} - \int \frac{1}{\tilde{v}} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} d\tilde{r} = 2 \int \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} - \tilde{A} \int \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2} + \tilde{g}_0 \int \left(1 - \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}}\right)^{\tilde{\gamma}} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2} \quad (136)$$

Θεωρώντας στο τελευταίο ολοκλήρωμα την αντικατάσταση $u = -\frac{1}{\tilde{r}}$, ώστε $du = \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2}$, έχουμε

$$\tilde{v}^2 - \ln \tilde{v}^2 = 4 \ln \tilde{r} + \frac{2\tilde{A}}{\tilde{r}} + \frac{2\tilde{g}_0}{\tilde{r}_0(1+\tilde{\gamma})} \left(1 - \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}}\right)^{1+\tilde{\gamma}} + \tilde{B} \quad (137)$$

όπου \tilde{B} η σταθερά ολοκλήρωσης. Αφού η λύση περνάει από το κρίσιμο σημείο $(\tilde{r}_s, 1)$, η (137) δίνει

$$1 = 4 \ln \tilde{r}_s + \frac{2\tilde{A}}{\tilde{r}_s} + \frac{2\tilde{g}_0}{\tilde{r}_0(1+\tilde{\gamma})} \left(1 - \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}_s}\right)^{1+\tilde{\gamma}} + \tilde{B} \quad (138)$$

Άρα

$$\tilde{B} = 1 - 4 \ln \tilde{r}_s - \frac{2\tilde{A}}{\tilde{r}_s} - \frac{2\tilde{g}_0}{\tilde{r}_0(1+\tilde{\gamma})} \left(1 - \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}_s}\right)^{1+\tilde{\gamma}} \quad (139)$$

Η εξίσωση (137) με τη βοήθεια της (139) γράφεται

$$\tilde{v}^2 - \ln \tilde{v}^2 = f(\tilde{r}) \quad (140)$$

όπου

$$f(\tilde{r}) \equiv 1 + 4 \ln \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_s} + 2\tilde{A} \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}_s}\right) + \frac{2\tilde{g}_0}{\tilde{r}_0(1+\tilde{\gamma})} \left[\left(1 - \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}}\right)^{1+\tilde{\gamma}} - \left(1 - \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}_s}\right)^{1+\tilde{\gamma}} \right] \quad (141)$$

Η εξίσωση (140) ισοδύναμα γράφεται

$$-\tilde{v}^2 e^{-\tilde{v}^2} = g(\tilde{r}) \quad (142)$$

όπου

$$g(\tilde{r}) \equiv -e^{-f(\tilde{r})} \quad (143)$$

άρα

$$g(\tilde{r}) \equiv - \left(\frac{\tilde{r}_s}{\tilde{r}}\right)^4 e^{-2\tilde{A}\left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}_s}\right) - \frac{2\tilde{g}_0}{\tilde{r}_0(1+\tilde{\gamma})} \left[\left(1 - \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}}\right)^{1+\tilde{\gamma}} - \left(1 - \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{r}_s}\right)^{1+\tilde{\gamma}}\right]}^{-1} \quad (144)$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση (142) με την εξίσωση (131) έχουμε ότι

$$-\tilde{v}^2 = W_k(g(\tilde{r})) \quad (145)$$

Άρα, δεδομένου ότι αφού ζητάμε λύση ανέμου ισχύει $\tilde{v} \geq 0$, έχουμε ότι

$$\tilde{v} = \sqrt{-W_k(g(\tilde{r}))} \quad (146)$$

Σημειώνουμε ότι η τελευταία ρίζα είναι καλώς ορισμένη, διότι $g(\tilde{r}) < 0 \Leftrightarrow W_k(g(\tilde{r})) < 0 \Leftrightarrow -W_k(g(\tilde{r})) > 0$.

Για $\tilde{r} = \tilde{r}_s$ η (144) δίνει $g|_{\tilde{r}_s} = -\frac{1}{e}$ και συνεπώς από την εξίσωση (146) έχουμε ότι $\tilde{v}|_{\tilde{r}_s} = \sqrt{-W\left(-\frac{1}{e}\right)} = \sqrt{-(-1)} = 1$ όπως αναμέναμε. Άρα, το κρίσιμο σημείο αντιστοιχεί στο σημείο αλλαγής κλάδου $(-\frac{1}{e}, -1)$ της συνάρτησης W .

