ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμημα Μαθηματικων

Τμημα Μεθοδολογιας Ιστοριας και Θεωριας της Επιστημης

Τμημα Φιλοσοφιας - Παιδαγωγικων –Ψυχολογιας

Τμημα Μαθηματικων και Στατιστικης

Τμημα Επιστημων Αγωγης

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Όψεις της μαθηματικής επίγνωσης σχετικά με την απόδειξη στην Άλγεβρα του Λυκείου

ΜΑΝΤΖΙΟΥ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΑΜ Δ201603

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΠΥΡΟΥ

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΪΟΣ 2019

Όψεις της μαθηματικής επίγνωσης σχετικά με την απόδειξη στην Άλγεβρα του Λυκείου

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την **14η Μαΐου 2019** από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪	Χ. Τριανταφύλλου	Επικ. Καθηγήτρια
▪	Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	π. Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Χ. Τριανταφύλλου	Επικ. Καθηγήτρια
▪	Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	π. Αναπλ. Καθηγητή
▪	Α. Μούτσιο-Ρέντζο	Δρ. στη Διδακτική των Μαθηματικών

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα μου κ. Παναγιώτη Σπύρου για την νέα οπτική που μου προσέφερε για τη Διδακτική των Μαθηματικών και το ότι διεύρυνε τους πνευματικούς μου ορίζοντες.
- Τον κ. Ανδρέα Μούτσιο-Ρέντζο για την πολύτιμη βοήθειά του, το χρόνο που αφιέρωσε, την υπομονή και κατανόηση, τη στήριξη και γενικότερα τις συμβουλές του για την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.
- Την κυρία Χ.Τριανταφύλλου, που με τίμησε με τη συμμετοχή της στη συμβουλευτική επιτροπή.
- Τον κύριο Θ.Ζαχαριάδη, που με τίμησε με την παρουσία του στην εξεταστική επιτροπή.
- Τον κύριο Ε.Ράπτη, ως υπεύθυνο σπουδών μου.
- Όλους τους διδάσκοντες και τις διδάσκουσες του μεταπτυχιακού προγράμματος, για τις γνώσεις κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.
- Την κ. Κλη για την άψογη συμπεριφορά της, την πρόθυμη βοήθεια που προσέφερε σε οτιδήποτε χρειάστηκα και την κ. Μπακογιάννη για τη βοήθεια και ευγένειά της.
- Το Νίκο που ήταν πάντα πρόθυμος να προσφέρει τη βοήθεια και στήριξή του σε οτιδήποτε χρειάστηκα.
- Την Έλενα, για τις εμπειρίες που μοιραστήκαμε κατά τη διάρκεια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος, τη στήριξη, ενθάρρυνση και φιλία που μου προσέφερε.
- Την οικογένεια μου, που με στηρίζει σε κάθε μου εγχείρημα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μελέτη διερευνάται η επίγνωση των μαθητές/τριών της Α΄ Λυκείου σχετικά με το ρόλο και τις λειτουργίες της απόδειξης στα μαθηματικά, όπως αυτή εμφανίζεται στο μάθημα της Άλγεβρας. Στόχος της έρευνας είναι να μελετηθεί το πώς αποτυπώνεται η επίγνωση για την απόδειξη, ποια η σχέση της με διαφορετικούς τύπους αποδείξεων και αποδεικτικών επιχειρημάτων και ποιες οι ποιοτικές διαφοροποιήσεις στην επίγνωση μαθητών και μαθητριών υψηλής επίδοσης στην απόδειξη. Επικεντρωνόμαστε στην επίγνωση των παιδιών για τις δικές τους γνώσεις για την αποδεικτική διαδικασία και προϊόν, καθώς και στην εφαρμογή αυτής της γνώσης στον έλεγχο αποδείξεων και αποδεικτικών διαδικασιών από τους ίδιους. Θα μελετηθούν οι αποφάσεις και οι πράξεις των παιδιών σε σχέση με τις ανάγκες και τους στόχους τους στην απόδειξη, ως εντοπισμός των ευρύτερων θεωρήσεων τους για τα μαθηματικά. Για την παραπάνω διερεύνηση πραγματοποιήθηκε εμπειρική έρευνα με μικτή μεθοδολογία που περιλάμβανε ένα ερωτηματολόγιο με οκτώ μέρη για τους μαθητές/τριες της Α΄ Λυκείου. Τα μέρη του ερωτηματολογίου εξέταζαν την αυτό-αποτελεσματικότητα (self-efficacy) των μαθητές/τριών για τα Μαθηματικά και την απόδειξη, τις απόψεις και στάσεις τους για τα Μαθηματικά και τη μαθηματική τους ταυτότητα. Σε συνδυασμό με τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου, πραγματοποιήθηκαν τρεις συνεντεύξεις σε επιλεγμένους μαθητές και μαθήτριες (βάσει εννοιακών και στατιστικών κριτηρίων) ώστε να ερμηνευτούν τα διαφορετικά χαρακτηριστικά τους συναρτήσει των δομικών συστατικών της επίγνωσης. Τα αποτελέσματα κατέδειξαν συγκλίσεις και αποκλίσεις με την υπάρχουσα βιβλιογραφία και αναδείχθηκε η πολυπλοκότητα της έννοιας της μαθηματικής επίγνωσης, που δε θα φαινόταν αν περιοριζόμασταν στη συλλογή ποσοτικών δεδομένων.

