ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

**Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών**

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837—

# ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΠΑΥΛΟΣ Α. ΠΑΛΛΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Επιβλέπων: Ι.Μ.ΡΑΣΣΙΑΣ
Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2018

## Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

1. **Ρασσιάς Ιωάννης**, Ομ. Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αθηνών (Επιβλέπων)
2. **Βουδούρη Αγγελική**, Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αθηνών
3. **Μπαραλής Γεώργιος**, Αναπλ. Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αθηνών.

## Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

1. **Βουδούρη Αγγελική**, Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αθηνών
2. **Μπαραλής Γεώργιος**, Αναπλ. Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αθηνών.
3. **Γιαλαμάς Βασίλης**, Καθηγητής Τ.Ε.Α.Π.Η. Πανεπιστημίου Αθηνών.
4. **Ζαράνης Νικόλαος**, Αναπλ. Καθηγητής Π.Τ.Π.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης.
5. **Κρητικός Εμμανουήλ**, Επίκ. Καθηγητής Τμήματος Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών.
6. **Μισαηλίδου Χριστίνα**, Λέκτορας Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αθηνών.
7. **Ψαρομήλιγκος Ιωάννης**, Καθηγητής Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων του Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ.

# Ευχαριστίες

Θερμές ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ιωάννη Μ. Ρασσιά για την πολυετή συνεργασία μας και την αμέριστη συμπαράστασή του για την εκπόνηση της παρούσας διατριβής. Η πολύτιμη εμπειρία του, η επιστημονική του συμβολή στον τομέα της Συναρτησιακής Ανάλυσης και η άοκνη παρότρυνσή του σε καίριες στιγμές, μου έδωσαν θάρρος στην προσπάθειά μου να συμβάλλω το ελάχιστο, στο γοητευτικό πρόβλημα της ευστάθειας Ulam.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής καθηγήτρια κ. Α. Βουδούρη, καθηγητή κ. Γ. Μπαραλή και ιδιαίτερα τον καθηγητή G.L. Forti, Univesita degli Studi di Milano, για τις χρήσιμες υποδείξεις του , καθώς και τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής, κ. Β. Γιαλαμά, κ. Χ. Μισαηλίδου , κ. Ε. Κρητικό, κ. Ν. Ζαράνη και κ. Ι. Ψαρομήλιγκο, για τις εύστοχες και εποικοδομητικές παρατηρήσεις τους.

Τέλος να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για την ηθική στήριξη στο εγχείρημα αυτό. Το παρόν αφιερώνεται στον γιό μου Αλέξανδρο.

# Περιεχόμενα

**Κεφάλαιο 5**

# Περίληψη

Η παρούσα διατριβή παρουσιάζει νέες συναρτησιακές εξισώσεις πολυωνυμικού τύπου και μελετά αυτές ως προς την ευστάθειά τους κατά Hyers-Ulam-Rassias και Ulam-Gavruta-Rassias. Η μελέτη αφορά 2ου(Quadratic), 3ου(Cubic), 4ου(Quartic) βαθμού και μικτού τύπου (συνδυασμός) συναρτησιακές εξισώσεις , εξετάζοντας και περιπτώσεις μη- ευστάθειας δίνοντας κατάλληλα αντιπαραδείγματα.

Στην εισαγωγή και στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζεται μια εκτενή αναφορά στην ιστορική εξέλιξη του προβλήματος της ευστάθειας του Ulam, την μεθοδολογική προσέγγιση της επίλυσής του, ενσωματώνοντας τις τελευταίες μεθόδους ευστάθειας και δίνεται μια εκτενή βιβλιογραφική ανασκόπηση. Αναφορά γίνεται σε βιογραφικά στοιχεία του Ulam και σε εφαρμογές της ευστάθειας σε προβλήματα και άλλους επιστημονικούς τομείς. Το παρών μέρος της εργασίας είναι υπό δημοσίευση στο περιοδικό *Μαθηματική Επιθεώρηση* .

Στο Κεφάλαιο 2, μελετώνται δευτέρου βαθμού συναρτησιακές εξισώσεις και συγκεκριμένα μια τροποποίηση της κλασικής τετραγωνικής συναρτησιακής εξίσωσης $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$, γενίκευση μιας δευτεροβάθμιας και δύο νέες εξισώσεις σε χώρους Banach. Η παράγραφος 2.1 έχει δημοσιευτεί από τον συγγραφέα, βλ. P.A.Pallas, *On the generalized Hyers-Ulam stability of an Euler-Lagrange type quadratic functional equation,* Far East Journal of Mathematical Sciences, Vol.101, Number 10, (2017), 2173-2184.

Το Κεφάλαιο 3, ασχολείται με τις τρίτου και τετάρτου βαθμού εξισώσεις ως προς την ευστάθεια Ulam κάνοντας χρήση μεθόδων ευστάθειας σε non-Archimedean χώρους. Απάντηση δίνεται σε ανοικτό πρόβλημα για την ευστάθεια της $\alpha$ -quartic συναρτησιακής εξίσωσης

$$2\left[f(ax+y)+f(x+ay)\right]+a(a-1)^2 f(x-y)=2(a^2-1)^2\left[f(x)+f(y)\right] \\ +a(a+1)^2 f(x+y), \quad a\neq 0,\pm 1$$

όπου ζητείται η μελέτη της γενικευμένης ευστάθειας Hyers-Ulam-Rassias, και η εύρεση των συνθηκών ευστάθειας. Παρουσιάζεται η ευστάθειά της σε non-Archimedean χώρους με χρήση της ευθείας και της σταθερού σημείου μεθόδου. (Direct και Fixed point method).

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias και Ulam-Gavruta-Rassias μικτών συναρτησιακών εξισώσεων. Στις μικτού τύπου πολυωνυμικές συναρτησιακές εξισώσεις η επίλυση καθώς και η ευστάθεια μελετάται συνήθως

διαχωρίζοντας τις περιπτώσεις άρτιας και περιττής συνάρτησης. Η πορεία της εύρεσης των συνθηκών ευστάθειας περιλαμβάνει επίσης θεωρήματα που εξετάζουν την ευστάθεια ξεχωριστά για κάθε μία προσθετική, τετραγωνική κλπ. συναρτησιακή εξίσωση που προσεγγίζει την αρχική. Στη συνέχεια, ένα συνδυαστικό θεώρημα ενσωματώνει τα επιμέρους συμπεράσματα. Τα πορίσματα που αφορούν την ευστάθεια Rassias ακολουθούν την ίδια διάταξη. Παρουσιάζονται μικτές εξισώσεις σε χώρους Banach, quasi $\beta$-normed και fuzzy Banach, ενώ δίνονται παραδείγματα μη ευστάθειας.

Ειδικότερα, στην ενότητα 4.1 επιλύεται και εξετάζεται η ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias μιας νέας, μικτού τύπου, προσθετικής- τετραγωνικής, συναρτησιακής εξίσωσης

$$f(x+y+z)+f(x-y+z)+f(x+y-z)+f(x-y-z)=4f(x)+2\left[f(y)+f(-y)\right] \\ +2\left[f(z)+f(-z)\right]$$

χρησιμοποιώντας την ευθεία μέθοδο Hyers και την σταθερού σημείου, σε χώρους Banach. Η μη ευστάθεια εξετάζεται με παράθεση παραδειγμάτων για τις περιπτώσεις μη ευστάθειας τόσο στα Θεωρήματα της ευθείας μεθόδου όσο και στα Θεωρήματα της μεθόδου σταθερού σημείου . Γίνεται διάκριση των περιπτώσεων σε άρτια και περιττή συνάρτηση. Στην ενότητα 4.2 μελετάται η ευστάθεια μιας νέας μικτής συναρτησιακής εξίσωσης σε σταθμητούς *quasi-* $\beta$*-normed* χώρους. Χώρος που εισήχθη από J.M.Rassias και Kim σχετικά πρόσφατα. Στην ενότητα 4.3 , παρουσιάζεται το πρόβλημα της ευστάθειας σε ασαφείς τοπολογικές δομές (fuzzy normed spaces).

Στο Κεφάλαιο 5, γίνεται η αποτίμηση της όλης ερευνητικής προσπάθειας και της συμβολής της στην διερεύνηση της ευστάθειας συναρτησιακών εξισώσεων πολυωνυμικού τύπου. Επίσης σκιαγραφούνται οι μελλοντικές προοπτικές και σημεία στόχευσης της έρευνας που προκύπτουν από τα αποτελέσματα αυτού του ερευνητικού έργου. Τέτοιες κατευθύνσεις είναι η διερεύνηση της ευστάθειας μεγαλυτέρου βαθμού του 4 με τη χρήση ενός γενικού μοντέλου περιγραφής εξίσωσης πολυωνυμικού τύπου, γενίκευση των κυβικών εξισώσεων εισάγοντας νέες παραμέτρους, όπως επίσης μια σειρά από ανοιχτά προβλήματα που αφορούν την εξέταση της ευστάθειας με χρήση και των δύο άλλων μεθόδων ευστάθειας σε διάφορους τοπολογικούς χώρους.

**Λέξεις Κλειδιά**

Ευστάθεια Ulam, γενικευμένη ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias, μικτού τύπου συναρτησιακές εξισώσεις, Fixed point Theory, χώροι Banach.

## Abstract

This PhD Thesis introduces new functional equations of polynomial type and studies their Hyers-Ulam-Rassias and Ulam-Gavruta-Rassias stability. Chapter 1, reviews and presents the evolution of the Ulam Stability Problem during the last 70 years. We highlight the main theoretical results and tools that researchers in the field discovered. Methods of stability and applications in a variety of fields are also mentioned. In Chapter 2, generalization, and modification of classical quadratic functional equation is examined. Also, two new quadratic functional equations are introduced. In Chapter 3, we present two cubic functional equations and we answer an open problem, posed by J.M Rassias, concerned the $\alpha$-quartic functional equation in non-Archimedean spaces. Finally in Chapter 4, we deal with mixed type functional equations, especially additive-quadratic equations and study them in various spaces. Also, a capable number of counterexamples are given. Chapter 5 poses some open problems that derived from the research.

**Keywords**

Ulam stability, Generalized Hyers-Ulam-Rassias Stability, Mixed type functional equations, Fixed point Theory, Banach spaces.

# Εισαγωγή

Ο S. M. Ulam υπήρξε ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς της νεότερης εποχής. Γεννήθηκε στην πόλη Lwów, της Πολωνίας τον Απρίλιο του 1909 και πέθανε στη Santa Fe, U.S.A. το Μάιο του 1984. Αποφοίτησε με διδακτορικό στα Θεωρητικά Μαθηματικά από το Πολυτεχνείο της Lwów το 1933 και εργάστηκε στα μεγαλύτερα ερευνητικά κέντρα της Αμερικής για περισσότερα από 40 χρόνια. Ενδεικτικά αναφέρουμε, The Institute for Advanced Study, Princeton (1936), Harvard University (1939-40), University of Wisconsin (1941-43), Los Alamos Scientific Laboratory (1943-65), University of Colorado (1965-76) και University of Florida (1974). Η συνεισφορά του σε θεμελιώδη ζητήματα των Μαθηματικών, της Φυσικής, της Βιολογίας, της Πληροφορικής ήταν καίρια. Μαζί του συνεργάστηκαν κορυφαίοι θεωρητικοί και εφαρμοσμένοι των Μαθηματικών της εποχής: Stefan Banach, Kazimir Kuratowski, Stanislaw Mazur, Hugo Steinhaus, John von Neumann, Garrett Birkhoff, Cornelius Everett, D. H. Hyers, P. R. Stein, Enrico Fermi, John Pasta, Richard Feynman, Ernest Lawrence, J. Robert Oppenheimer. O Ulam προσκλήθηκε από τον von Neumann στο Los Alamos και η παραμονή του εκεί οδήγησε αφενός στην μεταπολεμική ανάπτυξη της πυρηνικής εποχής, και αφετέρου στην επίλυση μιας ευρείας γκάμας προβλημάτων με την ανακάλυψη της πιο διάσημης προσομοίωσης με τυχαίους αριθμούς, την Monte Carlo simulation. Η παραγωγικότητα του Ulam να θέτει προβλήματα που με τη σειρά τους τροφοδοτούσαν γόνιμα την έρευνα ήταν απότοκο των συζητήσεων στο περίφημο Scottish Café της Lwów, όπου για αρκετές ώρες μέλη της Lwów School of Mathematics πρότειναν διάφορα προβλήματα τα οποία και καταγραφόταν στο περίφημο Scottish Book, ένα πυκνογραμμένο σημειωματάριο του S. Banach. Άλλωστε όπως χαρακτηριστικά σημειώνει ο Ulam, *‘’η αισθητική ομορφιά των θεωρητικών μαθηματικών δεν εντοπίζεται μόνο στην λογική των αποδείξεων και των θεωρημάτων αλλά και στην ποιητική κομψότητα και οικονομία της συνένωσης κάθε βήματος σε μια μαθηματική παρουσίαση’’*.([3] και [71]). Αν μπορούσαμε να εστιάσουμε σε ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά προβλήματα που έθεσε ο Ulam, και αποτελεί για τα τελευταία 40 και πλέον έτη γενεσιουργό πρόβλημα στη Συναρτησιακή Ανάλυση, θα ήταν το πρόβλημα της ευστάθειας. Αποφεύγοντας την μαθηματική αυστηρότητα θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα ευστάθειας Ulam ως εξής: *Να βρεθούν οι συνθήκες ώστε η λύση μιας εξίσωσης που διαφέρει λίγο από μια δοθείσα εξίσωση να βρίσκεται κοντά στην λύση της εξίσωσης.*

Το βασικό πρόβλημα στην εξέταση της ευστάθειας μιας συναρτησιακής εξίσωσης είναι η εύρεση μιας απεικόνισης που είναι συγκεκριμένου βαθμού, μοναδική και προσεγγίζει την αρχική, που είναι του αυτού βαθμού, αλλά με μια ''απόκλιση'' που καθορίζεται από μια συνάρτηση. Το πόσο κοντά βρίσκεται η απεικόνιση εξαρτάται άμεσα από το φράγμα-συνάρτηση.

## Εφαρμογές της ευστάθειας Ulam

Ο μεγάλος αριθμός των εφαρμογών της ευστάθειας Ulam είναι ενδεικτικός της σπουδαιότητας του προβλήματος στον εφαρμοσμένο χώρο αλλά και στη γενεσιουργό του δύναμη επέκτασης νέων θεωριών στη μη-Γραμμική Ανάλυση και αλλού όπως αναφέρουμε παρακάτω.

Πολλές εκδοχές της τετραγωνικής Euler-Lagrange συναρτησιακής εξίσωσης,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

οδήγησαν στην γέννηση των απεικονίσεων Euler-Lagrange-Rassias και των αντίστοιχων εξισώσεων στις οποίες αναφέρονται, [91]. Αυτές ενέχουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω της συγχώνευσης που επετεύχθη μεταξύ της θεωρίας πιθανοτήτων και στοχαστικής ανάλυσης με την εισαγωγή των σταθμητών μέσων, βλ. και [73].

Επίσης, κίνητρο μελέτης κυβικών συναρτησιακών εξισώσεων ήταν το γεγονός ότι βρίσκουν εφαρμογές σε προβλήματα αυτο-διόρθωσης και αυτο-ελέγχου υπολογιστικών προγραμμάτων που υπολογίζουν πολυώνυμα. Το εύρος εφαρμογών αλλά και η συχνότητα με την οποία οι συναρτησιακές εξισώσεις εμφανίζονται από την Οπτική και τις Πιθανότητες έως το δυναμικό προγραμματισμό πολυεπίπεδων διαδικασιών αποφάσεων στην Πληροφορική, ''συμπαρασύρει'' και την ευστάθεια Ulam που καλείται να βρει την προσεγγιστική λύση εκεί που δεν υπάρχει ή είναι πρακτικά αδύνατη η επίλυση της εξίσωσης.

Η ευστάθεια κατά Ulam σε πολλούς τομείς όπως η Αριθμητική Ανάλυση, Βιολογία, Οικονομικές επιστήμες, βελτιστοποίηση ( εύρεση διάδοσης σήματος μέσω της μικρότερης διαδρομής στο λιγότερο χρόνο διέλευσης) κλπ., όπου η εύρεση ακριβούς λύσης είναι δύσκολη ή αδύνατη εγγυάται ότι υπάρχει μία ακριβής λύση αρκετά κοντά στην υπό εξέταση εξίσωση. Σε μοντέλα που τα στοχαστικά αποτελέσματα είναι μικρά, η χρήση ενός ντετερμινιστικού που προσεγγίζει ικανοποιητικά το στοχαστικό είναι αρκετά βοηθητική. Ενδεικτικά αναφέρουμε το *SIS infection model* ,[2], ( επιδημιολογικό μοντέλο που μελετά την μεταδοτικότητα μιας ασθένειας) στη Βιολογία όπου πληθυσμός μεγέθους N, διαιρείται σε άτομα επιρρεπή σε ασθένεια και άτομα που είναι ήδη φορείς της. Ένα τέτοιο σύστημα είναι ευσταθές κατά *Ulam*. Αυτό είναι σημαντικό εφόσον ο υπολογισμός του πραγματικού αριθμού των επιμολυσμένων ατόμων είναι πρακτικά αδύνατος.

Στις Οικονομικές επιστήμες το μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του οικονομικού μονοπωλίου είναι ευσταθές κατά Ulam. Επίσης ζητήματα με την κοστολόγηση παράγωγων χρηματιστηριακών προϊόντων( *Option pricing, Black-Scholes equation* ) χρησιμοποιούν την έννοια της ευστάθειας κατά Ulam. Βλ. [49] και τις αναφορές εκεί. Οι εφαρμογές της ευστάθειας *Hyers-Ulam-Rassias*, σε ζητήματα μη γραμμικής Ανάλυσης που περιλαμβάνουν διαφορικές εξισώσεις, ολοκληρωτικές και μερικές διαφορικές εξισώσεις αποτυπώνεται στις εργασίες [34],[35] και στις εκεί αναφορές τους. Περισσότερες εφαρμογές μπορούν να αναζητηθούν και στις εργασίες [20] και [36].

# Κεφάλαιο 1

# Το Πρόβλημα Ευστάθειας του Ulam.

# Ένα Γενεσιουργό Πρόβλημα της Συναρτησιακής Ανάλυσης

Το πρόβλημα της ευστάθειας κατά Ulam- αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως *Hyers-Ulam-Rassias* Stability problem- έθεσε ο Ulam το 1940,[99] σε μια διάλεξη στο Mathematics Club of the University of Wisconsin, πάνω στους ομομορφισμούς.

*Let* $G_1$ *be a group and let* $G_2$ *be a metric group with a metric* $d(\cdot,\cdot)$. *Given* $\varepsilon > 0$, *does there exist a* $\delta > 0$ *such that if a function* $h: G_1 \to G_2$ *satisfies the inequality* $d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$ *for all* $x, y \in G_1$, *then there is a homomorfism* $H: G_1 \to G_2$ *with* $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ *for all* $x, y \in G_1$*?*

Δηλαδή,

Έστω $G_1$ *μια ομάδα και* $G_2$ *μια μετρική ομάδα με μια μετρική* $d(\cdot,\cdot)$. *Αν* $\varepsilon > 0$, *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε, αν η συνάρτηση* $h: G_1 \to G_2$ *ικανοποιεί την ανισότητα* $d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$ *για κάθε* $x, y \in G_1$, *τότε υπάρχει ένας ομομορφισμός* $H: G_1 \to G_2$ *με* $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ *για κάθε* $x, y \in G_1$*;*

Ή το ακόλουθο γενικευμένο πρόβλημα:

*‘’Να δοθούν οι συνθήκες ώστε μεταβάλλοντας λίγο τις υποθέσεις ενός θεωρήματος να εξακολουθεί να είναι αληθές ή περίπου αληθές’’.*

Πιο ειδικά θα μπορούσαμε να πούμε, να βρεθούν οι συνθήκες ώστε η λύση μιας εξίσωσης που διαφέρει λίγο από μια δοθείσα εξίσωση να βρίσκεται κοντά στην λύση της εξίσωσης. Αν αντικαταστήσουμε μια δοθείσα συναρτησιακή εξίσωση με μια συναρτησιακή ανίσωση, και είμαστε σε θέση να ισχυριστούμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης βρίσκονται κοντά στις λύσεις της αυστηρά εξίσωσης, τότε λέμε την συναρτησιακή εξίσωση για ομομορφισμούς ευσταθή, *stable*, βλ. [94].

## 1.1 Βασικά Θεωρήματα

Το 1941, ο D.H.Hyers, [32], έλυσε μερικώς το πρόβλημα του Ulam για χώρους Banach. Αν για την $f : E_1 \to E_2$ ισχύει $\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \le \delta$ για κάθε $x, y \in E_1$, δηλαδή είναι δ-γραμμική, τότε το πρόβλημα του Ulam μπορεί να διατυπωθεί ως εξής, σύμφωνα με τον Hyers: *Υπάρχει για κάθε* $\varepsilon > 0$ *ένα* $\delta > 0$ *ώστε, για κάθε δ-γραμμική* $f : E_1 \to E_2$ *να αντιστοιχεί μια γραμμική* $A : E_1 \to E_2$ *που ικανοποιεί την* $\| f(x) - A(x) \| \le \varepsilon$*, για κάθε* $x \in E_1$*;* Η απάντηση που δίνει ο Hyers είναι, το δ να ισούται με ε. Δηλαδή η εξίσωση Cauchy $f(x+y) - f(x) - f(y) = 0$ είναι ευσταθής. Επιπλέον, η σχέση μεταξύ των $f, A$ δίνεται από τον τύπο $A(x) = \lim_{n\to\infty} f(2^n x) / 2^n$.

Η μέθοδος που οδηγεί σε έναν τέτοιο τύπο καλείται ευθεία μέθοδος (*direct method).*

**Θεώρημα (Hyers [32]).** *Έστω* $f : E_1 \to E_2$ *μια συνάρτηση μεταξύ χώρων Banach ώστε*

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \le \delta \tag{1}$$

*για κάποιο* $\delta > 0$ *και για κάθε* $x, y \in E_1$*. Τότε το όριο*

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x) \tag{2}$$

*υπάρχει για κάθε* $x \in E_1$ *και* $A : E_1 \to E_2$ *είναι η μοναδική προσθετική συνάρτηση ώστε*

$$\| f(x) - A(x) \| \le \delta \tag{3}$$

*για κάθε* $x \in E_1$*. Επιπλέον αν η* $f(tx)$ *είναι συνεχής στο* $t$ *για κάθε σταθερό* $x \in E_1$*, τότε η* $A$ *είναι γραμμική.*

*Απόδειξη:* Για κάθε $x \in E_1$ η ανισότητα $\| f(2x) - 2f(x) \| \le \delta$ είναι προφανής από την (1). Αντικαθιστώντας το $x$ με $x/2$ σε αυτήν και διαιρώντας με $2$ έχουμε

$$\left\| \frac{1}{2} f(x) - f(\frac{x}{2}) \right\| \le \frac{1}{2}\delta$$

για κάθε $x \in E_1$.Αν υποθέσουμε επαγωγικά ότι

$$\left\| 2^{-n} f(x) - f(2^{-n} x) \right\| \le (1 - 2^{-n})\delta \qquad (*)$$

έπεται από τις δύο τελευταίες ανισότητες ότι

$$\left\| \frac{1}{2} f(2^{-n} x) - f(2^{-n-1} x) \right\| \le \frac{1}{2}\delta$$

και

$$\left\| 2^{-n-1} f(x) - \frac{1}{2} f(2^{-n} x) \right\| \le \frac{1}{2}(1 - 2^{-n})\delta.$$

Οπότε,

$$\left\| 2^{-n-1} f(x) - f(2^{-n-1} x) \right\| \le (1 - 2^{-n-1})\delta.$$

Επομένως, η ανισότητα (*) είναι αληθής για κάθε $x \in E_1$ και $n \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $q_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$, με $n \in \mathbb{N}$ και $x \in E_1$. Τότε

$$\begin{aligned} q_m(x) - q_n(x) &= 2^{-m} f(2^m x) - 2^{-n} f(2^n x) \\ &= 2^{-m} \left( f(2^{m-n} 2^n x) - 2^{m-n} f(2^n x) \right). \end{aligned}$$

Οπότε, αν $m < n$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα (*) στην τελευταία ισότητα και έχουμε

$$\left\| q_m(x) - q_n(x) \right\| \le (2^{-m} - 2^{-n})\delta$$

για κάθε $x \in E_1$. Έτσι, η ακολουθία $\{q_n(x)\}$ είναι μια ακολουθία Cauchy για κάθε $x \in E_1$, και εφόσον ο $E_2$ είναι πλήρης, υπάρχει μια συνάρτηση όριο

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x).$$

Έστω $x$ και $y$ δύο τυχαία σημεία του $E_1$. Εφόσον η $f : E_1 \to E_2$ είναι δ-γραμμική,

$$\left\| f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y) \right\| \le \delta$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Διαιρώντας με $2^n$ και $n \to \infty$ διαπιστώνουμε ότι η $A$είναι προσθετική συνάρτηση. Αν αντικαταστήσουμε το $x$ με $2^n x$ στην (*) και παίρνοντας το όριο, έχουμε την ανισότητα (3).

Έστω ότι $A' : E_1 \to E_2$ είναι μια άλλη προσθετική συνάρτηση που ικανοποιεί την (3) στη θέση της $A$, και τέτοια ώστε $A(y) \ne A'(y)$ για κάποιο $y \in E_1$. Για κάθε θετικό ακέραιο $n > 2\delta / \|A(y) - A'(y)\|$ η ανισότητα $\|A(ny) - A'(ny)\| > 2\delta$ ισχύει. Από την άλλη, αυτή έρχεται σε αντίθεση με τις ανισότητες $\|A(ny) - f(ny)\| \le \delta$ και

$$\|A'(y) - f(ny)\| \le \delta .$$

Άρα, η $A$ είναι η μοναδική προθετική συνάρτηση που ικανοποιεί την (3).

Έστω ότι η $f$ είναι συνεχής στο $y$ και η $A$ δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $x \in E_1$, τότε υπάρχει ακέραιος $k$ και μια ακολουθία $\{x_n\}$ στον $E_1$ που συγκλίνει στο μηδέν ώστε $\|A(x_n)\| > 1/k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $m$ είναι ακέραιος με $m > 3k\delta$ τότε,

$$\|A(mx_n + y) - A(y)\| = \|A(mx_n)\| > 3\delta$$

και,

$$\begin{aligned}\|A(mx_n + y) - A(y)\| \le & \|A(mx_n + y) - f(mx_n + y)\| \\ & + \|f(mx_n + y) - f(y)\| + \|f(y) - A(y)\| \\ & < 3\delta .\end{aligned}$$

για αρκούντως μεγάλα $n$, αφού $f(mx_n + y) \to f(y)$ αν $n \to \infty$. Αυτό το άτοπο σημαίνει ότι η συνέχεια της $f$ σε ένα σημείο του $E_1$ συνεπάγεται την συνέχεια της $A$ στον $E_1$. □

Το θεώρημα του Hyers γενικεύτηκε για προσεγγιστικά **προσθετικές** απεικονίσεις από τον Aoki[4] το 1950 και το 1978,ο Th. M. Rassias,[92], πέτυχε να αδυνατήσει το φράγμα της στάθμης της διαφοράς Cauchy,

$$f(x+y) - f(x) - f(y)$$

και απέδειξε ένα σημαντικά γενικευμένο αποτέλεσμα της ευστάθειας Ulam για **γραμμικές** απεικονίσεις ( σε μια εργασία με περισσότερες από 2500 αναφορές) χρησιμοποιώντας την ευθεία μέθοδο του Hyers και θεωρώντας την μη-φραγμένη ανισότητα της διαφοράς Cauchy

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \varepsilon\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)$$

όπου $\varepsilon > 0$ και $p \in [0,1)$ σταθεροί αριθμοί.

Το 1990, στη διάρκεια του 27ου Διεθνούς Συνεδρίου στις Συναρτησιακές Εξισώσεις ο Th.M.Rassias, [21] ,σημείωσε ότι για $p < 0$ το θεώρημα ισχύει και έθεσε το ερώτημα αν ισχύει στην περίπτωση $p>1$. Το 1991, ο Z. Gajda [26] έδωσε καταφατική απάντηση. Είχε αποδειχθεί από τους P. Semrl και Th.M.Rassias [93], ότι δεν μπορεί να ισχύει ένα παρόμοιο θεώρημα όταν $p=1$. Ο Gajda [26], παρουσίασε ένα αντιπαράδειγμα που αποδεικνύει εύκολα την μη ισχύ του θεωρήματος 2 για $p=1$, και ευρέως γίνεται ακόμη χρήση του. Με την εισαγωγή της έννοιας της μη-φραγμένης διαφοράς Cauchy, το πρόβλημα ευστάθειας Hyers-Ulam για τις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ χώρων Banach , μπήκε σε ένα νέο γενικό πλαίσιο. Το φαινόμενο της ευστάθειας για γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ χώρων Banach που απέδειξε ο Th. M. Rassias ονομάζεται πλέον φαινόμενο ευστάθειας *Hyers-Ulam-Rassias*. Παραθέτουμε το Θεώρημα χωρίς την απόδειξη.

**Θεώρημα (Th.M.Rassias[92]).** *Έστω $E_1$ και $E_2$ χώροι Banach, και $f: E_1 \to E_2$ μια συνάρτηση που ικανοποιεί την συναρτησιακή ανισότητα*

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \theta \left( \|x\|^p + \|y\|^p \right) \tag{4}$$

*για κάποιο $\theta > 0$, $p \in [0,1)$, και για κάθε $x, y \in E_1$. Τότε υπάρχει μοναδική προσθετική συνάρτηση $A: E_1 \to E_2$ ώστε*

$$\| f(x) - A(x) \| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} \|x\|^p \tag{5}$$

*για οποιοδήποτε $x \in E_1$. Επιπλέον αν $f(tx)$ είναι συνεχής στο $t$ για κάθε σταθερό $x \in E_1$, τότε η $A$ είναι γραμμική.*

Αντικαθιστώντας τον παράγοντα $\|x\|^p + \|y\|^p$ με $\|x\|^p \cdot \|y\|^p$, για $p, q \in \mathbb{R}$ με $p+q \neq 1$, ο J. M. Rassias απέδειξε, ακολουθώντας την ίδια μέθοδο, το

**Θεώρημα (J.M.Rassias[63]).** *Έστω $A$ ένας γραμμικός σταθμητός χώρος με στάθμη $\| \ \|_1$ και $B$ ένας χώρος Banach με στάθμη $\| \ \|_2$. Έστω επιπλέον $f: A \to B$ μια απεικόνιση ώστε $f(tx)$ συνεχής στο $t$ για κάθε σταθερό $x$. Αν υπάρχει $a: 0 \leq a < \frac{1}{2}$ και $\delta \geq 0$ τέτοιο ώστε*

$$\| f(x+y) - [f(x) + f(y)] \|_2 \leq 2\delta \cdot \|x\|_1^a \cdot \|y\|_2^a$$

*για κάθε $x, y \in A$, τότε υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $L: A \to B$ ώστε*

$$\| f(x) - L(x)\|_2 \le c \cdot \|x\|_1^{2a}$$

*για κάθε* $x \in A$ *με* $c = \delta / 1 - 2^{2a-1}$.

Επίσης, απέδειξε την ευστάθεια *Hyers-Ulam-Rassias*, [66], της προσθετικής εξίσωσης Cauchy για την περίπτωση που η στάθμη της διαφοράς είναι φραγμένη από το $\theta \cdot \|x\|^p \cdot \|y\|^q$ $(\theta \ge 0,\ 0 \le p+q<1)$, δημιουργώντας έτσι μια νέου είδους ευστάθεια την Ulam-Gavruta-Rassias ευστάθεια, [91].

Το 1994, ο P.Gavruta [28], προχώρησε σε μια γενίκευση αντικαθιστώντας το φράγμα του Θεωρήματος 2,με μια συνάρτηση $\varphi(x,y)$, εξελίσσοντας έτσι θεωρήματα γενικεύσεων του Th.M.Rassias που είχαν εντωμεταξύ δημοσιευτεί. Στο πνεύμα αυτής της γενίκευσης πολλοί συγγραφείς μελετούν το πρόβλημα ευστάθειας τα τελευταία είκοσι χρόνια, σύμφωνα με το συμπέρασμα του ακόλουθου Θεωρήματος:

**Θεώρημα (Gavruta[28]).** *Έστω* $G$ *και* $E$ *μια αβελιανή ομάδα και ένας Banach χώρος αντίστοιχα, και* $\varphi : G^2 \to [0,\infty)$ *μια συνάρτηση ώστε*

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} \varphi\left(2^k x, 2^k y\right) < \infty \tag{6}$$

*για όλα τα* $x, y \in G$*.Αν η συνάρτηση* $f : G \to E$ *ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \varphi(x,y) \tag{7}$$

*για κάθε* $x, y \in G$*, τότε υπάρχει μοναδική προσθετική συνάρτηση* $A : G \to E$ *με*

$$\| f(x) - A(x)\| \le \Phi(x,x) \tag{8}$$

*για όλα τα* $x, y \in G$*. Επιπλέον αν* $f(tx)$ *είναι συνεχής στο* $t$ *για κάθε σταθερό* $x \in G$*, τότε η* $A$ *είναι γραμμική.*

## 1.2. Συναρτησιακές εξισώσεις πολυωνυμικού τύπου

Το 1996 , οι G.Isac και Th.M.Rassias, [36], εφάρμοσαν την θεωρία ευστάθειας *Hyers-Ulam-Rassias* στην απόδειξη νέων θεωρημάτων σταθερού σημείου (fixed point theorems) και στην μη-γραμμική ανάλυση (non linear analysis).

Το πλήθος των εξισώσεων που μελετώνται ως προς την ευστάθεια είναι τεράστιο. Αναφέρουμε επιγραμματικά εξισώσεις τύπου Jensen, λογαριθμικές, εκθετικές, τριγωνομετρικές, συναρτησιακές εξισώσεις που έχουν ως βάση πολυωνυμικές εξισώσεις ή ένα γεωμετρικό υπόβαθρο, βλ.[57],[58], [86].

Από τις αρχές του 1990, πολλές εργασίες έχουν αφιερωθεί στο πρόβλημα της ευστάθειας Ulam διαφόρων συναρτησιακών εξισώσεων πολυωνυμικού τύπου, υπόβαθρο, βλ. [14], [15], [22], [34], [36], [45], [50], [62] καθώς και J.M.Rassias[63-89].

Η κλασική δευτεροβάθμια, άλλως Euler-Lagrange,

$$f(x+y)-2f(x)+f(x-y)=2!\,f(y)$$

γενικεύθηκε, όπως θα δούμε παρακάτω, μέσα από διάφορες εργασίες του J.M.Rassias, και πολλές εκδοχές της μελετήθηκαν ως προς την ευστάθειά τους αποδίδοντάς τους η βιβλιογραφία την ονομασία Euler-Lagrange-Rassias απεικονίσεις.

Η κυβική συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x+2y)-3f(x+y)+3f(x)-f(x-y)=3!\,f(y)$$

στο J.M.Rassias, [75], ήταν το αποτέλεσμα της μετάβασης από την κλασική δευτεροβάθμια. Με ανάλογο τρόπο παρουσιάστηκε και η τετάρτου βαθμού (quartic)

$$f(x+2y)-4f(x+y)+6f(y)-4f(x-y)+f(x-2y)=4!\,f(y)$$

στην εργασία [74], δίνοντας το έναυσμα για την μελέτη της ευστάθειας συναρτησιακών εξισώσεων της μορφής

$$f\left(x+\frac{n+1}{2}y\right)+\sum_{k=1}^{n-1/2}(-1)^k\binom{n}{k}\left[f\left(x+\left(\frac{n+1}{2}-k\right)y\right)+f\left(x-\left(\frac{n+1}{2}-k\right)y\right)\right]$$
$$+(-1)^{n+1/2}\binom{n}{\frac{n+1}{2}}f(x)-n!\,f(y)=0$$

αν n περιττός και $k\in\left\{1,2,3,\ldots,\frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2}\right\}$,

και,

$$\sum_{k=1}^{n/2}(-1)^k\binom{n}{k}\left[f\left(x+\left(\frac{n}{2}-k\right)y\right)+f\left(x-\left(\frac{n}{2}-k\right)y\right)\right]-n!\,f(y)=0$$

αν n άρτιος και $k \in \left\{1,2,3,...,\frac{n-2}{2},\frac{n}{2}\right\}$.

Ήδη ,στο J.M. Rassias et. al. [89], έχει μελετηθεί η $24^{ου}$ βαθμού, $n=24$, (quattuorvigintic) συναρτησιακή εξίσωση.

