Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Φυσικής

<u>Πτυχιακή Εργασία</u>

Κοσμολογικό Μοντέλο Bianchi τύπου V σε συνδυασμό με Άμαζο Βαθμωτό Πεδίο

Βασίλειος Βατέλλης

ΑΜ: 1110201100015

<u>Επιβλέπων</u>: Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης

Αθήνα 2017

“ The only thing you

absolutely have to know

is the location

of the library ”

Albert Einstein

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσοι συντέλεσαν στην πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας, και κυρίως την κοπέλα μου Χριστίνα για την υποστήριξη και την κατανόηση της.

Επίσης θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή μου Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη, ο οποίος με ένταξε στο μαγικό κόσμο της κοσμολογίας και ήταν πάντα πρόθυμος να μου μεταδώσει τις γνώσεις του.

Πίνακας περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την εργασία θα ερευνήσουμε τις συμμετρίες στο χωροχρόνο και τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τις εντοπίσουμε. Επίσης, θα παρατεθούν παραδείγματα για άμαζα βαθμωτά πεδία. Με τη βοήθεια των παραγώγων Lie και της Lie άλγεβρας, η θεωρία της οποίας αναλύεται στο πρώτο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε τις συμμετρίες και μέσω της κλασικής μηχανικής θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε σημεία μοναδικότητας και να βρούμε τα πεδία Killing, τα οποία μας δίνουν τη συμμετρία στο χώρο. Στο τελευταίο κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε την μελέτη ενός συγκεκριμένου κοσμολογικού μοντέλου, του Bianchi τύπου V συνδεδεμένου με άμαζο βαθμωτό πεδίο.

1. ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

1.1. Η Παράγωγος Lie

Εκτός από την μεταβλητή παράγωγο, η οποία απαιτεί σύνδεση σε όλο τον χωροχρόνο, υπάρχει και μια άλλη μορφή παραγώγου, η οποία ονομάζεται παράγωγος Lie και απαιτεί την ύπαρξη καμπύλης.

Ας υποθέσουμε $C: R \to M$, μια καμπύλη στο M με εφαπτόμενα ανύσματα, $\xi = \frac{d}{d\lambda}$, και συνιστώσες $\xi = \xi^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{dx^{\mu}}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$.

Η παράγωγος Lie γενικεύει την κατευθυντήρια παράγωγο μιας συνάρτησης,

$$\frac{df}{d\lambda} = \xi^{\mu}\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}$$

σε τανυστές μεγαλύτερης τάξης. Αρχικά, ας σκεφτούμε ένα άνυσμα πεδίου, υ, το οποίο ορίζεται στο M. Ορίζουμε την παράγωγο Lie του *υ σε ένα σημείο P* της καμπύλης C να είναι

$$\mathcal{L}_{\xi}\upsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\upsilon(P+\varepsilon\xi)-\upsilon(P)}{\varepsilon}$$

όπου $\upsilon(P+\varepsilon\xi)$ είναι ο μετασχηματισμός Lie του υ κατά μήκος της καμπύλης. Για απλότητα, ας θέσουμε $P = C(0)$. Στον μετασχηματισμό Lie παίρνουμε την τιμή του ανύσματος του πεδίου σε ένα σημείο πάνω στην καμπύλη C, για παράδειγμα $\upsilon(\lambda)$, και εκτελούμε μετασχηματισμό συντεταγμένων προκειμένου να μεταφέρουμε το σημείο $C(\lambda)$ πίσω στο $P = C(0)$. Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων που απαιτούμε, για απειροελάχιστο $\lambda = \varepsilon$, είναι

$$y^{\alpha} = x^{\alpha} - \varepsilon\xi^{\alpha}(0)$$

Οι συνιστώσες του υ^{α} αλλάζουν ως εξής

$$\begin{aligned}\tilde{\upsilon}^{\alpha}(0) &= \upsilon^{\beta}(\lambda)\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\\ &= \left[\upsilon^{\beta}(x^{\mu}(0)+\varepsilon\xi^{\mu})\right]\left(\delta^{\alpha}_{\beta}-\varepsilon\partial_{\beta}\xi^{\alpha}\right)\\ &= [\upsilon^{\beta}(0)+\varepsilon\xi^{\mu}\partial_{\mu}\upsilon^{\beta}(0)](\delta^{\alpha}_{\beta}-\varepsilon\partial_{\beta}\xi^{\alpha})\\ &= \upsilon^{\alpha}(0)+\varepsilon\xi^{\mu}\partial_{\mu}\upsilon^{\alpha}(0)-\varepsilon\upsilon^{\beta}(0)\partial_{\beta}\xi^{\alpha}\end{aligned}$$

Η παράγωγος λοιπόν είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi}\upsilon &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\upsilon(P+\varepsilon\xi)-\upsilon(P)}{\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\upsilon^{\alpha}(0)+\varepsilon\xi^{\mu}\partial_{\mu}\upsilon^{\alpha}(0)-\varepsilon\upsilon^{\beta}(0)\partial_{\beta}\xi^{\alpha}-\upsilon(0)}{\varepsilon}\\ &= \xi^{\mu}\partial_{\mu}\upsilon^{\alpha}(0)-\upsilon^{\beta}(0)\partial_{\beta}\xi^{\alpha}\end{aligned}$$

Μια εύκολη απόδειξη της συναλλοίωσης αυτού του αποτελέσματος είναι ότι ισούται με την μετάθεση των δύο ανυσμάτων,

$$\mathcal{L}_\xi \upsilon = [\xi, \upsilon]$$

που έχει την ίδια μορφή όταν το ξ και υ αναλύονται σε συνιστώσες,

$$\begin{aligned}[\xi, \upsilon] &= \left[\xi^\alpha \partial_\alpha, \upsilon^\beta \partial_\beta\right] \\ &= \xi^\alpha \partial_\alpha \upsilon^\beta \partial_\beta - \upsilon^\beta \partial_\beta \xi^\alpha \partial_\alpha \\ &= \left(\xi^\beta \partial_\beta \upsilon^\alpha - \upsilon^\beta \partial_\beta \xi^\alpha\right) \partial_\alpha\end{aligned}$$

Η γενίκευση της παραγώγου σε μεγαλύτερου βαθμού τανυστή απαιτείται για να ικανοποιείται ο κανόνας του Leibnitz.
Επομένως για το γινόμενο δύο ανυσμάτων,

$$T^{\alpha\beta} = u^\alpha \upsilon^\beta$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi T^{\alpha\beta} &= \mathcal{L}_\xi \left(u^\alpha \upsilon^\beta\right) \\ &= (\mathcal{L}_\xi u^\alpha)\upsilon^\beta + u^\alpha(\mathcal{L}_\xi \upsilon^\beta) \\ &= (\xi^\mu \partial_\mu u^\alpha - u^\mu \partial_\mu \xi^\alpha)\upsilon^\beta + u^\alpha\left(\xi^\mu \partial_\mu \upsilon^\beta - \upsilon^\mu \partial_\mu \xi^\beta\right) \\ &= \xi^\mu \partial_\mu(u^\alpha \upsilon^\beta) - u^\mu \upsilon^\beta \partial_\mu \xi^\alpha - u^\alpha \upsilon^\mu \partial_\mu \xi^\beta \\ &= \xi^\mu \partial_\mu T^{\alpha\beta} - T^{\mu\beta} \partial_\mu \xi^\alpha - T^{\alpha\mu} \partial_\mu \xi^\beta\end{aligned}$$

και ούτω κάθε εξής για υψηλότερους βαθμούς, με έναν διορθωτικό όρο, $-T^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta} \partial_\mu \xi^\nu$, για κάθε συντελεστή. Χρησιμοποιούμε την κατευθυντήρια παράγωγο ενός βαθμωτού,

$$\mathcal{L}_\xi \varphi = \xi^\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$$

μαζί με $\varphi = \upsilon^\alpha \omega_\alpha$,για τυχαίο υ^α,

$$\begin{aligned}\xi^\mu \frac{\partial(\upsilon^\alpha \omega_\alpha)}{\partial x^\mu} &= \mathcal{L}_\xi(\upsilon^\alpha \omega_\alpha) \\ \xi^\mu\left(\partial_\mu \upsilon^\alpha\right)\omega_\alpha + \upsilon^\alpha \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha &= \left(\mathcal{L}_\xi \upsilon^\alpha\right)\omega_\alpha + \upsilon^\alpha \mathcal{L}_\xi \omega_\alpha \\ \xi^\mu\left(\partial_\mu \upsilon^\alpha\right)\omega_\alpha + \upsilon^\alpha \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha &= \xi^\beta\left(\partial_\beta \upsilon^\alpha\right)\omega_\alpha - \upsilon^\beta\left(\partial_\beta \xi^\alpha\right)\omega_\alpha + \upsilon^\alpha \mathcal{L}_\xi \omega_\alpha \\ \upsilon^\alpha \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha &= -\upsilon^\beta\left(\partial_\beta \xi^\alpha\right)\omega_\alpha + \upsilon^\alpha \mathcal{L}_\xi \omega_\alpha \\ \upsilon^\alpha \mathcal{L}_\xi \omega_\alpha &= \upsilon^\alpha \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha + \upsilon^\alpha\left(\partial_\alpha \xi^\beta\right)\omega_\beta\end{aligned}$$

Αυτό θα ισχύει για κάθε υ^α, οπότε

$$\mathcal{L}_\xi \omega_\alpha = \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha + \omega_\beta \partial_\alpha \xi^\beta$$

1.2. Συμμετρία

Η παράγωγος Lie αποτελεί το κατάλληλο εργαλείο για την εύρεση των συμμετριών της μετρικής. Η παράγωγος Lie του μετρικού τανυστή είναι

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}\partial_\alpha \xi^\mu + g_{\alpha\mu}\partial_\beta \xi^\mu$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια αναλογία από καμπύλες, έτσι ώστε τα εφαπτομενικά ανύσματα, που έχουν συγκεντρωθεί, να δημιουργήσουν ένα ανυσματικό πεδίο. Ας υποθέσουμε επιπλέον, ότι επιλέγουμε συντεταγμένες x^{α_0}, έτσι ώστε το λ να είναι μια από τις συντεταγμένες, με α_0 να είναι μοναδική σταθερή κατεύθυνση.