Άνεμος Parker

Από τις (146), (144), (135), μπορούμε να πάρουμε τη λύση Parker \tilde{v}_P για τον ηλιακό άνεμο, θέτοντας $g_0 = 0$ και $\Gamma = 0$. Έχουμε ότι

$$\tilde{v}_P = \sqrt{-W_k(g_P(\tilde{r}))} \quad (147)$$

όπου

$$g_P(\tilde{r}) \equiv -\left(\frac{\tilde{r}_{s,P}}{\tilde{r}}\right)^4 e^{-2\tilde{A}\left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}_{s,P}}\right)-1} \quad (148)$$

όπου

$$\tilde{r}_{s,P} = \frac{\tilde{A}}{2} \quad (149)$$

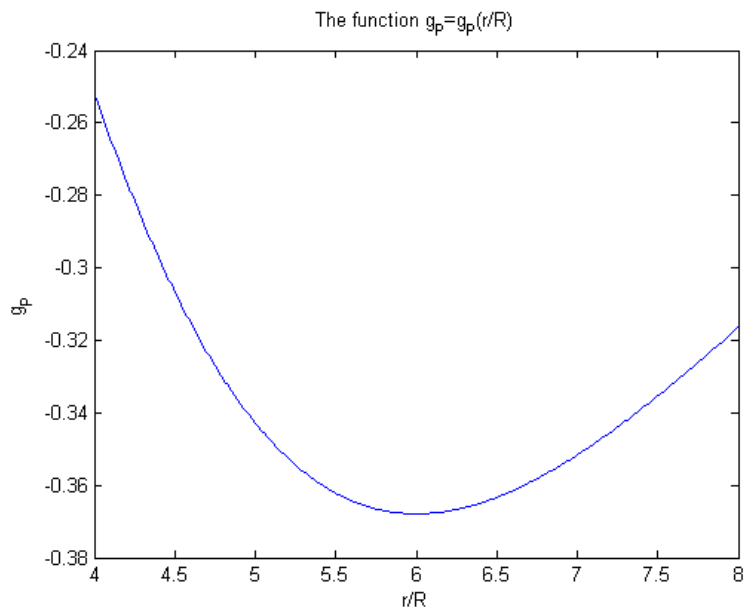
Η τελευταία σχέση, θεωρώντας ότι το ηλιακό στέμμα έχει θερμοκρασία $T = 10^6 K$ και λαμβάνοντας υπόψη τις (101) και (61), δίνει

$$\tilde{r}_{s,P} \approx 6 \quad (150)$$

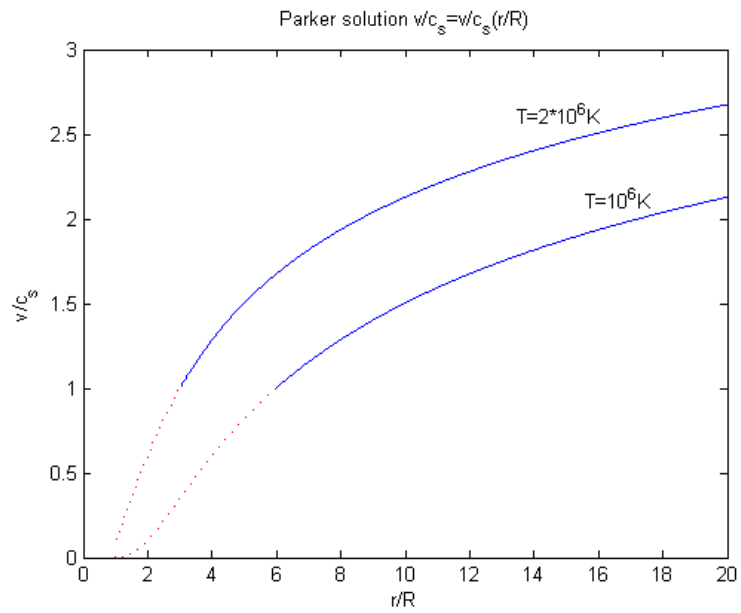
Δεδομένου ότι ζητάμε λύση ανέμου, δηλαδή λύση που πριν το κρίσιμο σημείο είναι υποηχητική και μετά το κρίσιμο σημείο είναι υπερηχητική, και δεδομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g_P = g_P(\tilde{r})$ που φαίνεται στο σχήμα 10, έχουμε ότι η επιλογή των κλάδων της συνάρτησης W της εξίσωσης (147) πρέπει να γίνει ως εξής:

$$k = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad 1 \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_{s,P} \\ -1 & \alpha\nu \quad \tilde{r} \geq \tilde{r}_{s,P} \end{cases} \quad (151)$$

Βάσει των παραπάνω, η λύση Parker παρουσιάζεται, για δύο θερμοκρασίες, στο σχήμα 11.