Στην εργασία αυτή θα μας απασχολήσουν τέτοιου τύπου συναρτησιακές εξισώσεις $m$ βαθμού, των οποίων για τη λύση $f: X \to Y$ , με $X,Y$ πραγματικοί διανυσματικοί χώροι ,πρέπει και αρκεί να ισχύει $f(x)=A_m(x)$, με $A_m: X^m \to Y$ συμμετρική και προσθετική για κάθε μεταβλητή. Η εξέταση της γενικής λύσης βέβαια δεν θα χρειάζεται να μετέρχεται απαραίτητα την χρήση συμμετρικών συναρτήσεων όπως παρουσιάζεται στο[91], αλλά την απόδειξη της ισοδυναμίας των λύσεων με τις γνωστές πολυωνυμικές που αναφέραμε ή ανάλογες αυτών.

Τα τελευταία 10 χρόνια, μελετώνται συναρτησιακές εξισώσεις που είναι συνδυασμός δύο, ή τριών ή ακόμη τεσσάρων πολυωνυμικών συναρτησιακών εξισώσεων, οι καλούμενες μικτού τύπου (*mixed type functional equations*). Η σχετική βιβλιογραφία βρίθει από προβλήματα μελέτης της ευστάθειας σε 27 διαφορετικούς τοπολογικούς χώρους, ανάμεσά τους και οι fuzzy χώροι,[46]. Να επισημάνουμε πως το πρόβλημα ευστάθειας σε όλους τους παρακάτω χώρους εξετάζεται με την μέθοδο και τη στάθμη που έχει ο κάθε χώρος και τις όποιες ιδιότητες αυτή συνεπάγεται. Οι χώροι που αναφέρονται στη σχετικά βιβλιογραφία είναι : Banach spaces, Banach algebras ,C*-algebras, . N - multi - Banach spaces ,multi - Banach spaces, Multi - normed spaces, Quasi - Banach spaces, Quasi - [beta] - normed spaces, Non - Archimedean normed spaces, (Fuzzy normed spaces, Quasi fuzzy normed spaces, Non - Archimedean fuzzy normed spaces, Intuitionistic normed spaces, Random normed spaces and probabilistic normed spaces, Non - Archimedean RN [ Random Normed ] – spaces, Intuitionistic random normed spaces, Intuitionistic fuzzy normed spaces, Intuitionistic fuzzy Banach algebras, Intuitionistic Non -Archimedean fuzzy normed spaces) Menger normed spaces, Menger probabilistic normed spaces, Non - Archimedean Menger normed spaces, Intuitionistic Menger normed spaces, L- non - Archimedean - fuzzy Euclidean normed spaces, F – spaces, Frechet spaces, Banach modules, Distributions and Hyperfunctions, Restricted domains, και Heisenberg groups.

## 1.3. Οι μέθοδοι απόδειξης της ευστάθειας Hyers -Ulam-Rassias

Παρακάτω παρουσιάζονται οι μέθοδοι εξέτασης της ευστάθειας, με πλέον χρησιμοποιούμενες την ευθεία και τη μέθοδο του σταθερού σημείου.

**A. Direct Method (Hyers) (Ευθεία μέθοδος)** Στη μέθοδο αυτή, βλ. [23] και [25], διακρίνουμε πέντε βήματα:

i) Εύρεση της συναρτησιακής εξίσωσης και το είδος αυτής (1$^{ου}$, 2$^{ου}$, *mixed type* κλπ)

ii) Χειρισμοί της εξίσωσης ώστε να οδηγηθούμε σε μια ανισότητα της μορφής $d\left(H\{f[G(x)]\}, f(x)\right) \leq f(x)$

iii) Εύρεση λύσης της $H\{\varphi[G(x)]\} = \varphi(x)$

iv) Εύρεση συνθηκών για την σύγκλιση της $H^n\{f[G^n(x)]\}$

v) Εξέταση αν είναι ίδιου τύπου με την αρχική και μοναδικότητα.

**B. Method of invariant Means (Μέθοδος των αναλλοίωτων μέσων)** Έστω $(G,\cdot)$ μια ημιομάδα ή ομάδα και με $B(G)$ συμβολίζεται ο χώρος όλων των φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων στο $G$ με τη στάθμη

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| / x \in G\}.$$

Ένα γραμμικό συναρτησοειδές $m$ στον $B(G)$ λέγεται δεξιός αναλλοίωτος μέσος αν συμβαίνουν ταυτόχρονα:

$(i) m(\overline{f}) = \overline{m(f)}, f \in B(G)$,

$(ii) \inf\{f(x) / x \in G\} \leq m(f) \leq \sup\{f(x) / x \in G\}$ για όλες τις πραγματικές $f \in B(G)$,

$(iii) m(f_x) = m(f)$ για όλα τα $x \in G$ και $f \in B(G)$, όπου $f_x(t) = f(tx)$.

Αν η συνθήκη (iii) αντικατασταθεί με $m({}_x f) = m(f)$, όπου ${}_x f(t) = f(xt)$, τότε το $m$ καλείται αριστερός αναλλοίωτος μέσος.

Να σημειωθεί ότι ο L. Székelyhidi [97], εισήγαγε την μέθοδο αυτή αποδεικνύοντας το ακόλουθο:

**Θεώρημα (L. Székelyhidi[97]).** *Αν $(G,\cdot)$ είναι ημιομάδα εφοδιασμένη με δεξιό (αριστερό) αναλλοίωτο μέσο και η συνάρτηση $f: G \to G$ ικανοποιεί την*

$$|f(x \cdot y) - f(x) - f(y)| \leq \delta$$

*για κάποιο* $\delta \ge 0$ *και για όλα τα* $x, y \in G$, *τότε υπάρχει ομομορφισμός* $H : G \to G$ *ώστε*

$$|f(x) - H(x)| \le \delta$$

*για κάθε* $x \in G$.

**Γ. Fixed Point Method (Μέθοδος σταθερού σημείου)**

Για ένα μη κενό σύνολο $X$, η έννοια της γενικευμένης μετρικής στον $X$ ορίζεται ως εξής: Μια συνάρτηση $d : X^2 \to [0, \infty]$ καλείται γενικευμένη μετρική στον $X$ αν και μόνο αν η $d$ ικανοποιεί τα ακόλουθα:

$(M1)$ $d(x, y) = 0$ αν-ν $x = y$,

$(M2)$ $d(x, y) = d(y, x)$ για όλα τα $x, y \in X$,

$(M3)$ $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ για όλα τα $x, y, z \in X$.

Να σημειωθεί ότι η μόνη διαφορά της γενικευμένης μετρικής από την συνήθη μετρική είναι ότι η πρώτη περιλαμβάνει το άπειρο. Βασικές αρχές της θεωρίας περιέχονται στο [50].

**Θεώρημα(Diaz-Margolis[50])** *Έστω* $(X, d)$ *ένας γενικευμένος πλήρης μετρικός χώρος. Έστω επίσης* $\Lambda : X \to X$ *ένας τελεστής συστολή με την σταθερά Lipschitz* $L < 1$. *Αν υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος* $n_0$ *ώστε* $d(\Lambda^{n_0+1}x, \Lambda^{n_0}x) < \infty$ *για κάποιο* $x \in X$, *τότε τα ακόλουθα ισχύουν :*

$(i)$ *Η ακολουθία* $\{\Lambda^n x\}$ *συγκλίνει σε ένα σταθερό σημείο* $x^*$ *του* $\Lambda$,

$(ii)$ $x^*$ *είναι το μοναδικό σταθερό σημείο του* $\Lambda$ *στον* $X^* = \{y \in X / d(\Lambda^{n_0}x, y) < \infty\}$,

$(iii)$ *Αν* $y \in X^*$, *τότε*

$$d(y, x^*) \le \frac{1}{1 - L} d(\Lambda y, y).$$

Το 2004, οι Cadariu,Radu [12],απέδειξαν την ευστάθεια *Hyers-Ulam-Rassias* της προσθετικής εξίσωσης Cauchy χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο.

Η μέθοδος του σταθερού σημείου (*fixed point method*) είναι η πιο συνήθης και ευρέως διαδεδομένη μαζί με την ευθεία μέθοδο του Hyers. Για την απόδειξη της ευστάθειας της προσθετικής Cauchy, [62],εισάγει τον ορισμό ενός συνόλου

$X=\{g:E_1\to E_2 \,/\, p\cdot g(0)=0\}$, όπου $p\neq 1$ μη αρνητική σταθερά και μιας γενικευμένης μετρικής $d_p:X^2\to[0,\infty]$ με

$$d_p(g,h)=\sup_{x\neq 0}\|g(x)-h(x)\|/\|x\|^p$$

ώστε ο χώρος $(X,d_p)$ να είναι πλήρης και ο τελεστής $\Lambda:X\to X$ με $(\Lambda g)(x)=(1/q)g(qx)$ να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος (Diaz-Margolis). Ανάλογη πορεία ακολουθείται και για άλλες συναρτησιακές εξισώσεις.

**Δ. Shadowing Method**. Η ονομασία *shadowing* προέρχεται από την θεωρία δυναμικών συστημάτων.

**Ορισμός 1.3.1**[23] Έστω $F:X\to X$, $(X,d)$ πλήρης μετρικός χώρος και $\delta>0$. Μια ακολουθία $\{x_k\}$ καλείται $\delta-$ψευδοτροχιά για την $F$ αν $d(x_{k+1},F(x_k))\leq\delta$. Η συνάρτηση $F$ έχει την ιδιότητα *shadowing* αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε κάθε $\delta-$ψευδοτροχιά $\{x_k\}$ να είναι $\varepsilon-$*shadowed*. Δηλαδή, $d(x_k,y_k)\leq\varepsilon$, όπου $\{y_k\}$είναι μια τροχιά για την $F$.

**Ορισμός 1.3.2** Έστω $r,R>0$. Ονομάζουμε την $K:X\to X$, τοπικά $(r,R)-$αντιστρέψιμη στο σημείο $x_0\in X$, αν για κάθε $y$ στη ανοικτή μπάλα $B(K(x_0),R)$ υπάρχει ένα μοναδικό $x\in B(x_0,r)$ ώστε $K(x)=y$.

Το ακόλουθο Θεώρημα δίνει την απαραίτητη συνθήκη ευστάθειας.

**Θεώρημα (Tabor[98]).** Έστω $G:S\to S$, $K:X\to X$ δύο συναρτήσεις , όπου $S$ ένα σύνολο και $(X,d)$ ένας πλήρης μετρικός χώρος. Έστω επίσης $l\in(0,1)$ και $R\in(0,+\infty)$ δύο σταθεροί αριθμοί και ότι η $K$ είναι τοπικά $(r,R)-$αντιστρέψιμη στο τυχαίο $x_0\in X$. Αν η $f:S\to X$ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί την ανισότητα $d\big(f[G(x)],K[f(x)]\big)\leq(1-l)R$, τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\varphi:S\to X$ ώστε $\varphi[G(x)]=K[\varphi(x)]$ και $d\big(f(x),\varphi(x)\big)\leq\dfrac{l(1-l)R}{1-(1-l)R}$, για κάθε $x\in S$.

# Κεφάλαιο 2

# Ευστάθεια και μη ευστάθεια τετραγωνικών συναρτησιακών εξισώσεων

Έστω $E_1$ και $E_2$ πραγματικοί διανυσματικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : E_1 \to E_2$ λέγεται δευτεροβάθμια (quadratic) ή τετραγωνική συνάρτηση αν-ν η $f$ είναι λύση της δευτεροβάθμιας συναρτησιακής εξίσωσης (κλασική)

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y).$$

Αν η $f$ είναι μεταξύ πραγματικών διανυσματικών χώρων λέγεται δευτεροβάθμια αν-ν υπάρχει μοναδική συμμετρική συνάρτηση $B$ ώστε $f(x)=B(x,x)$ για κάθε $x \in E_1$, με

$$B(x,y)=\frac{1}{4}\big(f(x+y)-f(x-y)\big),$$

βλ. και [1,33]. Η ευστάθεια Hyers-Ulam της κλασικής εξίσωσης αποδείχτηκε από τον Skof [96] για συναρτήσεις $f : E_1 \to E_2$ όπου $E_1$ σταθμητός χώρος και $E_2$ χώρος Banach. Η Cholewa [16] απέδειξε ότι το Θεώρημα του Skof ισχύει και στην περίπτωση που ο χώρος $E_1$ αντικατασταθεί με μια αβελιανή ομάδα $G$. Έτσι αν μια συνάρτηση $f : G \to E$ ικανοποιεί την

$$\left\| f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-2f(y) \right\| \le \delta$$

για κάποιο $\delta \ge 0$ και για κάθε $x, y \in G$, τότε υπάρχει μια μοναδική δευτεροβάθμια $Q : G \to E$ με

$$\left\| F(x)-Q(x) \right\| \le \frac{\delta}{2}$$

για κάθε $x \in G$. Ο S.Czerwik [19] απέδειξε την ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias της κλασικής εξίσωσης. Ειδικότερα, αν $E_1$ και $E_2$ πραγματικός σταθμητός χώρος και χώρος Banach αντίστοιχα, με $p \ne 2$ θετικά σταθερά, τότε αν η συνάρτηση $f : E_1 \to E_2$ ικανοποιεί

$$\left\| f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-2f(y) \right\| \le \varepsilon\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$ και όλα τα $x, y \in E_1$, υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια συνάρτηση

$q: E_1 \to E_2$ ώστε

$$\| f(x) - q(x) \| \leq \frac{2\varepsilon}{|2^2 - 2^p|} \|x\|^p$$

για κάθε $x \in E_1$. Επιπλέον, σύμφωνα με το θεώρημα των Borelli και Forti [11] γνωρίζουμε και την γενικευμένη ευστάθεια της κλασικής δευτεροβάθμιας κατά αναλογία με το θεώρημα Gavruta [27,29].

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων τριών δεκαετιών μεγάλος αριθμός συγγραφέων ασχολήθηκε με δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Στις εργασίες του J.M.Rassias με την εισαγωγή εξισώσεων τύπου Euler-Lagrange και την εξέταση της ευστάθειάς τους δημιουργήθηκε ένα πλήθος Euler-Lagrange –Rassias απεικονίσεων ,όπως ονομάζονται, [91], και αποτελούν σημαντικό τομέα έρευνας. Αναφέρουμε εδώ την γενίκευση της κλασικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης [73],

$$m_1 m_2 Q(a_1 x_1 + a_2 x_2) + Q(m_2 a_2 x_1 - m_1 a_1 x_2) = \left(m_1 a_1{}^2 + m_2 a_2{}^2\right)\left[m_2 Q(x_1) + m_1 Q(x_2)\right]$$

για $m_1, m_2 > 0$ και $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ . Περισσότερα στις εργασίες [77-79] και [81-83].

Σύμφωνα και με αυτά που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 1, η διαδικασία εξεύρεσης συνθηκών ευστάθειας μιας συναρτησιακής εξίσωσης ακολουθεί την πορεία που παρουσιάζεται στις επόμενες ενότητες και κεφάλαια. Πρώτα επιχειρείται η επίλυση της εξίσωσης δηλαδή η απόδειξη της ισοδυναμίας των λύσεών της με κάποια από τις βασικές( προσθετική, κλασική δευτεροβάθμια, κυβική κλπ), στη συνέχεια χρήση κάποιας από τις μεθόδους ευστάθειας, πορίσματα που αφορούν την ευστάθεια κατά Rassias και κάποια παραδείγματα μη-ευστάθειας που προκύπτουν στις περιπτώσεις που υπαγορεύουν τα αντίστοιχα πορίσματα. Η αποδεικτική πορεία της επίλυσης ποικίλλει κατά την εξίσωση ενώ η απόδειξη- εξέταση της ευστάθειας ακολουθεί τα βήματα που επιτάσσει η μέθοδος.

## 2.1 Τετραγωνική (Quadratic) συναρτησιακή εξίσωση

Έστω $X$ ένας πραγματικός σταθμητός γραμμικός χώρος και $Y$ πραγματικός χώρος Banach.

**Λήμμα 2.1.1** *Η απεικόνιση $f: X \to Y$ ικανοποιεί την Euler-Lagrange type δευτεροβάθμια συναρτησιακή εξίσωση*

$$f(x+y) + 2f(x-y) - f(y-x) = 2f(x) + 2f(y)$$

*για όλα* $x, y \in X$ *αν και μόνον αν υπάρχει απεικόνιση* $g : X \to Y$ *που ικανοποιεί την κλασική δευτεροβάθμια συναρτησιακή*

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)+2g(y)$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *ώστε* $f(x)=g(x)$, *για όλα τα* $x \in X$.

*Απόδειξη.* Έστω η απεικόνιση $f : X \to Y$ που ικανοποιεί την Euler-Lagrange type δευτεροβάθμια εξίσωση

$$f(x+y)+2f(x-y)-f(y-x)=2f(x)+2f(y) \qquad (1)$$

για όλα τα $x, y \in X$ .Υποθέτουμε ότι υπάρχει απεικόνιση $g : X \to Y$ ώστε $f(x)=g(x)$ για όλα τα $x \in X$. Αν $x=y=0$ από την εξίσωση (1) έχουμε

$$f(0)=g(0)=0$$

και αν αντικαταστήσουμε τα $(x, y)$ με $(x, 0)$ Ι στην (1) παρατηρούμε ότι

$$g(-x)=f(-x)=f(x)=g(x) \qquad (2)$$

για όλα τα $x \in X$.

Από την εξίσωση (2.2) βλέπουμε ότι η $g$ είναι άρτια και είναι επίσης φανερό από την (1) και (2) ότι

$$g(x+y)+2g(x-y)-g(y-x)=2g(x)+2g(y)$$

$$g(x+y)+2g(x-y)-g\left(-(y-x)\right)=2g(x)+2g(y)$$

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)+2g(y)$$

για όλα τα $x, y \in X$ .

Άρα η $g$ ικανοποιεί την Euler-Lagrange quadratic εξίσωση για όλα τα $x, y \in X$

Αντιστρόφως έστω η απεικόνιση $g : X \to Y$ ικανοποιεί την Euler-Lagrange quadratic εξίσωση

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)+2g(y) \qquad (3)$$

για όλα τα $x, y \in X$ . Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση $f : X \to Y$ ώστε

$$f(x)=g(x)$$

για όλα τα $x \in X$. Άρα η $f$ είναι άρτια. Αν $x=y=0$ από τη σχέση (3) έχουμε

$$f(0)=g(0)=0 \qquad (4)$$

Από τις (3), (4) παρατηρούμε ότι

$$2f(x)+2f(y)=2g(x)+2g(y)=g(x+y)+g(x-y)=f(x+y)+f(x-y)$$

$$=f(x+y)+f(x-y)+f(x-y)-f(x-y)$$

$$= f(x+y) + 2f(x-y) - f\big(-(y-x)\big)$$

$$= f(x+y) + 2f(x-y) - f(y-x)$$

Άρα η $f$ ικανοποιεί την (1) για όλα τα $x, y \in X$ . □

Στο ακόλουθο Θεώρημα, ερευνούμε την γενικευμένη ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias της συναρτησιακής εξίσωσης

$$f(x+y) + 2f(x-y) - f(y-x) = 2f(x) + 2f(y),$$

την περίπτωση το άνω φράγμα να είναι συνάρτηση. Για ευκολία στο συμβολικό χειρισμό των εξισώσεων, αν δοθεί $f : X \to Y$ , ορίζουμε τον τελεστή διαφοράς

$D_q f(x,y) := f(x+y) + 2f(x-y) - f(y-x) - 2f(x) - 2f(y)$ ,για όλα τα $x, y \in X$ .

**Θεώρημα 2.1.2** *Έστω* $\varphi : X \times X \to [0,\infty)$ *μια συνάρτηση ώστε*

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+2}} \varphi(2^k x, 2^k x)$ *συγκλίνει στο* ˝ *και* $\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(2^k x, 2^k x)}{2^{2k+2}} = 0$ (5)

*για όλα τα* $x, y \in X$ . *Αν μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\left\| D_q f(x,y) \right\| \le \varphi(x,y) \tag{6}$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ *,τότε υπάρχει μοναδική Euler-Lagrange type δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q : X \to Y$ ,

$$Q(x) := \lim_{n\to\infty} 2^{-2n} f(2^n x),$$

*με* $\left\| D_q Q(x,y) \right\| \le \varphi(x,y)$ *και*

$$\left\| f(x) - Q(x) \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+2}} \varphi(2^k x, 2^k x) \tag{7}$$

*για όλα τα* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Θέτοντας $x = y = 0$ στην (6), έχουμε

$$\left\| f(0) \right\| \le \frac{1}{2} \varphi(0,0) \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας τα $(x, y)$ με $(x, x)$ στην (6) παρατηρούμε ότι

$$\left\| f(2x) + f(0) - 4f(x) \right\| \le \varphi(x,x)$$

$$\left\| f(x) - 2^{-2} f(2x) \right\| \le \frac{1}{2^2} \varphi(2^0 x, 2^0 x) + \frac{1}{2^3} \varphi(0,0) \tag{9}$$

για όλα τα $x \in X$. Αντικαθιστώντας τα $x$ με $2x$ στην (9) και πολλαπλασιάζοντας με $2^{-2}$ έχουμε

$$\left\|2^{-2} f(2x) - 2^{-4} f(2^2 x)\right\| \le \frac{1}{2^4}\varphi(2x,2x) + \frac{1}{2^5}\varphi(0,0) \tag{10}$$

για κάθε $x \in X$. Από την (9) και την (10) παίρνουμε

$$\left\| f(x) - 2^{-4} f(2^2 x)\right\| \le \frac{1}{2^2}\varphi(x,x) + \frac{1}{2^3}\varphi(0,0) + \frac{1}{2^4}\varphi(2x,2x) + \frac{1}{2^5}\varphi(0,0) \tag{11}$$

για κάθε $x \in X$. Με επαγωγή στο $n$ έχουμε

$$\left\| f(2x) - 2^{-2n} f(2^n x)\right\| \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{2k+2}}\varphi(2^k x, 2^k x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{2k+3}}\varphi(0,0) \tag{12}$$

για κάθε $x \in X$.

Αν $m,l$ μη αρνητικοί ακέραιοι με $m > l$, και $2^l x = h$, τότε $2^m x = 2^{m-l} 2^l x = 2^{m-l} h$.

Οπότε έχουμε,

$$\left\|2^{-2m} f(2^m x) - 2^{-2l} f(2^l x)\right\| = 2^{-2m}\left\|2^{-2(m-l)} f(2^{m-l} h) - f(h)\right\| = 2^{-2l}\left\| f(h) - 2^{-2(m-l)} f(2^{m-l} h)\right\|$$

$$\le 2^{-2l}\left(\sum_{k=0}^{m-l-1} \frac{1}{2^{2k+2}}\varphi(2^k h, 2^k h) + \sum_{k=0}^{m-l-1} \frac{1}{2^{2k+3}}\varphi(0,0)\right)$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+2}}\varphi(2^k h, 2^k h) \tag{13}$$

για κάθε $x \in X$. Παίρνοντας όρια $l \to \infty$ στην (13) λαμβάνοντας υπόψη την (5), έπεται ότι η ακολουθία $Q_n(x) = \{2^{-2n} f(2^n x)\}$ είναι ακολουθία Cauchy για κάθε $x \in X$. Εφόσον $Y$ είναι χώρος Banach, ορίζεται η συνάρτηση $Q : X \to Y$ με

$$Q(x) := \lim_{n\to\infty} 2^{-2n} f(2^n x).$$

Αν στη θέση των $(x, y)$ βάλουμε $(2^n x, 2^n y)$ στην (6) και πολλαπλασιάσουμε με $2^{-2n}$, έχουμε

$$\left\|2^{-2n} D_q f(2^n x, 2^n y)\right\| \le 2^{-2n}\varphi(2^n x, 2^n y) \tag{14}$$

για όλα τα $x, y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$.

Αν θεωρήσουμε ότι $n \to \infty$ στην (14), διαπιστώνουμε ότι η $Q$ είναι Euler-Lagrange type δευτεροβάθμια συναρτησιακή εξίσωση.

Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα της $Q$ υποθέτουμε ότι $Q': X \to Y$ είναι μια διαφορετική δευτεροβάθμια απεικόνιση που ικανοποιεί την $D_q f(x,y)=0$ και την (7). Τότε,

$$\begin{aligned}\|Q(x)-Q'(x)\| &= \|2^{-2n}Q(2^n x)-2^{-2n}Q'(2^n x)\| \\ &\le \|2^{-2n}Q(2^n x)-2^{-2n}f(2^n x)\|+\|2^{-2n}f(2^n x)-2^{-2n}Q'(2^n x)\| \\ &\le 2^{-2n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{2k+2}}\varphi(2^k x,2^k x)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{2k+3}}\varphi(0,0)\right) \\ &\le 2^{-2n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+2}}\varphi(2^k x,2^k x)\end{aligned}$$

για κάθε $x\in X$. Αν $n\to\infty$, διαπιστώνουμε ότι η $Q$ είναι μοναδική και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.2 είναι και το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 2.1.3.** *Έστω $X$ γραμμικός χώρος $Y$ χώρος Banach. Αν $\delta, r, s$ θετικοί αριθμοί με $\lambda := r+s \neq 2$, και $f: X \to Y$ μια απεικόνιση, ώστε*

$$\|D_q f(x,y)\| \le \delta\left[\|x\|^r\|y\|^s+\left(\|x\|^{r+s}+\|y\|^{r+s}\right)\right] \tag{15}$$

*για κάθε $x, y\in X$. Τότε υπάρχει μοναδική δευτέρου βαθμού απεικόνιση $Q: X\to Y$ ώστε*

$$\|f(x)-Q(x)\| \le \begin{cases}\dfrac{3\delta}{2^2-2^\lambda}\|x\|^\lambda, & \lambda\in(0,2)\\ \dfrac{3\delta}{2^\lambda-2^2}\|x\|^\lambda, & \lambda\in(2,\infty)\end{cases} \tag{16}$$

*για κάθε $x\in X$.*

Το ακόλουθο παράδειγμα, μια παραλλαγή του παραδείγματος του Gajda [26], αποδεικνύει ότι η υπόθεση $\lambda\neq 2$ στο πόρισμα 2.1.3 δεν μπορεί να παραληφθεί.

**Παράδειγμα 2.1.4** *Έστω $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια απεικόνιση που ορίζεται ως*

$$\varphi(x) := \begin{cases} x^2, & |x|<1\\ 1, & |x|\ge 1\end{cases}$$

*Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ορίζεται ως $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}4^{-2n}\varphi(4^n x)$, $x\in\mathbb{R}$, τότε η $f$ ικανοποιεί την συναρτησιακή ανισότητα*

$$\left|f(x+y)+2f(x-y)-f(y-x)-2f(x)-2f(y)\right|\le\frac{6\cdot16^3}{15}\left(\left|x\right|^2+\left|y\right|^2\right)$$

*για όλα τα* $x,y\in\mathbb{R}$ *, αλλά δεν υπάρχει δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *και μια σταθερά* $d>0$ *ώστε* $\left|f(x)-Q(x)\right|\le d\left|x\right|^2$ *, για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ .

*Απόδειξη*. Είναι προφανές ότι η $f$ είναι φραγμένη από το $\frac{4^2}{4^2-1}$ ή $\frac{16}{15}$ στο $\mathbb{R}$ .

Αν $\left|x\right|^2+\left|y\right|^2=0$ ή $\left|x\right|^2+\left|y\right|^2\ge\frac{1}{16}$, τότε

$$\left|D_q f(x,y)\right|\le\frac{6\cdot16}{15}\le\frac{6\cdot16^2}{15}\left(\left|x\right|^2+\left|y\right|^2\right)\tag{17}$$

Έστω, $0<\left|x\right|^2+\left|y\right|^2<\frac{1}{16}$. Τότε υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος $k$ ώστε

$$\frac{1}{16^{k+2}}<\left|x\right|^2+\left|y\right|^2<\frac{1}{16^{k+1}}\tag{18}$$

Άρα, $16^k\left|x\right|^2<\frac{1}{16}$ και $16^k\left|y\right|^2<\frac{1}{16}$.

Επίσης,

$$\varphi\left(4^n(x+y)\right)+2\varphi\left(4^n(x-y)\right)-\varphi\left(4^n(y-x)\right)-2\varphi\left(4^n x\right)-2\varphi\left(4^n y\right)=0$$

για κάθε $n=0,1,2,3,\ldots,k-1$,αφού $4^n(x+y),4^n(x-y),4^n x,4^n y\in(-1,1)$ για όλα τα $n=0,1,2,3,\ldots,k-1$.

Από τον ορισμό της $f$ και την ανισότητα (18), διαπιστώνουμε ότι

$$\left|D_q f(x,y)\right|\le\left|\sum_{n=0}^{\infty}4^{-2n}\varphi\left(4^n(x+y)\right)+2\sum_{n=0}^{\infty}4^{-2n}\varphi\left(4^n(x-y)\right)-\sum_{n=0}^{\infty}4^{-2n}\varphi\left(4^n(y-x)\right)-2\sum_{n=0}^{\infty}4^{-2n}\varphi\left(4^n x\right)-2\sum_{n=0}^{\infty}4^{-2n}\varphi\left(4^n y\right)\right|$$

$$\le\sum_{n=0}^{\infty}4^{-2n}\left|\varphi\left(4^n(x+y)\right)+2\varphi\left(4^n(x-y)\right)-\varphi\left(4^n(y-x)\right)-2\varphi\left(4^n x\right)-2\varphi\left(4^n y\right)\right|$$

$$\le\sum_{n=k}^{\infty}4^{-2n}\cdot6=\frac{4^{2(1-k)}\cdot6}{15}$$

$$\le\frac{6\cdot16^3}{15}\left(\left|x\right|^2+\left|y\right|^2\right)\tag{19}$$

Άρα, η $f$ επαληθεύει την (17) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ .

Στην περίπτωση που $\lambda=2$ στο πόρισμα 2.1.3, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια δευτεροβάθμια απεικόνιση $Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και μια σταθερά $d>0$ ώστε

$$\left|f(x)-Q(x)\right|\le d\left|x\right|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ . Τότε υπάρχει μια σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $Q(x) = cx^2$ για κάθε ρητό $x$ .Επομένως,

$$|f(x)| \leq \left(d + |c|\right)|x|^2 \tag{20}$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ . Έστω $m \in \mathbb{N}$ με $m+1 > d + |c|$ . Αν $x \in (0, 4^{-m})$ , τότε $4^n x \in (0,1)$ για κάθε $n = 0,1,2,...,m$ , και για αυτό το $x$ θα είναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(4^n x)}{4^{2n}} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4^n x)^2}{4^{2n}} = (m+1)x^2 > \left(d + |c|\right)x^2$$

άτοπο λόγω της (20). $\square$

## 2.2 Γενικευμένη ευστάθεια για Euler-Lagrange απεικονίσεις

Στην εργασία του Zivari-Kazempour[103], γίνεται αναφορά της συναρτησιακής εξίσωσης

$$f(x+2y) + f(y+2z) + f(z+2x) = 2f(x+y+z) + 3\left(f(x) + f(y) + f(z)\right) \tag{1}$$

όπου μελετάται η ευστάθειά της. Επίσης στο Kannappan [44], επιλύεται η συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) = f(x+y+z) + f(x) + f(y) + f(z) \tag{2}$$

Θεωρούμε την τετραγωνική συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x+ky) + f(y+kz) + f(z+kx) - kf(x+y+z) = (k^2 - k + 1)\left[f(x) + f(y) + f(z)\right]$$

με $k$ θετικό ακέραιο, της οποίας θα καθορίσουμε την γενική λύση και θα την μελετήσουμε ως προς την γενικευμένη ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias.Η εξίσωση αποτελεί μια γενίκευση της συναρτησιακής εξίσωσης (1) αλλά και της

$$f(x+3y) + f(y+3z) + f(z+3x) = 3f(x+y+z) + 7\left(f(x) + f(y) + f(z)\right) \tag{3}$$

που εμφανίζεται στην εργασία Zivari-Kazempour[104].

**Θεώρημα 2.2.1**. *Έστω $X$ και $Y$ πραγματικοί διανυσματικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση*

$$f(x+ky) + f(y+kz) + f(z+kx) - kf(x+y+z) = (k^2 - k + 1)\left[f(x) + f(y) + f(z)\right] \tag{4}$$

*για κάθε $x, y, z \in X$ και $k$ θετικό ακέραιο, αν και μόνο αν ικανοποιεί την*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \tag{5}$$

*για κάθε* $x, y \in X$ .

*Απόδειξη.* Έστω ότι η συνάρτηση $f : X \to Y$ ικανοποιεί την (4). Αν $x = y = z$ στην (4), παίρνουμε

$$3f\left((k+1)x\right) - kf(3x) = 3\left(k^2 - k + 1\right) f(x) \tag{6}$$

για κάθε $x \in X$, που σημαίνει ότι $f(0) = 0$. Αν $y = z = 0$ στην (4) έχουμε

$$f(kx) = k^2 f(x) \tag{7}$$

για κάθε $x \in X$.

Αν θέσουμε $z = 0$ στην (4), παρατηρούμε ότι

$$f(x+ky) + f(y) + f(kx) - kf(x+y) = (k^2 - k + 1)\left(f(x) + f(y)\right) \tag{8}$$

για κάθε $x, y \in X$ .

Με χρήση της (7), η εξίσωση (8) απλοποιείται στην

$$f(x+ky) - kf(x+y) = (1-k)f(x) + (k^2 - k)f(y) \tag{9}$$

για κάθε $x, y \in X$ .

Αντικαθιστώντας τα $x$ με $y$ και τα $y$ με $x$ στην (9) έχουμε

$$f(y+kx) - kf(x+y) = (k^2 - k)f(x) + (1-k)f(y) \tag{10}$$

για κάθε $x, y \in X$ .

Αν στην αρχική (4) θέσουμε $y = z$, τότε

$$f(x+ky) + f\left((k+1)y\right) + f(y+kx) - kf(x+2y) = (k^2 - k + 1)\left[f(x) + 2f(y)\right] \tag{11}$$

για κάθε $x, y \in X$ , η οποία με εφαρμογή της (7) γίνεται απλούστερα

$$f(x+ky) + f(y+kx) - kf(x+2y) = (k^2 - k + 1)f(x) + (k^2 - 4k + 1)f(y) \tag{12}$$

για κάθε $x, y \in X$ .

Απαλείφοντας τους όρους $f(x+ky)$, $f(y+kx)$ από την (12), με τη βοήθεια των (9) και (10), παίρνουμε

$$2kf(x+y) + 2kf(y) = kf(x) + kf(x+2y) \tag{13}$$

για κάθε $x, y \in X$ .

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση τα $x$ με $x - y$ έπεται η κλασική τετραγωνική συναρτησιακή εξίσωση (5).

Αντιστρόφως, έστω ότι η συνάρτηση $f : X \to Y$ ικανοποιεί την (5). Αντικαθιστώντας τα $x$ με $x + (k-1)y$ και ανάλογα όλες τις κυκλικές εναλλαγές των μεταβλητών στην (5), έχουμε διαδοχικά

$$f(x+ky)+f(x+y)=2f\left(x+(k-1)y\right)+2f(y)$$

$$f(y+kz)+f(y+z)=2f\left(y+(k-1)z\right)+2f(z)$$

$$f(z+kx)+f(z+x)=2f\left(z+(k-1)x\right)+2f(x).$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\begin{aligned}&f(x+ky)+f(y+kz)+f(z+kx)+f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)=\\&=2\left[f\left(x+(k-1)y\right)+f\left(y+(k-1)z\right)+f\left(z+(k-1)x\right)\right]+2\left[f(x)+f(y)+f(z)\right]\end{aligned} \tag{14}$$

για κάθε $x,y\in X$ .

Αν απαλειφτούν οι όροι $f\left(x+(k-1)y\right), f\left(y+(k-1)z\right), f\left(z+(k-1)x\right)$ από τη (14) σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 του [103] τότε έχουμε

$$\begin{aligned}&f(x+ky)+f(y+kz)+f(z+kx)-(k+1)f(x+y+z)\\&=-\left(f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\right)+\left(k^2-k+2\right)\left[f(x)+f(y)+f(z)\right]\end{aligned} \tag{15}$$

Συνδυάζοντας την (2) και την (8), έχουμε την

$$\begin{aligned}&f(x+ky)+f(y+kz)+f(z+kx)-(k+1)f(x+y+z)\\&=-f(x)-f(y)-f(z)-f(x+y+z)+\left(k^2-k+2\right)\left[f(x)+f(y)+f(z)\right]\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$f(x+ky)+f(y+kz)+f(z+kx)-kf(x+y+z)=(k^2-k+1)\left[f(x)+f(y)+f(z)\right]$$

για κάθε $x,y\in X$ .