Τότε οι όροι του ξ^μ είναι σταθεροί,

$$\xi^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

$$= \delta^\mu_{\alpha_0}$$

Για παράδειγμα, εάν η καμπύλη είναι χρονοειδής, τότε επιλέγουμε $t = \lambda$ και έχουμε $\xi^\mu = (1,0,0,0)$. Μια τέτοια επιλογή συνεπάγεται $\partial_\beta \xi^\mu = 0$ και η παράγωγος Lie της μετρικής είναι

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu g_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\lambda}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν η παράγωγος Lie εξαφανιστεί, η μετρική θα είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης λ. Εφόσον η μετρική μένει αναλλοίωτη σε σχέση με την αναλογία των καμπυλών, υπάρχει συμμετρία στον χωροχρόνο. Κάθε κατεύθυνση στην οποία η μετρική μένει αναλλοίωτη καλείται ισομετρική.

Μπορούμε να βρούμε μια διαφορική εξίσωση η οποία θα περιγράφει τέτοιες κατευθύνσεις συμμετρίας. Θέτοντας την παράγωγο Lie της μετρικής στο μηδέν, έχουμε

$$0 = \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}\partial_\alpha \xi^\mu + g_{\alpha\mu}\partial_\beta \xi^\mu$$

$$= \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + \left[\partial_\alpha\left(g_{\mu\beta}\xi^\mu\right) - \xi^\mu \partial_\alpha g_{\mu\beta}\right] + \left[\partial_\beta\left(g_{\alpha\mu}\xi^\mu\right) - \xi^\mu \partial_\beta g_{\alpha\mu}\right]$$

$$= \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta - \xi^\mu \partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi^\mu \partial_\beta g_{\alpha\mu}$$

$$= \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi^\mu \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \xi^\mu \partial_\beta g_{\alpha\mu} + \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta}$$

$$= \partial_\alpha \xi_\beta - \xi^\mu \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}\right) + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi^\mu \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}\right)$$

$$= \partial_\alpha \xi_\beta - \xi^\mu \Gamma_{\mu\beta\alpha} + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi^\mu \Gamma_{\mu\alpha\beta}$$

$$= \partial_\alpha \xi_\beta - \xi_\mu \Gamma^\mu_{\beta\alpha} + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$$

$$= D_\alpha \xi_\beta + D_\beta \xi_\alpha$$

Και καταλήγουμε στην εξίσωση Killing,

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$$

Έχοντας σαν δεδομένο την μετρική, μπορούμε να αναζητήσουμε όλες τις λύσεις αυτής της εξίσωσης. Εάν υπάρχουν, οι λύσεις αναπαριστούν κατευθύνσεις συμμετρίας του χωροχρόνου, όπως για παράδειγμα, κατευθύνσεις στις οποίες η μετρική παραμένει αναλλοίωτη.

1.3. Παράδειγμα: Συμμετρίες στον χωροχρόνο Minkowski

Ας θεωρήσουμε επίπεδο χωροχρόνο, για τον οποίο η μετρική είναι Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

και η σύνδεση Christoffel μηδενίζεται, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$. Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές παραγώγους με μερικές παραγώγους, οπότε η εξίσωση Killing γίνεται απλά

$$\xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} = 0$$

Κάνοντας μια επιπλέον παραγώγιση, έχουμε

$$\xi_{\alpha,\beta\mu} + \xi_{\beta,\alpha\mu} = 0$$

Τώρα κάνοντας κυκλική μετάθεση στους δείκτες δύο φορές, παίρνουμε

$$\xi_{\alpha,\beta\mu} + \xi_{\beta,\alpha\mu} = 0$$

$$\xi_{\beta,\mu\alpha} + \xi_{\mu,\beta\alpha} = 0$$

$$\xi_{\mu,\alpha\beta} + \xi_{\alpha,\mu\beta} = 0$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις και αφαιρώντας την τρίτη βρίσκουμε

$$0 = \xi_{\alpha,\beta\mu} + \xi_{\beta,\alpha\mu} + \xi_{\beta,\mu\alpha} + \xi_{\mu,\beta\alpha} - \xi_{\mu,\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\mu\beta}$$

$$= 2\xi_{\beta,\alpha\mu}$$

Οπότε η δεύτερη παράγωγος του ξ_β εξαφανίζεται. Αυτό σημαίνει ότι το ξ_β θα πρέπει να έχει γραμμικές συντεταγμένες,

$$\xi_\alpha = \alpha_\alpha + b_{\alpha\beta} x^\beta$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην εξίσωση Killing έχουμε,

$$0 = \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha}$$

$$= b_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha}$$

Οπότε το α_α είναι τυχαίο, ενώ το b_{ab} πρέπει να είναι αντισυμμετρικό.

Τώρα έχουμε δέκα ανεξάρτητα ανυσματικά πεδία, καθένα από τα οποία έχει τη μορφή

$$\xi_\alpha = \alpha_\alpha + b_{\alpha\beta} x^\beta$$

για ανεξάρτητες επιλογές των δέκα σταθερών α_α και $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$. Η απλούστερη επιλογή των δέκα ανυσματικών πεδίων είναι να πάρουμε μόνο μια από τις σταθερές μη μηδενική. Εάν πάρουμε $b_{\alpha\beta} = 0$ και μια από τις συνιστώσες του α_α (ας υποθέσουμε m, για m=0,1,2,3) μη μηδενική, τότε καταλήγουμε σε τέσσερα σταθερά ανυσματικά πεδία,

$$\xi^\alpha_{(m)} = \delta^\alpha_m$$

Το παραπάνω αναπαριστά ένα μοναδιαίο άνυσμα σε κάθε σύστημα συντεταγμένων.

Εφόσον είναι σταθερές, οι ολοκληρωτικές καμπύλες αποτελούν τους άξονες των καρτεσιανών συντεταγμένων και η μετρική είναι όντως ανεξάρτητη από κάθε μια από αυτές.

Τώρα θέτοντας $\alpha_\alpha = 0$ και επιλέγοντας έναν από τους έξι αντισυμμετρικούς πίνακες $b_{\alpha\beta}$, έχουμε είτε περιστροφές είτε ωθήσεις. Για παράδειγμα, παίρνοντας $b_{21} = -b_{12} = 1$ και όλα τα υπόλοιπα μηδέν, το ανυσματικό πεδίο γίνεται

$$\begin{aligned}\xi &= \xi^\alpha \partial_\alpha \\ &= \left(\eta^{\alpha\beta} b_{\beta\mu} x^\mu\right)\partial_\alpha \\ &= x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτελεί τον γεννήτορα της στροφορμής γύρω από τον άξονα z. Όμοια τα $b_{23} = -b_{32}$ και $b_{31} = -b_{13}$ οδηγούν στους γεννήτορες της στροφορμής γύρω από τους άξονες x και y. Εάν ένας από του μη μηδενικούς δείκτες είναι ο χρόνος, τότε έχουμε μια ώθηση εξαιτίας της αλλαγής σήματος. Για $b_{10} = -b_{01} = 1$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\xi &= \xi^\alpha \partial_\alpha \\ &= \left(\eta^{\alpha\beta} b_{\beta\mu} x^\mu\right)\partial_\alpha \\ &= x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

Αυτός είναι ο γεννήτορας για έναν μετασχηματισμό Lorentz. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να υψώσουμε σε εκθετικό τον γεννήτορα με μια παράμετρο,

$$\begin{aligned}\Lambda &= exp\left[\lambda\left(x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\lambda^n\left(x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\end{aligned}$$

Ας σκεφτούμε το αποτέλεσμα πάνω στις συντεταγμένες (t, x, y, z). Προφανώς ισχύει $\Lambda_y = \Lambda_z = 0$. Για το t χρειαζόμαστε

$$\left(x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}\right)t = x$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial t}+t\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 t=\left(x\frac{\partial}{\partial t}+t\frac{\partial}{\partial x}\right)x$$

$$=t$$

και ούτω καθεξής, εναλλάσσοντας το x και t. Τα άρτια και περιττά μέρη των σειρών επομένως αθροίζονται ξεχωριστά,

$$\Lambda t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\lambda^n\left(x\frac{\partial}{\partial t}+t\frac{\partial}{\partial x}\right)^n t$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!}\lambda^{2m+1}x+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}\lambda^{2m}t$$

$$=x\sinh\lambda+t\cosh\lambda$$

Όμοια, δρώντας πάνω στο x παίρνουμε

$$\Lambda x=t\sinh\lambda+x\cosh\lambda$$

Αναγνωρίζουμε το λ ως την ταχύτητα, και τον ολικό μετασχηματισμό

$$\Lambda t=x\sinh\lambda+t\cosh\lambda$$

$$\Lambda x=t\sinh\lambda+x\cosh\lambda$$

$$\Lambda y=y$$

$$\Lambda z=z$$

ως μια ώθηση στην διεύθυνση-x.

Οπότε βρίσκουμε ακριβώς 10 ισομετρίες στον χώρο Minkowski. Αυτός είναι ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων λύσεων για την εξίσωση Killing. Η στατική, σφαιρικά συμμετρική λύση Schwarzschild είχε ένα χρονοειδές πεδίο Killing και τρία χωρικά περιστρεφόμενα πεδία Killing. Ένας γενικός χωροχρόνος δεν έχει ισομετρίες.