Σχήμα 10: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g_P = g_P(\tilde{r})$

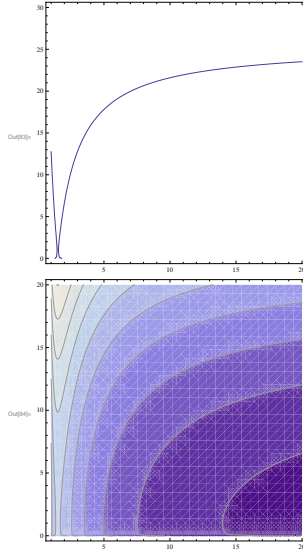


Σχήμα 11: Λύση Parker για τον ηλιακό άνεμο

```

In[10]: A = 475; gamma = 1; c = 1418.1;
F[r_, v_] := v^2 - Log[v^2] - 4 Log[r] - 2 A / r - c (1 - 1 / r)^(1 + gamma)
ContourPlot[F[r, v] == -792.455, {r, 1, 20}, {v, 0, 30}, PlotPoints -> 30]
ContourPlot[F[r, v], {r, 1, 20}, {v, 0, 20}, PlotPoints -> 30]

```



Σχήμα 12: $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{r})$

Αριθμητική Λύση

Θεωρούμε, όπως στο κεφάλαιο 3, άστρο φασματικού τύπου O με μάζα $M = 60M_{\odot}$, $L = 10^6 L_{\odot}$, $R = 14R_{\odot}$, $T = 5 \cdot 10^4 K$. Θεωρούμε επίσης ότι $\sigma_e = 0.4 \frac{cm^2}{gr}$ (υποσημείωση 6). Για τις παραμέτρους $\tilde{\gamma}$ και \tilde{g}_0 θεωρούμε $\tilde{\gamma} = 1$ και $\tilde{g}_0 = 1418.1$, ώστε $\tilde{r}_s = \frac{3}{2}$. Άρα $\Gamma = 0.52$, $c_s = 28.7 \frac{km}{s}$, $\tilde{A} = 475.7$.

Από το διάγραμμα του σχήματος 12 παρατηρούμε ότι σε απόσταση $\tilde{r} = 20$ είναι $\tilde{v} \approx 24$, δηλαδή μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή $\tilde{v}_{\infty} \approx 31$ που είχαμε υπολογίσει σύμφωνα με το μοντέλο *CAK*. Συμπεραίνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η \vec{g}_L που υπολογίσαμε με το μοντέλο *CAK* είναι μεγαλύτερη από την αντιστοιχη \vec{g}_L που προκύπτει με τη μοντελοποίηση των Muller & Vink.

Βιβλιογραφία

- Βλαχάκης Ν. *Δυναμική των Ρευστών*, Σημειώσεις, ΕΚΠΑ, Αθήνα 2015.
- Τσίγκανος Κ. *Φυσική Πλάσματος*, Σημειώσεις, ΕΚΠΑ, Αθήνα 2010.
- Cassinelli JP. *Theories for the winds from Wolf Rayet stars*, Wolf-Rayet stars: Observations, physics, evolution; Proceedings of the Symposium, Cozumel, Mexico, September 18-22, 1981. (A82-48127 24-90) Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1982, p. 173-181; Discussion, p. 181-183.
- Cassinelli JP. *Stellar Winds*, Annual review of astronomy and astrophysics. Volume 17. (A79-54126 24-90) Palo Alto, Calif., Annual Reviews, Inc., 1979, p. 275-308.
- Castor JI. 1974. *MNRAS*169: 279.
- Castor JI, Abbott DC, Klein RI. 1975. *ApJ* 195: 157.
- Clayton DD. *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, University of Chicago Press 1968.
- Cranmer SV. *Dynamical Models of Winds from Rotating hot Stars*, a dissertation submitted to the Faculty of the University of Delaware in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Physics, 1996
- Friend DB, MacGregor KB. 1984. *ApJ* 282: 591.
- Landau LD, Lifshitz EM. *Fluid Mechanics*, 1987 Pergamon Books Ltd.
- Lucy LB, Solomon PM. 1970. *ApJ* 159: 879.
- Mihalas D, Mihalas BW. *Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press 1984.
- Muijres LM. *The physics of line-driven winds of hot massive stars*, thesis, 2010.
- Muller PE, Vink JS. 2008. *A&A* 492: 493.
- Owocki S. *Radiatively Driven Stellar Winds from Hot Stars*, Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, Nature Publishing Group 2001.
- Parker EN. *ApJ* 128: 664.
- Puls J, Vink JS, Najarro F. *Mass loss from hot massive stars*, arXiv:0811.0487v [astro-ph] 2008.
- Puls J, Sundqvist JO, Najarro F, Hanson MM. *Mass loss from OB-stars*, Recent directions in astrophysical quantitative spectroscopy and radiation hydrodynamics: Proceedings of the International Conference in Honor of Dimitri Mihalas for His Lifetime Scientific Contributions on the Occasion of His 70th Birthday. AIP Conference Proceedings, Volume 1171, pp. 123-135 (2009).
- Rybicki GB, Lightman AP. *Radiative Processes in Astrophysics*, Wiley-Vch 2004.
- Ryden B. *Chapter 12: Winds from Hot & Cool Stars*, Notes for the course: Astronomy 825: Radiative Gas Dynamics, Ohio University, 2011.
- Vink JS. *Mass-loss rates of Very Massive Stars*, arXiv:1406.5357v1 [astro-ph.SR] 2014.