□

Στα ακόλουθα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό,

$$Df(x,y,z):=f(x+ky)+f(y+kz)+f(z+kx)-kf(x+y+z)-(k^2-k+1)\left[f(x)+f(y)+f(z)\right]$$

**Θεώρημα 2.2.2.** *Έστω $X$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $Y$ ένας χώρος Banach. Έστω $\varphi: X^3\to[0,\infty)$ είναι μια συνάρτηση, ώστε*

$$\lim_{n\to\infty}k^{-2n}\varphi\left(k^n x,k^n y,k^n z\right)=0 \tag{16}$$

*με $x,y,z\in X$ , $k$ θετικό ακέραιο και $\sum_{n=0}^{\infty}k^{-2n}\varphi\left(k^n x,k^n y,k^n z\right)<\infty$. Αν η $f: X\to Y$ είναι μια απεικόνιση για την οποία $f(0)=0$ και*

$$\left\|Df(x,y,z)\right\|\le\varphi(x,y,z) \tag{17}$$

*για όλα τα* $x, y, z \in X$ *, τότε υπάρχει μοναδική τετραγωνική συνάρτηση* $Q : X \to Y$ *που ικανοποιεί την (4) και*

$$\| f(x) - Q(x) \| \le \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} k^{-2n} \varphi\left(k^n x, 0, 0\right) \tag{18}$$

*για κάθε* $x \in X$.

*Απόδειξη.* Έστω $y = z = 0$ στην (17), τότε

$$\left\| f(kx) - k^2 f(x) \right\| \le \varphi(x, 0, 0) \tag{19}$$

*για κάθε* $x \in X$. Διαιρώντας την ανισότητα (19) με $k^2$ παρατηρούμε ότι

$$\left\| \frac{f(kx)}{k^2} - f(x) \right\| \le \frac{1}{k^2} \varphi(x, 0, 0) \tag{20}$$

*για κάθε* $x \in X$. Επαγωγικά στο $m$ μπορούμε να βρούμε ότι

$$\left\| \frac{f(k^m x)}{k^{2m}} - f(x) \right\| \le \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{m-1} k^{-2n} \varphi\left(k^n x, 0, 0\right) \tag{21}$$

*για κάθε* $x \in X$. Αντικαθιστώντας το $x$ με $k^j x$ στην (21) έχουμε

$$\left\| \frac{f(k^{m+j} x)}{k^{2m+2j}} - \frac{f(k^j x)}{k^j} \right\| \le \frac{1}{k^2} \sum_{n=j}^{m+j-1} k^{-2n} \varphi\left(k^n x, 0, 0\right) \tag{22}$$

*για κάθε* $x \in X$. Συνεπώς η ακολουθία $\left\{ \frac{1}{k^{2n}} f(k^n x) \right\}$ είναι ακολουθία Cauchy και εφόσον ο $Y$ είναι πλήρης, η ακολουθία $\left\{ \frac{1}{k^{2n}} f(k^n x) \right\}$ συγκλίνει. Ορίζουμε, λοιπόν την συνάρτηση

$$Q(x) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{k^{2n}} f(k^n x), \ x \in X \ .$$

Η συνάρτηση $Q$ ικανοποιεί την ανισότητα (18). Επιπλέον, αν αντικαταστήσουμε τα $(x, y, z)$ με $(k^n x, k^n y, k^n z)$ στην (17), και διαιρέσουμε το αποτέλεσμα με $k^{2n}$ έπεται

$$\frac{1}{k^{2n}} \left\| Df(k^n x, k^n y, k^n z) \right\| \le \frac{\varphi(k^n x, k^n y, k^n z)}{k^{2n}} \tag{23}$$

για όλα τα $x, y, z \in X$. Παίρνοντας τα όρια καθώς $n \to \infty$ στην (23) και λόγω της (16) έχουμε ότι

$$\left\| Df(x, y, z) \right\| = 0$$

για όλα τα $x, y, z \in X$ .Άρα η $Q$ είναι τετραγωνική αφού ικανοποιεί την (4). Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα της $Q$, έστω ότι $Q'$ είναι μια άλλη τετραγωνική απεικόνιση που ικανοποιεί τις (4) και (18). Τότε,

$$\begin{aligned} \|Q(x) - Q'(x)\| &= \frac{1}{k^{2n}} \|Q(k^n x) - Q'(k^n x)\| \\ &\le \frac{1}{k^{2n}} \left\{ \|Q(k^n x) - f(k^n x)\| + \| f(k^n x) - Q'(k^n x)\| \right\} \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} 2k^{-4n-2} \varphi\left(k^{2n} x, 0, 0\right) \end{aligned}$$

που συγκλίνει στο μηδέν καθώς το $n \to \infty$. Άρα η $Q$ είναι μοναδική.

$\square$

Το ακόλουθο πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.2.2, σε ότι αφορά την ευστάθεια της (4) κατά Hyers-Ulam-Rassias και Ulam-Gavruta-Rassias.

**Πόρισμα 2.2.3**. Έστω $\lambda$ και $p$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και $k \ne 1$ θετικός ακέραιος. Αν η συνάρτηση $f : X \to Y$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|Df(x, y, z)\| \le \begin{cases} \lambda, & \\ \lambda\left\{\|x\|^p + \|y\|^p + \|z\|^p\right\}, & p < 2 \\ \lambda \|x\|^p \|y\|^p \|z\|^p, & \\ \lambda\left\{\|x\|^p \|y\|^p \|z\|^p + \left\{\|x\|^{2p} + \|y\|^{2p} + \|z\|^p\right\}\right\}, & p < 1 \end{cases}$$

για κάθε $x, y, z \in X$ , τότε υπάρχει μια μοναδική τετραγωνική συνάρτηση $Q : X \to Y$, ώστε

$$\le \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|k^2 - 1|}, \\ \dfrac{\lambda \|x\|^p}{|k^2 - k^p|}, \\ 0 \\ \dfrac{\lambda \|x\|^{2p}}{|k^2 - k^{2p}|}, \end{cases}$$

για όλα τα $x \in X$ .

## 2.3 Προσέγγιση των κατά προσέγγιση τετραγωνικών απεικονίσεων με τετραγωνικές απεικονίσεις

### 2.3.1 $a$ -quadratic συναρτησιακή εξίσωση

Στην εργασία των K.W. Jun, H.M.Kim [40], παρουσιάζεται η δευτεροβάθμια συναρτησιακή εξίσωση

$$f(ax+y)+af(x-y)=(a+1)f(y)+a(a+1)f(x),\ a\in\mathbb{R}, a\neq 0,-1 \qquad (*)$$

για την οποία δίνονται συνθήκες ευστάθειας με τη μέθοδο Hyers. Θα παρουσιάσουμε εδώ την $a$ -δευτεροβάθμια εξίσωση

$$f(x+ay)+af(x-y)=(a+1)f(x)+a(a+1)f(y),\ a\in\mathbb{R}, a\neq 0,-1 \qquad (1)$$

η οποία αποτελεί μια τροποποίηση της (*) και θα μελετήσουμε την γενική επίλυσή της καθώς και την ευστάθεια κατά *Hyers-Ulam-Rassias* με τη μέθοδο fixed point, σε χώρο Banach. Βλ. επίσης, C.Park and S. Kim [60]. Ισχύει γενικά το ακόλουθο Θεώρημα:

**Θεώρημα 2.3.1.1** *(Banach's contraction principle). Έστω* $(X,d)$ *ένας πλήρης μετρικός χώρος και μια απεικόνιση* $T: X\to X$ *η οποία είναι αυστηρά συστολή, δηλαδή* $(A_1).\ d(Tx,Ty)\le Ld(x,y)$, *για κάποια ( σταθερά Lipschitz)* $L<1$. *Τότε,*

(1). *Η απεικόνιση* $T$ *έχει μοναδικό σταθερό σημείο* $x^*=T(x^*)$,

(2). *Για κάθε δοθέν στοιχείο* $x^*$ *ισχύει* $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$ *για τυχόν* $x\in X$.

$(A_2).\ d(T^n x)\le \dfrac{1}{1-L} d(T^n x, T^{n+1}x),\ \forall n\ge 0,\ \forall x\in X$ ,

$(A_3).\ d(x,x^*)\le \dfrac{1}{1-L} d(x,x^*),\ \forall x\in X$ .

Επίσης βασικό συμπέρασμα της θεωρίας σταθερού σημείου αποτελεί το κάτωθι

**Θεώρημα 2.3.1.2** (Margolis-Diaz[50]) Αν $(X,d)$ είναι ένας πλήρης γενικευμένος μετρικός *χώρος και η απεικόνιση* $T: X\to X$ *είναι αυστηρά συστολή με σταθερά Lipschitz* $L$, *τότε για κάθε δοθέν στοιχείο* $x\in X$, *ισχύουν εναλλακτικά οι ακόλουθες*

$(B_1).\ d(T^n x, T^{n+1}x)=\infty,\ \forall n\ge 0$ *ή*

$(B_2)$. *Υπάρχει φυσικός αριθμός* $n_0$ *ώστε:*

(1). $d(T^n x, T^{n+1}x) < \infty,\ \forall n \geq n_0$,

(2). *Η ακολουθία* $(T^n x)$ *συγκλίνει στο σταθερό σημείο* $y^*$ *της* $T$

(3). $y^*$ *είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της* $T$ *στο σύνολο*

$$Y = \{y \in X : d(T^{n_0} x, y) < \infty\}$$

(4). $d(y^*, y) \leq \dfrac{1}{1-L} d(y, Ty)$ *για κάθε* $y \in Y$.

Αποδεικνύουμε πρώτα την γενική επίλυση της (1) στο σύνολο όλων των συναρτήσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων.

**Λήμμα 2.3.1.3.** *Αν* $f : X \to Y$ *είναι μια απεικόνιση που ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση (1) τότε είναι ισοδύναμη με την κλασσική δευτεροβάθμια συναρτησιακή εξίσωση* $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$.

*Απόδειξη.* Έστω ότι μια συνάρτηση $f : X \to Y$ ικανοποιεί την (1) για κάθε $x, y \in X$.
Αν αντικαταστήσουμε $x, y$ με $0$ τότε έχουμε $f(0) = 0$.
Αν στην (1) θέσουμε $y := x$ τότε

$$f\left((a+1)x\right) = (a+1)^2 f(x) \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας $(x, y) := (0, -y)$ στην (1) έχουμε

$$f(ay) + af(-y) = a(a+1) f(y) \tag{3}$$

δηλαδή

$$f(y) = f(-y)$$

που σημαίνει ότι η $f$ είναι άρτια.
Αν αντικαταστήσουμε τα $y$ στην (1) με $-y$, για όλα τα $x, y \in X$ έχουμε

$$f(x-ay) + af(x-y) = (a+1) f(x) + a(a+1) f(y)\ . \tag{4}$$

Ενώ αν $x := y - x$ στην (1), παρατηρούμε ότι

$$f\left((x-(a+1)y\right) + af(x) = (a+1) f(x-y) + a(a+1) f(y) \tag{5}$$

για $x, y \in X$. Στη συνέχεια αν θέσουμε $-ay + x$ στη θέση των $x$ στην (1) έχουμε

$$f(x) + af(x-(a+1)y) = (a+1) f(x-ay) + a(a+1) f(y) \tag{6}$$

για κάθε $x, y \in X$. Από τις (4) και (6) παίρνουμε

$$f(x) + af\left((x-(a+1)y\right) = (a+1)^2 f(x) + a(a+1)^2 f(y) - a(a+1) f(x+y) + a(a+1) f(y)$$

ή

$$af\left((x-(a+1)y\right)+a(a+1)f(x+y)=a(a+2)f(x)+a(a+1)(a+2)f(y) \qquad (7)$$

για κάθε $x,y\in X$ . Από τις (5) και (7) συνάγουμε ότι

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y).$$

Το αντίστροφο είναι προφανές. □

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ευστάθεια Hyers-Ulam_Rassias για την συναρτησιακή εξίσωση (1) σε χώρους Banach με τη μέθοδο σταθερού σημείου (fixed point method). Θα βρούμε τις συνθήκες για τις οποίες υπάρχει μια πραγματικά δευτεροβάθμια εξίσωση κοντά σε μια κατά προσέγγιση $a$ -δευτεροβάθμια ( $a$ -quadratic). Γενικά, έστω $X$ διανυσματικός χώρος και $Y$ χώρος Banach.

**Θεώρημα 2.3.1.4.** *Έστω* $\varphi: X^2\to[0,\infty)$ *μια συνάρτηση τέτοια ώστε να υπάρχει* $L<1$ *με*

$$\varphi\left(\frac{x}{a+1},\frac{y}{a+1}\right)\le\frac{L}{(a+1)^2}\varphi\left(\frac{2x}{a+1},\frac{2y}{a+1}\right) \qquad (8)$$

*για όλα τα* $x,y\in X$ *. Έστω* $f: X\to Y$ *μια συνάρτηση που ικανοποιεί την* $f(0)=0$ *και*

$$\|f(x+ay)+af(x-y)-(a+1)f(x)-a(a+1)f(y)\|\le\varphi(x,y) \qquad (9)$$

*για όλα τα* $x,y\in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q: X\to Y$ *τέτοια ώστε*

$$\|f(x)-Q(x)\|\le\frac{L}{(a+1)^2(1-L)}\varphi\left(\frac{x}{a+1},\frac{x}{a+1}\right) \qquad (10)$$

*για όλα τα* $x\in X$ *.*

*Απόδειξη.* Αν $y=x$ στην (9), έχουμε

$$\left\|f\left((a+1)x\right)-(a+1)^2 f(x)\right\|\le\varphi(x,x) \qquad (11)$$

*για όλα τα* $x\in X$ *.*

Θεωρούμε το σύνολο

$$S:=\{h: X\to Y, h(0)=0\}$$

και εισάγουμε την γενικευμένη μετρική στο $S$ :

$$d(g,h)=\inf\left\{\mu\in\mathbb{R}_+ : \|g(x)-h(x)\|\le\mu\varphi(x,x),\ \forall x\in X\right\},$$

όπου $\inf \varphi = +\infty$. Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι $(S,d)$ είναι πλήρες, [51].

Στη συνέχεια θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $J : S \to S$ ώστε

$$Jg(x) := (a+1)^2 g\left(\frac{x}{a+1}\right)$$

για όλα τα $x \in X$. Έστω $g,h \in S$ ώστε $d(g,h) = \varepsilon$. Τότε

$$\|g(x) - h(x)\| \le \varepsilon\varphi(x,x)$$

για όλα τα $x \in X$. Επομένως

$$\|Jg(x) - Jh(x)\| = \left\|(a+1)^2 g\left(\frac{x}{a+1}\right) - (a+1)^2 h\left(\frac{x}{a+1}\right)\right\| \le (a+1)^2 \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{a+1},\frac{x}{a+1}\right) \le L\varepsilon\varphi\left(\frac{2x}{a+1},\frac{2x}{a+1}\right)$$

για όλα τα $x \in X$. Άρα

$$d(Jg - Jh) \le Ld(g,h)$$

για όλα τα $g,h \in S$.

Από την σχέση (11) έπεται ότι

$$\left\| f(x) - (a+1)^2 f\left(\frac{x}{a+1}\right)\right\| \le \varphi\left(\frac{x}{a+1},\frac{x}{a+1}\right) \le \frac{L}{(a+1)^2}\varphi\left(\frac{2x}{a+1},\frac{2x}{a+1}\right)$$

για όλα τα $x \in X$. Έτσι $d(f, Jf) \le \dfrac{L}{(a+1)^2}$.

Από το Θεώρημα 2.3.1.2., υπάρχει μια απεικόνιση που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(1) Η $Q$ είναι ένα σταθερό σημείο της $J$, δηλαδή,

$$Q(x) = (a+1)^2 Q\left(\frac{x}{a+1}\right) \tag{12}$$

για όλα τα $x \in X$. Η απεικόνιση $Q$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της $J$ στο σύνολο

$$M = \{g \in S : d(f,g) < \infty\}.$$

Από αυτό συνάγεται ότι η $Q$ είναι η μοναδική απεικόνιση που ικανοποιεί την (12) ώστε να υπάρχει ένα $\mu \in (0,\infty)$ και

$$\| f(x) - Q(x)\| \le \mu\varphi\left(\frac{x}{a+1},\frac{x}{a+1}\right)$$

για όλα τα $x \in X$.

(2) $d(J^n f, Q) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή, $Q(x) = \lim_{n\to\infty}(a+1)^{2n} f\left(\frac{x}{(a+1)^n}\right)$, για όλα τα $x \in X$.

(3) $d(f, Q) \le \frac{1}{1-L} d(f, Jf)$ δηλαδή,

$$\| f(x) - Q(x)\| \le \frac{L}{(a+1)^2(1-L)} \varphi\left(\frac{x}{a+1}, \frac{x}{a+1}\right)$$

για όλα τα $x \in X$.

Από τις σχέσεις (8) και (9) προκύπτει ότι

$$\| f(x+ay) + af(x-y) - (a+1)f(x) - a(a+1)f(y)\|$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a+1)^{2n} \left\| Q\left(\frac{x+ay}{(a+1)^n}\right) + aQ\left(\frac{x-y}{(a+1)^n}\right) - (a+1)Q\left(\frac{x}{(a+1)^n}\right) - a(a+1)Q\left(\frac{y}{(a+1)^n}\right)\right\|$$

$$\le \lim_{n\to\infty}(a+1)^{2n} \varphi\left(\frac{x}{(a+1)^n}, \frac{y}{(a+1)^n}\right) = 0$$

για όλα τα $x, y \in X$. Άρα

$$Q(x+ay) + aQ(x-y) = (a+1)Q(x) + a(a+1)Q(y)$$

για όλα τα $x, y \in X$. Από το Λήμμα 2.3.1.3, η απεικόνιση $Q: X \to Y$ είναι δευτεροβάθμια. □

**Πόρισμα 2.3.1.5.** *Έστω $r < 2$ και $\theta$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, και $f: X \to Y$ μια απεικόνιση με $f(0) = 0$ και*

$$\| f(x+ay) + af(x-y) - (a+1)f(x) - a(a+1)f(y)\| \le \theta\left(\|x\|^r + \|y\|^r\right) \qquad (13)$$

*για όλα τα $x, y \in X$. Τότε υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση $Q: X \to Y$ τέτοια, ώστε*

$$\| f(x) - Q(x)\| \le \frac{2\theta}{|a+1|^r - |a+1|^2} \|x\|^r$$

*για κάθε $x \in X$.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.1.4, αν $\varphi(x, y) = \theta\left(\|x\|^r + \|y\|^r\right)$ για όλα τα $x, y \in X$. Επιλέγοντας $L = |a+1|^{2-r}$ έχουμε το ζητούμενο. □

**Θεώρημα 2.3.1.6.** *Έστω* $\varphi : X^2 \to [0,\infty)$ *μια συνάρτηση τέτοια ώστε να υπάρχει* $L<1$ *με*

$$\varphi(x,y) \le (a+1)^2 L\varphi\left(\frac{x}{a+1},\frac{y}{a+1}\right)$$

*για όλα τα* $x,y \in X$ *. Έστω* $f : X \to Y$ *μια συνάρτηση που ικανοποιεί την* $f(0)=0$ *και*

$$\| f(x+ay)+af(x-y)-(a+1)f(x)-a(a+1)f(y)\| \le \varphi(x,y)$$

*για όλα τα* $x,y \in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q : X \to Y$ *τέτοια ώστε*

$$\| f(x)-Q(x)\| \le \frac{1}{(a+1)^2(1-L)}\varphi(x,x)$$

*για όλα τα* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Από τη σχέση (11) προκύπτει ότι

$$\left\| f(x)-\frac{1}{(a+1)^2} f\big((\alpha+1)x\big)\right\| \le \frac{1}{(\alpha+1)^2}\varphi(x,x) \tag{14}$$

Αν $(S,d)$ είναι ο γενικευμένος μετρικός χώρος που ορίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1.4 και $J : S \to S$ μια γραμμική απεικόνιση ώστε

$$Jg(x) := \frac{1}{(a+1)^2} g\big((a+1)x\big)$$

για κάθε $x \in X$ , έπεται από την (14) ότι $d(f,Jf) \le \dfrac{1}{(a+1)^2}$ . Έτσι,

$$\| f(x)-Q(x)\| \le \frac{1}{(a+1)^2(1-L)}\varphi(x,x)$$

για κάθε $x \in X$ .

Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι όμοιο με του Θεωρήματος 2.3.1.4. □

**Πόρισμα 2.3.1.7.** *Έστω* $r>2$ *και* $\theta$ *μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, και* $f : X \to Y$ *μια απεικόνιση με* $f(0)=0$ *και*

$$\| f(x+ay)+af(x-y)-(a+1)f(x)-a(a+1)f(y)\| \le \theta\left(\|x\|^r+\|y\|^r\right) \tag{13}$$

*για όλα τα* $x,y \in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q : X \to Y$ *τέτοια, ώστε*

$$\| f(x) - Q(x) \| \le \frac{2\theta}{|a+1|^2 - |a+1|^r} \|x\|^r$$

*για κάθε* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.1.6, αν $\varphi(x,y) = \theta\left(\|x\|^r + \|y\|^r\right)$ για όλα τα $x, y \in X$ .Επιλέγουμε $L = |a+1|^{r-2}$ και έχουμε το ζητούμενο. □

## 2.3.2 Συνθήκες ευστάθειας Hyers-Ulam-Rassias γενικής τετραγωνικής συναρτησιακής εξίσωσης

Στο πνεύμα των εργασιών του J.M.Rassias [68,72] για την συναρτησιακή εξίσωση

$$f(ax+by) + f(bx-ay) = \left(a^2+b^2\right)\left[f(x)+f(y)\right]$$

κινήθηκαν πολλοί συγγραφείς, βλ. και [30]. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε την γενική λύση και την γενικευμένη Hyers-Ulam-Rassias ευστάθεια της συναρτησιακής εξίσωσης

$$f(ax+by) + f(ax-by) = \frac{2b^2-a^2}{2}\left[f(x+y)+f(x-y)\right] + (3a^2-2b^2)f(x) + a^2 f(y) \quad (1)$$

$a, b \ne 0, \pm 1, \ a, b \in \mathbb{R}$

η οποία είναι ισοδύναμη με την κλασική δευτεροβάθμια-quadratic-συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (2)$$

**Θεώρημα 2.3.2.1**. *Μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *ικανοποιεί την κλασική συναρτησιακή εξίσωση (2) αν και μόνον αν η* $f : X \to Y$ *ικανοποιεί την (1). Κάθε λύση της (1) είναι επίσης μια δευτεροβάθμια εξίσωση.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $f$ ικανοποιεί τη (1), για $a, b \in \mathbb{R}$ και $a, b \ne 0, \pm 1$. Θέτοντας $x = y = 0$ στην (1), έχουμε

$$(3a^2 - 2) f(0) = 0$$

δηλαδή $f(0) = 0$ . Θέτοντας $y = 0$ στην (1) έχουμε $f(ax) = a^2 f(x)$ για όλα τα $x \in X$ . Αν $y := -y$ στην (1) θα πάρουμε

$$f(ax-by)+f(ax+by)=\frac{2b^2-a^2}{2}\left[f(x+y)+f(x-y)\right]+\left(3a^2-2b^2\right)f(x)+a^2f(-y) \quad (3)$$

για κάθε $x,y\in X$ .Συγκρίνοντας τις (1) και (3) διαπιστώνουμε ότι $f(-y)=f(y)$ για όλα τα $y\in X$ . Αν $x=0$ στην (1) και λαμβάνοντας υπόψη την αρτιότητα της συνάρτησης $f$ έχουμε $f(by)=b^2f(y)$ για όλα τα $y\in X$ . Κατά συνέπεια για όλα τα $x\in X$ , έχουμε $f(abx)=a^2b^2f(x)$ .

Αν $x:=bx$ και $y:=ay$ στην (1) τότε θα έχουμε την

$$\begin{aligned} a^2b^2f(x+y)+a^2b^2f(x-y)&=\frac{2b^2-a^2}{2}\left[f(bx+ay)+f(bx-ay)\right]\\ &\quad+b^2\left(3a^2-2b^2\right)f(x)+a^4f(y) \end{aligned} \quad (4)$$

για κάθε $x,y\in X$ . Αν προχωρήσουμε στην εναλλαγή των $x$ με $y$ στην (1) τότε

$$f(ay+bx)+f(ay-bx)=\frac{2b^2-a^2}{2}\left[f(x+y)+f(y-x)\right]+\left(3a^2-2b^2\right)f(y)+a^2f(x) \quad (5)$$

για κάθε $x,y\in X$ .Επειδή όμως η $f$ είναι άρτια, από την (5) θα έχουμε και

$$f(ay+bx)+f(-ay+bx)=\frac{2b^2-a^2}{2}\left[f(x+y)+f(x-y)\right]+\left(3a^2-2b^2\right)f(y)+a^2f(x) \quad (6)$$

για κάθε $x,y\in X$ . Τελικά, από τις σχέσεις (4) και (6) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} a^2b^2f(x+y)+a^2b^2f(x-y)&=\left(\frac{2b^2-a^2}{2}\right)^2\left[f(x+y)+f(x-y)\right]+a^2\,\frac{2b^2-a^2}{2}\,f(x)\\ &\quad+\frac{\left(2b^2-a^2\right)\left(3a^2-2b^2\right)}{2}a^4f(y)+b^2(3a^2-2b^2)f(x)+a^4f(y) \end{aligned} \quad (7)$$

για κάθε $x,y\in X$ . Η (7) γράφεται διαφορετικά

$$\begin{aligned} \left[a^2b^2-\left(\frac{2b^2-a^2}{2}\right)^2\right]\left[f(x+y)+f(x-y)\right]&=\left[a^2\,\frac{2b^2-a^2}{2}+b^2\left(3a^2-2b^2\right)\right]f(x)\\ &\quad+\left[\frac{\left(2b^2-a^2\right)\left(3a^2-2b^2\right)}{2}+a^4\right]f(y) \end{aligned} \quad (8)$$

για κάθε $x,y\in X$ .Συμπεραίνουμε πως

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

για κάθε $x,y\in X$ , εφόσον

$$2\left[a^2b^2-\left(\frac{2b^2-a^2}{2}\right)^2\right]=\left[a^2\,\frac{2b^2-a^2}{2}+b^2\left(3a^2-2b^2\right)\right]=\left[\frac{\left(2b^2-a^2\right)\left(3a^2-2b^2\right)}{2}+a^4\right]$$

Το αντίστροφο είναι προφανές. □

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις συνθήκες ώστε το πρόβλημα ευστάθειας Hyers-Ulam-Rassias της (1) να έχει λύση. Για τα ακόλουθα υποθέτουμε ότι $X$ πραγματικός διανυσματικός χώρος και $Y$ χώρος Banach. Ορίζουμε επίσης τον τελεστή

$$\begin{aligned} Df(x,y) &:= f(ax+by)+f(ax-by)-\frac{2b^2-a^2}{2}\left[f(x+y)+f(x-y)\right] \\ &\quad -(3a^2-2b^2)f(x)+a^2f(y) \end{aligned}$$

για όλα τα $x,y\in X$ και $a,b\neq 0,\pm1,\ a,b\in\mathbb{R}$ όπου $f:X\to Y$ η συνάρτηση της σχέσης (1).

**Θεώρημα 2.3.2.2**. *Έστω $j\in\{-1,1\}$ σταθερός και $\varphi:X^2\to[0,\infty)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$\sum_{i=(1-j)/2}^{\infty}\frac{1}{a^{2nj}}\varphi\left(a^{ij}x,0\right)<\infty \tag{9}$$

*και*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{2nj}}\varphi\left(a^{nj}x,a^{nj}y\right)=0 \tag{10}$$

*για όλα τα $x,y\in X$ .Αν για την συνάρτηση $f:X\to Y$ ισχύει*

$$\left\|D_f(x,y)\right\|\le\varphi(x,y) \tag{11}$$

*για όλα τα $x,y\in X$ και επιπλέον υποθέσουμε ότι $f(0)=0$, τότε υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση $Q:X\to Y$ έτσι ώστε*

$$\left\|f(x)-Q(x)\right\|\le\frac{1}{2a^{1+j}}\sum_{i=(1-j)/2}^{\infty}\frac{1}{a^{2ij}}\varphi\left(\frac{a^{(i+1/2)j}}{a^{1/2}}x,0\right) \tag{12}$$

*για όλα τα $x\in X$ . Ισχύει,*

$$Q(x):=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^{2n}}f(a^nx),\ j=1\\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty}a^{2n}f(\dfrac{x}{a^n}),\ j=-1\end{cases}$$

*Απόδειξη.* Έστω $j=1$. Θέτουμε $y=0$ στην (11) και έχουμε

$$\left\| 2f(ax) - 2a^2 f(x) \right\| \le \varphi(x,0) \tag{13}$$

για όλα τα $x \in X$. Άρα

$$\left\| f(x) - \frac{1}{a^2} f(ax) \right\| \le \frac{1}{2a^2} \varphi(x,0) \tag{14}$$

για όλα τα $x \in X$.Αντικαθιστώντας τα $x$ με $ax$ στην (14) και διαιρώντας με $a^2$ και με χρήση τριγωνικής ανισότητας έχουμε

$$\left\| f(x) - \frac{1}{a^4} f(ax) \right\| \le \frac{1}{2a^2} \left( \varphi(x,0) + \frac{\varphi(ax,0)}{a^2} \right) \tag{15}$$

για όλα τα $x \in X$.Έτσι,

$$\left\| \frac{1}{a^{2k}} f(a^k x) - \frac{1}{a^{2m}} f(a^m x) \right\| \le \frac{1}{2a^2} \sum_{i=k}^{m-1} \frac{1}{a^{2i}} \varphi(a^i x, 0) \tag{16}$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $m$ και $k$ με $m > k$ και για όλα τα $x \in X$. Έπεται από τις (9) και (16) ότι η ακολουθία $\left\{ \frac{1}{a^{2n}} f(a^n x) \right\}$ είναι ακολουθία Cauchy για όλα τα $x \in X$. Εφόσον ο $Y$ είναι πλήρης , η ακολουθία $\left\{ \frac{1}{a^{2n}} f(a^n x) \right\}$ συγκλίνει. Έτσι ορίζεται η $Q : X \to Y$ με

$$Q(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{2n}} f(a^n x) \tag{17}$$

για όλα τα $x \in X$. Από τις (10) και (11) και για $j = 1$,

$$\left\| D_Q(x,y) \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| D_f(a^n x, a^n y) \right\| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{2n}} \varphi(a^n x, a^n y) = 0 \tag{18}$$

για όλα τα $x, y \in X$ . Άρα $D_Q(x,y) = 0$. Από το Θεώρημα 2.3.2.1, η συνάρτηση $Q : X \to Y$ είναι δευτεροβάθμια. Αν βάλουμε $k = 0$ και πάρουμε το όριο καθώς $m \to \infty$ στην σχέση (16), τότε προκύπτει η ανισότητα (12) για $j = 1$.

Για την απόδειξη της μοναδικότητας, έστω $Q' : X \to Y$ μια άλλη δευτεροβάθμια συνάρτηση που ικανοποιεί την (1) και την (12). Τότε θα ισχύει,

$$\begin{aligned}
\left\| Q(x) - Q'(x) \right\| &= \frac{1}{a^{2n}} \left\| Q(a^n x) - Q'(a^n x) \right\| \\
&\le \frac{1}{a^{2n}} \left( \left\| Q(a^n x) - f(a^n x) \right\| + \left\| Q'(a^n x) - f(a^n x) \right\| \right) \\
&\le \frac{1}{a^{2+2n}} \sum_{i=(1-j)/2}^{\infty} \frac{1}{a^{2nj}} \varphi\left( a^{ij+n} x, 0 \right)
\end{aligned} \tag{19}$$

που τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$ για όλα τα $x \in X$. Άρα $Q(x) = Q'(x)$.

Για $j = -1$, αν στην (13) θέσουμε $x := \frac{x}{a}$ τότε προκύπτει

$$\left\| f(x) - a^2 f\left(\frac{x}{a}\right) \right\| \le \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{a}, 0\right) \tag{20}$$

για όλα τα $x \in X$. Επομένως,

$$\left\| a^{2k} f\left(\frac{x}{a^k}\right) - a^{2m} f\left(\frac{x}{a^m}\right) \right\| \le \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{m-1} a^{2i} \varphi\left(\frac{x}{a^{i+1}}, 0\right) \tag{21}$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $m$ και $k$ με $m > k$ και για όλα τα $x \in X$. Από την (21) έπεται ότι η ακολουθία $\left\{ a^{2n} f\left(\frac{x}{a^n}\right) \right\}$ είναι ακολουθία Cauchy για όλα τα $x \in X$. Εφόσον ο $Y$ είναι πλήρης , η ακολουθία $\left\{ a^{2n} f\left(\frac{x}{a^n}\right) \right\}$ συγκλίνει. Έτσι ορίζεται η $Q : X \to Y$ με

$$Q(x) := \lim_{n \to \infty} a^{2n} f\left(\frac{x}{a^n}\right) \tag{22}$$

για όλα τα $x \in X$. Από τις (10) και (11) και για $j = -1$,

$$\left\| D_Q(x, y) \right\| = \lim_{n \to \infty} a^{2n} \left\| D_f\left(\frac{x}{a^n}, \frac{y}{a^n}\right) \right\| \le \lim_{n \to \infty} a^{2n} \varphi\left(\frac{x}{a^n}, \frac{y}{a^n}\right) = 0$$

για όλα τα $x, y \in X$ . Άρα $D_Q(x, y) = 0$. Από το Θεώρημα 2.3.2.1, η συνάρτηση $Q : X \to Y$ είναι δευτεροβάθμια. Αν βάλουμε $k = 0$ και πάρουμε το όριο καθώς $m \to \infty$ στην σχέση (21), τότε προκύπτει η ανισότητα (12) για $j = 1$.
Η υπόλοιπη απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη της προηγούμενης περίπτωσης. □

Τα ακόλουθα πορίσματα αφορούν την περίπτωση ευστάθειας με φράγμα μικτό γινόμενο-άθροισμα, κατά Ulam-Gavruta-Rassias.

**Πόρισμα 2.3.2.3.** *Έστω* $\varepsilon, p, q \ge 0$ *και* $r, s > 0$ *πραγματικοί αριθμοί ώστε* $p, q < 2$ *και* $r + s \ne 2$. *Αν μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *ικανοποιεί την*

$$\left\| D_f(x, y) \right\| \le \varepsilon\left( \|x\|^p + \|y\|^q + \|x\|^r \, \|y\|^s \right) \tag{23}$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ *, τότε υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q : X \to Y$ *ώστε*

$$\| f(x) - Q(x) \| \leq \frac{\varepsilon}{2\left(a^2 - a^p\right)} \|x\|^p \tag{24}$$

*για όλα τα* $x \in X$.

*Απόδειξη.*

Στο Θεώρημα 2.3.2.2, θεωρούμε $j = 1$ και $\varphi(x, y) = \varepsilon\left(\|x\|^p + \|y\|^q + \|x\|^r \|y\|^s\right)$ □

**Πόρισμα 2.3.2.4.** *Έστω* $\varepsilon, p, q \geq 0$ *και* $r, s > 0$ *πραγματικοί αριθμοί ώστε* $p, q > 2$ *και* $r + s \neq 2$. *Αν μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *ικανοποιεί την*

$$\left\|D_f(x, y)\right\| \leq \varepsilon\left(\|x\|^p + \|y\|^q + \|x\|^r \|y\|^s\right)$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ *, τότε υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q : X \to Y$ *ώστε*

$$\| f(x) - Q(x) \| \leq \frac{\varepsilon}{2\left(a^p - \alpha^2\right)} \|x\|^p \tag{24}$$

*για όλα τα* $x \in X$.