Λέξεις-κλειδιά: επίγνωση, λειτουργίες απόδειξης, μετά- γνώση, μετά- θυμικό

ABSTRACT

In the present study the awareness of the students of the first grade of Lyceum is investigated, with regards to the role and functions of mathematical proof, as shown by the course of Algebra. The research aim is to study how awareness of proof is impressed, what's the relationship between awareness and different types of proofs and proving arguments and what are the quantitative differences in the awareness of students with high performance. We focus on awareness of children about their own knowledge of proving process and proof as a product, as well in the application of this knowledge in regulation of proofs and proving processes by themselves. Decisions and actions of children will be studied in relation to the needs and goals of proof, as identification of the broader considerations about mathematics. For the above investigation empirical research was conducted, with mixed methodology included an eight-part questionnaire for students of the first grade of Lyceum. The parts of the questionnaire examined students' mathematical self-efficacy, proof self-efficacy, their attitudes and values in mathematics and their mathematical identity. In conjunction with the completion of the questionnaire, three interviews were conducted, to selected students (based on conceptual and statistical criteria) to interpret the different characteristics of the function of the structural components of awareness. The results showed convergences and divergences with literature and highlighted the complexity of the concept of mathematical awareness, which it wouldn't be appeared if we were limited to the collection of quantitative data.

Key-words: awareness, functions of proof, meta-cognition, meta-affect

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλοί ερευνητές δίνουν κατά καιρούς ορισμούς για τη γνώση και προσπαθούν να τη διακρίνουν σε επιμέρους κατηγορίες. Ο Dubinsky αναφέρει ότι ένα άτομο μπορεί να έχει «γνώσεις» με την έννοια, ότι έχει επιλέξει να κρατήσει κάποια πράγματα στο μυαλό του και να τα χρησιμοποιήσει όποτε χρειαστεί. Σε πολλούς ανθρώπους όμως, συμβαίνει συχνά να μη μπορούν να θυμηθούν κάτι, τη στιγμή που το χρειάζονται. Έχουν δηλαδή τη συγκεκριμένη γνώση, που χρειάζεται εν μέσω κάποιου γεγονότος, αλλά δεν έρχεται στη μνήμη τους. Ο Whitehead (1932, σελ. 1-2) καλεί μια τέτοια γνώση «αδρανή» και θεωρεί ότι είναι το βασικό πρόβλημα της διδακτικής. Υπάρχουν διάφοροι βαθμοί αδράνειας και μπορεί να εξαρτώνται από το περιεχόμενο ή από το πόσο πρόσφατα αποκτήθηκε ή εφαρμόστηκε η γνώση.