1.4. Παράδειγμα: Στατικοί, Σφαιρικά Συμμετρικοί Χωροχρόνοι

Για να είναι ο χωροχρόνος στατικός, θα πρέπει να υπάρχει ένα χρονοειδές ανυσματικό πεδίο Killing. Για να είναι σφαιρικά συμμετρικός, απαιτούμε την ύπαρξη ενός ολοκληρωμένου σετ τριών περιστροφικών (άρα χωροειδών) ανυσμάτων Killing.

Χρησιμοποιούμε την παράγωγο Lie για να ορίσουμε την μετρική για ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό χωροχρόνο.

Εάν θέλουμε στατικό χωροχρόνο, σημαίνει ότι θέλουμε να επικρατήσει ένα χρονοειδές ανυσματικό πεδίο Killing. Επιλέγοντας την συντεταγμένη του χρόνου να είναι η παράμετρος $t = \lambda$, η κατάσταση συμμετρίας γίνεται

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta}$$

$$= \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi^\mu g_{\mu\beta} + \partial_\beta \xi^\mu g_{\alpha\mu}$$

Παρόλα αυτά, με $x^0 = t = \lambda$, οι συνιστώσες του ξ είναι σταθερές, έτσι ώστε

$$\partial_\alpha \xi_\mu = 0$$

Επομένως,

$$0 = \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(g_{\alpha\beta}\right)$$

Και έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η μετρική είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης του χρόνου.

Για την σφαιρική συμμετρία, γνωρίζουμε ότι έχουμε τρία ανυσματικά πεδία Killing τα οποία μαζί δημιουργούν την ομάδα συμμετρίας *SO* (3). Μπορούμε να επιλέξουμε δύο από αυτές για συντεταγμένες, για τις οποίες δεν υπάρχει μετασχηματισμός που να μας μεταφέρει από την μια στην άλλη, οπότε η μετρική δε θα είναι ανεξάρτητη και από τις δύο συντεταγμένες.

Ξεκινώντας από τον γνωστό τύπο

$$\xi_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\xi_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\xi_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

Είναι φυσικό να επιλέξουμε μια συντεταγμένη φ, έτσι ώστε να αποτελεί άνυσμα Killing.

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

Για να περιγράψουμε μια δεύτερη κατεύθυνση, χρειαζόμαστε γραμμικό συνδυασμό των δύο εναπομεινάντων περιστροφών,

$$\alpha(\varphi)\xi_1 + \beta(\varphi)\xi_2$$

και θέλουμε το παραπάνω να παραμείνει ορθογώνιο στο ξ_3.

$$0 = \langle\xi_3, \alpha\xi_1 + \beta\xi_2\rangle$$

$$= \langle x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \alpha\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) + \beta\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\rangle$$

$$= x\langle\frac{\partial}{\partial y}, \alpha\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) + \beta\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\rangle$$
$$- y\langle\frac{\partial}{\partial x}, \alpha\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) + \beta\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\rangle$$

$$= x\langle\frac{\partial}{\partial y}, -az\frac{\partial}{\partial y}\rangle - y\langle\frac{\partial}{\partial x}, \beta z\frac{\partial}{\partial x}\rangle$$

$$= -azx\langle\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\rangle - \beta zy\langle\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\rangle$$

$$= -z(ax + \beta y)$$

$$= -r\sin\theta\, z(a\cos\varphi + \beta\sin\varphi)$$

Για να πάρουμε μηδενική τιμή, θέτουμε

$$\alpha = \sin\varphi$$

$$\beta = -\cos\varphi$$

Οπότε έχουμε

$$\xi_4 = \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi$$

$$= \sin\varphi\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) - \cos\varphi\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \sin\varphi\left(r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z} - r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$- \cos\varphi\left(r\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} - r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= r\sin\theta\sin\varphi\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z} - r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\cos\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}$$

$$+ r\sin\theta\cos\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= -\cos\theta\left(r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right) + r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= -\cos\theta\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

Συγκρίνουμε

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{xz}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{yz}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Οπότε έχουμε

$$\xi_4 = -\cos\theta\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \cos\theta\left(r\sin\theta\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + r\sin\theta\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial r}\right.$$
$$\left. + \cos\theta\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - r\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$= r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$= \frac{\partial}{\partial\theta}$$

Επομένως θα μπορούσαμε να πάρουμε δύο από τα ανύσματα Killing να είναι

$$\xi_4 = \frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\xi_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

δίνοντας δύο συντεταγμένες, θ, φ, οι οποίες αντιστοιχούν σε κατευθύνσεις συμμετρίας. Αφού δεν υπάρχει μετασχηματισμός που να μας μεταφέρει από την μια στην άλλη, η μετρική δε μπορεί να είναι ανεξάρτητη και από τις δύο συντεταγμένες. [1],[2]

2. ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Μια σημαντική εξέλιξη στη φυσική ήταν η ανάπτυξη της γενικής σχετικότητας, η οποία περιγράφει επιτυχώς το κλασικό βαρυτικό πεδίο. Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της θεωρίας είναι ότι προβλέπει την ύπαρξη μοναδικοτήτων, για παράδειγμα καταστάσεις στις οποίες ο χωροχρόνος καταρρέει, με την έννοια ότι κάποιες βαθμίδες καμπυλότητας, όπως και άλλες φυσικές ποσότητες, αποκλίνουν. Αυτό το φαινόμενο έχει αποδειχθεί από διάφορα θεωρήματα μοναδικότητας ότι αποτελεί μια γενική περίπτωση, η οποία δεν σχετίζεται με καμία συγκεκριμένη υπόθεση συμμετρίας. Περιπτώσεις αντιμετώπισης μοναδικοτήτων εμφανίζονται συχνά στις μαύρες τρύπες και στους κοσμολογικούς χωροχρόνους. Η ελπίδα είναι ότι τα κβαντικά φαινόμενα θα κυριαρχούν γύρω από τα σημεία μοναδικότητας, έτσι ώστε να μειώσουν ή ακόμα και να την εξαλείψουν.[3]

Η κβαντική κοσμολογία, η οποία αποτελεί κλάδο της κβαντικής βαρύτητας που ασχολείται με κοσμολογικά μοντέλα, είναι μια απλοποιημένη προσέγγιση, η οποία προήλθε υποθέτοντας υψηλού βαθμού συμμετρία. Αυτό επιτρέπει να παγώσουν σχεδόν όλοι οι βαθμοί ελευθερίας και να κρατήσουμε έναν πεπερασμένο αριθμό αυτών και ως εκ τούτου έχει ως αποτέλεσμα την παραμετροποίηση της αμετάβλητης κανονικής κβαντικής θεωρίας. Παρά την σημαντική απλοποίηση, το κρίσιμο πρόβλημα της μοναδικότητας εξακολουθεί να υπάρχει. Αφού η εξίσωση Wheeler-De Witt είναι μια διαφορική εξίσωση τύπου Klein-Gordon, δεν υπάρχει κανένας προφανής τρόπος να προσδιοριστεί μια θετικά-ορισμένη πιθανότητα.

Μια συνήθης ημικλασική αντιμετώπιση των λύσεων την εξίσωσης Wheeler-De Witt είναι μέσω της προσέγγισης WKB και της κατασκευής κυματοπακέτων. Σε αυτή την προσέγγιση, αποδείχθηκε ότι η μοναδικότητα μπορεί να αποφευχθεί σε ομογενείς και ισοτροπικούς χωροχρόνους. Μια άλλη προσέγγιση στην επίλυση της εξίσωσης Wheeler-De Witt είναι να ακολουθήσουμε την θεωρία του Bohm και να κατασκευάσουμε προσδιοριστικές κβαντικές τροχιές στον υπερχώρο. Έχει αποδειχθεί ότι η μοναδικότητα μπορεί να αποφευχθεί ξανά για μια ομογενή και ισοτροπική μετρική συζευγμένη με βαθμωτά πεδία ή γεμάτη με σκόνη και ακτινοβολία. Παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνουμε από την κβαντική κοσμολογία βρόχου για ομογενή ισοτροπικά μοντέλα με ένα βαθμωτό πεδίο.

Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε με 4-διάστατους χωροχρόνους ελάχιστα συζευγμένους σε ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο. Επικεντρωνόμαστε στην μελέτη τόσο ισοτροπικών μοντέλων όσο και ανισοτροπικών. Κάνουμε μια προσέγγιση της βαρύτητας ως μικρό υπερχώρο για την κβαντική γεωμετροδυναμική. Σε αυτούς του κλασικούς χωροχρόνους η συνάρτηση κενού δεν είναι σταθερής βαθμίδας. Αυτό επιτρέπει την παρουσία επιπλέον συμμετριών στον χώρο διάταξης, που καλούνται εξαρτημένες υπό όρους συμμετρίες. Σε άλλη εργασία [4] έχει συζητηθεί η σχέση μεταξύ των συμμετρικών σημείων Lie και των εξαρτημένων υπό όρους συμμετριών του μικρού υπερχώρου, οι οποίες κάτω από σταθερό δυναμικό στο κενό συγκλίνουν με τις εξαρτημένες υπό όρους συμμετρίες σε φασικό χώρο. Το σύστημα των εξισώσεων πεδίου του Einstein επιλύεται χρησιμοποιώντας τα πρώτα ολοκληρώματα κίνησης συσχετισμένα με τις εξαρτημένες υπό όρους συμμετρίες. Αυτή η μέθοδος διευκολύνει την επίλυση των συγκεκριμένων εξισώσεων. Για τον κβαντισμό του συστήματος, αρχικά προάγουμε τους περιορισμούς πρώτης τάξης στους τελεστές που μηδενίζουν την κυματοσυνάρτηση, σύμφωνα με τον Dirac. Έπειτα, οι γεννήτορες των εξαρτημένων υπό όρους συμμετριών προωθούνται σε τελεστές, παρέχοντας έτσι ένα σύστημα κβαντικών περιορισμών με επιπρόσθετες εξισώσεις ιδιοτιμών στην κυματοσυνάρτηση. Το αποτέλεσμα είναι μια μοναδική κυματοσυνάρτηση, η οποία δεν περιέχει τυχαίες συναρτήσεις, και χρησιμοποιείται ώστε να βρεθεί ένας ημικλασικός χωροχρόνος. Αυτό πραγματοποιείται γράφοντας την κυματοσυνάρτηση σε πολική μορφή και δημιουργώντας τις αντίστοιχες ημικλασικές εξισώσεις, ακολουθώντας την προσέγγιση του Bohm για την κβαντική θεωρία. Αυτή η ημικλασική επίλυση μελετάται από δύο πλευρές: αρχικά, ελέγχουμε εάν η μοναδικότητα μπορεί να αποφευχθεί. Έπειτα, ο ενεργός τανυστής ενέργειας- ορμής ερμηνεύεται ως ένας τανυστής ενέργειας- ορμής ενός ατελούς ρευστού. Επομένως, ακόμη κι αν ξεκινούσαμε με ένα κλασικό χωροχρόνο γεμάτο με άμαζο βαθμωτό πεδίο, ο ημικλασικός χωροχρόνος μπορεί να αποκτήσει διαφορετική φυσική υπόσταση.