*Απόδειξη.*

Στο Θεώρημα 2.3.2.2, θεωρούμε $j = -1$ και $\varphi(x, y) = \varepsilon\left(\|x\|^p + \|y\|^q + \|x\|^r \|y\|^s\right)$ □

# Κεφάλαιο 3

# Κυβικές και τετάρτου βαθμού συναρτησιακές εξισώσεις. Επίλυση και ευστάθεια.

Πλήθος εργασιών στις κυβικές συναρτησιακές εξισώσεις και την ευστάθεια Ulam έχει δημοσιευτεί τα τελευταία 20 χρόνια αρχής γενομένης από την εργασία του J.M.Rassias [75] για την συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x+2y)-3f(x+y)+3f(x)-f(x-y)=6f(y).$$

Επίσης η κυβική εξίσωση, Jun and Kim [37]

$$f(2x+y)+f(2x-y)=2f(x+y)+2f(x-y)+12f(x)$$

καθώς και η γενίκευσή της, Jun et.al.[38],

$$f(ax+y)+f(ax-y)=af(x+y)+af(x-y)+2a(a^2-1)f(x), a\neq 0,\pm 1.$$

Αναφέρουμε ενδεικτικά τις ακόλουθες κυβικές συναρτησιακές εξισώσεις

$$f(x+3y)-3f(x+y)+3f(x-y)-f(x-3y)=48f(y),$$

$$\begin{aligned}f(x+y+2z)+f(x+y-2z)+f(2x)+f(2y)=2\big[&f(x+y)+2f(x+z)+2f(y+z)\\&+2f(x-z)+2f(y-z)\big]\end{aligned}$$

$$3f(x+3y)-f(3x+y)=12\big[f(x+y)+f(x-y)\big]+80f(y)-48f(x),$$

$$f(2x-y)+f(x-2y)=6f(x-y)+3f(x)-3f(y),$$

$$\begin{aligned}&f(2x\pm y\pm z)+f(\pm y\pm z)+2f(\pm y)+2f(\pm z)\\&\quad=2f(2x\pm y\pm z)+f(x\pm y)+f(x\pm z)+f(\text{-}x\pm y)+f(\text{-}x\pm z)+6f(x),\end{aligned}$$

$$kf(x+ky)-f(kx+y)=\frac{k(k^2-1)}{2}\big[f(x+y)+f(x-y)\big]+(k^4-1)f(y)-2k(k^2-1)f(x), k\geq 2$$

$$\begin{aligned}&\frac{a+\sqrt{k}b}{2}f(ax+\sqrt{k}by)+\frac{a-\sqrt{k}b}{2}f(ax-\sqrt{k}by)+k(a^2-kb^2)b^2f(y)\\&=ka^2b^2f(x+y)+(a^2-kb^2)a^2f(x), a,b\neq 0,\pm 1, k>0\end{aligned}$$

$$2\big[af(x-ay)+f(ax+y)\big]=a(a^2+1)\big[f(x+y)+f(x-y)\big]-2(a^4-1)f(y), a\neq 0,\pm 1$$

$$\beta f(x+\beta y)-f(\beta x+y)=\beta f(x-\beta y)-f(\beta x-y)+2(\beta^4-1)f(y), \beta\neq 0,\pm 1$$

που εμφανίζονται αντίστοιχα στις εργασίες των Witwatwanich et .al.[101], Y.S.Jung and I.S.Chang [43], K.Ravi et.al.[95], M. Arunkumar [5,7], M.J.Rassias [87], και J.M.Rassias et.al. [90].

## 3.1 $\alpha$ -cubic συναρτησιακές εξισώσεις

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τη νέα $\alpha$ -κυβική συναρτησιακή εξίσωση

$$f(ax+y)+f(x-ay)=a^2 f(x+y)+af(x+y)+(a+1)(1-a)\left[(1-a)f(x)+(a+1)f(y)\right] \qquad (1)$$

$a \neq 0, \pm 1$

και μελετάμε την γενική επίλυσή της καθώς και την γενικευμένη ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias.

**Λήμμα 3.1.1**.*Αν μια απεικόνιση* $f : X \to Y$ *ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση (1), τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

*(1).* $f(0)=0$

*(2).* $f(ax)=a^3 f(x)$, *για όλα τα* $x \in X$ .

*(3).* $f(-y)=-f(y)$, *για όλα τα* $y \in X$ . *Δηλαδή η* $f$ *είναι περιττή.*

*Απόδειξη.* (1).Αντικαθιστώντας $(x,y)=(0,0)$ στην (1) έχουμε

$$2f(0)=\left[a^2+a+(a+1)(1-a)^2+(a+1)^2(1-a)\right]f(0)$$

ή

$$a(a-1)f(0)=0$$

δηλαδή

$$f(0)=0$$

εφόσον $a \neq 0, \pm 1$ .

(2). Αν θέσουμε όπου $y$ το $0$ , παρατηρούμε διαδοχικά

$$f(ax)+(1-a-a^2)f(x)=(a+1)(1-2a+a^2)f(x)$$

$$f(ax)+(1-a-a^2)f(x)=(1-a-a^2)f(x)+a^3 f(x)$$

$$f(ax)=a^3 f(x)$$

για κάθε $x \in X$ .

(3). Αν $(x,y):=(0,y)$ στην (1), τότε

$$f(y)+f(-ay)=a^2 f(y)+af(-y)+(a+1)^2(1-a)f(y)$$

$$\left(-a^3+a\right)f(-y)=\left(1+a^2+(a+1)^2(1-a)\right)f(y)$$

$$f(-y)=f(y)$$

για κάθε $y \in X$ , εφόσον $a \neq 0, \pm 1$ . Άρα η $f$ είναι περιττή. □

Στη συνέχεια μελετάμε την γενικευμένη ευστάθεια κατά Hyers-Ulam-Rassias σε χώρους Banach με την ευθεία μέθοδο Hyers.

Υποθέτουμε για τα επόμενα, εκτός αν ρητά αναφέρεται διαφορετικά, ότι $X$ σταθμητός χώρος και $Y$ χώρος Banach.

**Θεώρημα 3.1.2.** *Έστω* $j = \pm 1$ *και* $\varphi : X^2 \to [0,\infty)$ *μια συνάρτηση τέτοια, ώστε* $\sum_{b=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^{bj}x, a^{bj}y)}{a^{3j}}$ *να συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$ *και* $\lim_{b\to\infty} \frac{\varphi(a^{bj}x, a^{bj}y)}{a^{3j}} = 0$ *για όλα τα* $x, y \in X$ .

*Έστω* $f : X \to Y$ *μια συνάρτηση για την οποία*

$$\begin{aligned}\| f(ax+y) + f(x-ay) - a^2 f(x+y) + af(x+y) \\ -(a+1)(1-a)\left[(1-a)f(x) + (a+1)f(y)\right]\| \le \varphi(x,y)\end{aligned} \tag{2}$$

*για κάθε* $x, y \in X$ . *Τότε υπάρχει μοναδική κυβική απεικόνιση* $C_a : X \to Y$ *που ικανοποιεί την (1) και*

$$\| f(x) - C_a(x) \| \le \frac{1}{2a^3} \sum_{b=\frac{1-j}{2}}^{\infty} \frac{\varphi(a^{bj}x, 0)}{a^{3bj}} \tag{3}$$

*όπου*

$$C_a(x) := \lim_{b\to\infty} \frac{f(a^{bj}x)}{a^{3bj}} \tag{4}$$

*για κάθε* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Α. Έστω $j = 1$. Αντικαθιστώντας τα $(x, y)$ με $(x, 0)$ στην (2), έχουμε

$$\| 2f(ax) - 2a^3 f(x) \| \le \varphi(x,0) \tag{5}$$

για κάθε $x \in X$ . Διαφορετικά η (5) γράφεται

$$\left\| \frac{f(ax)}{a^3} - f(x) \right\| \le \frac{\varphi(x,0)}{2a^3} \tag{6}$$

για κάθε $x \in X$ . Αντικαθιστώντας το $x$ με $ax$ και διαιρώντας με $a^3$ στην ανισότητα (6) έχουμε

$$\left\| \frac{f(a^2x)}{a^6} - \frac{f(ax)}{a^3} \right\| \le \frac{\varphi(ax,0)}{2a^6} \tag{7}$$

για κάθε $x \in X$ . Συνδυάζοντας τις (6) και (7) παρατηρούμε ότι

$$\left\| \frac{f(a^2x)}{a^6} - f(x) \right\| \le \left\| \frac{f(a^2x)}{a^6} - \frac{f(ax)}{a^3} \right\| + \left\| \frac{f(ax)}{a^3} - f(x) \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2a^3}\left[\varphi(x,0)+\frac{\varphi(ax,0)}{a^3}\right] \tag{8}$$

για κάθε $x \in X$. Επαγωγικά , για θετικό ακέραιο $k$ έχουμε

$$\left\| \frac{f(a^k x)}{a^{3k}} - f(x) \right\| \leq \frac{1}{2a^3}\sum_{b=0}^{k-1}\frac{\varphi(a^b x,0)}{a^{3b}} \tag{9}$$

για κάθε $x \in X$. Η ακολουθία $\left\{\frac{1}{a^{3k}} f(a^k x)\right\}$ συγκλίνει διότι αντικαθιστώντας το $x$ με $a^m x$ και διαιρώντας με $a^{3m}$ στην (9), για τυχόντες $k,m>0$, έχουμε

$$\left\| \frac{f(a^{k+m}x)}{a^{3(k+m)}} - \frac{f(a^m x)}{a^{3m}} \right\| = \frac{1}{a^{3m}}\left\| \frac{f(a^k a^m x)}{a^{3k}} - f(a^m x) \right\|$$

$$\leq \frac{1}{2a^3}\sum_{b=0}^{k-1}\frac{\varphi(a^{b+m}x,0)}{a^{3(b+m)}}$$

$$\leq \frac{1}{2a^3}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\varphi(a^{b+m}x,0)}{a^{3(b+m)}}$$

$$\to 0 \quad \text{καθώς } m \to \infty$$

για κάθε $x \in X$. Συνεπώς η ακολουθία $\left\{\frac{1}{a^{3k}} f(a^k x)\right\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $Y$. Ορίζουμε λοιπόν την απεικόνιση,

$$C_a(x) := \lim_{k\to\infty}\frac{f(a^k x)}{a^{3k}} \tag{10}$$

για κάθε $x \in X$. Αν $k \to \infty$ στην (9) και με βάση την (10), διαπιστώνουμε ότι η (3) ισχύει για κάθε $x \in X$.

Για την απόδειξη ότι η $C_a$ είναι $\alpha$ -κυβική, δηλαδή ικανοποιεί την (1), αντικαθιστούμε $(x,y)$ με $(a^k x, a^k y)$ και διαιρούμε με $a^{3k}$ στην (2), οπότε έχουμε

$$\frac{1}{a^{3k}}\Big\| f\left(a^k(ax+y)\right) + f\left(a^k(x-ay)\right) - a^2 f\left(a^k(x+y)\right) + af\left(a^k(x+y)\right)$$

$$-(a+1)(1-a)\left[(1-a)f(a^k x)+(a+1)f(a^k y)\right]\Big\| \leq \frac{1}{a^{3k}}\varphi(a^k x, a^k y)$$

για κάθε $x,y \in X$ . Αν επιτρέψουμε το $k \to \infty$ στην παραπάνω ανισότητα και σύμφωνα την (10), παρατηρούμε ότι

$$\Big\| C_a(ax+y) + C_a(x-ay) - a^2 C_a(x+y) + aC_a(x+y)$$

$$-(a+1)(1-a)\left[(1-a)C_a(x)+(a+1)C_a(y)\right]\Big\| = 0$$

για κάθε $x, y \in X$ . Άρα, $C_a$ είναι $\alpha$ -κυβική.

Η απόδειξη της μοναδικότητας της $C_a$.

Έστω ότι $C_a'$ μια διαφορετική $\alpha$ -κυβική απεικόνιση που ικανοποιεί την (1) και την ανισότητα (3) . Παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned}\left\|C_a(x) - C_a'(x)\right\| &\le \frac{1}{a^{3m}}\left\|C_a(a^m x) - C_a'(a^m x)\right\| \\ &\le \frac{1}{a^{3m}}\left\{\left\|C_a(a^m x) - f(a^m x)\right\| + \left\|f(a^m x) - C_a'(a^m x)\right\|\right\} \\ &\le \frac{1}{a^{3m}}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\varphi(a^{b+m}x, 0)}{a^{3(b+m)}}\end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$ . Εφόσον, $m \to \infty$ στην ανισότητα αυτή, έπεται η μοναδικότητα της $C_a$.

B. Έστω $j = -1$. Αντικαθιστώντας στην (5) το $x$ με $\frac{w}{x}$ παίρνουμε

$$\left\|f(x) - a^3 f\left(\frac{w}{x}\right)\right\| \le \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{w}{x}, 0\right) \tag{11}$$

για κάθε $x \in X$ . Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι ανάλογο της περίπτωσης Α για $j = 1$. □

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 3.1.2. είναι και το ακόλουθο πόρισμα που εξετάζει την ευστάθεια κατά Ulam-Gavruta-Rassias.

**Πόρισμα 3.1.3**. *Έστω* $f : X \to Y$ *μια απεικόνιση και* $p$ , $s$ *δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε,*

$$\begin{aligned}&\Big\| f(ax+y) + f(x-ay) - a^2 f(x+y) + af(x+y) \\ &\quad -(a+1)(1-a)\left[(1-a)f(x) + (a+1)f(y)\right]\Big\| \le \begin{cases} p \\ p\left\{\|x\|^s + \|y\|^s\right\} \\ p\left\{\|x\|^s\|y\|^s + \left\{\|x\|^{2s} + \|y\|^{2s}\right\}\right\}\end{cases}\end{aligned} \tag{12}$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική κυβική απεικόνιση* $C_a : X \to Y$ *ώστε*

$$\| f(x) - C_a(x) \| \leq \begin{cases} \dfrac{p}{2\left|a^3 - 1\right|}, \\ \dfrac{p\|x\|^s}{2\left|a^3 - a^s\right|}, & s \neq 3 \\ \dfrac{p\|x\|^{2s}}{2\left|a^3 - a^{2s}\right|}, & 2s \neq 3 \end{cases} \tag{13}$$

*για κάθε* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Θέτοντας στην (2) του Θεωρήματος 3.1.2., $\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{p}{2\left|a^3 - 1\right|}, \\ \dfrac{p\|x\|^s}{2\left|a^3 - a^s\right|}, & s \neq 3 \\ \dfrac{p\|x\|^{2s}}{2\left|a^3 - a^{2s}\right|}, & 2s \neq 3 \end{cases}$

συμπεραίνουμε την ανισότητα (13). □

## 3.2 $\alpha,\beta$ – cubic συναρτησιακές εξισώσεις

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τη νέα $\alpha,\beta$ -κυβική συναρτησιακή εξίσωση

$$\begin{aligned} &f(ax+\beta y)+f(ax-\beta y)=a\beta^2\left[f(x+y)+f(x-y)\right]+2a(a^2-\beta^2)f(x) \\ &a,\beta\neq 0,\pm 1 \end{aligned} \tag{1}$$

και μελετάμε την γενική επίλυσή της καθώς και την γενικευμένη ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias με fixed point method.

**Λήμμα 3.2.1**.*Αν μια απεικόνιση* $f:X\to Y$ *ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση (1), τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

*(1).* $f(0)=0$

*(2).* $f(ax)=a^3f(x)$, *για όλα τα* $x\in X$.

*(3).* $f(-y)=-f(y)$, *για όλα τα* $y\in X$. *Δηλαδή η* $f$ *είναι περιττή.*

*Απόδειξη*. (1).Αντικαθιστώντας $(x,y)=(0,0)$ στην (1) έχουμε

$$2f(0)=2a\beta^2f(0)+2a(a^2-\beta^2)f(0)$$

ή

$$2(a^3-1)f(0)=0$$

δηλαδή

$$f(0)=0$$

εφόσον $a\neq 0,\pm 1$.

(2). Αν θέσουμε όπου $y$ το $0$, παρατηρούμε διαδοχικά

$$f(ax)+f(ax)=2a\beta^2f(x)+2a(a^2-\beta^2)f(x)$$

$$2f(ax)=2a^3f(x)$$

$$f(ax)=a^3f(x)$$

για κάθε $x\in X$.

(3). Αν $(x,y):=(0,y)$ στην (1), τότε

$$f(y)+f(-ay)=a^2f(y)+af(-y)+(a+1)^2(1-a)f(y)$$

$$\left(-a^3+a\right)f(-y)=\left(1+a^2+(a+1)^2(1-a)\right)f(y)$$

$$f(-y)=f(y)$$

για κάθε $y\in X$, εφόσον $a\neq 0,\pm 1$. Άρα η $f$ είναι περιττή. □

Στη συνέχεια μελετάμε την γενικευμένη ευστάθεια κατά Hyers-Ulam-Rassias σε χώρους Banach με την μέθοδο σταθερού σημείου (fixed point method) .Υποθέτουμε για τα επόμενα, εκτός αν ρητά αναφέρεται διαφορετικά, ότι $X$ σταθμητός χώρος και $Y$ χώρος Banach.

**Θεώρημα 3.2.2.** *Έστω* $\varphi : X^2 \to [0,\infty)$ *μια συνάρτηση τέτοια ώστε να υπάρχει* $L<1$ *με*

$$\varphi\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right) \le \frac{L}{a^3}\varphi\left(\frac{2x}{a},\frac{2y}{a}\right) \tag{2}$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ . *Έστω* $f : X \to Y$ *μια συνάρτηση που ικανοποιεί την* $f(0)=0$ *και*

$$\left\| f(ax+\beta y) + f(ax-\beta y) - a\beta^2\left[f(x+y)+f(x-y)\right] - 2a(a^2-\beta^2)f(x)\right\| \le \varphi(x,y) \tag{3}$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ . *Τότε υπάρχει μοναδική κυβική απεικόνιση* $C_{a,\beta} : X \to Y$ *τέτοια ώστε*

$$\left\| f(x) - C_{a,\beta}(x)\right\| \le \frac{L}{a^3(1-L)}\varphi\left(\frac{x}{a},0\right) \tag{4}$$

*για όλα τα* $x \in X$ .

*Απόδειξη*. Αν $y=0$ στην (3), έχουμε

$$\left\| f(ax) - a^3 f(x)\right\| \le \varphi(x,0) \tag{5}$$

για όλα τα $x \in X$ .

Θεωρούμε το σύνολο

$$S := \{h : X \to Y, h(0)=0\}$$

και εισάγουμε την γενικευμένη μετρική στο $S$ :

$$d(g,h) = \inf\left\{\mu \in \mathbb{R}_+ : \|g(x)-h(x)\| \le \mu\varphi(x,0),\ \forall x \in X\right\},$$

όπου $\inf \varphi = +\infty$. Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι $(S,d)$ είναι πλήρες, βλ. D.Mihet,V. Radu [51].

Στη συνέχεια θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $J : S \to S$ ώστε

$$Jg(x) := a^3 g\left(\frac{x}{a}\right)$$

για όλα τα $x \in X$. Έστω $g, h \in S$ ώστε $d(g,h) = \varepsilon$. Τότε

$$\|g(x) - h(x)\| \le \varepsilon\varphi(x,0)$$

για όλα τα $x \in X$. Επομένως

$$\|Jg(x) - Jh(x)\| = \left\|a^3 g\left(\frac{x}{a}\right) - a^3 h\left(\frac{x}{a}\right)\right\| \le a^3 \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{a},0\right) \le L\varepsilon\varphi\left(\frac{2x}{a},0\right)$$

για όλα τα $x \in X$. Άρα

$$d(Jg - Jh) \le Ld(g,h)$$

για όλα τα $g, h \in S$.

Από την σχέση (5) έπεται ότι

$$\left\|f(x) - a^3 f\left(\frac{x}{a}\right)\right\| \le \varphi\left(\frac{x}{a},0\right) \le \frac{L}{a^3}\varphi\left(\frac{2x}{a},0\right)$$

για όλα τα $x \in X$. Έτσι $d(f, Jf) \le \dfrac{L}{a^3}$.

Από το Θεώρημα 2.3.1.2., υπάρχει μια απεικόνιση που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(1). Η $C_{a,\beta}$ είναι ένα σταθερό σημείο της $J$, δηλαδή,

$$C_{a,\beta}(x) = a^3 C_{a,\beta}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{6}$$

για όλα τα $x \in X$. Η απεικόνιση $C_{a,\beta}$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της $J$ στο σύνολο

$$M = \{g \in S : d(f,g) < \infty\}.$$

Από αυτό συνάγεται ότι η $C_{a,\beta}$ είναι η μοναδική απεικόνιση που ικανοποιεί την (6) ώστε να υπάρχει ένα $\mu \in (0,\infty)$ και

$$\|f(x) - C_{a,\beta}(x)\| \le \mu\varphi\left(\frac{x}{a},0\right)$$

για όλα τα $x \in X$.

(2). $d(J^n f, C_{a,\beta}) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή,

$$C_{a,\beta}(x) = \lim_{n\to\infty} a^{3n} f\left(\frac{x}{a^n}\right),$$

για όλα τα $x \in X$.

(3) . $d(f, C_{a,\beta}) \le \dfrac{1}{1-L} d(f, Jf)$ δηλαδή,

$$\left\| f(x) - C_{a,\beta}(x) \right\| \le \frac{L}{a^3(1-L)} \varphi\left(\frac{x}{a}, 0\right)$$

για όλα τα $x \in X$.

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\left\| f(ax+\beta y) + f(ax-\beta y) - a\beta^2 \left[ f(x+y) + f(x-y) \right] - 2a(a^2-\beta^2) f(x) \right\|$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{3n} \left\| f\left(\frac{ax+\beta y}{a^n}\right) + f\left(\frac{ax-\beta y}{a^n}\right) - a\beta^2 \left[ f\left(\frac{x+y}{a^n}\right) + f\left(\frac{x-y}{a^n}\right) \right] - 2a(a^2-\beta^2) f\left(\frac{x}{a^n}\right) \right\|$$

$$\le \lim_{n\to\infty} a^{3n} \varphi\left(\frac{2x}{a^n}, \frac{2y}{a^n}\right) = 0$$

για όλα τα $x, y \in X$. Άρα

$$C_{a,\beta}(ax+\beta y) + C_{a,\beta}(ax-\beta y) = a\beta^2 \left[ C_{a,\beta}(x+y) + C_{a,\beta}(x-y) \right] + 2a(a^2-\beta^2) C_{a,\beta}(x)$$

για όλα τα $x, y \in X$. Από το Λήμμα 3.2.1, η απεικόνιση $C_{a,\beta} : X \to Y$ είναι κυβική. □

**Πόρισμα 3.2.3.** *Έστω* $r < 3$ *και* $\theta$ *μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, και* $f : X \to Y$ *μια απεικόνιση με* $f(0) = 0$ *και*

$$\left\| f(ax+\beta y) + f(ax-\beta y) - a\beta^2 \left[ f(x+y) + f(x-y) \right] - 2a(a^2-\beta^2) f(x) \right\| \le \theta\left( \|x\|^r + \|y\|^r \right) \quad (7)$$

*για όλα τα* $x, y \in X$. *Τότε υπάρχει μοναδική κυβική απεικόνιση* $C_{a,\beta} : X \to Y$ *τέτοια, ώστε*

$$\left\| f(x) - C_{a,\beta}(x) \right\| \le \frac{2\theta}{|a|^r - |a|^3} \|x\|^r$$

*για κάθε* $x \in X$.

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.2, αν $\varphi(x, y) = \theta\left( \|x\|^r + \|y\|^r \right)$ για όλα τα $x, y \in X$. Επιλέγουμε $L = |a|^{3-r}$ και έχουμε το ζητούμενο. □

**Θεώρημα 3.2.4.** *Έστω* $\varphi: X^2 \to [0,\infty)$ *μια συνάρτηση τέτοια ώστε να υπάρχει* $L<1$ *με*

$$\varphi\left(\frac{2x}{a},\frac{2y}{a}\right) \le a^3 L\varphi\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right)$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ . *Έστω* $f: X \to Y$ *μια συνάρτηση που ικανοποιεί την* $f(0)=0$ *και*

$$\left\| f(ax+\beta y)+ f(ax-\beta y) - a\beta^2 \left[ f(x+y)+ f(x-y)\right] - 2a(a^2-\beta^2) f(x)\right\| \le \varphi(x,y)$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ . *Τότε υπάρχει μοναδική κυβική απεικόνιση* $C_{a,\beta}: X \to Y$ *τέτοια ώστε*

$$\left\| f(x) - C_{a,\beta}(x)\right\| \le \frac{1}{a^3(1-L)}\varphi\left(\frac{x}{a},0\right)$$

*για όλα τα* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι

$$\left\| f\left(x\right) - \frac{1}{a^3} f\left(ax\right)\right\| \le \frac{1}{a^3}\varphi(x,0) \tag{8}$$

Αν $(S,d)$ είναι ο γενικευμένος μετρικός χώρος που ορίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2 και $J: S \to S$ μια γραμμική απεικόνιση ώστε

$$Jg(x) := \frac{1}{a^3} g\left(ax\right)$$

για κάθε $x \in X$ , έπεται από την (8) ότι $d(f, Jf) \le \frac{1}{a^3}$ . Έτσι,

$$\left\| f(x) - C_{a,\beta}(x)\right\| \le \frac{1}{a^3(1-L)}\varphi(x,0)$$

για κάθε $x \in X$ .

Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι ανάλογο του Θεωρήματος 3.2.2. ∎

**Πόρισμα 3.2.5.** *Έστω* $r>3$ *και* $\theta$ *μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, και* $f: X \to Y$ *μια απεικόνιση με* $f(0)=0$ *και*

$$\begin{aligned}&\left\| f(ax+\beta y)+ f(ax-\beta y) - a\beta^2 \left[ f(x+y)+ f(x-y)\right] - 2a(a^2-\beta^2) f(x)\right\| \\ &\qquad \le \theta\left(\|x\|^r + \|y\|^r\right)\end{aligned} \tag{9}$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική κυβική απεικόνιση* $C_{a,\beta} : X \to Y$ *τέτοια, ώστε*

$$\left\| f(x) - C_{a,\beta}(x) \right\| \le \frac{2\theta}{|a|^3 - |a|^r} \|x\|^r$$

*για κάθε* $x \in X$ *.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.4, αν $\varphi(x, y) = \theta\left(\|x\|^r + \|y\|^r\right)$ για όλα τα $x, y \in X$ .Επιλέγοντας $L = |a|^{r-3}$ έχουμε το ζητούμενο. □

## 3.3. $a$-quartic συναρτησιακή εξίσωση

Η πρώτη τετάρτου βαθμού συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x+2y) - 4f(x+y) + 6f(y) - 4f(x-y) + f(x-2y) = 24f(y)$$

παρουσιάστηκε και επιλύθηκε από τον J.M.Rassias[74] . Πρόσφατες εργασίες στην περιοχή των τετάρτου βαθμού συναρτησιακών εξισώσεων παρουσιάζονται στα M.Arunkumar et.al.[6], J. Chung et. al.[17], Covindan et. al. [18], K.Wongkum et.al. [102], R. Murali et. al.[54].

Στην ενότητα αυτή, απαντούμε σε ένα ανοιχτό πρόβλημα που προτάθηκε από τον J.M.Rassias [85], και ζητείται η μελέτη της γενικευμένης ευστάθειας της $a$ -quartic συναρτησιακής εξίσωσης

$$\begin{aligned} 2\left[f(ax+y) + f(x+ay)\right] + a(a-1)^2 f(x-y) = 2(a^2-1)^2 \left[f(x) + f(y)\right] \\ + a(a+1)^2 f(x+y), \quad a \ne 0, \pm 1 \end{aligned} \tag{1}$$

και η εύρεση των συνθηκών ευστάθειας σε non-Archimedean χώρους με χρήση της ευθείας και της σταθερού σημείου μεθόδου. (direct και fixed point method).

Βασικές έννοιες για τους μη-Αρχιμήδειους χώρους είναι οι ακόλουθες:

**Ορισμός 3.3.1.** *Αποτίμηση (valuation) είναι μια συνάρτηση* $|\cdot|$ *από ένα σώμα* $K$ *στο* $[0, \infty)$ *ώστε το* $0$ *να είναι το μοναδικό στοιχείο που έχει αποτίμηση* $0$ *,* $|r \cdot s| = |r| \cdot |s|$ *και* $|r+s| \le |r| + |s|, \quad \forall r, s \in K$ *.*

**Ορισμός 3.3.2.** *Ένα σώμα $K$ λέγεται σώμα αποτιμημένο (valued field) αν είναι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης αποτίμησης.*

Οι συνήθεις απόλυτες τιμές του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{C}$ είναι συναρτήσεις αποτίμησης.

**Ορισμός 3.3.3**. *Non-Archimedean valuation (μη-Αρχιμήδεια αποτίμηση) είναι μια συνάρτηση $|\cdot|$ από ένα σώμα $K$ στο $[0,\infty)$ ώστε το $0$ να είναι το μοναδικό στοιχείο που έχει αποτίμηση $0$, $|r\cdot s|=|r|\cdot|s|$ και $|r+s|\le \max\{|r|,|s|\}, \quad \forall r,s\in K$.*

Τετριμμένη περίπτωση μιας μη-Αρχιμήδειας συνάρτησης αποτίμησης είναι η συνήθης απόλυτη τιμή να στέλνει όλες τις τιμές εκτός του 0 στο 1 και $|0|=0$.

**Ορισμός 3.3.4.** *Έστω $X$ διανυσματικός χώρος σε σώμα $K$ με μη-Αρχιμήδεια αποτίμηση $|\cdot|$. Η συνάρτηση $\|\cdot\|: X\to[0,\infty)$ λέγεται μη Αρχιμήδεια στάθμη αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

*α.* $\|x\|=0$ *αν και μόνον αν* $x=0$

*β.* $\|rx\|=|r|\|x\| \quad (r\in K, x\in X)$

*γ.* $\|x+y\|\le \max\{\|x\|,\|y\|\}, \quad \forall x,y\in X$

*Τότε ο χώρος $(X,\|\cdot\|)$ καλείται μη-Αρχιμήδειος σταθμητός χώρος.*

**Λήμμα 3.3.5.** *Αν μια απεικόνιση $f: X\to Y$ ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση (1), τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

*(a).* $f(0)=0$

*(β).* $f(ax)=a^4 f(x)$, *για όλα τα* $x\in X$.

*(γ).* $f(-y)=f(y)$, *για όλα τα* $y\in X$. *Δηλαδή η $f$ είναι άρτια..*

*Απόδειξη.* (1).Αντικαθιστώντας $(x,y)=(0,0)$ στην (1) έχουμε

$$4f(0)+a(a-1)^2 f(0)=4(a^2-1)^2 f(0)+a(a+1)^2 f(0)$$

ή

$$4a^2(1-a^2)f(0)=0$$

δηλαδή

$$f(0)=0$$

εφόσον $a\neq 0,\pm 1$.

(2). Αν θέσουμε όπου $y$ το $0$, στην (1) παρατηρούμε διαδοχικά

$$f(ax) = a^4 f(x) + (a^2-1)^2 f(0)$$

$$f(ax) = a^4 f(x)$$

για κάθε $x \in X$.

(3). Αν $(x, y) := (x, -x)$ στην (1), τότε

$$2\left[ f\left((a-1)x\right) + f\left((1-a)x\right)\right] + a(a-1)^2 f(2x) = 2(a^2-1)^2 \left[ f(x) + f(-x)\right] + a(a+1)^2 f(0)$$

ή

$$2\left[ f\left(kx\right) + f\left(-kx\right)\right] + a(a-1)^2 f(2x) = 2(a^2-1)^2 \left[ f(x) + f(-x)\right] \qquad (2)$$

εφόσον $k := a-1$, για κάθε $x \in X$. Αν θέσουμε στην (2) $x := -x$ τότε,

$$2\left[ f\left(-kx\right) + f\left(kx\right)\right] + a(a-1)^2 f(-2x) = 2(a^2-1)^2 \left[ f(-x) + f(x)\right] \qquad (3)$$

για κάθε $x \in X$. Από τις εξισώσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι

$$a(a-1)^2 \left[ f(2x) - f(-2x)\right] = 0$$

για κάθε $x \in X$. Δηλαδή,

$$f(-y) = f(y)$$

για κάθε $x \in X$, εφόσον $a \neq 0, \pm 1$. Άρα η $f$ είναι άρτια. □

**Μέθοδος σταθερού σημείου (Fixed Point Method)**

**Θεώρημα 3.3.6.** *Έστω $\varphi : X^2 \to [0, \infty)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε να υπάρχει $L < 1$ με*

$$\varphi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) \leq \frac{L}{\left|a^4\right|} \varphi\left(\frac{2x}{a}, \frac{2y}{a}\right) \qquad (4)$$

*για όλα τα $x, y \in X$. Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση που ικανοποιεί την $f(0) = 0$ και*

$$\left\| 2\left[ f(ax+y) + f(x+ay)\right] + a(a-1)^2 f(x-y) - 2(a^2-1)^2 \left[ f(x) + f(y)\right] \right.$$
$$\left. -a(a+1)^2 f(x+y) \right\| \leq \varphi(x, y) \qquad (5)$$

*για όλα τα $x, y \in X$. Τότε υπάρχει μοναδική τετάρτου βαθμού απεικόνιση $Q : X \to Y$ τέτοια ώστε*

$$\|f(x)-Q(x)\| \leq \frac{L}{|a^4|(1-L)}\varphi\left(\frac{x}{a},0\right) \tag{6}$$

*για όλα τα* $x \in X$.

*Απόδειξη.* Αν $y=0$ στην (5), έχουμε

$$\left\|f(ax)-a^4 f(x)\right\| \leq \varphi(x,0) \tag{7}$$

για όλα τα $x \in X$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$S := \{h : X \to Y, h(0)=0\}$$

και εισάγουμε την γενικευμένη μετρική στο $S$:

$$d(g,h) = \inf\left\{\mu \in \mathbb{R}_+ : \|g(x)-h(x)\| \leq \mu\varphi(x,0),\ \forall x \in X\right\},$$

όπου $\inf \varphi = +\infty$. Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι $(S,d)$ είναι πλήρες λόγω του D. Mihet, V. Radu [51]. Στη συνέχεια θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $J : S \to S$ ώστε

$$Jg(x) := a^4 g\left(\frac{x}{a}\right)$$

για όλα τα $x \in X$. Έστω $g,h \in S$ ώστε $d(g,h)=\varepsilon$. Τότε

$$\|g(x)-h(x)\| \leq \varepsilon\varphi(x,0)$$

για όλα τα $x \in X$. Επομένως

$$\|Jg(x)-Jh(x)\| = \left\|a^4 g\left(\frac{x}{a}\right)-a^4 h\left(\frac{x}{a}\right)\right\| \leq |a^4|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{a},0\right) \leq L\varepsilon\varphi\left(\frac{2x}{a},0\right)$$

για όλα τα $x \in X$. Άρα

$$d(Jg-Jh) \leq Ld(g,h)$$

για όλα τα $g,h \in S$.

Από την σχέση (7) έπεται ότι

$$\left\|f(x)-a^4 f\left(\frac{x}{a}\right)\right\| \leq \varphi\left(\frac{x}{a},0\right) \leq \frac{L}{|a^4|}\varphi\left(\frac{2x}{a},0\right)$$

για όλα τα $x \in X$. Έτσι $d(f,Jf) \leq \dfrac{L}{a^4}$.

Από το Θεώρημα 2.3.1.2., υπάρχει μια απεικόνιση που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(α). Η $Q$ είναι ένα σταθερό σημείο της $J$, δηλαδή,

$$Q(x) = a^4 Q\left(\frac{x}{a}\right) \tag{8}$$

για όλα τα $x \in X$. Η απεικόνιση $Q$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της $J$ στο σύνολο

$$M = \{g \in S : d(f, g) < \infty\}.$$

Από αυτό συνάγεται ότι η $Q$ είναι η μοναδική απεικόνιση που ικανοποιεί την (8) ώστε να υπάρχει ένα $\mu \in (0,\infty)$ και

$$\| f(x) - Q(x)\| \le \mu\varphi\left(\frac{x}{a}, 0\right)$$

για όλα τα $x \in X$.

(β). $d(J^n f, Q) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή,

$$Q(x) = \lim_{n\to\infty} a^{4n} f\left(\frac{x}{a^n}\right),$$

για όλα τα $x \in X$.

(γ) . $d(f, Q) \le \dfrac{1}{1-L} d(f, Jf)$ δηλαδή,

$$\| f(x) - Q(x)\| \le \frac{L}{|a^4|(1-L)}\varphi\left(\frac{x}{a}, 0\right)$$

για όλα τα $x \in X$.