Ο Mason (1998) ορίζει ως επίγνωση, «μια σύνθετη έννοια, που αποτελείται από συνειδητές και ασυνείδητες δυνάμεις και ευαισθησίες, που επιτρέπουν στους ανθρώπους να δρουν άμεσα και δημιουργικά μέσα σε μια στιγμή» (σελ. 1). Αναπτύσσεται ένας «εσωτερικός μάρτυρας», που παρατηρεί και αποτελεί στοιχείο της επίγνωσης. Ο Schoenfeld (1985) τον αποκαλεί «σύμβουλο» ενώ οι Mason, Burton και Stacey (1984) «εσωτερικό επόπτη». Σχετικά με την επίγνωση στον τομέα των Μαθηματικών, είναι σαν να έχουμε ένα μαθηματικό σύμβουλο και να θέτει στο μυαλό μας ερωτήσεις: ‘γιατί το κάνω τώρα αυτό;’, ‘υποτίθεται ότι πρέπει να είναι τόσο περίπλοκο;’, ‘μήπως έκανα κάποιο λάθος;’. Αυτός ο σύμβουλος είναι μάρτυρας της επίγνωσης. Κοιμάται, ξυπνάει και αναπτύσσεται με την πάροδο του χρόνου με συνέπεια την ανάπτυξη της ίδιας της επίγνωσης.

Στην έρευνά του ο Mason (1998) συνδέει την επίγνωση με τη διδασκαλία και υποστηρίζει ότι το να γίνει κάποιος πραγματικός διδάσκων περιλαμβάνει την ανάπτυξη και τελειοποίηση της σύνθετης έννοιας της επίγνωσης σε τρία επίπεδα, σε συνδυασμό με εναλλαγές στο βαθμό προσοχής. Ένας μαθητής/τρια δε μπορεί να προσέξει κάτι που για έναν καθηγητή είναι προφανές στα Μαθηματικά, όπως μια απλοποίηση, ένας κοινός παράγοντας ή η κατασκευή μιας επιπλέον ευθείας σε ένα σχήμα. Αν ένας μαθητής/τρια δεν ξέρει τι πρέπει να δει κατά την ενασχόλησή του με ένα μαθηματικό task, δεν πρόκειται να το δει. Για να τα καταφέρει πρέπει να έχει ένα επίπεδο επίγνωσης. Ο Mason υποστηρίζει ότι η πραγματική διδασκαλία αυτής της επίγνωσης βασίζεται σε δύο έννοιες-κλειδιά, στο βαθμό της προσοχής και τη φύση της επίγνωσης.

Για να είναι αποτελεσματικός ένας καθηγητής πρέπει να είναι πρώτα ικανός να αντιληφθεί τη διεξαγωγή του μαθήματος, αλλά να έχει και την επίγνωση της διαδικασίας της διεξαγωγής του μαθήματος. Χωρίς την πρώτη επίγνωση είναι ικανός να διδάξει τεχνικές και να οδηγήσει τους μαθητές/τριες στην επίλυση προβλημάτων ρουτίνας, χωρίς όμως να αναδεικνύει τις ιδέες της διδασκαλίας. Χωρίς τη δεύτερη επίγνωση μπορεί να είναι ένας εξαιρετικός Μαθηματικός, κουραστικός και απογοητευτικός όμως για αυτούς, που δε μπορούν να συμβαδίσουν με τη διδασκαλία του. Η απόκτηση μίας εκ των δύο ειδών επίγνωσης της διδασκαλίας μοιάζει με το περπάτημα στο ένα πόδι: είναι ασταθής. Πραγματικές πιθανότητες αποτελεσματικής διδασκαλίας προκύπτουν όταν η επίγνωση και η συμπεριφορά των μαθητών/τριών εκπαιδεύονται από κοινού, αξιοποιώντας τα συναισθήματά τους. Η διδασκαλία επομένως θεωρείται μια διαδικασία που κατευθύνει τους μαθητές να αξιοποιήσουν τα συναισθήματά τους για να οδηγηθούν ένα βήμα πιο κοντά στην επίγνωση.

