ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΣΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η ιστορική πορεία της εξέλιξης της έννοιας του ορίου»

Παναγιωτίδου Μαρία

Δ201506

Επιβλέπων Καθηγητής: Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Αθήνα

Σεπτέμβριος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 21η Σεπτεμβρίου 2017 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪	Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪	Δ. Χριστοπούλου	Επικ. Καθηγήτρια
▪	Ε. Γιαννακούλια	Ομοτ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της Συμβουλευτική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪	Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪	Δ. Χριστοπούλου	Επικ. Καθηγήτρια
▪	Ε. Γιαννακούλια	Ομοτ. Καθηγητή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη, για τη βοήθεια στην εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας ως επιβλέπων. Καθώς επίσης και τον ομότιμο καθηγητή κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια για τις συζητήσεις που είχαμε πάνω στο θέμα της εργασίας, την ακούραστη συμπαράστασή του και τις ουσιαστικές επισημάνσεις του.

Θερμό ευχαριστώ οφείλω και σε όλους τους διδάσκοντες στο Μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» για τις γνώσεις που μου πρόσφεραν τα δύο αυτά χρόνια.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή γίνεται μελέτη της εξέλιξης της έννοιας του ορίου, μιας έννοιας βασικής για τη θεμελίωση και ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού.

Στο αρχικό της στάδιο η έννοια ενυπάρχει μέσω της ενόρασης και της διαίσθησης, κυρίως ως γεωμετρική έννοια στους υπολογισμούς των προσεγγιστικών τιμών της $\sqrt{2}$, στα παράδοξα του Ζήνωνα και στο έργο του Αρχιμήδη (μεθόδου της εξάντλησης).

Μετά την Αναγέννηση, αλλά και κατά τη διάρκειά της, γίνονται αξιόλογες προσπάθειες σημαντικών μαθηματικών για να καθορίσουν την έννοια του ορίου, αλλά και αυτοί καταφεύγουν στη συνδρομή της διαίσθησης.

Η ίδια αδυναμία παρατηρείται όμως και από τους επινοητές του απειροστικού λογισμού Newton και Leibniz, που παρά τα επιτεύγματά τους, δεν καταφέρνουν να δώσουν πειστικές εξηγήσεις για τις θεμελιώδεις έννοιες των μεθόδων τους (θεωρία ροών (fluxions), διαφορικό) οι οποίες υποκρύπτουν την έννοια του ορίου.

Ο Γάλλος μαθηματικός Augustin Louis Cauchy στις αρχές του 19^{ου} αιώνα δίνει ένα καθαρό ορισμό του ορίου, αλλά και αυτός στηρίχθηκε στην απλή διαισθητική γεωμετρική έννοια του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Την τρίτη δεκαετία του 19^{ου} αιώνα, με την κατασκευή των πραγματικών αριθμών, γίνεται το πρώτο βήμα για την αριθμοποίηση του απειροστικού λογισμού και ανοίγεται ο δρόμος στον Karl Weierstrass να δώσει την αριθμητική έννοια του ορίου.

Λέξεις κλειδιά: Όριο, Άπειρο, Διαφορικό, Θεωρία ροών, Μέθοδος της εξάντλησης.

ABSTRACT

This paper is concerned with theevolution of the concept of limit, a basic concept for establishing and developing infinitesimal calculus.

At its primary stage, this concept was only present through insight and intuition, basically as a geometrical concept in calculating the approximate valuesof $\sqrt{2}$, in Zeno's paradoxes and Archimedes' work (method of exhaustion).

During and after Renaissance, important efforts took place by significant mathematicians to define the concept of limit, but they also needed intuition to achieve it.

The same problem emergedwhen,despite their achievements, the inventors of infinitesimal calculus,Newton and Leibniz,were unable to offer believable explanations for the basic concepts of their methods (theory of fluxions, differential), which envelop the concept of limit.

At the beginning of the 19th century, the French mathematician AugustinLouisCauchy offered a clear definition of limit, but he relied upon the simple intuitive geometrical concept of the total real numbers too.

At the third decade of 19th century, with the emergence of real numbers, the first step is made for numerisationof infinitesimal calculus and KarlWeierstrasswas ready to give the numerical concept of limit.

Keywords: Limit, Infinity, Differential, Theory of fluxions, Method of exhaustion.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μαθηματικές έννοιες και γενικότερα οι μαθηματικές διαδικασίες είναι αφηρημένες και αρκετές φορές πολύπλοκες. Η κατανόησή τους παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες για τους μαθητές. Το γεγονός αυτό οδηγεί στην υποβάθμιση της διδασκαλίας των μαθηματικών σε μια διδασκαλία διαδικασιών με καθαρά τυπικό τρόπο, χωρίς να επιδιώκεται η ουσιαστική κατανόησή τους.

Η έννοια του ορίου είναι η πιο σημαντική και πιθανόν η πιο δύσκολη σε ολόκληρο τον απειροστικό λογισμό. Κατέχει δεσπόζουσα θέση και υπεισέρχεται στο σύνολο της Μαθηματικής Ανάλυσης ως θεμέλιο της θεωρίας των διαδοχικών προσεγγίσεων, της συνέχειας, του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.

Στην εργασία αυτή θα σκιαγραφήσουμε την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου.

Με τη μελέτη της ιστορίας, σύμφωνα με τον Felix Klein μπορούμε να δούμε πως οι έννοιες εμφανίστηκαν σε μορφή προδρομική και μόνο μετά από μακρά ανάπτυξη αποκρυσταλλώθηκαν στην οριστική τους μορφή. Στα μαθηματικά, η ιστορική περιγραφή της εξέλιξής των εννοιών, δίνει την ευκαιρία να παρουσιαστούν τα προβλήματα, που στάθηκαν αφορμή για τη δημιουργία τους, τα λάθη και οι ανεπάρκειες στις αποδείξεις, που παρέμειναν απρόβλεπτα για μεγάλα χρονικά διαστήματα, και να κατανοηθεί πως έπρεπε αναγκαία να επινοηθούν άλλες μέθοδοι οι οποίες συνέβαλαν στην απαλοιφή τους. Επίσης θα αντιληφθούμε ότι οι δυσκολίες που συνάντησαν οι μεγάλοι μαθηματικοί είναι τα εμπόδια που συναντούν και σήμερα οι μαθητές στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν την έννοια του ορίου.

Θεωρείται χρήσιμη η εισαγωγή ιστορικών αναφορών στη διδασκαλία των μαθηματικών, διότι είναι καλό οι μαθητές να γίνουν κοινωνοί της πορείας που οδήγησε στη σημερινή μορφή, τις βασικές μαθηματικές έννοιες (ιδιαίτερα αυτές που παρουσιάζουν μία λεπτή περιπλοκότητα όπως είναι το όριο). Ο τρόπος αυτός βοηθάει στο να τις κατανοήσουν βαθύτερα και όχι να τις αντιμετωπίσουν ως τεχνητά νοητικά δημιουργήματα κάποιων ειδικών, ξεκομμένα από την εμπειρική πραγματικότητα.

1. Η ΙΔΕΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

1.1 Δύο φιλοσοφικές σχολές στην αρχαιότητα

Το όριο αποτελεί θεμελιώδη έννοια του Απειροστικού Λογισμού. Με τη βοήθειά του κατανοήθηκαν, ορίστηκαν με σαφήνεια και αναπτύχθηκαν άλλες έννοιες, όπως η συνέχεια, η παράγωγος, το ολοκλήρωμα.

Τα πρώτα σπέρματα της έννοιας του ορίου τα συναντούμε στα έργα των αρχαίων Ελλήνων. Σ' αυτούς η έννοια αυτή είναι κυρίως γεωμετρική. Η σύλληψή της και η κατανόησή της στηρίζεται στη διαίσθηση και την ενόραση και συνδέεται με την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων σε προβλήματα, όπως η τριχοτόμηση γωνίας, το Δήλιο πρόβλημα και ο τετραγωνισμός του κύκλου. Σ' αυτά δεν μπορούσαν να βρουν γεωμετρική λύση (αργότερα αποδείχθηκε, πως δεν υπάρχει) οπότε προσπάθησαν να πλησιάσουν τη λύση ως όριο διαδοχικών προσεγγίσεων. Ο ακριβής ορισμός της έννοιας του ορίου δόθηκε, αφού πέρασαν αρκετοί αιώνες, το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα.

Η δυσκολία για τον ακριβή καθορισμό της έγκειται στο γεγονός ότι συνδέεται με την έννοια του απείρου, έννοια για την οποία οι αρχαίοι Έλληνες, και όχι μόνο, είχαν σοβαρές διαφωνίες. Ένα θέμα ζωτικής σημασίας που αποτέλεσε αντικείμενο διαμάχης μεταξύ των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων ήταν η δομή του μικρόκοσμου. Το ερώτημα που τους βασάνισε ήταν αν υπάρχει όριο στη διαιρετότητα των υλικών αντικειμένων. Το ερώτημα αυτό έγινε αιτία χωρισμού των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων και μαθηματικών σε δύο σχολές.

Οι οπαδοί της μιας σχολής υποστήριζαν ότι τα φυσικά συμβάντα και η ύλη είναι συνεχή μεγέθη, τα οποία είναι επ' άπειρον διαιρετά.

Στα «Φυσικά» του ο Συμπλίκιος διασώζει ένα απόσπασμα από το έργο του Αναξαγόρα «Περί Φύσεως», στο οποίο φαίνεται πως είναι από τους πρώτους που διατυπώνει την έννοια του απείρου και της συνέχειας στη γεωμετρία και τη διαιρετότητα του συνεχούς.

«Ὁμοῦ χρήματα πάντα ἦν, ἄπειρα καί πλῆθος και σμικρότητα … οὔτε γάρ τοῦ σμικροῦ ἔστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεί (τό γάρ ἐόν οὐκ ἔστι τό μή οὐκ εἶναι), ἀλλά και τοῦ μεγάλου ἀεί ἔστι μεῖζον καί ἴσον ἔστι τῷ σμικρῷ πλῆθος, πρός ἑαυτό δέ ἕκαστον ἐστι καί μέγα καί σμικρόν»

(Συμπλίκιος εις Φυσικά 164, 17)

(Όλα τα πράγματα ήταν μαζί, άπειρα τόσο στο πλήθος όσο και στην μικροσκοπικότητα… όταν δοθεί ένα μικρό μέγεθος δεν μπορούμε με τη διαίρεσή του να οδηγηθούμε στο ελάχιστο, αλλά κάθε φορά φτάνουμε σε κάτι πιο μικρό. Είναι αδύνατον αυτό που υπάρχει να πάψει να υπάρχει με τη συνεχή διαίρεση, αλλά και του μεγάλου υπάρχει πάντα μεγαλύτερο. Και είναι ίσον κατά το πλήθος προς το μικρό (δηλαδή οσονδήποτε μεγάλο αποτελείται από πολλά μικρά) ως προς τον εαυτό του όμως, κάθε μέγεθος είναι και μεγάλο και μικρό). (Γιαννακούλιας,2007)

Οι οπαδοί της άλλης σχολής, όπως οι Πυθαγόρειοι και οι ατομικοί, υποστήριζαν ότι η ύλη δεν είναι επ' άπειρον διαιρετή. Δέχονταν την ύπαρξη ελαχίστων υλικών σωματιδίων, των ατόμων, που είναι αδιαίρετα.

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο κόσμος συγκροτείται με τη βοήθεια της αρμονίας, η οποία με τη σειρά της συνίσταται από αριθμητικούς λόγους. Άρα ο κόσμος έχει δημιουργηθεί και συντηρείται με βάση ρητούς λόγους. Στην προσπάθειά τους να εκφράσουν με ρητό τρόπο το λόγο $\frac{\delta}{\alpha}$ όπου δ η διαγώνιος και α η πλευρά τετραγώνου, συνάντησαν δυσκολία. Ήταν αδύνατο να βρεθούν θετικοί ακέραιοι μ, ν έτσι ώστε $\frac{\delta}{\alpha}=\frac{\mu}{\nu}$. Είχαν μπροστά τους ένα λόγο μη ρητό, άρρητο (μη εκφράσιμο, άλογο). Η διαπίστωση αυτή δημιουργεί εσωτερική κρίση στη σχολή των Πυθαγορείων. Τρίζουν τα θεμέλια της κοσμοθεωρίας τους. Η διαγώνιος και η πλευρά τετραγώνου δεν έχουν κοινή μονάδα μέτρησης. Η ανθυφαίρεσή τους δεν έχει τέλος. Οι Πυθαγόρειοι μετά την ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου του τετραγώνου, δηλαδή ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, προσπάθησαν να βρουν προσεγγιστικές τιμές για τον αριθμό αυτό. Έτσι ενεπλάκησαν στην έννοια του απείρου η οποία υποκρύπτεται μέσω της διαδικασίας της προσέγγισης. Η διαδικασία που ακολούθησαν εμπεριέχεται σε όσα αναφέρει ο Θέων ο Σμυρναίος (2ος π.Χ. αιώνας) και αργότερα ο Πρόκλος (5ος μ.Χ. αιώνας).

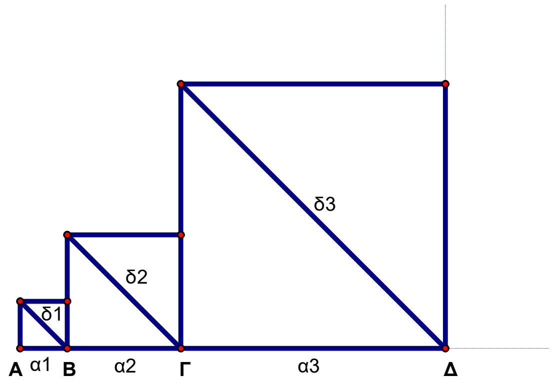
Πλευρικοί αριθμοί καλούνται οι αριθμοί που παριστάνουν τα μήκη πλευρών τετραγώνων. Διαμετρικοί δε αριθμοί καλούνται αυτοί που παριστάνουν τα μήκη των αντίστοιχων διαμέτρων (διαγωνίων) των τετραγώνων αυτών κατά τον Θέωνα το Σμυρναίο.

Οι πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί σχηματίζονται ως εξής:

Σε δοσμένο (απειροελάχιστο) τετράγωνο με πλευρά και διαγώνιο ίσες με τη μονάδα προστίθενται η πλευρά και η διάμετρός του και το άθροισμα που προκύπτει αποτελεί την πλευρά του μεγαλύτερου (επόμενου) τετραγώνου. Στο διπλάσιο της πλευράς του δοθέντος τετραγώνου προστίθενται η διάμετρός του και το άθροισμα που προκύπτει είναι η διάμετρος του μεγαλύτερου τετραγώνου. Επαναλαμβάνεται η μέθοδος αυτή της κατασκευής μεγαλύτερων τετραγώνων επ’ άπειρο. (Σχήμα 1) (Σταμάτης,1953)

Σχήμα 1

Γεωμετρική ερμηνεία
των πλευρικών – διαμετρικών αριθμών



Η προηγούμενη περιγραφή οδηγεί στις αναδρομικές σχέσεις:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \delta_n \quad \text{και} \quad \delta_{n+1} = 2\alpha_n + \delta_n$$

όπου α_n, δ_n η πλευρά και η διαγώνιος του νιοστού τετραγώνου.

Στον Πίνακα 1 δίνονται οι οκτώ πρώτοι πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί.

Πλευρικοί Αριθμοί		**Διαμετρικοί Αριθμοί**	
Πλευρά 1ου τετραγώνου	1	Διάμετρος 1ου τετραγώνου	1
Πλευρά 2ου τετραγώνου	$1+1=2$	Διάμετρος 2ου τετραγώνου	$2\cdot1+1=3$
Πλευρά 3ου τετραγώνου	$2+3=5$	Διάμετρος 3ου τετραγώνου	$2\cdot2+3=7$
Πλευρά 4ου τετραγώνου	$5+7=12$	Διάμετρος 4ου τετραγώνου	$2\cdot5+7=17$
Πλευρά 5ου τετραγώνου	$12+17=29$	Διάμετρος 5ου τετραγώνου	$2\cdot12+17=41$
Πλευρά 6ου τετραγώνου	$29+41=70$	Διάμετρος 6ου τετραγώνου	$2\cdot29+41=99$
Πλευρά 7ου τετραγώνου	$70+99=169$	Διάμετρος 7ου τετραγώνου	$2\cdot70+99=239$
Πλευρά 8ου τετραγώνου	$169+239=408$	Διάμετρος 8ου τετραγώνου	$2\cdot169+239=577$
…………………………	………………	…………………………	………………

Πίνακας 1

Θεωρώντας τους λόγους των διαμέτρων προς τις πλευρές προσέγγισαν το $\sqrt{2}$ με σφάλμα αρκετά μικρό. Η μέθοδος με σύγχρονο συμβολισμό έχει ως ακολούθως:

Θέτουμε $\lambda_\nu = \dfrac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots\ldots$ τότε :

$\lambda_1 = \dfrac{\delta_1}{\alpha_1} = \dfrac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $\lambda_2 = \dfrac{3}{2} = 1,5$

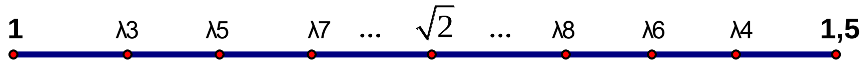
$\lambda_3 = \dfrac{7}{5} = 1,4$ $\qquad$ $\lambda_4 = \dfrac{17}{12} = 1,4166\ldots$

$\lambda_5 = \dfrac{41}{29} = 1,4137913\ldots$ $\qquad$ $\lambda_6 = \dfrac{99}{70} = 1,4142857\ldots$

$\lambda_7 = \dfrac{239}{169} = 1,4142011\ldots$ $\qquad$ $\lambda_8 = \dfrac{577}{408} = 1,4142156\ldots$

………………… $\qquad$ …………………

(Βλέπε και Σχήμα 2)



Σχήμα 2

Παρατηρώντας τους λόγους καθώς επίσης και τη γραφική τους παράσταση σε άξονα (Σχήμα 2) διαπιστώνουμε ότι οι όροι με περιττό δείκτη πλησιάζουν την τιμή $\sqrt{2}$ από δεξιά ενώ οι όροι με άρτιο δείκτη πλησιάζουν το $\sqrt{2}$ από αριστερά. «Οι Πυθαγόρειοι δήλωναν πως ποτέ δεν θα βρεθεί πηλίκο ίσο προς το $\sqrt{2}$ κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής, όσο και αν συνεχιζόταν.» Με σύγχρονη ορολογία θα λέγαμε ότι έχουμε δύο ακολουθίες την ($\lambda_{2\nu+1}$) αύξουσα και την ($\lambda_{2\nu}$) φθίνουσα των οποίων το όριο καθώς το $\nu \to +\infty$ είναι το $\sqrt{2}$, δηλαδή $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \lambda_{2\nu+1} = \sqrt{2}$, $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \lambda_{2\nu} = \sqrt{2}$.

Συνεπώς μέσα από την προσεγγιστική διαδικασία των Πυθαγορείων ανιχνεύει κανείς, σε λανθάνουσα κατάσταση, τις έννοιες του απείρου, της αύξουσας και φθίνουσας ακολουθίας, της φραγμένης ακολουθίας και την έννοια του ορίου ακολουθίας.(Εξαρχάκος,1993)

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου ανάγκασε τους Πυθαγορείους να αναθεωρήσουν την αρχική τους θέση «ότι κάθε γραμμή σχηματίζεται από σημεία που έχουν σχήμα μικρής χάντρας με το ίδιο μέγεθος» και διατύπωσαν την άποψη ότι «κάθε γραμμή σχηματίζεται από σημεία αδιάστατα». Εφόσον όμως το σημείο δεν έχει μήκος, ένας πεπερασμένος αριθμός από σημεία δεν ήταν δυνατόν να συγκροτήσει ευθύγραμμο τμήμα (που φυσικά έχει μήκος). Ανέπτυξαν λοιπόν τον ισχυρισμό ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα θα έπρεπε να αποτελείται από άπειρο πλήθος σημείων, και κάθε χρονικό διάστημα από άπειρο αριθμό στιγμών. (Γιαννακούλιας,2007)

1.2 Ελεατική Σχολή

Η γενική αντίληψη των Πυθαγορείων ότι κάθε μέγεθος π.χ. μια γραμμή μπορεί να σχηματιστεί από άπειρο πλήθος άλλων μεγεθών, δηλαδή αντίληψη για την πολλαπλότητα, αντιμετώπισε μεγάλη κριτική από τον Παρμενίδη (515-440 π.Χ.) ιδρυτή της Ελεατικής Σχολής, ο οποίος πίστευε στην ολότητα, δηλαδή ότι κάθε μέγεθος είναι μια μοναδική οντότητα και δεν μπορεί να διαιρεθεί σε άλλα μικρότερα μεγέθη.

Ο Ζήνων ο Ελεάτης (495-435 π.Χ.) μαθητής του Παρμενίδη προκειμένου να στηρίξει την Ελεατική άποψη διατύπωσε φιλοσοφικά προβλήματα, γνωστά ως παράδοξα που σώζονται στα έργα του Αριστοτέλη. Τέσσερα από τα πιο γνωστά είναι το παράδοξο της διχοτομίας, του Αχιλλέα και της χελώνας, του ιπτάμενου βέλους και του Σταδίου. Τα παράδοξα αυτά «έπαιξαν ένα καθοριστικό ρόλο στην παραπέρα ανάπτυξη των μαθηματικών γιατί διαμόρφωσαν **την υποβόσκουσα περί ορίου αντίληψη** στους υπολογισμούς και στις αποδείξεις των αρχαίων Ελλήνων.» (Γιαννακούλιας,2007)

Στο «παράδοξο της διχοτομίας», ένας δρομέας διανύει ένα στάδιο κατά μήκος. Πριν τερματίσει θα πρέπει πρώτα να φτάσει στο μέσο της διαδρομής, έπειτα στο μέσο της διαδρομής που υπολείπεται και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο να περνάει από το μέσο του μέρους της διαδρομής που κάθε φορά υπολείπεται με αποτέλεσμα να μην φτάνει ποτέ στο τέλος. Παρατηρούμε την άπειρη διαίρεση του τμήματος. Πιθανόν ο Ζήνων να ήθελε να τονίσει ότι αν δεχθούμε την άπειρη διαίρεση ενός τμήματος καταλήγουμε σε κάτι που είναι «παράδοξο». Σε σύγχρονο συμβολισμό, αν θέσουμε ΑΒ=α την απόσταση που πρέπει να διανύσει ο δρομέας (Σχήμα 3), και με M_1 συμβολίσουμε το μέσο του ΑΒ, M_2 το μέσο του M_1B, M_3 το μέσο του M_2B κτλ., τότε ο δρομέας περνάει από το M_1, στη συνέχεια από το M_2, το M_3, κ.ο.κ.

Σχήμα 3

Η απόσταση που διανύει μετά από ν βήματα δίνεται από την ακολουθία:

$$\alpha_\nu = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha}{2^\nu} = \frac{\alpha}{2}\;\frac{\frac{1}{2^\nu} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \alpha\left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right) = \alpha - \frac{\alpha}{2^\nu}$$

Όπως παρατηρούμε για καμιά τιμή του ν η απόσταση δεν θα γίνει ίση με α άρα ο δρομέας δεν θα φτάσει ποτέ στο Β. Μπορεί όμως να προσεγγίσει το Β, όσο θέλουμε, κάνοντας μεγάλο αριθμό βημάτων.

Τα «παράδοξα» του Ζήνωνα ήταν μία πρόκληση για τους μαθηματικούς της εποχής του, να ασχοληθούν με το άπειρο άθροισμα των τμημάτων: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{8}+\ldots$.

Αν προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε τη διαδικασία αυτή με σύγχρονη ορολογία θα καταλήξουμε στο όριο ακολουθίας $\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\lim_{\nu\to\infty}(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha}{2^\nu})$.

«Μετά το Ζήνωνα η έννοια του απείρου έγινε κεντρικό θέμα συζήτησης και αντιπαράθεσης των φιλοσόφων και των μαθηματικών. Οι τελευταίοι, προκειμένου να αποφύγουν τις δυσκολίες που προέκυπταν από τη χρήση των απειροστών, και κάτω από την πίεση της φιλοσοφίας, έπαυσαν να χρησιμοποιούν την έννοια του απείρου και τις άπειρες διαδικασίες και μελετούσαν πεπερασμένα μεγέθη, τα οποία μπορούσαν να γίνουν οσοδήποτε μεγάλα ή μικρά επιθυμούσαν, αποφεύγοντας την άπειρη αύξηση ή ελάττωση» (Γιαννακούλιας,2007)

1.3 Μέθοδος της εξάντλησης

Προσεγγιστικές διαδικασίες θα συναντήσουμε πάλι στον Αντιφώντα (δεύτερο μισό του 5^{ου} αιώνα π.Χ.). Στην προσπάθειά του να δώσει λύση στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, χρησιμοποίησε εγγεγραμμένα πολύγωνα σε κύκλο των οποίων διπλασίαζε το πλήθος των πλευρών, δεχόμενος ότι με αυτόν τον τρόπο θα βρεθεί πολύγωνο με απειροελάχιστο μήκος πλευράς, ώστε τελικά να ταυτιστεί με τον κύκλο. Ο Αντιφών μπορεί να θεωρηθεί πρόδρομος της μεθόδου της εξάντλησης την οποία θα αναπτύξει και θα αποδείξει αργότερα ο Εύδοξος (408-355 π.Χ.), ο μεγαλύτερος μετά τον Αρχιμήδη μαθηματικός της κλασικής αρχαιότητας. Μέσα από το πολύπλευρο έργο του Ευδόξου ξεχωρίζει η διατύπωση της θεωρίας λόγων (V βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη) και της αρχής της εξάντλησης (Χ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη).

Η θεωρία λόγων «έβγαλε την μαθηματική κοινότητα από την κρίση που είχε δημιουργήσει η ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου του τετραγώνου. Πρόκειται για μια γεωμετρική θεωρία, δοσμένη με αυστηρή αξιωματική μορφή, που καθιστούσε περιττή κάθε αναφορά σε σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη».(Γιαννακούλιας,2007) Από τη θεωρία αυτή θα ξεχωρίσουμε τον δ΄ ορισμό του V βιβλίου των Στοιχείων ο οποίος έμεινε γνωστός ως αρχή Ευδόξου-Αρχιμήδη ή ως αξίωμα συνέχειας :

«Λόγον ἔχειν πρός ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἅ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν»

Δηλαδή αν Α, Β είναι δύο μεγέθη του ιδίου είδους, και το Α είναι μικρότερο του Β τότε πάντα θα υπάρχει θετικός ακέραιος ν ώστε νΑ να είναι μεγαλύτερο από το Β. Η πρόταση αυτή μας παραπέμπει σε άπειρες διαδικασίες.

Επίσης πρέπει να επισημάνουμε ότι από τη θεωρία λόγων του Ευδόξου πιθανότατα επηρεάστηκε, πολλούς αιώνες αργότερα, (19^{ος} αιώνας μ.Χ.) ο γερμανός μαθηματικός Dedekind, ώστε να ορίσει με αυστηρό τρόπο τους πραγματικούς αριθμούς (τομές Dedekind) και να ανοίξει το δρόμο για τον ακριβή ορισμό του ορίου. (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας,1999)

Στο Χ βιβλίο των Στοιχείων, όπως προαναφέρθηκε, διατυπώνεται στην Πρόταση 1 η αρχή της εξάντλησης:

Πρόταση Χ.1 «Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐάν ἀπό τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἤ τό ἥμισυ καί τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἤ το ἥμισυ και τοῦτο ἀεί γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὅ ἐσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους»

Η ερμηνεία της πρότασης αυτής στη σύγχρονη γλώσσα είναι:

«Όταν παρουσιάζονται δύο μεγέθη άνισα (σε ελεύθερη απόδοση: για οποιαδήποτε άνισα μεγέθη), εάν από το μεγαλύτερο τμήμα αφαιρεθεί ένα τμήμα μεγαλύτερο από το μισό του και από αυτό που απομένει ένα τμήμα μεγαλύτερο από το μισό του, και αυτό γίνεται διαρκώς, θα απομείνει ένα μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικροτέρου μεγέθους».

Η αρχή της εξάντλησης αποτελεί μία εφαρμογή της αρχής της συνέχειας και είναι μεγίστης σημασίας για τη γένεση των απείρων διαδικασιών. Με τη μέθοδο αυτή ο Εύδοξος, πρώτος, θα αποδείξει με τρόπο αυστηρό εικασίες που είχαν διατυπώσει ο Ιπποκράτης ο Χίος και ο Δημόκριτος για εμβαδά καμπυλόγραμμων σχημάτων και όγκους στερεών.

Ο Εύδοξος **απέφυγε το πέρασμα στο όριο**, **με την αρχή της εξάντλησης όμως, οδηγείται σε άπειρες διαδικασίες στις οποίες υποκρύπτεται η έννοια του ορίου.** Πράγματι «αν θελήσουμε να περιγράψουμε τη διαδικασία της μεθόδου σε σύγχρονη ορολογία θεωρούμε δύο ομοειδή μεγέθη α και ε με το α να είναι μεγαλύτερο του ε. Αφαιρούμε από το α μέγεθος α_1 μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόλοιπο μέγεθος αφαιρούμε ένα μέγεθος α_2 μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται. Ορίζεται τότε η ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathrm{N}}$ με $s_1=\alpha_1$, $s_2=\alpha_1+\alpha_2$, …, $s_n=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$. Στο νιοστό βήμα το υπόλοιπο που θα έχει απομείνει είναι το μέγεθος $\alpha-s_n$. Από την αρχή της εξάντλησης θα υπάρχει για το δοσμένο ε κάποιο n_0 ώστε $\alpha-s_n$ να γίνεται μικρότερη από το ε για κάθε $n\geq n_0$. Αυτό ισοδυναμεί με τον ισχυρισμό ότι $\lim_n s_n=\alpha$» (Γιαννακούλιας,2007)

Η χρησιμοποίηση της παραπάνω μεθόδου στην απόδειξη της Πρότασης 2 του XII βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, χαρακτηρίζει το υψηλό επίπεδο στο οποίο είχε φτάσει η σκέψη των αρχαίων Ελλήνων. Θα μπορούσε η απόδειξη αυτή να αποτελέσει σταθμό στην ιστορία των μαθηματικών.

Πρόταση XII.2 «Οἱ κύκλοι πρός ἀλλήλους εἰσίν ὡς τά ἀπό τῶν διαμέτρων τετράγωνα »

Δηλαδή : «Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των αντίστοιχων διαμέτρων τους»

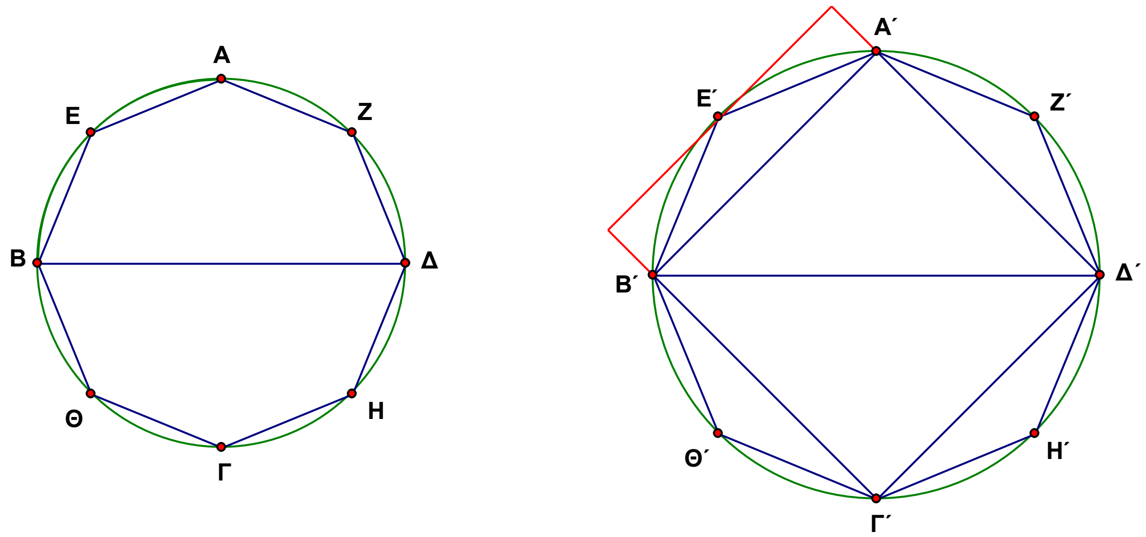
Η Πρόταση αποδίδεται στον Εύδοξο, και η απόδειξή της υπάρχει στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Απόδειξη.

Έστω δύο κύκλοι με εμβαδά Ε, Ε΄ και διαμέτρους ΒΔ, Β΄Δ΄ αντίστοιχα. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{E}{E'}=\frac{B\Delta^2}{B'\Delta'^2}$.

Υποθέτουμε ότι $\frac{E}{E'}\neq\frac{B\Delta^2}{B'\Delta'^2}$. Τότε θα υπάρχει επιφάνεια με εμβαδό Σ τέτοια ώστε

$\frac{E}{\Sigma}=\frac{B\Delta^2}{B'\Delta'^2}$ (1) και έστω $\Sigma < E'$.



Σχήμα 4

Στον δεύτερο κύκλο εγγράφουμε τετράγωνο Α΄Β΄Γ΄Δ΄. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του κύκλου. Διχοτομούμε τα τόξα Α΄Β΄, Β΄Γ΄, Γ΄Δ΄, ΔΆ΄ και κατασκευάζουμε το οκτάγωνο ΑΈ΄Β΄Θ΄Γ΄Η΄Δ΄Ζ΄. Το καθένα από τα τρίγωνα Α΄Ε΄Β΄, Β΄Θ΄Γ΄, Γ΄Η΄Δ΄, Δ΄Ζ΄Α΄ είναι μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου κυκλικού τμήματος, διότι το διπλάσιο κάθε τριγώνου είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μεγαλύτερο του κυκλικού τμήματος. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται, διχοτομώντας τα τόξα. Τελικά τα κυκλικά τμήματα που θα απομείνουν θα έχουν άθροισμα ε μικρότερο από τη διαφορά Ε΄-Σ (Πρόταση Χ.1) και το εγγεγραμμένο πολύγωνο θα έχει εμβαδό P_2 με $P_2>\Sigma$.

Κατασκευάζουμε στον πρώτο κύκλο ένα όμοιο πολύγωνο με εμβαδόν P_1. Τότε ισχύει: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{B\Delta^2}{B'\Delta'^2}$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε : $\frac{E}{\Sigma} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow \frac{E}{P_1} = \frac{\Sigma}{P_2}$ ΑΤΟΠΟ διότι $E > P_1$ ενώ $\Sigma < P_2$.

Επίσης καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $\Sigma > E'$. Άρα $\Sigma = E'$ και αποδείχθηκε η πρόταση. (Van Der Waerden,2010)

Για την παραπάνω απόδειξη θα γράψει ο Van Der Waerden «… παραμένει ένα επιστημονικό επίτευγμα που προκαλεί θαυμασμό. Εμπεριέχει με πλήρη αυστηρότητα, τη **σύγχρονη έννοια του ορίου, γιατί τα εγγεγραμμένα πολύγωνα προσεγγίζουν τον κύκλο με την ακριβή σημασία του όρου, με τη σημασία δηλαδή ότι η διαφορά τους μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε επιφάνεια.**» Και ο C. Boyer θα σημειώσει : «Θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι **η μέθοδος της εξάντλησης, εισήγαγε για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών την ιδέα του ορίου**».

Η μέθοδος αυτή ήταν λαμπρή στην επινόησή της, δύσκολη όμως στη χρησιμοποίησή της, διότι θα έπρεπε να είναι γνωστό εκ προτέρων το αποτέλεσμα της προς απόδειξη σχέσης. Θα περάσει περισσότερο από ένας αιώνας, ώστε ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας, να αξιοποιήσει τη μέθοδο της εξάντλησης. Ο ευφυής νους του, τη χρησιμοποιεί με επιτυχία πολλές φορές.

Σε μια πραγματεία με τίτλο «κύκλου μέτρησις», ο Αρχιμήδης αποδεικνύει δύο σημαντικές προτάσεις. Στην πρώτη αποδεικνύει ότι η τιμή του π βρίσκεται μεταξύ του $3\frac{1}{7}$ και του $3\frac{10}{71}$, και στη δεύτερη πρόταση ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου με βάση ίσου μήκους με την περιφέρεια του κύκλου και ύψος ίσο με την ακτίνα του, κάτι που αντιστοιχεί απόλυτα με τον τύπο πr^2 . Και στις δύο περιπτώσεις η γεωμετρική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν η χάραξη **εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων του κύκλου**. Κατόπιν με συνεχή διπλασιασμό του αριθμού των πλευρών τους τα πολύγωνα τείνουν να ταυτιστούν με την περιφέρεια του κύκλου. Ακόμα τα δύο πολύγωνα τείνουν να πλησιάσουν το ένα το άλλο, «στριμώχνοντας» κατά κάποιο τρόπο, τον κύκλο μεταξύ τους, έτσι ώστε, αν φανταστούμε τη διαδικασία αυτή να συνεχίζεται επ’ άπειρον (στο όριο) τα εμβαδά των πολυγώνων θα τείνουν να ταυτιστούν με το εμβαδόν του κύκλου. Η δεύτερη πρόταση διατυπώθηκε ως εξής:

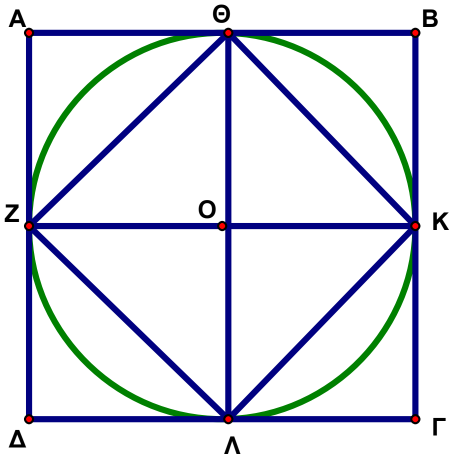
«Πᾶς κύκλος ἐστι τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ οὗ ἡ μέν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περί τήν ὀρθήν, ἡ δέ περίμετρος τῇ βάση.»

Το εμβαδόν του κύκλου ισούται με το εμβαδόν τριγώνου με κάθετες πλευρές τα μήκη s, R (περίμετρος και ακτίνα του κύκλου).

Η απόδειξή της δίνεται με σύγχρονη ορολογία .

Σε κύκλο κέντρου Ο εγγράφεται τετράγωνο ΖΘΚΛ εμβαδού E_1.

Σχήμα 5



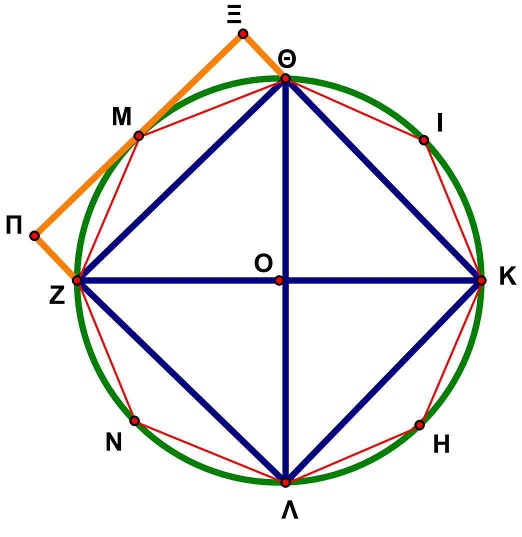
Από το σχήμα προκύπτει ότι εμβ(ΑΒΓΔ) > Ε , όπου Ε το εμβαδόν του κύκλου.

Εφόσον εμβ(ΑΒΓΔ) = 2 εμβ(ΖΘΚΛ) θα είναι και

$$2\,\varepsilon\mu\beta(\mathrm{Z\Theta K\Lambda}) > \mathrm{E} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}_1 = \varepsilon\mu\beta(\mathrm{Z\Theta K\Lambda}) > \frac{\mathrm{E}}{2} \ .$$

Με διχοτόμηση των τόξων ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΖ προκύπτει το κανονικό οκτάγωνο ΖΜΘΙΚΗΛΝ.

Σχήμα 6



Ισχυρισμός : $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{ZM\Theta}) > \dfrac{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \ \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ (\mathrm{ZM\Theta})}{2}$

Πράγματι, $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{Z\Pi\Xi\Theta}) > \varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ (\mathrm{ZM\Theta})$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\mu\beta(\mathrm{ZM\Theta}) > \frac{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \ \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ (\mathrm{ZM\Theta})}{2}$$

Τότε

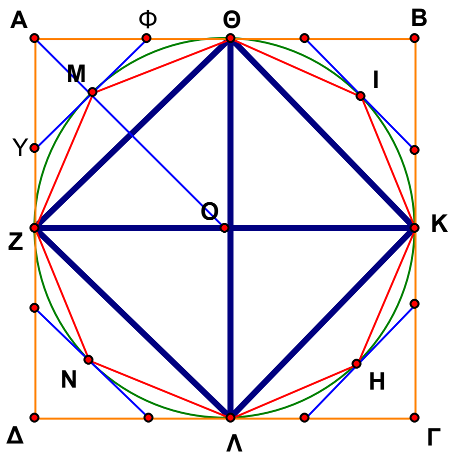
$$\varepsilon\mu\beta(\mathrm{Z M \Theta}) + \varepsilon\mu\beta(\Theta \mathrm{I K}) + \varepsilon\mu\beta(\mathrm{K H}\Lambda) + \varepsilon\mu\beta(\Lambda \mathrm{N Z}) > \frac{4 \;\; \varepsilon\mu\beta.\ \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa\acute{\omega}\nu\ \tau\mu\eta\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu\ (\mathrm{Z M}\Theta)}{2}$$

Η διαδικασία συνεχίζεται εγγράφοντας κάθε φορά κανονικό πολύγωνο με διπλάσιο αριθμό πλευρών από το προηγούμενο εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο. Από την αρχή της εξάντλησης η διαφορά $E\text{-}E_{\nu}$ του εμβαδού του εγγεγραμμένου ν-γώνου από το εμβαδόν Ε του κύκλου μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή.

Ο Αρχιμήδης επαναλαμβάνει τη διαδικασία με περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα.

Περιγράφει στον κύκλο κέντρου Ο τετράγωνο ΑΒΓΔ εμβαδού ε_1. Προφανώς $\varepsilon_1 > \mathrm{E}$.

Σχήμα 7



Θα αποδείξει ότι : $\mathrm{E} > \dfrac{\varepsilon_1}{2}$

Ισχύει $\varepsilon_1 = 2\,\varepsilon\mu\beta(\mathrm{Z}\Theta\mathrm{K}\Lambda)$ και $\mathrm{E} > \varepsilon\mu\beta(\mathrm{Z}\Theta\mathrm{K}\Lambda)$ τότε $\mathrm{E} > \varepsilon\mu\beta(\mathrm{Z}\Theta\mathrm{K}\Lambda) = \dfrac{\varepsilon_1}{2}$.

Από τα μέσα Μ. Ι, Η, Ν των τόξων ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ και ΛΖ φέρει τις εφαπτόμενες.

Θα αποδείξει ότι : $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}\Upsilon\Phi) > \dfrac{\varepsilon\mu\beta(\mathrm{AZM}\Theta\mathrm{A})}{2}$

Ισχύει $\mathrm{M}\Phi = \Phi\Theta$, ως εφαπτόμενες του κύκλου από το σημείο Φ. $\mathrm{AO} \perp \Upsilon\Phi$ οπότε $\mathrm{A}\Phi > \mathrm{M}\Phi = \Phi\Theta$. Τα τρίγωνα ΑΜΦ και ΜΦΘ έχουν το ίδιο ύψος από το Μ, και $\mathrm{A}\Phi > \Phi\Theta$. Άρα $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{AM}\Phi) > \varepsilon\mu\beta(\mathrm{M}\Phi\Theta) > \varepsilon\mu\beta(\mathrm{M}\Theta\Phi\mathrm{M})$.

Ομοίως $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}\Upsilon\mathrm{M}) > \varepsilon\mu\beta(\Upsilon\mathrm{MZ}\Upsilon)$.