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}&\Big\| 2\left[ f(ax+y) + f(x+ay)\right] + a(a-1)^2 f(x-y) - 2(a^2-1)^2 \left[ f(x) + f(y)\right] \\ &\qquad -a(a+1)^2 f(x+y)\Big\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n\to\infty}|a^{4n}| \Big\| 2\left[ f\left(\frac{ax+y}{a^n}\right) + f\left(\frac{x+ay}{a^n}\right)\right] + a(a-1)^2 f\left(\frac{x-y}{a^n}\right) - 2(a^2-1)^2 \left[ f\left(\frac{x}{a^n}\right) + f\left(\frac{y}{a^n}\right)\right] \\ &\qquad -a(a+1)^2 f\left(\frac{x+y}{a^n}\right)\Big\|\end{aligned}$$

$$\le \lim_{n\to\infty}|a^{4n}|\varphi\left(\frac{2x}{a^n}, \frac{2y}{a^n}\right) = 0$$

για όλα τα $x, y \in X$. Άρα

$$\begin{aligned}2\left[Q(ax+y) + Q(x+ay)\right] + a(a-1)^2 Q(x-y) &= 2(a^2-1)^2 \left[Q(x) + Q(y)\right] \\ &\quad + a(a+1)^2 Q(x+y)\end{aligned}$$

για όλα τα $x, y \in X$ . Από το Λήμμα 3.3.5, η απεικόνιση $Q: X \to Y$ είναι κυβική. $\square$

**Πόρισμα 3.3.7.** *Έστω* $r < 4$ *και* $\theta$ *μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, και* $f: X \to Y$ *μια απεικόνιση με* $f(0) = 0$ *και*

$$\Big\| 2\big[f(ax+y) + f(x+ay)\big] + a(a-1)^2 f(x-y) - 2(a^2-1)^2 \big[f(x) + f(y)\big] \tag{9}$$
$$-a(a+1)^2 f(x+y) \Big\| \le \theta\left(\|x\|^r + \|y\|^r\right)$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική τετάρτου βαθμού απεικόνιση* $Q: X \to Y$ *τέτοια, ώστε*

$$\| f(x) - Q(x) \| \le \frac{2\theta}{|a|^r - |a^4|} \|x\|^r$$

*για κάθε* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.3.6, αν $\varphi(x, y) = \theta\left(\|x\|^r + \|y\|^r\right)$ για όλα τα $x, y \in X$ .Επιλέγουμε $L = |a|^{4-r}$ και έχουμε το ζητούμενο. $\square$

**Θεώρημα 3.3.8.** *Έστω* $\varphi: X^2 \to [0, \infty)$ *μια συνάρτηση τέτοια ώστε να υπάρχει* $L < 1$ *με*

$$\varphi\left(\frac{2x}{a}, \frac{2y}{a}\right) \le |a^4| L \varphi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ *. Έστω* $f: X \to Y$ *μια συνάρτηση που ικανοποιεί την* $f(0) = 0$,

$$\Big\| 2\big[f(ax+y) + f(x+ay)\big] + a(a-1)^2 f(x-y) - 2(a^2-1)^2 \big[f(x) + f(y)\big]$$
$$-a(a+1)^2 f(x+y) \Big\| \le \varphi(x, y)$$

*για όλα τα* $x, y \in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική τετάρτου βαθμού απεικόνιση* $Q: X \to Y$ *τέτοια ώστε*

$$\| f(x) - Q(x) \| \le \frac{1}{|a^4|(1-L)} \varphi\left(\frac{x}{a}, 0\right)$$

*για όλα τα* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Από τη σχέση (7) προκύπτει ότι

$$\left\| f(x) - \frac{1}{a^4} f(ax) \right\| \le \frac{1}{|a^4|} \varphi(x, 0) \tag{10}$$

Αν $(S,d)$ είναι ο γενικευμένος μετρικός χώρος που ορίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.6 και $J:S\to S$ μια γραμμική απεικόνιση ώστε

$$Jg(x):=\frac{1}{|a^4|}g\left(ax\right)$$

για κάθε $x\in X$, έπεται από την (10) ότι $d(f,Jf)\le\frac{1}{a^4}$. Έτσι,

$$\|f(x)-C_{a,\beta}(x)\|\le\frac{1}{|a^4|(1-L)}\varphi(x,0)$$

για κάθε $x\in X$.

Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι ανάλογο του Θεωρήματος 3.3.6. □

**Πόρισμα 3.3.9.** *Έστω* $r>4$ *και* $\theta$ *μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, και* $f:X\to Y$ *μια απεικόνιση με* $f(0)=0$ *και*

$$\begin{aligned}\|2\left[f(ax+y)+f(x+ay)\right]+a(a-1)^2f(x-y)-2(a^2-1)^2\left[f(x)+f(y)\right]\\ -a(a+1)^2f(x+y)\|\le\theta\left(\|x\|^r+\|y\|^r\right)\end{aligned}\tag{11}$$

*για όλα τα* $x,y\in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική τετάρτου βαθμού( quartic) απεικόνιση* $Q:X\to Y$ *τέτοια, ώστε*

$$\|f(x)-Q(x)\|\le\frac{2\theta}{|a^4|-|a|^r}\|x\|^r$$

*για κάθε* $x\in X$.

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.3.8, αν $\varphi(x,y)=\theta\left(\|x\|^r+\|y\|^r\right)$ για όλα τα $x,y\in X$ .Επιλέγοντας $L=|a|^{r-4}$ έχουμε το ζητούμενο. □

**Ευθεία Μέθοδος ( Hyers Direct Method)**

**Θεώρημα 3.3.10.** *Έστω* $\varphi:X^2\to[0,\infty)$ *μια συνάρτηση και* $f:X\to Y$ *μια απεικόνιση με* $f(0)=0$ *και*

$$\lim_{n\to\infty}|a^{4n}|\varphi\left(\frac{x}{a^n},\frac{y}{a^n}\right)=0,\tag{12}$$

$$\left\|2\left[f(ax+y)+f(x+ay)\right]+a(a-1)^2 f(x-y)-2(a^2-1)^2\left[f(x)+f(y)\right]\right.$$
$$\left.-a(a+1)^2 f(x+y)\right\| \le \varphi(x,y) \tag{13}$$

*για κάθε* $x,y\in X$ *.Τότε υπάρχει μοναδική τεταρτοβάθμια απεικόνιση* $h:X\to Y$ *ώστε*

$$\|f(x)-h(x)\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left|a^4\right|^{n-1}\varphi\left(\frac{x}{a^n},\frac{x}{a^n}\right)\right\} \tag{14}$$

*για όλα τα* $x\in X$ *.*

*Απόδειξη.* Έστω $y=0$ στην (13), οπότε

$$\left\|f(ax)-a^4 f(x)\right\| \le \varphi(x,0)$$

για όλα τα $x\in X$ . Άρα,

$$\left\|f(x)-a^4 f\left(\frac{x}{a}\right)\right\| \le \varphi\left(\frac{x}{a},0\right)$$

για όλα τα $x\in X$ . Επομένως,

$$\left\|a^{4l} f\left(\frac{x}{a^l}\right)-a^{4m} f\left(\frac{x}{a^m}\right)\right\|$$
$$\le \max\left\{\left\|a^{4l} f\left(\frac{x}{a^l}\right)-a^{4(l+1)} f\left(\frac{x}{a^{l+1}}\right)\right\|,\dots,\left\|a^{4(m-1)} f\left(\frac{x}{a^{m-1}}\right)-a^{4m} f\left(\frac{x}{a^m}\right)\right\|\right\}$$
$$\le \max\left\{\left|a^{4l}\right|\left\|f\left(\frac{x}{a^l}\right)-a^4 f\left(\frac{x}{a^m}\right)\right\|,\dots,\left|a^{4(m-1)}\right|\left\|f\left(\frac{x}{a^l}\right)-a^4 f\left(\frac{x}{a^m}\right)\right\|\right\}$$
$$\le \sup_{n\in\{l,l+1,\dots\}}\left\{\left|a^4\right|^n \varphi\left(\frac{x}{a^{n+1}},\frac{x}{a^{n+1}}\right)\right\} \tag{15}$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $m$ και $l$ με $m>l$ και όλα τα $x\in X$ . Από τη σχέση (15) προκύπτει ότι η ακολουθία $\left\{a^{4n} f\left(\frac{x}{a^n}\right)\right\}$ είναι ακολουθία Cauchy για όλα τα $x\in X$ . Εφόσον ο $Y$ είναι πλήρης, η ακολουθία συγκλίνει. Έτσι ορίζεται η απεικόνιση $h:X\to Y$ με

$$h(x):=\lim_{n\to\infty} a^{4n} f\left(\frac{x}{a^n}\right)$$

για κάθε $x\in X$ . Η σχέση (14) έπεται αν στην (15) $l=0$ και $m\to\infty$ .
Επιπλέον από τις σχέσεις (12) και (13) έχουμε

$$\left\|2\left[h(ax+y)+h(x+ay)\right]+a(a-1)^2 h(x-y)-2(a^2-1)^2\left[h(x)+h(y)\right]\right.$$
$$\left.-a(a+1)^2 h(x+y)\right\|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|a^4\right|^n \left\{ \begin{array}{r} \left\| 2\left[ f\left(\frac{ax+y}{a^n}\right) + f\left(\frac{x+ay}{a^n}\right)\right] + a(a-1)^2 f\left(\frac{x-y}{a^n}\right) - 2(a^2-1)^2 \left[ f\left(\frac{x}{a^n}\right) + f\left(\frac{y}{a^n}\right)\right] \right. \\ \left. -a(a+1)^2 f\left(\frac{x+y}{a^n}\right) \right\| \end{array} \right\}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left|a^4\right|^n \varphi\left(\frac{x}{a^n}, \frac{y}{a^n}\right) = 0$$

για κάθε $x, y \in X$ . Άρα,

$$2\left[h(ax+y) + h(x+ay)\right] + a(a-1)^2 h(x-y) - 2(a^2-1)^2 \left[h(x) + h(y)\right] - a(a+1)^2 h(x+y) = 0$$

για κάθε $x, y \in X$ . Από το Λήμμα 3.3.5. η απεικόνιση $h : X \to Y$ είναι $\alpha$ -*quartic*. Για την απόδειξη της μοναδικότητας της $h$, υποθέτουμε ότι υπάρχει και άλλη τεταρτοβάθμια απεικόνιση $h' : X \to Y$ ,που επαληθεύει την (14). Τότε,

$$\|h(x) - h'(x)\| = \left\| a^{4k} h\left(\frac{x}{a^k}\right) - a^{4k} h'\left(\frac{x}{a^k}\right) \right\|$$

$$\leq \max\left\{ \left\| a^{4k} h\left(\frac{x}{a^k}\right) - a^{4k} f\left(\frac{x}{a^k}\right) \right\|, \left\| a^{4k} h'\left(\frac{x}{a^k}\right) - a^{4k} f\left(\frac{x}{a^k}\right) \right\| \right\}$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left|a^4\right|^{k+n-1} \varphi\left(\frac{x}{a^{k+n}}, \frac{x}{a^{k+n}}\right) \right\}$$

που τείνει στο μηδέν καθώς $k \to \infty$ για κάθε $x \in X$ .Άρα, $h(x) = h'(x)$ για κάθε $x \in X$ . $\square$

Το ακόλουθο Θεώρημα ακολουθεί την ίδια αποδεικτική διαδικασία με το Θεώρημα 3.3.8. με $h(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{4n}} f\left(a^n\right)$.

**Θεώρημα 3.3.9.** *Έστω* $\varphi : X^2 \to [0,\infty)$ *μια συνάρτηση και* $f : X \to Y$ *μια απεικόνιση με* $f(0) = 0$ *και*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\left|a^{4n}\right|} \varphi\left(a^{n-1}x, a^{n-1}y\right) \right\} = 0, \tag{16}$$

$$\begin{array}{r} \left\| 2\left[ f(ax+y) + f(x+ay)\right] + a(a-1)^2 f(x-y) - 2(a^2-1)^2 \left[ f(x) + f(y)\right] \right. \\ \left. -a(a+1)^2 f(x+y) \right\| \leq \varphi(x,y) \end{array}$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *.Τότε υπάρχει μοναδική τεταρτοβάθμια απεικόνιση* $h : X \to Y$ *ώστε*

$$\| f(x) - h(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{\left|a^4\right|^n} \varphi\left(a^{n-1}x, a^{n-1}x\right) \right\} \tag{17}$$

# Κεφάλαιο 4

# Μικτού τύπου συναρτησιακές εξισώσεις

Στις μικτού τύπου πολυωνυμικές συναρτησιακές εξισώσεις η επίλυση καθώς και η ευστάθεια μελετάται συνήθως διαχωρίζοντας τις περιπτώσεις άρτιας και περιττής συνάρτησης. Η πορεία της εύρεσης των συνθηκών ευστάθειας περιλαμβάνει επίσης θεωρήματα που εξετάζουν την ευστάθεια ξεχωριστά για κάθε μία προσθετική, τετραγωνική κλπ. συναρτησιακή εξίσωση που προσεγγίζει την αρχική. Στη συνέχεια, ένα συνδυαστικό θεώρημα ενσωματώνει τα επιμέρους συμπεράσματα, εξετάζοντας σε ζεύγη τις περιπτώσεις. Πιο ειδικά, αν θεωρήσουμε μια AQCQ (**A**dditive-**Q**uadratic-**C**ubic-**Q**uartic)-μικτή συναρτησιακή εξίσωση που προκύπτει από δύο επιμέρους μικτές ( μία προσθετική-τετραγωνική, AQ, και μία κυβική-τετάρτου βαθμού, CQ), η εξέταση της ευστάθειας θα πρέπει να συμπεριλάβει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των ‘’γενέτειρων’’ συναρτησιακών εξισώσεων. Δηλαδή, εύρεση μιας AQ απεικόνισης που προσεγγίζει την πρώτη και στη συνέχεια εύρεση μιας CQ για την δεύτερη συναρτησιακή εξίσωση, για να ακολουθήσει το κύριο θεώρημα της ευστάθειας της αρχικής μικτής εξίσωσης. Τα πορίσματα που αφορούν την ευστάθεια Rassias ακολουθούν την ίδια διάταξη. Σχετικές αναφορές στις εργασίες [8] και [88].

## 4.1 Επίλυση και ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias μιας προσθετικής- τετραγωνικής απεικόνισης σε χώρους Banach. Direct και Fixed point Μέθοδοι.

Η γενική λύση και η γενικευμένη Hyers-Ulam ευστάθεια για την μικτού τύπου προσθετική-τετραγωνική συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x+ay)+af(x-y)=f(x-ay)+af(x+y), a\neq 0,\pm 1 \tag{1}$$

παρουσιάστηκε στο K.W.Jun and H.M.Kim [39]. Επίσης στο A.Najati and M.Moghimi [56], γίνεται μελέτη της προσθετικής-τετραγωνικής συναρτησιακής εξίσωσης

$$f(2x+y)+f(2x-y)=2f(x+y)+2f(x-y)+2f(x)-4f(x) \tag{2}$$

Στο M. Gordji [31], γίνεται μελέτη της προσθετικής-τετραγωνικής

$$f(2x+y)+f(2x-y)=f(x+y)+f(x-y)+2f(2x)-2f(x) \qquad (3)$$

σε fuzzy Banach χώρους. Στην εργασία των M.Arunkumar, J.M.Rassias [8] μελετάται η μικτή AQ(additive –Quadratic)

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y). \qquad (4)$$

Μελέτη επίσης μικτής AQ(additive –Quadratic) σε random normed space παρουσιάζεται στους Murthy et.al. [55], για την εξίσωση

$$f(2x\pm y\pm z)=2f(-x\mp y\mp z)-2f(\mp y\mp z)+f(\pm y\pm z)+3f(x)-f(-x) \qquad (5)$$

Επίσης στην εργασία J.M.Rassias et. al. [88], εξετάζεται η ακόλουθη AQ συναρτησιακή εξίσωση

$$\begin{aligned} &f(x+2y+3z)+f(x-2y+3z)+f(x+2y-3z)+f(x-2y-3z) \\ &\qquad =4f(x)+8\left[f(y)+f(-y)\right]+18\left[f(z)+f(-z)\right] \end{aligned} \qquad (6)$$

Στην ενότητα 4.1 επιλύουμε και εξετάζουμε την ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias μιας νέας, μικτού τύπου, προσθετικής- τετραγωνικής, συναρτησιακής εξίσωσης

$$\begin{aligned} f(x+y+z)+f(x-y+z)+f(x+y-z)+f(x-y-z)&=4f(x)+2\left[f(y)+f(-y)\right] \\ &\quad +2\left[f(z)+f(-z)\right] \end{aligned} \qquad (7)$$

χρησιμοποιώντας την ευθεία μέθοδο Hyers και την σταθερού σημείου, σε χώρους Banach. Η μελέτη γίνεται και με παράθεση παραδειγμάτων για τις περιπτώσεις μη ευστάθειας τόσο στα Θεωρήματα της ευθείας μεθόδου όσο και στα Θεωρήματα της μεθόδου σταθερού σημείου . Γίνεται διάκριση των περιπτώσεων σε άρτια και περιττή συνάρτηση για την μελέτη της ευστάθειας, που όμως, όπως θα παρουσιάσουμε στην παράγραφο 4.3, δεν είναι απαραίτητη.

**Λήμμα 4.1.1.** *Αν $f: X \to Y$ περιττή συνάρτηση που ικανοποιεί την προσθετική συναρτησιακή εξίσωση*

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (8)$$

*για κάθε $x, y \in X$, τότε και μόνο τότε η $f: X \to Y$ ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση (7) για κάθε $x, y \in X$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $f$ είναι προσθετική. Αντικαθιστώντας το $y$ με $y+z$ στην (8) και λόγω της (8), έχουμε

$$f(x+y+z)=f(x)+f(y)+f(z) \qquad (9)$$

για κάθε $x, y, z \in X$ . Αν θέσουμε $(x, y, z) = (x, -y + z, 0)$ στην σχέση (8) έχουμε

$$f(x - y + z) = f(x) + f(-y + z) = f(x) + f(-y) + f(z) \quad (10)$$

για κάθε $x, y, z \in X$ . Αν θέσουμε $(x, y, z) = (x, y - z, 0)$ στην σχέση (8) τότε

$$f(x + y - z) = f(x) + f(y - z) = f(x) + f(y - z) = f(x) + f(y) + f(-z) \quad (11)$$

για κάθε $x, y, z \in X$ . Ενώ αν $(x, y, z) = (x, -y - z, 0)$ στην (8) και λόγω της (8), είναι

$$f(x - y - z) = f(x) + f(-y - z) = f(x) + f(-y) + f(-z) \quad (12)$$

για κάθε $x, y, z \in X$ . Προσθέτοντας τις σχέσεις (9)-(12), έχουμε

$$\begin{aligned} f(x+y+z) + f(x-y+z) + f(x+y-z) + f(x-y-z) = 4f(x) + 2\left[f(y) + f(-y)\right] \\ + 2\left[f(z) + f(-z)\right] \end{aligned} \quad (13)$$

για κάθε $x, y, z \in X$ .

Αντιστρόφως, αν η $f : X \to Y$ ικανοποιεί την (7) και θέσουμε $x = y = z = 0$ στην σχέση (7) προκύπτει $f(0) = 0$ . Αν επιπλέον θέσουμε $z = 0$ στην (7) και επειδή η $f$ είναι περιττή, θα είναι

$$2f(x + y) + 2f(x - y) = 4f(x) \quad (14)$$

για κάθε $x, y, z \in X$ .

Δηλαδή,

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \quad (15)$$

για κάθε $x, y, z \in X$ . Από το Θεώρημα 2.1 του [9] η $f$ είναι προσθετική. □

**Λήμμα 4.1.2.** *Αν η άρτια συνάρτηση $f : X \to Y$ ικανοποιεί την δευτεροβάθμια συναρτησιακή εξίσωση*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (16)$$

*για κάθε $x, y \in X$ , τότε μόνο τότε η $f : X \to Y$ ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση (7) για κάθε $x, y \in X$ .*

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $f$ είναι τετραγωνική απεικόνιση δηλαδή επαληθεύει την εξίσωση (16). Αν θέσουμε όπου $y$ το $y + z$ στη σχέση (16), έχουμε

$$f(x + y + z) + f(x - y - z) = 2f(x) + 2f(y + z) \quad (17)$$

για κάθε $x, y, z \in X$ . Ξανά αντικαθιστώντας το $y$ με $-y + z$ στην (16) θα είναι

$$f(x - y + z) + f(x + y - z) = 2f(x) + 2f(-y + z) \quad (18)$$

για κάθε $x, y, z \in X$ . Προσθέτοντας τις (17) και (18), παίρνουμε

$$f(x+y+z)+f(x-y+z)+f(x+y-z)+f(x-y-z)=4f(x) \\ +2\left[f(y+z)+f(-y+z)\right] \quad (19)$$

Εφαρμόζοντας την (16) στη σχέση (19) και λόγω της αρτιότητας της $f$ είναι

$$\begin{aligned} f(x+y+z)+f(x-y+z)+f(x+y-z)+f(x-y-z) \\ &= 4f(x)+2\left[f(z+y)+f(z-y)\right] \\ &= 4f(x)+2\left[2f(z)+2f(y)\right] \\ &= 4f(x)+2\left[f(y)+f(-y)\right]+2\left[f(z)+f(-z)\right] \end{aligned} \quad (20)$$

για κάθε $x,y,z \in X$ .

Αντιστρόφως, αν η $f:X \to Y$ ικανοποιεί την (7) και θέσουμε $x=y=z=0$ στην (7) προκύπτει $f(0)=0$ . Αν επιπλέον θέσουμε $z=0$ στην (7) και επειδή η $f$ είναι άρτια, θα είναι

$$2f(x+y)+2f(x-y)=4f(x)+4f(y) \quad (21)$$

για κάθε $x,y,z \in X$ .

Δηλαδή,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

για κάθε $x,y,z \in X$ . □

## Ευθεία Μέθοδος ( Direct Method )

Θεωρούμε στη συνέχεια $X$ και $Y$ σταθμητός χώρος και χώρος Banach αντίστοιχα. Ορίζουμε τον τελεστή $Df : X \to Y$ ως εξής:

$$Df(x,y,z)= f(x+y+z)+f(x-y+z)+f(x+y-z)+f(x-y-z) \\ -4f(x)-2\left[f(y)+f(-y)\right] -2\left[f(z)+f(-z)\right]$$

για κάθε $x,y,z \in X$ .

**Θεώρημα 4.1.3.** *Έστω* $j \in \{-1,1\}$ *και* $\varphi : X^3 \to [0,\infty)$ *μια συνάρτηση ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi\left(3^{nj}x,3^{nj}y,3^{nj}z\right)}{3^{nj}}=0 \quad (22)$$

*για κάθε* $x,y,z \in X$ *. Αν* $f_a : X \to Y$ *μια περιττή συνάρτηση ώστε*

$$\left\|Df_a(x,y,z)\right\| \le \varphi(x,y,z) \quad (23)$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση* $A: X \to Y$ *που επαληθεύει την (7) και*

$$\|f_a(x) - A(x)\| \le \frac{1}{3} \sum_{k=\frac{1-j}{2}}^{\infty} \frac{\varphi\left(3^{nj}x, 3^{nj}x, 3^{nj}x\right)}{3^{nj}} \tag{24}$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$ *.*

*Απόδειξη.* Έστω $j = 1$, αντικαθιστώντας $(x, y, z) = (x, x, x)$ στην (23) και λόγω της περιττότητας της $f_a$ είναι

$$\|f_a(3x) - 3f_a(x)\| \le \varphi(x, x, x) \tag{26}$$

για κάθε $x \in X$ . Διαιρώντας την ανισότητα αυτή με 3 παρατηρούμε ότι

$$\left\|\frac{f_a(3x)}{3} - f_a(x)\right\| \le \frac{1}{3}\varphi(x, x, x) \tag{27}$$

για κάθε $x \in X$ . Αντικαθιστώντας στη συνέχεια όπου $x$ το $3x$ στην (27), είναι

$$\left\|\frac{f_a(3^2x)}{3^2} - \frac{f_a(3x)}{3}\right\| \le \frac{1}{3^2}\varphi(3x, 3x, 3x) \tag{28}$$

για κάθε $x \in X$ . Από τις (26) και (27), παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f_a(3^2x)}{3^2} - f_a(x)\right\| &\le \left\|\frac{f_a(3x)}{3} - f_a(x)\right\| + \left\|\frac{f_a(3^2x)}{3^2} - \frac{f_a(3x)}{3}\right\| \\ &\le \frac{1}{3}\left[\varphi(x, x, x) + \frac{\varphi(3x, 3x, 3x)}{3}\right] \end{aligned} \tag{29}$$

για κάθε $x \in X$ . Επαγωγικά για θετικό ακέραιο $n$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f_a(3^n x)}{3^n} - f_a(x)\right\| &\le \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi(3^k x, 3^k x, 3^k x)}{3^k} \\ &\le \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi(3^k x, 3^k x, 3^k x)}{3^k}\end{aligned} \tag{30}$$

για κάθε $x \in X$ .

Αν στην ανισότητα (30) αντικαταστήσουμε το $x$ με το $3^m x$ και διαιρώντας με $3^m$ , για τυχόν $m, n > 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f_a(3^{n+m}x)}{3^{n+m}} - \frac{f_a(3^m x)}{3^m}\right\| &= \frac{1}{3^m}\left\|\frac{f_a(3^{n+m}x)}{3^n} - f_a(3^m x)\right\| \\ &\le \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi(3^{n+m}x, 3^{n+m}x, 3^{n+m}x)}{3^{n+m}}\end{aligned}$$

$$\le \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi(3^{n+m}x,3^{n+m}x,3^{n+m}x)}{3^{n+m}}$$

που έχει όριο το μηδέν καθώς $m\to\infty$, $\forall x\in X$.

Συνεπώς η ακολουθία $\left\{\frac{f_a(3^n x)}{3^n}\right\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Εφόσον ο $Y$ είναι χώρος πλήρης, ορίζεται απεικόνιση $A\colon X\to Y$ με τύπο

$$A(x) := \left\{\frac{f_a(3^n x)}{3^n}\right\}$$

για κάθε $x\in X$. Αν $n\to\infty$ στην (30) τότε η σχέση (24) ισχύει, για κάθε $x\in X$.

Επιπλέον, αν στην (23) αντικαταστήσουμε $(x,y,z)$ με $(3^n x,3^n y,3^n z)$ και διαιρέσουμε με $3^n$ τότε,

$$\frac{1}{3^n}\left\|Df_a(3^n x,3^n y,3^n z)\right\| \le \frac{1}{3^n}\varphi(3^n x,3^n y,3^n z)$$

για κάθε $x,y,z\in X$. Αν $n\to\infty$ και βάσει του ορισμού της $A$, θα είναι

$$DA(x,y,z)=0$$

δηλαδή η $A$ επαληθεύει την (7) για κάθε $x,y,z\in X$.

Η απόδειξη της μοναδικότητας της $A$ έπεται εύκολα αν σκεφτούμε ότι αν υπάρχει και μια άλλη προσθετική απεικόνιση $B$ που ικανοποιεί τις (7) και (24) τότε

$$\begin{aligned}\left\|A(x)-B(x)\right\| &= \frac{1}{3^n}\left\|A(3^n x)-B(3^n x)\right\|\\ &\le \frac{1}{3^n}\left\{\left\|A(3^n x)-f_a(3^n x)\right\|+\left\|f_a(3^n x)-B(3^n x)\right\|\right\}\\ &\le \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi(3^{k+n}x,3^{k+n}x,3^{k+n}x)}{3^{k+n}}\end{aligned}$$

με όριο το μηδέν καθώς $n\to\infty$, $\forall x\in X$.

Η περίπτωση $j=-1$ αντιμετωπίζεται με όμοιο τρόπο. □

Ακολουθεί το πόρισμα που περιγράφει την ευστάθεια της εξίσωσης (7) στο πνεύμα των Th. M. Rassias και J.M.Rassias.

**Πόρισμα 4.1.4.** *Έστω $\lambda$ και $s$ μη αρνητικοί πραγματικοί. Αν η περιττή συνάρτηση $f_a : X \to Y$ ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\|Df_a(x,y,z)\| \le \begin{cases} \lambda, & \\ \lambda\left\{\|x\|^s + \|y\|^s + \|z\|^s\right\}, & s<1 \text{ ή } s>1 \\ \lambda\|x\|^s\|y\|^s\|z\|^s, & 3s<1 \text{ ή } 3s>1 \\ \lambda\left\{\|x\|^s\|y\|^s\|z\|^s + \|x\|^{3s} + \|y\|^{3s} + \|z\|^{3s}\right\}, & 3s<1 \text{ ή } 3s>1 \end{cases} \tag{31}$$

*για κάθε $x, y, z \in X$ . Τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση $A: X \to Y$ ώστε*

$$\|f_a(x) - A(x)\| \le \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}, & \\ \dfrac{3\lambda\|x\|^s}{\left|3-3^s\right|}, & s<1 \text{ ή } s>1 \\ \dfrac{\lambda\|x\|^{3s}}{\left|3-3^{3s}\right|}, & 3s<1 \text{ ή } 3s>1 \\ \dfrac{4\lambda\|x\|^{3s}}{\left|3-3^{3s}\right|}, & 3s<1 \text{ ή } 3s>1 \end{cases}$$

*για κάθε $x \in X$ .*

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα συναρτήσεων μη ευσταθών για καθεμία από τις τρεις περιπτώσεις του πορίσματος.

Αρχικά, θα δείξουμε ότι η συναρτησιακή εξίσωση (7) δεν είναι ευσταθής για $s=1$, στην συνθήκη ii) του πορίσματος 4.1.4.

**Παράδειγμα 4.1.5.** *Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mu x, & |x|<1 \\ \mu, & |x|\ge 1 \end{cases}$$

*όπου $\mu > 0$ είναι σταθερά, και ορίζουμε την συνάρτηση $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

*Η* $f_a$ *ικανοποιεί την συναρτησιακή ανίσωση*

$$\left|Df_a(x,y,z)\right| \le 24\mu\left(|x|+|y|+|z|\right) \tag{32}$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$ *αλλά δεν υπάρχει προσθετική απεικόνιση* $A:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *και μια σταθερά* $\beta > 0$ *ώστε*

$$\left| f_a(x) - A(x)\right| \le \beta |x| \tag{33}$$

*για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ .

*Απόδειξη*. Η συνάρτηση $f_a$ είναι φραγμένη διότι

$$\left| f_a(x)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|\varphi(3^n x)\right|}{\left|3^n\right|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\mu = \frac{3\mu}{2}$$

Θα αποδείξουμε ότι για την $f_a$ ισχύει σχέση (32).

Αν $x = y = z = 0$ τότε είναι προφανές. Αν $|x|+|y|+|z| \ge 1$, το αριστερό μέρος της (32) είναι μικρότερο του $27\mu$ . Έστω ότι $0 < |x|+|y|+|z| < 1$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος $k$ ώστε

$$\frac{1}{3^k} \le |x|+|y|+|z| \le \frac{1}{3^{k-1}}, \tag{34}$$

άρα $3^{k-1}|x| < 1,\ 3^{k-1}|y| < 1,\ 3^{k-1}|z| < 1$ και επομένως

$$\begin{aligned}
&3^{k-1}(x+y+z), 3^{k-1}(x-y+z), 3^{k-1}(x+y-z), 3^{k-1}(x-y-z),\\
&3^{k-1}(x), 3^{k-1}(-x), 3^{k-1}(y), 3^{k-1}(-y), 3^{k-1}(z), 3^{k-1}(-z) \ \in (-1,1).
\end{aligned}$$

Συνεπώς για κάθε $n = 0,1,\ldots,k-1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&3^n(x+y+z), 3^n(x-y+z), 3^n(x+y-z), 3^n(x-y-z),\\
&3^n(x), 3^n(-x), 3^n(y), 3^n(-y), 3^n(z), 3^n(-z) \ \in (-1,1).
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(3^n(x+y+z)\right) + \varphi\left(3^n(x-y+z)\right) + \varphi\left(3^n(x+y-z)\right) + \varphi\left(3^n(x-y-z)\right)\\
&-4\varphi\left(3^n(x)\right) - 2\left[\varphi\left(3^n(y)\right) + \varphi\left(3^n(-y)\right)\right] - 2\left[\varphi\left(3^n(z)\right) + \varphi\left(3^n(-z)\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

για $n = 0,1,\ldots,k-1$. Από τον ορισμό της $f_a$ είναι,

$$|Df_a(x,y,z)| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \Big| \varphi\left(3^n(x+y+z)\right) + \varphi\left(3^n(x-y+z)\right) + \varphi\left(3^n(x+y-z)\right) + \varphi\left(3^n(x-y-z)\right)$$
$$-4\varphi\left(3^n(x)\right) - 2\left[\varphi\left(3^n(y)\right) + \varphi\left(3^n(-y)\right)\right] - 2\left[\varphi\left(3^n(z)\right) + \varphi\left(3^n(-z)\right)\right]\Big|$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{3^n} \Big| \varphi\left(3^n(x+y+z)\right) + \varphi\left(3^n(x-y+z)\right) + \varphi\left(3^n(x+y-z)\right) + \varphi\left(3^n(x-y-z)\right)$$
$$-4\varphi\left(3^n(x)\right) - 2\left[\varphi\left(3^n(y)\right) + \varphi\left(3^n(-y)\right)\right] - 2\left[\varphi\left(3^n(z)\right) + \varphi\left(3^n(-z)\right)\right]\Big|$$

$$\le \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{3^n} 16\mu = 16\mu \cdot \frac{1}{3^k} \cdot \frac{3}{2} \le 24\mu\left(|x|+|y|+|z|\right).$$

Δηλαδή η σχέση (32) ισχύει για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ με $0 < |x|+|y|+|z| < 1$.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι υπάρχει μια προσθετική απεικόνιση $A:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια σταθερά $\beta > 0$ ώστε να ισχύει η σχέση (33). Επειδή η $f_a$ είναι φραγμένη και συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η $A$ είναι φραγμένη και συνεχής άρα θα έχει τη μορφή $A(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$. Οπότε,

$$|f_a(x)| \le \left(\beta + |c|\right)|x| \tag{35}$$

Επιλέγουμε θετικό ακέραιο $m$ με $m\mu > \beta + |c|$. Αν $x \in \left(0, \frac{1}{3^{m-1}}\right)$, τότε $3^n x \in (0,1)$ για κάθε $n = 0,1,\dots,m-1$. Για αυτό το $x$, είναι

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} \ge \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\mu(3^n x)}{3^n} = m\mu x > \left(\beta + |c|\right)x,$$

άτοπο σύμφωνα με τη σχέση (35). Συνεπώς, η προσθετική συναρτησιακή εξίσωση (7) δεν είναι ευσταθής κατά Hyers-Ulam-Rassias, αν $s = 1$ στην δεύτερη περίπτωση της ανισότητας (31). $\square$

**Παράδειγμα 4.1.6.** *Έστω $s$ πραγματικός αριθμός με $0 < s < \frac{1}{3}$. Υπάρχει συνάρτηση $f_a:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια σταθερά $\lambda > 0$ με*

$$|Df_a(x,y,z)| \le \lambda |x|^{\frac{s}{3}} |y|^{\frac{s}{3}} |z|^{\frac{1-2s}{3}} \tag{36}$$

*για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ και*

$$\sup_{x \ne 0} \frac{|f_a(x) - A(x)|}{|x|} = +\infty \tag{37}$$

*για κάθε προσθετική απεικόνιση* $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

*Απόδειξη.* Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f_a(x)=\begin{cases} x\ln|x|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

τότε

$$\begin{aligned}\sup_{x\neq 0}\frac{|f_a(x)-A(x)|}{|x|} &\geq \sup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{|f_a(n)-A(n)|}{|n|}\\ &=\sup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{|n\ln|n|-nA(1)|}{|n|}\\ &=\sup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\big|\ln|n|-A(1)\big|=\infty .\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της (36) διακρίνουμε εννέα περιπτώσεις για τις ενδεχόμενες τιμές της τριάδας $(x,y,z)$. Η περίπτωση $x=y=z=0$ είναι τετριμμένη. Αποδεικνύουμε την σχέση (36) για $x,y,z<0$.

Είναι $x+y+z>0,\ x-y+z>0,\ x+y-z>0,\ x-y-z>0$ και θέτοντας $x=-u,\ y=-v,\ z=-w$ έχουμε διαδοχικά,

$$\begin{aligned}&\big|f_a(x+y+z)+f_a(x-y+z)+f_a(x+y-z)+f_a(x-y-z)\\ &\qquad -4f_a(x)-2\left[f_a(y)+f_a(-y)\right]-2\left[f_a(z)+f_a(-z)\right]\big|\\ &=\big|(x+y+z)\ln|x+y+z|+(x-y+z)\ln|x-y+z|+(x+y-z)\ln|x+y-z|\\ &\qquad +(x-y-z)\ln|x-y-z|-4x\ln|x|-2\left[y\ln|y|-y\ln|-y|\right]-2\left[z\ln|z|-z\ln|-z|\right]\big|\\ &=\big|(-u-v-w)\ln|-u-v-w|+(-u+v-w)\ln|-u+v-w|+(-u-v+w)\ln|-u-v+w|\\ &\qquad +(-u+v+w)\ln|-u+v+w|+4u\ln|-u|-2\left[-v\ln|-v|+v\ln|v|\right]-2\left[-w\ln|-w|+w\ln|w|\right]\big|\\ &=\big|f_a(-u-v-w)+f_a(-u+v-w)+f_a(-u-v+w)+f_a(-u+v+w)\\ &\qquad -4f_a(-u)-2\left[f_a(-v)+f_a(v)\right]-2\left[f_a(-w)+f_a(w)\right]\big|\\ &\leq \lambda|-u|^{\frac{s}{3}}|-v|^{\frac{s}{3}}|-w|^{\frac{1-2s}{3}}=\lambda|x|^{\frac{s}{3}}|y|^{\frac{s}{3}}|z|^{\frac{1-2s}{3}}.\end{aligned}$$

Η απόδειξη των υπόλοιπων περιπτώσεων είναι εντελώς ανάλογη.