Ο Gattegno (όπως αναφέρεται στο Mason, 1998) χρησιμοποιεί τον όρο επίγνωση για να αναφερθεί σε αυτό που επιτρέπει τις δυνάμεις, που είναι ενσωματωμένες στο λειτουργικό κάποιου, να εφαρμοστούν. Ο Mason (1998) αναφέρεται στην επίγνωση στη δράση, έναν ορισμό του Vergnaud, που χρησιμοποιείται όταν οι μαθητές/τριες εφαρμόζουν ένα θεώρημα στην πράξη, αλλά δεν έχουν λεπτομερή επίγνωση για αυτό.

Για να γίνει λοιπόν κάποιος ειδικός πρέπει να αναπτύξει την επίγνωση για την επίγνωση στην πράξη και για να γίνει καθηγητής, να αναπτύξει την επίγνωση για τις δύο προαναφερθείσες επιγνώσεις.

Θεωρεί λοιπόν τρεις μορφές επίγνωσης:

- Την επίγνωση στην πράξη, που σχετίζεται με την έννοια του Vergnaud «θεώρημα στην πράξη» και συμπεριλαμβάνει ένα μεγάλο εύρος εμπειριών. Όταν έχουν αυτή την επίγνωση, οι μαθητές/τριες μπορούν να ανακατασκευάζουν, να τροποποιούν, να προσαρμόζονται και πάνω από όλα να ξέρουν να ενεργούν όταν είναι απαραίτητο.
- Την επίγνωση για την επίγνωση στην πράξη ή διαφορετικά την επίγνωση σε έναν τομέα.

Τα Μαθηματικά προκύπτουν σαν τομέας όταν έχουμε επίγνωση για την επίγνωση στην πράξη, δηλαδή όταν λειτουργίες όπως η μέτρηση, η σειροθέτηση, η ταξινόμηση και η συσχέτιση γίνονται πιο τυπικές και αρχίζουν να εκφράζονται στη γλώσσα της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας.

- Την επίγνωση της επίγνωσης του τομέα, η οποία προκύπτει κατά τη διδασκαλία ενός θέματος που ξέρουμε και έχουμε καταλάβει καλά. Αυτού του είδους η επίγνωση είναι που υποστηρίζει την αποτελεσματική διδασκαλία.

Ο Mason (1998) αναφέρει ότι στο μάθημα των Μαθηματικών ένας στόχος είναι ο μαθητής όχι μόνο να εστιάσει σε ένα συγκεκριμένο σημείο, αλλά να προσέξει επίσης τα μοτίβα που έχει ξανασυναντήσει, τις συνδέσεις τους με άλλα θέματα αλλά και με προηγούμενες εμπειρίες. Η πραγμάτωση αυτών των στόχων αποτελεί την επίγνωση που ο καθηγητής θέλει να φέρει στην επιφάνεια, να αναπτυχθεί σε πιο ουσιαστική δύναμη και να ενσωματωθεί στο λειτουργικό του μαθητή.

Ένας από τους στόχους των καθηγητών των Μαθηματικών είναι να βελτιώνουν και να ενισχύουν την επίγνωση των μαθητών/τριών όσον αφορά τους τύπους επιχειρημάτων και τις αποδείξεις, που είναι αποδεκτές για την απόδειξη διάφορων δηλώσεων (Tabach, Levenson, Barkai, Tirosh, Tsamir και Dreyfus, 2010).

Η απόδειξη συνδέεται άμεσα με την τάξη των Μαθηματικών, όπως αναφέρει και ο Hersh (1993) και αναγνωρίζεται από τους μαθηματικούς ως ένα από τα βασικά στοιχεία των Μαθηματικών και κατ' επέκταση και της διδασκαλίας τους. Η απόδειξη βοηθά την κατανόηση των μαθηματικών προτάσεων και ισχυρισμών, ενώ είναι ο μόνος τρόπος πρόσβασης και αξιολόγησης της μαθηματικής αλήθειας των ισχυρισμών (Μούτσιος-Ρέντζος & Σπύρου, 2013).