2.1. Κλασική Αντιμετώπιση

Θεωρούμε έναν 4-διάστατο κοσμολογικό χωροχρόνο με γραμμικά στοιχεία της μορφής

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + \gamma_{\alpha\beta}(t)\sigma_i^\alpha(x)\sigma_j^\beta(x)dx^i dx^j \quad ,i,j = 1,2,3 \qquad (1)$$

Όπου $N(t)$ είναι η συνάρτηση κενού, $\gamma_{\alpha\beta}(t)$ είναι ένας θετικά ορισμένος, διαγώνιος, αντισυμμετρικός 3×3 πίνακας των εξαρτημένων δυναμικών μεταβλητών και $\sigma_i^\alpha(x)$ είναι οι αμετάβλητες μορφές που ικανοποιούν την σχέση

$$\sigma_{i,j}^\alpha - \sigma_{j,i}^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \sigma_j^\beta \sigma_i^\gamma \qquad (2)$$

Οι μορφές σ^α είναι γνωστές για κάθε τύπο Bianchi και μπορούν να βρεθούν σε σχετική βιβλιογραφία.[5] Επίσης η γενική κλασική επίλυση των περισσότερων τύπων Bianchi στο κενό έχει δοθεί στα [6-9]. Το ολοκλήρωμα της δράσης και οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης δίνονται από

$$S_{total} = S_{grav} + S_{mat} = \int \sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\right)d^4x \qquad (3)$$

$$E_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \qquad (4)$$

Όπου R είναι η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci, $E_{\mu\nu}$ ο τανυστής του Einstein και έχουμε υποθέσει την ύπαρξη ενός άμαζου βαθμωτού πεδίου Φ. Η απόκλιση της δράσης έχει ως αποτέλεσμα στην γνωστή εξίσωση κίνησης για βαθμωτό πεδίο απλά συζευγμένο με την βαρύτητα, την εξίσωση Klein-Gordon

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi = 0 \qquad (5)$$

Ολοκληρώνοντας τις χωρικές συντεταγμένες x^i , η δράση μειώνεται σε

$$S_{tot} = \int dt \;\; L \qquad (6)$$

Όπου L είναι μια Λαγκρατζιανή της μορφής

$$L = \frac{1}{2N} G_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - NV(q) \qquad (7)$$

Και $G_{\alpha\beta}(q)$ είναι η υπερμετρική ορισμένη στον χώρο διάταξης των εξαρτημένων μεταβλητών $q^\alpha(t)$.

Βέβαια υπάρχει πάντα το ερώτημα αν η απλοποιημένη Λαγκρατζιανή είναι έγκυρη. Θα πρέπει κάποιος να ελέγξει αν η απλοποίηση της εξίσωσης του Einstein συν τη μάζα είναι ισοδύναμη των εξισώσεων Euler- Lagrange. Η παραπάνω Λαγκρατζιανή (7) είναι παραμετροποιημένη ως προς τον χρόνο και αμετάβλητη, δηλαδή διατηρεί την μορφή της κάτω από τον μετασχηματισμό $t = f(\tilde{t})$, όπως επίσης και αν κάποιος αλλάξει την συνάρτηση κενού και τις εξαρτημένες μεταβλητές ως εξής

$$N(t) \to \widetilde{N}(\tilde{t}) = N\big(f(\tilde{t})\big) f'(\tilde{t}), \quad q^\alpha(t) \to \tilde{q}^\alpha(\tilde{t}) = q^\alpha\big(f(\tilde{t})\big) \qquad (8)$$

Τα παραπάνω μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα τύπο μετασχηματισμών βαθμίδας, που οφείλουν την ύπαρξη τους στην παρουσία περιορισμών στο σύστημα. Ο κύριος περιορισμός είναι η γενικευμένη ορμή της συνάρτησης κενού

$$p_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} \approx 0, \qquad (9)$$

και η απαίτηση για την διατήρηση της στο χρόνο οδηγεί στον δευτερεύοντα περιορισμό $\mathcal{H}$

$$\dot{p}_N = \{p_N, H\} \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta}(q) p_a p_\beta + V(q) \approx 0 \qquad (10)$$

γνωστό ως τον περιορισμό Hamilton λόγω της σχέσης

$$H = p_a \dot{q}_a - L = N\left(\frac{1}{2} G_{\alpha\beta}(q) p_a p_\beta + V(q)\right) \equiv N\mathcal{H} \qquad (11)$$

Η διαδικασία Dirac τότε τερματίζει, επειδή η απαίτηση για διατήρηση του $\mathcal{H}$ στο χρόνο δεν δίνει άλλους νέους περιορισμούς. Επομένως, η θεωρία έχει δύο περιορισμούς, έναν γραμμικό και έναν τετραγωνικό στις ορμές, και είναι πρώτης τάξης σύμφωνα με την σχέση $\{p_N, \mathcal{H}\} \approx 0.$ Στο πλαίσιο των μοναδικών συστημάτων, έχει αποδειχθεί πως οι μεταβλητές συμμετρίας της δράσης , όπως επίσης και τα συμμετρικά σημεία Lie των εξισώσεων Euler- Lagrange, έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση εξαρτημένων υπό όρους συμμετριών. Αυτές ορίζονται σαν ταυτόχρονες συμμετρίες της υπερμετρικής και του υπερδυναμικού με τον ίδιο συναλλοίωτο παράγοντα

$$\mathcal{L}_\xi G^{\alpha\beta}(q) = \tau(q) G^{\alpha\beta}(q) \ , \quad \mathcal{L}_\xi V(q) = \tau(q) V(q), \qquad (12)$$

Όπου $\mathcal{L}_\xi$ είναι η παράγωγος Lie στον χώρο διάταξης. Οι γεννήτορες συμμετρίας, ας πούμε ξ_i , ικανοποιούν την άλγεβρα Lie της μορφής

$$\left[\xi_i, \xi_j\right] = c_{ij}^k \xi_k \qquad (13)$$

Όπου c_{ij}^k είναι οι σταθερές δομής. Σε κάθε έναν από τους γεννήτορες αντιστοιχεί μια διατηρούμενη ποσότητα $Q_i = {\xi_i}^a p_a$ γραμμική στις γενικευμένες ορμές

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$$

Η αντίστοιχη αγκύλη Poisson ικανοποιεί την ίδια άλγεβρα όπως οι γεννήτορες της. Αξιοποιώντας την ελευθερία που δίνεται λόγω της αμεταβλητότητας στην χρονική παραμετροποίηση, μπορεί κανείς να επιλέξει ένα νέο κενό $n = NV$, το οποίο συνεπάγεται

$$\bar{G}_{\alpha\beta} = V G_{\alpha\beta} \quad , \quad \bar{V} = 1$$

Η νέα Λαγκρατζιανή έχει ως εξής

$$L = \frac{1}{2n} \bar{G}_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^a \dot{q}^\beta - n \qquad (14)$$

Και τώρα οι γεννήτορες ξ^a διατηρούν την μορφή τους και γίνονται πεδία Killing της υπερμετρικής

$$\mathcal{L}_\xi \bar{G}^{\alpha\beta}(q) = 0 \tag{15}$$

Εάν η δράση αντιστοιχεί σε ένα βαρυτικό μικρό υπερχωρικό μοντέλο, τότε υπάρχει μια επιπλέον συμμετρία, η οποία φαίνεται στην ύπαρξη ενός ομοθετικού ανυσματικού πεδίου. Να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη συμμετρία είναι ήδη γνωστό ότι υπάρχει στις εξισώσεις κίνησης. Τα νέα φορτία Q_i της νέας Λαγκρατζιανής ακόμη ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις, όπως επίσης και την ίδια άλγεβρα της αγκύλης Poisson. Από την ανάπτυξη των βαθμωτών Q_i έχουμε,

$$\frac{dQ_i}{dt} = \{Q_i, H\} = -\omega n \tag{16}$$

Όπου *ω=0* για τα ανυσματικά πεδία Killing και *ω=1* για τα ομοθετικά, για κάθε ανυσματικό πεδίο Killing παίρνουμε ένα ολοκλήρωμα κίνησης

$$Q_i = \kappa_i \tag{17}$$

ενώ για ομοθετικό πεδίο Killing παίρνουμε ένα χρονοεξαρτώμενο ολοκλήρωμα κίνησης

$$Q_h = \kappa_h - \int n(t)dt \tag{18}$$

Το πλεονέκτημα από την επίλυση των δύο παραπάνω εξισώσεων (17),(18) είναι ότι το σύστημα των εξαρτημένων μεταβλητών έχει ταχύτητες/ορμές πρώτης τάξης και λύνεται πολύ πιο εύκολα. Επιπλέον, εάν υπάρχουν αρκετά ολοκληρώματα κίνησης, το πρόβλημα του προσδιορισμού των $q^i(t)$ μειώνεται σε αλγεβρικό [10].