Επομένως $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}\Upsilon\Phi) > \varepsilon\mu\beta(\mathrm{M}\Theta\Phi\mathrm{M}) + \varepsilon\mu\beta(\Upsilon\mathrm{MZ}\Upsilon)$

Με πρόσθεση και στα δύο μέλη του όρου $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}\Upsilon\Phi)$ προκύπτει ότι

$2\,\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}\Upsilon\Phi) > \varepsilon\mu\beta(\mathrm{AZM}\Theta)$ και άρα $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}\Upsilon\Phi) > \dfrac{\varepsilon\mu\beta(\mathrm{AZM}\Theta\mathrm{A})}{2}$.

Η διαδικασία συνεχίζεται με την περιγραφή κάθε φορά πολυγώνων με διπλάσιο πλήθος πλευρών από αυτόν του προηγούμενου κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου. Με εφαρμογή της αρχής της εξάντλησης προκύπτει ότι η διαφορά $\varepsilon_\nu - \mathrm{E}$ του εμβαδού Ε του κύκλου από το εμβαδόν ε_ν του περιγεγραμμένου κανονικού ν-γώνου μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή.

Αν συμβολίσουμε με ε το εμβαδόν τριγώνου με βάση S ίση με την περίμετρο του κύκλου και ύψος R ίσο με την ακτίνα του κύκλου τότε η ισότητα $\varepsilon = \mathrm{E}$, επιτυγχάνεται με τη μέθοδο της διπλής αντίφασης.

Υποθέτουμε ότι $\mathrm{E} > \varepsilon$ τότε $\mathrm{E} - \mathrm{E}_\nu < \mathrm{E} - \varepsilon$ και άρα $\varepsilon < \mathrm{E}_\nu$ (1)

Αν π_ν είναι η περίμετρος του εγγεγραμμένου ν-γώνου και α_ν το αντίστοιχο απόστημα έχουμε $\mathrm{E}_\nu = \frac{1}{2}\pi_\nu \cdot \alpha_\nu < \frac{1}{2} S \cdot R = \varepsilon$ ΑΤΟΠΟ λόγω της (1).

Παρόμοια αν $\mathrm{E} < \varepsilon$ θα είναι $\varepsilon_\nu - \mathrm{E} < \varepsilon - \mathrm{E}$ και άρα $\varepsilon_\nu < \varepsilon$ (2)

ε_ν είναι το εμβαδόν του περιγεγραμμένου ν-γώνου και π_ν', α_ν' η περίμετρός του και το απόστημά του αντίστοιχα.

Επειδή $\varepsilon_\nu = \frac{1}{2}\pi_\nu' \cdot \alpha_\nu'$ με $\pi_\nu' > S$ και $\alpha_\nu' > R$ προκύπτει

$\varepsilon_\nu > \varepsilon$, που είναι άτοπο λόγω της (2).

Η τεχνική που χρησιμοποιείται σήμερα για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου είναι στην ουσία ίδια με εκείνη του Αρχιμήδη. Σε σύγχρονη ορολογία το εμβαδόν του κύκλου ισούται με το κοινό όριο των ακολουθιών (E_ν) και (ε_ν) των εμβαδών των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων αντίστοιχα, καθώς το πλήθος ν των πλευρών τείνει στο άπειρο. (Γιαννακούλιας, 2007)

Ο Αρχιμήδης φτάνει πολύ κοντά στην έννοια του ορίου, θα λέγαμε ότι την αγγίζει, παρόλα αυτά θα την παρακάμψει, δεν θα την αναπτύξει ίσως επηρεασμένος από τα παράδοξα του Ζήνωνα. Έτσι η έννοια του ορίου θα παραμείνει κρυμμένη για αρκετούς αιώνες.

«Η βαθειά εντύπωση που προξένησαν στην αρχαία ελληνική διανόηση τα παράδοξα του Ζήνωνα είχαν ως αποτέλεσμα την ολική απόρριψη από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας της έννοιας του ορίου, ως συμπληρωμένης και τελειωμένης μετά από ένα άπειρο αριθμό βημάτων διαδικασίας. Έτσι οι αποδείξεις του Ευδόξου και του Αρχιμήδη, που σήμερα θα θεωρούσαμε ότι ασχολούνται με υπολογισμούς ορίων, ποτέ δεν χρησιμοποιούν κατά εκπεφρασμένο τρόπο την έννοια του ορίου, που την θεωρούσαν όχι μαθηματικά έγκυρη και αυστηρή, αλλά βασίζονταν σε μια πεπερασμένου τύπου μέθοδο διπλής αντίφασης» (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, 1999)

Συμπερασματικά οι αρχαίοι Έλληνες δεν ανέπτυξαν την έννοια του ορίου, δεν ασχολήθηκαν καθαρά με αυτή. Η ιδέα όμως του ορίου υπάρχει στα έργα τους στα οποία στηρίχθηκαν αργότερα μεγάλοι μαθηματικοί ώστε να οδηγηθούν στην αυστηρότερή του μορφή.

2. ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ

Μετά τον Αρχιμήδη άρχισαν να φθίνουν τα μαθηματικά που αφορούσαν τον απειροστικό λογισμό. Ακολουθεί η Ρωμαϊκή αυτοκρατορία κατά την οποία το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά περιορίζεται. «Εδώ και χρόνια έχει αναγνωριστεί ότι δεν υπήρξαν «ρωμαϊκά μαθηματικά». Βέβαια, υπήρξαν ευφυείς μαθηματικοί που εργάστηκαν στα χρόνια της ρωμαϊκής αυτοκρατορίας, κυρίως στην Αλεξάνδρεια, αλλά όλοι τους ανήκαν στη συνεχιζόμενη ελληνική παράδοση».(Katz, 2013) Οι άραβες και οι ανατολικοί λαοί δεν ασχολήθηκαν με τις βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού ωστόσο με τη βοήθεια των μεταφράσεων εξοικειώθηκαν με την αρχαία ελληνική κληρονομιά. Κατά τη διάρκεια του 11ου, 12ου και 13ου αιώνα γίνονται μεταφράσεις στα λατινικά σημαντικού μέρους της ελληνικής και αραβικής επιστήμης με κυριότερο μεταφραστικό κέντρο το Τολέδο της Ισπανίας.

Την ίδια εποχή άρχισε μία φιλοσοφική συζήτηση για την έννοια του απείρου, τη φύση του συνεχούς και την ύπαρξη των αδιαιρέτων. Οι σχολαστικοί υποστήριζαν ότι:

- δεν υπάρχει πραγματικό άπειρο,
- για κάθε συνεχές υπάρχει η δυνατότητα του επ’ άπειρον διαμερισμού του,
- δεν υπάρχει ελάχιστη γραμμή, γιατί είναι μέγεθος αδιαίρετο
- το σημείο με την κίνησή του μπορεί να δημιουργήσει γραμμή.

Όλοι αυτοί οι φιλοσοφικοί συλλογισμοί θα επηρεάσουν αργότερα τους επινοητές του απειροστικού λογισμού.

2.1 Μεσαιωνικές μελέτες της κίνησης

Ενδιαφέρον για τη μαθηματική θεώρηση των εννοιών (του απείρου, του απειροστού, του συνεχούς και άλλες που έχουν σχέση με την ανάλυση) παρουσιάζεται τον 14ο αιώνα και εξής κυρίως με τους Thomas Bradwardine, Richard Suiseth (επίσης Swineshead) και Nicole Oresme.

Ο Thomas Bradwardine (1295-1349) γνωστός και με το παρωνύμιο doctor profundus (βαθύς επιστήμων), από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της εποχής του, έγραψε αρκετά μαθηματικά έργα, μερικά από τα οποία αναφέρονται στα αδιαίρετα και τη συνέχεια. Στα έργα του «Geometria Speculativa», «Tractatus de continuo» και «Liber de proportionibus» αναφέρεται στα αδιαίρετα, μελετά τη φύση του συνεχούς και υποστηρίζει ότι τα «συνεχή μεγέθη» αν και περιέχουν άπειρο αριθμό αδιαιρέτων, δεν απαρτίζονται από αδιαίρετα, αλλά από ένα άπειρο αριθμό συνεχών του ίδιου είδους. (Εξαρχάκος, 1993)

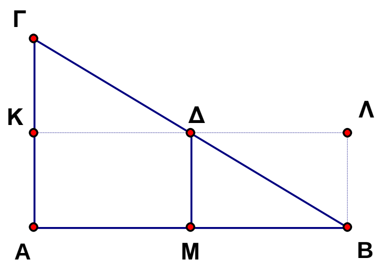
Ενώ τον 13ο αιώνα η κίνηση μελετήθηκε κυρίως από φιλοσοφικής πλευράς, τον 14ο αιώνα η προσοχή των διανοουμένων στράφηκε προς τα μαθηματικά και την ποσοτική διατύπωση των νόμων της κίνησης. Παράλληλα εκδηλώθηκε ζωηρό ενδιαφέρον για τον τρόπο μεταβολής της έντασης των ποιοτήτων ή μορφών. Ποιότητες ή μορφές ήταν φαινόμενα όπως η θερμότητα, το φως, το χρώμα, η πυκνότητα, η ταχύτητα, που μπορούσαν να έχουν διάφορους βαθμούς εντάσεων κατά τη συνεχή μεταβολή τους. Η ένταση (intensio) ή το πλάτος (latitudo) μιας μορφής ήταν η αριθμητική τιμή που έπρεπε ν' αποδοθεί στη μορφή. Άρχισαν λοιπόν να ερευνούν για τη σχέση που υπήρχε ανάμεσα στην ένταση μιας ποιότητας και σε μια αμετάβλητη μορφή που την ονόμαζαν έκταση (extensio) ή μήκος (longitudo) όπως για παράδειγμα ήταν η απόσταση και ο χρόνος. (Γιαννακούλιας, 2007) Ερευνητές του Merton College της Οξφόρδης θα μελετήσουν την κίνηση για πρώτη φορά με τη βοήθεια των μαθηματικών. Μια νέα επιστήμη δημιουργήθηκε και αναπτύχθηκε, η Κινηματική. Η προσοχή των επιστημόνων εστιάστηκε στις έννοιες του χρόνου, της ταχύτητας και ειδικά της στιγμιαίας ταχύτητας. Εντάθηκαν οι προσπάθειες να δοθεί ένας μετρικός ορισμός για την ταχύτητα που να αντιπροσωπεύει ένα λόγο ανάμεσα στην απόσταση και το χρόνο. Και επειδή έλειπε η έννοια του ορίου οι ερευνητές του Merton όρισαν τη στιγμιαία ταχύτητα με τη βοήθεια της ομοιόμορφης ταχύτητας. Μια μεταβολή ορίστηκε ομοιόμορφη, αν σε ίσα χρονικά διαστήματα διανύονται ίσες αποστάσεις και απέδειξαν (οι Heytesbury, Swineshead και Dubleton) ένα από τα πιο σημαντικά μεσαιωνικά αποτελέσματα, το γνωστό **ως κανόνα της μέσης ταχύτητας του Merton** : «Μια ομαλά επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη κίνηση είναι ισοδύναμη, όσον αφορά το διάστημα που διανύεται σε δοθέντα χρόνο, με μια ομαλή κίνηση στην οποία η ταχύτητα είναι ίση καθ' όλη τη διάρκεια, με τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσο του χρόνου της ομαλής επιταχυνόμενης ή επιβραδυνόμενης κίνησης».(Γιαννακούλιας, 2007)

Την ίδια χρονική περίοδο, άλλοι ερευνητές του Merton College άρχισαν να εξερευνούν την ιδέα αναπαράστασης της ταχύτητας με ευθύγραμμα τμήματα. Η βασική ιδέα φαίνεται να προέρχεται από τον Αριστοτέλη, αφού τόσο οι ταχύτητες όσο και τα ευθύγραμμα τμήματα θεωρούνταν απείρως διαιρετά. Επομένως θα μπορούσε κανείς να αναπαραστήσει την κάπως αφηρημένη ιδέα της ταχύτητας με την συγκεκριμένη γεωμετρική ιδέα του ευθύγραμμου τμήματος. Ο Nicole Oresme (1320-1382) οδήγησε την ιδέα αυτή στη λογική της κατάληξη με το να εισαγάγει μία δισδιάστατη αναπαράσταση της ταχύτητας που μεταβάλλεται με το χρόνο.

Το διάγραμμα του Oresme αποτελείται από κατακόρυφες γραμμές που φέρονται προς τη βάση. Στην περίπτωση της ταχύτητας η οριζόντια ευθεία παριστάνει την έκταση της ποιότητας που συνήθως ήταν ο χρόνος, ενώ οι κάθετες σ' αυτή παριστάνουν την ταχύτητα σε κάθε στιγμή. Ολόκληρο το σχήμα παρίστανε τη συνολική κατανομή των ταχυτήτων και ο Oresme θεωρούσε ότι παρίστανε την ολική απόσταση που είχε διανυθεί από το κινητό. Σημαντική ιδέα ήταν ότι ίσες εντάσεις καθορίζονται από ίσες γραμμές. Έτσι για παράδειγμα, σύμφωνα με τον Oresme ένα σώμα που κινείται με ομαλή ταχύτητα, παριστάνεται από ένα ορθογώνιο, διότι σε κάθε σημείο η ταχύτητα ήταν ίδια, και το εμβαδόν του ορθογωνίου εκφράζει τη συνολική απόσταση που διανύθηκε.

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της κίνησης των σωμάτων, ο Oresme στα 1350, έδωσε μία γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος της μέσης ταχύτητας (Σχήμα 8).

Σχήμα 8



Το παραπάνω διάγραμμα αναπαριστά την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ενός σώματος . Στο σημείο Β είναι ακίνητο και Μ είναι το μέσο της βάσης ΑΒ. Η κάθετος ΔΜ παριστάνει την ταχύτητα στο μέσο της διαδρομής και ισούται με το μισό της τελικής ταχύτητας, $\mathrm{M}\Delta = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{2}$. Η συνολική απόσταση που διανύθηκε, παριστάνεται από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ίση με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΛΚ. (Katz, 2013)

Ο Oresme εισήγαγε την ιδέα της κίνησης στη Γεωμετρία και θεώρησε ότι η γραμμή παράγεται από την κίνηση ενός σημείου και όχι ως άθροισμα σημείων και την επιφάνεια να παράγεται από τη ροή ή κίνηση μιας γραμμής παράλληλης προς τον εαυτό της και όχι ως άθροισμα γραμμών. Η ιδέα αυτή επηρέασε αργότερα τον Γαλιλαίο και τον Cavalieri, τον δημιουργό της θεωρίας των αδιαιρέτων. (Baron, 1969)

Το Μεσαίωνα η ανάπτυξη της γραφικής παράστασης, σφυρηλάτησε ένα κρίκο ανάμεσα στις διαισθητικές έννοιες των συνεχώς μεταβαλλόμενων ποσοτήτων που προέκυπταν από φυσικά φαινόμενα και τη γεωμετρία των Ελλήνων. Όταν οι ιδέες των Calculators του Merton Collage εναρμονίστηκαν με τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις των Giovanni di Casali, Nicole Oresme και άλλων, οι έννοιες του χρόνου, της ταχύτητας, της απόστασης και της στιγμιαίας ταχύτητας συνδέθηκαν με τη μελέτη καμπυλών. Το σχήμα μιας καμπύλης ορίζει την κίνηση και η κίνηση με τη σειρά της ορίζει την καμπύλη. Η στιγμιαία ταχύτητα σχετίζεται με την εφαπτομένη της καμπύλης και η ολική κίνηση ή η απόσταση που διανύεται παριστάνεται με το εμβαδόν υπό την καμπύλη. Έτσι ο τετραγωνισμός στην περίπτωση ενός μέρους του επιπέδου που φράσσεται από μία οριζόντια ευθεία, δύο κάθετες (τεταγμένες) και την καμπύλη, δίνει ένα μοντέλο γενικής ολοκλήρωσης που ισχύει για κάθε συνεχώς μεταβαλλόμενη ποσότητα. Οι συναρτησιακές έννοιες μπορεί να ήταν ακόμα περιορισμένες, αλλά η βάση για τις γεωμετρικές ιδιότητες της ολοκλήρωσης και της διαφόρισης ισχυροποιήθηκε, όχι μόνο στον εφοδιασμό ενός ευρύτερου πεδίου εφαρμογής, αλλά επίσης να καθιστά εφαρμόσιμη μια εναλλακτική μέθοδο μελέτης καμπυλών μέσω των εννοιών του χρόνου και της κίνησης (Baron, 1969)

Ο Richard Suiseth, γνωστός με το παρωνύμιο Calculator, στο έργο του «Liber calculationum» ασχολείται με θέματα απείρου, με το άθροισμα σειρών που έχουν άπειρους όρους, με μέγιστα και ελάχιστα, με ταχύτητες, διαστήματα, επιτάχυνση και λόγους μεταβολής και διατυπώνει την πρόταση : «Η ποσότητα της οποίας ο λόγος μεταβολής γίνεται άπειρος, έχει ένα πεπερασμένο μέσο λόγο μεταβολής». Προσπαθώντας να αποδείξει την πρόταση αυτή έφτασε πολύ κοντά στη λύση του προβλήματος της σύγκλισης άπειρων σειρών. **Χρησιμοποιεί τη λέξη fluent για τη μεταβλητή ποσότητα και τη λέξη fluxion για το ρυθμό μεταβολής, όρους που χρησιμοποίησε ο Newton 300 χρόνια αργότερα.** (Εξαρχάκος, 1993)

Ακόμη τα προβλήματα των ερευνητών του Merton Collage κατέληγαν αρκετές φορές σε άθροιση άπειρων σειρών, με τη μελέτη των οποίων ασχολήθηκαν συστηματικά. Ο Swineshead απέδειξε ότι :

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}+...=2$$

Το παραπάνω άθροισμα υπολόγισε και ο Oresme με τη γεωμετρική του μέθοδο.

Έτσι το Μεσαίωνα οι έρευνες για το άπειρο και τα προβλήματα που αφορούσαν την κίνηση θα θέσουν τις λογικές βάσεις του απειροστικού λογισμού. Ο C.Edwards σημειώνει: «**Εκείνο που έχει σημασία σ' αυτές τις μεσαιωνικές έρευνες δεν ήταν τόσο τ' αποτελέσματα που παρήχθησαν, αλλά η αποδοχή των απείρων διαδικασιών στα μαθηματικά**, που προετοίμασε το δρόμο για πιο ενδιαφέρουσες εργασίες στις σειρές τον 17^{ο} αιώνα, όταν πλέον οι μαθηματικοί θα είχαν στη διάθεσή τους την αριθμητική και τις απαιτούμενες αλγεβρικές μεθόδους».(Edwards, 1979)

2.2 Προσπάθεια εισαγωγής της έννοιας του ορίου

Στα τέλη του 15^{ου} και αρχές του 16^{ου} αιώνα σημειώνεται μεγάλη άνθηση στην Άλγεβρα και την υπολογιστική αριθμητική που κράτησε για πολλές δεκαετίες. Άρχισε τότε η επαναστατική αλλαγή στην εξέλιξη των μαθηματικών συμβόλων (το «+» και το «-» εισάγονται για πρώτη φορά), το δύσχρηστο σύστημα των Ρωμαϊκών συμβόλων αντικαθίσταται από τους Ινδοαραβικούς χαρακτήρες που χρησιμοποιούμε και σήμερα. Η επινόηση των λογαρίθμων συνετέλεσε στην απλοποίηση των πολύπλοκων υπολογισμών που γίνονταν με τριγωνομετρικούς πίνακες.

Η γοργή ανάπτυξη των μαθηματικών κατά την Αναγέννηση οφείλεται αφ' ενός στην υπολογιστικότητα των εμπορικών τάξεων, αλλά επίσης και στην παραγωγική χρησιμοποίηση των μηχανών. Οι μηχανές υπήρξαν το κίνητρο για τη δημιουργία της θεωρητικής μηχανικής, καθώς και για την επιστημονική μελέτη της κίνησης, και γενικά της μεταβολής. Η έκδοση, το 1558, των έργων του Αρχιμήδη από τον Federigo Commandino θα καταστήσει προσιτή στους μαθηματικούς την αρχαία μέθοδο ολοκλήρωσης.

Ο υπολογισμός του κέντρου βάρους εξακολουθεί να είναι ευνοούμενο θέμα των επιστημόνων που ασχολούνταν με τη μελέτη των έργων του Αρχιμήδη (ναυσιπλοΐα, αρχιτεκτονική). Αξιοποιώντας και τις μελέτες τους στην στατική κατόρθωσαν ν' αποχτήσουν μια εμπειρική γνώση ορισμένων πρώτων στοιχείων του απειροστικού λογισμού (Struik, 1982)

Εκείνη την εποχή γίνεται η πρώτη ίσως σοβαρή προσπάθεια για την εισαγωγή της έννοιας του ορίου. Ο φλαμανδός μηχανικός Simon Stevin(1548-1620) και ο ιταλός Luca Valerio (1552-1618), ήταν οι δύο πρώτοι ερευνητές που με **άμεση προσφυγή στο όριο**, στην έννοια του οποίου δεν αναφέρονται, τείνουν ν' αποφύγουν τη διπλή αντίφαση της μεθόδου της εξάντλησης. (Struik, 1982)

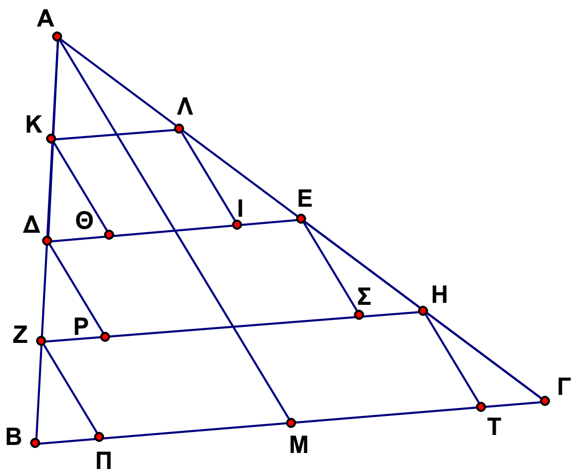
Ο **Stevin** είχε επηρεαστεί ιδιαίτερα από τα έργα του Αρχιμήδη, στα οποία παρέπεμπε πολλές φορές για να αιτιολογήσει δικές του αποδείξεις. Για τον υπολογισμό εμβαδών χρησιμοποίησε **μόνο εγγεγραμμένα** σχήματα σε αντίθεση με τον Αρχιμήδη που χρησιμοποίησε και περιγεγραμμένα. Επίσης ενώ *ο Αρχιμήδης υποστήριξε ότι η διαφορά των* *εμβαδών των χρησιμοποιούμενων σχημάτων μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή αλλά πάντα θα υπάρχει* ο Stevin διατύπωσε την άποψη ότι **η διαφορά αυτή γίνεται ολοένα μικρότερη και στο άπειρο εξαφανίζεται.** Επίσης χρησιμοποιούσε την αρχή : *«Δύο οιαδήποτε μεγέθη, των οποίων η διαφορά μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι μικρότερη από οιοδήποτε δοσμένο μέγεθος, τότε είναι και ίσα μεταξύ τους».* (Baron, 1969)

Η παρακάτω πρόταση μας δείχνει κάποια χρήση «οριακών» διαδικασιών.

Πρόταση. Το κέντρο βάρους ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του.

Απόδειξη.

Σχήμα 9



Εγγράφει ο Stevin σε τρίγωνο ΑΒΓ ένα αριθμό παραλληλογράμμων ίσου ύψους, όπως στο σχήμα. Το κέντρο βάρους του εγγεγραμμένου σχήματος θα κείται στη διάμεσο από την αρχή του Αρχιμήδη που λέει ότι : «τα αμφιπλεύρως συμμετρικά σχήματα ισορροπούν».

Αν εγγράψουμε στο τρίγωνο ένα άπειρο αριθμό τέτοιων παραλληλογράμμων, τότε για όλα αυτά το κέντρο βάρους θα βρίσκεται πάνω στην ΑΜ. Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των εγγεγραμμένων παραλληλογράμμων, τόσο μικρότερη θα είναι η διαφορά μεταξύ του εγγεγραμμένου σχήματος και του τριγώνου ΑΒΓ. Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα «weights» των τριγώνων ΑΒΜ και ΑΜΓ δεν είναι ίσα, τότε θα έχουν κάποια σταθερή διαφορά. Όμως δεν μπορεί να υπάρχει τέτοια διαφορά, καθόσον καθένα από τα τρίγωνα μπορεί να διαφέρει τόσο λίγο, όσο επιθυμούμε από τα αθροίσματα των παραλληλογράμμων που εγγράφονται σ' αυτά, τα οποία είναι ίσα και άρα τα «weights» των ΑΒΜ, ΑΓΜ είναι ίσα και επομένως το κέντρο βάρους του ΑΒΓ είναι πάνω στη διάμεσο ΑΜ (Boyer, 1949)

Ο Stevin στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποίησε τη διπλή αντίφαση της μεθόδου της εξάντλησης. Στη συνέχεια προσπάθησε να την αντικαταστήσει ακολουθώντας μία οριακή διαδικασία, όπως φαίνεται παρακάτω.

Συμβολίζουμε με Ε, E_1, E_2 τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ, ΑΓΜ αντίστοιχα, και Σ_ν'', Σ_ν, Σ_ν' είναι τα αθροίσματα των εμβαδών των ισοϋψών παραλληλογράμμων που είναι εγγεγραμμένα στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΜ, ΑΓΜ αντίστοιχα. Έτσι καθώς το ν αυξάνει, η διαφορά $E-\Sigma_\nu''$ μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρή.

Θα αποδείξουμε ότι $E_1 = E_2$.

Έστω ότι $E_1 \neq E_2$ και $E_1 > E_2$. Θέτουμε $E_1 - E_2 = \varepsilon$.

Καθώς το ν (το πλήθος των εγγεγραμμένων παραλληλογράμμων) αυξάνει, οι διαφορές $E_1 - \Sigma_\nu$, $E_2 - \Sigma_\nu'$ γίνονται όσο θέλουμε μικρές. Παίρνουμε :

$E_1 - \Sigma_\nu < \varepsilon = E_1 - E_2$

Έχουμε $-\Sigma_\nu < -E_2$ ή $\Sigma_\nu > E_2$

Όμως $\Sigma_\nu = \Sigma_\nu'$

Άρα $\Sigma_\nu' > E_2$ άτοπο.

Στην απόδειξη ο Stevin δέχεται ότι $\Sigma_\nu = \Sigma_\nu'$ επειδή είναι το άθροισμα των εμβαδών ισοϋψών παραλληλογράμμων που εγγράφονται στα τρίγωνα ΑΒΜ, ΑΓΜ αντίστοιχα και Σ_ν, Σ_ν' αυξάνουν καθώς το ν αυξάνει, έτσι ώστε η διαφορά $E_1 - \Sigma_\nu$ ($\alpha\nu\tau.$ $E_2 - \Sigma_\nu'$) να γίνεται όσο θέλουμε μικρή. Ουσιαστικά ο Stevin σε σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό δέχεται ότι οι ακολουθίες (Σ_ν), (Σ_ν') συγκλίνουν και ότι :

$$E_1 = \lim_\nu(\Sigma_\nu) = \lim_\nu(\Sigma_\nu') = E_2$$

Ο Stevin δέχεται ότι στο άπειρο η διαφορά για παράδειγμα $E_1 - \Sigma_\nu$ δεν υπάρχει, δηλαδή $\lim_\nu(E_1 - \Sigma_\nu) = 0$ $\acute{\eta}$ $\lim_\nu(\Sigma_\nu) = E_1$ (Εξαρχάκος, 1993)

Ο Stevin δεν μίλησε βέβαια, για το τρίγωνο ως όριο του αθροίσματος των εγγεγραμμένων παραλληλογράμμων, αλλά ωστόσο θα απαιτούνταν μικρές αλλαγές στη μέθοδό του για να αναγνωρίσει κανείς τη σύγχρονη μέθοδο των ορίων. (Boyer, 1949)

Ο Valerio εργάστηκε και αυτός προς την κατεύθυνση της μετατροπής των αποδείξεων του Αρχιμήδη και την αποφυγή της διπλής αντίφασης στη μέθοδο της εξάντλησης. Καθώς ήταν γεωμέτρης και δεξιοτέχνης στη θεωρία αναλογιών εργάστηκε μέσα στα πλαίσια της Ευκλείδειας μεθόδου . Οι γενικεύσεις που έκανε εμφανίζονται λιγότερο αυστηρές από αυτές του Stevin.

Ξεκίνησε με σκοπό να κατασκευάσει μία γεωμετρική θεωρία ορίου, που θα τον καθιστούσε ικανό να αποφύγει εντελώς τη διπλή αντίφαση. Λίγα μπόρεσε να πετύχει, διότι του έλειπαν τα πλεονεκτήματα κάποιου είδους συναρτησιακού συμβολισμού. Στην προσπάθεια του αυτή διατύπωσε διάφορες προτάσεις, μία από τις οποίες πλησιάζει αυτήν που σε σύγχρονη ορολογία λέγει ότι το όριο του λόγου δύο μεταβλητών ισούται με το λόγο των ορίων αυτών των μεταβλητών, δηλαδή $\lim_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\lim_n \alpha_n}{\lim_n \beta_n}$. (Baron, 1969)

3. ΠΡΩΙΜΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΕΙΡΟΣΤΩΝ ΚΑΙ ΑΔΙΑΙΡΕΤΩΝ

Ο φόβος των αρχαίων Ελλήνων για το άπειρο είχε αποτρέψει όπως είδαμε την ανάπτυξη μιας εύχρηστης θεωρίας ορίων, που θα αντικαθιστούσε τις πανταχού παρούσες αποδείξεις με τη μέθοδο της διπλής αντίφασης. Σαν αποτέλεσμα όμως των μελετών των μεσαιωνικών σχολαστικών, πάνω στην απειρότητα και το συνεχές, οι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα δεν ήταν πλέον απρόθυμοι να εισάγουν απειροστικές τεχνικές. Έτσι οι Kepler, Γαλιλαίος και Cavalieri αναπτύσσουν νέες μεθόδους για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, οι οποίες υποκρύπτουν **οριακές διαδικασίες**. Οι μέθοδοι αυτοί μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο βασικές κατηγορίες :

α) Μέθοδος απειροστών

β) Μέθοδος αδιαιρέτων.

Ο **Kepler(1571-1630) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των απειροστών, ενώ ο Cavalieri(1598-1647) τη μέθοδο των αδιαιρέτων**, ξεφεύγουν από τη μέθοδο της εξάντλησης η οποία ήταν δύσκολη.

3.1 Μέθοδος απειροστών

Κατά τον Kepler οι επιφάνειες ή οι όγκοι υπολογίζονταν με τη βοήθεια άπειρων στοιχείων της ίδιας διάστασης. **Η ταυτοποίηση καμπυλόγραμμων εμβαδών και όγκων με το άθροισμα απείρου αριθμού απειροστών στοιχείων της ίδιας διάστασης ήταν η ουσία της μεθόδου του Kepler.** Για παράδειγμα θεωρούσε τον κύκλο σαν ένα κανονικό πολύγωνο με άπειρο αριθμό πλευρών. Θεωρούσε ότι ο κύκλος αποτελείται από άπειρο αριθμό τριγώνων, με κοινή κορυφή το κέντρο του, με άπειρα μικρές βάσεις στην περιφέρεια του τις πλευρές του πολυγώνου, με ύψη τα αποστήματα από το κέντρο του κύκλου ή την ακτίνα. Τα τρίγωνα αυτά είχαν εμβαδόν απειροστού μεγέθους. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο αυτή με επιδεξιότητα και φαντασία σε μεγάλο αριθμό προβλημάτων. Έτσι απέδειξε ότι ο όγκος της σφαίρας είναι το 1/3 του γινομένου της ακτίνας της επί το εμβαδόν της επιφάνειάς της, θεωρώντας έναν άπειρο αριθμό κώνων με απειροστή βάση, των οποίων οι κορυφές ήταν το κέντρο της σφαίρας και οι βάσεις συνέθεταν την επιφάνειά της. Ο Kepler με τη μέθοδό του έκανε οικείες τις έννοιες του **απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού**. Στις αποδείξεις του υπεισέρχεται με αόριστο τρόπο η έννοια της συνέχειας, εφ' όσον δεν διέκρινε καμία διαφορά μεταξύ πολυγώνου και κύκλου. Στο έργο του, Nova Stereometria, πρότεινε επίσης μια μέθοδο υπολογισμού μεγίστων και ελαχίστων τιμών διαφόρων όγκων, παρατηρώντας ότι η μεταβολή του όγκου των στερεών γινόταν συναρτήσει της μεταβολής των διαστάσεών τους. Κατασκεύασε πίνακες με δύο στήλες στους οποίους κατέγραφε τις διαστάσεις των στερεών και τις τιμές των όγκων που αντιστοιχούσαν σ' αυτές. Με σύγκριση των τιμών που υπήρχαν καταχωρημένες στις δύο στήλες κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι μία τιμή του όγκου γινόταν μέγιστη, αν οι προηγούμενες τιμές στον πίνακα αυξάνονταν, ενώ οι επόμενες ελαττώνονταν. Σε σύγχρονη ορολογία αυτό σημαίνει πως αν θεωρήσουμε τον όγκο $V=V(x)$ του στερεού ως συνάρτηση των διαστάσεών του, τότε η $V(x)$ γίνεται μέγιστη, αν είναι αύξουσα στο διάστημα $(x-\delta,\ x)$ και φθίνουσα στο $(x,\ x+\delta)$, $\delta>0$. Ο Kepler παρατήρησε ότι καθώς οι τιμές του όγκου στον πίνακα πλησίαζαν την μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, οι μεταβολές ΔV, Δx του όγκου και των διαστάσεων αντίστοιχα ελαττώνονταν, και ο λόγος $\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$ επίσης ελαττωνόταν. Σε σύγχρονη ορολογία η παρατήρηση αυτή του Kepler αποδίδεται από την ισότητα :

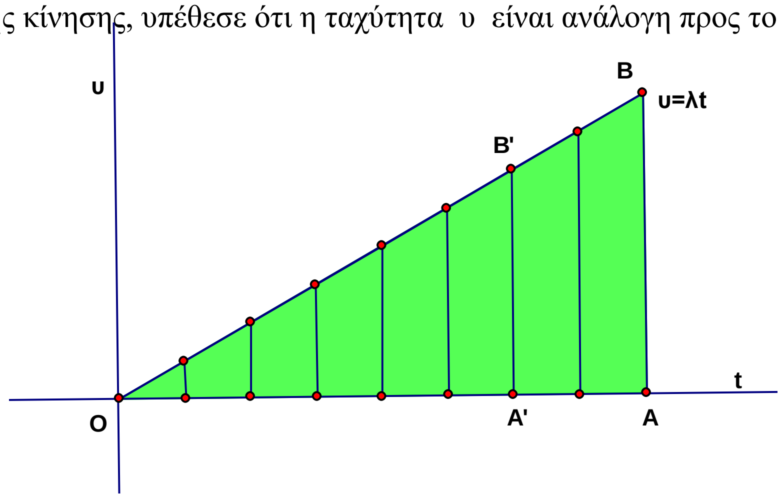
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=0 \Leftrightarrow V'(x)=0 \quad \text{(Εξαρχάκος,1993)}$$

Οι τεχνικές του Kepler παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητες με τις μεθόδους που είχε χρησιμοποιήσει ο Αρχιμήδης στην εργασία του «σφαιροειδή και κωνοειδή». Κατά τον Boyer: *«αν και οι θέσεις των σχολαστικών έπαιξαν ένα σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, η* ***στατική προσέγγιση*** *του Kepler είχε μεγαλύτερη απήχηση. Οι αυξομειώσεις ήταν εκείνες και όχι οι ρυθμοί μεταβολής που υπήρξαν τα θεμελιώδη στοιχεία που οδήγησαν στην εργασία του Leibniz, αλλά και έπαιξαν ένα μεγαλύτερο ρόλο στο λογισμό του Newton απ' ότι έχει αναγνωριστεί ».* Για το έργο του μπορούμε να τον κατατάξουμε, κατά τους ιστορικούς των μαθηματικών, μεταξύ των προδρόμων του απειροστικού λογισμού.

Ο Γαλιλαίος (1564-1642) δημοσίευσε το 1638 το έργο του με τίτλο «Διάλογοι και μαθηματικές αποδείξεις για νέες επιστήμες συνδεδεμένες με τη μηχανική και τις τοπικές κινήσεις». Ήταν ένα έργο που έδωσε στη σύγχρονη επιστήμη τους πρώτους νόμους της. Στην εργασία αυτή θεώρησε το χρόνο σαν μία αφηρημένη παράμετρο των φυσικών γεγονότων. Αυτό του έδωσε την δυνατότητα να επιτύχει εκείνο που δεν μπόρεσαν να κάνουν οι αρχαίοι Έλληνες: **να εκφράσει ποσοτικά την κίνηση με αριθμούς**. Στην εργασία του παρουσιάζεται παντού η έννοια της συνάρτησης, μέσα όμως από τις συναρτησιακές σχέσεις που προέκυπταν και διατυπώνονταν με τη γλώσσα των αναλογιών. Ο Γαλιλαίος ήταν γνώστης των γεωμετρικών μεθόδων των αρχαίων Ελλήνων αλλά γνώριζε και τις μετατροπές των μεθόδων τους από τους Kepler και Valerio.

Στο έργο του «Δύο νέες επιστήμες» μελετώντας το πρόβλημα της ομοιόμορφα επιταχυνόμενης κίνησης, υπέθεσε ότι η ταχύτητα υ είναι ανάλογη προς το χρόνο t

Σχήμα 10



Το άθροισμα των καθέτων κάτω από τη γραμμή $\upsilon = \lambda t$ είναι η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια, και για τον Γαλιλαίο ισούται με την ολική απόσταση που διανύθηκε. Κάθε γραμμή τη θεώρησε, αφ' ενός σαν μια **τοπική** ταχύτητα σε μια χρονική στιγμή και ταυτόχρονα σαν μια **απειροστή** απόσταση που διανύεται, αν πολλαπλασιαστεί μ' ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Έτσι προκύπτει ότι :

$$s = \frac{1}{2} t \cdot \lambda t = \frac{1}{2} \lambda t^2$$

Επομένως οραματίστηκε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^t \lambda x \, dx$ του οποίου την τιμή θεωρούσε ίση με $\frac{1}{2} \lambda t^2$. (Toeplitz, 1963)

Ισχυρίστηκε ότι η ταχύτητα της κίνησης $s = \frac{1}{2} \lambda t^2$ όφειλε να ισούται με $\upsilon = st$ (σε σύγχρονη ορολογία ίση με την παράγωγο της συνάρτησης s). Έτσι η σχέση που υπήρχε μεταξύ «ολοκληρώματος και παραγώγου» δεν φαίνεται να έχει γίνει αντιληπτή. Δίχως να είναι ξεκάθαρος έφτασε στο συμπέρασμα ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ένα **άπειρο άθροισμα** των αδιαιρέτων Α΄Β΄. «Οι γεωμετρικές αποδείξεις του Γαλιλαίου βασίστηκαν όπως και του Oresme στην υπόθεση ότι το εμβαδόν υπό την καμπύλη ταχύτητας-χρόνου παριστάνει την διανυθείσα απόσταση. Εφόσον όμως κανένας δεν είχε στη διάθεσή του την έννοια του ορίου προσέφυγαν με υπονοούμενα σε χρήση **απειροστών** όπως σαφώς διατυπώνει ο Boyer *«Ο Γαλιλαίος εξέφρασε την έννοια του αδιαιρέτου όταν έλεγε ότι οι στιγμές ή οι μικρές αυξήσεις στην απόσταση παριστάνονται με γραμμές του τριγώνου και ότι το τρίγωνο προέκυπτε πράγματι από αυτά. Όμως δεν ξεκαθάρισε πως γινόταν η μετάβαση από τις γραμμές ως ταχύτητες στις ίδιες τις γραμμές ως στιγμές»*…. Η χρησιμοποίηση αδιαιρέτων για την απόδειξη διαφόρων εικασιών ενέπνευσε το μαθητή του, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) να αναπτύξει μία νέα μέθοδο υπολογισμού των κέντρων βάρους, που για αρκετά χρόνια αποτέλεσε το βασικό εργαλείο έρευνας για ένα μεγάλο αριθμό σημαντικών μαθηματικών που προηγήθηκαν των Newton-Leibniz». (Γιαννακούλιας, 2007)

3.2 Μέθοδος αδιαιρέτων

Η μέθοδος του Cavalieri γνωστή ως **μέθοδος των αδιαιρέτων** έγινε γνωστή με δύο συγγράμματά του, το «Geometria Indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota» (Γεωμετρία μέσω μιας μέχρι τώρα άγνωστης μεθόδου, των αδιαιρέτων των συνεχών), που δημοσιεύτηκε το 1635, και το «Exercitationes geometricae sex» (έξι γεωμετρικές ασκήσεις) το 1647. Αναζητώντας μια νέα μέθοδο που θα ενοποιούσε την ευρετική με την αποδεικτική διαδικασία, προσέφυγε στην έννοια του αδιαιρέτου την οποία είχε χρησιμοποιήσει και ο Γαλιλαίος στη φυσική, αλλ' αυτός προχώρησε πιο πέρα, και **έκανε τα αδιαίρετα βάση μιας γεωμετρικής μεθόδου απόδειξης που θα γινόταν ιδιαίτερα ελκυστική.** Ο Cavalieri σε κανένα μέρος του συγγράμματός του δεν εξηγεί τι εννοεί με τον όρο αδιαίρετο, τον οποίο όμως μεταχειρίζεται για να χαρακτηρίσει τα απειροστά στοιχεία που χρησιμοποιούσε στη μέθοδό του. Γι' αυτόν, όπως γράφει στο «exercitationes», κάθε αδιαίρετο με την κίνησή του παράγει το επόμενο ανώτερο συνεχές. Έτσι ένα κινούμενο σημείο παράγει μια γραμμή, μια κινούμενη γραμμή παράγει μια επιφάνεια, που απαρτίζεται από ένα άπειρο αριθμό ισαπεχόντων παραλλήλων γραμμών, και μια κινούμενη επιφάνεια παράγει ένα στερεό, που συντίθεται από παράλληλα ισαπέχοντα επίπεδα. (Γιαννακούλιας, 2007)

Ο Cavalieri γενικά θεωρούσε ότι ένα γεωμετρικό σχήμα αναλύεται σ' ένα άπειρο αριθμό αδιαιρέτων χαμηλότερης διάστασης. Έτσι θεωρούσε ένα εμβαδόν ν' αποτελείται από παράλληλα ισαπέχοντα ευθύγραμμα τμήματα και οι όγκοι από παράλληλες ισαπέχουσες επίπεδες τομές, δίχως να διευκρινίζει αν αυτά τα αδιαίρετα έχουν πάχος ή όχι.

Οι μέθοδοί του ήταν ένα σύνολο προσεγγιστικών διαδικασιών οι οποίες εμπεριείχαν το σπόρο των ιδεών εκείνων που αποδείχτηκαν βασικές για την ανάπτυξη της έννοιας του ολοκληρώματος.

Χρησιμοποιώντας την αρχή του: «τα επίπεδα σχήματα βρίσκονται στον ίδιο λόγο όπως και τα αδιαίρετά τους» το 1639 έδειξε (με γεωμετρικές τεχνικές) αυτό που σε σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό διατυπώνεται από την ισότητα $\int_0^\alpha x^\kappa\, dx = \dfrac{\alpha^{\kappa+1}}{\kappa+1}$.

Για ένα πλήθος ακεραίων τιμών του κ $(1 \le \kappa \le 9)$ και κατόπιν χρησιμοποιώντας μια ατελή επαγωγή κατέληξε στην εικασία ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει και για κάθε ακέραια και θετική τιμή του κ. (Edwards, 1979)

Η χρήση των αδιαιρέτων στη Γεωμετρία δέχθηκε πολλές κριτικές, όπως ότι οδηγούσε σε παράδοξα και λάθη, παρόλα αυτά έγινε αμέσως δημοφιλής εξαιτίας των επιτυχών εφαρμογών της. Επίσης ήταν η μόνη μέθοδος των μαθηματικών της εποχής αυτής, που ασχολήθηκαν με τις απειροστικές διαδικασίες στο χώρο της Γεωμετρίας, και παρακίνησε αρκετούς να τη βελτιώσουν ή να αναπτύξουν νέες μεθόδους.