Είναι σημαντικό η απόδειξη στην τάξη να εκφράζει όλες τις λειτουργίες της. Σύμφωνα με τη Hanna (1990) είναι σημαντικός ο διαχωρισμός ανάμεσα στην απόδειξη που αποδεικνύει και στην απόδειξη που εξηγεί. Μία διαφορά που αναφέρει ο Bolzano είναι στο «να κάνεις κάτι σίγουρο», κάτι που απαιτεί μια τυπική μορφή απόδειξης και στο «να βάλεις τη βάση» παρέχοντας διορατικότητα στις συνδέσεις μεταξύ των ιδεών. Η δεύτερη διαφορά είναι, το ότι η απόδειξη που εξηγεί, εστιάζει στην κατανόηση και όχι στους παραγωγικούς μηχανισμούς. Γενικά ο σκοπός της απόδειξης είναι η κατανόηση. Επομένως ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται, εξαρτάται από το πόσο πιο εύκολα θα κατανοήσουν οι μαθητές/τριες τις έννοιες, τις μεθόδους και τις εφαρμογές της (Hersh, 1993).

Η ανάπτυξη της επίγνωσης λοιπόν γύρω από την απόδειξη, μπορεί να παρέχει έναν τρόπο σκέψης, που ενδυναμώνει τη μαθηματική κατανόηση και τη φύση του ανθρώπινου συλλογισμού. Από τη στιγμή που η επίγνωση αναπτύσσεται στην τάξη των Μαθηματικών, θα επηρεάζεται από τον καθηγητή και από τον τρόπο που αξιολογεί αλλά και από το σχολικό εγχειρίδιο. Οι καθηγητές πολλές φορές δεν είναι συνεπείς σε αυτό που ζητάνε, επομένως είναι λογικό να υπάρχει σύγχυση στους μαθητές/τριες και να μην είναι σίγουροι για το πότε μια απόδειξη είναι αποδεκτή (Mamona-Downs & Downs, 2011). Επιπλέον σύμφωνα με τους Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014) «το σχολικό βιβλίο εντάσσεται στους κρίσιμους παράγοντες διαμόρφωσης των κατασκευών σχετικών με το συμβολικό/κανονιστικό επίπεδο (οι αντιλαμβανόμενες επίσημες οδηγίες) που αφορά ένα σχολικό μάθημα· στην περίπτωσή μας, τα ‘επίσημα’ σχολικά μαθηματικά και ειδικότερα τις ‘επίσημες’ όψεις της σχολικής απόδειξης» (σελ. 562).

Στην παρούσα μελέτη θα ερευνήσουμε την επίγνωση των μαθητών και μαθητριών σε σχέση με την απόδειξη στην τάξη των Μαθηματικών. Οι Landine και Steward (1998) αναφέρουν στην έρευνά τους ότι η ανάπτυξη και βελτίωση της αυτό-επίγνωσης συνδέεται θετικά με τη μετά-γνώση, το κίνητρο και την αυτό-αποτελεσματικότητα, πράγμα που δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές/τριες να αξιολογήσουν το κίνητρό τους, τις υπάρχουσες γνώσεις, που είναι απαραίτητες για το task που πρόκειται να αντιμετωπίσουν, ποιες ικανότητες είναι πιο πρόσφορες για να το ολοκληρώσουν και το επίπεδο της επιτυχίας, που θέλουν να καταφέρουν. Ο Boekaerts (1999) θεωρεί ότι η μετά-γνώση, το κίνητρο και ο αυτό-έλεγχος περιγράφουν τις τρεις βασικές πλευρές της έννοιας της αυτό-επίγνωσης.