Τελικά, μπορούμε να βρούμε γεννήτορες υψηλότερης τάξης, όπως για παράδειγμα αμείωτα τανυστικά πεδία Killing τα οποία οδηγούν σε νέες διατηρούμενες ποσότητες, που δεν απλοποιούνται σε ποσότητες πρώτης τάξης. Μια σημαντική ποσότητα είναι η αμετάβλητη Casimir, που μετατίθεται με όλα τα Q_i

$$\{Q_i, Q_{cas}\} = 0 \tag{19}$$

Συνοπτικά, για την κλασική ανάλυση αρχικά βρίσκουμε την Λαγκρατζιανή ολόκληρου του βαρυτικού συστήματος, συζευγμένου με άμαζο βαθμωτό πεδίο, με σκοπό να το ανακατασκευάσουμε και να λάβουμε μια Λαγκρατζιανή σταθερού υπερδυναμικού. Ακόμη μελετώνται οι συμμετρίες Killing και οι ομοθετικές συμμετρίες του μικρού υπερχώρου, που προκύπτει, κατασκευάζονται οι αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες και χρησιμοποιούνται στην επίλυση για μεταβλητές στον χώρο διάταξης. Η τελική λύση δίνεται από τις μεταβλητές στην αρχική Λαγκρατζιανή που αντικαθίστανται στην μετρική του χωροχρόνου. Ο χωροχρόνος που προκύπτει μελετάται έπειτα για μοναδικότητες.

3. Άμαζο Βαθμωτό Πεδίο σε Χωροχρόνο Kantowski-Sachs

3.1. Κλασική Αντιμετώπιση

Μελετάμε τον χωροχρόνο Kantowski-Sachs συζευγμένο σε άμαζο βαθμωτό πεδίο. Το μετρικό γραμμικό στοιχείο του παίρνει την μορφή

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + \alpha^2(t)dr^2 + b^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \quad (20)$$

Όπου *α(t)*, *b(t)* είναι παράγοντες κλίμακας εξαρτώμενοι μόνο από τον χρόνο. Παρόλο που η μετρική έχει την μορφή (1), που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, δεν ανήκει στην κατάταξη Bianchi, επειδή η δράση του γκρουπ των ισομετριών στην 3-διάστατη χωροειδή επιφάνεια δεν είναι απλά μεταβατική, όπως και είναι απαραίτητο για ένα μοντέλο ώστε να χαρακτηριστεί ως Bianchi. Αυτό φαίνεται από την μη σταθερότητα στη δομή των συναρτήσεων, η οποία παρατηρείται στα (2)

$$C^3_{23} = \frac{\cot\theta}{2} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \sigma^a_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας στις χωρικές διευθύνσεις και απαλείφοντας έναν όρο ολικής παραγώγου, το ολοκλήρωμα της ολικής δράσης (3) καταλήγει στην παρακάτω Λαγκρατζιανή

$$L = 2\alpha N - \frac{4b\dot{a}\dot{b}}{N} - \frac{2a\dot{b}^2}{N} - \frac{ab^2\dot{\varphi}^2}{2N} \quad (21)$$

Στην παραμετροποίηση σταθερού δυναμικού, η ανακατασκευασμένη Λαγκρατζιανή γράφεται

$$L = n + \frac{8ab\dot{a}\dot{b}}{n} + \frac{4a^2\dot{b}^2}{n} + \frac{a^2b^2\dot{\varphi}^2}{n} \quad (22)$$

Όπου έχουμε θέσει $n = -2Na$. Η Χαμιλτονιανή βρίσκεται να είναι

$$\mathcal{H} = 1 - \frac{p_\alpha^2}{16b^2} + \frac{p_a p_b}{8ab} + \frac{p_\varphi^2}{4a^2b^2} \approx 0 \quad (23)$$

Η υπερμετρική του χώρου διάταξης διαβάζεται από το κινητικό μέρος της Λαγκρατζιανής ως

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 8ab & 0 \\ 8\alpha b & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2b^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Αυτός ο υπερχώρος είναι γενικά επίπεδος. Οι γεννήτορες των συμμετριών του υπερχώρου γίνονται

$$\xi_1 = -\alpha\partial_\alpha + b\partial_b \ , \ \xi_2 = -\alpha\varphi\partial_\alpha + b\varphi\partial_b - 4\ln\alpha\partial_\varphi \ , \quad (25)$$

$$\xi_3 = \partial_\varphi, \quad \xi_h = \frac{a}{2}\,\partial_\alpha \quad (26)$$

Όπου $\xi_i, i = 1{,}2{,}3$ αναπαριστούν τα πεδία Killing και ξ_h το ομοθετικό πεδίο. Η αγκύλη Lie είναι

$$[\xi_1, \xi_2] = 4\xi_3 \ , \qquad [\xi_2, \xi_3] = -\xi_1 \ , \ \ [\xi_2, \xi_h] = 2\xi_3 \qquad (27)$$

Και το σύστημα των πρώτων ολοκληρωμάτων εκφρασμένο σε μεταβλητές στον χώρο ταχυτήτων φάσεων είναι

$$Q_1 = \frac{8ab^2\dot{\alpha}}{n} = \kappa_1 \quad (28)$$

$$Q_2 = \frac{8ab^2(\varphi\dot{\alpha} - \alpha\dot{\varphi}\ln\alpha)}{n} = \kappa_2 \quad (29)$$

$$Q_3 = \frac{2a^2b^2\dot{\varphi}}{n} = \kappa_3 \quad (30)$$

$$Q_h = \frac{4a^2b\dot{b}}{n} = \kappa_h - \int dt\, n(t) \quad (31)$$

Όπου $\kappa_i, i = 1{,}2{,}3, h$ είναι σταθερές. Η αλγεβρική επίλυση του συστήματος μας δίνει την σχέση μεταξύ των μεταβλητών *(α, φ)*

$$\varphi = \frac{\kappa_2 + 4\kappa_3\ln\alpha}{\kappa_1} \quad (32)$$

Εισάγοντας αυτή την σχέση στην αρχική Λαγκρατζιανή (22) έχουμε σαν αποτέλεσμα μια απλοποιημένη Λαγκρατζιανή με δύο βαθμούς ελευθερίας αντί για τρεις.

$$L_{red} = -n + \frac{16\kappa_3^2 b^2\dot{\alpha}^2}{\kappa_1^2 n} + \frac{8\alpha b\dot{\alpha}\dot{b}}{n} + \frac{4a^2\dot{b}^2}{n} \quad (33)$$

Αυτή η απλοποιημένη Λαγκρατζιανή είναι επίσης έγκυρη με την έννοια ότι οι παραγόμενες εξισώσεις κίνησης είναι ισοδύναμες με εκείνες που λαμβάνονται από την (22), όταν εισάγουμε την λύση (32). Αυτό δεν ισχύει γενικά για κάθε Λαγκρατζιανή και η ισοδυναμία πρέπει να ελέγχεται κάθε φορά που υποθέτουμε συγκεκριμένη απλοποίηση. Το πλεονέκτημα της χρήσης του L_{red} είναι ότι το πρόβλημα μετατρέπεται σε ένα με λιγότερους βαθμούς ελευθερίας, οπότε και λύνεται πιο εύκολα.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, βρίσκουμε την Χαμιλτονιανή που αντιστοιχεί στην απλοποιημένη Λαγκρατζιανή

$$\mathcal{H}_{red} = 1 - \frac{\kappa_1^2 p_\alpha^2}{16\lambda b^2} + \frac{\kappa_1^2 p_a p_b}{8\lambda ab} - \frac{\kappa_3^2 p_b^2}{4\lambda a^2} \approx 0 \tag{34}$$

Όπου έχουμε γράψει για ευκολία $\lambda^2 = \kappa_1^2 - 4\kappa_3^2$, το οποίο αποτελεί τον τελεστή Casimir της άλγεβρας των διατηρούμενων ποσοτήτων της Λαγκρατζιανής (22). Η αντίστοιχη υπερμετρική είναι

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{32b^2\kappa_3^2}{\kappa_1^2} & 8\alpha b \\ 8ab & 8a^2 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Και οι γεννήτορες συμμετρίας της είναι

$$\zeta_1 = -\alpha\partial_\alpha + b\partial_b \ , \tag{36}$$

$$\zeta_2 = -\frac{\kappa_1 \sinh\left(\frac{\lambda \ln\alpha}{\kappa_1}\right)}{b\lambda}\partial_\alpha + \frac{\cosh\left(\frac{\lambda \ln\alpha}{\kappa_1}\right) + \frac{\kappa_1}{\lambda}\sinh\left(\frac{\lambda \ln\alpha}{\kappa_1}\right)}{\alpha}\partial_b \ , \tag{37}$$

$$\zeta_3 = -\frac{\kappa_1 \cosh\left(\frac{\lambda \ln\alpha}{\kappa_1}\right)}{b\lambda}\partial_\alpha + \frac{\sinh\left(\frac{\lambda \ln\alpha}{\kappa_1}\right) + \frac{\kappa_1}{\lambda}\cosh\left(\frac{\lambda \ln\alpha}{\kappa_1}\right)}{\alpha}\partial_b, \tag{38}$$

$$\zeta_h = \frac{a}{2}\,\partial_\alpha \tag{39}$$

Οι οποίοι ικανοποιούν την ακόλουθη άλγεβρα Lie

$$[\zeta_1, \zeta_2] = -\frac{\lambda}{\kappa_1}\zeta_3 \ , \quad [\zeta_1, \zeta_3] = -\frac{\lambda}{\kappa_1}\zeta_2 \ ,$$

$$[\zeta_2, \zeta_h] = \frac{1}{2}\zeta_2 - \frac{\lambda}{2\kappa_1}\zeta_3 \ , \qquad [\zeta_3\,, \zeta_h] = -\frac{\lambda}{2\kappa_1}\zeta_2 + \frac{1}{2}\zeta_3$$