Ένας από εκείνους που μελέτησε και γενίκευσε τη μέθοδο των αδιαιρέτων ήταν ο Evangelista Torricelli (1608-1647), μαθητής και αυτός του Γαλιλαίου. Ο Torricelli επέτρεψε την αναγωγή ενός επιπέδου σχήματος όχι μόνο σ' ένα άπειρο πλήθος παράλληλων τμημάτων, αλλά και σε καμπύλα αδιαίρετα τμήματα. Το 1644 γράφει το «Opera Geometria», όπου εκτός των αρχών της δυναμικής στα ρευστά, εφάρμοσε τις μεθόδους του Cavalieri σε διάφορα σχήματα, και η εργασία αυτή συντέλεσε σε μέγιστο βαθμό στην εξάπλωση της μεθόδου των αδιαιρέτων στην υπόλοιπη Ευρώπη.

Στην ιταλική σχολή ανήκει και ο Pietro Mengoli (1625-1685) μαθητής του Cavalieri, ο οποίος τον διαδέχθηκε στην έδρα της μηχανικής στο Πανεπιστήμιο της Μπολώνια. Διατύπωσε τη γνώμη ότι τα θεμέλια της μεθόδου των αδιαιρέτων του Cavalieri, δεν ήταν τοποθετημένα σε γερές βάσεις, και προσπάθησε να τη θεμελιώσει πάνω σε μία νέα κατεύθυνση που στηριζόταν στις άπειρες σειρές.

Στην εργασία του Geometriae speciosae elementa (1659) ο Mengoli προσέγγισε την έννοια του ορίου: «αν μια μεταβλητή ποσότητα μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από κάθε δοσμένο πεπερασμένο αριθμό τότε αυτή θα ονομάζεται quasi-infinite ενώ μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό και θα ονομάζεται quasi-nil». Απέδειξε την απόκλιση της αρμονικής σειράς με τον ισχυρισμό ότι το άθροισμα ενός πεπερασμένου πλήθους όρων της μπορούσε να γίνει οσοδήποτε μεγάλο. Μετέτρεψε τη διαδικασία του Luca Valerio, και έδωσε μία ακριβή μέθοδο αναπαράστασης (έκφρασης) του εμβαδού που περικλειόταν κάτω από κάποιες ειδικές καμπύλες ως όρια αθροισμάτων ορθογωνίων. Αργότερα η ίδια μέθοδος χρησιμοποιήθηκε και από τον Newton.

Οι εργασίες του Mengoli διαβάστηκαν ελάχιστα γιατί ήταν γραμμένες μ' ένα περίπλοκο και συγκεχυμένο ύφος, παρ' ότι χαρακτηρίζονται από την εισαγωγή της Άλγεβρας στη Γεωμετρία. (Loria, 1971)

Τον ισχυρισμό του Cavalieri ότι $\int_0^{\alpha} x^{\kappa}\, dx = \frac{\alpha^{\kappa+1}}{\kappa+1}$ ισχύει για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots$ και δίνει το εμβαδόν υπό τη γενικευμένη παραβολή $y = x^{\kappa}$ όπου κ θετικός ακέραιος, απέδειξαν οι Fermat, Roberval και Pascal.

Η νέα μέθοδος που χρησιμοποίησαν βασίστηκε και πάλι στη προσέγγιση καμπυλόγραμμων σχημάτων από ευθύγραμμα όπως και στη μέθοδο της εξάντλησης, αντί όμως της έμμεσης απόδειξης (διπλή αντίφαση) ο αριθμός των ορθογωνίων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του εμβαδού είναι άπειρος και όταν το πλήθος n είναι απείρως μεγάλο έχουμε μετάβαση «στο όριο», μία έννοια που έμεινε ακόμα ασαφής. Έτσι σε κάθε μία από αυτές τις αποδείξεις γίνεται χρήση του «ορίου» $\lim_{n \to \infty} \frac{1^{\kappa} + 2^{\kappa} + \ldots + n^{\kappa}}{n^{\kappa+1}} = \frac{1}{\kappa+1}$ αντικαθιστώντας έτσι τα διαισθητικά επιχειρήματα του Cavalieri (με ορολογία γεωμετρικών αδιαιρέτων) με σαφείς αριθμητικούς υπολογισμούς. (Γιαννακούλιας, 2007)

3.3 Η πρώτη αξιοσημείωτη νύξη διαφόρισης

Η ανακάλυψη της Αναλυτικής Γεωμετρίας από τους Καρτέσιο(Rene Descartes, 1596-1650) και Fermat (1601;-1665) αποτελεί κομβικό σημείο για τα μαθηματικά. Δίνει νέα ώθηση και ευκολότερες λύσεις στο πρόβλημα της εφαπτομένης, στον υπολογισμό μεγίστων-ελαχίστων και σε άλλα προβλήματα που απασχολούν τους μαθηματικούς της εποχής.

Η πρώτη αξιοσημείωτη νύξη διαφόρισης προέρχεται από τις ιδέες που διατύπωσε το 1629 ο Fermat, οι οποίες έγιναν ευρέως γνωστές εννέα χρόνια αργότερα, βασισμένος σε μια παρατήρηση του Kepler ότι **η αύξηση μιας «συνάρτησης» γίνεται αμελητέα στην περιοχή μιας τοπικά μέγιστης ή ελάχιστης τιμής. Δηλαδή, κοντά στη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης, οι τιμές που αντιστοιχούν σε δύο πολύ γειτονικές τιμές της μεταβλητής x και x+E, διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους ώστε με προσέγγιση να θεωρηθούν ίσες**, ο Fermat μετέτρεψε το παραπάνω γεγονός σε διαδικασία προσδιορισμού ενός τέτοιου μεγίστου ή ελαχίστου. Περιληπτικά, η μέθοδός του είναι η εξής :

Αν $f(x)$ έχει ένα τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο x, και αν το Ε είναι μία μη μηδενική, αλλά σχεδόν μηδενική ποσότητα, τότε ισχύει : $f(x+\mathrm{E}) \simeq f(x)$. Θέτει στη συνέχεια

$f\left(x+\mathrm{E}\right)=f(x)$ και κατόπιν κάνει την ισότητα σωστή, αφήνοντάς το Ε να πάρει την τιμή μηδέν. Οι ρίζες της εξίσωσης που προκύπτει είναι εκείνες οι τιμές του x για τις οποίες η $f\left(x\right)$ αποτελεί ένα μέγιστο ή ελάχιστο. Για να εξηγήσουμε και να αποσαφηνίσουμε τη διαδικασία θα μελετήσουμε το πρώτο παράδειγμα του Fermat: «να διαχωριστεί μία ποσότητα σε δύο μέρη, τέτοια ώστε το γινόμενό τους να είναι μέγιστο». Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Viete, όπου οι σταθερές συμβολίζονται με κεφαλαία σύμφωνα και οι μεταβλητές με κεφαλαία φωνήεντα, παριστάνουμε με Β τη δεδομένη ποσότητα και με Α, Β-Α τα μέρη της. Τότε :

$$\left(\mathrm{A}+\mathrm{E}\right)\left[\mathrm{B}-\left(\mathrm{A}+\mathrm{E}\right)\right]=\mathrm{A}\left(\mathrm{B}-\mathrm{A}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\mathrm{A}+\mathrm{E}\right)\left[\mathrm{B}-\mathrm{A}-\mathrm{E}\right]=\mathrm{A}\left(\mathrm{B}-\mathrm{A}\right) \text{ ή}$$

$$\mathrm{BE}-2\mathrm{AE}-\mathrm{E}^2=0$$ Διαιρούμε με Ε και παίρνουμε

$$\mathrm{B}-2\mathrm{A}-\mathrm{E}=0$$ Αν θέσουμε Ε=0 τότε

$$2\mathrm{A}=\mathrm{B}\Rightarrow \mathrm{A}=\frac{\mathrm{B}}{2}$$

Η λογική του είναι ελάχιστα ικανοποιητική. Όμως, είναι φανερό ότι η μέθοδός του εισήγαγε ένα αλγόριθμο ορισμού του Α ώστε μία έκφραση που αντιστοιχούσε σε μια αλγεβρική συνάρτηση $f\left(\mathrm{A}\right)$ να έχει ακρότατο. «Η διαδικασία ήταν η ακόλουθη:

α) Το Α αντικαθίσταται από το Α+Ε

β) $f\left(\mathrm{A}\right)$ και $f\left(\mathrm{A}+\mathrm{E}\right)$ θεωρούνται ίσα, οπότε θέτει $f\left(\mathrm{A}+\mathrm{E}\right)=f\left(\mathrm{A}\right)$ (1)

γ) Στη ισότητα (1) αν υπάρχουν κοινοί όροι, διαγράφονται.

δ) Όλοι οι όροι διαιρούνται με Ε

ε) Οι όροι που περιέχουν το Ε διαγράφονται

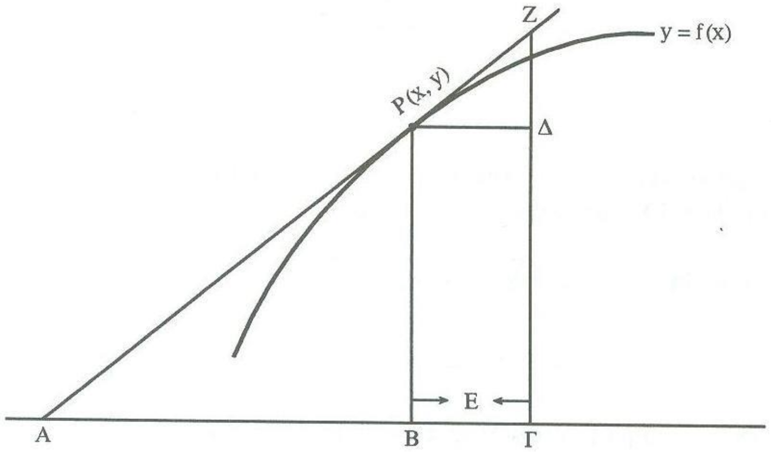
στ) Το Α ορίζεται από την ισότητα :

$$\left.\frac{f\left(A+E\right)-f\left(A\right)}{E}\right|_{E=0}=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h} \Leftrightarrow f'\left(x\right)=0$$ » (Γιαννακούλιας, 2007)

Ο Fermat δεν ονόμασε το Ε απείρως μικρό ούτε μηδενιζόμενο, ούτε όριο, και απέφυγε να δικαιολογήσει πως ήταν δυνατόν πρώτα να διαιρεί με το Ε και μετά να θέτει Ε=0. (Eves, 1990)

«Την παραπάνω μέθοδο εύρεσης μεγίστων και ελαχίστων τη χρησιμοποίησε ο Fermat και για τη χάραξη της εφαπτομένης σε σημεία καμπύλων, όπως ήταν η παραβολή, η έλλειψη και η κυκλοειδής. Η άγνωστη (μεταβλητή) ποσότητα σε αυτή την περίπτωση ήταν το μήκος της υποεφαπτομένης, δηλαδή του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζεται από το ίχνος της καθέτου, που φέρεται από το σημείο επαφής, και το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη τέμνει τον οριζόντιο άξονα. Στο παρακάτω σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι η υποεφαπτομένη που αντιστοιχεί στο σημείο P της καμπύλης.



Σχήμα 11

Θεώρησε ένα σημείο Γ σε πολύ κοντινή απόσταση Ε από το Β. Για την εύρεση της εφαπτομένης PA αρκούσε η εύρεση της υποεφαπτομένης ΑΒ. Από την ομοιότητα των τριγώνων PΔZ και PAB προκύπτει η αναλογία

$$\frac{AB}{P\Delta}=\frac{BP}{Z\Delta} \Leftrightarrow Z\Delta=\frac{y\,E}{AB}$$

και άρα $\Gamma Z=\Gamma\Delta+Z\Delta=y+\dfrac{y\,E}{AB}$.

Αν το Ε γίνει απείρως μικρό, το Ζ γίνεται σημείο της καμπύλης, και επομένως

$$f\left(x+E\right)=y+\frac{yE}{AB}$$

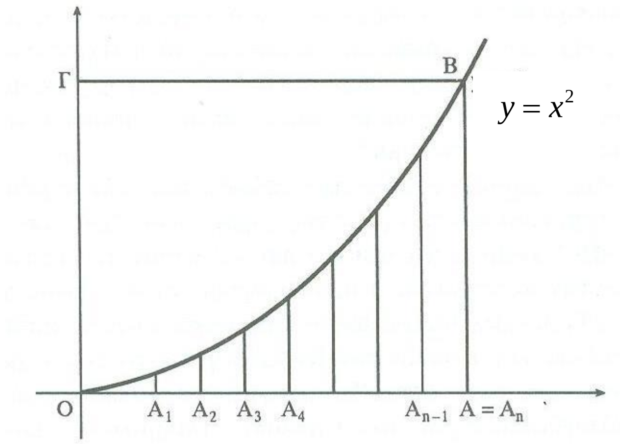
Μετά τις πράξεις εξαφανίζει το Ε, θέτοντας Ε=0 και προσδιορίζει τη θέση του σημείου Α. Η εφαπτομένη ΑP είναι τότε πλήρως καθορισμένη». (Γιαννακούλιας, 2007)

Ο Fermat έφτασε πολύ κοντά στη έννοια του ορίου, αλλά τελικά δεν οδηγήθηκε στην ανακάλυψή της διότι εργάσθηκε γεωμετρικά.

3.4 Αριθμητικοί τετραγωνισμοί

Τη δεκαετία 1630-1640 γίνονται πολλές προσπάθειες για τον υπολογισμό εμβαδών υπό κάποιες καμπύλες και ειδικότερα υπό της γενικευμένης παραβολής $y=x^n$. Ένας σημαντικός μαθηματικός της εποχής εκείνης ήταν ο Gilles Persone de Roberval (1602-1675), ο οποίος θεωρείται ότι ανακάλυψε την μέθοδο των αδιαιρέτων ανεξάρτητα από τον Cavalieri. «**Ξεκαθάρισε ότι οι γραμμές δεν αποτελούνται από απείρως πολλά σημεία, αλλά από άθροισμα απείρου πλήθους μικρών αδιαίρετων κομματιών. Μια επιφάνεια δεν αποτελείται από γραμμές, αλλά συντίθεται από μικρά κομμάτια επιφανειών, και ένα στερεό από μικρά κομμάτια στερεών, και όλα αυτά τα απειροστά κομμάτια τα θεωρούσε να είναι τα αδιαίρετα». Έτσι με βάση παρόμοιων σκεπτικών άρχισε μία συστηματική διαδικασία με τη χρησιμοποίηση ορθογωνίων για τον υπολογισμό εμβαδών**. (Γιαννακούλιας, 2007)

Με βάση τη θεωρία του κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου υπό την καμπύλη π.χ. $y = x^2$ στο διάστημα ΟΒ αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό, απείρως στενών ορθογώνιων λωρίδων.



Σχήμα 12

«Με τον τρόπο αυτό, εκείνη την εποχή, ξεκίνησε μία νέα μέθοδος υπολογισμού εμβαδών και όγκων με τροποποίηση της μεθόδου της εξάντλησης. Ενώ στη μέθοδο της εξάντλησης χρησιμοποιούνταν διαφορετικά είδη ευθυγράμμων «προσεγγιστικών» τμημάτων, που κάθε φορά ήταν εξαρτημένα από την καμπυλόγραμμη επιφάνεια, τον $17^{ο}$ αιώνα υιοθέτησαν μια συστηματική διαδικασία, με τη χρησιμοποίηση ορθογωνίων». (Γιαννακούλιας, 2007) Οι Pascal και Fermat εκτός από τον Roberval ήταν πρωτεργάτες αυτής της διαδικασίας.

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε την παραβολή $y = x^2$ (Σχήμα 12)

Καθώς το πλάτος (μήκος) d αυτών των ορθογωνίων γίνεται μικρότερο, το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει το εμβαδόν υπό την καμπύλη. Αυτό το άθροισμα, αν οι βάσεις έχουν όλες μήκος d, είναι :

$$\varepsilon\mu\beta(\mathrm{OAB}) = d \cdot d^2 + d\left(2d\right)^2 + d\left(3d\right)^2 + \ldots + d\left(nd\right)^2 = d^3(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

Το άθροισμα αυτό είχε υπολογιστεί από τους Pascal και Fermat για να γίνεται χρήση σε αυτά τα προβλήματα και άρα έχουμε :

$$\varepsilon\mu\beta(\text{ΟΑΒ}) = d^3 \ \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Ο λόγος των εμβαδών, του μέρους του επιπέδου που βρίσκεται υπό την παραβολή, και του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΑΒΓ είναι :

$$\frac{\varepsilon\mu\beta(\text{ΟΑΒ})}{\varepsilon\mu\beta(\text{ΟΑΒΓ})} = \frac{d^3\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)}{6\,n^3\,d^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Όταν το n **γίνεται απείρως μεγάλο, οι δύο τελευταίοι όροι διαγράφονται** και έχουμε το αποτέλεσμα : $\varepsilon\mu\beta(\text{ΟΑΒ}) = \frac{1}{3}\varepsilon\mu\beta(\text{ΟΑΒΓ})$.

Η έννοια του ορίου δεν είχε ακόμα εισαχθεί . Παρατηρούμε ότι στη μέθοδο του Roberval υπάρχει μία ζωτική αλλαγή σε σχέση με την μέθοδο της εξάντλησης, στο τελευταίο βήμα. Στη θέση της διπλής αντίφασης της παλαιάς μεθόδου, εδώ ο αριθμός των ορθογωνίων διαρκώς αυξάνει και όταν το πλήθος είναι απείρως μεγάλο έχουμε τη διάβαση στο «όριο», αν και η έννοια του ορίου παρέμενε ακόμα ασαφής. (Edwards, 1979)

Στις δεκαετίες 1630 και 1640 είχε αρχίσει επίσης, μία έρευνα για τη χάραξη εφαπτομένων, που κατέληξε σε μια μέθοδο, η οποία στηριζόταν στη διαισθητική έννοια της στιγμιαίας κίνησης. «Οι Torricelli και Roberval γενίκευσαν την μέθοδο του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό της εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο της σπείρας του. Εμπνευσμένοι πιθανώς από το γεγονός ότι οι περισσότερες καμπύλες ορίζονταν μέσω κίνησης, θεώρησαν την καμπύλη ως την τροχιά ενός σημείου, και την εφαπτομένη ως τη γραμμή που εξέφραζε τη στιγμιαία κίνηση του κινούμενου σημείου. Πριν την «ανακάλυψη» του απειροστικού λογισμού δεν υπήρχε ένας γενικός τρόπος της κατεύθυνσης της κίνησης, και επομένως η μέθοδος των Roberval – Torricelli ήταν αρκετά σημαντική για την εποχή τους. Στην περίπτωση που η κίνηση του σημείου που παρήγαγε την καμπύλη ήταν αποτέλεσμα ή συνδυασμός δύο απλούστερων κινήσεων, τότε η στιγμιαία γραμμή της κίνησης οριζόταν από τη σύνθεση των συνιστωσών κινήσεων». Ο Torricelli χρησιμοποίησε τις έννοιες της κίνησης για να ορίσει, εκτός από εφαπτομένες και εμβαδά, υπο τις καμπύλες, και θεωρώντας τις καμπύλες ως μονοπάτια κινούμενων σημείων είδε **από την κινηματική άποψη την αντίστροφη σχέση μεταξύ διαφόρισης και ολοκλήρωσης.** «Έτσι η μορφή της καμπύλης ήταν σε εξάρτηση αποκλειστικά από την διεύθυνση της εφαπτομένης και η γνώση μιας οικογένειας ευθειών, επέτρεπε στο εξής, τη γνώση ολόκληρης της καμπύλης». (Γιαννακούλιας, 2007)

3.5 Αριθμοποίηση της Γεωμετρίας

Στην Αγγλία ο John Wallis (1616-1703) ήταν ο άνθρωπος που πριν από τους Newton, Leibniz συνεισέφερε σε μέγιστο βαθμό ώστε οι αναλυτικές μέθοδοι να εισαχθούν στον απειροστικό λογισμό. Μελετώντας το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ασχολήθηκε σε βάθος με την εργασία των Stevin, Cavalieri, Torricelli και Roberval. Το 1656 δημοσίευσε ένα βιβλίο με τίτλο: «Arithmetica infinitorum sive Nova Methodus Inguiventi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata» (Αριθμητική του

Απείρου ή μια νέα μέθοδος μελέτης του τετραγωνισμού των καμπύλων, και άλλα πιο δύσκολα μαθηματικά προβλήματα) που υπήρξε από τα σημαντικότερα βιβλία στην ιστορία των μαθηματικών. Πρόθεσή του ήταν να προχωρήσει πέρα από το σημείο στο οποίο είχε φτάσει ο Cavalieri με τη γεωμετρία των αδιαιρέτων, αντικαθιστώντας τα γεωμετρικά επιχειρήματα με αλγεβρικά, βασιζόμενος στην αναλυτική γεωμετρία των Καρτέσιου-Fermat. Ο ίδιος ο Wallis θεωρούσε πως η μεγαλύτερη συνεισφορά του στην εξέλιξη των μαθηματικών του 17ου αιώνα ήταν ίσως ο μετασχηματισμός γεωμετρικών προβλημάτων σε άθροιση αριθμητικών ακολουθιών (Stedall, 2004). «Ήταν ο πρώτος που κατόρθωσε να επεκτείνει την άλγεβρα σε μια αληθινή ανάλυση. Οι μέθοδοι βέβαια με τις οποίες γινόταν η ατέρμονη διαδικασία ήταν συχνά χονδροειδείς χρησιμοποιώντας κανόνες που ίσχυαν για πεπερασμένες διαδικασίες και στην περίπτωση των απείρων».(Γιαννακούλιας, 2007)

Χρησιμοποίησε απείρως μικρά παραλληλόγραμμα όπως οι Pascal και Roberval αλλά ο Wallis για πρώτη φορά χρησιμοποιεί την ιδέα ότι **τα παραλληλόγραμμα αυξάνονταν, μέσω της διαστολής μέχρις ότου γεμίσουν όλο το χώρο**. Αυτό όπως θα δούμε αργότερα ελάχιστα διαφέρει από την έννοια της γέννησης των ποσοτήτων που απετέλεσε τη βάση για τη θεωρία των ροών(fluxions) του Newton.

Ο Wallis δεν διέθετε κάποια έννοια που να επιτρέπει, κατά τη σύγχρονη έννοια, σε μια ποσότητα να μειώνεται με συνεχή τρόπο προς το μηδέν ή να αυξάνεται με συνεχή τρόπο προς το άπειρο. Ωστόσο χρησιμοποίησε κάτι που μοιάζει πολύ με **επιχείρημα ορίου**, όταν έγραφε ότι **μια ποσότητα που μπορεί πάντοτε να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε προσδιορίσιμη ποσότητα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μηδενική**. Η ιδέα αυτή φαίνεται μοντέρνα, αλλά ο ίδιος ο Wallis υποστήριξε αργότερα ότι βρήκε την αιτιολόγησή της σε κλασικές πηγές, στο Βιβλίο Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη, και στον Αρχιμήδη. Βασίζοντας την επιχειρηματολογία του σε τέτοιες αρχές, ο Wallis μπόρεσε να υποστηρίξει σωστά, στην πρώτη δημοσιευμένη απόδειξη αυτού του είδους, ότι η διαφορά μεταξύ του $1\frac{1}{z}$ και του $1\frac{1}{z+1}$ τείνει στο μηδέν, και ότι και οι δύο ποσότητες τείνουν στο 1 καθώς το z γίνεται απείρως μεγάλο (Stedall, 2004).

Στο Arithmetica infinitorum ο Wallis χρησιμοποιεί το «όριο» του αθροίσματος των ακεραίων δυνάμεων των φυσικών αριθμών στη προσπάθειά του να αριθμητικοποιήσει τη μέθοδο των αδιαιρέτων του Cavalieri. Έτσι αριθμοποιώντας την εργασία του Cavalieri και βασίζοντας τις μεθόδους ολοκλήρωσης στα **αθροίσματα των δυνάμεων των φυσικών αριθμών** ήταν σε θέση να φθάσει σε μια επιπλέον γενίκευση, με την έννοια ότι οι τετραγωνισμοί και οι κυβισμοί τώρα προέκυπταν ως ένα πόρισμα **μιας μόνο οριακής πράξης** (αν και η οριακή πράξη ήταν μια «μη πλήρης» επαγωγή). Ο Wallis προσπάθησε ν' αποδείξει την εικασία του Cavalieri, στο μοναδιαίο διάστημα, που σε σύγχρονο συμβολισμό εκφράζεται από την ισότητα:

$$\int_0^1 x^\kappa dx = \lim_n \frac{0^\kappa + 1^\kappa + 2^\kappa + \ldots + n^\kappa}{n^\kappa + n^\kappa + n^\kappa + \ldots + n^\kappa} \left(= \frac{1^{\kappa+1}}{\kappa+1} \right)$$

« **Εφάρμοσε για αυτό μια μορφή μαθηματικής επαγωγής, ατελούς,** διότι από ένα αριθμό περιπτώσεων που επαλήθευε έφθανε στο γενικό συμπέρασμα. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ισότητας

$$\frac{0^2+1^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+\ldots+n^2}=\frac{1}{3}$$

Εξέτασε το λόγο για δύο αριθμούς

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

Στη συνέχεια για τρεις και τέσσερις αντίστοιχα,

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 6}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 6}$$

Και γενικεύοντας βρήκε την ισότητα

$$\frac{0^2+1^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+\ldots+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

Διατύπωσε τότε τον ισχυρισμό, πως αν η διαδικασία συνεχιστεί επ’άπειρον, τότε το $\frac{1}{6n}$ στο άπειρο γίνεται ίσο με $\frac{1}{\infty}=0$, και ο λόγος των τετραγώνων, που σε σύγχρονο συμβολισμό εκφράζεται με το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2\,dx$, θα ισούται ακριβώς με την οριακή τιμή $\frac{1}{3}$ ». (Γιαννακούλιας, 2007)

Η παραπάνω απόδειξη υπάρχει στην πρόταση 20 του Arithmetica infinitorum με την ορολογία του Wallis: « αφού, …, καθώς το πλήθος των όρων αυξάνει, αυτό το παραπάνω από το ένα τρίτο μειώνεται συνεχώς, με τρόπο ώστε σε μήκος γίνεται μικρότερο από οποιαδήποτε προσδιορίσιμη (assignable) ποσότητα (όπως είναι σαφές)˙ αν κανείς συνεχίσει ως το άπειρο, θα εξαφανιστεί τελείως». Το λατινικό πρωτότυπο κείμενο έχει ως εξής: «… ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est» (Stedall, 2004).

Στην Πρόταση 43 η ορολογία μοιάζει ακόμα περισσότερο με εκείνη των ορίων: «Αλλά (και αυτό μας αρκεί εδώ) **προσεγγίζουν συνεχώς πλησιέστερα στον απαιτούμενο λόγο, με τέτοιο τρόπο ώστε σε μήκος η διαφορά γίνεται μικρότερη από οποιαδήποτε προσδιορίσιμη (assignable) ποσότητα**» (Stedall, 2004)

3.6 Η συνεισφορά των Gregoire de Saint-Vincent, Blaise Pascal και James Gregory

Το 1647 εκτός από το «Exercitationes Geometricae sex» του Cavalieri, δημοσιεύτηκε και μία άλλη σημαντική εργασία από τον Ιησουΐτη Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667) με τίτλο «Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni» (γεωμετρική ερμηνεία για τον τετραγωνισμό του κύκλου και των κωνικών τομών). Σε αυτήν περιλαμβάνονταν θεωρήματα που αφορούσαν τον κύκλο, το τρίγωνο, τα παράδοξα του Ζήνωνα, αθροίσματα γεωμετρικών σειρών και κωνικές τομές. Σκοπός του βιβλίου, όπως αναφέρεται και στον τίτλο, ήταν ο τετραγωνισμός του κύκλου εργαζόμενος ανεξάρτητα από τον Cavalieri, αλλά παρουσίασε τις μεθόδους του ταυτόχρονα με αυτόν κατά τη διετία 1625-26. Διαφοροποιήθηκε από τους Stevin και Valerio χρησιμοποιώντας στο Opus, αντί για άπειρα το πλήθος παραλληλόγραμμα, απείρως λεπτά ορθογώνια, και στη θέση των πολυγώνων με n το πλήθος πλευρές που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης, θεώρησε εγγεγραμμένα πολύγωνα με άπειρο πλήθος πλευρών.

Ενώ ο Αρχιμήδης, έκανε υποδιαιρέσεις μέχρις ότου το σφάλμα προσέγγισης γινόταν μικρότερο από κάποια ποσότητα, στη μέθοδο του Gregoire, το πλήθος των πλευρών των εγγεγραμμένων σχημάτων αυξανόταν έως ότου «εξαντληθεί» το σχήμα στο οποίο ήταν εγγεγραμμένα. Στα κείμενα του εμφανίστηκε για πρώτη φορά ο όρος ***εξάντληση*** *για τη μέθοδο του Αρχιμήδη, και κατά τον Struik, ίσως ήταν η πρώτη χρήση της λέξης εξαντλώ, με την έννοια ότι η διαδικασία της υποδιαίρεσης σχετιζόταν με το άπειρο.*

Ο Gregoire πρότεινε ρητά: **«μια καμπύλη δεν είναι τίποτα άλλο, παρά ένα τέρμα, ένα όριο και όχι μία προσέγγιση ενός εγγεγραμμένου ή περιγεγραμμένου σχήματος».** Αυτό συνετέλεσε, ώστε να στραφεί στην κατεύθυνση που έθετε τον απειροστικό στη σωστή βάση, γιατί η άπειρη υποδιαίρεσή του, οδηγούσε στην έννοια του ορίου μιας άπειρης γεωμετρικής προόδου.

Στην περιγραφή της άθροισης γεωμετρικών σειρών που έκανε στο Opus, μας λέει ότι το **άθροισμα τους μπορούσε να προσεγγιστεί από ένα μεγάλο πλήθος όρων της γεωμετρικής προόδου που προέκυπτε από τη σειρά, με την έννοια ότι για κάθε δοσμένο μέγεθος, μπορούσε να θεωρήσει ένα αρκετά μεγάλο πλήθος όρων της προόδου, ώστε το άθροισμά τους να διαφέρει από το άθροισμα της σειράς λιγότερο από το δοθέν μέγεθος**. (Baron, 1969)

Τα λόγια του Leibniz αποτελούν την καλύτερη μαρτυρία για τη σπουδαιότητα του έργου του: «Κατά τη μελέτη του λογισμού πήρα ουσιαστική βοήθεια και από τις πολυάριθμες έξυπνες ιδέες του πατέρα Gregoire de Saint Vincent ». (Boyer, 1949)

Από τους σημαντικότερους μαθηματικούς και φιλοσόφους εκείνης της περιόδου υπήρξε και ο Blaise Pascal (1623-1662). Μέγιστος γεωμέτρης. Εκτός όμως από γεωμετρία αφιέρωσε μεγάλο χρονικό διάστημα στη μελέτη των διωνυμικών συντελεστών. Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής βοήθησαν αργότερα τον Newton στην ανακάλυψη του γενικού διωνυμικού θεωρήματος με κλασματικούς και αρνητικούς εκθέτες.

Στα 1654 ο Pascal ανακάλυψε τον ακόλουθο αναγωγικό τύπο για το άθροισμα των κ-δυνάμεων:

$$\binom{\kappa+1}{\kappa}\sum_{i=1}^{n} i^{\kappa} + \binom{\kappa+1}{\kappa-1}\sum_{i=1}^{n} i^{\kappa-1} + \ldots + \binom{\kappa+1}{1}\sum_{i=1}^{n} i \quad = \quad (n+1)^{\kappa+1} - n - 1 \qquad (1)$$

όπου $\binom{p}{q} = \dfrac{p!}{q!\,(p-q)!}$ είναι ο γνωστός διωνυμικός συντελεστής, τον οποίο συνήγαγε με ατελή επαγωγή από πλήθος σχέσεων στο «τρίγωνο Pascal».

Από τον τύπο (1) εφαρμόζοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα στο $(n+1)^{\kappa+1}$ και επαγωγή στο κ προκύπτει ότι :

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\kappa} = \frac{n^{\kappa+1}}{\kappa+1} + \frac{n^{\kappa}}{2} + \text{ χαμηλότερες δυνάμεις του } n \qquad (2)$$

Αυτόν τον τύπο χρησιμοποιεί για να αποδείξει ότι το εμβαδόν υπό την καμπύλη $y = x^{\kappa}$ στο διάστημα $[0,\ \alpha]$ είναι ίσο με $\dfrac{\alpha^{\kappa+1}}{\kappa+1}$. Η ιδέα στην οποία βασίζεται είναι πως αν το n είναι πολύ μεγάλο, οι χαμηλότερες δυνάμεις του n διαγράφονται στη σύγκρισή τους με τον πρώτο όρο $\dfrac{n^{\kappa+1}}{\kappa+1}$ στον τύπο (2). Διαιρώντας το $[0,\ \alpha]$ σε ένα μεγάλο αριθμό n υποδιαστημάτων του, σχεδόν, ορθογωνίων λωρίδων πλάτους $w = \dfrac{\alpha}{n}$, προκύπτει ότι το εμβαδόν υπό την καμπύλη είναι :

$$\left[w^{\kappa} + (2w)^{\kappa} + \ldots + (nw)^{\kappa}\right]w = w^{\kappa+1}\sum_{i=1}^{n} i^{\kappa} \simeq \frac{(nw)^{\kappa+1}}{\kappa+1} = \frac{\alpha^{\kappa+1}}{\kappa+1} \quad \text{(Edwards)}$$

Σύμφωνα με τον Boyer, **«η διαγραφή ποσοτήτων με τον τρόπο που την χρησιμοποίησε ο Pascal, έχει χαρακτηριστεί ως η βασική αρχή του διαφορικού λογισμού, και παρά το γεγονός ότι η αιτιολογία της διαγραφής δεν ήταν αυστηρά θεμελιωμένη εν τούτοις άσκησε αργότερα μεγάλη επίδραση στη μορφοποίηση των απόψεων του Leibniz, ο οποίος αποδέχθηκε σαν βασική αρχή στο λογισμό του, ότι οι διαφορές υψηλότερης τάξης μπορούν να παραλείπονται»**. Αυτό θα το συναντήσουμε στον Euler που θεωρεί τα διαφορικά ίσα με μηδέν, αλλά και στον Newton που «εξαφανίζει» τις στιγμές του, διότι τις θεωρούσε ασήμαντες ώστε να αλλοιώσουν το αποτέλεσμα. (Γιαννακούλιας, 2007)

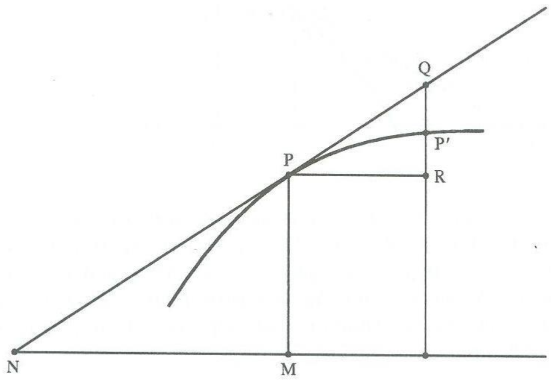
Ένα από τα πιο αυθεντικά μαθηματικά ταλέντα του $17^{ου}$ αιώνα υπήρξε επίσης και ο James Gregory (1638-1675). Ο πλέον σαφής ορισμός της έννοιας της συνάρτησης τον $17^{ο}$ αιώνα δόθηκε από αυτόν στην εργασία του «Vera circuli et Hyperbolae quadratura» (1667). *Όρισε τη συνάρτηση ως την ποσότητα που επιτυγχάνεται από άλλες ποσότητες με μια σειρά αλγεβρικών πράξεων ή με κάθε άλλη νοητή πράξη.* Με την τελευταία φράση εννοούσε ότι είναι αναγκαίο να προσθέσουμε στις πράξεις της Άλγεβρας **μία έκτη πράξη η οποία ορίζει ένα πέρασμα στο όριο**. Έδειξε ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιούσαν για τον υπολογισμό εμβαδών, όγκων και μηκών καμπύλων **περιέχουν μία νέα διαδικασία, την οριακή διαδικασία** και πρόσθεσε ότι αυτή η πράξη ήταν διαφορετική από τις πέντε αλγεβρικές πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης και εξαγωγής ριζών. Έθεσε τη μέθοδο της εξάντλησης σε αλγεβρική μορφή και παραδέχτηκε ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις που επιτυγχάνονται χρησιμοποιώντας ευθύγραμμα περιγεγραμμένα σχήματα γύρω από δοθείσα περιοχή (εμβαδού ή όγκου) και εκείνες που επιτυγχάνονται με τη χρήση εγγεγραμμένων ευθύγραμμων σχημάτων, αμφότερες συγκλίνουν προς το ίδιο «last term». (Kline, 1972)

3.7 Η Γεωμετρική προσέγγιση του λογισμού από τον Barrow

Μετά το 1650 έγιναν προσπάθειες ανάπτυξης απειροστικών μεθόδων στα προβλήματα της εφαπτομένης και των τετραγωνισμών. Σημαντικό ρόλο διαδραμάτισε ο Isaac Barrow (1630-1677). Ο Barrow ήταν θερμός υποστηρικτής της γεωμετρίας του Ευκλείδη για αυτό και άσκησε σκληρή κριτική στο έργο του Wallis σχετικά με την «αριθμητικοποίηση» της Γεωμετρίας αλλά και στο έργο του Pierre Fermat που αναφερόταν στην αναλυτική Γεωμετρία. Ο Barrow πίστευε ότι η Αριθμητική περικλείεται στη Γεωμετρία ενώ η Άλγεβρα ανήκει περισσότερο στη Λογική παρά στα Μαθηματικά. Έτσι ακολουθεί τα αδιαίρετα του Cavalieri παρά την εξέλιξη προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης του ορίου που καλλιεργήθηκε από τον Wallis. Αυτή η άποψη δεν μπορούσε να οδηγήσει στην έννοια του ορίου, αφού για την έννοια αυτή απαιτείται η διευρυμένη αντίληψη του αριθμού. Η επιστροφή στη γεωμετρία ίσως επηρέασαν το μαθητή του Barrow, τον Newton, στο να αναζητήσει τη θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού στην ιδέα της συνεχούς μεταβλητής ποσότητας, όπως παρουσιάζεται στην κίνηση και στην γεωμετρία, και να αποφύγει να χρησιμοποιήσει την αριθμητική ερμηνεία της έννοιας του ορίου. (Kline, 1972)

Το έργο του Barrow, Lectiones Geometricae (1669) αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες μελέτες που αφορούν το λογισμό. Σ' αυτό χρησιμοποιεί γεωμετρικές μεθόδους, και κάνει χρήση βοηθητικών καμπύλων. Εκείνο όμως το γνώρισμα που τον διακρίνει και είναι αξιοσημείωτο είναι η διευκρίνιση πώς **λαμβάνει υπόψη του το χρόνο**. Αρχίζει με το τρίγωνο PRQ (σχήμα 13)

Σχήμα 13

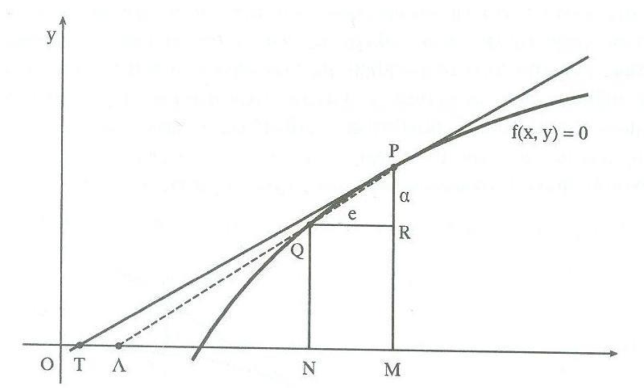


Που δημιουργείται από την προσαύξηση PR και χρησιμοποιεί το τρίγωνο PQR που όμοιο προς το τρίγωνο PMN. Παρατηρεί ότι η κλίση $\frac{QR}{PR}$ της εφαπτομένης ισούται με

$\frac{PM}{MN}$. Ισχυρίζεται όμως, πως όταν το τόξο PP' είναι επαρκώς μικρό μπορούμε με ασφάλεια να ταυτοποιήσουμε αυτό με το ευθύγραμμο τμήμα PQ της εφαπτομένης στο P. Το τρίγωνο PRP' (σχήμα 13) στο οποίο η PP' θεωρείται και ως τόξο της καμπύλης και ως μέρος της εφαπτομένης είναι το *χαρακτηριστικό τρίγωνο*. Αυτό είχε χρησιμοποιηθεί νωρίτερα από τον Pascal , για τον υπολογισμό εμβαδών, και από άλλους πριν από αυτόν.

Ο Barrow για τον ορισμό των αυξήσεων (των μεταβλητών) χρησιμοποίησε τα γράμματα α και e, και με τη βοήθεία τους έδωσε μία γενική μέθοδο εύρεσης της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης. Θεωρεί το χαρακτηριστικό τρίγωνο PQR. Θέτει PR=α, QR=e. Τότε οι συντεταγμένες του Q είναι (x-e, y-α). Το ρόλο του E στη μέθοδο του Fermat, εδώ παίζει το ορθογώνιο και απείρως μικρό τρίγωνο, το χαρακτηριστικό τρίγωνο. Το α αντιστοιχεί στο Δy και το e στο Δx. (Σχήμα 14) (Kline, 1972)

Σχήμα 14



Τα τρίγωνα ΡΛΜ και PQR είναι όμοια.

Οπότε:

$$\frac{PR}{QR}=\frac{\text{PM}}{\text{ΜΛ}} \qquad \text{ή} \qquad \frac{\alpha}{e}=\frac{y}{\text{ΜΛ}}$$

και άρα $\text{ΜΛ} = y\,\frac{\varepsilon}{\alpha}$ (1)

Η ολοένα σμίκρυνση του τριγώνου PQR σημαίνει ότι το σημείο Q πλησιάζει το σημείο P, και η ευθεία QP τείνει να γίνει εφαπτομένη της καμπύλης στο P. Τότε το Λ θα συμπέσει με το Τ και από την (1) προκύπτει ότι $\text{ΜΤ} = y\,\frac{\varepsilon}{\alpha}$, από την οποία προσδιορίζει το σημείο Τ, και επομένως την εφαπτομένη ΡΤ στο σημείο Ρ της καμπύλης. Με τον τρόπο αυτό ο Barrow προσέγγισε τη χάραξη της εφαπτομένης με παρόμοιο τρόπο. Στη διαδικασία της εύρεσης της εφαπτομένης, διαγράφει τους όρους στους οποίους δεν υπάρχουν ως παράγοντες τα α και e, ή τους όρους που περιέχουν τα α και e σε δυνάμεις μεγαλύτερες της μονάδας, ή όρους που περιέχουν τα α και e. Για παράδειγμα στην περίπτωση της καμπύλης $y^2 = px$ με p σταθερό αριθμό, αντικαθιστά το x με $x+e$ και το y με $y+\alpha$ και παίρνει την ισότητα $y^2+2\alpha y+\alpha^2 = px+pe$ από την οποία, σύμφωνα με τα παραπάνω, προκύπτει η ισότητα: $2\alpha y+\alpha^2 = pe$ (2)

Η ταυτοποίηση του PP' με το PQ ισοδυναμεί με τη διαγραφή των μη γραμμικών όρων, ως προς α και e (στο παράδειγμα είναι το α^2) και από τη (2) παίρνει $2\alpha y = pe$ και άρα $\frac{\alpha}{e} = \frac{p}{2y}$

Εφόσον $\frac{\alpha}{e} = \frac{\alpha \cdot R}{P \cdot R}$ θα είναι $\frac{P\mathrm{M}}{\mathrm{MN}} = \frac{p}{2y}$

Εφόσον $P\mathrm{M} = y$, από την τελευταία ισότητα προσδιορίζει τη θέση του Ν.