Συνεπώς, από τη στιγμή που για την έννοια της επίγνωσης δεν έχει αποδοθεί κάποιος σαφής τυπικός ορισμός και δεν έχουν διασαφηνιστεί και οι διαστάσεις από τις οποίες επηρεάζεται, στην παρούσα έρευνα θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την έννοια αυτή, μελετώντας τις έννοιες της γνώσης, μετά-γνώσης, θυμικού και μετά-θυμικού καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις. Επειδή θέλουμε να εξετάσουμε τη μαθηματική επίγνωση στην απόδειξη, έχοντας σαν βάση αυτές τις έννοιες, θα ερευνήσουμε τις απόψεις των μαθητών κατά την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων, το βαθμό βεβαιότητάς τους και τα συναισθήματά τους. Στη συνέχεια εμβαθύνουμε στις απόψεις τους και εξετάζουμε και πάλι τον καινούριο βαθμό βεβαιότητας και τα συναισθήματά τους σε αυτό το σημείο. Λόγω της σύνδεσης της επίγνωσης με το θυμικό, θα ερευνηθούν επίσης και διάφορες διαστάσεις του, όπως στάσεις, πεποιθήσεις, συναισθήματα, ταυτότητες, η έννοια της αυτό-αποτελεσματικότητας και οι απόψεις των μαθητών/τριών για τα Μαθηματικά.

Στην παρούσα εργασία στη $2^{η}$, $3^{η}$ και $4^{η}$ενότητα θα παρουσιαστεί η υπάρχουσα βιβλιογραφία για τα υπό διερεύνηση προαναφερθέντα θέματα, καθώς και τα ερευνητικά ερωτήματα. Στην $5^{η}$ ενότητα θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία που εφαρμόσαμε. Αφού περιγραφούν οι διαδικασίες, το δείγμα και τα ερευνητικά εργαλεία, θα γίνει η ανάλυση του ερωτηματολογίου και των συνεντεύξεων.

Στην $6^{η}$ ενότητα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από τις δύο έρευνες συναρτήσει των ερευνητικών ερωτημάτων. Αρχικά αναφερόμαστε στα αποτελέσματα της ποσοτικής έρευνας μέσα από την ανάλυση του ερωτηματολογίου για την επίγνωση των μαθητών/τριών στην απόδειξη και το βαθμό στον οποίο επηρεάζεται από τις διαστάσεις της. Στη συνέχεια προχωράμε στην ανάλυση των τριών μελετών περίπτωσης για την παραγωγή εξατομικευμένων δεδομένων για τα υποκείμενα της έρευνας.

Στην $7^{η}$ ενότητα αναδεικνύονται οι συγκλίσεις και οι αποκλίσεις των ευρημάτων της παρούσας μελέτης με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, και τέλος στην $8^{η}$ ενότητα παρουσιάζονται τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε, λαμβάνοντας υπ’ όψιν τους περιορισμούς της παρούσας μελέτης καθώς και τα ευρήματά της

2.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΓΝΩΣΗ

2.1 Προσεγγίζοντας έναν ορισμό της επίγνωσης

2.1.1 Επίγνωση και γνώση

Η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητές/τριών είναι ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα της εκπαίδευσης και μαζί με την ανάπτυξη των δυνατοτήτων των μαθητές/τριών περιλαμβάνεται στην ανάπτυξη της γνωστικής επίγνωσής τους, ενώ παράλληλα συνδέεται και με τη μετά-γνώση. Οι Ku και Ho (2010) αναφέρουν συγκεκριμένα ότι «η μετά-γνώση αποτελεί σημαντικό στοιχείο της κριτικής σκέψης» (σελ. 13). Ένας μαθητής/τρια που έχει αναπτύξει κριτική σκέψη, είναι υπεύθυνος για τον τρόπο που σκέφτεται και μέσω μετά-γνωστικών στρατηγικών αποκτά τον έλεγχο.