Η λύση του συστήματος $Q_{red,i} \equiv \zeta_i^a p_a = c_i, i = 1,2,3, h$ είναι

$$b = \frac{c_1 \kappa_1}{\lambda \alpha \left(c_3 \cosh\left(\frac{\lambda \ln \alpha}{\kappa_1}\right) - c_2 \sinh\left(\frac{\lambda \ln \alpha}{\kappa_1}\right)\right)} \tag{40}$$

$$\dot{b} = \frac{c_1 \left(-c_3 \kappa_1^2 + 4 c_3 \kappa_3^2 + c_2 \kappa_1 \lambda + (c_2 \lambda^2 - c_3 \kappa_1 \lambda) \coth\left(\frac{\lambda \ln \alpha}{\kappa_1}\right) \sinh^{-1}\left(\frac{\lambda \ln \alpha}{\kappa_1}\right)\right)}{\lambda^2 a^2 \left(c_2 - c_3 \coth\left(\frac{\lambda \ln \alpha}{\kappa_1}\right)\right)^2} \tag{41}$$

$$n = \frac{8 c_1 \dot{a}}{a \left(c_3 \cosh\left(\frac{\lambda \ln \alpha}{\kappa_1}\right) - c_2 \sinh\left(\frac{\lambda \ln \alpha}{\kappa_1}\right)\right)}, \tag{42}$$

$$\int dt\, n(t) = c_h + \frac{c_1 \left(-c_3 \kappa_1 + c_2 \lambda + (c_2 \kappa_1 - c_3 \lambda) \coth\left(\frac{\lambda \ln \alpha}{\kappa_1}\right)\right)}{2\lambda \left(c_2 - c_3 \coth\left(\frac{\lambda \ln \alpha}{\kappa_1}\right)\right)} \tag{43}$$

Μαζί με μια σχέση για τις σταθερές , $c_3^2 - c_2^2 = 16$, που προκύπτει από την απαίτηση ότι οι λύσεις θα ικανοποιούν τον περιορισμό. Αυτή η σχέση αποτελεί την αριθμητική τιμή της αμετάβλητης του Casimir. Τώρα θέτοντας $c_2 = \sinh \kappa$ και επιλέγοντας τη συνθήκη βαθμίδας $\alpha = e^t$, βρίσκουμε τη λύση

$$N = -\frac{c_1}{4 e^t \cosh^2\left(\kappa - \frac{\lambda t}{\kappa_1}\right)} \;, b = \frac{c_1 \kappa_1}{4 \lambda e^t \cosh\left(\kappa - \frac{\lambda t}{\kappa_1}\right)} \;, \varphi = \frac{\kappa_2 + 4 \kappa_3 t}{\kappa_1} \tag{44}$$

Αυτή η λύση ακόμη περιέχει περιττές σταθερές, οι οποίες δεν είναι απαραίτητες για την περιγραφή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του χωροχρόνου. Γι αυτό έχουν γίνει διάφορες αλλαγές στις συντεταγμένες, ώστε να απορροφηθούν αυτές οι σταθερές. Το τελικό γραμμικό στοιχείο γράφεται ως εξής

$$ds^2 = -\frac{\beta e^{\alpha T}}{\cosh^4 T} dT^2 + e^{-\alpha T} dr^2 + \frac{\beta e^{\alpha T}}{\cosh^2 T} d\theta^2 + \frac{e^{\alpha T}}{\cosh^2 T} \sin^2 \theta \, d\varphi^2 \tag{45}$$

Όπως έχει διαπιστωθεί μέσω του θεωρήματος των [11,12], αυτή η μετρική χαρακτηρίζεται από δύο στοιχειώδεις σταθερές. Το βαθμωτό Ricci είναι

$$R = \frac{e^{-\alpha T}(\alpha^2 - 4)\cosh^4 T}{2\beta} \quad (46)$$

Η μοναδικότητα αυτού του χωροχρόνου εμφανίζεται για $T \to \infty$ για οποιαδήποτε τιμή των σταθερών, εκτός από $\alpha^2 = 4$.

4. Άμαζο Πεδίο στο Σύμπαν FLRW

4.1. Κλασική Αντιμετώπιση

Σε αυτό το σημείο θα μελετήσουμε τις FLRW γεωμετρίες, οι οποίες ανήκουν στην κατάταξη Bianchi. Να σημειωθεί, παρόλα αυτά, ότι εμφανίζονται σαν ειδικές λύσεις διάφορων τύπων Bianchi. Η χωρικά κλειστή περίπτωση ανήκει στο μοντέλο τύπου Bianchi IX, η χωρικά ανοιχτή στο μοντέλο τύπου Bianchi V, ενώ η χωρικά επίπεδη στο μοντέλο τύπου Bianchi I. Θα λύσουμε αναλυτικά την περίπτωση για $k\neq 0$. Η γενική μορφή του γραμμικού στοιχείου ενός χωροχρόνου FLRW είναι

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + \alpha^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \quad (47)$$

Όπου N(t) είναι η συνάρτηση κενού και *α(t)* ο παράγοντας κλίμακας. Γι' αυτόν τον χωροχρόνο, η ολική Λαγκρατζιανή για βαρυτικό σύστημα με ύλη είναι

$$L = 6Nka - \frac{6a\dot{a}^2}{N} + \frac{a^3\dot{\varphi}^2}{2N} \quad (48)$$

Όπου ένας όρος ολικής χρονικής παραγώγου έχει απορριφθεί. Η Λαγκρατζιανή έχει την μοναδική μορφή της εξίσωσης (7) και εδώ εφαρμόζουμε την διαδικασία ολοκλήρωσης του συστήματος μέσω εξαρτημένων υπό όρους συμμετριών. Στο τέλος, πρέπει να κάνουμε την παραμετροποίηση στο σταθερό δυναμικό, θέτοντας $n = 6kNa$,το οποίο έχει ως αποτέλεσμα

$$L = n - \frac{36ka^2\dot{a}^2}{n} + \frac{3ka^4\dot{\varphi}^2}{n} \quad (49)$$

Με την αντίστοιχη Χαμιλτονιανή και υπερμετρική να είναι

$$\mathcal{H} = -\frac{p_\alpha^2}{72k\alpha^2} + \frac{p_\varphi^2}{12k\alpha^2} - 1 \approx 0 \quad (50)$$

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -12a & 0 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \quad (51)$$

Η υπερμετρική αναπαριστά έναν επίπεδο 2-διάστατο χώρο με τις ακόλουθες τρείς συμμετρίες και την ομοθετική

$$\xi_1 = \frac{e^{\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}}{\alpha}\partial_\alpha - \frac{2\sqrt{3}e^{\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}}{\alpha^2}\partial_\varphi \ , \ \xi_2 = \frac{e^{-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}}{\alpha}\partial_\alpha + \frac{2\sqrt{3}e^{-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}}{\alpha^2}\partial_\varphi \ ,$$

$$\xi_3 = \partial_\varphi, \quad \xi_h = \frac{a}{4}\,\partial_\alpha$$

Όπου, όπως και προηγουμένως, οι αριθμητικοί δείκτες υποδηλώνουν τα πεδία Killing, ενώ το *h* υποδηλώνει το ομοθετικό πεδίο. Αυτοί οι γεννήτορες συμμετρίας ικανοποιούν την ακόλουθη άλγεβρα αγκύλης Lie

$$[\xi_1, \xi_3] = -\frac{1}{\sqrt{3}}\xi_1 \;, [\xi_2, \xi_3] = \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_2 \,, \;\; [\xi_1, \xi_h] = \frac{1}{2}\xi_3, [\xi_2, \xi_h] = \frac{1}{2}\xi_2$$

Για την περίπτωση που *k=0* η αντίστοιχη άλγεβρα είναι η ίδια, με την διαφορά ότι οι σταθεροί συντελεστές δομής είναι $c_{31}^1 = c_{23}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $c_{1h}^1 = c_{2h}^2 = \frac{1}{2}$. Τα αντίστοιχα πρώτα ολοκληρώματα κίνησης στον χώρο διάταξης είναι

$$Q_1 = -\frac{12e^{\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}ka\left(-6\dot{\alpha} + \sqrt{3}\alpha\dot{\varphi}\right)}{n} \,, Q_2 = \frac{12e^{-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}ka\left(-6\dot{\alpha} + \sqrt{3}\alpha\dot{\varphi}\right)}{n} \quad (52)$$

$$Q_3 = \frac{6ka^4\dot{\varphi}}{n}, \quad Q_h = \frac{-18ka^3\dot{\alpha}}{n} + \int dt\, n(t) \quad (53)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε το γραμμικό στοιχείο, λύνουμε το σύστημα $Q_i = \kappa_i, i = 1,2,3,h$ με κ_i σταθερές. Η λύση παρουσιάζεται παρακάτω

$$\alpha = \frac{2 \times 3^{1/4}\sqrt{\kappa_3}e^{\frac{\varphi}{2\sqrt{3}}}}{\sqrt{-\kappa_1 + \kappa_2 e^{\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}}}}, \quad (54)$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\sqrt{\kappa_3}e^{\frac{\varphi}{2\sqrt{3}}}\left(\kappa_1 + \kappa_2 e^{\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}}\right)\dot{\varphi}}{3^{1/4}\left(-\kappa_1 + \kappa_2 e^{\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}}\right)^{3/2}}, \quad (55)$$

$$n = \frac{288\kappa_3 e^{\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}}k\dot{\varphi}}{\left(\kappa_1 - \kappa_2 e^{\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}}\right)^2}, \quad (56)$$

$$\int dt\, n(t) = -\kappa_h - \frac{\sqrt{3}\kappa_3\left(\kappa_1 + \kappa_2 e^{\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}}\right)}{2\left(\kappa_1 - \kappa_2 e^{\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}}\right)} \qquad (57)$$

Ενώ έχουμε μια σχέση για τις σταθερές που εμφανίζονται στο σύστημα, η οποία βρίσκεται μέσω της μόνης μη τετριμμένης συνθήκης σταθερότητας $\frac{\partial}{\partial t}\int dt\, n(t) = n$,

$$\kappa_1\kappa_2 + 144k = 0 \qquad (58)$$

Αυτή η σχέση αποτελεί την περιοριστική εξίσωση της θεωρίας και είναι αξιοσημείωτο να αναφέρουμε ότι η αμετάβλητη Casimir είναι ο όρος Q_1Q_2, που αποτελεί επίσης το κινητικό μέρος της Χαμιλτονιανής.