Ο λόγος $\frac{\alpha}{e}$ *σε σύγχρονο συμβολισμό είναι ο λόγος* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. *Όταν το* P' *πλησιάζει το* P *τότε η χορδή* PP' *τείνει να γίνει εφαπτομένη της καμπύλης στο* P . ***Αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση του ορίου του λόγου*** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ***καθώς*** $\Delta x \to 0$ **.**

Ο Barrow επέκτεινε και συστηματοποίησε τις μεθόδους του Fermat, εισάγοντας εκτός από το e και ένα απειροστό, το α. **Έκανε χρήση των α και e με παρόμοιο τρόπο που ο Leibniz χρησιμοποίησε αργότερα τα διαφορικά του** dx, dy **.** Όμως τα σύμβολα α, e δεν τα σκεπτόταν όπως εμείς αλλά με όρους γεωμετρικών προβλημάτων και απειροστών μάλλον, παρά ως συναρτήσεις και σύμβολα για συνεχείς μεταβλητές. Οι κανόνες που δόθηκαν στη μέθοδό του μπορούν να δικαιολογηθούν, όπως είδαμε, μόνο με ορολογία ορίων.

Παρ' ότι οι γεωμετρικές του προκαταλήψεις δεν του επέτρεψαν να φθάσει στην αριθμητική έννοια του ορίου, που είναι απαραίτητη για τη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού, εν τούτοις η συνολική του προσφορά υπήρξε σημαντική για τη δημιουργία του. (Kline, 1972)

4. Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Βασιζόμενοι στο έργο πολλών μαθηματικών που επί αιώνες μελετούσαν τα προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού χωρίων που ορίζονται από καμπύλες και τα προβλήματα εύρεσης του μεγίστου ή του ελαχίστου ορισμένων συναρτήσεων, δύο μεγαλοφυΐες του δευτέρου μισού του δεκάτου εβδόμου αιώνα, Isaac Newton (1642-1727) και ο Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), δημιούργησαν τον απειροστικό λογισμό, το θεμέλιο της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης και την πηγή από την οποία αντλούνται εφαρμογές σε πλήθος ερευνητικών πεδίων. Τόσο το πρόβλημα του μεγίστου –ελαχίστου και το πρόβλημα εμβαδού, όσο και τα συναφή προβλήματα της εύρεσης εφαπτομένων και του υπολογισμού όγκων, είχαν μελετηθεί και λυθεί σε μερικές ειδικές περιπτώσεις σε διάφορες εποχές, απαιτώντας μία ευφυή κατασκευή. Κανείς δεν είχε επινοήσει κάποιον αλγόριθμο που θα επέτρεπε την εύκολη επίλυση των προβλημάτων αυτών σε νέες περιπτώσεις. Διάφορες μέθοδοι, όπως είδαμε, αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων. Οι Newton και Leibniz για πρώτη φορά μπόρεσαν να συνδυάσουν τις διάφορες αυτές ιδέες και να τις οργανώσουν σε ένα σύνολο και ακολουθώντας διαφορετικούς δρόμους, έφτασαν ο καθένας μόνος του στον ίδιο ουσιαστικά στόχο.

Ο Newton και ο Leibniz, θεωρούνται επινοητές του απειροστικού λογισμού διότι κατόρθωσαν τέσσερα πράγματα:

- Καθένας τους ανέπτυξε γενικές έννοιες, ο Newton τη ροή και τη ρέουσα, ο Leibniz το διαφορικό και το ολοκλήρωμα, που σχετίζονταν με τα δύο βασικά προβλήματα του λογισμού, τα ακρότατα και τα εμβαδά.
- Ανέπτυξαν συμβολισμούς και αλγορίθμους που επέτρεπαν την εύκολη χρήση αυτών των εννοιών.
- Κατανόησαν και εφάρμοσαν την αντίστροφη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις έννοιες αυτές.
- Χρησιμοποίησαν τις δύο αυτές έννοιες στην επίλυση πολλών δύσκολων και ως τότε άλυτων προβλημάτων.

Κανείς από τους δύο όμως, δεν θεμελίωσε τη μέθοδό του με την αυστηρότητα της κλασικής ελληνικής γεωμετρίας επειδή αμφότεροι ουσιαστικά χρησιμοποίησαν απειροστές ποσότητες. Όπως συμβαίνει συχνά στην Ιστορία ό,τι θεωρείται επαναστατικό υπάρχει ήδη στην περιρρέουσα ατμόσφαιρα, περιμένοντας να το συλλάβει κάποιος και να το διατυπώσει κατάλληλα. (Katz, 2013)

4.1 Ο λογισμός του Newton.

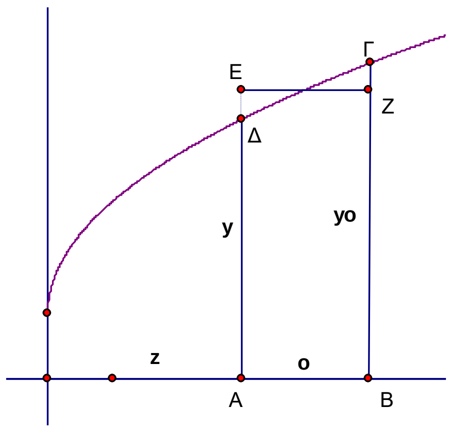
Ο απειροστικός λογισμός αναπτύχθηκε αρχικά από τον Newton, κατά τη διετία των πλέον δημιουργικών του χρόνων, 1665 και 1666, όταν ήταν ακόμα φοιτητής του Πανεπιστημίου του Κέμπριτζ, αποτραβηγμένος στην εξοχική του κατοικία. Στις αρχές ο Newton δε δημοσίευε τις εργασίες του φοβούμενος τις κριτικές. Φαίνεται ότι επηρεάστηκε από το δάσκαλό του Barrow καθώς επίσης και από τον Wallis. Ο ίδιος συχνά έλεγε ότι οδηγήθηκε στις ανακαλύψεις του στην ανάλυση από το Arithmetica Infinitorum του Wallis. (Kline, 1972) Η πρώτη δημοσίευση του λογισμού του έγινε το 1687 στη μνημειώδη εργασία του «Philosophiae naturalis Principia mathematica» (μαθηματικές αρχές της φιλοσοφίας της φύσης). «Στο Principia παρουσίασε τρεις μεθόδους ερμηνείας του νέου λογισμού. Η πρώτη σχετίζεται με τα **απειροστά** και χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη εργασία του που είχε τίτλο «De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas» (Ανάλυση εξισώσεων με απειράριθμους όρους), που κυκλοφόρησε μεταξύ φίλων του το 1669, αλλά δημοσιεύτηκε το 1711. Σε αυτή χρησιμοποίησε το απείρως μικρό με παρόμοιο τρόπο μ' εκείνο του Fermat και Barrow, και με τη βοήθεια του διωνυμικού θεωρήματος επέκτεινε το πεδίο εφαρμογής τους. Η δεύτερη μέθοδος σχετίζεται με τις ροές (fluxions) και εμφανίστηκε στην εργασία του : «Methodus fluxionum et serierum infinitarum» (μέθοδος των ροών και των απείρων σειρών) το 1671, αλλά δημοσιεύτηκε το 1739, 19 χρόνια μετά το θάνατό του. Η τρίτη μέθοδος σχετίζεται με τους πρώτους και εσχάτους λόγους (όρια). Παρουσιάστηκε το 1676 στην εργασία του: «De quadratura curvarum» (τετραγωνισμός καμπύλης), αλλά δημοσιεύτηκε το 1704». (Γιαννακούλιας, 2007)

Τα απειροστά

Στο «De Analysi» περιγράφεται ο υπολογισμός εμβαδών με αντιδιαφόριση. Ιστορικά αυτή είναι η πρώτη εμφάνιση του Θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού υπό τη μορφή $\frac{dE}{dx}=y$ όπου το Ε παριστάνει το εμβαδόν υπό την καμπύλη $y=f(x)$. (Edwards, 1979)

«Στο χειρόγραφο αυτό χρησιμοποίησε την ιδέα ενός απείρως μικρού ορθογωνίου, της στιγμής (moment) του εμβαδού, όπως το αποκάλεσε, με τη βοήθεια του οποίου προχώρησε στον τετραγωνισμό των καμπυλών. Για ευκολία θεωρούμε την $z=x^3$, που δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείει. Ο Newton παρατήρησε, πως αν η μεταβλητή x αυξανόταν κατά μία απειροστή ποσότητα «ο», τότε το εμβαδόν μεταβαλλόταν κατά το στοιχειώδες εμβαδόν του καμπυλογράμμου σχήματος ΑΒΓΔ.

Σχήμα 15



Με την επιλογή ενός σημείου Ε ώστε ΒΕ=υ προκύπτει

$$\varepsilon\mu\beta(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \varepsilon\mu\beta(\mathrm{ABZE}) = o\cdot\upsilon$$

Καθώς η ΑΒ ελαττώνεται συνεχώς, όταν μηδενιστεί το «ο» εξαφανίζεται και το υ γίνεται ίσο με το y. Η αύξηση της επιφανείας είναι τότε $y \cdot o$ και συνεπώς $z + yo = (x+o)^3 = x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3$.

Η μεταβολή του εμβαδού είναι τότε :

$(z + yo) - z = x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 - x^3$ και άρα $yo = 3x^2o + 3xo^2 + o^3$

Από όπου παίρνει το λόγο

$$\frac{yo}{o} = 3x^2 + 3x \cdot o + o^2$$

Διαγράφοντας όλους τους όρους που έχουν ως παράγοντα το «ο» παίρνει την ισότητα $y = 3x^2$.

Με αυτή την διαδικασία καταφέρνει, από την εξίσωση του εμβαδού της επιφάνειας $z = x^3$, *να βρει την εξίσωση της καμπύλης* $y = 3x^2$ *, και αντιστρόφως, από την καμπύλη* $y = 3x^2$ *παίρνει τη σχέση* $z = x^3$ *που δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης* $y = 3x^2$ *και του οριζόντιου άξονα. Σε σύγχρονη ορολογία, ο Newton για την εύρεση του εμβαδού της ζητούμενης επιφάνειας υπολόγισε μία συνάρτηση* z *, τέτοια ώστε* $z' = 3x^2$ *. Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ισούται με την κλίση* $3x^2$ *της εφαπτομένης της καμπύλης* $z = x^3$ *. Έτσι με μία διαδικασία αντίστροφη της διαφόρισης κατόρθωσε να υπολογίσει την επιφάνεια. Με άλλα λόγια βρήκε τη διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος.* (Γιαννακούλιας, 2007)

Μέθοδος των ροών

Η ανακάλυψη των ροών συνδυάστηκε με τη μελέτη των απειροσειρών από το βιβλίο Arithmetica Infinitorum του Wallis. Τότε ο Newton είχε την έμπνευση να επεκτείνει το διωνυμικό θεώρημα, δεχόμενος εκθέτες κλασματικούς καθώς και αρνητικούς. Αυτό τον οδήγησε στην ανακάλυψη των διωνυμικών σειρών. Αυτές με τη σειρά τους βοήθησαν πολύ στη θεμελίωση της θεωρίας των ροών για κάθε συνάρτηση αλγεβρική ή υπερβατική. Για τον Newton, οι βασικές ιδέες του λογισμού είχαν να κάνουν με την κίνηση. Κάθε μεταβλητή σε μια εξίσωση εθεωρείτο, τουλάχιστον σιωπηρά, ως μια απόσταση που εξαρτάται από το χρόνο, τη σταθερή αύξηση του οποίου τη θεώρησε ως αξίωμα, και για αυτό δεν έδωσε ορισμό του χρόνου.

Ο Newton, συνεπώς, προσέγγισε το λογισμό από τη φυσική του πλευρά. Θεώρησε μία καμπύλη ως παραγόμενη από τη συνεχή κίνηση ενός σημείου. Επομένως **η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου αυτού είναι γενικά μεταβλητές ποσότητες**. Ονόμασε μία μεταβλητή ποσότητα **ρέουσα (fluent)** και το ρυθμό μεταβολής της **ροή (fluxion)** της ρέουσας. Αν μία ρέουσα, όπως η τετμημένη του σημείου που παράγει μία καμπύλη, παριστάνεται με x, τότε η ροή της ρέουσας παριστάνεται με $\dot{x}$. Σε σύγχρονο συμβολισμό παρατηρούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το $\frac{dx}{dt}$, όπου το t παριστάνει το χρόνο. Από την άλλη, η ρέουσα του x παριστάνεται με το σύμβολο x με ένα μικρό τετράγωνο σχεδιασμένο δίπλα του, $\square x$ ή $\boxed{x}$. Εισήγαγε επίσης μία άλλη έννοια που την ονόμασε στιγμή της ρέουσας (moment of the fluent) και είναι ένα απειροελάχιστο ποσό κατά το οποίο μία ρέουσα αυξάνει σε ένα απείρως μικρό χρονικό διάστημα «ο», και το συμβόλισε με $\dot{x}o$. (Eves, 1990)

Στην εργασία του «Methodus fluxionum…» γράφει ότι οι μεταβλητές παράγονται από συνεχή κίνηση σημείων, γραμμών και επιπέδων παρά ως στατικά αθροίσματα απειροστών στοιχείων, όπως περιγράφεται στην εργασία του «De Analysi».

Δοθείσης μιας σχέσης μεταξύ δύο fluent ζητείται από τον Newton να βρεθεί η σχέση μεταξύ των fluxions αυτών και αντίστροφα. Οι δύο μεταβλητές που βρίσκονται στη σχέση μπορούν να παριστάνουν οποιεσδήποτε ποσότητες. Αυτές, γράφει, αλλάζουν με το χρόνο. Έτσι αν «ο» είναι ένα απείρως μικρό διάστημα χρόνου όπου η ταχύτητα παραμένει σταθερή τότε $\dot{x}o$ και $\dot{y}o$ είναι οι απείρως μικρές αυξήσεις των x, y ή οι στιγμές (moments) των x, y. Για να βρεθεί η σχέση μεταξύ των $\dot{y}, \dot{x}$ για παράδειγμα στην περίπτωση που η ρέουσα (fluent) είναι $y = x^n$, ο Newton πρώτα θέτει $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$ και στη συνέχεια χρησιμοποιεί το διωνυμικό θεώρημα, αφαιρεί την $y = x^n$, διαιρεί με το «ο» και διαγράφει τους όρους που ακόμα περιέχουν το «ο». Έτσι έχει $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$. Σε σύγχρονο συμβολισμό η τελευταία γράφεται :

$\frac{dy}{dt} = n\,x^{n-1}\frac{dx}{dt}$ και αφού $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, ο Newton βρίσκει : $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Η μέθοδος των fluxions δεν είναι διαφορετική από αυτή που χρησιμοποίησε στο «De Analysi». **Όμως η άποψή του είναι κάπως διαφορετική. Οι στιγμές $\dot{x}o, \dot{y}o$, αλλάζουν με το χρόνο «ο», ενώ στην πρώτη εργασία οι στιγμές είναι έσχατα καθορισμένα κομμάτια των x, y.** Η νέα αυτή άποψη ακολουθεί την πιο δυναμική σκέψη του Γαλιλαίου ενώ η παλαιότερη χρησιμοποιούσε τα στατικά αδιαίρετα του Cavalieri.

Η αλλαγή πρόσφερε, όπως το έθεσε ο Newton, μόνο για να αποφύγει την τραχύτητα από τη θεωρία των αδιαιρέτων. Όμως οι στιγμές $\dot{x}o, \dot{y}o$ είναι ακόμα κάποιο είδος **απείρως μικρών ποσοτήτων**. Επιπλέον οι $\dot{x}, \dot{y}$ που είναι οι fluxions (οι παράγωγοι) ποτέ δεν ορίστηκαν πραγματικά. Η αγνόηση των όρων που περιέχουν τετράγωνα ή μεγαλύτερες δυνάμεις του «ο» αποτέλεσε αντικείμενο κριτικής από κάποιους συγχρόνους του Newton. Η ιδιότητα των moments φαίνεται να δυσκόλεψε τον Newton, διότι αυτά είναι εξαφανιζόμενα, μηδενιζόμενα δίχως εξήγηση. Ο Newton ισχυρίζεται ότι η μέθοδος των fluxions είχε θεμελιωθεί πάνω στη γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων. Γνώριζε όμως ότι πολλές θεμελιώδεις έννοιες έπρεπε να αποσαφηνιστούν. (Kline, 1972)

Πρώτοι και έσχατοι λόγοι

Στην προσπάθειά του να δικαιολογήσει τη διαγραφή των απείρως μικρών όρων, αισθάνθηκε την ανάγκη να εισάγει την έννοια του «ορίου», διατυπώνοντας ότι οι ροές δεν πρέπει να θεωρούνται **ποτέ μόνες τους αλλά σε λόγους**. Η σκέψη αυτή παρουσιάστηκε καθαρά στο «De quadratura» το 1704. Σε αυτή την εργασία γίνεται επικριτικός για την εξάλειψη των όρων που περιείχαν το «ο».

Γράφει στο «opera omnia»: «Στα μαθηματικά ακόμη και τα μικρότερα λάθη δεν πρέπει να παραβλέπονται». Σε αυτή χρησιμοποίησε τη νέα του ιδέα, τη μέθοδο των **πρώτων και εσχάτων (τελικών) λόγων** για τον υπολογισμό της ροής της $y = x^n$. Για να βρει τη fluxion του y ή του x^n παίρνει το x «ρέοντας» να γίνεται $x+o$. Τότε το x^n γίνεται $\left(x+o\right)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + ...$

Τότε $\left(x+o\right)^n - x^n = nx^{n-1}o + o\left\{\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}o + ... + o^{n-1}\right\}$

Και διαιρώντας με το «ο» σε σύγχρονο συμβολισμό έχουμε :

$$\frac{\left(\Delta x\right)^n}{\Delta x} = n\,x^{n-1} + \frac{1}{2}n\left(n-1\right)x^{n-1}o + ... + o^{n-1}$$

Αν τώρα οι αυξήσεις μηδενίζονται διαγράφει τους όρους που το περιέχουν. Ο λόγος των αυξήσεων (των μεταβολών) που τον ονομάζει έσχατο λόγο των μεταβολών ισούται με το $n\,x^{n-1}$. Σε σύγχρονη ορολογία : $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = n\,x^{n-1}$.

«Βέβαια η λογική αυτής της έκδοσης δεν είναι καλύτερη από αυτή των δύο προηγούμενων. Παρ' όλα αυτά ο Newton λέει ότι αυτή είναι σε αρμονία με τη γεωμετρία των αρχαίων και ότι δεν είναι αναγκαίο να εισάγουμε απείρως μικρές ποσότητες. Γράφει στο Quadratura (1676): «Θεωρώ τις μαθηματικές ποσότητες σ' αυτό το μέρος ότι δεν αποτελούνται από πολύ μικρά μέρη, αλλά ότι περιγράφονται από συνεχή κίνηση».

Ο ισχυρισμός του πως για επαρκώς μικρό «ο» η διαφορά μεταξύ του nx^{n-1} και του λόγου αυξήσεων $nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + ...$ μπορούσε να γίνει οσοδήποτε μικρή, χρειαζόταν απόδειξη, ειδικά στην περίπτωση που το πλήθος των όρων της σειράς είναι άπειρο. Ο Newton δεν το έπραξε προφανώς γιατί υπήρχαν δυσκολίες στην έννοια της σύγκλισης. **Κατά τον Carl Boyer «η δυσκολία κατανόησης των απείρως μικρών μεγεθών τον οδήγησε στη μελέτη του λόγου τους που ήταν εν γένει ένας πραγματικός αριθμός. Αυτό του επέτρεπε ν' αντικαθιστά τα απειροστά μεγέθη με οποιαδήποτε άλλα, που ήταν εύκολα αντιληπτά, και είχαν τον ίδιο λόγο με αυτά».** Απέτυχε όμως να προσεγγίσει τους λόγους αυτούς με την αριθμητική έννοια του ορίου γιατί είχε επηρεαστεί από τις απειροστικές απόψεις του 17^{ου} αιώνα». (Γιαννακούλιας, 2007)

Στο Principia (1687) σε μια σειρά από λήμματα εκφράζει επιχειρήματα που είχαν εμφανιστεί και στο «De quadratura …» **«Ποσότητες, και οι λόγοι ποσοτήτων, οι οποίοι σ' ένα πεπερασμένο χρόνο συγκλίνουν συνεχώς προς μία ισότητα και πριν το τέλος αυτού του χρόνου, προσεγγίζουν η μία την άλλη πλησιέστερα από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, γίνονται τελικά ίσες».** Ο Newton αρχικά είχε στο νου του άπειρες μικρές ποσότητες οι οποίες δεν ήταν πεπερασμένες, ούτε ακριβώς μηδέν. Αυτές παρουσίαζαν μεγάλη δυσκολία στη σύλληψη και έτσι ο Newton επικεντρώθηκε στο λόγο τους, ο οποίος εν γένει ήταν ένας πεπερασμένος αριθμός. (Katz, 2013)

Στο Principa χρησιμοποιεί απειροστικές θεωρήσεις και επιχειρήματα ορίων. Ωστόσο η ανάπτυξη των προτάσεών του διατυπώθηκε σχεδόν ολοκληρωτικά στη γλώσσα και τη μορφή της κλασικής συνθετικής γεωμετρίας και έκανε και ελάχιστη χρήση της αλγοριθμικής υπολογιστικής μηχανής του λογισμού των ροών. Η παραδοσιακή άποψη είναι πως ο Newton πρώτα υπολόγιζε τις βασικές προτάσεις του Principa με τη βοήθεια του λογισμού των ροών (fluxions) και κατόπιν απέδιδε με το αποδεικτικό ένδυμα της συνθετικής γεωμετρίας, σε μια προσπάθεια να αποφύγει τις επικρίσεις. (Suzuki, 2002)

Μετά τη δημοσίευση της τελευταίας εργασίας του δημιουργήθηκε και πάλι σύγχυση. Τι ήταν άραγε τούτο το μικρό «ο»; Ήταν μηδέν; Αν ήταν μπορούσαν να διαιρούν με αυτό, αν δεν ήταν μπορούσαν να το παραλείπουν;

«Ο Newton στο Principia προσπαθεί να αιτιολογήσει τη μέθοδό των πρώτων και εσχάτων λόγων. «… Αυτές οι προτάσεις δίνονται για να αποφύγουμε την μονότονη και περίπλοκη διαδικασία της διπλής αντίφασης στην οποία κατέφευγαν οι παλιοί γεωμέτρες. Βέβαια οι αποδείξεις με τη μέθοδο των αδιαιρέτων είναι πιο σύντομες. Επειδή όμως αυτή η μέθοδος είναι λιγότερο γεωμετρική θα περιοριστώ στις αποδείξεις των προτάσεων που ακολουθούν επιλέγοντας τα πρώτα και τελικά αθροίσματα, και τους λόγους των μεγεθών τη στιγμή που εμφανίζονται και τη στιγμή που εξαφανίζονται, δηλαδή στα όριά τους. Όποτε θα χρησιμοποιώ μικρές καμπύλες αντί για ευθείες δεν θα εννοώ αδιαίρετες, αλλά ανεπαίσθητες διαιρετές ποσότητες, και αντί για αθροίσματα και λόγους ορισμένων μερών θα θεωρώ όρια αθροισμάτων και λόγων. Μπορεί να διατυπωθεί η αντίρρηση ότι δεν υπάρχει τελικός λόγος ανεπαίσθητων ποσοτήτων, γιατί ο λόγος πριν την εξάλειψη των ποσοτήτων δεν είναι τελικός (έσχατος), και όταν εξαλειφθούν δεν υπάρχει καν. Με το ίδιο όμως επιχείρημα και ένα κινητό που φθάνει στον προορισμό του και σταματάει δεν έχει τελική ταχύτητα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η ταχύτητά του, πριν φτάσει στον προορισμό του δεν είναι τελική, ενώ όταν φτάσει μηδενίζεται. Είναι όμως εύκολο να δοθεί μια απάντηση σε αυτό τον ισχυρισμό. Με τον όρο «τελική ταχύτητα» εννοούμε εκείνη με την οποία κινείται το σώμα, όχι πριν φτάσει στον προορισμό του, ούτε αφού φτάσει, αλλά τη στιγμή ακριβώς που φθάνει, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία το σώμα φτάνει στην τελευταία θέση, και με την οποία παύει η κίνηση. Αντίστοιχα, με τον όρο έσχατος λόγος των ανεπαισθήτων ποσοτήτων, εννοούμε το λόγο των ποσοτήτων όχι πριν εξαφανιστούν, ούτε μετά, αλλά των τιμών με τις οποίες εξαφανίζονται». Ο Newton ενώ βρίσκει το «όριο» του λόγου των διαφορών δεν το ονομάζει όριο του λόγου, αλλά περιγράφει τα όρια ως «εσχάτους λόγους των αλλαγών», δηλαδή ως την τιμή του λόγου αυτών των μηδενιζομένων ποσοτήτων, τη στιγμή ακριβώς που μηδενίζονται. Γράφει :

«Αυτοί οι έσχατοι λόγοι με τους οποίους μηδενίζονται οι ποσότητες δεν είναι στην πραγματικότητα οι λόγοι των εσχάτων ποσοτήτων, αλλά όρια προς τα οποία πάντα τείνουν ποσότητες, που μειώνονται απεριόριστα, και προς τα οποία προσεγγίζουν πλησιέστερα από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, χωρίς ποτέ να τα ξεπερνούν, ούτε στην πραγματικότητα τα φτάνουν, αφού οι ποσότητες μειώνονται επ' άπειρον».

Η Judith V. Grabiner δίνει την ακόλουθη εξήγηση: Φαίνεται, ότι ο Newton, είχε στο νου του ένα «σύνορο», και οι μαθηματικοί της εποχής του αναφέρουν συχνά το συγκεκριμένο παράδειγμα του κύκλου, ως το όριο των εγγεγραμμένων πολυγώνων. Η φράση «ούτε … να τα φτάσουν, αφού οι ποσότητες μειώνονται επ' άπειρον» εγείρει ένα κεντρικό ζήτημα: συχνά έμπαινε το ερώτημα αν στην πραγματικότητα μια μεταβλητή ποσότητα έφθανε ποτέ το όριό της. Αν δεν το έφθανε μήπως υπήρχε κάποιο λάθος; Διατυπώνοντας την πρόταση «οι ποσότητες και οι λόγοι των ποσοτήτων, που σε κάθε πεπερασμένο χρόνο τείνουν συνεχώς να εξισωθούν και που στο τέλος αυτού του χρόνου προσεγγίζουν μεταξύ τους πλησιέστερα από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, τελικά εξισώνονται» δεν βοήθησε να ξεκαθαριστεί αυτό το ζήτημα». (Γιαννακούλιας, 2007)

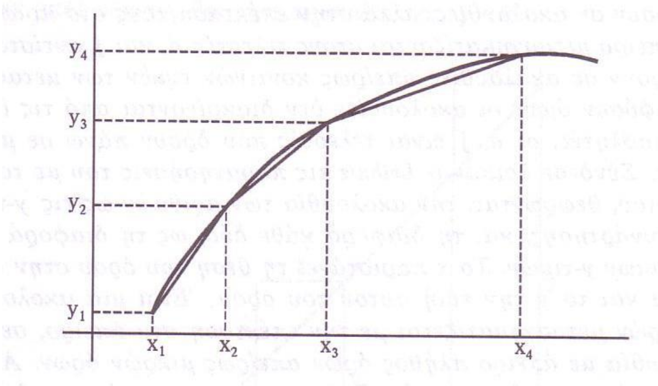
Τι σημαίνει «τελικά εξισώνονται»; Αυτό το ερώτημα δεν ξεκαθαρίστηκε ούτε τον 18^{o} αιώνα. Το 1734 ο Ιρλανδός φιλόσοφος και ιερωμένος Gregore Berkeley έκανε οξεία επίθεση και αυστηρή κριτική στον απειροστικό λογισμό σ' αυτό ακριβώς το σημείο: «οι επιστήμονες είπε, επιτίθενται στη θρησκεία γιατί την θεωρούν παράλογη. Ας βελτιώσουν λοιπόν τον τρόπο με τον οποίο οι ίδιοι σκέπτονται. Μια ποσότητα είτε είναι μηδέν, είτε όχι. Δεν υπάρχει τίποτα ενδιάμεσο». Ο Berkeley πίστευε ότι, τα ορθά αποτελέσματα στα οποία έφτασε ο λογισμός ήταν συνέπεια αλληλοαναίρεσης διαφόρων σφαλμάτων. Οι ροές ήταν για τον Berkeley απαράδεκτες από λογική άποψη. «Αλλά, όποιος μπορεί να χωνέψει μια δεύτερη ή τρίτη ροή» φώναξε στον «άπιστο μαθηματικό» στον οποίο απευθυνόταν, το Halley, «δεν χρειάζεται νομίζω, να τον πιάσει δυσπεψία με το οποιοδήποτε σημείο της Θεότητας». Ο Berkeley κλείνοντας την κριτική του χαρακτήρισε τους μαθηματικούς, ως ανθρώπους που συνηθίζουν να υπολογίζουν αντί να σκέπτονται. (Struick, 1982)

4.2 Ο λογισμός του Leibniz

Την ίδια εποχή με τον Newton, ο μεγάλος γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), θα οδηγηθεί στην επινόηση του δικού του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Ο Newton προσέγγισε το λογισμό μέσω των ιδεών της ταχύτητας και της απόστασης, ενώ ο Leibniz μέσω των διαφορών και των αθροισμάτων.

«Το αρχικό αντικείμενο μελέτης του Leibniz ήταν οι ακολουθίες αριθμών. Από μία άπειρη ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in N}$ σχημάτισε την ακολουθία αθροισμάτων $\left(s_n\right)_{n\in N}$, με $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, για κάθε $n \in N$, και την ακολουθία διαφορών $\left(\delta_n\right)_{n\in N}$, με $\delta_n = a_{n+1} - a_n$ για κάθε $n \in N$. Παρατήρησε ότι $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$ για κάθε $n \in N$, δηλαδή ότι οι διαφορές των διαδοχικών όρων της $\left(s_n\right)_{n\in N}$ ξαναδίνουν τους όρους της αρχικής ακολουθίας $\left(a_n\right)_{n\in N}$. Παρόμοια τα αθροίσματα των διαδοχικών όρων της $\left(\delta_n\right)_{n\in N}$ δίνουν ως αποτέλεσμα τη διαφορά $a_{n+1} - a_1$, για κάθε $n \in N$. Αυτό τον οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οι τελεστές άθροισης και διαφοράς ήταν αμοιβαία αντίστροφοι. Το συμπέρασμα αυτό το χρησιμοποίησε στη μελέτη καμπυλών, θεωρώντας ότι η καμπύλη προσεγγίζεται από ένα πολύγωνο. **Η έννοια της καμπύλης ως πολύγωνο με άπειρο πλήθος γωνιών διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στις νέες απειροστικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν κατά τον 17ο αιώνα.** Ο Leibniz έγραφε: «έχω την αίσθηση ότι αυτή η μέθοδος και άλλες που βρίσκονται σε σχέση με αυτή ως τώρα, μπορούν όλες να προκύψουν από μία γενική αρχή την οποία χρησιμοποιούν στη μέτρηση καμπυλόγραμμων σχημάτων: ότι δηλαδή ένα καμπυλόγραμμο σχήμα μπορεί να θεωρείται το ίδιο με ένα πολύγωνο με απείρως πολλές πλευρές» (Bos, 1974)

Σχήμα 16



Οι τετμημένες και οι τεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου, σχημάτιζαν πεπερασμένες ακολουθίες, $\left(x_\kappa\right)_{\kappa\in N}$, $\left(y_\kappa\right)_{\kappa\in N}$ αντίστοιχα. Συμβόλισε την απειροστή διαφορά των τεταγμένων με dy και την αντίστοιχη διαφορά των τετμημένων με dx. **Όταν οι διαφορές $x_{\kappa+1}-x_\kappa$ γίνονταν πολύ μικρές, τότε οι πλευρές του πολυγώνου πλησίαζαν να γίνουν εφαπτόμενες. Σε αυτή την περίπτωση το απειροστό εμβαδόν ydx ταυτιζόταν με την τεταγμένη y του Newton και του Cavalieri. Η θεώρηση αυτή έπαιξε σημαντικό ρόλο στις νέες απειροστικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια του 17ου αιώνα».** (Γιαννακούλιας, 2007)

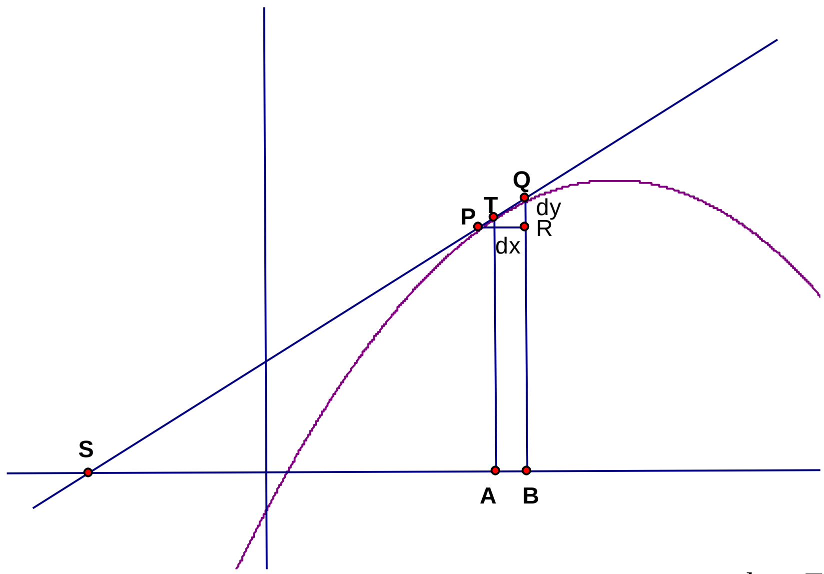
Εφαρμόζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα, παίρνει την ακολουθία των διαφορών αυτών των τεταγμένων $\left(\delta y_i\right)$, το άθροισμά τους $\sum_i \delta y_i$, ισούται με τη διαφορά $y_n - y_0$ της αρχικής από την τελική τεταγμένη. Για την ακολουθία $\left(\Sigma y_i\right)$ όπου $\Sigma y_i = y_0 + y_1 + ... + y_i$, η ακολουθία των διαφορών $\left(\delta\,\Sigma y_i\right)$ ισούται με την αρχική ακολουθία των τεταγμένων. Ο Leibniz επέκτεινε τους δύο αυτούς κανόνες και στην περίπτωση που η καμπύλη προσεγγίζεται από ένα πολύγωνο με άπειρο πλήθος πλευρών. Από κάθε κορυφή έφερε την τεταγμένη y προς τον άξονα. Εάν συμβολίσουμε το άθροισμα των απείρων το πλήθος τεταγμένων με $\int y$, τότε ο πρώτος κανόνας μετασχηματίζεται στον $\int dy = y$, ενώ ο δεύτερος γίνεται $d\int y = y$. Γεωμετρικά ο πρώτος σημαίνει ότι το άθροισμα των διαφορικών (των απειροστών διαφορών) σε ένα τμήμα ισούται με το τμήμα (Υποθέτει ότι αρχική τιμή είναι το 0). Ο δεύτερος κανόνας δεν έχει γεωμετρική ερμηνεία, επειδή το άθροισμα των απείρων όρων μπορεί να απειρίζεται. Έτσι καταλήγει ο Leibniz στο συμπέρασμα ότι το

$\int ydx$ μπορούσε να ερμηνευτεί ως το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη και ο κανόνας $d\int ydx = ydx$ σήμαινε απλά ότι οι διαφορές ανάμεσα στους όρους της ακολουθίας των εμβαδών $\int ydx$ είναι οι ίδιοι όροι ydx .(Katz, 2013)

Έτσι το εμβαδόν κάτω από μία καμπύλη επιτυγχάνεται από ένα σύνολο ορθογωνίων. Η δυσκολία προέκυψε από το γεγονός πως δεν ήταν καθαρός ο τρόπος υπολογισμού. Δεν υπήρχε μια καθαρή **έννοια του ορίου**. Ο Leibniz το σκέφτηκε τότε ως άθροισμα των ορθογωνίων τόσο μικρών και τόσο πολυάριθμων, ώστε η διαφορά μεταξύ αυτού του αθροίσματος και του αληθινού εμβαδού υπό την καμπύλη θα μπορούσε να παραληφθεί, ενώ σε κάποιες άλλες φορές σκέφτηκε το εμβαδόν ως άθροισμα των τεταγμένων (y-τιμών). Αυτή η τελευταία έννοια του εμβαδού ήταν κοινή, ειδικότερα μεταξύ των αδιαιριστών, οι οποίοι θεωρούσαν ότι η **έσχατη μονάδα** του εμβαδού και η y-τιμή **ταυτίζονται**.

Σε σχέση με τη διαφόριση ακόμα και μετά την αναγνώριση ότι τα dx, dy μπορούσαν να είναι αυθαίρετα μικρές ποσότητες, ο Leibniz είχε ακόμα να υπερκεράσει τη θεμελιώδη δυσκολία ότι ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι η παράγωγος με τη δική μας έννοια. Αυτός βάσισε το επιχείρημά του στο χαρακτηριστικό τρίγωνο, το οποίον είχαν χρησιμοποιήσει και ο Pascal και ο Barrow. Αυτό αποτελείται από το dy, dx και τη χορδή PQ, την οποία ο Leibniz επίσης θεωρεί και ως μέρος της καμπύλης μεταξύ των P, Q και ως μέρος της εφαπτομένης στο T. Μολονότι αυτός μιλάει για αυτό το τρίγωνο ως απείρως μικρό ισχυρίζεται παρόλα αυτά ότι είναι όμοιο προς ένα πεπερασμένο τρίγωνο, δηλαδή το τρίγωνο STA, που αποτελείται από την υποεφαπτομένη SA, την τεταγμένη στο T και το μήκος της εφαπτομένης ST. Συνεπώς τα dy, dx είναι τα (έσχατα) στοιχεία και ο λόγος τους έχει καθορισμένη σημασία.

Σχήμα 17

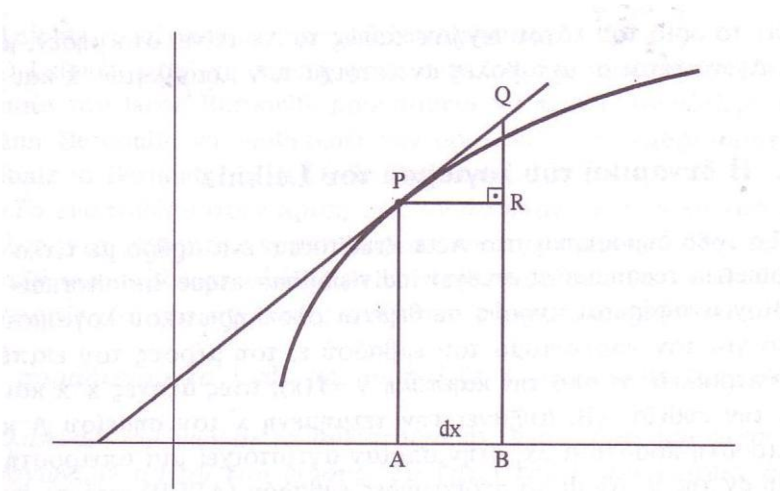


Πράγματι, από την ομοιότητα των τριγώνων PQR και STA προκύπτει ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{TA}{SA}$. Στα 1680 το dx γίνεται η διαφορά των τετμημένων (όπως είδαμε) και το dy η διαφορά των τεταγμένων. Γράφει: «… Τώρα αυτά τα dx, dy λαμβάνονται ώστε να είναι απείρως μικρά ή τα δύο σημεία στην καμπύλη (έχει γίνει κατανοητό) ότι βρίσκονται σε μία απόσταση το ένα από το άλλο που να είναι μικρότερη από κάθε δοσμένο μήκος…» Το dy για τον Leibniz είναι η στιγμιαία αύξηση ως προς y καθώς το μήκος της τετμημένης κινείται πάνω στον x-άξονα. Όμως το PQ στο σχήμα ακόμα θεωρείται **μήκος της ευθείας**

«Το πρώτο άρθρο του Leibniz για το διαφορικό λογισμό εμφανίστηκε το 1684 στο περιοδικό «Acta Eruditorum» (πεπραγμένα των σοφών) με βασική έννοια σε αυτό το διαφορικό. Αν και δεν είχε πλήρως ξεκαθαριστεί η έννοια, θεώρησε μια αυθαίρετη ποσότητα που την ονόμασε διαφορά (είναι η απείρως μικρή μεταβολή της μεταβλητής x) και τη συμβόλισε με dx και όρισε την dy από την ισότητα $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{υποεφαπτομένη}$

Το dy είναι το διαφορικό πρώτης τάξης της συνάρτησης y . Τα διαφορικά αυτά dx, dy είναι σταθερές, μη μηδενικές ποσότητες, αλλά ασύγκριτα μικρές ποσότητες και επομένως αμελητέες σε σύγκριση με τις τιμές των μεταβλητών x, y . Ο ορισμός του διαφορικού όπως δόθηκε επειδή προϋπόθετε κάποια έκφραση για την υποεφαπτομένη ήταν ανεπαρκής. Ανεπαρκής ήταν και ο ορισμός της εφαπτομένης ως τη γραμμή που ενώνει δύο απείρως γειτονικά σημεία της καμπύλης (με την έννοια ότι η διαφορά dx ήταν απείρως μικρή)». (Γιαννακούλιας, 2007) Ο Leibniz δεν αιτιολόγησε την επιλογή αυτού του ορισμού για το διαφορικό αλλά φαίνεται πολύ πιθανόν ότι τον επέλεξε για να αποφύγει αντιφάσεις με τα απειροστά. (Bos, 1974) Μεταχειρίστηκε τα διαφορικά άμεσα ως απειροστά.

Σχήμα 18



«Παρατηρούμε στο σχήμα ότι καθώς το dx γίνεται ολοένα και πιο μικρό, το σημείο Q πλησιάζει να γίνει σημείο της καμπύλης. Επομένως το dy , το οποίο εκφράζει την απείρως μικρή μεταβολή της y , αντιπροσωπεύει το μήκος QR καθώς το Q τείνει να συμπέσει με το P, και άρα είναι το όριο προς το οποίο τείνει ο λόγος $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ καθώς το dx τείνει στο μηδέν. Σε σύγχρονο συμβολισμό $\frac{dy}{dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$.

Αυτό προκαλεί μία σύγχυση, διότι ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ αφ’ ενός είναι ο λόγος των απειροστών μεταβολών dx, dy των μεταβλητών x, y αντίστοιχα, και αφ’ ετέρου το $\frac{dy}{dx}$ είναι ένα σύμβολο που αντιπροσωπεύει το όριο του λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ καθώς το Δx τείνει στο μηδέν, με τα $\Delta x, \Delta y$ να είναι οι μεταβολές αντίστοιχα των μεταβλητών x και y ». (Γιαννακούλιας, 2007)

Τα απειροστά του Leibniz είναι αδιαίρετα, διότι έχουν την ίδια διάσταση όπως και τα σχήματα που απαρτίζονται απ’ αυτά. Έτσι διαπραγματεύεται καμπύλες ως συντιθέμενες από απειροστές γραμμές μάλλον παρά από αδιαίρετα σημεία. Παρομοίως τα απειροστά μέρη ενός επιπέδου σχήματος είναι παραλληλόγραμμα. Έτσι ακολουθεί τους Roberval, Torricelli. Οι ορισμοί του Leibniz δεν ήταν ικανοποιητικοί. Για ν’ αποσαφηνίσει επομένως τη φύση των απείρως μικρών διαφορικών του κατέφευγε συχνά σε ακολουθίες.

Επικαλούμενος τη γεωμετρική διαίσθηση έλεγε ότι όπως ένα σημείο δεν προσθέτει τίποτα σε μία γραμμή διότι δεν είναι ομογενές ή συγκρίσιμο έτσι και τα διαφορικά ανώτερης τάξης στη μέθοδό του μπορούν κατά τον ίδιο τρόπο να αγνοηθούν.