Οι Sirmaci και Ceylan (2014) αναφέρουν ότι η γνωστική επίγνωση επηρεάζει τη σκέψη επιτρέποντας την απόκτηση βαθύτερης και δυνατότερης γνώσης και παράλληλα διευκολύνει τη μεταβίβαση πληροφοριών. Είναι υπεύθυνη για την επίγνωση της βελτίωσης που έχει κάποιος για τον εαυτό του και την επίγνωση στο να ελέγξει τη γνώμη του, δηλαδή το τι σκέφτεται για τη γνώση ή τη γνώμη του. «Είναι η γνώση που σχηματίζει όλα τα είδη γνωστικής ανάπτυξης ή οργανώνει γνωστικές προσπάθειες. Με άλλα λόγια η γνωστική επίγνωση είναι η πληροφορία για τη γνωστική λειτουργία κάποιου, δηλαδή: η επίγνωση που έχει κάποιος για τις γνωστικές δραστηριότητες που αναπτύσσει και τον έλεγχο των νοητικών δραστηριοτήτων. Η γνωστική επίγνωση περιλαμβάνει την οργάνωση του ατόμου για τις γνωστικές του λειτουργίες και τον προσανατολισμό των γνωστικών του δραστηριοτήτων» (σελ. 1).

Η γνωστική επίγνωση λοιπόν, σύμφωνα με τους Sirmaci και Ceylan (2014) είναι η ιδέα που αποτελείται από εξέχουσες νοητικές λειτουργίες σε διαδικασίες γνωστικής επίγνωσης. Οι Aksan και Kisac (2009) ορίζουν ως γνωστική επίγνωση την «επίγνωση για το πώς κάποιος δίνει νόημα στις διαδικασίες σκέψης» (σελ. 1) και συμπληρώνουν ότι «η γνωστική επίγνωση που αλλιώς ορίζεται ως η σκέψη του πώς να σκεφτείς αποτελεί υποκατηγορία της μετά-γνώσης» (σελ. 1).

Λόγω της αναγκαιότητας να παραχθεί γνώση δίνεται πλέον βάση στο μαθητή και όχι στον καθηγητή και η τέχνη της διδασκαλίας δίνει πια τη θέση της στην επιστήμη της μάθησης (Aksan

& Kisac, 2009). Η ικανότητα που έχει ένας μαθητής/τρια να χρησιμοποιεί στρατηγικά τη γνώση του για να φτάσει τους γνωστικούς του στόχους και κατ' επέκταση να επιτύχει το γενικό στόχο, που είναι η μάθηση, ταυτίζεται με τις στρατηγικές γνωστικής επίγνωσης (Sirmaci & Ceylan, 2014).

Οι στρατηγικές, σύμφωνα με τους Sirmaci και Ceylan (2014), σχετίζονται με τη μάθηση, την απόκτηση και ερμηνεία γνώσης, τη μάθηση αυτό-ελέγχου και τον καθορισμό των στόχων και των σκοπών. «Οι στρατηγικές γνωστικής επίγνωσης περιλαμβάνουν επίσης στρατηγικές μάθησης, που χρησιμοποιούνται στις γνωστικές λειτουργίες (επανάληψη, ερμηνεία, οργάνωση). Είναι στρατηγικές τις οποίες ένα άτομο χρησιμοποιεί χωρίς να συνειδητοποιεί ότι με αυτό τον τρόπο μαθαίνει. Σε αντίθεση με τις γνωστικές στρατηγικές, οι στρατηγικές γνωστικής επίγνωσης έχουν να κάνουν με το να πάνε τη μάθηση ένα βήμα παραπέρα και με το «πώς μαθαίνονται». Οι στρατηγικές γνωστικής επίγνωσης, όπως ο σχεδιασμός, ο έλεγχος και η αξιολόγηση επιτρέπουν στους μαθητές/τριες να ελέγχουν ποικίλες γνωστικές διαδικασίες σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος. Είναι δραστηριότητες που προσανατολίζουν την αποτελεσματική μάθηση. Η χρήση αυτών των στρατηγικών επηρεάζει την κριτική σκέψη των μαθητές/τριών και τους βοηθάει να έχουν επίγνωση της γνώμης τους» (σελ. 1-2).

2.1.2 Επίγνωση και μετά- γνώση

Ο ρόλος της μετά-γνώσης στη διδασκαλία και μάθηση θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικός, καθώς αφορά την ανάπτυξη της γνώσης για τον εαυτό μας και της ικανότητας να αναγνωρίζουμε από πού προήλθε η αποκτηθείσα γνώση (Γεωργιάδης, 2004).