Το σύστημα των εξισώσεων $Q_i = \kappa_i, i = 1,2,3,h$ λύνεται εάν θέσουμε μια από τις σταθερές κ_1, κ_2 ίση με το μηδέν. Αυτό είναι απαραίτητο λόγω της άρσης του περιορισμού και λόγω του ότι το κινητικό μέρος (*k=0*) ισούται με Q_1Q_2.

Σε αυτή τη μορφή, η λύση συνεχίζει να περιέχει την αυθαίρετη συνάρτηση του χρόνου, συμβολίζοντας την αμεταβλητότητα στην παραμετροποίηση στον χρόνο. Επιλέγοντας $\varphi = \ln t$ βρίσκουμε ότι

$$\alpha = \frac{2\times 3^{1/4}\sqrt{\kappa_3}\, t^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}}{\sqrt{-\kappa_1 + \kappa_2 t^{\frac{2}{\sqrt{3}}}}}, \qquad N = \frac{8\times 3^{3/4}\sqrt{\kappa_3}\, t^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}{-\kappa_1 + \kappa_2 t^{\frac{2}{\sqrt{3}}}} \qquad (59)$$

Εισάγοντας τα παραπάνω στο γραμμικό στοιχείο (47) και κάνοντας τους απαραίτητους μετασχηματισμούς συντεταγμένων ώστε να απορροφηθούν οι περιττές σταθερές, καταλήγουμε ότι το τελικό γραμμικό στοιχείο αυτού του χωροχρόνου είναι

$$ds^2 = -\frac{\lambda}{4\sqrt{T}(1+T\varepsilon)^3}dT^2 + \frac{\lambda\sqrt{T}}{1+T\varepsilon}\left(\frac{1}{1-r^2\varepsilon}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \quad (60)$$

Αυτή η γεωμετρία έχει μια σημαντική σταθερά, όπως μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία των [11,12].Το βαθμωτό Ricci είναι

$$R = -\frac{3(1+T\varepsilon)^3}{2T^{3/2}\lambda} \tag{61}$$

Όπου έχουμε θέσει $\lambda = -\frac{\kappa_3}{\sqrt{3}k^{3/2}}$ καθιστώντας το μετρικό στοιχείο μοναδικό τόσο για $T \to 0$ όσο και για $T \to \infty$. Τα ίδια βήματα για χωρικά επίπεδη περίπτωση μας οδηγούν στην λύση

$$ds^2 = -dT^2 + T^{2/3}dr^2 + T^{2/3}r^2 d\theta^2 + T^{2/3}r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \tag{62}$$

Η χωροχρονική μετρική είναι γενικά επίπεδη με το βαθμωτό Ricci να είναι

$$R = -\frac{2}{3T^2} \tag{63}$$

Δεν περιέχει καμία στοιχειώδη σταθερά που να χαρακτηρίζει την γεωμετρία και το περιεχόμενο της ύλης του χωροχρόνου, και όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τον τύπο του βαθμωτού Ricci, εμφανίζεται μια μοναδικότητα για $T \to 0$.

5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

5.1. Μοντέλο Bianchi τύπου V συζευγμένο σε άμαζο βαθμωτό πεδίο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι σύνδεσμοι εφαρμόζονται σε ένα κοσμολογικό πρότυπο και συγκεκριμένα στο μοντέλο Bianchi τύπου V [3].

5.2 Κλασική Αντιμετώπιση

Η μορφή της μετρικής που αφήνει αμετάβλητο το μοντέλο δίνεται παρακάτω από τον πίνακα σ

$$\sigma^{\alpha}{}_{i} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Ο γ πίνακας που αποτελεί το χωρικό κομμάτι της μετρικής έχει την μορφή διαγώνιου πίνακα, όπως φαίνεται παρακάτω

$$\gamma = \begin{pmatrix} \alpha^4 & 0 & 0 \\ 0 & b^4 & 0 \\ 0 & 0 & c^4 \end{pmatrix} \tag{65}$$

Η κατάλληλη μορφή της χωρικής μετρικής, ώστε να είναι αμετάβλητη κάτω από μετασχηματισμούς, δίνεται μέσω της μετρικής

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -n^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x}\alpha^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2x}b^4 \end{pmatrix} \tag{66}$$

Ο 4-διάστατος χωροχρόνος επομένως περιγράφεται από το γραμμικό στοιχείο

$$ds^2 = -n^2dt^2 + c^2dx^2 + e^{-2x}\alpha^4dy^2 + e^{-2x}b^4dz^2 \tag{67}$$

Όπου οι συναρτήσεις n, α , b, c , εξαρτώνται μόνο από τον χρόνο t.

Ώστε να πάρουμε μια Λαγκρατζιανή, θα πρέπει το παραπάνω χωροχρονικό στοιχείο, ds^2, να απλοποιηθεί, λαμβάνοντας υπόψη την λύση της εξίσωσης Einstein

$$G_2^1 = T_2^1 \tag{68}$$

Αυτή η εξίσωση δίνει τη συνθήκη $c = ab$.

Η καινούρια μετρική του χωροχρόνου με βάση την συνθήκη (69) μας δίνει.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -n[t]^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a[t]b[t])^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x}a[t]^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2x}b[t]^4 \end{pmatrix} \tag{69}$$

Επίσης η μορφή της μετρικής $g^{\mu\nu}$ είναι :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n[t]^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a[t]^2b[t]^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{2x}}{a[t]^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{2x}}{b[t]^4} \end{pmatrix} \tag{70}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε την Λαγκρατζιανή, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον γενικό τύπο της δράσης

$$S_{total} = \int \sqrt{-g}\left(R + \frac{\sigma}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\right) d^4x \tag{71}$$

Όπου g είναι η ορίζουσα της μετρικής $g_{\mu\nu}$, R είναι η βαθμωτή καμπυλότητα

$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ με $R_{\mu\nu}$ τον τανυστή Ricci και Φ είναι το βαθμωτό πεδίο.

Θα χωρίσουμε την δράση σε δύο κομμάτια,

$$S_g = \int \sqrt{-g} R d^4x \tag{72}$$

Το οποίο αντιστοιχεί στην δράση του βαρυτικού πεδίου και

$$S_m = \int \sqrt{-g}\frac{\sigma}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi d^4x \tag{73}$$

που αντιστοιχεί στην δράση του βαθμωτού πεδίου.

Σκοπός μας είναι να χωρίσουμε την δράση σε δύο ολοκληρώματα. Το ένα ολοκλήρωμα θα περιέχει μόνο το χωρικό κομμάτι, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι σταθερό και να μην το λάβουμε υπόψη μας, ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα θα περιέχει οτιδήποτε εξαρτάται από τον χρόνο.

Υπολογίζουμε την βαθμωτή καμπυλότητα R, μέσω του προγράμματος Mathematica[13].

$$R = \frac{1}{u^3} 432ab \left(-\frac{u^3}{72a^3b^3} + \frac{2bu\dot{a}^2}{3a} + \frac{5}{3}u\dot{a}\dot{b} + \frac{2au\dot{b}^2}{3b} - 3ab^2\dot{a}\dot{n} - 3a^2\dot{b}b\dot{n} + \frac{1}{2}bu\ddot{a} + \frac{1}{2}au\ddot{b} \right) \quad (74)$$

Και την ορίζουσα της μετρικής

$$g = -\frac{1}{36} e^{-4x} a^4 b^4 u^2 \quad (75)$$

Αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα S_g και έχουμε

$$S_g = \int e^{-2x} \left(-6abn + \frac{8ab^3\dot{a}^2}{n} + \frac{20a^2b^2\dot{a}\dot{b}}{n} + \frac{8a^3b\dot{b}^2}{n} - \frac{6a^2b^3\dot{a}\dot{n}}{n^2} - \frac{6a^3b^2\dot{b}\dot{n}}{n^2} + \frac{6a^2b^3\ddot{a}}{n} + \frac{6a^3b^2\ddot{b}}{n} \right) d^4x \quad (76)$$

$$S_g = \int e^{-2x}\, d^3t \int \left(-6abn + \frac{8ab^3\dot{a}^2}{n} + \frac{20a^2b^2\dot{a}\dot{b}}{n} + \frac{8a^3b\dot{b}^2}{n} - \frac{6a^2b^3\dot{a}\dot{n}}{n^2} - \frac{6a^3b^2\dot{b}\dot{n}}{n^2} + \frac{6a^2b^3\ddot{a}}{n} + \frac{6a^3b^2\ddot{b}}{n} \right) dt \quad (77)$$

Το πρώτο κομμάτι της δράσης του βαρυτικού πεδίου (το χωρικό κομμάτι) το θεωρούμε σταθερό και το ξεχνάμε. Θέλουμε να αφαιρέσουμε επίσης τους όρους που έχουν $\frac{1}{n^2}$, τους οποίους θεωρούμε επιφανειακούς όρους.