Έτσι αποδείχθηκε η μη ευστάθεια για την τρίτη περίπτωση του πορίσματος 4.1.4. □

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα για την μη-ευστάθεια της συναρτησιακής εξίσωσης (7) στην περίπτωση του μικτού γινομένου-αθροίσματος του πορίσματος 4.1.4. για $s = \frac{1}{3}$.

**Παράδειγμα 4.1.7.** *Έστω* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση με*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mu x, & |x| < \frac{1}{3} \\ \frac{\mu}{3}, & |x| \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

*όπου* $\mu > 0$ *είναι σταθερά, και ορίζουμε την συνάρτηση* $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με*

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

*Η* $f_a$ *ικανοποιεί την συναρτησιακή ανίσωση*

$$|Df_a(x,y,z)| \leq \frac{8\mu}{3}\left( |x|^{\frac{1}{3}} |y|^{\frac{1}{3}} |z|^{\frac{1}{3}} + |x| + |y| + |z| \right) \tag{38}$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$ *αλλά δεν υπάρχει προσθετική απεικόνιση* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *και μια σταθερά* $\beta > 0$ *ώστε*

$$|f_a(x) - A(x)| \leq \beta |x| \tag{39}$$

*για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

*Απόδειξη.* Η συνάρτηση $f_a$ είναι φραγμένη διότι

$$|f_a(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varphi(3^n x)|}{|3^n|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu}{3^n} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{\mu}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\mu}{2}$$

Θα αποδείξουμε ότι για την $f_a$ ισχύει σχέση (38).

- Αν $x = y = z = 0$ τότε είναι προφανές.
- Αν $|x|^{\frac{1}{3}} |y|^{\frac{1}{3}} |z|^{\frac{1}{3}} + |x| + |y| + |z| \geq \frac{1}{3}$, το αριστερό μέρος της (38) είναι μικρότερο του $\frac{8\mu}{3}$.
- Έστω ότι $0 < |x|^{\frac{1}{3}} |y|^{\frac{1}{3}} |z|^{\frac{1}{3}} + |x| + |y| + |z| < \frac{1}{3}$

τότε υπάρχει θετικός ακέραιος $k$ ώστε

$$\frac{1}{3^k} \le |x|^{\frac{1}{3}}|y|^{\frac{1}{3}}|z|^{\frac{1}{3}} + |x| + |y| + |z| \le \frac{1}{3^{k-1}}, \tag{40}$$

άρα $3^{k-1}|x|<1,\ 3^{k-1}|y|<1,\ 3^{k-1}|z|<1,\ 3^{k-1}\|x\|^{\frac{1}{3}}\|y\|^{\frac{1}{3}}\|z\|^{\frac{1}{3}}<\frac{1}{3}$ και επομένως

$$\begin{aligned}&3^{k-1}(x+y+z), 3^{k-1}(x-y+z), 3^{k-1}(x+y-z), 3^{k-1}(x-y-z),\\ &3^{k-1}(x), 3^{k-1}(-x), 3^{k-1}(y), 3^{k-1}(-y), 3^{k-1}(z), 3^{k-1}(-z) \ \in (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}).\end{aligned}$$

Συνεπώς για κάθε $n = 0,1,...,k-1$, έχουμε

$$\begin{aligned}&3^n(x+y+z), 3^n(x-y+z), 3^n(x+y-z), 3^n(x-y-z),\\ &3^n(x), 3^n(-x), 3^n(y), 3^n(-y), 3^n(z), 3^n(-z) \ \in (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}).\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}&\varphi\big(3^n(x+y+z)\big)+\varphi\big(3^n(x-y+z)\big)+\varphi\big(3^n(x+y-z)\big)+\varphi\big(3^n(x-y-z)\big)\\ &-4\varphi\big(3^n(x)\big)-2\Big[\varphi\big(3^n(y)\big)+\varphi\big(3^n(-y)\big)\Big]-2\Big[\varphi\big(3^n(z)\big)+\varphi\big(3^n(-z)\big)\Big]=0\end{aligned}$$

για $n = 0,1,...,k-1$. Από τον ορισμό της $f_a$ είναι,

$$\begin{aligned}&\left|Df_a(x,y,z)\right|\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\Big|\varphi\big(3^n(x+y+z)\big)+\varphi\big(3^n(x-y+z)\big)+\varphi\big(3^n(x+y-z)\big)+\varphi\big(3^n(x-y-z)\big)\\ &\qquad -4\varphi\big(3^n(x)\big)-2\Big[\varphi\big(3^n(y)\big)+\varphi\big(3^n(-y)\big)\Big]-2\Big[\varphi\big(3^n(z)\big)+\varphi\big(3^n(-z)\big)\Big]\Big|\\ &=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{3^n}\Big|\varphi\big(3^n(x+y+z)\big)+\varphi\big(3^n(x-y+z)\big)+\varphi\big(3^n(x+y-z)\big)+\varphi\big(3^n(x-y-z)\big)\\ &\qquad -4\varphi\big(3^n(x)\big)-2\Big[\varphi\big(3^n(y)\big)+\varphi\big(3^n(-y)\big)\Big]-2\Big[\varphi\big(3^n(z)\big)+\varphi\big(3^n(-z)\big)\Big]\Big|\\ &\le\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{16\mu}{3}=\frac{16\mu}{3}\cdot\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{2}\le\frac{8\mu}{3}\left(|x|^{\frac{1}{3}}|y|^{\frac{1}{3}}|z|^{\frac{1}{3}}+|x|+|y|+|z|\right).\end{aligned}$$

Δηλαδή η σχέση (38) ισχύει για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ με

$$0 < |x|^{\frac{1}{3}}|y|^{\frac{1}{3}}|z|^{\frac{1}{3}} + |x| + |y| + |z| < \frac{1}{3}$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι υπάρχει μια προσθετική απεικόνιση $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια σταθερά $\beta > 0$ ώστε να ισχύει η σχέση (39). Επειδή η $f_a$ είναι φραγμένη και συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η $A$ είναι φραγμένη και συνεχής άρα θα έχει τη μορφή $A(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$. Οπότε,

$$|f_a(x)| \le \left(\beta + |c|\right)|x| \tag{41}$$

Επιλέγουμε θετικό ακέραιο $m$ με $m\mu > \beta + |c|$. Αν $x \in \left(0, \frac{1}{3^{m-1}}\right)$, τότε $3^n x \in (0, \frac{1}{3})$ για κάθε $n = 0,1,...,m-1$. Για αυτό το $x$, είναι

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} \ge \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\mu(3^n x)}{3^n} = m\mu x > \left(\beta + |c|\right)x,$$

άτοπο σύμφωνα με τη σχέση (41). Συνεπώς, η προσθετική συναρτησιακή εξίσωση (7) δεν είναι ευσταθής κατά Hyers-Ulam-Rassias, αν $s = \frac{1}{3}$ στην μικτή περίπτωση της ανισότητας (31). □

Η εξέταση της περίπτωσης άρτιας συνάρτησης παρουσιάζεται στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.1.8.** *Έστω* $j \in \{-1,1\}$ *και* $\varphi : X^3 \to [0,\infty)$ *μια συνάρτηση ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi\left(3^{nj}x, 3^{nj}y, 3^{nj}z\right)}{9^{nj}} = 0 \tag{42}$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$. *Αν* $f_q : X \to Y$ *μια άρτια συνάρτηση ώστε*

$$\left\| Df_q(x,y,z) \right\| \le \varphi(x,y,z) \tag{43}$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$. *Τότε υπάρχει μοναδική τετραγωνική απεικόνιση* $Q : X \to Y$ *που επαληθεύει την (7) και*

$$\left\| f_q(x) - Q(x) \right\| \le \frac{1}{9} \sum_{k=\frac{1-j}{2}}^{\infty} \frac{\varphi\left(3^{nj}x, 3^{nj}x, 3^{nj}x\right)}{9^{nj}} \tag{44}$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$.

*Απόδειξη.* Έστω $j = 1$, αντικαθιστώντας $(x, y, z) = (x, x, x)$ στην (43) και λόγω της αρτιότητας της $f_q$ είναι

$$\left\| f_q(3x) - 9 f_q(x) \right\| \le \varphi(x,x,x) \tag{45}$$

για κάθε $x \in X$. Διαιρώντας την ανισότητα αυτή με $9$ παρατηρούμε ότι

$$\left\| \frac{f_q(3x)}{9} - f_q(x) \right\| \le \frac{1}{9}\varphi(x,x,x) \tag{46}$$

για κάθε $x \in X$.

Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι ανάλογο του Θεωρήματος 4.1.3. □

**Πόρισμα 4.1.9.** *Έστω $\lambda$ και $s$ μη αρνητικοί πραγματικοί. Αν η άρτια συνάρτηση $f_q : X \to Y$ ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\left\| Df_q(x,y,z) \right\| \le \begin{cases} \lambda, & \\ \lambda\left\{ \|x\|^s + \|y\|^s + \|z\|^s \right\}, & s<2 \text{ ή } s>2 \\ \lambda \|x\|^s \|y\|^s \|z\|^s, & 3s<2 \text{ ή } 3s>2 \\ \lambda\left\{ \|x\|^s \|y\|^s \|z\|^s + \|x\|^{3s} + \|y\|^{3s} + \|z\|^{3s} \right\}, & 3s<2 \text{ ή } 3s>2 \end{cases} \tag{47}$$

*για κάθε $x, y, z \in X$. Τότε υπάρχει μοναδική τετραγωνική απεικόνιση $Q : X \to Y$ ώστε*

$$\left\| f_q(x) - Q(x) \right\| \le \begin{cases} \dfrac{\lambda}{8}, & \\ \dfrac{3\lambda \|x\|^s}{\left|9-3^s\right|}, & s<2 \text{ ή } s>2 \\ \dfrac{\lambda \|x\|^{3s}}{\left|9-3^{3s}\right|}, & 3s<2 \text{ ή } 3s>2 \\ \dfrac{4\lambda \|x\|^{3s}}{\left|9-3^{3s}\right|}, & 3s<2 \text{ ή } 3s>2 \end{cases}$$

*για κάθε $x \in X$.*

Η εξέταση των τριών περιπτώσεων μη ευστάθειας του πορίσματος 4.1.9., αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο με τα παραδείγματα 4.1.5, 4.1.6., 4.1.7.

Για $s = 2$, έχουμε:

**Παράδειγμα 4.1.8.** *Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mu x^2, & |x| < 2 \\ \mu, & |x| \ge 2 \end{cases}$$

*όπου $\mu > 0$ είναι σταθερά, και ορίζουμε την συνάρτηση $f_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{9^n}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

*Η $f_a$ ικανοποιεί την συναρτησιακή ανίσωση*

$$\left|Df_a(x,y,z)\right| \le 162\mu\left(|x|^2+|y|^2+|z|^2\right) \tag{48}$$

*για κάθε* $x,y,z \in X$ *αλλά δεν υπάρχει τετραγωνική απεικόνιση* $Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *και μια σταθερά* $\beta>0$ *ώστε*

$$\left|f_q(x)-A(x)\right| \le \beta|x|^2 \tag{49}$$

*για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

Η μη ευστάθεια της τρίτης περίπτωσης με $0<s<\frac{2}{3}$, αποδεικνύεται ανάλογα ως εξής.

**Παράδειγμα 4.1.9.** *Έστω* $s$ *πραγματικός αριθμός με* $0<s<\frac{2}{3}$. *Υπάρχει συνάρτηση* $f_q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *και μια σταθερά* $\lambda>0$ *με*

$$\left|Df_q(x,y,z)\right| \le \lambda|x|^{\frac{s}{3}}|y|^{\frac{s}{3}}|z|^{\frac{2-2s}{3}} \tag{50}$$

*για κάθε* $x,y,z\in\mathbb{R}$ *και*

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\left|f_a(x)-A(x)\right|}{|x|}=+\infty \tag{51}$$

*για κάθε προσθετική απεικόνιση* $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Η συνάρτηση* $f_q$ *δίνεται από τον τύπο*

$$f_q(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|, & x\neq 0\\ 0 &, \ x=0\end{cases}.$$

Στη συνέχεια ένα παράδειγμα για την μη-ευστάθεια της συναρτησιακής εξίσωσης (7) στην περίπτωση του μικτού γινομένου-αθροίσματος του πορίσματος 4.1.7. για $s=\frac{2}{3}$, είναι το ακόλουθο:

**Παράδειγμα 4.1.10.** *Έστω* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *μια συνάρτηση με*

$$\varphi(x)=\begin{cases}\mu x^2, & |x|<\frac{2}{3}\\ \frac{2\mu}{3}, & |x|\ge\frac{2}{3}\end{cases}$$

*όπου* $\mu>0$ *είναι σταθερά, και ορίζουμε την συνάρτηση* $f_q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με*

$$f_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{9^n}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

*Η* $f_q$ *ικανοποιεί την συναρτησιακή ανίσωση*

$$\left| Df_q(x,y,z) \right| \le 6\mu \left( |x|^{\frac{2}{3}} |y|^{\frac{2}{3}} |z|^{\frac{2}{3}} + |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \right) \tag{52}$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$ *αλλά δεν υπάρχει τετραγωνική απεικόνιση* $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *και μια σταθερά* $\beta > 0$ *ώστε*

$$\left| f_q(x) - Q(x) \right| \le \beta |x|^2 \tag{53}$$

*για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Το τελικό συμπέρασμα για την ευστάθεια της μικτής συναρτησιακής εξίσωσης (7) αποτυπώνεται στο θεώρημα που ακολουθεί:

**Θεώρημα 4.1.11.** *Έστω* $j \in \{-1,1\}$ *και* $\varphi : X^3 \to [0,\infty)$ *συνάρτηση με τις ιδιότητες των σχέσεων (22) και (42) για κάθε* $x, y, z \in X$. *Αν* $f : X \to Y$ *μια συνάρτηση για την οποία*

$$\| Df(x,y,z) \| \le \varphi(x,y,z) \tag{54}$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$, *τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση* $A : X \to Y$ *και μοναδική τετραγωνική απεικόνιση* $Q : X \to Y$ *που ικανοποιούν την (7) και*

$$\| f(x) - A(x) - Q(x) \| \le \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=\frac{1-j}{2}}^{\infty} \frac{\varphi(3^{kj}x, 3^{kj}x, 3^{kj}x) + \varphi(-3^{kj}x, -3^{kj}x, -3^{kj}x)}{3^{kj}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{9} \sum_{k=\frac{1-j}{2}}^{\infty} \frac{\varphi(3^{kj}x, 3^{kj}x, 3^{kj}x) + \varphi(-3^{kj}x, -3^{kj}x, -3^{kj}x)}{9^{kj}} \right] \tag{55}$$

*με* $A(x)$ και $Q(x)$ να *ορίζονται από τα θεωρήματα 4.1.3. και 4.1.8. αντίστοιχα, για κάθε* $x \in X$.

*Απόδειξη.* Έστω $f_o(x) = \dfrac{f_a(x) - f_a(-x)}{2}$, $x \in X$. Τότε, $f_o(x) = 0$ και $f_o(x) = -f_o(x)$, $x \in X$. Επομένως,

$$\|Df_o(x,y,z)\| \le \frac{1}{2}\big(\varphi(x,y,z)+\varphi(-x,-y,-z)\big) \tag{56}$$

για κάθε $x, y, z \in X$ . Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 4.1.3. συμπεραίνουμε ότι,

$$\| f_o(x) - A(x)\| \le \frac{1}{6}\sum_{k=\frac{1-j}{2}}^{\infty} \frac{\varphi(3^{kj}x, 3^{kj}x, 3^{kj}x)+\varphi(-3^{kj}x, -3^{kj}x, -3^{kj}x)}{3^{kj}} \tag{57}$$

για κάθε $x \in X$ . Αν $f_e(x) = \dfrac{f_q(x)+f_q(-x)}{2}$ , $x \in X$ , τότε $f_e(x) = 0$ και

$f_e(x) = f_e(x)$ , για κάθε $x \in X$ . Επομένως,

$$\|Df_e(x,y,z)\| \le \frac{1}{2}\big(\varphi(x,y,z)+\varphi(-x,-y,-z)\big) \tag{58}$$

για κάθε $x, y, z \in X$ . Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 4.1.8. συμπεραίνουμε ότι,

$$\| f_e(x) - Q(x)\| \le \frac{1}{18}\sum_{k=\frac{1-j}{2}}^{\infty} \frac{\varphi(3^{kj}x, 3^{kj}x, 3^{kj}x)+\varphi(-3^{kj}x, -3^{kj}x, -3^{kj}x)}{9^{kj}} \tag{59}$$

για κάθε $x \in X$ . Ορίζοντας $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ από τις σχέσεις (57) και (59) είναι,

$$\begin{aligned} \| f(x) - A(x) - Q(x)\| &= \| f_e(x) + f_o(x) - A(x) - Q(x)\| \\ &\le \| f_o(x) - A(x)\| + \| f_e(x) - Q(x)\|, \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$ . Δηλαδή το αποδεικτέο. □

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι και το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 4.1.12.** *Έστω $\lambda$ και $s$ μη αρνητικοί πραγματικοί. Αν η συνάρτηση $f_q : X \to Y$ ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\|Df(x,y,z)\| \le \begin{cases} \lambda, & \\ \lambda\left\{\|x\|^s + \|y\|^s + \|z\|^s\right\}, & s \ne 1,2 \\ \lambda\|x\|^s\|y\|^s\|z\|^s, & 3s \ne 1,2 \\ \lambda\left\{\|x\|^s\|y\|^s\|z\|^s + \|x\|^{3s} + \|y\|^{3s} + \|z\|^{3s}\right\}, & 3s \ne 1,2 \end{cases} \tag{60}$$

*για κάθε $x, y, z \in X$ . Τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση $A : X \to Y$ και μοναδική τετραγωνική απεικόνιση $Q : X \to Y$ ώστε*

$$\| f(x)-A(x)-Q(x)\| \leq \begin{cases} \dfrac{5\lambda}{8}, & \\ 3\lambda \|x\|^{s}\left(\dfrac{1}{|3-3^{s}|}+\dfrac{1}{|9-3^{s}|}\right), & s\neq 1,2 \\ \lambda \|x\|^{3s}\left(\dfrac{1}{|3-3^{3s}|}+\dfrac{1}{|9-3^{3s}|}\right), & 3s\neq 1,2 \\ 4\lambda \|x\|^{3s}\left(\dfrac{1}{|3-3^{3s}|}+\dfrac{1}{|9-3^{3s}|}\right), & 3s\neq 1,2 \end{cases} \tag{61}$$

*για κάθε* $x \in X$ .

**Μέθοδος σταθερού σημείου (Fixed Point Method)**

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε την γενικευμένη ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias ευστάθεια της μικτής συναρτησιακής εξίσωσης (7) με τη βοήθεια της μεθόδου σταθερού σημείου, διακρίνοντας τις περιπτώσεις άρτιας και περιττής συνάρτησης. Στην ενότητα αυτή υποθέτουμε πως $X$ είναι διανυσματικός χώρος και $Y$ χώρος Banach.

**Θεώρημα** *(Margolis-Diaz) Αν* $(X,d)$ *είναι ένας πλήρης γενικευμένος μετρικός χώρος και η απεικόνιση* $T: X \to X$ *είναι αυστηρά συστολή με σταθερά Lipschitz* $L$*, τότε για κάθε δοθέν στοιχείο* $x \in X$*, ισχύουν εναλλακτικά οι ακόλουθες*

$(B_1)$. $d(T^n x, T^{n+1}x) = \infty, \ \forall n \geq 0$ *ή*

$(B_2)$. *Υπάρχει φυσικός αριθμός* $n_0$ *ώστε:*

(1). $d(T^n x, T^{n+1}x) < \infty, \ \forall n \geq n_0$,

(2). *Η ακολουθία* $(T^n x)$ *συγκλίνει στο σταθερό σημείο* $y^*$ *της* $T$

(3). $y^*$ *είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της* $T$ *στο σύνολο*

$$Y = \{y \in X : d(T^{n_0}x, y) < \infty\}$$

(4). $d(y^*, y) \leq \dfrac{1}{1-L} d(y, Ty)$ *για κάθε* $y \in Y$.

**Θεώρημα 4.1.13.** *Έστω* $f_a : X \to Y$ *απεικόνιση για την οποία υπάρχουν συναρτήσεις* $\varphi, \gamma : X^3 \to Y$ *με τη συνθήκη*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(\mu_i^k x, \mu_i^k y, \mu_i^k z)}{\mu_i^k} = 0 \tag{62}$$

*όπου*

$$\mu_i = \begin{cases} 3, & i = 0 \\ \dfrac{1}{3}, & i = 1 \end{cases}$$

*και να ισχύει η συναρτησιακή ανισότητα*

$$\|Df_a(x,y,z)\| \le \varphi(x,y,z) \tag{63}$$

*για κάθε* $x, y, z \in X$ *. Αν υπάρχει σταθερά* $L = L(i) < 1$ *ώστε η συνάρτηση* $x \mapsto \gamma(x) = \varphi\left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right)$ *να έχει την ιδιότητα*

$$\gamma(x) = L\mu_i \gamma\left(\frac{x}{\mu_i}\right) \tag{64}$$

*για όλα τα* $x \in X$ *, τότε υπάρχει μοναδική προσθετική συνάρτηση* $A : X \to Y$ *για την οποία ισχύει η (7) και*

$$\| f_a(x) - A(x)\| \le \frac{L^{1-i}}{1-L}\gamma(x) \tag{65}$$

*για κάθε* $x \in X$ *.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το σύνολο $X = \{g : X \to Y, g(0) = 0\}$ και εισάγουμε την γενικευμένη μετρική στον $X$ ,

$$d(g,h) = \inf\left\{K \in (0,\infty) : \|g(x) - h(x)\| \le K\gamma(x), x \in X\right\}.$$

Ο $(X, d)$ είναι πλήρης βλ.[51].

Ορίζουμε $T : X \to X$ με

$$Tg(x) = \frac{1}{\mu_i} g(\mu_i x), \quad \forall x \in X .$$

Εφόσον $g, h \in X$ , έχουμε διαδοχικά,

$$d(g,h) \le K$$

$$\|g(x) - h(x)\| \le K\gamma(x)$$

$$\left\|\frac{1}{\mu_i} g(\mu_i x) - \frac{1}{\mu_i} h(\mu_i x)\right\| \leq \frac{1}{\mu_i} K\gamma(\mu_i x) \leq LK\gamma(x)$$

$$\|Tg(x) - Th(x)\| \leq LK\gamma(x)$$

δηλαδή, $$d\left(Tg, Th\right) \leq LK$$

που σημαίνει

$$d(Tg, Th) \leq Ld(g, h),$$

για κάθε $g, h \in X$. Άρα, η $T$ είναι αυστηρά μια απεικόνιση συστολή στον $X$ με σταθερά Lipschitz $L$. Από τη σχέση (27), έχουμε

$$\left\|\frac{f_a(3x)}{3} - f_a(x)\right\| \leq \frac{1}{3}\varphi(x, x, x) \tag{66}$$

για κάθε $x \in X$. Με τη βοήθεια της (64) για $i = 0$, είναι

$$\left\|\frac{1}{3} f_a(3x) - f_a(x)\right\| \leq \frac{1}{3}\gamma(x)$$

για κάθε $x \in X$.

Δηλαδή,

$$d(Tf_a, f_a) \leq \frac{1}{3} = L = L^{1-0} = L^{1-i} < \infty.$$

Αντικαθιστώντας $x = \frac{x}{3}$ στην (66), παίρνουμε

$$\left\|f_a(x) - 3f_a\left(\frac{x}{3}\right)\right\| \leq \varphi\left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right)$$

για κάθε $x \in X$. Με τη βοήθεια της (64) για $i = 1$, είναι

$$\left\|f_a(x) - 3f_a\left(\frac{x}{3}\right)\right\| \leq \gamma(x)$$

για κάθε $x \in X$. Δηλαδή,

$$d(f_a, Tf_a) \leq 1 = L^0 = L^{1-1} = L^{1-i} < \infty.$$

Συνολικά,

$$d(f_a, Tf_a) \leq L^{1-i}.$$

Άρα η συνθήκη $B_2(i)$ ισχύει.

Από τη $B_2(ii)$, έχουμε ότι υπάρχει ένα σταθερό σημείο $A$ της $T$ στον $X$ ώστε

$$A(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{f_a(\mu_i^k x)}{\mu_i^k}, \quad \forall x \in X\ . \tag{67}$$

Αν στη συνέχεια αντικαταστήσουμε το $(x,y,z)=(\mu_i^k x,\mu_i^k y,\mu_i^k z)$ στην (63) και διαιρέσουμε με $\mu_i^k$, λόγω και των (62) και (67), διαπιστώνουμε ότι η $A$ επαληθεύει την (7), για κάθε $x,y,z\in X$ .

Από τη $B_2(iii)$, η $A$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο του $T$ στο σύνολο $Y=\left\{ f_a \in X : d(Tf_a, A)<\infty \right\}$, δηλαδή η $A$ είναι η μοναδική συνάρτηση ώστε

$$\| f_a(x)-A(x)\| \le K\gamma(x)$$

για κάθε $x\in X$ και $K>0$. Από τη $B_2(iv)$,

$$d(f_a, A)\le \frac{1}{1-L} d(f_a, Tf_a)$$

ή

$$d(f_a, A)\le \frac{L^{1-i}}{1-L}.$$

Άρα

$$\| f_a(x)-A(x)\| \le \frac{L^{1-i}}{1-L}\gamma(x)$$

για κάθε $x\in X$ . □

Τα θεωρήματα που ακολουθούν δίνονται χωρίς αποδείξεις εφόσον είναι ανάλογες των 4.1.13 και 4.1.14 και του προηγηθέντος μικτού θεωρήματος 4.1.11.

**Πόρισμα 4.1.14.** *Έστω $\lambda$ και $s$ πραγματικοί. Αν η συνάρτηση $f_a: X\to Y$ ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\|Df_a(x,y,z)\| \le \begin{cases} \lambda, & \\ \lambda\left\{\|x\|^s+\|y\|^s+\|z\|^s\right\}, & s<1 \text{ ή } s>1 \\ \lambda\|x\|^s\|y\|^s\|z\|^s, & 3s<1 \text{ ή } 3s>1 \\ \lambda\left\{\|x\|^s\|y\|^s\|z\|^s+\|x\|^{3s}+\|y\|^{3s}+\|z\|^{3s}\right\}, & 3s<1 \text{ ή } 3s>1 \end{cases} \tag{68}$$

*για κάθε $x,y,z\in X$ . Τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση $A: X\to Y$ ώστε*

$$\| f_a(x) - A(x)\| \leq \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}, & \\ \dfrac{3\lambda \|x\|^s}{|3-3^s|}, & s<1 \text{ ή } s>1 \\ \dfrac{\lambda \|x\|^{3s}}{|3-3^{3s}|}, & 3s<1 \text{ ή } 3s>1 \\ \dfrac{4\lambda \|x\|^{3s}}{|3-3^{3s}|}, & 3s<1 \text{ ή } 3s>1 \end{cases}$$

*για κάθε* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Θέτοντας

$$\varphi(x,y,z) = \begin{cases} \lambda, \\ \lambda\left\{\|x\|^s + \|y\|^s + \|z\|^s\right\}, \\ \lambda \|x\|^s \|y\|^s \|z\|^s, \\ \lambda\left\{\|x\|^s \|y\|^s \|z\|^s + \|x\|^{3s} + \|y\|^{3s} + \|z\|^{3s}\right\} \end{cases}$$

για κάθε $x, y, z \in X$ , είναι

$$\varphi(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu_\iota^\kappa}, \\ \dfrac{\lambda}{\mu_\iota^\kappa}\left\{\|\mu_\iota^\kappa x\|^s + \|\mu_\iota^\kappa y\|^s + \|\mu_\iota^\kappa z\|^s\right\}, \\ \dfrac{\lambda}{\mu_\iota^\kappa}\|\mu_\iota^\kappa x\|^s \|\mu_\iota^\kappa y\|^s \|\mu_\iota^\kappa z\|^s, \\ \dfrac{\lambda}{\mu_\iota^\kappa}\left\{\|\mu_\iota^\kappa x\|^s \|\mu_\iota^\kappa y\|^s \|z\mu_\iota^\kappa\|^s + \|\mu_\iota^\kappa x\|^{3s} + \|\mu_\iota^\kappa y\|^{3s} + \|\mu_\iota^\kappa z\|^{3s}\right\} \end{cases}$$

με όριο το μηδέν καθώς $k \to \infty$. Δηλαδή ισχύει η σχέση (62). Αλλά,

$$\gamma(x) = \varphi\left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right)$$

οπότε

$$\gamma(x)=\varphi\left(\frac{x}{3},\frac{x}{3},\frac{x}{3}\right)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2},\\ \dfrac{4\lambda\|x\|^{s}}{3^{s}},\\ \dfrac{\lambda\|x\|^{3s}}{3^{3s}},\\ \dfrac{5\lambda\|x\|^{3s}}{3^{3s}}\end{cases}$$

και

$$\frac{1}{\mu_i}\gamma(\mu_i x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\mu_i},\\ \dfrac{4\lambda\|\mu_i x\|^{s}}{3^{s}\mu_i},\\ \dfrac{\lambda\|\mu_i x\|^{3s}}{3^{3s}\mu_i},\\ \dfrac{5\lambda\|\mu_i x\|^{3s}}{3^{3s}\mu_i}\end{cases}=\begin{cases}\mu_i^{-1}\dfrac{\lambda}{2},\\ \mu_i^{s-1}\dfrac{4\lambda\|x\|^{s}}{3^{s}},\\ \mu_i^{3s-1}\dfrac{\lambda\|x\|^{3s}}{3^{3s}},\\ \mu_i^{3s-1}\dfrac{5\lambda\|x\|^{3s}}{3^{3s}}\end{cases}=\begin{cases}\mu_i^{-1}\gamma(x),\\ \mu_i^{s-1}\gamma(x),\\ \mu_i^{3s-1}\gamma(x),\\ \mu_i^{3s-1}\gamma(x).\end{cases}$$

Η σχέση (64) ισχύει λοιπόν και αν $i=0$ με $L=\dfrac{1}{3}$ όταν $s=1$, και αν $i=1$ με $L=3$ όταν $s=0$. Εύκολα τώρα για το πρώτο συμπέρασμα του πορίσματος έχουμε:

είτε

$$\| f_a(x)-A(x)\|\leq\frac{L^{1-i}}{1-L}\gamma(x)=\frac{(3^{-1})^{1-0}}{1-3^{-1}}\cdot\lambda=\frac{\lambda}{2}$$

είτε

$$\| f_a(x)-A(x)\|\leq\frac{L^{1-i}}{1-L}\gamma(x)=\frac{3^{1-1}}{1-3}\cdot\lambda=-\frac{\lambda}{2}.$$

Οι αποδείξεις των υπόλοιπων περιπτώσεων είναι ανάλογες της πρώτης. □

**Θεώρημα 4.1.15.** *Έστω* $f_q : X\to Y$ *απεικόνιση για την οποία υπάρχουν συναρτήσεις* $\varphi,\gamma : X^3\to Y$ *με τη συνθήκη*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(\mu_i^{k}x,\mu_i^{k}y,\mu_i^{k}z)}{\mu_i^{k}}=0$$

*όπου*

$$\mu_i = \begin{cases} 3, & i=0 \\ \frac{1}{3}, & i=1 \end{cases}$$

*και να ισχύει η συναρτησιακή ανισότητα*

$$\left\| Df_q(x,y,z) \right\| \le \varphi(x,y,z)$$

*για κάθε* $x,y,z \in X$ . *Αν υπάρχει σταθερά* $L = L(i) < 1$ *ώστε η συνάρτηση*

$x \mapsto \gamma(x) = \varphi\left(\frac{x}{3},\frac{x}{3},\frac{x}{3}\right)$ *να έχει την ιδιότητα*

$$\gamma(x) = L\mu_i^{\,2}\gamma\left(\frac{x}{\mu_i}\right) \tag{69}$$

*για όλα τα* $x \in X$ , *τότε υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q: X \to Y$ *για την οποία ισχύει η (7) και*

$$\left\| f_q(x) - Q(x) \right\| \le \frac{L^{1-i}}{1-L}\gamma(x)$$

*για κάθε* $x \in X$ .

**Θεώρημα 4.1.16**. *Έστω* $f: X \to Y$ *απεικόνιση για την οποία υπάρχουν συναρτήσεις* $\varphi, \gamma: X^3 \to Y$ *με τη συνθήκη*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(\mu_i^{\,k}x, \mu_i^{\,k}y, \mu_i^{\,k}z)}{\mu_i^{\,k}} = 0$$

*όπου*

$$\mu_i = \begin{cases} 3, & i=0 \\ \frac{1}{3}, & i=1 \end{cases}$$

*και να ισχύει η συναρτησιακή ανισότητα* $\left\| Df(x,y,z) \right\| \le \varphi(x,y,z)$

*για κάθε* $x,y,z \in X$ . *Αν υπάρχει σταθερά* $L = L(i) < 1$ *ώστε η συνάρτηση*

$x \mapsto \gamma(x) = \varphi\left(\frac{x}{3},\frac{x}{3},\frac{x}{3}\right)$ *να έχει τις ιδιότητες (64) και (69), για όλα τα* $x \in X$ , *τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση* $A: X \to Y$ *και μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q: X \to Y$ *για τις οποίες ισχύει η εξίσωση (7) και για κάθε* $x \in X$ ,

$$\left\| f(x) - A(x) - Q(x) \right\| \le \frac{L^{1-i}}{1-L}\left(\gamma(x) + \gamma(-x)\right).$$

## 4.2 Μικτού τύπου συναρτησιακές εξισώσεις και ευστάθεια Hyers-Ulam-Rassias σε quasi-$\beta$-normed χώρους. Hyers Direct Method.

Ο Skof [96] μελέτησε πρώτος την δευτεροβάθμια συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \tag{1}$$

ως προς την ευστάθεια Ulam.

Ο Arunkumar et al .[9], απέδειξε την ισοδυναμία της συναρτησιακής εξίσωσης

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x) \tag{2}$$

με την κλασική προσθετική(additive) του Cauchy, και μελέτησε την γενικευμένη Ulam-Hyers-Rassias ευστάθεια αυτής.

Στην ενότητα αυτή επιλύουμε την ακόλουθη συναρτησιακή εξίσωση που προκύπτει από την δευτέρου βαθμού (1) και την προσθετική (2):

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)-2f(y)+f(2y)\,. \tag{3}$$

Μελετάμε την γενικευμένη Hyers-Ulam-Rassias ευστάθειά της σε χώρους quasi-$\beta$-normed , για μικτού τύπου συναρτησιακές εξισώσεις με χρήση της ευθείας μεθόδου, βλ. L.G.Wang, B. Liu [100]. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=ax+bx^2$ είναι λύση της (3).

Την έννοια του *quasi-* $\beta$ *-normed* χώρου ( ψευδο-β-χώρου)-θα υιοθετήσουμε για τα επόμενα τον διεθνή όρο *quasi-* $\beta$ *-normed-* που εισήγαγαν οι J.M. Rassias ,Kim [84]. Αναφέρουμε μερικές βασικές έννοιες στους χώρους quasi- $\beta$ -normed.

**Ορισμός 4.2.1**. *Έστω πραγματικός αριθμός* $\beta$ *με* $0<\beta\le 1$ *και* $\mathrm{K}$ *δηλώνουμε το* $\mathbb{R}$ *ή το* $\mathbb{C}$ *. Αν* $X$ *είναι γραμμικός χώρος επί του* $\mathrm{K}$ *τότε quasi-*$\beta$*-norm* $\|\cdot\|$ *είναι μια πραγματική συνάρτηση στον* $X$ *με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

*α)* $\|x\|\ge 0$ *για κάθε* $x\in X$ *και* $\|x\|=0$ *αν-ν* $x=0$,

*β)* $\|\lambda x\|=|\lambda|^{\beta}\,\|x\|$ *για κάθε* $\lambda\in\mathrm{K}$ *και όλα τα* $x\in X$ ,

*γ) Υπάρχει σταθερά* $K\ge 1$ *ώστε* $\|x+y\|\le K\left(\|x\|+\|y\|\right)$ *για κάθε* $x,y\in X$ .