Οι φράσεις άπειρο και απειροστό δεν δηλώνουν τίποτε άλλο από μεγέθη από τα οποία μπορεί κάποιος να λάβει, το ένα οσοδήποτε μεγάλο και το άλλο οσοδήποτε μικρό επιθυμεί. Παρόλα αυτά μπορούμε να τα χρησιμοποιούμε ως έσχατα αντικείμενα, δηλαδή ως πραγματικά άπειρα και απείρως μικρά μεγέθη, ως εργαλεία, όπως οι αλγεβριστές διατηρούν τις φανταστικές τιμές με μεγάλο όφελος (Leibniz Early mathematical Manuscripts, p. 150)(Bos, 1974)

Όπως ο Newton δεν υπολόγιζε ποτέ μια μεμονωμένη ροή αλλά πάντα ένα λόγο, έτσι και ο Leibniz αντιλαμβανόταν ότι **το σημαντικό ήταν ο λόγος δύο διαφορικών** ή η σχέση μεταξύ τους. Αυτά λοιπόν μπορούσαν να θεωρηθούν ως οποιαδήποτε **πεπερασμένα** μεγέθη, ο λόγος των οποίων ήταν εκείνος της τεταγμένης προς την υποεφαπτομένη.

Για πρακτικούς λόγους όμως διατήρησε το απείρως μικρό λέγοντας πως αν κάποιος επιθυμούσε αυστηρότητα, μπορούσε να αντικαταστήσει τα «μη μετρήσιμα» με μετρήσιμα που έχουν τον **ίδιο λόγο**. Παραδέχτηκε ότι η απόδειξη της ύπαρξης απείρως μικρών μεγεθών δεν μπορούσε να αποδειχθεί ή να διαψευσθεί (Mathematische shriften, III , 524) (Bos, 1974)

Όταν του ζητήθηκε να εξηγήσει τη μετάβαση από τα πεπερασμένα στα απειροστά μεγέθη κατέφυγε σε μια ημιφιλοσοφική αρχή: «την αρχή της συνέχειας».

Έχουμε συναντήσει προηγούμενες εφαρμογές που έγιναν μ’ αυτή την αρχή, από τον Kepler. Ο Leibniz, ωστόσο, έδωσε στο νόμο της συνέχειας μια καθαρότητα στη διατύπωση που δεν υπήρχε προηγουμένως και ίσως για αυτό το λόγο θεωρούσε αυτή την αρχή ως δική του ανακάλυψη. Αυτό το εξέφρασε σε επιστολή του το 1687 ως εξής: *«Σε κάθε υποτιθέμενη μετάβαση από μία κατάσταση σε μία άλλη, καταλήγοντας σ’ ένα τέρμα, είναι επιτρεπτό να επιβάλουμε ένα γενικό συλλογισμό, σύμφωνα με τον οποίο, το τελικό τέρμα μπορεί επίσης να περιλαμβάνεται».* (Boyer, 1949) Δηλαδή όταν δύο δεδομένα προσεγγίζουν το ένα το άλλο συνεχώς τότε και οι συνέπειες τους ή τα αποτελέσματά τους κάνουν το ίδιο. Με άλλα λόγια η «συνέχεια σέβεται τα όρια»

Έτσι αν κάποιος υπολογίσει ότι ένας ορισμένος λόγος αληθεύει γενικά, όταν π.χ. τα μεγέθη dx, dy είναι πεπερασμένα, ο ίδιος λόγος θ' αληθεύει και στη οριακή περίπτωση. (Katz, 2013)

Κάνοντας επιδέξιους χειρισμούς και υποθέτοντας ότι η διαφορά δεν είναι μηδέν, ο Leibniz κατόρθωσε μετά από δικαιολογημένες παραλείψεις να περιοριστεί σε λόγους μη εμφανιζομένων ποσοτήτων, ώσπου τελικά έφθανε στο σημείο να εφαρμόζει τα αποτελέσματά του στην έσχατη περίπτωση, φαινομενικά με το νόμο της συνέχειας. Δικαιολόγησε συνεπώς την οριακή συνθήκη δυνάμει του νόμου της συνέχειας. *Η ιδέα του ορίου ενυπάρχει στην εργασία του Leibniz σιωπηρά, αν και η λογική τάξη ήταν αντεστραμμένη . Πράγματι ο Leibniz δικαιολόγησε την οριακή συνθήκη με το νόμο της συνέχειας, ενώ αντιθέτως στα σύγχρονα μαθηματικά ο νόμος της συνέχειας ορίζεται μετά τον ορισμό του ορίου.*

Η ακολουθία των διαφορών με τη σειρά τους παράγει τα διαφορικά δεύτερης τάξης, $d(dx)=ddx=d^2x$, και παρόμοια $d^2y=d(dy)$ και γενικότερα $d^\kappa x=d\left(d^{\kappa-1}x\right)$, $d^\kappa y=d\left(d^{\kappa-1}y\right)$ είναι τα διαφορικά ανώτερης τάξης. Υποθέτει ότι d^2y είναι ασύγκριτα μικρό σε σχέση με το dy και γενικά το $d^\kappa y$ είναι ασύγκριτα μικρό σε σχέση με το $d^{\kappa-1}y$.

Η αποδοχή του νόμου της συνέχειας δικαιολογούσε συνεπώς και τη διαγραφή των διαφορικών ανώτερης τάξης. Παρότι χρησιμοποίησε τη μέθοδο των απειροστών παντού, ταλαντεύθηκε για τη στάση του έναντι των διαφορικών, θεωρώντας αυτά, ως μη αποδεκτά (απροσδιόριστα), ως ποιοτικά μηδενικά και ως βοηθητικές μεταβλητές. Η επιτυχημένη όμως έκφραση του συμβολισμού τους ήταν εκείνη που τον έκανε να σκεφτεί τους λόγους των διαφορικών ως πηλίκα και τα ολοκληρώματα ως αθροίσματα μάλλον παρά ως οριακές τιμές κάποιων χαρακτηριστικών συναρτήσεων. (Γιαννακούλιας, 2007)

Ο Leibniz κατόρθωσε να δημιουργήσει ένα ολοκληρωμένο, μεθοδικό και λειτουργικό λογισμό, καθιερώνοντας μία νέα ορολογία και ένα απλό και λειτουργικό συμβολισμό. Ο C. Edwards γράφει : «Δεν θα ήταν υπερβολή να πει κανείς ότι ο λογισμός του Leibniz φέρνει, κοντά στο μαθητή, προβλήματα τα οποία απαιτούσαν κάποτε την ευφυΐα του Αρχιμήδη ή του Newton».

4.3 Το έργο των Newton- Leibniz

«Οι Newton και Leibniz εισήγαγαν νέα γλώσσα, νέες συλλογιστικές, νέες προτάσεις και νέα ερωτήματα στα μαθηματικά. Παρά το γεγονός ότι οι νέες έννοιες δεν εξηγήθηκαν με σαφήνεια, με επακόλουθο να υπάρξουν διάφορες παρερμηνείες, οι αλλαγές που πρότειναν έγιναν αποδεκτές αρκετά γρήγορα από την μαθηματική κοινότητα…. Η αλγεβροποίηση του απειροστικού λογισμού αποτέλεσε ένα επαναστατικό γεγονός και σηματοδότησε την εμφάνιση των σημαντικότερων αλλαγών που έγιναν κατά τη διάρκεια του 17[ου] αιώνα.

Η *διαφόριση* αποτέλεσε μία νέα πράξη, η οποία ενεργούσε σε μεταβλητές ποσότητες προσαρτημένες σε καμπύλες. Έτσι κατόρθωσαν να αναγάγουν τα προβλήματα του εμβαδού και του όγκου και άλλων συναφών προβλημάτων σε προβλήματα που εύρισκαν τη λύση τους με την *αντιδιαφόριση».*

Στο λογισμό του Newton κεντρικό θέμα αποτελεί η διαφόριση, χρησιμοποιώντας ως πρωταρχική έννοια το ρυθμό μεταβολής. Επίσης κάνοντας χρήση της αντίστροφης διαδικασίας, την αντιδιαφόριση και τις άπειρες σειρές για την αναπαράσταση των συναρτήσεων, κατάφερε να δώσει λύση στα περισσότερα προβλήματα του απειροστικού λογισμού.

Αντίθετα ο Leibniz αν και υπολόγισε τα διάφορα αθροίσματα με την αντιδιαφόριση, σκεφτόταν πρώτα με βάση την άθροιση των ποσοτήτων. (Edwards, 1979)

Η διαφορά μεταξύ των εργασιών τους έγκειται στο γεγονός ότι ο Newton χρησιμοποίησε τις απείρως μικρές αυξήσεις στα x και y για τον ορισμό της fluxion (παραγώγου). Ήταν ουσιαστικά το όριο του λόγου των αυξήσεων καθώς αυτές γίνονταν μικρότερες και μικρότερες ενώ ο Leibniz διαπραγματεύθηκε ευθέως με απείρως μικρές αυξήσεις του x και y δηλαδή με τα διαφορικά και καθόρισε σχέσεις μεταξύ τους. Η διαφορά καθρεφτίζει το φυσικό προσανατολισμό του Newton στον οποίο, μια έννοια όπως η ταχύτητα είναι κεντρική, ενώ στον Leibniz η φιλοσοφική σκέψη έχει σχέση με έσχατα μόρια της ύλης, τις μονάδες του. (Kline, 1972)

«Μέσα από τις εργασίες και των δύο φαίνεται η αναγκαιότητα της συνέχειας. Οι οριακές καταστάσεις θα έπρεπε να υπακούουν στους ίδιους νόμους με τις μεταβλητές που τις πλησιάζουν. Όπως ήταν φυσικό άρχισε μία κριτική στο έργο τους, η οποία πολλές φορές αμφισβητούσε ή και απέρριπτε την ύπαρξη των απειροστών μεγεθών. Τα $dx,\ dy,\ \frac{dy}{dx}$ παρέμεναν ασαφή. Οι απεριόριστα μικρές αυτές ποσότητες δεν ήταν μηδενικές, αλλά ήταν μικρότερες από κάθε πεπερασμένη ποσότητα». (Γιαννακούλιας, 2007)

Παρ' όλα αυτά, η τεχνική των απειροστών έγινε πολύ χρήσιμη από κάποιους επιγόνους του Leibniz, οι οποίοι δέχονταν τα απειροστά ως υπαρκτές μαθηματικές οντότητες και με τη χρήση τους πέτυχαν σημαντικά αποτελέσματα τόσο στον απειροστικό λογισμό όσο και στις εφαρμογές του σε φυσικά προβλήματα. (Katz, 2013)

5. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΤΟΝ 18ο ΑΙΩΝΑ

5.1 Κριτική για το έργο των Newton- Leibniz

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω το έργο των Newton- Leibniz δέχτηκε αυστηρή κριτική στα χρόνια που ακολούθησαν. Να σημειώσουμε τις αντιρρήσεις του φιλοσόφου George Berkeley (1685-1753) ο οποίος στο φυλλάδιό του «The Analyst» το 1734, αδυνατεί να συλλάβει την έννοια της ροής και χαρακτήρισε το «ο» του Newton ως κάτι το ανύπαρκτο. Πίστευε πως τα απειροστά ήταν φανταστικά και άχρηστα και διερωτήθηκε για την αναγκαιότητα ενασχόλησης με ποσότητες απείρως μεγάλες ή απείρως μικρές. Τις θεωρούσε ακατανόητες εφόσον δεν μπορούσαν να γίνουν αντιληπτές μέσω των αισθήσεων. Η κριτική του Berkeley, αν και σε πολλά σημεία της δεν ήταν επιτυχής, είχε θετικά αποτελέσματα, γιατί δημιούργησε την ανάγκη να επανεξεταστούν ορισμένα σημεία της θεωρίας του Newton και να διευκρινιστούν πολλοί όροι που είχαν χρησιμοποιηθεί.

Στον Berkeley απάντησε ένας μαθητής του Newton, ο James Jurin (1684-1750) υποστηρίζοντας ότι οι ροές είναι μια καθαρή έννοια για αυτούς που είναι αρκετά έμπειροι στη γεωμετρία και προσπάθησε να δείξει ότι οι επικρίσεις του Berkeley οφειλόταν σε παρανόηση των θέσεων του Newton. Όταν έληξε η διαμάχη του Berkeley με τους μαθηματικούς άρχισε μια αντιδικία σχετικά με τις ροές μεταξύ του Jurin και του Benjamin Robins, ενός αυτοδίδακτου μαθηματικού. Σε εργασία του Robins, που δημοσίευσε το 1735 με τίτλο «A Discourse Concerning the nature and certainty of Isaac Newton's method of Fluxion and of prime and Ultimate Ratios» (Μία πραγματεία που αφορά τη φύση και τη βεβαιότητα της μεθόδου του Newton, των ροών και των πρώτων και εσχάτων λόγων) σημειώνει : *«Ο έσχατος λόγος των μηδενιζομένων μεγεθών ήταν, για τον Newton, μια μεταφορική έκφραση που δεν αναφερόταν σε κάποιο τελευταίο λόγο, αλλά σ' ένα σταθερό μέγεθος προς το οποίο κάποιο μεταβαλλόμενο μέγεθος, μέσω συνεχούς αυξήσεως ή ελαττώσεως θα πλησιάζει διαρκώς, αρκεί το μεταβαλλόμενο μέγεθος να μπορεί προσεγγίζοντας το άλλο, να διαφέρει απ' αυτό λιγότερο από οποιοδήποτε μέγεθος, οσοδήποτε μικρό, χωρίς να μπορεί να γίνει απολύτως ίσο μ' αυτό»* Για πρώτη φορά παρουσιάστηκε καθαρά, με σαφήνεια και κατηγορηματικά η άποψη ότι μία μεταβλητή δεν μπορεί να φθάσει το όριό της. (Cajori, 1923)

Η έννοια του ορίου του Robins αντιπροσωπεύει μια διατύπωση των ιδεών που είχε εκφράσει και ο Valerio κάπως αόριστα ένα αιώνα νωρίτερα. Ο Robins όμως δεν μίλησε μόνο για όρια των «λόγων των μηδενιζομένων ποσοτήτων», αλλά επίσης και για όρια των «μορφών των μεταβαλλομένων σχημάτων» δίνοντας το παράδειγμα του κύκλου ως το όριο των εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, καθώς ο αριθμός των πλευρών τους αυξάνει αορίστως. Αυτή η σύγχυση του αριθμητικού με τον γεωμετρικό τρόπο είχε καταλογιστεί στις εργασίες των Newton και Leibniz, και συνεχίστηκε κατά τη διάρκεια του επόμενου αιώνα. Παρόλα αυτά ο Robins αντιλήφθηκε πιο καθαρά απ' ότι ο Jurin τη φύση της έννοιας του ορίου.

Αρχικά ο Jurin επέμενε ότι από τις εργασίες του Newton προέκυπτε, πως επιτρεπόταν οι μεταβλητές να φτάνουν το όριό τους. Η διαμάχη έγινε εντονότερη τη διετία 1736-1737 και στο τέλος ο Jurin παραδέχθηκε ότι ο λογισμός θα μπορούσε να βασιστεί με συνέπεια στην έννοια του ορίου, έτσι όπως την έθετε ο Robins. Σε άρθρο του έγραψε: *«Το αν μια ποσότητα ή ένας λόγος θα πιάσει το όριό του ή όχι, εξαρτάται εξ' ολοκλήρου από την υπόθεση που κάνουμε για το χρόνο, κατά τη διάρκεια του οποίου η ποσότητα ή ο λόγος θεωρείται ότι συνεχώς πλησιάζει το όριό του. Με άλλα λόγια είναι θέμα επιλογής αν μια μεταβλητή φτάσει το όριό της ή όχι. Μπορούμε να επιβάλουμε τους όρους ώστε η μεταβλητή να φτάσει το όριό της ή τους όρους κάτω από τους οποίους δεν θα το φτάσει.»* (Cajori, 1923)

Για τα διαφορικά ανώτερης τάξης δέχτηκε σκληρή κριτική από τον γερμανό φυσικό και γεωμέτρη Bernard Nieuwentijdt το 1694. Αυτός μπορούσε να δεχτεί την ύπαρξη διαφορικών πρώτης τάξης γιατί θεωρούσε ότι ήταν μια συνέπεια της άπειρης διαιρετότητας του μεγέθους, αλλά δεν μπορούσε να δεχτεί την ύπαρξη διαφορικών ανώτερης τάξης.

Αν και τα επιχειρήματα του Berkeley απευθύνονται κυρίως κατά της βρετανικής μεθόδου των fluxions, η μέθοδος των διαφορικών, όπως χρησιμοποιούνταν στην ηπειρωτική Ευρώπη, από τον L' Hospital και άλλους αποτέλεσε κι αυτή αντικείμενο κριτικής. Ο Berkeley εξήγησε ότι για να βρει κανείς την εφαπτομένη με τη βοήθεια των διαφορικών πρέπει να πάρει προσαυξήσεις. Όμως αυτές ορίζουν την τέμνουσα και όχι την εφαπτομένη. Ωστόσο, αν παρόλο αυτό το λάθος, διαγραφούν τα υψηλότερης τάξης διαφορικά, τότε «δυνάμει ενός διπλού λάθους, φθάνει κανείς, μολονότι όχι επιστημονικά, ακόμη και στην αλήθεια». Αυτή η ερμηνεία της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων του λογισμού, οφειλόμενη στην επανόρθωση των σφαλμάτων, θα βρεθεί αργότερα και στους Euler, Lagrange, Carnot, υποστηριχτές της διαφορικής μεθόδου, οι οποίοι επιθυμούσαν ν' αποσαφηνιστούν τα θεμέλια του διαφορικού λογισμού. (Γιαννακούλιας, 2007)

5.2 Οι συνεχιστές των Newton-Leibniz

Η παλιά σύγχυση μεταξύ των εννοιών των fluxions και των moments δεν είχε ακόμη τελειώσει και η διευκρίνιση του Robins, για τη μέθοδο των πρώτων και εσχάτων λόγων του Newton, δεν ήταν αρκετή ώστε να την καταστήσει θεμέλιο του λογισμού μέχρι τον $19^{ο}$ αιώνα, οπότε άρχισε μία στροφή στους Βρετανούς μαθηματικούς.

Στο μεσοδιάστημα, ωστόσο, έγιναν αρκετές προσπάθειες, κάποιων σημαντικών μαθηματικών, αλλά και άλλων μη σημαντικών, ώστε να βρεθούν νέοι και πιο ικανοποιητικοί τρόποι και επιχειρήματα παρουσίασης της μεθόδου του Newton. Η πιο σημαντική προσπάθεια έγινε από τον Σκωτσέζο μαθηματικό Colin Maclaurin(1698-1746) καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του Εδιμβούργου. Στο έργο του «Treatise on fluxions» (Πραγματεία περί ροών) στα 1742, είχε ως σκοπό, όχι να προχωρήσει τις έννοιες που υπήρχαν στις fluxions του Newton, αλλά να περιγράψει την εγκυρότητα της μεθόδου του με τις αυστηρές διαδικασίες των αρχαίων Ελλήνων και με τον τρόπο αυτό να συναγάγει τη νέα ανάλυση από λίγες «άψογες αρχές». Ειδικότερα θέλησε να δείξει ότι τα «απειροστά» στα επιχειρήματα του Newton, είναι δυνατόν πάντοτε να αντικατασταθούν από πεπερασμένα μεγέθη, διότι όπως σημείωνε «η υπόθεση ενός απείρου μικρού μεγέθους είναι πολύ τολμηρή για να είναι αίτημα μιας επιστήμης σαν τη γεωμετρία». «Επομένως ο Maclaurin έπρεπε να χρησιμοποιεί πεπερασμένα μήκη και πεπερασμένα χρονικά διαστήματα ως βασικά του στοιχεία, επειδή «κανένα μέγεθος δεν κατανοείται σαφέστερα από τα πεπερασμένα τμήματα του χρόνου και του χώρου». Επειδή η βασική έννοια στη θεωρία των ροών είναι η στιγμιαία ταχύτητα, ο

Maclaurin την όρισε ως εξής: *«Η ταχύτητα μιας μεταβαλλόμενης κίνησης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δεν θα μετράται μέσω της απόστασης που πράγματι διανύθηκε σε ορισμένο χρόνο μετά από αυτή, αλλά μέσω της απόστασης που θα διανυόταν αν η κίνηση ήταν ομοιόμορφη μετά από αυτή τη χρονική στιγμή»*. Ο παραπάνω ορισμός θυμίζει αυτόν που έδωσε ο Heytesbury τον 14ο αιώνα…. Παρά το γεγονός ότι δίνοντας ένα τέτοιο ορισμό, έχανε τη θεμελιώδη ιδέα της στιγμιαίας ταχύτητας ως ορίου των μέσων ταχυτήτων όταν το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν και παρά τον γεωμετρικό ορισμό της εφαπτομένης, ο Maclaurin γνώριζε καλά τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούσε ο Newton την έννοια του «έσχατου λόγου των αλλαγών» ή «ορίων». *Έτσι έγραφε για το λόγο ότι είναι το όριο των λόγων διαφορών που σχηματίζουν μεταξύ τους πεπερασμένες ταυτόχρονες αυξήσεις δύο μεταβλητών ποσοτήτων, καθώς οι δύο αυξήσεις ελαττώνονται έως ότου μηδενιστούν.* Παρατηρούσε ότι για να υπολογιστεί αυτό το όριο έπρεπε πρώτα να υπολογιστεί γενικά ο λόγος των αυξήσεων και κατόπιν να αναχθεί στους απλούστερους όρους έτσι ώστε ένα τμήμα του αποτελέσματος να είναι ανεξάρτητο από τις τιμές των αυξήσεων αυτών. Το επιθυμητό όριο εμφανίζεται τότε αμέσως, εάν υποθέσει κανείς ότι οι αυξήσεις ελαττώνονται έως ότου εξαφανιστούν. Έτσι για να υπολογίσει το λόγο της ροής του x^2 προς τη ροή του ax, ο Maclaurin υπολόγισε ότι ο λόγος των αυξήσεων (καθώς το x αυξάνεται σε $x+o$) είναι $2xo+o^2:ao$, δηλαδή $2x+o:\alpha$. **«Ο λόγος $2x+o$ προς το α συνεχώς ελαττώνεται, καθώς το o ελαττώνεται, και είναι πάντα μεγαλύτερος από τον λόγο του $2x$ προς το α όταν το o είναι οποιαδήποτε πραγματική αύξηση, αλλά είναι φανερό ότι με συνεχή τρόπο προσεγγίζει οριακά το λόγο του $2x$ προς το α ».**

Ο Maclaurin απέρριψε με σφοδρότητα τον ισχυρισμό του Berkeley ότι η μέθοδος, του να υποθέτεις πρώτα μία πεπερασμένη αύξηση και μετά να την αφήνεις να μηδενίζεται είναι αντιφατική. Μάλιστα παρατήρησε, ότι η μέθοδος αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό του λόγου των αυξήσεων όταν οι αυξήσεις είναι πεπερασμένες και γίνεται κατανοητό πως ο λόγος αυτός μεταβάλλεται συναρτήσει της αύξησης. Θα μπορούσε συνεπώς κανείς να υπολογίσει το όριο στο οποίο τείνει ο λόγος όταν οι αυξήσεις ελαττώνονται. Ως τελική απάντηση στον Berkeley, όρισε ακόμη και την εφαπτομένη μέσω της έννοιας του ορίου: «Η εφαπτομένη είναι η ευθεία στην οποία τείνουν όλες οι χορδές που διέρχονται από το σημείο επαφής, αν και μιλώντας αυστηρά δεν είναι χορδή, με τον τρόπο που ένας λόγος μπορεί να είναι το όριο διαφόρων λόγων αυξήσεων, μολονότι δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι ο λόγος κάποιων πραγματικών αυξήσεων».(Katz, 2013)

Συμπερασματικά, ο Maclaurin χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης και την εις άτοπον απαγωγή έδωσε απάντηση στις αντιρρήσεις του Berkeley. Η χρήση όμως μιας τέτοιας μεθόδου ήταν πολύ κουραστική για τον αναγνώστη. Για παράδειγμα, οι πρώτες 590 σελίδες από τις συνολικά 754 του έργου του, δεν περιέχουν κανένα συμβολισμό για τη ροή. Κάθε νέα ιδέα συνάγεται γεωμετρικά με πολλά λόγια. Όμως στον 18ο αιώνα, λίγοι είχαν τη διάθεση να μελετήσουν τα λεπτομερή αυτά επιχειρήματα και για το λόγο αυτό η προσπάθειά του δεν εκτιμήθηκε από τους μαθηματικούς της εποχής του. Ο ίδιος ο Maclaurin αναγνώριζε πως το πλεονέκτημα του νέου λογισμού ήταν ότι επέτρεπε να λυθούν παλαιά προβλήματα γρήγορα και να ανακαλυφθούν νέα αποτελέσματα με ευκολία. Έτσι στην πραγματεία του για τις ροές ανακαλύπτει κανείς με έκπληξη ν' αναπτύσσονται δύο βασικές μέθοδοι μελέτης του απειροστικού λογισμού που επικρατούσαν κατά τον 18^o και 19^o αιώνα. Η μία αφορούσε τη μελέτη των (πραγματικών) συναρτήσεων με τη χρήση αναπαραστάσεων με δυναμοσειρές και η δεύτερη συνδέθηκε με τις εργασίες του Cauchy που έγιναν τη διετία 1820-1821 και βασίζονταν **στην άλγεβρα των ανισοτήτων**, τη σημερινή ε-δ τεχνική των αποδείξεων. (Katz, 2013)

Στους μαθηματικούς της ηπειρωτικής Ευρώπης υπήρχε μια αύξουσα τάση να συνδέσουν το λογισμό με την τυπική έννοια της συνάρτησης, αντί να χρησιμοποιούν τις διαισθητικές έννοιες της γεωμετρίας. Σποραδικά η ιδέα εκφραζόταν από την αντίληψη πως οι πράξεις της νέας ανάλυσης θα έπρεπε να εναρμονιστούν με τις κατευθυντήριες γραμμές που προσφέρονται από τις συνήθεις μεθόδους της αριθμητικής και της άλγεβρας, και ότι η εισαγωγή του δόγματος της κίνησης ήταν περιττή και αδικαιολόγητη.

Στην Ελβετία υπήρχαν οι Johann και Jacob Bernoulli. Ο πρώτος έγραψε, στα 1691-92, μία μικρή πραγματεία για το διαφορικό λογισμό, που δημοσιεύτηκε όμως πολύ αργότερα. Σε αυτή άρχιζε με το παράδοξο αξίωμα, πως **μια ποσότητα, η οποία μειώνεται ή αυξάνεται κατά μία απείρως μικρή ποσότητα δεν είναι ούτε ελαττωμένη ούτε αυξανομένη.** Με άλλα λόγια ο Johann Bernoulli έκανε θεμελιώδη την διαγραφή των διαφορικών υψηλότερης τάξης μάλλον παρά την έννοια του ορίου. O Jacob Bernoulli θεωρούσε τη χρήση του απείρου όχι ικανοποιητικά επαρκή, αλλά και μακριά από τη γνώμη των αρχαίων. Απέτυχε όμως και αυτός εφόσον δεν μπόρεσε να κάνει διάκριση μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Με άλλα λόγια η έννοια της συνάρτησης δεν είχε γίνει ακόμα πρωταρχική.

Κοντά στον Johann Bernoulli μαθήτευσε ο μαρκήσιος De l’ Hospital (1661-1704), ο οποίος το 1696 δημοσίευσε το πρώτο εγχειρίδιο διαφορικού λογισμού με τίτλο «Analyse des infiniment petits pour l’ intelligence des lignes courbes» (Ανάλυση των απειροστών για την κατανόηση των καμπύλων γραμμών). Παρ’ ότι σ’ αυτό ο l’ Hospital δεν ασχολήθηκε με τη φύση των βασικών εννοιών του λογισμού, οι πολλές εκδόσεις που ακολούθησαν και η μεγάλη διαφήμιση που έγινε μέσω των περιοδικών, Journal des Savents και Acta Eruditorum, συνετέλεσαν ώστε να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην εκλαΐκευση του νέου λογισμού. Το εγχειρίδιο άρχιζε με δύο ορισμούς:

- «Μεταβλητές ποσότητες είναι εκείνες οι οποίες συνεχώς αυξάνονται ή ελαττώνονται» και
- «το απείρως μικρό τμήμα κατά το οποίον μία μεταβλητή ποσότητα συνεχώς αυξάνεται ή ελαττώνεται καλείται το διαφορικό αυτής της ποσότητας».

Ακολουθούσαν δύο αξιώματα:

α) $x+dx=x$

β) Μία καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πολύγωνο με άπειρο πλήθος πλευρών, κάθε μία απείρου μικρού μήκους.

Πάνω σε αυτή τη βάση παρήχθησαν οι βασικοί τύποι για τα διαφορικά αλγεβρικών συναρτήσεων και εφαρμόστηκαν σε προβλήματα που περιείχαν μέγιστα-ελάχιστα, εφαπτόμενες, και καμπυλότητες. (Edwards, 1979)

Ο 18ος αιώνας ήταν για τα μαθηματικά μία περίοδος παγίωσης και εκμετάλλευσης των μεγάλων ανακαλύψεων του 17ου αιώνα και των εφαρμογών τους για την έρευνα των επιστημονικών προβλημάτων. Πολλά από τα αποτελέσματα που επιτυγχάνονταν στον λογισμό είχαν άμεση εφαρμογή στη Φυσική. Αυτή η κατάσταση συνετέλεσε ώστε η προσοχή προς την αυστηρότητα να είναι λιγότερο ζωτική, καθόσον υπήρχε τώρα ένα κριτήριο για την αλήθεια των συμπερασμάτων, το εμπειρικό κριτήριο.

Η άλγεβρα ήταν θεωρία εξισώσεων, ειδικότερα η μελέτη των σχέσεων ριζών-συντελεστών. Έλυναν αυτές τις εξισώσεις όταν αυτό ήταν δυνατόν, διαφορετικά, χρησιμοποιούσαν διαδικασίες προσέγγισης κατά προτίμηση αυτές που συνέκλιναν γρήγορα.

Η **ανάλυση του απείρου**, όπως ονομάστηκε από τον Euler, περιείχε την εύρεση αθροισμάτων απείρων σειρών και μετασχηματισμούς αυτών από τη μια μορφή στην άλλη, καθώς επίσης και την εύρεση των ορίων απείρων γινομένων και συνεχών κλασμάτων. **Δεν υπήρξε όμως καμία προσπάθεια να διατυπωθεί μια γενική θεωρία σύγκλισης,** αν και η ταχύτητα της σύγκλισης ειδικών σειρών ήταν αντικείμενο συζήτησης, ενώ υπήρχαν και κάποια κριτήρια σύγκλισης. Ο διαφορικός λογισμός μελετούσε τα διαφορικά ανωτέρας τάξης, τις αμοιβαίες σχέσεις τους και τις εφαρμογές τους σε προβλήματα φυσικής και γεωμετρίας. Ο ολοκληρωτικός λογισμός έλυνε κλάσεις διαφορικών εξισώσεων και υπολόγιζε ορισμένα ολοκληρώματα αλλά δεν απέδειξε την ύπαρξη λύσεων σε καθένα τύπο προβλημάτων. Οι διαφορικές εξισώσεις πιο συχνά μελετούνταν στο γενικό πλαίσιο των ειδικών φυσικών προβλημάτων παρά σε γενικές μαθηματικές θεωρίες. Εξηγήσεις, από τους ηγετικούς μαθηματικούς, της φύσης του λογισμού εύρισκε κανείς κυρίως στις εισαγωγές που αφορούσαν την ανάγκη του λογισμού, σε κύκλους μαθημάτων και σε βιβλία που βασίζονταν σε τέτοιους κύκλους, και σε δημοφιλείς εκθέσεις των μαθηματικών για μη ειδικό κοινό, και σε ανταποκρίσεις που αφορούσαν τη λογική ορθότητα του λογισμού. Τα παραπάνω βρίσκονταν συνήθως σε εργασίες που δημοσιεύονταν σε επιστημονικά περιοδικά. Μέχρι το 1780 δεν υπήρχε σχεδόν καμία εξαίρεση σ’ αυτό τον ισχυρισμό.

Το δημόσιο ενδιαφέρον για την επιστήμη και τα μαθηματικά αυξήθηκε κατά πολύ ένεκα της επιτυχίας της Νευτώνιας φυσικής στην κατανόηση των νόμων του σύμπαντος, παρακινώντας μαθηματικούς και φιλοσόφους να εξηγήσουν το λογισμό και σε μη ειδικούς. Για παράδειγμα τα άρθρα του D’ Alembert στην Εγκυκλοπαίδεια έδωσαν αφορμή στους γάλλους φιλοσόφους να συστηματοποιήσουν τη γνώση της εποχής.

Η διαμάχη επίσης Newton και Leibniz συνετέλεσε ώστε να υπάρξουν συζητήσεις πάνω στις θεμελιώσεις του λογισμού. Προσπαθώντας να υπερασπιστούν το λογισμό του Newton οι Βρετανοί μαθηματικοί έδωσαν έμφαση στην ανώτερη αυστηρότητα της γεωμετρίας έναντι των μη αυστηρών αλγεβρικών και όχι γεωμετρικών απειροστών των μαθηματικών της ηπειρωτικής Ευρώπης. Αυτός ο σκοπός οδήγησε τους Βρετανούς σε εκτεταμένες συζητήσεις για τις θεμελιώσεις.

Επίσης ένας άλλος λόγος που επεξηγήθηκε ο λογισμός ήταν οι πραγματικές εμπειρίες διδασκαλίας που έγιναν πιο κοινές κατά το τέλος του 18^ου^ αιώνα, περίοδο κατά την οποία οι περισσότεροι μαθηματικοί ήταν δάσκαλοι.

Οι θεμελιώσεις του λογισμού φαίνεται λοιπόν να έχουν αντιμετωπιστεί ως ένα ζήτημα περισσότερο φιλοσοφικό ή παιδαγωγικό, παρά μαθηματικό. Πράγματι, τη φράση «αληθινή μεταφυσική του λογισμού» συναντά κανείς στους τίτλους των συζητήσεων για τις θεμελιώσεις κατά τον 18^ο^ αιώνα και όχι τη φράση «βασικά αξιώματα και ορισμοί» που συνηθιζόταν στη γεωμετρία. Ακόμα υπάρχει η επιθυμία μεταξύ κάποιων μαθηματικών κατά το τέλος του αιώνα, να στρέψουν την προσοχή τους στις θεμελιώσεις. Ο Lagrange, για παράδειγμα, πίστευε ότι οι θεμελιώσεις του έχουν εγκαθιδρύσει τη βάση μιας πλήρους δομής, για το λόγο ότι ο λογισμός του είχε πολύ σωστά επιτύχει στη λύση των κύριων προβλημάτων που είχαν τεθεί. (Grabiner, 1981)

Οι μαθηματικοί της ηπειρωτικής Ευρώπης βασίστηκαν περισσότερο στον τυπικό χειρισμό των αλγεβρικών εκφράσεων παρά των γεωμετρικών. Ο πιο ενδιαφέρων αντιπρόσωπος αυτής της προσέγγισης ήταν ο Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler (1707-1783).

Ο Euler ακολουθώντας το ρεύμα της εποχής του, το οποίο ήταν ο παραμερισμός των γεωμετρικών εννοιών από τον νέο λογισμό, έκανε ένα βήμα ώστε ο λογισμός να βασιστεί στην άλγεβρα και την αριθμητική, και με αυτό τον τρόπο , προετοίμασε το έδαφος ώστε να βασιστεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για θεμελιώδη έννοια του λογισμού του, διατήρησε το διαφορικό. Για τον Euler το διαφορικό dy της μεταβλητής ήταν η διαφορά του y σε δύο απείρως κοντινές τιμές του x. Για τις έννοιες, του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού, πίστευε πως δεν ήταν τόσο μυστηριώδεις, όπως πίστευαν οι περισσότεροι. Αρνήθηκε την έννοια του απειροστού, ως μιας ποσότητας μη μηδενικής, που γίνεται μικρότερη από κάθε μέγεθος, πιστεύοντας ότι **μια απείρως μικρή ή εξαφανιζόμενη, όπως την αποκαλούσαν τότε, ποσότητα είναι μια ποσότητα που ισούται με μηδέν. Ισχυρίστηκε, όπως και ο Jacob Bernoulli, ότι ένας αριθμός που είναι μικρότερος από κάθε δοσμένη ποσότητα, αναγκαία πρέπει να ισούται με το μηδέν.** Έτσι τα διαφορικά dx, dy για τον Euler εθεωρούντο ίσα με το μηδέν. **Επίσης ισχυριζόταν ότι τα διαφορικά μπορούσαν να θεωρηθούν ως μηδενικά, αλλά σύμφωνα με την αρχή της συνέχειας διατηρούσαν το χαρακτήρα των σχέσεων πεπερασμένων μεγεθών από τα οποία προέκυψαν.** Στο «Institutiones calculi differentialis», το 1775, έγραψε πως μια απείρως μικρή ποσότητα είναι ίση με το μηδέν και ότι $a \pm ndx = a$. Η άποψή του για το άπειρο συνέπιπτε με αυτή του Wallis, και χρησιμοποιούσε το ίδιο σύμβολο με αυτόν, το ∞. (Γιαννακούλιας, 2007)

Ο Euler δικαιολόγησε πως ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ που κατέληγε σε $\frac{0}{0}$ μπορούσε να ισούται με ένα πεπερασμένο αριθμό, ως εξής: «Εφόσον για κάθε αριθμό n ισχύει $n \cdot 0 = 0$ τότε $n = \frac{0}{0}$». Η παράγωγος είναι ακριβώς ένας κατάλληλος τρόπος καθορισμού του $\frac{0}{0}$. Για να διευκρινίσει τη διαγραφή του $(dx)^2$ με την παρουσία του dx, ο Euler μας λέει ότι το $(dx)^2$ μηδενίζεται πριν αυτό συμβεί και για το dx και έτσι για παράδειγμα ο λόγος του $dx+(dx)^2$ προς το dx είναι 1.

Διατήρησε τη σχέση $\frac{a}{0}=\infty$, που σήμαινε ότι μηδενικές φορές το άπειρο μπορούσε να δώσει ένα πεπερασμένο μέγεθος. Το πηλίκο $\frac{a}{dx}$ για τον Euler ήταν άπειρο εφ' όσον το $dx=0$, ενώ το $\frac{a}{(dx)^2}$ ήταν άπειρο δεύτερης τάξης. Γενικεύοντας κατέληγε στο συμπέρασμα ότι υπήρχε ένας άπειρος αριθμός τάξεων του απείρου. Παρ' ότι όμως δέχτηκε την ύπαρξη ενός απείρου πλήθους απειροστών, εφόσον δέχτηκε την ύπαρξη διαφορικών υψηλότερης τάξης, εντούτοις ισχυρίστηκε πως όλα ήταν ίσα με μηδέν. Ο Euler για να υπολογίσει την παράγωγο της $y=x^2$ έδωσε μια αύξηση ω στο x, οπότε η αύξηση της y ήταν $y+\eta=(x+\omega)^2=x^2+2x\omega+\omega^2$ και επομένως $\frac{\eta}{\omega}=2x+\omega$. Ισχυρίστηκε τότε ότι ο λόγος $\frac{\eta}{\omega}$ θα πλησιάζει το $2x$, αν το ω είναι αρκετά μικρό, και ότι τα $\eta,\ \omega$ είναι απολύτως μηδενικά, και πως δεν πρέπει να γίνεται αναφορά σε τίποτε άλλο για αυτά, εκτός από το λόγο τους, ο οποίος στο τέλος γίνεται μία πεπερασμένη ποσότητα. **Έτσι ο υπολογισμός των διαφορικών των συναρτήσεων στηριζόταν στη διαγραφή όλων των απειροστών ανωτέρας τάξης.** Ο Euler συνεπώς δέχεται ανεπιφύλακτα ότι υπάρχουν ποσότητες που είναι απολύτως μηδέν, αλλά ο λόγος τους είναι ένας πεπερασμένος αριθμός. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για την $y=x^n$, βρίσκει ότι το διαφορικό της είναι ίσο με $nx^{n-1}dx$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} dy=(x+dx)^n-x^n &= x^n+nx^{n-1}dx+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(dx)^2+\ldots-x^n \\ &= nx^{n-1}dx+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(dx)^2+\ldots \\ &= nx^{n-1}dx \end{aligned}$$

διαγράφοντας τα απειροστά ανωτέρας τάξης $(dx)^2,\ (dx)^3,\ldots$ (Boyer, 1949)

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω οι προγενέστεροι μαθηματικοί είχαν μελετήσει το διαφορικό λογισμό γεωμετρικά, ενώ ο Euler τον μετέτρεψε σε μια φορμαλιστική θεωρία συναρτήσεων που δεν ήταν ανάγκη να αναφέρεται σε διαγράμματα ή γεωμετρικές έννοιες. *Ο Leibniz είχε χρησιμοποιήσει τον όρο συνάρτηση περίπου με τη δική μας έννοια και είχε ισχυριστεί ότι η απειροστική του μέθοδος περιοριζόταν σε αλγεβρικές συναρτήσεις, όπως και η μέθοδος του Καρτεσίου, αλλά μπορούσε να εφαρμοστεί και σε λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις εξ' ίσου καλά.* Ο Euler ήταν ο πρώτος μαθηματικός που έδωσε ένα ορισμό για την έννοια της συνάρτησης και έκανε συστηματική μελέτη και ταξινόμηση όλων των στοιχειωδών συναρτήσεων, των διαφορικών τους και των ολοκληρωμάτων τους. **Συνάρτηση σήμαινε για**

τον Euler, όχι τόσο μια ποσότητα που εξαρτάται από μεταβλητές, όσο μια αναλυτική έκφραση με σταθερές και μεταβλητές που μπορούσαν να παρασταθούν με απλά σύμβολα, δηλαδή έναν τύπο. Με το βιβλίο του «Introductio in analysin Infinitorum» το οποίο δημοσίευσε το 1748, έκανε τη συνάρτηση βασική έννοια στα μαθηματικά. **Πριν τον Euler ο απειροστικός λογισμός μελετούσε ιδιότητες των καμπυλών. Μετά από αυτόν διαπραγματευόταν ιδιότητες των συναρτήσεων.** Η αλλαγή αυτή που προκλήθηκε στο μαθηματικό τοπίο ήταν μεγάλη.

Ο Euler δεν ασχολήθηκε με τις δύσκολες έννοιες του απείρου και της συνέχειας, και οι απόψεις του για τις θεμελιώδεις αρχές του λογισμού δεν παρουσίαζαν την ακρίβεια και την αυστηρότητα που εμφάνισαν τα μαθηματικά του επόμενου αιώνα. Μέσω των εργασιών του απελευθέρωσε το νέο λογισμό από τα γεωμετρικά εμπόδια. Αυτό είχε ως συνέπεια να γίνει περισσότερο αποδεκτή η αριθμητική ερμηνεία, με τη βοήθεια της οποίας αργότερα ξεκαθάρισε η έννοια του ορίου και έγινε κεντρική για τον απειροστικό λογισμό. (Γιαννακούλιας, 2007)

5.3 Οι θεμελιώδεις έννοιες κατά τον 18ο αιώνα

Το πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση να λυθούν οι δυσκολίες από την κριτική του Berkeley ήταν να δοθεί ένας σαφής ορισμός της παραγώγου ως ορίου ενός πηλίκου αυξήσεων, μ' ένα τρόπο που υπαινισσόταν αλλά δεν το εξέφρασε με ικανοποιητική σαφήνεια ο Newton. Αυτό έγινε από το Γάλλο Jean Le Rond D' Alembert (1717-1783). Στην εποχή του υπήρχαν εκτεταμένες περιγραφές για τις τεχνικές του λογισμού, αλλά για τη θεμελίωσή του τα πράγματα προχωρούσαν με αργούς ρυθμούς. Τα έργα των Newton, Leibniz και Euler ήταν αντικείμενο μεγάλης κριτικής και ο λογισμός τους βρισκόταν σε μειονεκτική θέση σε σύγκριση με τα Στοιχεία του Ευκλείδη τα οποία ήταν το ιδανικό μοντέλο των μαθηματικών.