Οπότε είναι

$$S_g = \int \left(-6abn - \frac{4ab^3\dot{a}^2}{n} - \frac{16a^2b^2\dot{a}\dot{b}}{n} - \frac{4a^3b\dot{b}^2}{n} \right) dt + \int \partial_t \left(\frac{6a^2b^3\dot{a}}{n} + \frac{6a^3b^2\dot{b}}{n} \right) dt$$

Όπου $\int \partial_t \left(\frac{6a^2b^3\dot{a}}{n} + \frac{6a^3b^2\dot{b}}{n} \right) dt$ είναι οι επιφανειακοί όροι.

Η τελική μορφή της δράσης του βαρυτικού πεδίου είναι:

$$S_g = \int \left(-6abn - \frac{4ab^3\dot{a}^2}{n} - \frac{16a^2b^2\dot{a}\dot{b}}{n} - \frac{4a^3b\dot{b}^2}{n} \right) dt \qquad (78)$$

Το αντίστοιχο θα κάνουμε και με την δράση του βαθμωτού πεδίου, η οποία είναι

$$S_m = \int \frac{a^3b^3\dot{f}^2}{2n} dt \qquad (79)$$

Οπότε η συνολική δράση βρίσκεται

$$S_{total} = S_g + S_m = \int \left(-6abn - \frac{4ab^3\dot{a}^2}{n} - \frac{16a^2b^2\dot{a}\dot{b}}{n} - \frac{4a^3b\dot{b}^2}{n} + \frac{a^3b^3\dot{f}^2}{2n} \right) dt \; (80)$$

Η ολοκλήρωση της συνολικής δράσης , εφόσον απορρίψουμε έναν όρο ολικής παραγώγου δίνει την παρακάτω Λαγκρατζιανή.

$$L = -6abn - \frac{4ab^3\dot{a}^2}{n} - \frac{16a^2b^2\dot{a}\dot{b}}{n} - \frac{4a^3b\dot{b}^2}{n} + \frac{a^3b^3\dot{f}^2}{2n} \qquad (81)$$

Η συνολική Λαγκρατζιανή είναι το άθροισμα των δύο επιμέρους Λαγκρατζιανών τις οποίες χρησιμοποιήσαμε για να βρούμε τις επιμέρους δράσεις (78,79)

$$L_{total} = L_g + L_m \qquad (82)$$

Με σκοπό να υποθέσουμε την παραμετροποίηση για σταθερό δυναμικό, κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$n(t) = \frac{u(t)}{6a(t)b(t)} \qquad (83)$$

Οπότε η Λαγκρατζιανή της σχέσης (81) μετασχηματίζεται μέσω της (83) σε:

$$L = -u - \frac{24a^2b^4\dot{a}^2}{u} - \frac{96a^3b^3\dot{a}\dot{b}}{u} - \frac{24a^4b^2\dot{b}^2}{u} + \frac{3a^4b^4\dot{f}^2}{u} \quad (84)$$

Θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητών με σκοπό να είναι πιο εύκολα διακριτές οι συμμετρίες, ενώ το βαθμωτό πεδίο παραμένει ίδιο.

$$\alpha = e^{\frac{y+v}{4}} \quad , \quad b = e^{\frac{1}{4}(y-v)} \quad (85)$$

Η καινούρια Λαγκραντζιανή μέσω των μετασχηματισμών (85) θα γίνει

$$L = -u - \frac{3e^{2y}\left(\dot{f}^2 - \dot{v}^2 + 3\dot{y}^2\right)}{u} \quad (86)$$

Στη συνέχεια θα βρούμε τις γενικευμένες ορμές, με σκοπό να καταλήξουμε στην Χαμιλτονιανή του συστήματος

$$P_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = \frac{6e^{2y}\dot{v}}{u}$$

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -\frac{18e^{2y}\dot{y}}{u}$$

$$P_f = \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} = -\frac{6e^{2y}\dot{f}}{u}$$

Η Χαμιλτονιανή του προβλήματος που μελετάμε είναι η

$$\mathcal{H} = 1 - \frac{1}{36}e^{-2y}{P_y}^2 + \frac{1}{12}e^{-2y}{P_v}^2 + \frac{1}{12}e^{-2y}{P_f}^2 \quad (87)$$

Και η υπερμετρική του χωροχρόνου είναι

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -18e^{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 6e^{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 6e^{2y} \end{pmatrix} \quad (88)$$

Αυτός ο υπερχώρος είναι γενικά επίπεδος και έχει τα ακόλουθα πεδία Killing και το ομοθετικό

$$\xi_1 = \partial_v \ , \ \ \xi_2 = f\partial_v - v\partial_f \ \ ,\xi_3 = \partial_f, \ \ \xi_h = \frac{1}{2}\,\partial_y \tag{89}$$

Και ικανοποιούν την άλγεβρα Lie

$$[\xi_1, \xi_2] = -\xi_3 \ \ ,[\xi_2, \xi_3] = -\xi_1 \tag{90}$$

Τα πρώτα ολοκληρώματα της κίνησης στον χώρο ταχυτήτων φάσεων είναι

$$Q_1 = \frac{6e^{2y}\,\dot{v}}{u} \tag{91}$$

$$Q_2 = \frac{6e^{2y}\left(f\dot{v} - v\dot{f}\right)}{u} \tag{92}$$

$$Q_3 = \frac{6e^{2y}\dot{f}}{u} \tag{93}$$

$$Q_h = -\frac{9e^{2y}\dot{y}}{u} - \int dt\, u(t) \tag{94}$$

Και η λύση του συστήματος $Q_i = \kappa_i, i = 1,2,3, h$ είναι

$$u = \frac{6e^{2y}\dot{v}}{\kappa_1},$$

$$y = \ln\left(2\sqrt{c_2}\sinh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{c_2}(c_3\kappa_1 - 2v)}{\kappa_1}\right)\right),$$

$$f = c_1 + \frac{\kappa_3 v}{\kappa_1}\ ,\kappa_2 = c_1\kappa_1$$

Όπου c_i οι σταθερές ολοκλήρωσης και οι τελευταίες σχέσεις χρησιμοποιούνται για να μειωθεί ο αριθμός των σταθερών στη λύση μας. Μια άλλη σχέση για τις σταθερές εμφανίζεται μέσω της απαίτησης να ικανοποιεί την εξίσωση περιορισμού, η οποία είναι

$$\kappa_1^2 + \kappa_3^2 = 48c_2 \tag{95}$$

Επιλέγουμε την βαθμίδα

$$v = \frac{1}{4}\left(-2c_3\kappa_1 - \frac{\kappa_1\cosh^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{c_2}}\right) \tag{96}$$

Και επιστρέφουμε στις αρχικές μεταβλητές χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό (85). Μετά από αυτή τη διαδικασία, η μετρική του χωροχρόνου βρίσκεται να είναι

$$ds^2 = -\frac{\sqrt{c_2}}{2\sinh^3 T}dT^2 + \frac{2\sqrt{c_2}}{\sinh T}dx^2 + \frac{2e^{-2x-\lambda T}}{\sinh T}dy^2 + \frac{2e^{-2x+\lambda T}}{\sinh T}dz^2 \quad (97)$$

όταν το $\lambda = \frac{\kappa_1}{4\sqrt{c_2}}$. Αυτή η μετρική περιέχει δύο στοιχειώδεις σταθερές.

Η μοναδικότητα εμφανίζεται για $T \to \infty$, όπως μπορεί να φανεί από το βαθμωτό του Ricci

$$R = \frac{(\lambda^2 - 3)\sinh^3 T}{\sqrt{c_2}} \quad (98)$$

Και εξαφανίζεται για $\lambda^2 = 3$.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Utah State University, Physics Department, General Relativity, Lecture Notes (2013)

[2] Θ. Χριστοδουλάκης, Γενική Θεωρία Σχετικότητας και Κοσμολογία, Σημειώσεις μαθήματος

[3] Adamantia Zampeli, Theodoros Pailas, Petros A. Terzis and T. Christodoulakis, Conditional symmetries in axisymmetric quantum cosmologies with scalar fields and the fate of classical singularities, JCAP05 (2016)

[4] T. Christodoulakis, N. Dimakis and P.A. Terzis, Lie point and variational symmetries in minisuperspace Einstein gravity, J. Phys. A 47 (2014) 095202 [arXiv:1304.4359] [INSPIRE].

[5] M.P. Ryan and L.C. Shepley, Homogeneous relativistic cosmologies, Princeton Series in Physics, Princeton Univ. Pr., Princeton U.S.A. (1975).

[6] T. Christodoulakis and P.A. Terzis, Automorphism inducing diffeomorphisms and the general solution of Bianchi type-III vacuum cosmology, J. Math. Phys. 47 (2006) 102502 [gr-qc/0410123] [INSPIRE].

[7] T. Christodoulakis and P.A. Terzis, The general solution of Bianchi type-III vacuum cosmology, Class. Quant. Grav. 24 (2007) 875 [gr-qc/0607063] [INSPIRE].

[8] P.A. Terzis and T. Christodoulakis, The general solution of Bianchi type VIIh vacuum cosmology, Gen. Rel. Grav. 41 (2009) 469 [arXiv:0803.3710] [INSPIRE].

[9] P.A. Terzis and T. Christodoulakis, Lie algebra automorphisms as Lie point symmetries and the solution space for Bianchi type I, II, IV, V vacuum geometries, Class. Quant. Grav. 29 (2012) 235007 [arXiv:1007.1561] [INSPIRE].

[10] P.A. Terzis, N. Dimakis and T. Christodoulakis, Noether analysis of scalar-tensor cosmology, Phys. Rev. D 90 (2014) 123543 [arXiv:1410.0802] [INSPIRE].

[11] G.O. Papadopoulos, Essential constants in general relativity, J. Math. Phys. 47 (2006) 092502 [gr-qc/0503096] [INSPIRE].

[12] T. Christodoulakis, S. Hervik and G.O. Papadopoulos, Essential constants for spatially homogeneous Ricci flat manifolds of dimension-(4 + 1), J. Phys. A 37 (2004) 4039 [gr-qc/0311025] [INSPIRE].

[13] Wolfram Mathematica