Το ζεύγος $\left(X,\|\cdot\|\right)$ καλείται *quasi-* $\beta$ *-normed* χώρος αν η $\|\cdot\|$ είναι *quasi-*$\beta$*-norm* στον $X$ . Ο μικρότερος δυνατός $K$ λέγεται συντελεστής κοιλότητας (modulus of concavity) της $\|\cdot\|$. Ένας *quasi-* $\beta$*-Banach* χώρος είναι ένας πλήρης *quasi-* $\beta$*-normed* χώρος.

**Ορισμός 4.2.2.** *Η quasi-* $\beta$ *-norm* $\|\cdot\|$ *καλείται* $(\beta, p)$-στάθμη, με $0 < p \le 1$, αν $\|x+y\|^p \le \|x\|^p + \|y\|^p$ *για κάθε* $x, y \in X$ .

Στην παραπάνω περίπτωση ο *quasi-* $\beta$*-Banach* χώρος λέγεται $(\beta, p)$*-Banach* χώρος. Σε αυτήν την ενότητα, εκτός αν διευκρινίζεται διαφορετικά, μελετάμε την ευστάθεια της (3) σε *quasi-* $\beta$*-normed* χώρους.

**Θεώρημα 4.2.3**. *Αν* $X$, $Y$ *πραγματικοί διανυσματικοί χώροι και* $f : X \to Y$ *μια απεικόνιση, τότε η* $f$ *επαληθεύει την (3) αν και μόνο αν υπάρχουν μια προσθετική απεικόνιση* $A(x)$ *και μια δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q(x)$ *ώστε* $f(x) = A(x) + Q(x)$ *για κάθε* $x \in X$ .

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $f$ επαληθεύει την (3). Θέτουμε $f_e(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$ και $f_o(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$ για κάθε $x \in X$ , το άρτιο και περιττό μέρος της $f$ αντίστοιχα. Λόγω της (3) θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_e(x+y) + f_e(x-y) &= \frac{1}{2}\big[f(x+y) + f(-x-y)\big] + \frac{1}{2}\big[f(x+y) + f(-x+y)\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[f(-x+y) + f(-x-y)\big] + \frac{1}{2}\big[f(x+y) + f(x-y)\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[f\big(-x+(-y)\big) + f\big(-x-(-y)\big)\big] + \frac{1}{2}\big[f(x+y) + f(x-y)\big] \\
&= \frac{1}{2}\big(2f(-x) - 2f(-y) + f(-2y)\big) + \frac{1}{2}\big(2f(x) - 2f(y) + f(2y)\big) \\
&= f(-x) - f(-y) + f(x) - f(y) + \frac{1}{2}\big(f(2y) + f(-2y)\big) \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) - 2\cdot\frac{1}{2}\big(f(y) + f(-y)\big) + \frac{1}{2}\big(f(2y) + f(-2y)\big) \\
&= 2f_e(x) - 2f_e(y) + f_e(2y) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

για κάθε $x, y \in X$ . Αν $x = y = 0$ στην (4), τότε $f_e(0) = 0$. Αν θέσουμε $x = 0$ στην (4) και λόγω της αρτιότητας της $f$ , έχουμε $f_e(2y) = 4 f_e(y)$ για όλα τα $y \in X$ . Έτσι η (4) γράφεται

$$f_e(x+y) + f_e(x - y) = 2 f_e(x) + 2 f_e(y)$$

για κάθε $x, y \in X$ . Άρα η $f_e$ είναι δευτεροβάθμια αφού επαληθεύει την (1).

Έχουμε επίσης,

$$\begin{aligned}
f_o(x+y) + f_o(x-y) &= \frac{1}{2}\left[ f(x+y) - f(-x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[ f(x+y) - f(-x+y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[ f(x+y) + f(x-y)\right] - \frac{1}{2}\left[ f(-x+y) + f(-x-y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(2 f(x) - 2 f(y) + f(2y)\right) - \frac{1}{2}\left(2 f(-x) - 2 f(-y) + f(-2y)\right) \\
&= f(x) - f(y) - f(-x) + f(-y) + \frac{1}{2}\left( f(2y) - f(-2y)\right) \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\left( f(x) - f(-x)\right) - 2\cdot\frac{1}{2}\left( f(y) - f(-y)\right) + \frac{1}{2}\left( f(2y) - f(-2y)\right) \\
&= 2 f_o(x) - 2 f_o(y) + f_o(2y) \qquad (5)
\end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in X$ . Αν θέσουμε $x = 0$ στην (5) και λόγω της περιττότητας της $f$ , έχουμε $f_o(2y) = 2 f_o(y)$ για όλα τα $y \in X$ . Έτσι η (5) γράφεται

$$f_o(x+y) + f_o(x-y) = 2 f_o(x)$$

για κάθε $x, y \in X$ . Άρα η $f_o$ είναι προσθετική απεικόνιση αφού επαληθεύει την (2). Θέτοντας $A = f_o$ και $Q = f_e$, τότε $f(x) = A(x) + Q(x)$, για κάθε $x \in X$ .

Αντιστρόφως, αν υπάρχουν μια προσθετική και μια δευτεροβάθμια απεικόνιση $A(x)$ και $Q(x)$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $f(x) = A(x) + Q(x)$ για κάθε $x \in X$ , τότε η $Q$ επαληθεύει την (1) και η $A$ την (2). Οπότε θα ισχύουν

$$A(2x) = 2A(x) \text{ και } Q(2x) = 4Q(x)$$

για κάθε $x \in X$ . Κατά συνέπεια θα έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x+y) + f(x-y) &= A(x+y) + A(x-y) + Q(x+y) + Q(x-y) \\
&= 2A(x) + 2Q(x) + 2Q(y) \qquad (6)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
2 f(x) - 2 f(y) + f(2y) &= 2A(x) - 2A(y) + A(2y) + 2Q(x) - 2Q(y) + Q(2y) \\
&= 2A(x) - 2A(y) + 2A(y) + 2Q(x) + 2Q(y) \qquad (7)
\end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in X$ . Από τις σχέσεις (6) και (7) διαπιστώνουμε ότι

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)-2f(y)+f(2y)$$

για κάθε $x, y \in X$ . □

**Πόρισμα 4.2.4.** *Έστω $f: X \to Y$ μια απεικόνιση που επαληθεύει την (3). Τότε,*

*α) Αν η $f$ είναι περιττή, τότε είναι προσθετική.*

*β) Αν η $f$ είναι άρτια, τότε είναι δευτεροβάθμια.*

*Απόδειξη.* Αν η $f$ είναι περιττή, τότε $f = f_o$ οπότε από το Θεώρημα 4.2.3 είναι και προσθετική. Ενώ αν η $f$ είναι άρτια, τότε $f = f_o$ οπότε από το Θεώρημα 4.2.3 είναι και δευτεροβάθμια. □

Στα επόμενα Θεωρήματα που θα ακολουθήσουν θεωρούμε $X$ έναν γραμμικό χώρο επί του $\mathrm{K}$ , και $Y$ ένας $(\beta, p)$ -Banach χώρος με $p$ -στάθμη $\| \cdot \|$. Ορίζουμε τον τελεστή, $Df(x,y)=f(x+y)+f(x-y)-2f(x)+2f(y)-f(2y)$, $x, y \in X$ για δοθείσα συνάρτηση $f: X \to Y$ .

**Θεώρημα 4.2.5.** *Έστω $\varphi: X^2 \to [0,\infty)$ συνάρτηση ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\beta np} \varphi^p\left(0, \frac{x}{2^n}\right) < \infty \tag{8}$$

*και*

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\beta n} \varphi\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) = 0$$

*για κάθε $x, y \in X$ . Αν επιπλέον $f: X \to Y$ είναι μια περιττή απεικόνιση με $f(0)=0$ και*

$$\|Df(x,y)\| \leq \varphi(x,y) \tag{9}$$

*για κάθε $x, y \in X$ . Τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση $A: X \to Y$ τέτοια ώστε*

$$\|A(x)-f(x)\| \leq \frac{1}{2^\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\beta np} \varphi\left(0, \frac{x}{2^n}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

*για κάθε $x \in X$ .*

*Απόδειξη.* Έστω $x=0$ στην (9) και λόγω της περιττότητας της $f$ είναι,

$$\|f(2y)-2f(y)\| \le \varphi(0,y) \tag{10}$$

για κάθε $y \in X$. Αντικαθιστώντας $y$ με $\dfrac{x}{2^{n+1}}$ και πολλαπλασιάζοντας με $2^{\beta n}$ στην (10), έχουμε

$$\left\|2^{n+1} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)-2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\| \le 2^{\beta n}\varphi\left(0,\frac{x}{2^{n+1}}\right) \tag{11}$$

για κάθε $x \in X$. Αν για τυχαία $m,n \in \mathbb{N}$ με $m>n\ge 0$ και $x\in X$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|2^{m+1} f\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right)-2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\|^p &= \left\|2^{m+1} f\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right)-2^m f\left(\frac{x}{2^m}\right)+2^m f\left(\frac{x}{2^m}\right)\right.\\
&\qquad \left. -2^{m-1} f\left(\frac{x}{2^{m-1}}\right)+\ldots+2^{n+1} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)+2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\|^p\\
&\le \sum_{i=n}^{m}\left\|2^{i+1} f\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right)-2^n f\left(\frac{x}{2^i}\right)\right\|^p\\
&\le \sum_{i=n}^{m} 2^{\beta p i}\varphi^p\left(0,\frac{x}{2^{i+1}}\right)\\
&= \frac{1}{2^{\beta p}}\sum_{i=n+1}^{m} 2^{\beta p i}\varphi^p\left(0,\frac{x}{2^i}\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Από τις σχέσεις (8) και (12) η ακολουθία $\left\{2^m f\left(\dfrac{x}{2^m}\right)\right\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $Y$ για κάθε $x\in X$. Εφόσον ο $Y$ είναι $(\beta,p)$-Banach χώρος η ακολουθία $\left\{2^m f\left(\dfrac{x}{2^m}\right)\right\}$ συγκλίνει για κάθε $x\in X$. Ορίζεται λοιπόν η απεικόνιση $A: X\to Y$ με

$$A(x) := \lim_{m\to\infty} 2^m f\left(\frac{x}{2^m}\right)$$

για κάθε $x\in X$. Αν $m\to\infty$ και $n=0$ στην (12) είναι

$$\|A(x)-f(x)\|^p \le \frac{1}{2^{\beta p}}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{\beta p i}\varphi^p\left(0,\frac{x}{2^i}\right)=\frac{1}{2^{\beta p}}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\beta n p}\varphi^p\left(0,\frac{x}{2^n}\right)$$

για κάθε $x\in X$. Συνεπώς,

$$\|A(x)-f(x)\| \le \frac{1}{2^{\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\beta n p}\varphi^p\left(0,\frac{x}{2^n}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x\in X$. Από τις σχέσεις (8) και (9) είναι

$$\|DA(x,y)\| = \lim_{n\to\infty} 2^{\beta n} \left\| Df\left(\frac{x}{2^n}, \frac{x}{2^n}\right) \right\| \le \lim_{n\to\infty} 2^{\beta n} \varphi\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) = 0$$

για κάθε $x, y \in X$ .Άρα η $A$ ικανοποιεί την (3) και λόγω του πορίσματος 4.2.4. η $A$ είναι προσθετική και

$$A(x+y) + A(x-y) = 2A(x) - 2A(y) + A(2y)$$

για κάθε $x, y \in X$ .

Για την απόδειξη της μοναδικότητας της $A$ παρατηρούμε ότι αν $A'$ είναι μια άλλη προσθετική απεικόνιση που επαληθεύει την (3) και δοθέντος ότι $A$ είναι προσθετική είναι,

$$\begin{aligned}
\|A'(x) - A(x)\|^p &= \lim_{n\to\infty} 2^{\beta np} \left\| A'\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right\|^p \\
&\le \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\beta np}}{2^{\beta p}} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\beta np} \varphi^p\left(0, \frac{x}{2^{2n}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{\beta p}} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\beta p(n+m)} \varphi^p\left(0, \frac{x}{2^{n+m}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{\beta p}} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{\beta pm} \varphi^p\left(0, \frac{x}{2^m}\right)
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ . Από τη σχέση (8) έπεται ότι

$$A'(x) - A(x) = 0$$

για κάθε $x \in X$, και $A' = A$. ∎

**Θεώρημα 4.2.6.** *Έστω $\varphi : X^2 \to [0,\infty)$ συνάρτηση ώστε*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\beta}\right)^{np} \varphi^p\left(0, 2^n x\right) < \infty \tag{13}$$

*και*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^\beta}\right)^{n} \varphi\left(2^n x, 2^n y\right) = 0$$

*για κάθε $x, y \in X$ . Αν επιπλέον $f : X \to Y$ είναι μια περιττή απεικόνιση με $f(0) = 0$ και*

$$\|Df(x,y)\| \le \varphi(x,y) \tag{14}$$

*για κάθε $x, y \in X$ . Τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση $A : X \to Y$ τέτοια ώστε*

$$\|A(x)-f(x)\| \le \frac{1}{2^{\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\beta}}\right)^{np}\varphi^{p}\left(0,2^{n}x\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

*για κάθε* $x \in X$.

*Απόδειξη.* Έστω $x=0$ στην (14) και λόγω της περιττότητας της $f$ είναι,

$$\|f(2y)-2f(y)\| \le \varphi(0,y) \tag{15}$$

για κάθε $y \in X$. Αντικαθιστώντας $y$ με $2^{n}x$ και πολλαπλασιάζοντας με $2^{\beta(n+1)}$ στην (15), έχουμε

$$\left\|\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}-\frac{f(2^{n}x)}{2^{n}}\right\| \le \frac{\varphi(0,2^{n}x)}{2^{\beta(n+1)}} \tag{16}$$

για κάθε $x \in X$. Αν για τυχαία $m,n \in \mathbb{N}$ με $m>n\ge 0$ και $x \in X$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(2^{m+1}x)}{2^{m+1}}-f\left(\frac{2^{n}x}{2^{n}}\right)\right\|^{p} &= \left\|\frac{f(2^{m+1}x)}{2^{m+1}}-\frac{f(2^{m}x)}{2^{m}}+\frac{f(2^{m}x)}{2^{m}}\right. \\ &\quad \left. -\frac{f(2^{m-1}x)}{2^{m-1}}+\ldots+-\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}-\frac{f(2^{n}x)}{2^{n}}\right\|^{p} \\ &\le \sum_{i=n}^{m}\left\|\frac{f(2^{m+1}x)}{2^{i+1}}-\frac{f(2^{i}x)}{2^{i}}\right\|^{p} \\ &\le \sum_{i=n}^{m}\frac{1}{2^{\beta(i+1)}}\varphi^{p}\left(0,2^{i}x\right) \\ &= \frac{1}{2^{\beta p}}\sum_{i=n}^{m}\frac{1}{2^{\beta pi}}\varphi^{p}\left(0,2^{i}x\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Από τις σχέσεις (13) και (17) η ακολουθία $\left\{\frac{1}{2^{m}}f\left(2^{m}x\right)\right\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $Y$ για κάθε $x \in X$. Εφόσον ο $Y$ είναι $(\beta,p)$-Banach χώρος η ακολουθία $\left\{\frac{1}{2^{m}}f\left(2^{m}x\right)\right\}$ συγκλίνει για κάθε $x \in X$. Ορίζεται λοιπόν η απεικόνιση $A: X \to Y$ με

$$A(x) := \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2^{m}}f\left(2^{m}x\right)$$

για κάθε $x \in X$. Αν $m \to \infty$ και $n=0$ στην (17) είναι

$$\|A(x)-f(x)\|^{p} \le \frac{1}{2^{\beta p}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\beta pi}}\varphi^{p}\left(0,2^{i}x\right)=\frac{1}{2^{\beta p}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\beta}}\right)^{np}\varphi^{p}\left(0,2^{n}x\right)$$

για κάθε $x \in X$ . Συνεπώς,

$$\left\|A(x)-f(x)\right\| \leq \frac{1}{2^{\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\beta}}\right)^{np} \varphi^{p}\left(0,2^{n} x\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x \in X$ . Από τις σχέσεις (13) και (14) έχουμε

$$\left\|DA(x,y)\right\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\beta n}}\left\|Df\left(\frac{x}{2^{n}},\frac{x}{2^{n}}\right)\right\| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\beta n}}\varphi\left(2^{n} x,2^{n} y\right)=0$$

για κάθε $x, y \in X$ .Άρα η $A$ ικανοποιεί την (3) και λόγω του πορίσματος 4.2.4. η $A$ είναι προσθετική και

$$A(x+y)+A(x-y)=2A(x)-2A(y)+A(2y)$$

για κάθε $x, y \in X$ .

Για την απόδειξη της μοναδικότητας της $A$ παρατηρούμε ότι αν $A'$ είναι μια άλλη προσθετική απεικόνιση που επαληθεύει την (3) και δοθέντος ότι $A$ είναι προσθετική έχουμε,

$$\begin{aligned}
\left\|A'(x)-A(x)\right\|^{p} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\beta np}}\left\|A'\left(2^{n} x\right)-f\left(2^{n} x\right)\right\|^{p} \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\beta p(n+1)}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\beta}}\right)^{np} \varphi^{p}\left(0,2^{2n} x\right) \\
&= \frac{1}{2^{\beta p}}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\beta p(n+m)}}\varphi^{p}\left(0,2^{m+n} x\right) \\
&= \frac{1}{2^{\beta p}}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{2^{\beta pm}}\varphi^{p}\left(0,2^{m} x\right)
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ . Από τη σχέση (13) έπεται ότι

$$A'(x)-A(x)=0$$

για κάθε $x \in X$ , και $A' = A$. $\square$

**Πόρισμα 4.2.7.** *Έστω* $\theta \in \mathbb{R}$ , $\theta \geq 0$ *και* $\alpha \in (0,1)\cup(1,+\infty)$. *Αν* $X$ *σταθμητός χώρος με στάθμη* $\| \cdot \|$ *, και* $f : X \to Y$ *μια περιττή απεικόνιση που επαληθεύει την συναρτησιακή ανισότητα*

$$\left\|Df(x,y)\right\| \leq \theta\left(\|x\|^{\alpha}+\|y\|^{\alpha}\right)$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *, τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση* $A: X \to Y$ *ώστε*

$$\|A(x)-f(x)\| \le \begin{cases} \dfrac{\theta\|x\|^{\alpha}}{\left(2^{\beta p}-2^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}}, & \alpha\in(0,1),\ \beta>\alpha \\ \dfrac{\theta\|x\|^{\alpha}}{\left(2^{\alpha p}-2^{\beta p}\right)^{\frac{1}{p}}}, & \alpha\in(1,+\infty) \end{cases}$$

*για κάθε* $x\in X$ .

*Απόδειξη.* Αν $\alpha\in(0,1)$ και $\beta>\alpha$ , τότε $\varphi(x,y)=\theta\left(\|x\|^{\alpha}+\|y\|^{a}\right)$, οπότε είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\beta}}\right)^{np}\varphi^{p}\left(0,2^{n}x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\beta}}\right)^{np}\theta^{p}\left\|2^{n}x\right\|^{\alpha p}=\theta^{p}\|x\|^{\alpha p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{\alpha}}{2^{\beta}}\right)$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{\beta}}\right)^{n}\varphi\left(2^{n}x,2^{n}y\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{\beta}}\right)^{n}\theta\left(\left\|2^{n}x\right\|^{\alpha}+\left\|2^{n}y\right\|^{\alpha}\right)$$

$$=\theta\left(\|x\|^{\alpha}+\|y\|^{\alpha}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\alpha}}{2^{\beta}}\right)^{n}$$

για κάθε $x,y\in X$ . Ικανοποιούνται συνεπώς οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.6 άρα υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση $A: X\to Y$ με

$$\|A(x)-f(x)\|\le\frac{1}{2^{\beta}}\left[\theta^{p}\|x\|^{\alpha p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{\alpha}}{2^{\beta}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}=\frac{\theta\|x\|^{\alpha}}{\left(2^{\beta p}-2^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}}$$

για κάθε $x\in X$ .

Αν $\alpha\in(1,\infty)$ και $\varphi(x,y)=\theta\left(\|x\|^{\alpha}+\|y\|^{a}\right)$ τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{\beta np}\varphi^{p}\left(0,\frac{x}{2^{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\beta np}\theta^{p}\left\|\frac{x}{2^{n}}\right\|^{\alpha p}=\theta^{p}\|x\|^{\alpha p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{\beta}}{2^{\alpha}}\right)^{np}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}2^{\beta n}\varphi\left(\frac{x}{2^{n}},\frac{y}{2^{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}2^{\beta n}\theta\left(\left\|\frac{x}{2^{n}}\right\|^{\alpha}+\left\|\frac{y}{2^{n}}\right\|^{\alpha}\right)=\theta\left(\|x\|^{\alpha}+\|y\|^{\alpha}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\beta}}{2^{\alpha}}\right)^{n}$$

για κάθε $x,y\in X$ . Από το Θεώρημα 4.2.5. λοιπόν έπεται ότι υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση $A: X\to Y$ με

$$\|A(x)-f(x)\|\le\frac{1}{2^{\beta}}\left[\theta^{p}\|x\|^{\alpha p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{\beta}}{2^{\alpha}}\right)^{np}\right]^{\frac{1}{p}}=\frac{\theta\|x\|^{\alpha}}{\left(2^{\alpha p}-2^{\beta p}\right)^{\frac{1}{p}}}.$$ □

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση η απεικόνιση να είναι άρτια.

**Θεώρημα 4.2.8.** *Έστω* $\varphi : X^2 \to [0,\infty)$ *συνάρτηση ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{\beta np} \varphi^p \left(0, \frac{x}{2^n}\right) < \infty \tag{18}$$

*και*

$$\lim_{n\to\infty} 4^{\beta n} \varphi\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) = 0$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *. Αν επιπλέον* $f : X \to Y$ *είναι μια άρτια απεικόνιση με* $f(0) = 0$ *και*

$$\|Df(x,y)\| \le \varphi(x,y) \tag{19}$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q : X \to Y$ *τέτοια ώστε*

$$\|Q(x) - f(x)\| \le \frac{1}{4^\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty} 4^{\beta np} \varphi\left(0, \frac{x}{2^n}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

*για κάθε* $x \in X$ *.*

*Απόδειξη.* Έστω $x = 0$ στην (19) και λόγω της αρτιότητας της $f$ είναι,

$$\| f(2y) - 4f(y)\| \le \varphi(0, y) \tag{20}$$

για κάθε $y \in X$ . Αντικαθιστώντας το $y$ με $\frac{x}{2^{n+1}}$ και πολλαπλασιάζοντας με $4^{\beta n}$ στην (20), έχουμε

$$\left\| 4^{n+1} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) - 4^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\| \le 4^{\beta n} \varphi\left(0, \frac{x}{2^{n+1}}\right) \tag{21}$$

για κάθε $x \in X$ . Η ακολουθία $\left\{4^m f\left(\frac{x}{2^m}\right)\right\}$ αποδεικνύεται ότι είναι Cauchy με παρόμοιο τρόπο όπως στο Θεώρημα 4.2.5. Έτσι είναι καλά ορισμένη η απεικόνιση

$$Q(x) := \lim_{m\to\infty} 4^m f\left(\frac{x}{2^m}\right)$$

για κάθε $x \in X$ . Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι ανάλογο του Θεωρήματος 4.2.5. □

**Θεώρημα 4.2.9.** *Έστω* $\varphi : X^2 \to [0,\infty)$ *συνάρτηση ώστε*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4^\beta}\right)^{np} \varphi^p\left(0, 2^n x\right) < \infty \tag{22}$$

*και*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^{\beta}}\right)^{n}\varphi\left(2^{n}x,2^{n}y\right)=0$$

*για κάθε* $x,y\in X$ . *Αν επιπλέον* $f:X\to Y$ *είναι μια άρτια απεικόνιση με* $f(0)=0$ *και*

$$\|Df(x,y)\|\le\varphi(x,y) \tag{23}$$

*για κάθε* $x,y\in X$ . *Τότε υπάρχει μοναδική τετραγωνική απεικόνιση* $Q:X\to Y$ *τέτοια ώστε*

$$\|Q(x)-f(x)\|\le\frac{1}{4^{\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{\beta}}\right)^{np}\varphi^{p}\left(0,2^{n}x\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

*για κάθε* $x\in X$ .

*Απόδειξη.* Έστω $x=0$ στην (23) και λόγω της αρτιότητας της $f$ είναι,

$$\|f(2y)-4f(y)\|\le\varphi(0,y) \tag{24}$$

για κάθε $y\in X$ . Αντικαθιστώντας $y$ με $2^{n}x$ και πολλαπλασιάζοντας με $4^{\beta(n+1)}$ στην (24), έχουμε

$$\left\|\frac{f(2^{n+1}x)}{4^{n+1}}-\frac{f(2^{n}x)}{4^{n}}\right\|\le\frac{\varphi(0,2^{n}x)}{4^{\beta(n+1)}} \tag{25}$$

για κάθε $x\in X$ . Αν για τυχαία $m,n\in\mathbb{N}$ με $m>n\ge 0$ και $x\in X$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(2^{m+1}x)}{4^{m+1}}-f\left(\frac{2^{n}x}{4^{n}}\right)\right\|^{p}&=\left\|\frac{f(2^{m+1}x)}{4^{m+1}}-\frac{f(2^{m}x)}{4^{m}}+\frac{f(2^{m}x)}{4^{m}}\right.\\&\qquad\left.-\frac{f(2^{m-1}x)}{4^{m-1}}+\ldots+-\frac{f(2^{n+1}x)}{4^{n+1}}-\frac{f(2^{n}x)}{4^{n}}\right\|^{p}\\&\le\sum_{i=n}^{m}\left\|\frac{f(2^{m+1}x)}{4^{i+1}}-\frac{f(2^{i}x)}{4^{i}}\right\|^{p}\\&\le\sum_{i=n}^{m}\frac{1}{4^{\beta(i+1)}}\varphi^{p}\left(0,2^{i}x\right)\\&=\frac{1}{4^{\beta p}}\sum_{i=n}^{m}\frac{1}{4^{\beta pi}}\varphi^{p}\left(0,2^{i}x\right).\end{aligned} \tag{26}$$

Από τις σχέσεις (22) και (26) η ακολουθία $\left\{\frac{1}{4^m} f\left(2^m x\right)\right\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $Y$ για κάθε $x \in X$. Εφόσον ο $Y$ είναι $(\beta, p)$ -Banach χώρος η ακολουθία $\left\{\frac{1}{4^m} f\left(2^m x\right)\right\}$ συγκλίνει για κάθε $x \in X$. Ορίζεται λοιπόν η απεικόνιση $Q: X \to Y$ με

$$Q(x) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4^m} f\left(2^m x\right)$$

για κάθε $x \in X$. Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι ανάλογο της απόδειξης του Θεωρήματος 4.2.6. $\square$

**Πόρισμα 4.2.10.** *Έστω $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \geq 0$ και $\alpha \in (0,2) \cup (2,+\infty)$. Αν $X$ σταθμητός χώρος με στάθμη $\|\cdot\|$, και $f: X \to Y$ μια άρτια απεικόνιση που επαληθεύει την συναρτησιακή ανισότητα*

$$\|Df(x,y)\| \leq \theta\left(\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha\right)$$

*για κάθε $x, y \in X$, τότε υπάρχει μοναδική τετραγωνική απεικόνιση $Q: X \to Y$ ώστε*

$$\|Q(x) - f(x)\| \leq \begin{cases} \dfrac{\theta\|x\|^\alpha}{\left(4^{\beta p} - 2^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}}, & \alpha \in (0,2),\ 2\beta > \alpha \\[2ex] \dfrac{\theta\|x\|^\alpha}{\left(2^{\alpha p} - 4^{\beta p}\right)^{\frac{1}{p}}}, & \alpha \in (2,+\infty) \end{cases}$$

*για κάθε $x \in X$.*

*Απόδειξη.* Αν $\alpha \in (0,2)$ και $2\beta > \alpha$, τότε $\varphi(x,y) = \theta\left(\|x\|^\alpha + \|y\|^a\right)$, οπότε είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^\beta}\right)^{np} \varphi^p\left(0, 2^n x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^\beta}\right)^{np} \theta^p \left\|2^n x\right\|^{\alpha p} = \theta^p \|x\|^{\alpha p} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^\alpha}{4^\beta}\right)$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^\beta}\right)^n \varphi\left(2^n x, 2^n y\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^\beta}\right)^n \theta\left(\left\|2^n x\right\|^\alpha + \left\|2^n y\right\|^\alpha\right)$$

$$= \theta\left(\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^\alpha}{4^\beta}\right)^n$$

για κάθε $x, y \in X$ . Ικανοποιούνται συνεπώς οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.9 άρα υπάρχει μοναδική τετραγωνική απεικόνιση $Q: X \to Y$ με

$$\|Q(x) - f(x)\| \le \frac{1}{4^\beta}\left[\theta^p \|x\|^{\alpha p} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^\alpha}{4^\beta}\right)\right]^{\frac{1}{p}} = \frac{\theta\|x\|^\alpha}{\left(4^{\beta p} - 2^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}}$$

για κάθε $x \in X$ .

Αν $\alpha \in (2, +\infty)$ και $\varphi(x, y) = \theta\left(\|x\|^\alpha + \|y\|^a\right)$ τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{\beta np} \varphi^p\left(0, \frac{x}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{\beta np} \theta^p \left\|\frac{x}{2^n}\right\|^{\alpha p} = \theta^p \|x\|^{\alpha p} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4^\beta}{2^\alpha}\right)^{np}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} 4^{\beta n} \varphi\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 4^{\beta n} \theta\left(\left\|\frac{x}{2^n}\right\|^\alpha + \left\|\frac{y}{2^n}\right\|^\alpha\right) = \theta\left(\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^\beta}{2^\alpha}\right)^n$$

για κάθε $x, y \in X$ . Από το Θεώρημα 4.2.8. λοιπόν έπεται ότι υπάρχει μοναδική τετραγωνική απεικόνιση $Q: X \to Y$ με

$$\|Q(x) - f(x)\| \le \frac{1}{4^\beta}\left[\theta^p \|x\|^{\alpha p} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4^\beta}{2^\alpha}\right)^{np}\right]^{\frac{1}{p}} = \frac{\theta\|x\|^\alpha}{\left(2^{\alpha p} - 4^{\beta p}\right)^{\frac{1}{p}}}. \qquad \square$$

Στη συνέχεια, εξετάζεται η μικτή περίπτωση (additive –quadratic).

**Θεώρημα 4.2.11.** *Έστω* $\varphi: X^2 \to [0, \infty)$ *συνάρτηση ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{\beta np} \varphi^p\left(0, \frac{x}{2^n}\right) < \infty \tag{27}$$

*και*

$$\lim_{n\to\infty} 4^{\beta n} \varphi\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) = 0 \tag{28}$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *. Αν επιπλέον* $f: X \to Y$ *είναι μια απεικόνιση με* $f(0) = 0$ *και*

$$\|Df(x, y)\| \le \varphi(x, y)$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *. Τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση* $A: X \to Y$ *και μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q: X \to Y$ *τέτοιες ώστε,*

$$\|A(x) + Q(x) - f(x)\| \le \frac{1}{4^\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\beta np}\left(\varphi^p\left(0, \frac{x}{2^n}\right) + \varphi^p\left(0, \frac{-x}{2^n}\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{8^{\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}4^{\beta np}\left(\varphi^{p}\left(0,\frac{x}{2^{n}}\right)+\varphi^{p}\left(0,\frac{-x}{2^{n}}\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

*για κάθε* $x \in X$.

*Απόδειξη.* Είναι $f_o(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, για κάθε $x \in X$. Τότε, $f_o(0)=0$, $f_o$ είναι περιττή απεικόνιση και

$$\|Df_o(x,y)\| \le \frac{1}{2^{\beta}}\left(\varphi^{p}(x,y)+\varphi^{p}(-x,-y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x, y \in X$. Από το Θεώρημα 4.2.5., υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση $A: X \to Y$ ώστε

$$\|A(x)-f_o(x)\| \le \frac{1}{4^{\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}2^{\beta np}\left(\varphi^{p}\left(0,\frac{x}{2^{n}}\right)+\varphi^{p}\left(0,\frac{-x}{2^{n}}\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x \in X$. Επίσης, $f_e(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, για κάθε $x \in X$. Τότε, $f_e(0)=0$, $f_e$ άρτια απεικόνιση και

$$\|Df_e(x,y)\| \le \frac{1}{2^{\beta}}\left(\varphi^{p}(x,y)+\varphi^{p}(-x,-y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x, y \in X$. Από το Θεώρημα 4.2.8, υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση $Q: X \to Y$ ώστε

$$\|Q(x)-f_e(x)\| \le \frac{1}{8^{\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}4^{\beta np}\left(\varphi^{p}\left(0,\frac{x}{2^{n}}\right)+\varphi^{p}\left(0,\frac{-x}{2^{n}}\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x \in X$. Επομένως θα έχουμε,

$$\|A(x)+Q(x)-f(x)\| \le \|A(x)-f_o(x)\|+\|Q(x)-f_e(x)\|$$

$$\le \frac{1}{4^{\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}2^{\beta np}\left(\varphi^{p}\left(0,\frac{x}{2^{n}}\right)+\varphi^{p}\left(0,\frac{-x}{2^{n}}\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{8^{\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}4^{\beta np}\left(\varphi^{p}\left(0,\frac{x}{2^{n}}\right)+\varphi^{p}\left(0,\frac{-x}{2^{n}}\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x \in X$. □

Ανάλογα με το Θεώρημα 4.2.11 έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 4.2.12.** *Έστω* $\varphi: X^2 \to [0,\infty)$ *συνάρτηση ώστε*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{\beta}}\right)^{np}\varphi^{p}\left(0,2^{n}x\right)<\infty \tag{29}$$

*και*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^\beta}\right)^n \varphi\left(2^n x, 2^n y\right) = 0$$

*για κάθε* $x, y \in X$ . *Αν επιπλέον* $f : X \to Y$ *είναι απεικόνιση με* $f(0) = 0$ *και*

$$\|Df(x,y)\| \le \varphi(x,y) \tag{30}$$

*για κάθε* $x, y \in X$ . *Τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση* $A: X \to Y$ *και μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q: X \to Y$ *τέτοιες ώστε,*

$$\|A(x)+Q(x)-f(x)\| \le \frac{1}{4^\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\beta np}}\left(\varphi^p\left(0,2^n x\right)+\varphi^p\left(0,-2^n x\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{8^\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{\beta np}}\left(\varphi^p\left(0,2^n x\right)+\varphi^p\left(0,-2^n x\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

*για κάθε* $x \in X$ .

*Απόδειξη*. Είναι $f_o(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, για κάθε $x \in X$ . Τότε, $f_o(0) = 0$, $f_o$ είναι περιττή απεικόνιση και

$$\|Df_o(x,y)\| \le \frac{1}{2^\beta}\left(\varphi^p(x,y)+\varphi^p(-x,-y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x, y \in X$ . Από τις σχέσεις (29) και (30) έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^\beta}\right)^{np}\varphi^p\left(0,2^n x\right) < \infty$ και $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^\beta}\right)^n\varphi\left(2^n x,2^n y\right)=0$ άρα ισχύουν οι αρχικές συνθήκες του Θεωρήματος 4.2.6. Οπότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση $A: X \to Y$ ώστε

$$\|A(x)-f_o(x)\| \le \frac{1}{4^\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\beta np}}\left(\varphi^p\left(0,2^n x\right)+\varphi^p\left(0,-2^n x\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x \in X$ . Επίσης, $f_e(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, για κάθε $x \in X$ . Τότε, $f_e(0) = 0$, $f_e$ άρτια απεικόνιση και

$$\|Df_e(x,y)\| \le \frac{1}{2^\beta}\left(\varphi^p(x,y)+\varphi^p(-x,-y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x, y \in X$ . Από το Θεώρημα 4.2.9, υπάρχει μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση $Q: X \to Y$ ώστε

$$\|Q(x)-f_e(x)\| \le \frac{1}{8^\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{\beta np}}\left(\varphi^p\left(0,2^n x\right)+\varphi^p\left(0,-2^n x\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x \in X$. Επομένως θα έχουμε,

$$\|A(x)+Q(x)-f(x)\| \le \|A(x)-f_o(x)\|+\|Q(x)-f_e(x)\|$$

$$\le \frac{1}{4^\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\beta np}}\left(\varphi^p\left(0,2^n x\right)+\varphi^p\left(0,-2^n x\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{8^\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{\beta np}}\left(\varphi^p\left(0,2^n x\right)+\varphi^p\left(0,-2^n x\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x \in X$. □

**Πόρισμα 4.2.13.** *Έστω* $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \ge 0$ *και* $\alpha \in (0,1)\cup(2,+\infty)$. *Αν* $X$ *σταθμητός χώρος με στάθμη* $\|\cdot\|$ *, και* $f: X \to Y$ *μια απεικόνιση που επαληθεύει την συναρτησιακή ανισότητα*

$$\|Df(x,y)\| \le \theta\left(\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha\right)$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *, τότε υπάρχει μοναδική προσθετική απεικόνιση* $A: X \to Y$ *και μοναδική δευτεροβάθμια απεικόνιση* $Q: X \to Y$ *τέτοιες ώστε*

$$\|A(x)+Q(x)-f(x)\| \le \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{p}}\theta\|x\|^\alpha}{2^\beta\left(4^{\beta p}-2^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}}+\dfrac{2^{\frac{1}{p}}\theta\|x\|^\alpha}{2^\beta\left(2^{\beta p}-2^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}}, & \alpha \in (0,1),\ \beta>\alpha \\ \dfrac{2^{\frac{1}{p}}\theta\|x\|^\alpha}{2^\beta\left(2^{\alpha p}-4^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}}+\dfrac{2^{\frac{1}{p}}\theta\|x\|^\alpha}{2^\beta\left(2^{\alpha p}-2^{\beta p}\right)^{\frac{1}{p}}}, & \alpha \in (2,+\infty) \end{cases}$$

*για κάθε* $x \in X$.