Σε άρθρο του με τίτλο: «Différentiel» στον τόμο 4 (1754) της Εγκυκλοπαίδειας που δημοσιεύτηκε στη Γαλλική Ακαδημία ο D' Alembert έγραψε:

«Ο Leibniz καθώς βρέθηκε σε δύσκολη θέση από τις ενστάσεις που έγιναν κατά των απείρως μικρών ποσοτήτων, όπως αυτές παρουσιάζονταν στο διαφορικό λογισμό, προτίμησε να ελαττώσει τα απείρως μικρά, απλά, σε ασύγκριτες ποσότητες. … Ο Newton ξεκίνησε από μία άλλη αρχή, και μπορεί να πει κανείς ότι οι μεταφυσικές αυτού του μεγίστου μαθηματικού πάνω στο λογισμό των fluxions είναι μεθοδικές και διαφωτιστικές παρ' ότι αυτός επέτρεψε σε μας μόνο μια ατελή και φευγαλέα εμφάνιση των σκέψεών του. Ποτέ δεν θεώρησε ότι ο διαφορικός λογισμός μελετάει τις απείρως μικρές ποσότητες, αλλά τον θεώρησε ως **τη μέθοδο των πρώτων και εσχάτων λόγων, δηλαδή τη μέθοδο εύρεσης των ορίων των λόγων.** Έτσι ο φημισμένος συγγραφέας ποτέ δεν διαφόρισε ποσότητες αλλά μόνο εξισώσεις. Πράγματι κάθε εξίσωση περιέχει μία σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών και η διαφόριση εξισώσεων συνίσταται απλά στην εύρεση του ορίου του λόγου των πεπερασμένων διαφορών των δύο ποσοτήτων που περιέχονται στην εξίσωση… Μιας και αυτό έχει γίνει αρκετά κατανοητό, τότε θ' αντιληφθεί κάποιος ότι η υπόθεση που έγινε και αφορά απείρως μικρές ποσότητες εξυπηρετεί μόνο τη συντόμευση και την απλοποίηση του συλλογισμού. Όμως εκείνος ο διαφορικός λογισμός δεν υποθέτει αναγκαία την ύπαρξη αυτών των ποσοτήτων, και ότι επιπλέον αυτός ο λογισμός συνίσταται στον αλγεβρικό καθορισμό του ορίου ενός λόγου… Έχουμε δει παραπάνω ότι στο διαφορικό λογισμό υπάρχουν πράγματι μη απείρως μικρές ποσότητες πρώτης τάξης. Ότι πράγματι εκείνες οι ποσότητες (τα διαφορικά) θεωρούνται διηρεμένες από άλλες υποθετικά απείρως μικρές ποσότητες. Σ' αυτή την έκθεση αυτές δεν δηλώνουν είτε απείρως μικρές ποσότητες ή πηλίκα απείρων μικρών ποσοτήτων. Αυτές είναι τα όρια του λόγου δύο πεπερασμένων ποσοτήτων ».

Έτσι ο D'Alembert παρουσίασε σ' αυτό το άρθρο μια αντίληψη για την παράγωγο, που σήμερα εκφράζεται γράφοντας απλά $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Όμως ο D'Alembert δεν προχώρησε παρακάτω διότι οι σκέψεις του ήταν ακόμη επηρεασμένες από τη γεωμετρική διαίσθηση. (Edwards, 1979)

Παρ' ότι δεν περιέγραψε την έννοια του ορίου με την ακρίβεια που αυτή διατυπώθηκε κατά τον $19^{ο}$ αιώνα, εν τούτοις έκανε ένα αξιοσημείωτο βήμα ως προς την ταυτοποίηση της παραγώγου με ένα **όριο του λόγου των αυξήσεων**, παρά με ένα λόγο και των δύο διαφορικών ή fluxions. Μολονότι η παράγωγος ως όριο ενός πηλίκου εμφανίστηκε σποραδικά σε συζητήσεις της «μεταφυσικής» του λογισμού, προς το τέλος του $18^{ου}$ αιώνα, τα περισσότερα εγχειρίδια της εποχής συνέχιζαν να βασίζονται κυρίως στην προσέγγιση του Leibniz με το λαβύρινθο των διαφορικών.

Ο D' Alembert υποστήριξε ότι «το απειροστό δεν υπάρχει καθ' εαυτό. Ένα μέγεθος είναι κάτι ή τίποτα. Αν είναι κάτι, τότε δεν έχει ακόμη μηδενιστεί. Η υπόθεση ότι υπάρχει μια ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ των δύο καταστάσεων αποτελεί χίμαιρα». Το απειροστό το έβλεπε σαν απεριόριστα μικρό. Προσπάθησε όμως να αποσαφηνίσει την έννοια του απείρου. (Article, «Différentiel», σελ. 977) (Boyer, 1949)

Κατά τον D' Alembert, όπως είδαμε, η βάση του διαφορικού λογισμού του Leibniz, όπως και αυτή των ροών του Newton θα έπρεπε να αναζητηθεί στην έννοια του ορίου. Σε αυτό το συμπέρασμα οδηγήθηκε από δύο άρθρα που είχαν δημοσιευτεί για τα όρια. Το ένα άρθρο ήταν το «Quadratura Curvarum» (1704) του Newton, στο οποίο ερμήνευε σαν όρια τους πρώτους και εσχάτους λόγους. Το δεύτερο άρθρο ήταν το «Instructions de geometrie» του De la Chapelle, που δημοσιεύτηκε το 1746, και στο οποίο γινόταν αναφορά και περιγραφή της θεωρίας των ορίων, όπως είχε εμφανιστεί στα έργα των Simon Stevin, Luca Valerio, Gregoire de Saint Vincent. Από τα άρθρα αυτά ο D' Alembert χρησιμοποίησε δύο θεωρήματα:

α) «Αν δύο μεγέθη είναι τα όρια της ίδιας ποσότητας, τότε είναι ίσα μεταξύ τους» και

β) «Το όριο ενός γινομένου ισούται με το γινόμενο των ορίων των παραγόντων του»

Στο άρθρο του «Limite» στην Encyclopédie δηλώνει ότι **«μπορεί να ονομάσει κανείς ένα μέγεθος όριο κάποιου άλλου μεγέθους, όταν το δεύτερο πλησιάζει το πρώτο οσοδήποτε κοντά, δίχως ωστόσο να μπορεί να ξεπεράσει το πρώτο, και με τέτοιο τρόπο, ώστε η διαφορά να μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα»**. (Γιαννακούλιας, 2007)

Επίσης σημείωσε: «Μιλώντας επακριβώς, **το όριο δεν συμπίπτει ποτέ, ή δεν γίνεται ποτέ ίσο με την ποσότητα της οποίας αυτό είναι το όριο· αλλά αυτή το πλησιάζει πάντοτε ολοένα περισσότερο, και μπορεί να διαφέρει οσοδήποτε λίγο θέλουμε**». Όχι μόνο η «ποσότητα-μέγεθος» δεν ξεπερνά το όριό της, αλλά και δεν ταυτίζεται ποτέ με αυτό. Τα ρήματα που χρησιμοποίησε ο D' Alembert έχουν χαρακτήρα «κίνησης» (πλησιάζει, ξεπερνά, συμπίπτει).(D' Alembert, 1754-1772)

Ο D' Alembert στο σημείο αυτό δίνει το παράδειγμα της «προσέγγισης» του κύκλου μέσω δύο πολυγώνων, ενός εγγεγραμμένου στον κύκλο και ενός περιγεγραμμένου, των οποίων το πλήθος των πλευρών αυξάνεται «όσο επιθυμούμε», και αναφέρει ότι αυτά τα πολύγωνα «προσεγγίζουν πάντοτε ολοένα περισσότερο την περιφέρεια του κύκλου», ενώ «η περιφέρεια του κύκλου είναι το όριο της αύξησης του πρώτου πολυγώνου και της μείωσης του δευτέρου». Γράφει συγκεκριμένα: «ας υποθέσουμε δύο πολύγωνα, το ένα εγγεγραμμένο και το άλλο περιγεγραμμένο σε κύκλο, είναι προφανές ότι μπορούμε να αυξήσουμε το πλήθος των πλευρών όσο επιθυμούμε. Σε αυτή την περίπτωση κάθε πολύγωνο θα πλησιάζει ολοένα και περισσότερο την περιφέρεια του κύκλου, το περίγραμμα του εγγεγραμμένου πολυγώνου θα αυξηθεί ενώ του περιγεγραμμένου θα μειωθεί. Αλλά η περίμετρος του πρώτου δεν θα ξεπεράσει ποτέ το μήκος της περιφέρειας του κύκλου και του δευτέρου δε θα γίνει μικρότερη από τη περιφέρεια. Η περιφέρεια του κύκλου είναι λοιπόν το όριο της αύξησης του πρώτου πολυγώνου και της σμίκρυνσης του δευτέρου».(D' Alembert, 1754-1772)

Έδωσε, επίσης, το παράδειγμα της παραβολής $y = ax^2$. Αφού σχημάτισε το πηλίκο των διαφορών $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a}{2y + \Delta y}$, παρατήρησε ότι καθώς το Δy πλησιάζει το μηδέν, τότε το όριο του $\frac{a}{2y + \Delta y}$ γινόταν ίσο με το $\frac{a}{2y}$ που ήταν και το όριο του λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Έπρεπε όμως ταυτόχρονα να είναι $\Delta y = 0$ και $\Delta x = 0$ με αποτέλεσμα να είναι $\frac{0}{0} = \frac{a}{2y}$.

Προσπαθώντας να δώσει κάποια εξήγηση για την παραπάνω εξίσωση επισήμανε :

α) δεν υπάρχει κάτι παράλογο σε αυτή, επειδή ο λόγος $\frac{0}{0}$ μπορεί στην πραγματικότητα να ισούται με οποιονδήποτε αριθμό, άρα και με τον $\frac{a}{2y}$ και

β) οποιοδήποτε και αν ήταν το όριο του λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ όταν $\Delta y = 0$ και $\Delta x = 0$, αυτό το όριο δεν ήταν ο λόγος $\frac{0}{0}$. Ο λόγος $\frac{0}{0}$ δεν παρουσίαζε σαφή εικόνα, ήταν αόριστος.

Η πρόταση του D' Alembert να ληφθεί το όριο ως κεντρική έννοια του διαφορικού λογισμού, αντικαθιστώντας τη χρήση των απειροστών, τελικά δεν έγινε αποδεκτή. Το όριο θεωρήθηκε μια εικόνα σκοτεινή, και αυτό οφείλεται τόσο στη χρήση της γεωμετρικής του ερμηνείας όσο και στη μεταφυσική ερμηνεία που δινόταν σε αυτό. Στα υπόλοιπα χρόνια του

18ου αιώνα, τα περισσότερα έργα του λογισμού επιχειρούσαν να εξηγήσουν τις βασικές έννοιες του κλάδου μέσω απειροστών ή ροών. (Γιαννακούλιας, 2007)

Ο πρώτος σπουδαίος μαθηματικός που πραγματεύθηκε τις θεμελιώσεις του λογισμού, ως σοβαρό πρόβλημα ήταν ο Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Προσπάθησε, προς το τέλος του 18ου αιώνα, να αναπτύξει το λογισμό απαλείφοντας κάθε αναφορά σε απειροστά, ροές ακόμα και όρια γιατί πίστευε ότι δεν είχαν οριστεί με σαφήνεια. Η εργασία του Euler: «Institutiones calculi differentialis» στην οποία αντιμετωπίζονται τα διαφορικά $dx,\ dy$ ως μηδενικές ποσότητες, προβλημάτισε τον Lagrange ώστε να γράψει : «… γνωρίζει κανείς τις δυσκολίες που έπονται της υπόθεσης του απείρως μικρού, και η ερμηνεία του Euler για τα dx, dy ως μηδενικών υποβιβάζει το λόγο τους στην ασαφή και δυσνόητη έκφραση $\frac{0}{0}$ ». Θεωρούσε αναγκαίες τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής, αλλά απέρριπτε ως πράξη, την μετάβαση στο όριο, κατά την οποία μια μεταβλητή αντικαθίσταται από το όριό της. Η πράξη αυτή για τον Lagrange ήταν περιττή. Σκοπός του ήταν να εξαφανίσει τα όρια από το λογισμό γιατί αδυνατούσε να ξεκαθαρίσει τι σήμαινε στην πραγματικότητα ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, τη στιγμή που έφτανε στο όριό του. (Cajori, 1923)

Τα απειροστά για τον Lagrange δεν ήταν καθόλου αυστηρά και συνεπώς γι’ αυτό οι Leibniz, L’ Hospital, Bernoulli, δεν απασχολήθηκαν με τις αρχές του λογισμού, ικανοποιημένοι που έφταναν σε ακριβή αποτελέσματα μ’ ένα γρήγορο και σίγουρο τρόπο. Εφόσον ο απειροστικός λογισμός παρήγαγε ορθά αποτελέσματα μόνο με επανόρθωση των σφαλμάτων, αυτό δεν θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως θεμελίωση, διότι θα ήταν αρκετά δύσκολο να δεχθεί πως τα σφάλματα είναι πάντοτε επανορθώσιμα.

Οι fluxions του Newton ήταν για τον Lagrange μη αποδεκτές, διότι μελετούσαν μαθηματικές ποσότητες ωσάν να «γεννώνται από κίνηση». Η αντίληψη αυτή έχει μια απατηλή αληθοφάνεια για τον Lagrange καθόσον «ο καθένας έχει ή πιστεύει πως έχει μια ιδέα για την ταχύτητα». Όμως δεν έχουμε μια αρκετά καθαρή ιδέα μιας στιγμιαίας μεταβλητής ταχύτητας. Μια πιο θεμελιώδης παρατήρηση του Lagrange είναι ότι ο λογισμός είναι μαθηματικά και όχι φυσική. Οφείλει επομένως να έχει μόνο αλγεβρικές ποσότητες ως αντικείμενό του. Η ταχύτητα είναι επομένως μια «ξένη έννοια» και συνεπώς η ερμηνεία της θεωρίας των ροών από τον Newton είναι αβάσιμη. Όσον αφορά την έννοια του ορίου, όπως αυτή δινόταν, ο Lagrange τη θεωρούσε ασαφή, πολύ περιορισμένη και μάλλον γεωμετρική, παρά αλγεβρική. Το επιχείρημα του Lagrange για την ασάφεια της έννοιας του ορίου, ως λόγου του οποίου οι όροι πηγαίνουν προς το μηδέν, είναι παρόμοιο με του Berkeley, όταν λέει: «στην έννοια του ορίου, θεωρούνται ποσότητες, στην κατάσταση που αυτές παύουν να είναι ποσότητες». Ο λόγος δύο πεπερασμένων ποσοτήτων δεν προσφέρει μια καθαρή και σαφή ιδέα στο μυαλό μας, τι συμβαίνει όταν οι όροι του λόγου γίνονται ταυτόχρονα μηδέν.

Για να δείξει πως η έννοια του ορίου δεν ήταν αρκετά ευρεία, ώστε να χρησιμεύσει για τη θεμελίωση του λογισμού ο Lagrange παρατήρησε, πως αν μια ποσότητα δεν μπορούσε να ξεπεράσει το όριό της, τότε η υποεφαπτομένη δεν θα μπορούσε ποτέ να οριστεί ως το όριο των υποτεμνουσών, καθόσον, «τίποτα δεν εμποδίζει την υποτέμνουσα ν' αυξάνεται μέχρις ότου αυτή γίνει υποεφαπτομένη».

«Τέλος, η έννοια του ορίου βασίστηκε στο παράδειγμα της καμπύλης, ως το όριο ακολουθίας πολυγώνων. Αυτό είναι μια ουσιωδώς γεωμετρική έννοια και ξένη προς το πνεύμα της ανάλυσης». Για τον Lagrange, ο λογισμός ήταν ουσιαστικά αλγεβρικός και ως εκ τούτου δεν είχε ανάγκη να θεμελιωθεί σε αρχές δανεισμένες από άλλα αντικείμενα. Ο Lagrange επέκρινε επίσης τις υπάρχουσες θεμελιώσεις. Αν και αυτό δεν το εξέθεσε σαφώς, αλλά η όλη δομή στο βιβλίο του «Functions analytiques» φανερώνει πως οι παλιές θεμελιώσεις χρησιμοποιήθηκαν απλά ως εισαγωγικές και δεν στήριξαν όλα τα προκύπτοντα αποτελέσματα. Τουναντίον η παραπάνω πραγματεία του Lagrange διέφερε από αυτές των προκατόχων του σε ένα κρίσιμο σημείο : υπήρχε πρωταρχική διάθεση να επιβάλει αυστηρότητα στο λογισμό, και μετά να παράξει νέα αποτελέσματα. Οι ορισμοί του δεν παρέπεμπαν σε μια εισαγωγή και μετά να εξαφανίζονται. Η πραγματεία του ασφαλώς και δεν ήταν αδιάφορη στα νέα αποτελέσματα, και αυτό μας το θυμίζει το παράδειγμα του υπολοίπου Lagrange για τις σειρές Taylor. Ο Lagrange παρήγαγε γνωστά αποτελέσματα μεγάλης περιπλοκής, μέσω της νέας του θεμελίωσης, όχι μόνο στο λογισμό, αλλά και στη γεωμετρία και στη μηχανική.

Η επίδραση του Lagrange για την αλλαγή των επικρατούντων στάσεων, προς την κατεύθυνση των θεμελιώσεων, ήταν σημαντική. Αμφότεροι, Bolzano και Cauchy, επηρεάστηκαν από τις αντιλήψεις του Lagrange. Ο Bolzano παρέπεμπε στην εργασία του Lagrange, στην οποία έκανε το κάλεσμα για εγκατάλειψη των συγκινήσεων προς τη γεωμετρία και την κίνηση, και να μεροληπτήσουν για την άλγεβρα. Οι βιογράφοι του Cauchy αναφέρουν επίσης πως ο Cauchy στα πρώτα βήματα, το 1810, ένα από τα τέσσερα βιβλία που είχε εφοδιαστεί ήταν το «Functions analytiques» του Lagrange. (Grabiner, 1981)

Ο Lagrange ήθελε να καταστήσει το λογισμό μέρος της αλγεβρικής ανάλυσης, να μετατραπεί σε μία θεωρία αναλυτικών συναρτήσεων. Με τον τρόπο αυτό πίστευε πως θα μπορούσε να τον απαλλάξει από διαισθητικές και γεωμετρικές έννοιες, και να αποφύγει μεθόδους που περιείχαν την αμφισβητήσιμη χρήση των απειροστών ποσοτήτων. Για το λόγο αυτό στράφηκε προς την ατελή άλγεβρα της εποχής του (ο όρος άλγεβρα κατά τον 18^{ο} αιώνα αναφερόταν στη θεωρία των πολυωνυμικών εξισώσεων). Χρησιμοποίησε τις σειρές Taylor οι οποίες είχαν ήδη αναπτυχθεί από το 1715. Ο Lagrange θεωρούσε ότι ο λογισμός θα έπρεπε να αναχθεί στην άλγεβρα των απείρων σειρών. Έγραφε για αυτό: «Σε ένα υπόμνημά μου που εκδόθηκε στην ακαδημία του Βερολίνου το 1772, διετύπωσα ότι η ανάπτυξη των συναρτήσεων σε σειρά εμπεριέχει τις πραγματικές αρχές του διαφορικού λογισμού, απαλλαγμένες από κάθε θεώρηση των απείρως μικρών ποσοτήτων ή των ορίων και θα αποδείξω με αυτή τη θεωρία το θεώρημα του Taylor, το οποίο μπορούμε να δούμε ως τη βασική αρχή αυτού του λογισμού …» (Lagrange, 1797)**.** Έτσι αυτός θεωρούσε ότι η αριθμητική αποτελείται από άπειρα δεκαδικά κλάσματα χωρίς να παύει να είναι αριθμητική, έτσι και η άλγεβρα ασχολείται με άπειρες αλγεβρικές εκφράσεις, δίχως να παύει να είναι άλγεβρα. Με την άλγεβρα των σειρών θα μπορούσε να παραμερίσει τα όρια και τα απειροστά και να αναγάγει το λογισμό σε απλές αλγεβρικές πράξεις. «Οι νεωτεριστικές του όμως ιδέες και ο συμβολισμός που πρότεινε ήταν η αιτία ώστε η μέθοδός του να μην γίνει αποδεκτή στο ευρύ κοινό, με αποτέλεσμα η αναζήτηση μιας ικανοποιητικής παρουσίασης του λογισμού να εξακολουθεί να παραμένει επίκαιρη. Έτσι το 1784, ένα χρόνο μετά το θάνατο του Euler, η ακαδημία του Βερολίνου, της οποίας πρόεδρος ήταν ο Lagrange, προκήρυξε ένα τιμητικό διαγωνισμό στην μνήμη του, για την καλύτερη εργασία που θα δημοσιευόταν και θα έδινε μια σαφή και ακριβή θεωρία, για το μαθηματικό άπειρο και την έννοια του ορίου. Η απαίτηση της Ακαδημίας ήταν να δοθεί μια καθαρή και αυστηρή θεωρία η οποία να διευκρινίζει το μαθηματικό άπειρο, επίσης να δοθεί μια σαφής και θεμελιωμένη έννοια η οποία θα αντικαθιστούσε το άπειρο χωρίς να κάνει τον απειροστικό λογισμό πολύ δύσκολο και μακροσκελή.

Το βραβείο κέρδισε ο Ελβετός Simon L' Huilier (1750-1840) με την εργασία του «exposition élémentaire des calculus supérieurs» (στοιχειώδης έκθεση των ανωτέρων λογισμών). Ενώ σε προηγούμενες εργασίες του είχε χρησιμοποιήσει τη θεωρία των αδιαιρέτων, στην παραπάνω εργασία του, θεώρησε σαν βασική έννοια την έννοια του ορίου για την οποία όμως δεν έδωσε σαφή ορισμό. Ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ήταν για τον L' Huilier θεμελιώδης. Το όριο $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ήταν ένα σύμβολο, το όριο της μεταβλητής $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ και όχι το όριο δύο μεταβλητών με όριο το μηδέν. Το σύμβολο $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην εργασία αυτή το 1876, και χρησιμοποιήθηκε αργότερα και από τον Lacroix. **Ο ορισμός αυτός προσέγγισε περισσότερο τον σύγχρονο ορισμό, αλλά οι μεταβλητές για τον L' Huilier ήταν πάντοτε μικρότερες ή μεγαλύτερες από το όριο, και κατά συνέπεια δεν μπορούσαν να ταλαντωθούν σε τιμές γύρω από αυτό.** Αυτό φαίνεται στην περιγραφή του ορίου που έδωσε: **«Αν δίνεται ένα μεταβλητό μέγεθος, πάντοτε μικρότερο ή μεγαλύτερο από ένα δοσμένο σταθερό μέγεθος, αλλά μπορεί να διαφέρει από το τελευταίο λιγότερο από οποιοδήποτε μέγεθος, οσοδήποτε μικρό, αυτό το σταθερό μέγεθος ονομάζεται όριο του μεταβλητού μεγέθους»».** (Γιαννακούλιας, 2007)

Το εντυπωσιακό χαρακτηριστικό της εργασίας του L' Hulier είναι ότι ξεκινά σχεδόν ακριβώς με τον ορισμό της παραγώγου που έδωσε ο Cauchy το 1823.

Ο L' Hulier ορίζει το όριο, όπως ο Newton και αντίθετα από τον Cauchy, έτσι ώστε να επιτρέψει μόνο τη **μονότονη μετάβαση σε αυτό**. Έχοντας πράξει αυτό προσδιορίζει την παράγωγο μέσω ορίων όπως ακριβώς ο Cauchy : $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Έτσι είναι σε θέση πλέον να ολοκληρώσει το επιχείρημα των Newton-Robins. Έχοντας δείξει προηγουμένως ότι, αν $f(x) = A + Bx + ... + Nx^n$ τότε $\lim_{x \to 0} f(x) = A$ (ο L'Hulier το πραγματεύεται αποδεικνύοντας ότι η διαφορά $f(x) - A$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή αν το x ληφθεί μικρό). Χρησιμοποιεί το διωνυμικό θεώρημα για ν' αναπτύξει το $(x + \Delta x)^n$. Έτσι έχει :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(x+\Delta x\right)^n-x^n}{\Delta x}=\frac{nx^{n-1}\cdot\Delta x+\dfrac{n\left(n-1\right)}{2!}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2+...}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\ \Delta x+...$$

Οπότε από το προηγούμενο αποτέλεσμα έχει: $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$

Παρ' όλα αυτά ο L' Hulier αποτυγχάνει να εκτιμήσει ότι η απόδειξη του λειτουργεί μόνο για εκείνες τις τιμές του n για τις οποίες το ανάπτυγμα της σειράς είναι πεπερασμένο. Όπως ο Newton, πριν από αυτόν, ο L' Hulier έχει δώσει μια απόδειξη «που είναι ελαττωματική επειδή δεν έχει κανένα τρόπο να επιχειρηματολογήσει για τις τιμές ορισμένων ορίων» για άπειρα αθροίσματα. (Kitcher, 1984)

Το 1797 ο Lagrange επανήλθε με το έργο του «Théorie des Fonctions Analytiques» (Θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων) και παρουσίασε μια περιεκτική μέθοδο του λογισμού, με σκοπό να εξαλείψει όλες τις αναφορές στα διαφορικά, τα απειροστά και την έννοια του ορίου. «Η νέα μέθοδος στηριζόταν στον ισχυρισμό ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί ως δυναμοσειρά. Αντικατέστησε τη μεταβλητή x με το $x+i$, όπου με i συμβόλισε μια μικρή αύξηση, και χρησιμοποιώντας τη θεωρία των σειρών πήρε την ισότητα $f\left(x+i\right)=f\left(x\right)+pi+qi^2+ri^3+...$ (1)

Οι συντελεστές p, q, r στην (1) είναι συναρτήσεις του x, ανεξάρτητες του i, αλλά εξαρτώμενες από την αρχική συνάρτηση f ….

Τη συνάρτηση $p\left(x\right)$ τη συμβόλισε με $f'\left(x\right)$ και την ονόμασε πρώτη παραγόμενη συνάρτηση της $f\left(x\right)$, την οποία αργότερα ονόμασε παράγωγο της f, και τη συμβόλισε με f'_x. Αυτός είναι ιστορικά ο πρώτος συμβολισμός της παραγώγου. Από την (1) διέγραψε όλους τους όρους στους οποίους το i ήταν σε δύναμη μεγαλύτερη ή ίση του 2. Τότε $f\left(x+i\right)-f(x)=pi$ και συνεπώς $p=\dfrac{f\left(x+i\right)-f(x)}{i}(=f'(x))$ ». (Γιαννακούλιας, 2007)

Παρόμοια η παράγωγος της f' συμβολίζεται με f'' και της f'' με f''' κ.λπ. και στη συνέχεια απέδειξε εύκολα ότι $q\left(x\right)=\dfrac{1}{2}f''\left(x\right)$, $r\left(x\right)=\dfrac{1}{3!}f'''\left(x\right)$ …. (Edwards, 1979)

Στα τέλη του 18ου αιώνα ο Lagrange παρήγαγε δύο κρίσιμες ιδιότητες για την $f'\left(x\right)$.

(α) $f\left(x+i\right)=f\left(x\right)+i\ f'\left(x\right)+i\,V$, όπου το V πηγαίνει στο μηδέν μαζί με το i.

«Το V πηγαίνει στο μηδέν μαζί με το i» σημαίνει ότι δοθέντος ενός D, το i μπορεί να επιλεγεί επαρκώς μικρό έτσι ώστε το V να είναι μεταξύ του $-D$ και του $+D$.

Ισοδύναμα, δοθέντος οιοδήποτε D, μπορεί να βρεθεί i τέτοιο ώστε:

(β) $f\left(x+i\right)-f(x)$ να βρίσκεται μεταξύ $i\left[f'(x)-D\right]$ και $i\left[f'\left(x\right)+D\right]$.

Η (α) έχει ονομαστεί η ιδιότητα του Lagrange για την παράγωγο.

Ο Lagrange χρησιμοποίησε αυτές τις δύο ιδιότητες για να αποδείξει πολλά γνωστά αποτελέσματα που αφορούν συναρτήσεις και τις παραγώγους τους και επίσης εφαπτομένες, μέγιστα-ελάχιστα, εμβαδά, μήκη τόξων.

Ο Cauchy αργότερα παρατήρησε ότι οι ιδιότητες αυτές του Lagrange, οι οποίες ανακατεύουν τα δ, ε, μπορούσαν να αφομοιωθούν στην νέα βελτιωμένη έννοια του ορίου. Μάλιστα η (β) είναι ακριβώς η ιδιότητα που ο Cauchy χρησιμοποίησε για να αποδείξει θεωρήματα για παραγώγους στο Calcul Infinitésimal του 1823. Έτσι οι (α) και (β) θα ήταν ένα άμεσο αποτέλεσμα του ορισμού της παραγώγου ως ορίου και κατά συνέπεια όλα όσα είχε αποδείξει ο Lagrange με τη βοήθεια αυτών των ιδιοτήτων, θα εξακολουθούσαν να ισχύουν. Με τον τρόπο αυτό ένα μεγάλο τμήμα της λογικής δομής του λογισμού θα στηριζόταν για πρώτη φορά σε γερή θεμελίωση.

Όμως ο Lagrange απέφυγε να μελετήσει το ζήτημα της σύγκλισης το οποίο υπέκρυπτε το απείρως μεγάλο, το απείρως μικρό και την έννοια του ορίου. Επομένως η απομάκρυνση από τις έννοιες αυτές ήταν μόνο φαινομενική. (Grabiner, 1981)

Το 1797, τη χρονιά που ο Lagrange δημοσίευσε την εργασία του «Théorie des Fonctions Analytiques», έχουμε ακόμα δύο σημαντικά έργα. Το πρώτο είναι η εργασία του Lazare Carnot (1753-1822) με τίτλο : «Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal» (σκέψεις επί της μεταφυσικής του απειροστικού λογισμού). Ο Carnot πίστευε ότι οι διάφορες απόψεις που είχαν διατυπωθεί για τον λογισμό αποτελούσαν απλουστεύσεις της μεθόδου της εξάντλησης με ένα κατάλληλο και βολικό αλγόριθμο. Επειδή η μέθοδος των απειροστών συνδύαζε την ευκολία των τεχνικών του προσεγγιστικού υπολογισμού, με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της συνήθους ανάλυσης, θεώρησε ότι δεν έπρεπε να αντικατασταθεί με την πρόφαση της μεγαλύτερης αυστηρότητας. Αναφερόμενος στα όρια γράφει: «Να προτιμήσουμε άραγε ένα μονοπάτι γεμάτο αγκάθια, στο οποίο δύσκολα αποφεύγεις τη σύγχυση, από ένα εύκολο δρόμο μέσω του οποίου ο λογισμός μας οδηγεί σε ανακαλύψεις;» (Cajori, 1923)

Το δεύτερο έργο, είναι ο πρώτος τόμος του «Traitè du calcul differèntiel et du calcul intègral» (Πραγματεία του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού) του Sylvestre Francois Lacroix (1765-1843). Ο Lacroix αντικατέστησε τον Lagrange στην Ècole Polytechnique το 1799, και υπήρξε καθηγητής της ανάλυσης για τον Cauchy. Στο παραπάνω έργο του, ερμηνευόταν η μέθοδος του Lagrange με τη βοήθεια των ορίων του D' Alambert και του L' Huilier . (Kline, 1972) Αργότερα, το 1802, ο Lacroix συνέγραψε μία συντομότερη επίτομη έκδοση του βιβλίου του, την «Traitè du calcul differèntiel et du calcul intègral». Στο έργο αυτό, χρησιμοποίησε ως βάση του διαφορικού λογισμού την έννοια του ορίου, την οποία είχε ορίσει κατά τον προσδιορισμό του ορίου ενός λόγου διαφορικών. Έδειξε , ότι εάν $u=ax^2$ και $u_1=a\left(x+h\right)^2$, τότε **το** $2ax$ **είναι «το όριο του λόγου** $\frac{\left(u_1-u\right)}{h}$ **, ή είναι η τιμή προς**

την οποία μπορεί να προσεγγίσει οσοδήποτε κοντά θέλουμε ». (Katz, 2013) Η έννοια του ορίου δόθηκε από τον Lacroix στα 1810. Μολονότι αυτός όρισε σαφώς τα όρια εν γένει, η περιγραφή των ειδικών παραδειγμάτων ξεκαθαρίζει ότι η αντίληψή του ήταν γενική. Για παράδειγμα «όρισε το α να είναι το όριο της συνάρτησης $\alpha x : x+\alpha$ καθώς το x αυξάνει απεριόριστα. Εφόσον η διαφορά μεταξύ του α και της τιμής της συνάρτησης γίνεται μικρότερη, καθώς το x γίνεται μεγαλύτερο, και μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα, οσοδήποτε μικρή, έτσι ώστε η προτεινόμενη συνάρτηση μπορεί να προσεγγίζει το α, όσο κοντά είναι επιθυμητό». (Lacroix, 2, vol1, p.13) Μελετώντας αθροίσματα εναλασσουσών σειρών επισήμανε, ότι μία ποσότητα θα μπορούσε να υπερβεί το όριό της. (Grabiner, 1981)

Οι μαθηματικοί του 18[ου] αιώνα εύρισκαν χρήσιμο συχνά να γράφουν εκφράσεις όπως $\alpha+h$, για ποσότητες των οποίων το όριο ήταν το α. Αυτός ο τρόπος έκφρασης τους προσέφερε τη δυνατότητα ν' αποδεικνύουν απλά αποτελέσματα που αφορούσαν τα όρια. Για τις δύσκολες όμως περιπτώσεις κατέφευγαν στη χρήση των ανισοτήτων.

Για παράδειγμα ο Lacroix απέδειξε πως το όριο του γινομένου είναι ίσο με το γινόμενο των ορίων. Θέτει p, q να είναι τα όρια των P, Q αντίστοιχα. Γενικά $P=p+\alpha$, $Q=q+\beta$, όπου τα α, β μηδενίζονται ταυτόχρονα αφού περάσουν μέσα από «κάθε στάδιο διαδοχικής ελάττωσης». Εφόσον $PQ=\left(p+\alpha\right)\left(q+\beta\right)=pq+p\beta+q\alpha+\alpha\beta$ παρατηρεί ότι «η διαφορά $PQ-pq$ μπορεί να γίνει τόσο μικρή όσο επιθυμούμε, δίνοντας κατάλληλες τιμές στα α και β». Όμως δεν έκανε σαφείς υπολογισμούς πόσο μικρά μπορούσαν να γίνουν τα α, β ώστε να μας εγγυηθούν ότι η διαφορά $PQ-pq$ μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα. Παρόλα αυτά τα επιχειρήματα ορίων που έδωσε υπήρξαν ενδιαφέροντα διότι εξήγησε με παραδείγματα, σε απλή αλγεβρική γλώσσα, την έννοια του ορίου, αποφεύγοντας βερμπαλιστικές εκφράσεις. Αυτό ήταν ένα πλεονέκτημα, διότι οι αλγεβρικές εκφράσεις έδειχναν, ότι η διαφορά μεταξύ μιας μεταβλητής και του ορίου της, μπορούσε πράγματι να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα, κάτι που οι απλές λέξεις δεν μπορούσαν να το δείξουν. (Grabiner, 1981)

Ο Lacroix εξήγησε ότι στην πραγματικότητα «ο διαφορικός λογισμός είναι η εύρεση του ορίου των λόγων των ταυτόχρονων μεταβολών μιας συνάρτησης και των μεταβλητών από τις οποίες αυτή εξαρτάται». Είδε δηλαδή το διαφορικό λογισμό ως μέρος της Ανάλυσης που δεν απαιτούσε διαγράμματα ή γεωμετρικά κίνητρα. Δεν θεωρούσε ως κίνητρο ανάπτυξης του λογισμού την κλίση της εφαπτομένης, αλλά υποστήριξε ότι οι εφαπτομένες ήταν απλώς μία εφαρμογή του λογισμού. (Katz, 2013)

Στο έργο του Lacroix παρουσιάστηκε έλλειψη αυστηρότητας η οποία τον οδήγησε στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων του με τη βοήθεια των απειροστών. Για μια συνάρτηση $y=f\left(x\right)$, όρισε το διαφορικό dy της y με την ισότητα $dy=f'\left(x\right)dx$ και χρησιμοποίησε αυτός για πρώτη φορά τον όρο διαφορικός συντελεστής για την παράγωγο $f'\left(x\right)$.

Το 1816 το έργο του μεταφράστηκε στην Αγγλία και με τον τρόπο αυτό οι μέθοδοι των μαθηματικών της ηπειρωτικής Ευρώπης έγιναν γνωστές και στους άγγλους μαθηματικούς με ευεργετικά αποτελέσματα στην έρευνα των μαθηματικών.

6. ΑΥΣΤΗΡΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

6.1 Μελέτη των ιδιοτήτων των συναρτήσεων

Γύρω στα 1800 οι μαθηματικοί άρχισαν να ενδιαφέρονται για την ασάφεια που υπήρχε στις έννοιες και τις αποδείξεις των τεράστιων κλάδων της ανάλυσης. Η ακριβής έννοια της συνάρτησης δεν ήταν ακόμη καθαρή. Η χρήση των σειρών δίχως προσοχή στη σύγκλιση και την απόκλιση είχαν παραγάγει παράδοξα και διαφωνίες. Η διαμάχη γύρω από τις αναπαραστάσεις συναρτήσεων από τριγωνομετρικές σειρές είχαν επιφέρει μεγαλύτερη σύγχυση. Και ασφαλώς, οι θεμελιώδεις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος δεν είχαν οριστεί σωστά. Η έννοια του ορίου ήταν μόνο σκιαγραφημένη τον 18^{ο} αιώνα, και το διαφορικό μάλλον παρά η παράγωγος ήταν η κυρίαρχη έννοια στην ανάλυση. Το ολοκλήρωμα εθεωρείτο ως μία αντιπαράγωγος και σπανίως μελετούσαν τη σύγκλιση πριν το 19^{ο} αιώνα. Όλες αυτές οι δυσκολίες τελικά προκάλεσαν δυσαρέσκεια ως προς τη λογική κατάσταση της ανάλυσης. Διάφοροι μαθηματικοί αποφάσισαν τότε να βάλουν τάξη στο χάος. Οι ηγήτορες αυτού που αποκαλέστηκε «κρίσιμο κίνημα» επιχείρησαν το ξανακτίσιμο της ανάλυσης αποκλειστικά πάνω στη βάση των αριθμητικών εννοιών. Οι αρχές του κινήματος συμπίπτουν με τη δημιουργία της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η αυστηρή ανάλυση άρχισε με το έργο των Bolzano, Cauchy, Abel και Dirichlet και προχώρησε ακόμα περισσότερο με τον Weierstrass. Η σωστή διάκριση μεταξύ συνέχειας και ασυνέχειας σιγά-σιγά ήλθε στο φως. Η προσεκτική μελέτη των ιδιοτήτων των συναρτήσεων άρχισε από τον Bernhard Bolzano (1781-1848), ένα ιερωμένο, φιλόσοφο, Τσέχο μαθηματικό. Ο Bolzano είχε τις σωστές έννοιες για να τις επιβάλει στο λογισμό, αλλά το έργο του έμεινε στο σκοτάδι για μισό περίπου αιώνα. Αρνήθηκε την ύπαρξη απείρως μικρών αριθμών (απειροστών) και απείρως μεγάλων αριθμών, που και οι δύο έννοιες είχαν χρησιμοποιηθεί από τους συγγραφείς του 18^{ου} αιώνα. (Kline, 1972)

Οι κριτικές στον Lagrange αμφισβητούσαν την εγκυρότητα της αρχής ότι κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί πάντα μέσω του θεωρήματος Taylor ως άπειρης σειράς. Τα ερωτήματα που εμφανίστηκαν ήταν:

(α) Τι εννοούμε συνάρτηση γενικά

(β) Τι εννοούμε συνεχή συνάρτηση

Άρχισε επίσης να γίνεται κριτική στη χρήση σχεδόν χωρίς διακρίσεις των άπειρων σειρών.

Ο Lagrange είχε θέσει μία αρχή στη χρήση σειρών, όταν τόνιζε πως πρέπει να λαμβάνεται υπόψη **το υπόλοιπο** σε κάθε περίπτωση. Αυτή η προειδοποίηση δείχνει την αντίληψη του πως είχε αποφύγει τη χρήση του απείρου και του απείρως μικρού. Δεν θεωρούσε ότι **οι σειρές συνεχίζουν** στο άπειρο, αλλά μόνο **μέχρι ενός σημείου, στο οποίο το υπόλοιπο ήταν επαρκώς μικρό.** (Γιαννακούλιας, 2007)

Ο Bolzano ήταν ένας από τους πρωτοπόρους στο ζήτημα της αυστηρότητας των θεμελιωδών εννοιών του λογισμού, της αριθμητικοποίησής του και της προσεκτικής μελέτης του απείρου. Το 1795 ο Gauss είχε δώσει μία απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας (ότι κάθε ρητή, ακεραία αλγεβρική εξίσωση έχει μία ρίζα) χρησιμοποιώντας θεωρήσεις από τη γεωμετρία. Ο Bolzano επιθυμούσε μία απόδειξη που να εμπλέκει θεωρήσεις μόνο από την αριθμητική, την άλγεβρα και την ανάλυση. Όπως ο Lagrange πίστευε ότι η εισαγωγή του χρόνου και της κίνησης στα μαθηματικά δεν ήταν χρήσιμη, έτσι και ο Bolzano επεδίωκε ν' αποφύγει στις αποδείξεις του θεωρήσεις που προέρχονταν από χωρική διαίσθηση.

Ο Bolzano προσπάθησε να οικοδομήσει τα μαθηματικά από τα πιο βασικά τους στάδια. Από το 1813 γράφει ότι οι αναφορές στη γεωμετρία θα πρέπει να εξαλειφθούν: «Υπάρχουν δύο προτάσεις στη θεωρία εξισώσεων για τις οποίες μπορεί να πει κανείς ότι μέχρι πρόσφατα δεν γνωρίζουμε μια εντελώς σωστή απόδειξη. Η μία πρόταση είναι ότι μεταξύ δύο οποιονδήποτε τιμών μιας άγνωστης ποσότητας που δίνει αποτελέσματα με αντίθετο σημείο, πρέπει πάντοτε να βρίσκεται μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης.

… Η πιο κοινή απόδειξη της παραπάνω πρότασης στηρίζεται σε μια αλήθεια δανεισμένη από τη γεωμετρία, ότι κάθε συνεχής γραμμή απλής καμπυλότητας, της οποίας η τεταγμένη είναι πρώτα θετική και μετά αρνητική (ή αντιστρόφως) πρέπει να τέμνει τον άξονα των x σ' ένα σημείο που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτές τις τετμημένες. Δεν υπάρχει βέβαια απολύτως καμία αμφιβολία για την ορθότητα ή την ευλογοφάνεια αυτής της γεωμετρικής πρότασης. Αλλά είναι σαφές ότι παραβαίνουμε κατάφορα την ορθή μέθοδο όταν συνάγουμε αλήθεια των καθαρών μαθηματικών από θεωρήσεις που ανήκουν απλώς σε μια εφαρμοσμένη περιοχή, τη γεωμετρία». (Ρουσόπουλος, 1991)

Αυτή η στάση του απαιτούσε ένα ικανοποιητικό ορισμό της συνέχειας. *Ο Newton είχε αποφύγει μια τέτοια ενόχληση κάνοντας έκκληση στη διαίσθηση της συνεχούς κίνησης και ο Leibniz κάνοντας έκκληση στο αξίωμα της συνέχειας.* Αυτά χρησιμοποίησε ο Bolzano στο έργο του «Rein analytisher Beweis …» το 1817, αποφεύγοντας τα απειροστά. Στο παραπάνω έργο έδωσε τον κατάλληλο ορισμό της συνεχούς συνάρτησης: «Η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα, αν σε κάθε x του διαστήματος, η διαφορά $f\left(x+\omega\right)-f\left(x\right)$ μπορεί να γίνει όσο μικρή επιθυμεί κανείς, παίρνοντας το ω αρκούντως μικρό» (Grattan-Guinness, 1970)

Από τα πρώτα παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων που παρέθεσε ήταν τα πολυώνυμα.

Ο ορισμός της συνέχειας που δόθηκε από τον Bolzano έδειξε για πρώτη φορά καθαρά, πως η βάση της έννοιας της συνέχειας βρισκόταν στην έννοια του ορίου. Η αίσθηση του Lagrange για τη συνάρτηση ήταν πολύ κοντά σ'αυτήν που εξέφρασε ο Euler στο «Introductio». Οι συναρτήσεις συνδέονται και συχνά ταυτίζονται με πεπερασμένες αναλυτικές εκφράσεις. Αυτές οι συναρτήσεις (εκτός από μεμονωμένες τιμές) είναι συνεχείς. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο στην ιδιότητα της συνέχειας δεν δόθηκε μεγάλη προσοχή από τους αναλύστες του 18^ου^ αιώνα. Με τον Bolzano, η διεύρυνση της έννοιας της συνάρτησης, σήμαινε ότι αυτή η ιδιότητα έπρεπε να οριστεί και να διερευνηθεί.

Ο ορισμός της συνάρτησης του Bolzano είναι πολύ ευρύτερος του ορισμού του Lagrange. **Οι πραγματικές συναρτήσεις για αυτόν είναι απεικονίσεις**. Η αλγεβρική μορφή με την έννοια του Lagrange -αν υπάρχει καθόλου- είναι μια παράγωγη ιδιότητα αυτών. Οι σειρές θεωρούνται όχι μόνο ως εξελίξεις των αναλυτικών συναρτήσεων, αλλά ως ανεξάρτητα μαθηματικά αντικείμενα. Το άθροισμα άπειρης σειράς ορίζεται με όρους σύγκλισης και μια σειρά λέγεται ότι αντιπροσωπεύει μια συνάρτηση σ' ένα πεδίο αν και μόνο αν συγκλίνει στην τιμή της συνάρτησης για κάθε πραγματικό αριθμό στο πεδίο.

Η γενική παραδοχή του Lagrange που αφορούσε το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης σε δυναμοσειρά –ήδη λαθεμένη με τους δικούς της όρους- όπως τόνισε ο Bolzano έπρεπε να εγκαταλειφθεί. Επίσης προκειμένου να αιτιολογηθεί το θεώρημα Taylor έπρεπε να καθοριστούν επί πλέον υποθέσεις και να τεθούν επί πλέον ορισμοί, όπως η συνέχεια της συνάρτησης, η παράγωγος κλπ. (Kitcher, 1984)

«Ο Bolzano ήταν ο πρώτος που όρισε την παράγωγο της f, ως την ποσότητα της οποίας ο λόγος $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ προσεγγίζει το μηδέν, όσο κοντά θέλουμε, καθώς το Δx προσεγγίζει το μηδέν με θετικές ή αρνητικές τιμές, και συμβόλισε με $\frac{dy}{dx}$ την παράγωγο της $y=f(x)$. Τόνιζε ότι η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ δεν ήταν ένα πηλίκο του dy προς το dx, ούτε ένα πηλίκο από μηδενικά, ούτε ένας λόγος από εξαφανιζόμενες ποσότητες, αλλά ένας αριθμός που προσεγγίζεται από αυτόν τον λόγο». (Γιαννακούλιας, 2007)

Από το 1817 είχε τη σωστή αντίληψη της συνθήκης για τη σύγκλιση μιας ακολουθίας, τη συνθήκη που σήμερα αποδίδεται στον Cauchy.

Το έργο του Bolzano παρόλο που είχε μικρή επίδραση στην εποχή του, ωστόσο περιέχει σημαντικά συμπεράσματα. Αναφέρουμε το θεώρημά του για τη σύγκλιση σειρών:

«Εάν μια σειρά ποσοτήτων $F_1(x), F_2(x), F_3(x), ..., F_n(x)$ *[όπου κάθε* $F_i(x)$*, μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά το άθροισμα των πρώτων* i *όρων μιας σειράς], έχει την ιδιότητα ότι η διαφορά ανάμεσα στον n-οστό όρο* $F_n(x)$ *και κάθε επόμενο* $F_{n+r}(x)$ *οσοδήποτε μακριά και αν είναι από τον* $F_n(x)$*, παραμένει μικρότερη από οποιαδήποτε δοθείσα ποσότητα εάν το n είναι αρκούντως μεγάλο, τότε υπάρχει πάντα μια ορισμένη σταθερή ποσότητα, και μάλιστα μόνο μία, την οποία προσεγγίζουν οι όροι της σειράς, και την οποία μπορεί να πλησιάσουν όσο κοντά επιθυμούμε εάν η σειρά συνεχιστεί για κατάλληλα αρκετούς όρους».* (Katz, 2013)

Στο Θεώρημα αυτό είναι σαφής η εισαγωγή της έννοιας του ορίου με τη μορφή μιας σταθερής ποσότητας (μεγέθους), η οποία μάλιστα είναι και μοναδική, και προσεγγίζεται από τους όρους οι οποίοι μπορούν να την πλησιάζουν οσοδήποτε πολύ θέλουμε, για κατάλληλο n. Αυτός ο ορισμός του Bolzano δίνει ουσιαστικά το όριο μιας ακολουθίας, καθώς οι όροι της «σειράς των ποσοτήτων» δεν φαίνονται να εξαρτώνται από το x, αλλά μόνο από το n. Είναι μια προσπάθεια παρουσίασης της τυπικής μορφής του ορισμού του ορίου ακολουθίας. Ο ορισμός αυτός μοιάζει εξαιρετικά στη διατύπωση με αυτόν του Cauchy, παρά το γεγονός ότι δεν αναφέρεται σαφώς ο όρος «όριο» από τον Bolzano. (Jourdain, 1905)

«Για το παραπάνω θεώρημα ο Bolzano απέδειξε εύκολα ότι το όριο είναι μοναδικό, αλλά η απόδειξή του ότι για κάθε x υπάρχει αριθμός $X(x)$ στον οποίο η σειρά συγκλίνει είναι λανθασμένη διότι **δεν είχε τρόπο να ορίσει έναν τυχαίο πραγματικό αριθμό X. Παρ' όλα αυτά, κατόρθωσε να δείξει πως εάν n είναι αρκούντως μεγάλος αριθμός ώστε για κάθε r ο $F_{n+r}(x)$ να διαφέρει από τον $F_n(x)$ λιγότερο από d, τότε ο $F_n(x)$ είναι η ζητούμενη προσέγγιση του X».** (Katz, 2013)

Παρόλο που και αυτός (όπως αργότερα και ο Cauchy) δήλωσε σωστά αυτό που σήμερα ονομάζεται **«κριτήριο σύγκλισης του Cauchy» δεν μπόρεσε (ούτε ο Cauchy) να δώσει πλήρη απόδειξη, λόγω της έλλειψης της ιδιότητας της πληρότητας του R.** (Edwards, 1979)

Εξοπλισμένος με τον ακριβή ορισμό της συνέχειας ο Bolzano κατά τη διετία 1833-1834 έγραψε την πραγματεία «Funktionenlehre» (Θεωρία συναρτήσεων) στην οποία κάνει συστηματική μελέτη και αποδεικνύει ένα πλήθος θεμελιωδών θεωρημάτων των συνεχών συναρτήσεων που επιβεβαιώνουν τα συμπεράσματα που προέκυπταν από την εποπτεία. Δίχως να δώσει τον ορισμό της συνάρτησης τη χρησιμοποίησε ως ισχύουσα έκφραση. Στο έργο αυτό που δεν το συμπλήρωσε και δεν το δημοσίευσε έδωσε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης και πουθενά διαφορίσιμης από το οποίο φαίνεται ότι είχε ξεκάθαρη τη διάκριση μεταξύ συνέχειας και διαφορισιμότητας. (Γιαννακούλιας, 2007)

6.2 Αυστηρή θεμελίωση των εννοιών του απειροστικού λογισμού

Με τον ερχομό του 19ου αιώνα παρατηρήθηκε μια κοσμογονική αλλαγή. Η βιομηχανική επανάσταση άρχισε ν' αναπτύσσεται με γοργούς ρυθμούς, με αποτέλεσμα να προκύψει ζωηρό ενδιαφέρον για τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία. Μετά τη Γαλλική επανάσταση τα πανεπιστήμια αναμόρφωσαν τα προγράμματα σπουδών τους. Οι μαθηματικοί άρχισαν να ασχολούνται, πέρα από την έρευνα, και με τη διδασκαλία στα πανεπιστήμια. Από το 1794 λειτούργησε στο Παρίσι η École Polytechnique πρότυπο σχολής για μηχανικούς και στρατιωτικούς. Ορισμένα από τα καλύτερα διδακτικά βιβλία γράφτηκαν για τους σπουδαστές της όπως το βιβλίο του Lacroix. Το 1810 απεφοίτησε από τη σχολή ο Augustin Louis Cauchy (1789-1857), ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 19ου αιώνα και από τους πρωτεργάτες της κίνησης για την αυστηρή θεμελίωση των εννοιών του απειροστικού λογισμού. Αργότερα διορίστηκε καθηγητής της École Polytechnique και έγραψε τρία σπουδαία εγχειρίδια για τους σπουδαστές της.

(α) «Cours d' analyse de l' école royale polytechnique» (1821).

(β) «Resumé des lecons donnees a l' école royale polytechnique sur le calcul infinitesimal» (1823).

(γ) «Lecons suv le calcul differentie»(1829).

Το όριο, η συνέχεια και η σύγκλιση πραγματεύονται στο πρώτο. Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα στο δεύτερο.

Στην εισαγωγή του πρώτου μέρους του «Cours d' analyse» με τίτλο «Analyse Algébrique» υπογραμμίζει τη σημασία των κυρίων ιδιοτήτων των «απείρως μικρών ποσοτήτων» που αποτελούν τη βάση του απειροστικού λογισμού. Μεταξύ άλλων κάνει διάκριση των λέξεων αριθμός (nombre) και ποσότητα (quantité). Γράφει ότι η λέξη «αριθμός» χρησιμοποιείται στην αριθμητική ως το απόλυτο μέτρο του μεγέθους (grandeur) και η λέξη ποσότητα αντιπροσωπεύει ένα αριθμό προσημασμένο με + ή - . Εδώ παρατηρείτε η διευθέτηση της ασάφειας που υπήρχε στο κείμενο του D' Alembert. (D' Alembert, 1754-1772)

Στον πρόλογό του δικαιολόγησε το σκοπό της συγγραφής του : «Σκοπός μου είναι να δώσω όλη την αυστηρότητα όπως γίνεται και στη γεωμετρία, ώστε να παρακάμψω τελείως τα λογικά συμπεράσματα που βασίζονται στη γενικότητα της άλγεβρας. Τέτοιου είδους συμπεράσματα, παρ' ότι γίνονται αποδεκτά, κυρίως κατά την μετάβαση από τις συγκλίνουσες στις αποκλίνουσες σειρές, και από τις πραγματικές στις φανταστικές ποσότητες, μπορούν να θεωρηθούν, κατά τη γνώμη μου, ως επαγωγές, αρκετά ικανές κάποιες φορές ν' αποκαλύψουν την αλήθεια, αλλά ανεπαρκείς ως προς την ακρίβεια που απαιτούν οι μαθηματικές επιστήμες. Θα πρέπει ακόμη να παρατηρήσουμε ότι ο ισχυρισμός κάποιων, για την απεριόριστη γενικότητα των αλγεβρικών τύπων δεν είναι αληθής. Στην πραγματικότητα οι τύποι αυτοί είναι έγκυροι, κάτω από ορισμένες συνθήκες, και για ορισμένες τιμές των ποσοτήτων που περιέχουν. Με τον προσδιορισμό αυτών των συνθηκών και των τιμών, και δίνοντας ένα ακριβή και σταθερό νοηματικό περιεχόμενο στο συμβολισμό που χρησιμοποιώ θα εξαφανίσω κάθε αβεβαιότητα». (Bell, 1995)

Ορισμός ορίου

Ο Cauchy εισήγαγε πολλούς σημαντικούς ορισμούς που έγιναν αποδεκτοί, σχεδόν αμέσως, από την μαθηματική κοινότητα και προκάλεσαν μεγάλη αλλαγή στον απειροστικό λογισμό. Αρχικά μελέτησε την έννοια του ορίου καθαρά αριθμητικά, εφόσον θεώρησε απαραίτητο να την απαλλάξει από κάθε γεωμετρική αναπαράσταση. Μελέτησε όλες τις προηγούμενες εργασίες, και το 1821 στο έργο του «Cours d' analyse» έδωσε το δικό του ορισμό του ορίου. Πρώτα έδωσε τον ορισμό της μεταβλητής: *«Μια ποσότητα που θεωρείται ως διαδοχή πολλών τιμών, διαφορετικών μεταξύ τους, καλείται μεταβλητή».* Ενώ σταθερή ποσότητα είναι εκείνη που διατηρεί μία τιμή σταθερή και προσδιορισμένη. (Cauchy, 1821) Αμέσως μετά δίνει τον ορισμό του ορίου: **«Όταν οι τιμές που δίνονται διαδοχικά στην ίδια μεταβλητή προσεγγίζουν απεριόριστα μια σταθερή τιμή, με τρόπο τέτοιο ώστε να διαφέρουν από αυτή τόσο λίγο όσο επιθυμεί κανείς, τότε αυτή η τελευταία ονομάζεται όριο όλων των άλλων»**. (Katz, 2013)

Δίνει δε το παράδειγμα ενός αρρήτου ως ορίου των κλασμάτων που πλησιάζουν διαρκώς περισσότερο την τιμή του, και το παράδειγμα της επιφάνειας του κύκλου ως ορίου των εγγεγραμμένων σ' αυτόν πολυγώνων, καθώς το πλήθος των πλευρών τους γίνεται ολοένα μεγαλύτερο.

Μετά από μία σύντομη αναφορά στους τριγωνομετρικούς αριθμούς, δίνει το συμβολισμό του ορίου, γράφοντας ότι όταν μία μεταβλητή ποσότητα συγκλίνει σε ένα σταθερό όριο, είναι βολικό να υποδεικνύεται αυτό το όριο με ένα ξεχωριστό συμβολισμό, οπότε χρησιμοποιείται η σύντμηση «lim» μπροστά από τη μεταβλητή, ενώ για εκφράσεις που περιέχουν τη μεταβλητή χρησιμοποιούνται παρενθέσεις μέσα στις οποίες τοποθετούνται οι εκφράσεις, όπως στην περίπτωση «$\lim.(A^x)$». (Cauchy, 1821)

Τον ορισμό του ορίου ακολούθησε και ο ορισμός του απειροστού: *«Όταν οι διαδοχικές τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας μειώνονται διαρκώς με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνονται μικρότερες από οποιαδήποτε δοθείσα ποσότητα, εκείνη η μεταβλητή γίνεται αυτό που ονομάζουμε απειροστό. Μια τέτοια μεταβλητή έχει όριο το μηδέν»*. Ανάλογα ονόμασε άπειρο *«μια μεταβλητή ποσότητα της οποίας οι διαδοχικές τιμές μπορούσαν να γίνουν μεγαλύτερες από κάθε αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο»*.

Ο ορισμός που έδωσε για τα απειροστά αναγνωρίζει σαφώς ότι αυτά είναι «μεταβλητές ποσότητες» και με τον τρόπο αυτό ο Cauchy νομιμοποιεί την παλιά γλώσσα των απειροστών (ακριβώς ότι προσπάθησε και ο Newton) και ότι οι αναφορές στα απειροστά μπορούν πάντα να χρησιμοποιούνται όταν αυτό απαιτείται. Πριν τον Cauchy ο λογισμός ασχολείται με εκφράσεις. Τα αντικείμενα της νέας ανάλυσης του Cauchy του 1821 δεν είναι εκφράσεις αλλά μεταβλητές ποσότητες. Τα αναλυτικά συμπεράσματα δεν εξάγονται από εκφράσεις, αλλά από έννοιες ή ιδιότητες.

Ορισμός συνέχειας

Στη συνέχεια πρότεινε και τους ακόλουθους ορισμούς:

α) Η συνάρτηση $f(x)$ θα είναι, ανάμεσα σε δύο προκαθορισμένες τιμές της μεταβλητής x, συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής αυτής, εάν για κάθε τιμή της x ανάμεσα σε αυτά τα όρια, η αριθμητική [απόλυτη] τιμή της διαφοράς $f(x+\alpha)-f(x)$ ελαττούται απεριόριστα μαζί με το α. (Katz, 2013)

Σε σύγχρονο συμβολισμό γράφεται:

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ αν και μόνο αν το $|f(x+h)-f(x)|$ τείνει στο 0 καθώς το h τείνει στο 0 (δηλαδή $\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]=0$)

β) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ είναι συγκλίνουσα αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sum_{n=0}^{N} s_n$ τείνει σε ένα όριο καθώς το N τείνει στο άπειρο. Και αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sum_{n=0}^{N} s_n$ τείνει σε κάποιο όριο καθώς το N τείνει στο άπειρο, τότε το άθροισμα της σειράς είναι $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} s_n$.

Αφού έδωσε τον ορισμό (α) ως ορισμό της συνέχειας, ο Cauchy δίνει μία αναδιατύπωση: «Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $f(x)$ θα παραμένει συνεχής ως προς το x σε ένα δεδομένο διάστημα αν (σε αυτό το διάστημα) μια απειροστή αύξηση της μεταβλητής παράγει μια απειροστή αύξηση στην ίδια τη συνάρτηση». (Kitcher, 1984)

Μετά τον ορισμό της συνάρτησης και της συνεχούς συνάρτησης απέδειξε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Στην απόδειξη αυτή φαίνεται πώς οδηγήθηκε στην **αναγκαιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών**. Στην αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος θεωρεί «μια συνεχή συνάρτηση $f:[\beta,\gamma]\to R$ με $f(\beta)<0,\ f(\gamma)>0$ και μία διαμέριση του $[\beta,\gamma]$ σε n ίσα υποδιαστήματα, μήκους $a=\dfrac{\gamma-\beta}{n}$. Αν υπήρχε υποδιάστημα τέτοιο ώστε για κάποιο ξ να είναι $f(\xi)=0$, η απόδειξη ήταν ολοκληρωμένη. Με την υπόθεση πως δεν υπήρχε ξ με $f(\xi)=0$, για τον Cauchy υπήρχαν δύο τιμές του x που διέφεραν κατά h, ώστε η συνάρτηση f να είναι αρνητική στην μία τιμή και θετική στην άλλη. Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία στα νέα διαστήματα μήκους $\dfrac{\gamma-\beta}{n},\ \dfrac{\gamma-\beta}{n^2},...$ προκύπτουν δύο ακολουθίες, μία αύξουσα ακολουθία $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n,...$ τιμών του x ώστε $f(\beta_\kappa)<0$ για κάθε $\kappa=1,2,...$ και μια φθίνουσα ακολουθία $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n,...$ τιμών του x ώστε $f(\gamma_\kappa)>0$ για κάθε $\kappa=1,2,...$ Στο σημείο αυτό τόνισε: «πρέπει να συμπεράνουμε από τα παραπάνω, ότι οι όροι των ακολουθιών συγκλίνουν σ' ένα κοινό όριο, το α». Εφόσον η f είναι συνεχής, οι ακολουθίες $\left(f(\beta_\kappa)\right)_{\kappa\in N}$ και $\left(f(\gamma_\kappa)\right)_{\kappa\in N}$ θα συγκλίνουν στο κοινό όριο $f(a)$, το οποίο προφανώς ισούται με το μηδέν. (Cours d' analyse) Αυτό ήταν το αδύνατο σημείο του Cauchy, γιατί έπρεπε να δικαιολογήσει για ποιο λόγο οι ακολουθίες είχαν κοινό όριο, και για αυτό ήταν απαραίτητη η πληρότητα των πραγματικών αριθμών. Οι συνθήκες βέβαια της κατασκευής των ακολουθιών έδειχναν ότι κατ' ανάγκη οι ακολουθίες των σημείων θα έτειναν σ' ένα κοινό όριο, αλλά για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, εφ' όσον δεν μπορούσε να την εξασφαλίσει αλγεβρικά, χρησιμοποίησε γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Ο Cauchy συνήθιζε να διατυπώνει τις αρχές του αλγεβρικά και στη συνέχεια να τις δικαιολογεί γεωμετρικά». (Γιαννακούλιας, 2007)

Ορισμός παραγώγου

Το 1823, στο κείμενό του «Resumé des lecons donnees a l' école royale polytechnique sur le calcul infinitesimal», ο Cauchy εφάρμοσε τις νέες ιδέες του για τα όρια στη μελέτη της παραγώγου και του ολοκληρώματος, των δύο βασικών εννοιών του απειροστικού λογισμού. «Ο ορισμός της παραγώγου που έδωσε έχει ως εξής : *«Όταν μία συνάρτηση $y=f(x)$ παραμένει συνεχώς μεταξύ δύο ορίων της μεταβλητής x, και όταν αντιστοιχίσουμε σε μια τέτοια μεταβλητή, μια τιμή μεταξύ των δύο παραπάνω άκρων, τότε μια απειρόριστα μικρή μεταβολή της μεταβλητής παράγει μια απειρόριστα μικρή μεταβολή της τιμής της συνάρτησης. Άρα αν θέσουμε $\Delta x=i$, οι δύο όροι του λόγου των διαφορών, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}$ θα είναι απειρόριστα μικρές ποσότητες. Παρ' όλο που οι δύο όροι θα πλησιάζουν απειρόριστα και ταυτόχρονα στο όριο μηδέν ο λόγος είναι δυνατόν να συγκλίνει σε κάποιο άλλο όριο, θετικό ή αρνητικό.* ***Αυτό το όριο, όταν υπάρχει****, έχει μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε συγκεκριμένο x, αλλά μεταβάλλεται με το x. Η μορφή της νέας συνάρτησης, που είναι το όριο του λόγου*

$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, *θα εξαρτάται από την μορφή της αρχικής συνάρτησης* $y=f(x)$. *Ακριβώς για να δείξουμε αυτή την εξάρτηση, τη νέα συνάρτηση ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση και τη συμβολίζουμε* y' *ή* $f'(x)$.

Δηλαδή η συνάρτηση f έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του $[a, \beta]$, αν και μόνο αν, για κάθε $x\in[a, \beta]$ το πηλίκο $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ τείνει σε ένα όριο, καθώς το h τείνει στο μηδέν. Στην περίπτωση αυτή το $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ είναι η τιμή της παραγώγου στο x. Η παράγωγος $f'(x)$ είναι η συνάρτηση που σε κάθε σημείο του $[a, \beta]$ έχει την τιμή $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ». Όπως μπορούμε να δούμε, ο Cauchy θεώρησε το όριο του λόγου των διαφορών $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ στο διάστημα συνέχειας της $f(x)$. (Η συνέχεια χρειαζόταν ώστε «$f(x+h)-f(x)$» και «h» να μπορούσαν αμφότερα αόριστα και ταυτόχρονα να προσεγγίζουν το όριο μηδέν). Αυτό που πρόσθεσε ο Cauchy στο έργο των προκατόχων του είναι η φράση: «Αυτό το όριο **όταν υπάρχει**» και αποτελεί παράδειγμα της αυστηρής του στάσης. Ο Cauchy χρησιμοποίησε τον ορισμό για να αποδείξει θεωρήματα που αφορούσαν παραγώγους, και έτσι δημιουργήθηκε η **πρώτη αυστηρή θεωρία των παραγώγων**.

Ο Cauchy έδωσε στις εργασίες του μια λογική δομή βασίζοντας τις αποδείξεις των θεωρημάτων στους ορισμούς του. Ωστόσο οι τεχνικές του όφειλαν πάρα πολλά στην άλγεβρα. Αντιλήφθηκε πως ήταν η άλγεβρα των ανισοτήτων και όχι των ισοτήτων, αυτή που θα μπορούσε να παρέχει μια βάση για το λογισμό. Για το λόγο αυτό στο «Cours d' analyse» συστηματοποίησε και παρείχε συγκεκριμένες ανισότητες που χρειαζόταν για τις αποδείξεις του. Οι ανισότητες χρησιμοποιούνταν ευρέως στις μεθόδους προσέγγισης που είχαν αναπτυχθεί τον $18^{ο}$ αιώνα. Βασικοί στόχοι των προσεγγίσεων ήταν η παραγωγή απείρων αναλυτικών εκφράσεων για τις ρίζες των πολυωνυμικών εξισώσεων και ο ακριβής υπολογισμός σφαλμάτων και μέτρων της ταχύτητας σύγκλισης. (Γιαννακούλιας, 2007)

Ο Cauchy παρ' ότι παρουσίαζε λεκτικά τις διάφορες έννοιες του λογισμού όταν χρειαζόταν αντικαθιστούσε τις λεκτικές περιγραφές με την ακριβή γλώσσα των ανισοτήτων. Για παράδειγμα, το 1823, βασιζόμενος στις ανισοτικές ιδιότητες του Lagrange για την παράγωγο, στο «Resumé» έδωσε την ακόλουθη περιγραφή για την παράγωγο: «Έστω δ, ε δύο πολύ μικροί αριθμοί, ο πρώτος επιλέγεται έτσι ώστε για όλες τις αριθμητικές (δηλ. απόλυτες) τιμές του h, που είναι μικρότερες από το δ, και για κάθε τιμή του x στο διάστημα ορισμού της f, το πηλίκο $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ θα γίνεται πάντοτε μεγαλύτερο από το $f'(x)-\varepsilon$ και μικρότερο από το $f'(x)+\varepsilon$ ». (Η υπόθεση πως το δ θα μπορούσε να «δουλέψει» για όλα τα x στο δοθέν διάστημα ισοδυναμεί προς την ομοιόμορφη σύγκλιση του διαφορικού πηλίκου.) (Grabiner, 1981)

Να σημειωθεί, ότι οι ε-δ αποδείξεις για πρώτη φορά εμφανίστηκαν σε αποδείξεις προτάσεων του Cauchy. Στο έργο του εμφανίζεται το «ε», ως ένας αριθμός «τόσο μικρός όσο επιθυμούμε» και αποδεικνύει ότι το πηλίκο $\frac{f(x)}{x}$ έχει ως όριο μια ποσότητα που περιέχεται μεταξύ $k-\varepsilon$ και $k+\varepsilon$, και άρα λόγω της «μικρότητας» του αριθμού ε έχει ως όριο το k.

Να επισημανθεί ότι ο Cauchy σε κανένα σημείο του έργου του δεν δίνει κάποιο ορισμό για το όριο συνάρτησης. Φαίνεται να θεωρεί έναν τέτοιο ορισμό ως λογική συνέπεια του ορισμού για το όριο μεταβλητών και χρησιμοποιεί το όριο συνάρτησης σαν κάτι ευνόητο και δεδομένο. (Cauchy, 1821)

Είναι αυτός που μετέφερε την άλγεβρα των ανισοτήτων στο λογισμό και από εργαλείο των προσεγγίσεων το μετέτρεψε σε εργαλείο αυστηρότητας. Ο Cauchy πήρε από τον Lagrange το όνομα παράγωγος καθώς και το συμβολισμό $f'(x)$, τονίζοντας έτσι τη συναρτησιακή φύση της παραγώγου. Η περιγραφή της παραγώγου από τον Cauchy είχε αρκετά κοινά σημεία μ' αυτή του L' Huilier αλλά ήταν βελτιωμένη ως προς τον ορισμό του ορίου. (Γιαννακούλιας, 2007)

Ορισμός ολοκληρώματος

« Η παρουσίαση της παραγώγου από τον Cauchy, μολονότι βασιζόταν στον νέο ορισμό των ορίων που έδωσε, σχετιζόταν στενά με την παρουσίαση της παραγώγου στο έργο των Euler και Lagrange. Η μελέτη του ολοκληρώματος από τον Cauchy, αντίθετα, άνοιξε τελείως νέες κατευθύνσεις. Τον 18^{ο} αιώνα η ολοκλήρωση οριζόταν συνήθως ως αντίστροφη παραγώγιση. Αν και ο Leibniz είχε επινοήσει τον συμβολισμό του για να υπενθυμίζεται ότι το ολοκλήρωμα είναι το άπειρο άθροισμα απειροστών εμβαδών, οι μαθηματικοί του 18^{ου} αιώνα έκαναν την έννοια του αορίστου ολοκληρώματος, της αντιπαραγώγου, βασική έννοια της θεωρίας της ολοκλήρωσης. Γινόταν βέβαια αντιληπτό ότι τα εμβαδά ήταν δυνατόν να υπολογιστούν όχι μόνο με την αντιπαραγώγιση αλλά και με διάφορες τεχνικές προσέγγισης. Ωστόσο ο Cauchy ήταν εκείνος που πρώτος θεώρησε τις τεχνικές αυτές θεμελιώδεις και πάνω τους βάσισε μια θεωρία ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Υπάρχουν πιθανόν αρκετοί λόγοι για τους οποίους ο Cauchy αναγκάστηκε να ορίσει το ολοκλήρωμα ως όριο ενός αθροίσματος και όχι μέσω της έννοιας της αντιπαραγώγου. Υπήρχαν πολλές περιπτώσεις στις οποίες ήταν σαφές ότι η περιοχή κάτω από μία καμπύλη είχε εμβαδόν το οποίο δεν μπορούσε να βρεθεί υπολογίζοντας την αντιπαράγωγο στα άκρα ενός διαστήματος. Το 1823, έγραφε σε ένα άρθρο του *«μου φαίνεται ότι αυτός ο τρόπος κατανόησης του ορισμένου ολοκληρώματος [ως το άθροισμα των απείρως μικρών τιμών της διαφορικής έκφρασης που βρίσκεται υπό το σύμβολο της ολοκλήρωσης] πρέπει να προτιμηθεί ... επειδή ταιριάζει εξίσου σε όλες τις περιπτώσεις, ακόμη και σε εκείνες στις οποίες εν γένει δεν μπορούμε να περάσουμε από την προς ολοκλήρωση συνάρτηση στην αρχική».*

Στο δεύτερο μέρος του Resumé του ο Cauchy παρουσίασε τις λεπτομέρειες ενός αυστηρού ορισμού του ολοκληρώματος με τη χρήση αθροισμάτων. Υπέθεσε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x_0\,,\,X]$, πήρε $n-1$ νέες ενδιάμεσες τιμές $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ ανάμεσα στα x_0 και $x_n = X$ και όρισε το άθροισμα

$$S = (x_1 - x_0)\,f(x_0) + (x_2 - x_1)\,f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})\,f(x_{n-1})\ .$$

Ο Cauchy επεσήμανε ότι το S εξαρτάται τόσο από το n όσο και από τις τιμές των x_i που επιλέχτηκαν. Αλλά συμπλήρωσε «έχει σημασία να παρατηρήσουμε ότι όταν οι αριθμητικές τιμές των διαφορών $[x_{i+1} - x_i]$ γίνονται πολύ μικρές και ο αριθμός n πολύ μεγάλος, η μέθοδος της υποδιαίρεσης θα έχει ανεπαίσθητη μόνο επίδραση στην τιμή του S».

Την παραπάνω παρατήρηση την απέδειξε ο Cauchy ως εξής:

Επέλεξε μία νέα υποδιαίρεση του διαστήματος $[x_0\,,\,X]$ υποδιαιρώντας τα αρχικά υποδιαστήματα, το αντίστοιχο άθροισμα S' γράφεται :

$$\begin{aligned} S' = {} & (x_1 - x_0)\,f\left(x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)\right) + (x_2 - x_1)\,f\left(x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)\right) + \ldots \\ & + (X - x_{n-1})\,f\left(x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})\right) \end{aligned}$$

Όπου τα θ_i βρίσκονται μεταξύ 0 και 1. Από τον ορισμό της συνέχειας η έκφραση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} S' &= (x_1 - x_0)\left[f(x_0) + \varepsilon_0\right] + (x_2 - x_1)\left[f(x_1) + \varepsilon_1\right] + \ldots + (X - x_{n-1})\left[f(x_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}\right] \\ &= S + (x_1 - x_0)\varepsilon_0 + (x_2 - x_1)\varepsilon_1 + \ldots + (X - x_{n-1})\varepsilon_{n-1} \\ &= S + (X - x_0)\varepsilon' \end{aligned}$$

όπου ε' είναι μια τιμή ανάμεσα στο μικρότερο και το μεγαλύτερο από τα ε_i . Στη συνέχεια ο Cauchy ισχυρίστηκε ότι εάν τα υποδιαστήματα είναι αρκούντως μικρά, τα ε_i και επομένως και τα ε' θα είναι πολύ κοντά στο 0, οπότε το αντίστοιχο άθροισμα μιας τέτοιας υποδιαίρεσης δεν διαφέρει σημαντικά από το προηγούμενο. Εάν δοθούν δύο αρκούντως λεπτές υποδιαιρέσεις, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα υποδιαίρεση που υποδιαιρεί και τις δύο και της οποίας το αντίστοιχο άθροισμα είναι οσοδήποτε κοντά θέλουμε στα αθροίσματα των προηγούμενων. Έπεται ότι «εάν συνεχίσουμε να ελαττώνουμε τις αριθμητικές τιμές [των μηκών των υποδιαιρέσεων] αυξάνοντας το πλήθος τους, η τιμή του S παραμένει σχεδόν σταθερή, ή, με άλλα λόγια, θα καταλήξει σε μια ορισμένη οριακή τιμή που θα εξαρτάται μόνον από τη μορφή της συνάρτησης $f(x)$ και τις ακραίες τιμές x_0, X που παίρνει η μεταβλητή x. Το όριο αυτό το καλούμε ορισμένο ολοκλήρωμα [και το συμβολίζουμε με $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$]».

Έχοντας ορίσει το ολοκλήρωμα ως όριο αθροισμάτων, ο Cauchy εύκολα απέδειξε το θεώρημα της μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα και στη συνέχεια το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού». (Katz, 2013)

6.3 Η χρησιμοποίηση άπειρων σειρών

Να σημειώσουμε εδώ τον σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού που έπαιξαν οι άπειρες σειρές. Η χρήση τους διευκόλυνε στον υπολογισμό των τιμών μιας συνάρτησης, και συνέτεινε στη δημιουργία νέων συναρτήσεων με διαφορετικές πολλές φορές ιδιότητες από τις ήδη γνωστές. Αναγνωρίζοντας ο Cauchy τη μεγάλη σημασία των αναπαραστάσεων συναρτήσεων από σειρές σε διάφορα προβλήματα που μελετούσε καθώς και την μη αξιοπιστία των αλγεβρικών τεχνικών των σειρών, θέλησε να γίνει η θεμελίωση της θεωρίας των σειρών με αυστηρό τρόπο. Τα προβλήματα αναπαράστασης συναρτήσεων με άπειρες σειρές έτσι βρέθηκαν στην πρώτη γραμμή της έρευνας στις αρχές του 19^{ου} αιώνα.

Για τη σύγκλιση σειρών ο Maclaurin είχε ήδη διατυπώσει ότι το άθροισμα της σειράς ήταν το όριο των μερικών αθροισμάτων. Για τον Cauchy αυτό σήμαινε πως για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούσε να βρεθεί κάποιο n_0 τέτοιο ώστε για περισσότερους από n_0 όρους το άθροισμα των απείρων όρων της σειράς να διαφέρει από το νιοστό όρο λιγότερο από ε. Έτσι οδηγήθηκε στην αναδιατύπωσή του ορισμού συγκλίνουσας σειράς : «Για απείρως μεγάλες τιμές αριθμού Ν τα αθροίσματα s_N πρέπει να διαφέρουν από το όριο s και συνεπώς μεταξύ τους κατά μία απείρως μικρή ποσότητα». Αυτό είναι το κριτήριο σύγκλισης που είναι γνωστό ως κριτήριο σύγκλισης του Cauchy.

Αν εκφράσουμε αυτή την πρόταση χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες που είχε καθορίσει ο Cauchy, καθιστώντας το κριτήριο εντελώς σαφές, λαμβάνουμε:

Η $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα Ν τέτοιο ώστε για κάθε $\nu > 0$, $\left|\sum_{i=N}^{N+\nu} u_i\right| < \varepsilon$.

Όπως γνωρίζουμε αν η σειρά είναι συγκλίνουσα τότε το κριτήριο του Cauchy ισχύει. Αυτό που είναι δύσκολο να δειχθεί είναι η απόδειξη ότι η συνθήκη είναι ικανή για τη σύγκλιση.

Ο Cauchy δεν επισυνάπτει στην παρουσίαση του κριτηρίου τίποτα που θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως προσπάθεια για απόδειξη. Είναι ικανοποιημένος με το να το επεξηγήσει μέσω παραδειγμάτων. Μοιάζει σχεδόν ως να υποστηρίζει πως το κριτήριό του αφού λειτουργεί για αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να γίνει αποδεκτό. Η ανάγκη του κριτηρίου σύγκλισης εμφανίστηκε σ' ένα παράρτημα του «Cours d' analyse», όπου ο Cauchy προσπαθεί να δώσει μία καθαρώς αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, που ήδη έχουμε αναφέρει. Οι εκκλήσεις που έκανε στη γεωμετρία εδραίωσαν, για αυτόν, την ύπαρξη ορίων, την οποία θα μπορούσε να εγγυηθεί αλγεβρικά, και με αυτό τον τρόπο επιβεβαίωσε μερικές από τις αλγεβρικές αρχές του. Διατυπώνοντας τις αρχές αλγεβρικά και δικαιολογώντας αυτές γεωμετρικά, ο Cauchy κληροδότησε στους διαδόχους του ένα νέο πρόβλημα: πώς μπορεί κάποιος να δείξει αλγεβρικά ότι τα απαραίτητα όρια υπάρχουν; (Kitcher, 1984)

« Επίσης ο Cauchy ήταν αυτός που πρώτος παρατήρησε ότι αν μία ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in N}$ συγκλίνει τότε η διαφορά $|\alpha_n - \alpha_m|$ γίνεται οσοδήποτε μικρή για τιμές των *n, m* μεγαλύτερες από ένα κατάλληλο φυσικό αριθμό n_0, μια παρατήρηση που οδήγησε στην έννοια των βασικών ακολουθιών ή ακολουθιών Cauchy όπως ονομάζονται σήμερα. Ξέφυγε όμως από την αυστηρότητα γιατί όρισε τους άρρητους αριθμούς ως το όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών και αυτό δημιούργησε σύγχυση, διότι η έννοια του ορίου στηρίζεται στην έννοια του πραγματικού αριθμού. Επομένως **ήταν αναγκαίο να οριστούν οι πραγματικοί αριθμοί**, το οποίο και έγινε στην δεκαετία του 1870 από τους Cantor, Dedekind και Weierstrass». (Γιαννακούλιας, 2007)

Στο πρώτο μέρος του Cours d' Analyse, ο Cauchy συχνά ερευνά τη σύγκλιση των σειρών κάνοντας δοκιμές. Εκείνη την περίοδο απέδειξε ότι μία σειρά θετικών όρων, άνω φραγμένη όρο-με-όρο από μία συγκλίνουσα γεωμετρική πρόοδο, είναι συγκλίνουσα. Με παρόμοιες συγκρίσεις οδηγήθηκε στις αποδείξεις ενός αριθμού κριτηρίων για τη σύγκλιση, όπως το κριτήριο ρίζας και το κριτήριο λογαρίθμων. Ο Cauchy δημιούργησε την πρώτη αυστηρή θεωρία της σύγκλισης:

α) εφαρμόζοντας μία τεχνική, που κάποιες φορές είχε χρησιμοποιηθεί από τους D' Alembert και Lagrange, και βασιζόταν σε προσεγγίσεις, και

β) χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αθροίσματος μιας σειράς βασισμένη στην έννοια του ορίου.

Το 1822 παρουσίασε την εργασία του «Επί του αναπτύγματος των συναρτήσεων με σειρές» στην οποία έδινε μία σύντομη επισκόπηση των μεθόδων των σειρών στα μαθηματικά. Σε αυτήν παρατηρούσε ότι αρκετοί μαθηματικοί, όπως για παράδειγμα ο Lagrange, υπέθεταν ότι η συνάρτηση μπορούσε να χαρακτηριστεί πλήρως από την αντίστοιχη άπειρη σειρά της. Αυτό όμως δεν ήταν αληθές και έδωσε ένα αντιπαράδειγμα με τη συνάρτηση $e^{-\frac{1}{x^2}}$, τονίζοντας ότι η σειρά Maclaurin αυτής αποτελείτο από μία άπειρη σειρά μηδενικών συναρτήσεων, παρά το γεγονός ότι η συνάρτηση είναι μη μηδενική. Το συμπέρασμά του ήταν, πως το παράδειγμα αυτό δεν ήταν λόγος ν' απορρίψει κανείς τη μέθοδο των σειρών, αλλά έπρεπε να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στη σύγκλιση τους και μετά από αυστηρή έρευνα να αποφαίνεται αν μια σειρά παριστάνει ή όχι ακριβώς μία συνάρτηση. (Γιαννακούλιας, 2007)

6.4 Το έργο του Cauchy

Τι ώθησε όμως τον Cauchy να προβεί σε μια τόσο βασική απόκλιση από την καθιερωμένη πρακτική; Μπορούμε να παραθέσουμε μερικούς λόγους σύμφωνα με τον Kitcher:

α) Το 1784 ο Lagrange παρουσίασε στην Ακαδημία του Βερολίνου τη θεμελίωση του λογισμού σαν ένα εξαιρετικό πρόβλημα. Οι διαλέξεις του για τον λογισμό στην École Polytechnique εκδόθηκαν σε δύο σπουδαία βιβλία το 1797 και 1799-1801. Αυτές οι εργασίες του Lagrange είχαν αντίκτυπο και στον Bolzano και στον Cauchy. Οι μέθοδοι του Lagrange και του Cauchy ωστόσο ήταν διαμετρικά αντίθετες. Όπως το έθετε ο Lagrange τα βιβλία του περιείχαν «τα βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού χωρίς τη χρήση του απειροστού ή των ποσοτήτων που τείνουν στο μηδέν, ή των ορίων και των διαφορικών και οδήγησαν στην ομορφιά της αλγεβρικής ανάλυσης των πεπερασμένων ποσοτήτων». Έτσι η θεμελίωση του Lagrange, όπως είδαμε, για το λογισμό βασίστηκε στην αναγωγή του στην άλγεβρα, γιατί «ήθελε να κερδίσει ο λογισμός τη βεβαιότητα, την οποία πίστευε ότι είχε η άλγεβρα», ενώ ο σκοπός του Cauchy από την άλλη πλευρά, ήταν να εξαφανίσει την άλγεβρα ως βάση του λογισμού και έτσι να αποκηρύξει την πρακτική του $18^{ου}$ αιώνα.

β) Ο Fourier κατέπληξε τη μαθηματική κοινότητα των πρώτων χρόνων του $19^{ου}$ αιώνα με την εργασία του πάνω σ' αυτό που έγινε γνωστό ως σειρές Fourier. Ο Fourier ισχυρίστηκε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(-1, 1)$ μπορεί να παρασταθεί σ' αυτό το διάστημα με μια σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων :

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\ \sigma\upsilon\nu\frac{n\pi x}{l}\ +\ \beta_n\ \eta\mu\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Όπου α_n , β_n δίνονται από :

$$\alpha_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\ f(t)\,\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi t}{l}\ dt\quad ,\quad \beta_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\ f(t)\ \eta\mu\frac{n\pi t}{l}\ dt\qquad .$$

Ο Euler και ο Lagrange γνώριζαν ότι κάποιες συναρτήσεις έχουν τέτοιες αναπαραστάσεις. Η «αρχή της συνέχειας» των μαθηματικών του $18^{ου}$ αιώνα και του πρώιμου $19^{ου}$ αιώνα πρότεινε ότι το παραπάνω δεν μπορούσε να είναι αληθινό για όλες τις συναρτήσεις, δεδομένου ότι το ημίτονο και το συνημίτονο είναι συνεχείς και περιοδικές συναρτήσεις, το ίδιο θα έπρεπε να ισχύει και για το άθροισμα τέτοιων όρων. Για να αναιρέσει κάποιος τον ισχυρισμό του Fourier χρειαζόταν, αλλά έλειπαν, καθαρές ιδέες της συνέχειας, σύγκλισης και του ολοκληρώματος. Ο Cauchy ανταποκρίθηκε στην πρόκληση να ξεκαθαρίσει το νόημα των βασικών ιδεών, διότι για να επεξεργαστεί κανείς το ζήτημα αν το άθροισμα μιας άπειρης σειράς συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχές χρειάζεται και μια ερμηνεία του «απείρου αθροίσματος» και μια ερμηνεία της «συνεχούς συνάρτησης».