*Απόδειξη.* Στην περίπτωση $\alpha \in (0,1),\ \beta>\alpha$ από τα πορίσματα 4.2.7 και 4.2.10 και το συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.2.12 θέτοντας $\varphi(x,y)=\theta\left(\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha\right)$ έχουμε το ζητούμενο. Ανάλογα στην περίπτωση που $\alpha \in (2,+\infty)$, το Θεώρημα 4.2.11 για $\varphi(x,y)=\theta\left(\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha\right)$ μας δίνει το ζητούμενο. □

## 4.3 Fuzzy Stability (Ασαφής Ευστάθεια) μικτών συναρτησιακών ε- ξισώσεων

Η έννοια της ασαφούς στάθμης (fuzzy norm) σε γραμμικό χώρο παρουσιάστηκε από τον A.K.Katsaras, [46]. Ακολούθησαν οι S.C.Cheng, J.N. Mordeson που με την εργασία τους,[13], έδωσαν έναν νέο ορισμό της fuzzy στάθμης ώστε ο αντίστοιχος fuzzy μετρικός χώρος να είναι του τύπου που καθιέρωσαν οι I. Kramosil, J. Michalek, βλ. [48].

Πιο πρόσφατα, το 2008, οι A.K.Mirmostafaee, M.S. Moslehian[52,53] χρησιμοποιούν τον ορισμό που καθιερώθηκε στην εργασία T.Bag, S.K. Samanta[10] και αποδεικνύουν την ευστάθεια της συναρτησιακής εξίσωσης του Cauchy και της κλασικής δευτεροβάθμιας (quadratic) εξίσωσης. Η εργασία, των A. Najati and M.B. Moghimi,[56], ήταν από τις πρώτες μελέτες ευστάθειας μικτών συναρτησιακών εξισώσεων. Υιοθετώντας τον ορισμό των A.K.Mirmostafaee και M.S. Moslehian, σε αυτή την ενότητα γίνεται μελέτη της ευστάθειας Ulam-Hyers της μικτού τύπου συναρτησιακής εξίσωσης

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)-2f(y)+f(2y) \qquad (1)$$

σε χώρους fuzzy Banach. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η συνήθης τακτική στη μελέτη της ευστάθειας μικτών συναρτησιακών εξισώσεων, περιλαμβάνει το διαχωρισμό των περιπτώσεων η υπό εξέταση απεικόνιση να είναι άρτια ή περιττή. Στο πνεύμα των C.I.Kim, Y.S.Yun,[47] παρουσιάζουμε την ευστάθεια της (1) χωρίς την διάκριση των δύο περιπτώσεων.

**Ορισμός 4.3.1.** *Έστω* $X$ *πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μια συνάρτηση* $N : X\times\mathbb{R}\to[0,1]$ *λέγεται fuzzy norm (ασαφής στάθμη) στον* $X$ *αν για κάθε* $x,y\in X$ *και τυχαία* $s,t\in\mathbb{R}$ *, ισχύουν*

$(\mathrm{N}_1)$ $N(x,t)=0$ *για* $\mathrm{t}\geq 0$,

$(\mathrm{N}_2)$ $x=0$ *αν και μόνο αν* $N(x,t)=1$ *για κάθε* $t>0$,

$(\mathrm{N}_3)$ $N(cx,t)=N\left(x,\dfrac{t}{|c|}\right),\ c\neq 0$

$(\mathrm{N}_4)$ $N(x+y,s+t)\geq\min\{N(x,s),N(y,t)\}$,

($N_5$) $N(x,\cdot)$ *μια μη –αύξουσα συνάρτηση του* $\mathbb{R}$ *και* $\lim_{t\to\infty} N(x,t)=1$,

($N_6$) $N(x,\cdot)$ *συνεχής στο* $x$ *, για κάθε* $x \neq 0$.

*Το ζεύγος* $(X,N)$ *λέγεται fuzzy normed space (ασαφής σταθμητός χώρος).*

**Ορισμός 4.3.2.** *Έστω* $(X,N)$ *ασαφής σταθμητός χώρος. Μια ακολουθία* $\{x_n\}$ *στον* $X$ *λέγεται συγκλίνουσα στον* $(X,N)$ *αν υπάρχει ένα* $x \in X$ *τέτοιο ώστε* $\lim_{n\to\infty} N(x_n - x, t) = 1$ *για κάθε* $t > 0$. *Το* $x$ *καλείται το όριο της ακολουθίας* $\{x_n\}$ *στον* $X$ *και συμβολίζεται ως* $N - \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

**Ορισμός 4.3.3.** *Έστω* $(X,N)$ *ασαφής σταθμητός χώρος. Μια ακολουθία* $\{x_n\}$ *στον* $X$ *λέγεται Cauchy στον* $(X,N)$ *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *και κάθε* $t > 0$, *υπάρχει* $m \in \mathbb{N}$ *ώστε* $N(x_{n+p} - x_n, t) > 1-\varepsilon$, *για κάθε* $n \geq m$ *και* $p$ *θετικό ακέραιο.*

**Ορισμός 4.3.4.** *Ένας ασαφής σταθμητός χώρος (fuzzy normed space) λέγεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy σε αυτόν είναι συγκλίνουσα. Ο πλήρης ασαφής σταθμητός χώρος λέγεται ασαφής Banach χώρος (fuzzy Banach space).*

**Ορισμός 4.3.5**. *Έστω* $X$ *μη κενό σύνολο. Η απεικόνιση* $d : X^2 \to [0,+\infty]$ *λέγεται γενικευμένη μετρική στον* $X$ *αν η* $d$ *ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

$(D1)$ $d(x,y)=0$ *αν και μόνο αν* $x = y$

$(D2)$ $d(x,y)=d(y,x)$, *και*

$(D3)$ $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$.

*Το σύνολο* $X$ *εφοδιασμένο με την γενικευμένη μετρική* $d$ *λέγεται γενικευμένος μετρικός χώρος.*

Επίσης αναφέρουμε το γνωστό Θεώρημα *Margolis-Diaz.*

**Θεώρημα 4.3.6**. *Αν* $(X,d)$ *είναι ένας πλήρης γενικευμένος μετρικός χώρος και η απεικόνιση* $T : X \to X$ *είναι αυστηρά συστολή με σταθερά Lipschitz* $L$, *τότε για κάθε δοθέν στοιχείο* $x \in X$, *ισχύουν εναλλακτικά οι ακόλουθες*

$(B_1)$. $d(T^n x, T^{n+1}x) = \infty,\ \forall n \geq 0$ *ή*

$(B_2)$. *Υπάρχει φυσικός αριθμός* $n_0$ *ώστε:*

(1). $d(T^n x, T^{n+1}x) < \infty, \ \forall n \geq n_0$,

(2). *Η ακολουθία* $(T^n x)$ *συγκλίνει στο σταθερό σημείο* $y^*$ *της* $T$

(3). $y^*$ *είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της* $T$ *στο σύνολο*

$$Y = \{y \in X : d(T^{n_0} x, y) < \infty\}$$

(4). $d(y^*, y) \leq \dfrac{1}{1-L} d(y, Ty)$ *για κάθε* $y \in Y$.

Αποδεικνύουμε την γενικευμένη ευστάθεια Hyers-Ulam για την συναρτησιακή εξίσωση (1) σε fuzzy Banach χώρους. Υποθέτουμε ότι $X$ γραμμικός χώρος , $(Y, N)$ fuzzy Banach χώρος, και $(Z, N')$ fuzzy σταθμητός χώρος. Επίσης, για κάθε απεικόνιση $f : X \to Y$ το άρτιο και περιττό της μέρος ορίζονται ως γνωστόν ως

$$f_0(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \ f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Για κάθε απεικόνιση $f : X \to Y$, ορίζουμε τον τελεστή διαφοράς $Df : X^2 \to Y$ με

$$Df(x, y) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) + 2f(y) - f(2y)$$

για κάθε $x, y \in X$ .

Αποδείξαμε ήδη το Θεώρημα 4.2.3 βάσει του οποίου η (1) είναι μια προσθετική-δευτεροβάθμια απεικόνιση.

Το κύριο συμπέρασμα της ενότητας είναι το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.3.7**. *Έστω* $\varphi : X^2 \to Z$ *συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$N'\big(\varphi(x, y), t\big) \geq N'\left(\frac{L}{4}\varphi(2x, 2y), t\right) \tag{2}$$

*για κάθε* $x, y \in X$ , $t > 0$ *και τυχαίο αριθμό* $L$ *με* $0 < L < 1$. *Αν* $f : X \to Y$ *απεικόνιση ώστε* $f(0) = 0$ *και*

$$N\big(Df(x, y), t\big) \geq N'\big(\varphi(x, y), t\big) \tag{3}$$

*για κάθε* $x, y \in X$ *και για όλα τα* $t > 0$. *Τότε υπάρχει μοναδική μικτή(προσθετική-δευτεροβάθμια) απεικόνιση* $F : X \to Y$ *ώστε*

$$N\left(F(x) - f(x), \frac{L}{4(1-L)} t\right) \geq \min\big\{N'\big(\varphi(0, x), t\big), N'\big(\varphi(0, -x), t\big)\big\} \tag{4}$$

*για κάθε* $x \in X$ *και για όλα τα* $t > 0$.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το σύνολο $S = \{g \,/\, g : X \to Y\}$ και την γενικευμένη μετρική $d$ στον $S$ που ορίζεται ως εξής,

$$d(g,h) = \inf \left\{ \begin{matrix} c \in [0,\infty) \,/\, N\left(g(x) - h(x), ct\right) \ge \min\left\{N'\left(\varphi(0,x),t\right), N'\left(\varphi(0,-x),t\right)\right\}, \\ \forall x \in X, \forall t > 0 \end{matrix} \right\}.$$

Τότε ο $(S,d)$ είναι ένας γενικευμένος πλήρης μετρικός χώρος βλ. και [51].

Ορίζουμε την απεικόνιση $J : S \to S$ με

$$Jg(x) = 3g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(-\frac{x}{2}\right)$$

για κάθε $g \in S$ και $x \in X$. Αν $g,h \in S$ και $d(g,h) \le c$ για κάποιο $c \in [0,\infty)$, τότε από τη σχέση (2) έχουμε

$$\begin{aligned} N\left(Jg(x) - Jh(x), cLt\right) &= N\left(3g\left(\frac{x}{2}\right) - 3h\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(-\frac{x}{2}\right) - h\left(-\frac{x}{2}\right), cLt\right) \\ &\ge \min\left\{N\left(g\left(\frac{x}{2}\right) - h\left(\frac{x}{2}\right), \frac{cL}{4}t\right), N\left(g\left(-\frac{x}{2}\right) - h\left(-\frac{x}{2}\right), \frac{cL}{4}t\right)\right\} \\ &\ge \min\left\{N'\left(\varphi(0,x),t\right), N'\left(\varphi(0,-x),t\right)\right\} \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$ και όλα τα $t > 0$. Οπότε $d(Jg, Jh) \le L d(g,h)$ για οποιοδήποτε $g,h \in S$. Άρα η $J$ είναι απεικόνιση-συστολή.

Στη συνέχεια θέτουμε $x = 0$ και $y = x$ στην (3) οπότε

$$N\left(f(2x) - 3f(x) - f(-x), t\right) \ge N'\left(\varphi(0,x),t\right)$$

για κάθε $x \in X$ και $t > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} N\left(f(x) - Jf(x), \frac{L}{4}t\right) &= N\left(f(x) - 3f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right), \frac{L}{4}t\right) \\ &\ge N'\left(\varphi\left(0,\frac{x}{2}\right), \frac{L}{4}t\right) \ge N'\left(\varphi(0,x),t\right) \\ &\ge \min\left\{N'\left(\varphi(0,x),t\right), N'\left(\varphi(0,-x),t\right)\right\} \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$ και $t > 0$. Έτσι, $d(f, Jf) \le \frac{L}{4} < \infty$.

Από το Θεώρημα 4.3.6., υπάρχει μια απεικόνιση $F : X \to Y$ που είναι ένα σταθερό σημείο της $J$ ώστε $d(J^n f, F) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Επαγωγικά, υπάρχουν ακολουθίες $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ στον $\mathbb{R}^+$ ώστε

$$J^n f(x) = x_n f\left(\frac{x}{2^n}\right) - y_n f\left(-\frac{x}{2^n}\right)$$

για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, όπου

$$\begin{cases} 3x_n + y_n = x_{n+1} \\ x_n + 3y_n = y_{n+1} \end{cases} \tag{5}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$F(x) = N - \lim_{n\to\infty}\left[x_n f\left(\frac{x}{2^n}\right) - y_n f\left(-\frac{x}{2^n}\right)\right] \tag{6}$$

για κάθε $x \in X$. Από την (5) έχουμε, $2(x_n - y_n) = x_{n+1} - y_{n+1}$ και $4(x_n + y_n) = x_{n+1} + y_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και λόγω της (6) είναι,

$$F_e(x) = N - \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) f_e\left(\frac{x}{2^n}\right) = N - \lim_{n\to\infty} 2^{2n} f_e\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$F_o(x) = N - \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) f_o\left(\frac{x}{2^n}\right) = N - \lim_{n\to\infty} 2^n f_o\left(\frac{x}{2^n}\right) \tag{7}$$

για κάθε $x \in X$. Αντικαθιστώντας τα $x, y$ με $\frac{x}{2^n}, \frac{x}{2^n}$ αντίστοιχα στην (3) και λόγω της (2) έπεται ότι

$$\begin{aligned} N\left(Df_e\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right), \frac{t}{2^n}\right) &\geq \min\left\{N\left(Df\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right), \frac{t}{2^n}\right), N\left(Df_e\left(-\frac{x}{2^n}, -\frac{y}{2^n}\right), \frac{t}{2^n}\right)\right\} \\ &\geq \min\left\{N'\left(\varphi\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right), \frac{t}{2^n}\right), N'\left(\varphi\left(-\frac{x}{2^n}, -\frac{y}{2^n}\right), \frac{t}{2^n}\right)\right\} \\ &\geq \min\left\{N'\left(\varphi(x, y), \frac{2^n}{L^n} t\right), N'\left(\varphi(-x, -y), \frac{2^n}{L^n} t\right)\right\} \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in X$, $t > 0$, και $n \in \mathbb{N}$.

Αν στην τελευταία ανισότητα $n \to \infty$, τότε $F_e$ είναι λύση της συναρτησιακής εξίσωσης (1).Ομοίως και η $F_o$ είναι λύση της (1). Επομένως και η $F = F_e + F_o$ επαληθεύει την (1), δηλαδή είναι μικτή απεικόνιση λόγω και του Θεωρήματος 4.2.3. Εφόσον $d(f, Jf) \leq \frac{L}{4}$ από το Θεώρημα Margolis-Diaz συμπεραίνουμε την ανισότητα (4).

Η απόδειξη της μοναδικότητας της $F$ αποδεικνύεται εύκολα αν υποθέσουμε την ύπαρξη μιας άλλης μικτής απεικόνισης $H$, για την οποία ισχύει η (4). Τότε η $H$ είναι ένα σταθερό σημείο της $J$ και

$$d(Jf,H) = d(Jf,JH) \le Ld(f,H) \le \frac{L^2}{4(1-L)} < \infty$$

Οπότε από το Θεώρημα Margolis-Diaz, έπεται ότι $F = H$. $\square$

# Κεφάλαιο 5

# Συμπεράσματα

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα συμπεράσματα της ερευνητικής αυτής εργασίας στα ακόλουθα σημεία: Η εύρεση νέων συναρτησιακών εξισώσεων πολυωνυμικού τύπου και η εξέταση της ευστάθειάς τους ή μη-ευστάθειας τους κατά Hyers-Ulam-Rassias και Ulam-Gavruta-Rassias. Η μελέτη της ευστάθειάς τους γίνεται με τις δύο πιο γνωστές και καθιερωμένες μεθόδους ευστάθειας. Οι τετραγωνικές, οι κυβικές καθώς και οι τετάρτου βαθμού εξισώσεις αποτελούν τις κύριες συναρτησιακές εξισώσεις στη βιβλιογραφία, των οποίων μελετάται η ευστάθεια και με βάση αυτές δημιουργούνται μικτές συναρτησιακές εξισώσεις. Επίσης, δίνεται ενδελεχή απάντηση σε ανοικτό πρόβλημα που έχει τεθεί για μια τετάρτου βαθμού συναρτησιακή εξίσωση (παράγραφος 3.3), σε non- Archimedean χώρους και με τις δύο μεθόδους. Επιπλέον, η εργασία παρουσιάζει, ως ένας συνοπτικός οδηγός μελέτης και μεθοδικότητας, τις διάφορες πτυχές του προβλήματος της ευστάθειας Ulam, εισάγοντας τον αναγνώστη στο πεδίο της μη γραμμικής Ανάλυσης.

Επιπλέον στα ανοικτά προβλήματα που δημιουργούνται ως απότοκο της ερευνητικής εργασίας συγκαταλέγεται η μελέτη των νέων συναρτησιακών εξισώσεων που προκύπτουν, παραμετροποιώντας τις ευρεθείσες εξισώσεις, ως προς την ευστάθεια τους και η ανακάλυψη του τρόπου γενικής λύσης μιας συναρτησιακής εξίσωσης $n$ βαθμού και την μεθόδευση της εύρεσης συνθηκών ευστάθειάς της με βάση τους γενικούς τύπους που παρουσιάζονται στο πρώτο κεφάλαιο. Επίσης, χρήση αλγεβρικών ή γεωμετρικών αλγεβρικών ταυτοτικών σχέσεων για την δημιουργία και εξέταση της ύπαρξης λύσης της ανάλογης συναρτησιακής εξίσωσης. Σημαντική πρόκληση είναι και η μελέτη της ευστάθειας μικτής συναρτησιακής εξίσωσης Additive-Quadratic-Cubic-Quartic-Quintic(AQCQQ) και η εξέταση της ευστάθειας σε ένα μεγάλο μέρος σταθμητών χώρων που αναφέρονται στο πρώτο κεφάλαιο. Όπως και η χρήση των δύο άλλων δευτερευόντων μεθόδων ευστάθειας (shadowing method, method of invariant means) στην εξασφάλιση συνθηκών ευστάθειας.

# Αναφορές


[1] J.Aczel, J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables,* Cambridge University Press (1989).

[2] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, G.A.Ashry *On applications of Ulam-Hyers stability in biology and economics*- arXiv preprint arXiv:1004.1354, (2010).

[3] D. J.Albers, G. L. Alaxanderson, editors: *Mathematical People, Profiles and Interviews*, Birkhauser, Boston, 1985.

[4] T.Aoki, *On the stability of the linear transformation in Banach spaces,* J. Math. Soc. Japan 2 (1950), 64-66.

[5] M.Arunkumar, *Stability of a functional equation in dq-normed space*, International Journal of Pure-Applied Mathematics, 57(2009), 241-250.

[6] M.Arunkumar, K. Ravi, M.J.Rassias, *Stability of a quartic and orthogonally quartic functional equation*, Bull. Math. Analysis Appl., Vol. 3, Issue 3 (2011), 13-24.

[7] M.Arunkumar, C.Devi Shyamala Mary, *Solution and generalized Ulam - Hyers stability of a cubic functional equation*, Proceedings of the "Heber International Conference on Applications of Mathematics and Statistics", (2012), 46-55.

[8] M.Arunkumar and J.M.Rassias, *On the generalized Ulam-Hyers stability of an AQ-mixed type functional equation with counter examples*, Far East Journal of Applied Mathematics, 71(2)(2012), 279-305.

[9] M. Arunkumar, S.Hema Iatha, C. Devi Shaymala Mary, *Functional equation originating from arithmetic mean of consecutive terms of an arithmetic progression are stable in Banach space: Direct and fixed point method*, JP Journal of Mathematical Sciences, 3(1) (2012), 27-43.

[10] T.Bag, S.K.Samanta , *Finite dimensional fuzzy normed linear space*, J. Fuzzy Math., 3 (2003), 687-705.

[11] C. Borelli, G.L.Forti, *On a general Hyers-Ulam stability result*, Int. J. Math. Math. Sci. 18 (1995), 229-236.

[12] L. Cadariu, V. Radu, *On the stability of the Cauchy functional equation: a fixed point approach*, Grazer Math. Ber.346 (2004), 43–52.

[13] S.C.Cheng, J.N. Mordeson, *Fuzzy linear operator and fuzzy normed linear spaces*, Bull. Calcutta Math. Soc., 86 (1994), 429-436.

[14] Y. J. Cho, Th. M. Rassias, and R. Saadati, *Stability of Functional Equations in Random Normed Spaces*, Springer, 2013.

[15] Y. J. Cho, C. Park, Th. M. Rassias, and R. Saadati, *Stability of Functional Equations in Banach Algebras*, Springer, 2015.

[16] P.W.Cholewa, *Remarks on the stability of functional equations*, Aequationes Math. 27, (1984), 76-86.

[17] J. Chung, Yu-Min Ju, *Stability of a Quartic Functional Equation in Restricted Domains*, Journal of Function Spaces, vol. 2016, Article ID 1804206, 7 pages, 2016. doi:10.1155/2016/1804206.

[18] V. Covindan, S. Murthy, M. Arunkumar, *Generalized Hyers-Ulam-Rassias stability of new Leibniz type of n-dimensional quartic functional equation in Quasi-Beta normed space: Direct and Fixed point methods*, Int. J. Appl. Math. Sci., Vol. 9, Number 2 (2016), 125-140.

[19] S.Czerwik, *On the stability of the mapping in normed spaces*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 62, (1992), 59-64.

[20] Czerwik S., *Functional Equations and Inequalities in Several Variables*, Worlds Scientific Publ. Co., 2002.

[21] P. Enflo, M.Moslehian, *An interview with Themistocles M. Rassias*, Banach J. Math. Anal. 1 no. 2(2007), 252–260.

[22] G.L. Forti, *Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables*, Aequationes Mathematicae 50 (1995), 143-190.

[23] G.L.Forti, *Comments on the core of the direct method for proving Hyers-Ulam stability of functional equations*, J. Math. Anal. Appl. 295(1) (2004) 127–133.

[24] G.L.Forti, *Elementary remarks on Ulam-Hyers stability of linear functional equations*, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007) 109–118.

[25] G.L.Forti, (2015). *A comparison among methods for proving stability*. Proceedings of the 53rd International Symposium in Functional Equations, Poland.

[26] Z. Gajda, *On the stability of additive mappings*, Inter. J. Math. Sci.,14(1991), 431-434.

[27] P.Gavruta, *A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 184 (1994), 431-436.

[28] P.Gavruta, *A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 184 (1994), 431-436.
[29] P.Gavruta, M.Hossu, D.Popescu, C.Caprau, *On the Stability of Mappings and an answer to a problem of Th.M.Rassias*, Ann. Math. Blaise Pascal, Vol.2, No.2,(1995),55-60.
[30] M.E.Gordji, H. Khodaei, *On the generalized Hyers-Ulam-Rassias Stability of Quadratic Functional Equations*, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2009, Article ID 923476, 11 pages, doi:10.1155/2009/923476.
[31] M.E. Gordji, N.Ghobadipour, J. M.Rassias, *Fuzzy stability of additive-quadratic functional Equations*, arXiv:0903.0842v1 [math.FA] 4 Mar 2009.
[32] D.H.Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Natl. acad. Sci. USA 27 (1941), 222-224.
[33] D.H.Hyers, Th.M. Rassias, *Approximate homomorphisms*, Aequationes Math. 44,(1992) 125-153.
[34] D.H.Hyers, G. Isac and Th.M.Rassias, *Stability of functional equations in several variables*, Birkhauser, Basel, 1998.
[35] G. Isac, Th.M.Rassias, *On the Hyers-lam stability of U-addiditive mappings*, Journal of Approximation Theory 72, (1993),131-137.
[36] G. Isac, Th.M.Rassias, *Stability of U-additive mappings: Applications to nonlinear analysis*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 19(2), (1996),219-228.
[37] K.W.Jun, H.M.Kim, *The generalized Hyers-Ulam-Rassias stability of a cubic functional equation*, J. Math. Anal.Appl., 274(2002), 867-878.
[38] K. Jun, H. Kim ,I. Chang, *On the Hyers-Ulam stability of an Euler-Lagrange type cubic functional equation*, J. Comput. Anal. Appl., 7 (2005) 21–33.
[39] K..Jun, H.M.Kim, *On the Hyers-Ulam-Rassias stability of a generalized quadratic and additive type functional equation*, Bull. Korean Math. Soc.,42(1)(2005), 133-148.
[40] K.W. Jun, H.M.Kim, J.Son, *Generalized Hyers-Ulam Stability of a Quadratic Functional Equation*, in Th.M. Rassias and J.Brzdek(eds.), Functional Equations in Mathematical Analysis, (2012), 153-164,Springer Optimization and Its Applications 52, DOI 10.1007/978-1-4614-0055-4_12.

[41] S.M. Jung, *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Mathematical Analysis*, Hardonic Press Inc., 2001.

[42] S. M. Jung, *Hyers-Ulam-Rassias Stability of functional equations in nonlinear analysis*, Springer Verlag, 2011.

[43] Y.S.Jung and I.S.Chang, *The stability of a cubic type functional equation with the fixed point alternative*, J. Math. Anal. Appl., 306(2005), 752-760.

[44] Kannappan, *Quadratic functional equation and inner product spaces*, Results Math., 27 (1995),368-372.

[45] Pl. Kannappan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer, 2009.

[46] A.K.Katsaras, *Fuzzy topological vector spaces*, Fuzzy Sets Syst,12(1984),143-154.

[47] C.I.Kim,Y.S.Yun, *Fuzzy stability of Quadratic-Cubic functional equations*, East Asian Math. J. Vol. 32 No.3,(2016), 413-423.

[48] I. Kramosil, J. Michalek, *Fuzzy metric and statistical metric spaces*, Kybernetica, 11 (1975),336-344.

[49] N.Lungu,S.A. Ciplea, *Ulam-Hyers stability of Black-Scholes equation*, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 61,4 (2016),467-472.

[50] B. Margolis-J.B.Diaz, *A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space*, Bull. Amer. Math. Soc., 126 (74) (1968), 305-309.

[51] D. Mihet_, V. Radu, *On the stability of the additive Cauchy functional equation in random normed spaces*, J.Math. Anal. Appl., 343 (2008), 567-572.

[52] A.K.Mirmostafaee, M.S.Moslehian *Fuzzy almost quadratic functions*, Results Math., 52 (2008), 161-177.

[53] A.K.Mirmostafaee, M.S.Moslehian, *Fuzzy versions of Hyers-Ulam-Rassias theorem*, Fuzzy Sets Systems, 159 (2008), 720-729.

[54] R. Murali, A. Raj, M.Boobalan, *Hyers-Ulam stability of quartic functional equation in matrix paranormed spaces*, Int. J. Math. Appl.,Vol. 4, Issue 1-B (2016), 81-86.

[55] S.Murthy, M.Arunkumar, G.Ganapathy and P.Rajarethinam, *Stability of mixed type additive quadratic functional equation in Random Normed space*, International Journal of Applied Mathematics, 26(2)(2013), 123-136.

[56] A. Najati and M.B. Moghimi,*Stability of a functional equation deriving from quadratic and additive functions in quasi-Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 337 (2008), 399-415.

[57] P.A.Pallas, *On the generalized Hyers-Ulam stability of an Euler-Lagrange type quadratic functional equation*, Far East Journal of Mathematical Sciences, Vol.101, Number 10, (2017), 2173-2184.

[58] Π.Α.Πάλλας, *Το πρόβλημα ευστάθειας του Ulam.( Hyers-Ulam-Rassias Stability problem) Ένα γενεσιουργό πρόβλημα της Συναρτησιακής Ανάλυσης*, Μαθηματική Επιθεώρηση, υπό έκδοση.

[59] C.Park, *Fixed Points and the Stability of an AQCQ-Functional Equation in Non-Archimedean Normed Spaces*, Abstract and Applied Analysis, 2010(2010), Article ID 849543.

[60] C. Park, S. Kim, *Fixed points and quadratic ρ-functional equations*, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2016), 1858-1871.

[61] C.Park, S.Y.Jang, J.R.Lee and Dong Yun Shin, *A Fixed point approach to the stability of an AQCQ-functional equation in RN-spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl., 9(2016), 1787-1806.

[62] V. Radu, *The fixed point alternative and the stability of functional equations,* Fixed Point Theory 4, (2003),no 1, 91-96.

[63] J.M.Rassias, *On approximation of approximately linear mappings by linear mappings*, J. Functional Analysis ,46 (1982), 126-130.

[64] J.M. Rassias, *On approximation of approximately linear mappings by linear mappings,* Bulletin of Science and Mathematics, 108 (1984),445-446.

[65] J. M. Rassias, *On a new approximation of approximately linear mappings by linear mappings* , Discuss. Math. 7 (1985), 193-196.

[66] J.M.Rassias, *Solution of a problem of Ulam,* J. Approx. Theory 57 (1989), 268-273.

[67] J. M. Rassias, *Solution of a stability problem of Ulam* ,Discuss. Math. 12 (1992), 95-103.

[68] J.M. Rassias, *On the Stability of the Euler-Lagrange functional equation*, Chinese Journal of Mathematics 20 (1992),185-189.

[69] J.M. Rassias, *Complete Solution of the multi-dimensional problem of Ulam*, Discuss. Math. 14 (1994), 101-107.

[70] J. M. Rassias, *On the stability of a multi-dimensional Cauchy type functional equation*, Geometry, Analysis and Mechanics, World Sci. Publ., (1994),365-376.
[71] J.M.Rassias, *S.Banach, A. Ostrowski, S.Ulam*. In J.M.Rassias (Ed.), Functional Analysis, Approximation Theory and Numerical Analysis (pp.1-3). World Scientific Publications Co. 1994.
[72] J.M. Rassias, *On the Stability of the general Euler-Lagrange functional equation*, Demonstratio Math. 29 (1996), 755-766.
[73] J.M. Rassias, *Solution of the Ulam Stability problem for Euler-Lagrange quadratic mappings*, Journal of Math. Analysis and Applications 220 (1998), 613-639.
[74] J.M. Rassias, *Solution of the Ulam Stability problem for Quartic Mappings*, Glasnik Matematicki 34 (1999),243-252.
[75] J.M. Rassias, *Solution of the Ulam Stability problem for Cubic Mappings*, Glasnik Matematicki 36 (2001), 63-72.
[76] J.M. Rassias, *On the Hyers-Ulam Stability problem for quadratic multi-dimensional Mappings*, Aequationes Math. 64 (2002), 62-69.
[77] J.M. Rassias, *Solution of a Quadratic Stability Ulam type problem,* Archivum Mathematicum 40 (2004),1-16.
[78] J.M. Rassias, *On the General Quadratic Functional Equation,* Bol.Soc.Mat.Mexicana 3 Vol.11, (2005),259-268.
[79] J.M. Rassias, *On the Ulam Problem for Euler Quadratic Mappings*, NoviSad J. Math. 35 (2005), 57-66.
[80] J.M. Rassias, *On the Ulam Problem for Euler Quadratic Mappings*, NoviSad J. Math. 35 (2005), 57-66.
[81] J.M. Rassias and M.J. Rassias, *The Ulam Problem for 3-Dimensional Quadratic Mappings,* Tatra Mt. Mathematical Publications 32 (2006), 1-5.
[82] J.M. Rassias, *Refined Hyers-Ulam Approximation of Approximately Jensen type Mappings,* Bulletin Des Sciences Mathematiques 131 (2007), 89-98.
[83] J.M. Rassias, J.Lee, H. Kim, *Refined Hyers- Ulam Stability for Jensen type mappings,* Journal of the Chungcheong Mathematical Society 22 (2009),101-116.
[84] J.M.Rassias, H.M.Kim,*Generalized Hyers-Ulam stability for additive functional equations in quasi-* $\beta$ *-normed spaces,*J. Math.Anal. Appl.,356 (2009), 302-309.

[85] J.M.Rassias ,*On eight quartic functional equations in various generalized normed spaces,* European Journal of Pure and Applied Mathematics, (2012),1-16.
[86] J.M.Rassias, M.Arunkumar, S. Karthikeyan, *Stability of a quadratic functional equation originating from the sum of the medians of a triangle in fuzzy ternary Banach Algebras: Direct and fixed point methods,* IJMA, Vol.3, Issue4-A (2015), 45-64.
[87] M. J.Rassias, M.Arunkumar and E.Sathya, *Stability of a k- cubic functional equation in Quasi - beta normed spaces:direct and Fixed point methods*, British Journal of Mathematics and Computer Science, 8(5)(2015), 346-360.
[88] J.M.Rassias, M. Arunkumar, P.Agilan, *Solution and Ulam-Hyers Stability of an Additive-Quadratic Functional Equation in Banach Space: Hyers Direct and Fixed Point Methods,* Int. J. Math. Appl., Vol. 3, Issue 4-D (2015), 17-46.
[89] J.M.Rassias, R. Murali, M.J.Rassias, A.Raj, General solution, stability and non stability of quattuorvigintic functional equation in multi Banach spaces, Int. J. Math. Appl., Vol. 5, Issue 2-A (2017), 181-194.
[90] J.M.Rassias, M. J. Rassias, M. Arunkumar and E. Sathya, *a-cubic and b-cubic Functional Equations*, Int. J. Math. Appl., Vol. 5, Issue 3-C (2017), 215-231.
[91] J.M.Rassias, E.Thandapani, K.Ravi, B.V. Senthil Kumar, *Functional Equations and Inequalities, Solutions and Stability Results*, World Scientific, 2017.
[92] Th.M.Rassias, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 297-300.
[93] Th.M.Rassias, P. Semrl, *On the behaviour of mappings which do not satisfy Hyers-Ulam stability*, Proc.Amer.Math.Soc.,Vol.114, No.4, (1992), 989-993.
[94] Th.M.Rassias, *On the Stability of functional equations and a problem of Ulam*, Acta Applicandae Mathematicae, 62 (2000), 23-130.
[95] K.Ravi, J.M.Rassias, P.Narasimman, *Stability of a cubic functional equation in fuzzy normed spaces*, Journal of Applied Analysis and Computation, (2011),411-425.
[96] F. Skof, *Proprieta' locali e approssimazione di operatori*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 53 (1983).
[97] L. Székelyhidi, *The stability of linear functional equations*, C. R. Math.Rep. Acad. Sci. Canada 3(1981), 63-67.
[98] J.Tabor, J.Tabor, *General stability of functional equations in linear type*, Journal of Mathematical Analysis and applications 328(1), (2007), 192-200.
[99] S.M. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Publishers, Inc., New York ,1960.

[100] L.G.Wang, B.Liu, *The Hyers-Ulam stability of a functional equation deriving from quadratic and cubic functions in quasi-$\beta$ normed spaces*, Acta Mathematica Sinica, Vol.26, No.12 (2010), 2335-2348.

[101] A. Witwatwanich, P.Nakumhachalasint, *On the stability of a cubic functional equation*, Thai Journal of Mathematics, Special Issue (2008), 69-76.

[102] K.Wongkum, P. Kunam and P. Chaipunga, *On the generalized Ulam-Hyers-Rassias, stability for quartic functional equation in modular spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl., (2015),1-10.

[103] Zivari-Kazempour, Gordji, *Generalized Hyers-Ulam Stabilities of an Euler-Lagrange-Rassias Quadratic Functional Equation*, Asian-European Journal of Mathematics, Vol.5, No. 1 (2012) 1250014 (7 pages).

[104] Zivari-Kazempour, *On the Generalized Hyers-Ulam Stability for Euler-Lagrange type functional equation*, Int. J. Pure and Applied Math., Vol. 91, No.1, (2014), 49-55.