γ) Κοντά στο τέλος του $18^{ου}$ αιώνα μια κορυφαία κοινωνική αλλαγή συνέβη μέσα στην κοινότητα των μαθηματικών. Ενώ στο παρελθόν οι μαθηματικοί συχνά βρισκόντουσαν σε βασιλικές αυλές, οι περισσότεροι μαθηματικοί από τη γαλλική επανάσταση και μετά αρχίζουν να διδάσκουν. Ο Cauchy ήταν καθηγητής στην École Polytechnique, στο Παρίσι. Ήταν σύνηθες σ' αυτό το ίδρυμα ο καθηγητής που δίδασκε ύλη που δεν βρισκόταν στα συνηθισμένα βιβλία να γράφει σημειώσεις για τους φοιτητές πάνω στο θέμα των διαλέξεών του. Το αποτέλεσμα , στην περίπτωση του Cauchy, ήταν το έργο του : «Cours d' Analyse» και δύο επακόλουθες εργασίες. Αυτό ήταν ένας παράγοντας που συνεισέφερε στην προσεκτική ανάλυση από τον Cauchy των βασικών ιδεών που αποτελούν τη βάση του λογισμού.

Το έργο του Cauchy εγκαθίδρυσε ένα νέο τρόπο να δει κανείς τις έννοιες του λογισμού. Το αντικείμενο μετατράπηκε τώρα σ' ένα σύνολο δυνατών μεθόδων και χρήσιμων αποτελεσμάτων, σε μια μαθηματική πειθαρχία, βασισμένη σε καθαρούς ορισμούς και αυστηρές αποδείξεις. Οι απόψεις του ήταν λιγότερο διαισθητικές απ' ότι οι παλαιότερες, αλλά αυτές εφοδίασαν ένα νέο σύνολο από ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.

Ο ορισμός του ορίου που έδωσε και η επεξεργασία της συνδεδεμένης μεθόδου απόδειξης με ανισότητες, είναι η βάση για τις σύγχρονες θεωρίες της συνέχειας, σύγκλισης, παραγώγου και ολοκληρώματος.

Επιπλέον η αυστηροποίηση του λογισμού από τον Cauchy ήταν κάτι περισσότερο από το άθροισμα όλων των επιμέρους χωριστών μερών του. Δεν ήταν απλά ότι ο Cauchy έδωσε τους διάφορους ορισμούς, αλλά απέδειξε υπάρξεις θεωρημάτων και παρουσίασε την πρώτη λογική αποδεκτή απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού. Αυτός κατάφερε όλα αυτά τα πράγματα να τα βάλει μαζί σ' ένα λογικά συνδεδεμένο σύστημα ορισμών, θεωρημάτων και αποδείξεων. Με μια πολύ ενδιαφέρουσα λογική έννοια συνέδεσε μαζί τα αρχαία με τα μοντέρνα μαθηματικά.

« Οι νέες προτάσεις του Cauchy για μεγαλύτερη αυστηρότητα στον Απειροστικό Λογισμό δημιούργησαν τα δικά τους προβλήματα και δελέασαν μια νέα γενιά μαθηματικών ν' ασχοληθούν με τη λύση τους. Τα δύο πιο θεμελιώδη προβλήματα, για τους διαδόχους του Cauchy, σε σχέση με την άποψή του για το λογισμό ήταν:

α) Ο λεκτικός ορισμός των εννοιών του ορίου και της συνέχειας και η συχνή χρήση της γλώσσας των απειροστών.

β) Η διαισθητική επίκληση της γεωμετρίας για την απόδειξη της ύπαρξης των διαφόρων ορίων». (Γιαννακούλιας, 2007)

Οι ορισμοί του Cauchy δίνουν στην αντίληψη της συνέχειας μια διαισθητική ιδέα.

Αυτές οι αδυναμίες ήταν πηγή δύο πολύ σημαντικών λαθών. Ο Cauchy απέτυχε να ξεχωρίσει τη συνέχεια σε ένα σημείο με την ομοιόμορφη συνέχεια μιας συνάρτησης, και την κατά σημείο σύγκλιση με την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας άπειρης σειράς συναρτήσεων. Έτσι ο Cauchy «απέδειξε» ότι η συγκλίνουσα σειρά συνεχών συναρτήσεων είναι μία συνεχής συνάρτηση. Στη απόδειξη που έκανε χρησιμοποιούνται απειροστά. Θέτει $s_n(x)=\sum_{i=0}^{n}u_i(x)$, $r_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)$, $s(x)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x)$ και υποθέτει για όλες τις τιμές του x, το όριο $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N}u_i(x)$ υπάρχει. Εφόσον οι $u_i(x)$ είναι συνεχείς απειροστές αυξήσεις στο x, θα δώσουν απειροστές αυξήσεις σε κάθε $u_i(x)$ και επομένως στα $s_n(x)$. Αφού η σειρά $\sum u_i(x)$ είναι συγκλίνουσα, το r_n είναι απειροστό για μεγάλα n. Το άθροισμα δύο απειροστών είναι απειροστό. Άρα απειροστές αυξήσεις στο x παράγουν απειροστή αύξηση στο $s_n(x)+r_n(x)$, δηλαδή στο $s(x)$. Επομένως $s(x)$ είναι συνεχής.

Φυσικά το πιο πάνω αποτέλεσμα είναι λάθος. Αυτό πρώτα αποδείχτηκε το 1826 από τον Abel, ο οποίος έδειξε ότι η σειρά : $\eta\mu x - \frac{\eta\mu 2x}{2} + \frac{\eta\mu 3x}{3} - \ldots$ συγκλίνει σε μία συνάρτηση ασυνεχή στο $x = (2n+1)\pi$ για όλους τους ακεραίους n. Ωστόσο, πέρασαν άλλα είκοσι χρόνια για να καθοριστεί που έκανε λάθος ο Cauchy. Εμφανίστηκαν και άλλα αντιπαραδείγματα σε αληθοφανείς και ευρέως διαδεδομένες ιδέες κατά τη διάρκεια του μισού αιώνα που ακολούθησε την έκδοση του έργου του Cauchy. Μεταξύ των πλέον απροσδόκητων παραδειγμάτων ήταν το παράδειγμα του Weierstrass μιας συνεχούς συνάρτησης και πουθενά διαφορίσιμης, της:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \,\sigma\upsilon\nu\left(\alpha^n \pi x\right) ,$$

όπου α περιττός ακέραιος, β πραγματικός αριθμός στο διάστημα $(0,1)$ και $\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Ο Cauchy και οι σύγχρονοί του πίστευαν και «αποδείκνυαν» ότι μία συνεχή συνάρτηση είναι και διαφορίσιμη εκτός πιθανόν από μεμονωμένα σημεία.

Δεδομένου ότι οι ορισμοί του Cauchy για τις θεμελιώδεις έννοιες του λογισμού δόθηκαν με όρους ορίων, ήταν πολύ σημαντικές οι αποδείξεις ύπαρξης των ορίων διαφόρων ακολουθιών και συναρτήσεων. Έτσι οι λύσεις του Cauchy στο πρόβλημα του 18^{ου} αιώνα, της έλλειψης αυστηρότητας, δημιούργησαν νέα προβλήματα.

Έχοντας τυποποιήσει τις βασικές έννοιες του λογισμού αλγεβρικά, ο Cauchy τώρα κατέφυγε σε διαισθητικά, γεωμετρικά επιχειρήματα για ν' αποδείξει μερικά θεμελιώδη αποτελέσματα της ανάλυσης. Για παράδειγμα, ισχυρίστηκε ότι: «Μια αξιοπρόσεκτη ιδιότητα συνεχών συναρτήσεων μιας μεταβλητής είναι να μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά με ευθείες γραμμές ή συνεχείς καμπύλες» και χρησιμοποίησε αυτή την «αξιοπρόσεκτη ιδιότητα» των συνεχών συναρτήσεων (η οποία, με τις σημερινές αντιλήψεις για τις συναρτήσεις και τη συνέχεια, είναι φυσικά, λάθος, όπως απέδειξε αργότερα ο Weierstrass με το αντιπαράδειγμά του) για να δώσει μία (αναγκαστικά διαισθητική) γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής. Άλλα (σωστά) αποτελέσματα που δέχτηκε ο Cauchy με τη διαίσθηση είναι πως μια αύξουσα, άνω φραγμένη ακολουθία έχει όριο, και ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει. (Γιαννακούλιας, 2007)

Μετά τον Cauchy ο Απειροστικός Λογισμός αντιμετωπίστηκε διαφορετικά. Εθεωρείτο πια ως ένα αντικείμενο, με καλούς ορισμούς και θεωρήματα (οι αποδείξεις των οποίων στηρίζονταν στους ορισμούς) και όχι ως ένα σύνολο ισχυρών μεθόδων. Η αυστηρότητα του Cauchy εδραίωσε τα προγενέστερα συμπεράσματα σε ένα σταθερό θεμέλιο, και έδωσε ένα πλαίσιο για πάρα πολλά νέα συμπεράσματα, μερικά από τα οποία δεν μπορούσαν καν να διατυπωθούν πριν από το έργο του. (Grabiner, 1981)

6.5 Τα επιστημολογικά εμπόδια της ανάπτυξης της έννοιας του ορίου.

«Ο απειροστικός λογισμός κατά τον 17ο και 18ο αιώνα στηρίχθηκε στην έννοια της απειροστής ποσότητας. Η μέθοδος των απειροστών βοήθησε στην επίτευξη σημαντικών αποτελεσμάτων αλλά και στάθηκε αιτία δημιουργίας παρερμηνειών που με τη σειρά τους εμπόδισαν την ανάπτυξη της θεωρίας των ορίων. Τον 19ο αιώνα άρχισε μία προσπάθεια για αυστηρή θεμελίωση του λογισμού με τη βοήθεια της έννοιας του ορίου. Με τη βοήθεια του ορίου αναπτύχθηκαν και οι άλλες θεμελιώδεις έννοιες της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Στο πρώτο μισό του 19ου αιώνα η αντίληψη που υπήρχε για το όριο χαρακτηρίζεται κατά τον Cajori από τα ακόλουθα μειονεκτήματα:

α) Τα σταθερά απειροστά εξακολουθούν να εμφανίζονται συχνά στην επεξεργασία του ορίου. Ακόμη και στον ορισμό του ορίου που έδωσε ο Cauchy πίσω από κάποιες φράσεις υποκρύπτονται τα απειροστά.

β) Η εμφάνιση του πηλίκου $\frac{0}{0}$ στην έννοια της παραγώγου υπήρξε το πιο δύσκολο σύμβολο, η πιο σκοτεινή έννοια, και αποτέλεσε την κύρια αιτία της μη κατανόησης του απειροστικού λογισμού. Ο συμβολισμός $\frac{dy}{dx}$ του Leibniz για την παράγωγο συνετέλεσε στην ενίσχυση του μυστηρίου.

γ) Η δυσκολία που υπήρχε στις αποδείξεις ύπαρξης των ορίων.

δ) Η έλλειψη ενός συστήματος αριθμών, αυστηρά θεμελιωμένου, ώστε η μεταβλητή να παίρνει τιμές από αυτό.

ε) Η παραδοχή από πολλούς συγγραφείς της «αρχής της συνέχειας», σύμφωνα με την οποία «ό,τι ισχύει μέχρι το όριο ισχύει και στο όριο». Χαρακτηριστικό παράδειγμα της εσφαλμένης αυτής αρχής ήταν η παραδοχή του Cauchy, ότι το κατά σημείο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

στ) Η ασάφεια που υπήρχε για την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης, μια έννοια που έπαιξε σημαντικό ρόλο στη θεωρία των ορίων.

ζ) Οι αντικρουόμενες απόψεις γύρω από το ερώτημα αν μια μεταβλητή μπορεί να φτάσει το όριό της.

Τον 18ο αιώνα το τελευταίο ερώτημα απασχόλησε αρκετούς μαθηματικούς και συζητήθηκε με αντιπαράθεση των Robins και Jurin όπως είδαμε. Ο D’ Alembert δήλωσε ότι δεν ήταν δυνατόν να φτάσουμε το όριο. Το ίδιο θέμα έγινε επίκεντρο συζητήσεων και το 19ο αιώνα. Το 1817 ο Bolzano σε εργασία του ασχολήθηκε με τα όρια συνεχών συναρτήσεων που έπαιρναν ως τιμή το όριό τους. Ο Cauchy δεν έβαλε κανένα περιορισμό για το αν οι μεταβλητές φτάνουν ή όχι το όριο.

Τα μειονεκτήματα της θεωρίας των ορίων που αναφέρθηκαν παραπάνω στάθηκαν αιτία ώστε πολλοί ικανοί μαθηματικοί του 19ου αιώνα να χρησιμοποιήσουν τα σταθερά απειροστά του Leibniz, λόγω της ευκολίας στο χειρισμό τους. Χαρακτηριστικές είναι οι φράσεις του Benjamin Pierce του μεγαλύτερου, πριν το 1880, θεωρητικού μαθηματικού των ΗΠΑ, φανατικού υποστηρικτή των σταθερών απειροστών: «Με όλη την αυστηρότητα, η αρχαία γεωμετρία, δεν μπορεί να οδηγήσει σε αποτέλεσμα περισσότερο ακριβές, περισσότερο βάσιμο, απ' ότι αυτό της θεωρίας των απειροστών, και αμφιβάλλω αν οποιοδήποτε υγιές μυαλό, ικανό για μαθηματικές έρευνες, εμπιστευτεί τη γεωμετρία περισσότερο από τη θεωρία των απειροστών». Όπως ήταν φυσικό έπρεπε να ξεκαθαρίσει το ομιχλώδες τοπίο γύρω από την έννοια του ορίου και αυτό έγινε το 1870 με την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών». (Γιαννακούλιας, 2007)

6.6 Η αριθμητικοποίηση του απειροστικού λογισμού

Ο λογισμός των Newton-Leibniz ήταν ένας λογισμός γεωμετρικών μεταβλητών ποσοτήτων, με συνέπεια το μεγαλύτερο μέρος του να είναι εξαρτημένο από διαισθητικές γεωμετρικές έννοιες. Οι Euler, Lagrange και Cauchy προσπάθησαν να θεμελιώσουν αυστηρά τον λογισμό τοποθετώντας στη θέση της διαίσθησης τις αρχές της αριθμητικής. Έτσι στα βιβλία τους, που αφορούσαν τον απειροστικό λογισμό σπάνια εμφανίζονται γεωμετρικά διαγράμματα.(Edwards, 1979) Όμως οι πραγματικοί αριθμοί είχαν εισαχθεί γεωμετρικά χωρίς οποιαδήποτε σαφή δήλωση των ιδιοτήτων τους. Έτσι οι μαθηματικοί ήταν αναγκασμένοι κατά την απόδειξη των θεωρημάτων του απειροστικού λογισμού, να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικές αναπαραστάσεις, εφόσον δεν είχαν κάποια αριθμητική αρχή στην οποία να στηριχθούν. Από τον 17ο αιώνα οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν τους άρρητους δίχως διάκριση από τους ρητούς, θεωρώντας ότι κάθε άρρητος μπορούσε να προσεγγιστεί, όσο κοντά επιθυμούσαν από ρητούς. Κατά τον 19ο αιώνα οι μαθηματικοί έγιναν πιο προσεκτικοί με τους παραδοσιακούς συλλογισμούς που είχε χρησιμοποιήσει ο Cauchy και δημιουργήθηκε μία τάση για την αριθμητικοποίηση του λογισμού. Έγινε δηλαδή προσπάθεια να ελευθερωθεί ο λογισμός από γεωμετρικές αναλογίες, που κάποτε φαίνονταν χρήσιμες, αλλά πολλές φορές είχαν αποδειχθεί παραπλανητικές. Όπως έχουμε δει ο Bolzano είχε προβλέψει πως αν συνεχιζόταν η πρακτική του 18ου αιώνα, της χρησιμοποίησης της γεωμετρίας στον απειροστικό λογισμό, δεν θα ήταν δυνατή η πλήρης κατανόηση των παραγομένων αποτελεσμάτων. Από τους αναλύστες του 18ου αιώνα είχε διαπιστωθεί ότι το μείγμα της αλγεβρικής διατύπωσης και της γεωμετρικής αιτιολόγησης που χρησιμοποιούσε ο Cauchy, δεν παρείχε πλήρη κατανόηση των σημαντικότερων αποτελεσμάτων της θεωρίας συναρτήσεων, και ότι οι αποτυχίες της κατανόησης παρουσιάστηκαν στα αναλυτικά λάθη. Από διαφορετική διαδρομή, οι Dedekind και Weierstrass έθεσαν τον ίδιο στόχο που είχε υιοθετήσει και ο Bolzano. Η οξυδερκής αντίληψη των Wilhelm Richard Dedekind και Karl Weierstrass αναγνώρισε την αναγκαιότητα ενός αυστηρού αριθμητικού ορισμού των πραγματικών αριθμών, για τη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού. Σημαντικό ρόλο για αυτό έπαιξε και η αναπαράσταση των συναρτήσεων με άπειρες σειρές. Όλα τα κριτήρια σύγκλισης σειρών που προτάθηκαν απαιτούσαν μια ξεκάθαρη αντίληψη για τη σύγκλιση απείρων ακολουθιών αριθμών, και αυτό πρόβαλλε επιτακτικά την αναγκαιότητα ορισμού του συνόλου των πραγματικών αριθμών. (Γιαννακούλιας, 2007)

Όπου ο Bolzano είχε υποστηρίξει μια αλγεβρική εκδοχή της ανάλυσης, βλέποντας την άλγεβρα ως μια γενική επιστήμη ποσοτήτων, οι Dedekind και Weierstrass είδαν στην **έννοια**

της ποσότητας, το εμπόδιο που είχε αναγκάσει τον Cauchy να κάνει την παράκαμψη προς τη γεωμετρία. (Kitcher, 1984)

Ο Dedekind σκόπευσε να επιτύχει την ανακατασκευή του διαισθητικού συλλογισμού στον οποίο βασίστηκε ο Cauchy δηλαδή θα αναλύσει την έννοια της συνέχειας των πραγματικών αριθμών έτσι ώστε αυτή να εκφραστεί αριθμητικά, και κατά συνέπεια να αποφύγει την παράκαμψη στη γεωμετρία. Το πρόβλημα τότε, είναι να διατυπωθεί μια «αρχή» για τη συνέχεια, η οποία θα δηλώνει σε αριθμητική γλώσσα εκείνη την «έλλειψη χασμάτων» (πυκνότητα) των πραγματικών αριθμών που μπορεί τόσο εύκολα να αναπαρασταθεί γεωμετρικά και μπορεί συνεπώς να προκαλέσει την πεποίθηση για την ύπαρξη των ορίων. Ο Dedekind λύνει το πρόβλημα αυτό προτείνοντας ότι η «ουσία της συνέχειας» της ευθείας βρίσκεται στην αρχή ότι «Αν όλα τα σημεία της ευθείας εμπίπτουν σε δύο κλάσεις τέτοιες ώστε κάθε σημείο της πρώτης κλάσης να βρίσκεται αριστερά κάθε σημείου της δεύτερης κλάσης, τότε υπάρχει ένα και μόνο σημείο που παράγει αυτή τη διαίρεση όλων των σημείων σε δύο κλάσεις, αυτό το χωρισμό της ευθείας σε δύο μέρη». Αυτή η αρχή παρέχει μια μετάβαση από τη διαισθητική γεωμετρική αντίληψη της συνέχειας σε μια διατύπωση της συνέχειας των πραγματικών αριθμών από την οποία η γεωμετρική γλώσσα έχει εξοβελιστεί. (Γιαννακούλιας, 2007)

Η άποψη του Dedekind για την επικρατούσα τότε κατάσταση διατυπώνεται στην μονογραφία του: «Steigkeit und irrational zahlen» (Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί). (Ρουσόπουλος, 1991)

«Ως καθηγητής του Πολυτεχνείου στη Ζυρίχη, για πρώτη φορά βρέθηκα υποχρεωμένος να δώσω διαλέξεις πάνω στα στοιχεία του Διαφορικού Λογισμού και ένοιωσα, περισσότερο έντονα από ποτέ, την έλλειψη μιας πραγματικά επιστημονικής θεμελίωσης για την αριθμητική. Συζητώντας την ιδέα της προσέγγισης ενός μεταβλητού μεγέθους σε μια σταθερή οριακή τιμή και ιδίως στην προσπάθεια απόδειξης του θεωρήματος ότι κάθε μέγεθος που αυξάνεται συνεχώς, αλλά όχι πέραν κάποιου ορίου πρέπει κατ' ανάγκη να προσεγγίζει μια οριακή τιμή, βρήκα διέξοδο σε γεωμετρικές αποδείξεις. Ακόμη και τώρα θεωρώ υπερβολικά χρήσιμη, μια τέτοια προσφυγή στη γεωμετρική εποπτεία, σε μια πρώτη παρουσίαση του Διαφορικού Λογισμού, από διδακτική σκοπιά, και πραγματικά απαραίτητη, εάν δεν θέλει κανείς να χάσει πολύ χρόνο. Αλλά κανείς δεν θα αρνηθεί, ότι αυτός ο τρόπος εισαγωγής στον Διαφορικό Λογισμό είναι μη επιστημονικός. Όσο για μένα, αυτό το αίσθημα του ανικανοποίητου ήταν τόσο ισχυρό, που πήρα τη σταθερή απόφαση να συνεχίσω τη σκέψη πάνω στο θέμα, μέχρις ότου βρω ένα καθαρά αριθμητικό και τέλεια αυστηρό θεμέλιο για τις αρχές της Απειροστικής Ανάλυσης. Γιατί ενώ τόσο συχνά δηλώνεται ότι ο Διαφορικός Λογισμός ασχολείται με συνεχή μεγέθη, δεν έχει ακόμα πουθενά δοθεί η εξήγηση αυτής της συνέχειας. Ακόμη και οι πιο αυστηρές παρουσιάσεις του Διαφορικού Λογισμού δεν βασίζουν τις αποδείξεις τους στη συνέχεια, αλλά περισσότερο ή λιγότερο συνειδητά, είτε προσφεύγουν σε γεωμετρικές έννοιες, είτε σε έννοιες που συνδέονται με τη γεωμετρία, είτε εξαρτώνται από θεωρήματα που δεν αποδεικνύονται με καθαρά αριθμητικό τρόπο».

Η νέα κατάσταση εκφράζεται και στην επιστολή του Weierstrass προς τον Schwarz, το 1875, στην οποία σχολιάζει μια απόδειξη που του είχε στείλει ο πρώην μαθητής του

«Όσο περισσότερο σκέπτομαι τις αρχές της θεωρίας συναρτήσεων-και το κάνω αυτό ακατάπαυστα-τόσο σταθερότερη γίνεται η πεποίθησή μου ότι αυτή πρέπει να δομηθεί στη βάση των αλγεβρικών αληθειών, και ότι, για αυτό το λόγο, δεν είναι σωστό να υποστηριχθεί το «υπερβατικό»-για να εκφραστώ εν συντομία-ως θεμελίωση για τα απλούστερα και πιο βασικά αλγεβρικά θεωρήματα, όσο ελκυστικοί και αν φαίνονται στην πρώτη ματιά εκείνοι οι τρόποι σκέψης, μέσω των οποίων ο Riemann έχει καταδείξει τόσο πολλές από τις σημαντικότερες ιδιότητες των αλγεβρικών συναρτήσεων». (Kitcher, 1984)

Οι Dedekind και Weierstrass υποστήριξαν ότι τα θεωρήματα του απειροστικού λογισμού ήταν θεωρήματα που αφορούσαν αριθμούς και υπαινίχθηκαν ότι ο λογισμός έπρεπε να γίνεται **αριθμητικά**. Κεντρικός στόχος του αναλύστα που επιθυμούσε να αποδείξει τα θεωρήματα ύπαρξης ορίων θα ήταν ένας χαρακτηρισμός των πραγματικών αριθμών. Έτσι θα επέτρεπε σε κάποιον να δείξει, στρεφόμενος στις αρχές της αριθμητικής, ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι ικανοποιούν συνθήκες που καθορίζονται στα θεωρήματα του Cauchy.

Ο Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) αν και δεν έδωσε μια συστηματική παρουσίαση των αρχών του απειροστικού λογισμού, ώστε να μπορεί να συγκριθεί με το «Cours d' Analyse» και το «Resume» του Cauchy, ωστόσο μέσα από τη μελέτη των εργασιών του διαφαίνεται ο «νέος λογισμός», η «νέα ανάλυση».

Στα 1854 ο Weierstrass άρχισε να παραδίδει μαθήματα στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Δυστυχώς ουδέποτε δημοσίευσε ή εξέδωσε τις παραδόσεις του. Τις περισσότερες φορές έφθασαν σε μας από σημειώσεις μαθητών του. Ο Eduard Heine, που υπήρξε μαθητής του, γράφει σχετικά: «Αρχές του κυρίου Weierstrass είναι να εκθέτει τις απόψεις του ευθέως στα μαθήματά του και έμμεσα μέσω συνομιλιών και σε αντίγραφα χειρογράφων των μαθημάτων του. Ωστόσο, οι εκδόσεις του συγγραφέα ουδέποτε δημοσιεύτηκαν κάτω από την επίβλεψή του και αυτό προκαλεί ζημιά στην ενότητα». Όμως η κύρια ιδέα της ε-δ μεθόδου διαμορφώθηκε στα μαθήματά του στο Βερολίνο.

Σύμφωνα με τον A.P. Yushkevich «οι σύγχρονες εκθέσεις του διαφορικού λογισμού με την ε-δ τεχνική του, διατυπώσεις, και αποδείξεις, αναφέρονται στην εποχή των μαθημάτων του Weierstrass στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, ερμηνείες των οποίων δημοσιεύτηκαν από τους φοιτητές του». (Sinkevich, 2015)

Το πιο πρώιμο γνωστό κείμενο του Weierstrass όπου αναφέρεται η ε-δ τεχνική είναι οι σημειώσεις μαθημάτων πάνω στο διαφορικό λογισμό που έγιναν την καλοκαιρινή περίοδο του 1861 στο Königlichen Gewerbeinstitut στο Βερολίνο. Οι σημειώσεις των μαθημάτων του γράφτηκαν, από τον φοιτητή του Weierstrass, H.A. Schwarz και φυλάσσονται τώρα στο Instituto Mittag-Leffler στη Σουηδία. Ο Schwarz ήταν 18 ετών τότε, και έγραψε τις σημειώσεις αποκλειστικά για τον εαυτό του, και όχι για να δημοσιευτούν.

Οι σημειώσεις του Schwarz βρέθηκαν και δημοσιεύτηκαν από τον P. Durac. Σε αυτές τις σημειώσεις παρουσιάζεται για πρώτη φορά στην γλώσσα ε-δ (εψιλοντική) ο ορισμός της συνεχούς συνάρτησης:

«*Αν* $f(x)$ *είναι μια συνάρτηση του* x, *και το* x *είναι μια ορισμένη τιμή, τότε, σε μια μετατροπή του* x *σε* $x+h$, *η συνάρτηση θα αλλάξει και θα γίνει* $f(x+h)$. *Η διαφορά* $f(x+h)-f(x)$ *συνηθίζεται να καλείται μεταβολή που λαμβάνεται από τη συνάρτηση λόγω του γεγονότος ότι το επιχείρημα γίνεται από το* x *στο* $x+h$. Αν είναι δυνατό να ορίσουμε τέτοιο σύνορο (boundary) δ για το h, ώστε για όλες τις τιμές του h η απόλυτη τιμή του οποίου να είναι ακόμη μικρότερη του δ, η $f(x+h)-f(x)$ να γίνεται μικρότερη από κάθε αυθαίρετα μικρή τιμή του ε, τότε απειροελάχιστες αλλαγές της συνάρτησης λέμε ότι αντιστοιχούν σε απειροελάχιστες μεταβολές του ορίσματος (argument). Διότι μία τιμή λέμε ότι είναι ικανή να γίνει απείρως μικρή, αν η απόλυτη τιμή της μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε αυθαίρετα μικρή τιμή. Αν οποιαδήποτε συνάρτηση είναι τέτοια ώστε απειροελάχιστες μεταβολές της συνάρτησης να αντιστοιχούν σε απειροελάχιστες μεταβολές του ορίσματος, τότε λέμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής συνάρτηση του ορίσματος ή ότι αυτή συνεχώς μεταβάλλεται μαζί με το όρισμά της.» (Sinkevich, 2015)

Η αυστηρότητα χαρακτηρίζει όλα τα κείμενά του και οι τεχνικές του διακρίνονται από εκείνες που χρησιμοποίησαν οι προγενέστεροι μαθηματικοί. Μέσα από τις διαλέξεις που έγιναν στο Πανεπιστήμιο ανακαλύπτει κανείς το «στατικό» ορισμό για το όριο με ανισοτικές σχέσεις που περιείχαν τα ε, δ. Ο ορισμός αυτός σε σύγχρονη ορολογία περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο :

«$\lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \varepsilon>0\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \delta>0$, *ώστε για κάθε x του πεδίου ορισμού της f*

$\mu\varepsilon\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$ »

Με τον τρόπο αυτό ο Weierstrass απομάκρυνε τα απειροστά, τα οποία χρησιμοποιούσε ελεύθερα ο Cauchy, και οι πριν απ' αυτόν, για δύο περίπου αιώνες. Οι ακριβείς ε-δ διατυπώσεις, έδωσαν στον απειροστικό λογισμό τη λογική αυστηρότητα την οποία οι δημιουργοί του αναζητούσαν ολόκληρους αιώνες.

Το 1865 έκανε μια λεπτομερή κατασκευή των αρρήτων αριθμών ως άπειρα φραγμένα αθροίσματα ρητών αριθμών και το 1867 απέδειξε ότι κάθε άπειρο και φραγμένο σύνολο έχει σημείο συσσώρευσης . Το 1869 απέδειξε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση, ορίστηκε σε κλειστό φραγμένο διάστημα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή (κάτι που ήταν γνωστό για παραγωγίσιμες συναρτήσεις τον $17^{ο}$ αιώνα).

Το 1872 ο Heine στο έργο του «Die Elemente der Functionenlehre» έδωσε τον ορισμό συνεχούς συνάρτησης σ' ένα σημείο. Αυτή φαίνεται να είναι η πρώτη καταγεγραμμένη διατύπωση του ορισμού συνέχειας με τη χρήση του «ε» και του «n_0» (αντί του δ) που μοιάζει με το σύγχρονο ορισμό, παρότι δεν χρησιμοποιούνται ανισότητες, αλλά γίνεται λεκτικά. «Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στη συγκεκριμένη τιμή $x=X$ εάν για κάθε δοθείσα ποσότητα ε, οσοδήποτε μικρή, υπάρχει θετικός αριθμός n_0 με την ιδιότητα ότι για καμία θετική ποσότητα n που είναι μικρότερη από το n_0 η απόλυτη τιμή της $f\left(X \pm n\right) - f\left(X\right)$ δεν ξεπερνά την ε». (Katz, 2013)

Στις 18 Ιουλίου του 1872, στην Ακαδημία του Βερολίνου, ο Weierstrass, έκανε μία ανακοίνωση (την οποία δημοσίευσε το 1874) Αυτή αφορούσε ένα παράδειγμα μιας παντού συνεχούς συνάρτησης και πουθενά διαφορίσιμης, που έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη παράγραφο:

$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sigma\upsilon\nu\left(\alpha^n \pi x\right)$ όπου α περιττός, β σταθερά, $0 < \beta < 1$ και $\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2}$,

Με άλλα λόγια έδωσε παράδειγμα μιας συνάρτησης συνεχούς η οποία δεν είχε εφαπτομένη σε κανένα σημείο της. Το παράδειγμα αυτό προκάλεσε μεγάλο σοκ στους μαθηματικούς της εποχής του, και ήταν ένα σοβαρό χτύπημα στη χρησιμοποίηση της γεωμετρικής διαίσθησης στις αναλυτικές μελέτες.(Γιαννακούλιας, 2007)

Ο Heine το 1872 στο έργο του «Die Elemente der Functionenlehre», έδωσε τον ορισμό ορίου ακολουθίας αριθμών (δίχως να διευκρινίζει ότι πρόκειται για ακολουθία, αλλά για αριθμούς)

«αν για τους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots$ υπάρχει ένας αριθμός u με την ιδιότητα το $u - a_n$, να μειώνεται, καθώς το n αυξάνει, τότε λέμε ότι το u είναι όριο του a_n ».

Το 1872, ο Weierstrass σε συνεργασία με τον μαθητή του Eduard Heine (1821-1881) έδωσε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας: *«Μία συνάρτηση $f\left(x\right)$ καλείται ομοιόμορφα συνεχής από το $x = \alpha$ έως το $x = \beta$, αν για κάθε δοσμένη ποσότητα ε, οσοδήποτε μικρή, υπάρχει μία θετική ποσότητα n_0, τέτοια ώστε , για όλες τις θετικές τιμές n που είναι μικρότερες από το n_0, η διαφορά $f\left(x \pm n\right) - f\left(x\right)$ παραμένει μικρότερη από ε. Οποιαδήποτε τιμή και αν δώσει κανείς στο x, υποθέτοντας μόνο ότι x και $x \pm n$ ν' ανήκουν στο διάστημα από α έως β, το ίδιο n_0 αρκεί για να πραγματοποιεί την απαιτούμενη ιδιότητα».* Απέδειξε επίσης ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων.

Στα 1885 ο Αυστριακός μαθηματικός Otto Stolz (1842-1905) δημοσίευσε ένα βιβλίο με τίτλο «Lectures on general arithmetic according to a new point of view» στο οποίο εξέθεσε την ανάλυση του Weierstrauss ως μια συνέχεια των αρχών του Cauchy στην ε-δ γλώσσα.

Στα 1886 ο Weierstrauss δίδαξε τη θεωρία συναρτήσεων και χρησιμοποίησε την έννοια του limit point όταν όρισε τις συνεχείς και ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Την έννοια του limit point έδωσε ο Cantor σε εργασία του για τριγωνομετρικές σειρές, ενώ ο Ulisse Dini πρώτος χρησιμοποίησε την έννοια σε ένα κύκλο μαθημάτων του. (Sinkevich,, 2015).

Συμπεράσματα

Όσα εκθέσαμε προηγουμένως περιγράφονται περιληπτικά από τον καθηγητή Ε. Γιαννακούλια :

«Κατά την σύντομη ιστορική περιγραφή της εξέλιξης της έννοιας του ορίου έγινε φανερή η επίδραση και ο βασικός ρόλος της γεωμετρίας, τα αυστηρά θεμέλια της οποίας τέθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες. Κατά το Μεσαίωνα και την Αναγέννηση, η γεωμετρία διαδραμάτισε πρωταρχικό ρόλο και παρέμεινε το σταθερό κριτήριο αυστηρότητας. Τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα, με την ανακάλυψη και την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, η γεωμετρία μη μπορώντας πλέον να δικαιολογήσει πολλά από τα αποτελέσματα του νέου λογισμού, παραμερίστηκε και τη θέση της πήρε η άλγεβρα, αποτελώντας το σημαντικότερο εργαλείο του απειροστικού λογισμού. Οι D' Alembert, L' Huilier και Lacroix προετοίμασαν το έδαφος για τον Cauchy εκλαϊκεύοντας κατά κάποιον τρόπο στις εργασίες τους την έννοια του ορίου. Παρόλα αυτά, μέχρι τον Cauchy η έννοια του ορίου παραμένει ευρέως γεωμετρική. Ο Cauchy ανέπτυξε την έννοια του ορίου με μία σχεδόν αριθμητική πραγμάτευση, όπως υπήρχε ήδη και στη σκέψη του Bolzano. Οι ορισμοί που έδωσε σχετικά με την έννοια του ορίου στηρίχτηκαν στις έννοιες του αριθμού, της μεταβλητής και της συνάρτησης περισσότερο παρά στη διαισθητική προσέγγιση μέσα από την Γεωμετρία. Εισάγοντας την έννοια του ορίου υποστήριξε ότι οι άρρητοι μπορεί να θεωρηθούν όρια ορισμένων ακολουθιών ρητών. Αλλά έτσι ισχυριζόταν την a apriori ύπαρξη τέτοιων αριθμών, χωρίς να δίνει κάποιο επιχείρημα για το πώς ένας τέτοιος ισχυρισμός μπορούσε να δικαιολογηθεί. Το εμπόδιο αυτό ξεπεράστηκε στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα με τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τους Dedekind και Weierstrsass. Έτσι καθιέρωσαν την αριθμητική ως γλώσσα των αυστηρών μαθηματικών, παραμερίζοντας τόσο τη γεωμετρία όσο και την άλγεβρα. Με την εισαγωγή των ε-δ διατυπώσεων, έπαψαν να υπάρχουν ασαφείς εκφράσεις που συναντήσαμε στην ιστορική αυτή διαδρομή. Η θεμελιώδης έννοια του ορίου διατυπώθηκε πλέον με μεγάλη προσοχή και σαφήνεια, βασισμένη στους πραγματικούς αριθμούς και τις θεμελιώδεις πράξεις και σχέσεις που τους διέπουν».

Ο ορισμός του ορίου από τον Leibniz έως τον Weierstrass

Leibniz (1684): Για οποιαδήποτε προτεινόμενη συνεχή μετακίνηση ως κάποιο όριο είναι δυνατόν να διατυπωθεί μία γενική αιτιολόγηση η οποία να καλύπτει επίσης και το τελικό όριο. (Katz, 2013)

Newton (1687): Ο έσχατος λόγος φευγαλέων ποσοτήτων … [είναι] όρια προς τα οποία συγκλίνουν πάντοτε οι λόγοι ποσοτήτων που ελαττούνται απεριόριστα· και στα οποία πλησιάζουν περισσότερο από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, αλλά ουδέποτε τα υπερβαίνουν, ούτε μάλιστα εξισώνονται με αυτά, έως ότου οι ποσότητες μειωθούν στο infinitum. (Katz, 2013)

Maclaurin (1742): Ο λόγος του $2x+o$ προς το α μικραίνει συνεχώς όταν η o μικραίνει και είναι πάντοτε μεγαλύτερη από το λόγο του $2x$ προς το α ενόσω o είναι οποιαδήποτε πραγματική αύξηση, αλλά είναι προφανές ότι συνεχώς προσεγγίζει τον οριακό λόγο του $2x$ προς το α. (Katz, 2013)

D' Alembert (1754): Ο λόγος $\left[a:\ 2y+z\right]$ είναι πάντοτε μικρότερος από τον $a:2y$, αλλά όσο μικραίνει το z τόσο μεγαλύτερος γίνεται ο λόγος, και αφού μπορούμε να επιλέξουμε το z όσο μικρό θέλουμε, ο λόγος $a:2y+z$ μπορεί να προσεγγίσει τον λόγο $a:2y$ όσο θέλουμε. Συνεπώς, ο λόγος $a:2y$ είναι το όριο του λόγου $a:2y+z$. (Katz, 2013)

L' Huilier (1784): Αν δίνεται ένα μεταβλητό μέγεθος, πάντοτε μικρότερο ή μεγαλύτερο από ένα δοσμένο σταθερό μέγεθος, αλλά μπορεί να διαφέρει από το τελευταίο λιγότερο από οποιοδήποτε μέγεθος, οσοδήποτε μικρό, αυτό το σταθερό μέγεθος ονομάζεται όριο του μεταβλητού μεγέθους. (Γιαννακούλιας, 2007)

Lacroix (1806): Το όριο του λόγου $\frac{u_1-u}{h}$ … είναι η τιμή προς την οποία τείνει αυτός καθώς η ποσότητα h ελαττούται και την οποία [τιμή] μπορεί να προσεγγίσει οσοδήποτε κοντά θέλουμε. (Katz, 2013)

Cauchy (1821): Εάν οι διαδοχικές τιμές που δίνονται στην ίδια μεταβλητή προσεγγίζουν αόριστα μια σταθερή τιμή, έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτήν όσο λίγο θέλουμε, τότε η σταθερή αυτή τιμή λέγεται όριο των άλλων. (Katz, 2013)

Weierstrass:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\alpha \Leftrightarrow \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \varepsilon>0\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \delta>0,\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\ \tau o\upsilon\ \pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\upsilon\ o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\ \tau\eta\varsigma\ f$$

$$\mu\varepsilon\ \ 0<\left|x-x_0\right|<\delta\ \Rightarrow \left|f\left(x\right)-\alpha\right|<\varepsilon$$

(Γιαννακούλιας, 2007)

Βιβλιογραφία

1.Baron, Margaret (1969). The Origins of the Infinitesimal Calculus. Oxford: Pergamon Press.

2.Bell, Eric (1995). Οι μαθηματικοί. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

3.Bos, H.J.M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. Ανακτήθηκε 1 Ιουνίου 2017, από ιστοσελίδα www.tau.ac.il/~corry/teaching/toldot/download/Bos1974.pdf

4.Boyer, Carl (1949). The history of the Calculus and its Conceptual Development. New York: Dover publications.

5.Cajori, Florian (1923). Grafting of the theory of limits on the calculus of Leibniz The American Mathematical Monthly. Ανακτήθηκε 1 Ιουνίου 2017, από ιστοσελίδα http://www.jstor.org/stable/2299086

6.Cauchy, Augustin-Louis (1821). Cours d’ analyse de l’ École Royale Polytechnique. 1er Partie : Analyse Algébrique. Paris : Chez Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi. Ανατύπωση : Éditions Jaques Gabay, 1989.

7.Γιαννακούλιας, Ευστάθιος (2007). Απειροστικός Λογισμός Η Ιστορική του Εξέλιξη από τον 5ο π.Χ. έως και τον 19ο αιώνα. Αθήνα: Συμμετρία.

8.D’ Alembert, Jean Le Rond (1754- 1772). Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonne des Sciences, des Arts et des Métiers, Tome Neuvieme, A. Neufchastel, Chez Samuel Faulche & Compagnie, Librairies & Imprimeurs.

9.Edwards, Charles Henry (1979). The Historical Development of the Calculus. New York: Springer-Verlag.

10.Εξαρχάκος, Θεοδωρος (1993). Εισαγωγή στα Μαθηματικά. Αθήνα.

11.Eves, Howard (1990). Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών. Αθήνα: Τροχαλία.

12.Grabiner, Judith (1981) The origins of Cauchy’s rigorous calculus. Cambridge: MIT press.

13.Grattan-Guinness, I. (1970) Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early 19th Century. Springer Link. Ανακτήθηκε 1 Ιουνίου 2017, από ιστοσελίδα hhttps://link.springer.com/article/10.1007/BF00329818

14.Jourdain, P. (1905). «Rein Analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey Werthen, die ein Entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege, von Bernhard Bolzano». Ostwalds Klassiker der Exacten Wissenschaften, Nr. 153. Leipzig: Wilhelm Engelmann.

15.Katz, Victor (2013). Ιστορία των Μαθηματικών. Μια εισαγωγή. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

16.Kitcher, Philip (1984) The nature of mathematical knowledge. New York: Oxford University Press.

17.Kline, Morris (1972). Mathematical thought from ancient to modern times. New York: Oxford University Press.

18.Lagrange, J. L. (1797). «Théorie des Fonctions Analytiques, contenant les principles du calcul différentiel, dégagés de toute considération d' infiniment petits ou d' évanouissants, de limits ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies». Journal de l' école Polytechnique, publie par le conseil d' instruction de set établissement. Paris : Neuvième Cahier, Tome III.

19.Loria, Gino (1971). Ιστορία των Μαθηματικών. Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

20.Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1999). Απειροστικός Λογισμός. Αθήνα: Συμμετρία.

21.Ρουσόπουλος, Γιώργος (1991). Επιστημολογία των Μαθηματικών. Αθήνα : Gutenberg.

22.Sinkevich, G.I. (2015). On the history of epsilontics. Cornell University Library. Ανακτήθηκε 26 Μαΐου 2017, από ιστοσελίδα http://arxiv.org/abs/1502.06942

23.Σταμάτης, Ευάγγελος (1953). Ευκλείδου Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών τόμος ΙΙ. Αθήνα:

Οργανισμός Εκδόσεων Σχολικών Βιβλίων.

24. Stedall, Jacqueline A. (Translation & Introduction) (2004). The Arithmetic of Infinitesimals – John Wallis 1656. New York: Springer-Verlag.
25. Struik, Dirk (1982). Ιστορία των Μαθηματικών. Αθήνα: Ι.Ζαχαρόπουλος.
26. Suzuki, Jeff (2002). A history of Mathematics. Prentice Hall.
27. Toeplitz, Otto (1963). The calculus: a genetic approach. Chicago: University of Chicago Press.
28. Van Der Waerden, Bartel (2010). Η Αφύπνιση της Επιστήμης. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.