Ο Flavell όρισε τη μετά-γνώση βασιζόμενος στον όρο «μετά-μνήμη» και τη θεωρεί ως «τη γνώση και νόηση για τα γνωστικά φαινόμενα» (σελ. 906) ενώ ο Γεωργιάδης (2004) αναφέρει ότι συχνά η μετά-γνώση συναντάται στη βιβλιογραφία ως «η σκέψη για τη σκέψη (κάποιου)» ή ως «η νόηση για τη νόηση». Συμφωνεί επίσης με το Wong (1999) στο ότι η δομή της μετά-γνώσης αποτελείται από τις γνώσεις, την επίγνωση και τον έλεγχο των γνωστικών διαδικασιών.

Οι Baker και Brown (1984) ορίζουν ως μετά-γνώση την επίγνωση των απαραίτητων γνωστικών διαδικασιών για μια επιτυχημένη απόδοση, τη χρήση κατάλληλων στρατηγικών και τους μηχανισμούς αυτό-ελέγχου, όπως τον έλεγχο του αποτελέσματος μετά από κάθε προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος, το σχεδιασμό της επόμενης κίνησης, την παρακολούθηση της αποτελεσματικότητας κάθε κίνησης και τη δοκιμή, αναθεώρηση και εκτίμηση των στρατηγικών μάθησης.

Πρώτο συστατικό της μετά-γνώσης είναι η επίγνωση για τη γνώση και αφορά την υπάρχουσα γνώση, που έχει αποθηκευτεί στο λειτουργικό του, το πώς, πότε και πού χρησιμοποιούνται οι γνωστικές στρατηγικές που γνωρίζει. Το δεύτερο συστατικό υποδηλώνει την επίγνωση των γνωστικών στρατηγικών που κάποιος μπορεί ή όχι να χρησιμοποιήσει σε μια συγκεκριμένη στιγμή ώστε να φτάσει ένα συγκεκριμένο μαθησιακό στόχο ή να λύσει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα (Boekaerts, 1999).

Επειδή η ακριβής φύση του δεύτερου στοιχείου της μετά-γνώσης δεν είναι σαφής, καθώς από διαφορετικούς ερευνητές χρησιμοποιούνται διαφορετικοί ορισμοί θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί αν τα ευρήματα από μια έρευνα που βασίζεται σε αυτά τα στοιχεία, μπορούν με κάποιο τρόπο να συνδεθούν και να μας πάνε ένα βήμα πιο κοντά στην κατανόηση της αυτό-επίγνωσης και στο τρόπο που επηρεάζει τη μάθηση και την επιτυχία. Ο Boekaerts (1999) αναφέρει ότι οι τρεις συμπληρωματικές διαστάσεις, μετά-γνώση, αυτό-έλεγχος και κίνητρο περιγράφουν τις διαφορετικές πλευρές ενός δυναμικού συστήματος, που λέγεται αυτό-επίγνωση. Ομολογουμένως οι διαφορετικοί ορισμοί που δίνονται από διαφορετικούς αρθρογράφους για να αναφερθούν σε αυτές τις διαστάσεις, μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση σε ορισμένους αναγνώστες.

Ο Wong (1999) θεωρεί ως επίγνωση τη γνώση των ικανοτήτων και δυσκολιών που μπορεί να εμφανίσει κάποιος, ενώ στην έρευνά τους οι Παναούρα και Φιλίππου (2005) συνδέουν την επίγνωση με την απόδοση, καθώς καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές/τριες με χαμηλή απόδοση, δεν έχουν επίγνωση της δυσκολίας ή της ομοιότητας των task, καθώς επίσης και της μη-αποτελεσματικότητάς των γνωστικών διαδικασιών που ακολουθούν, ενώ συμπληρώνουν ότι «το πρώτο βήμα για να αποκτήσει κάποιος διορατικότητα στο νοητικό του σύστημα είναι η επίτευξη της επίγνωσης για τις δικές του διαδικασίες» (σελ. 8).

2.1.3 Επίγνωση και θυμικό

Πολύ συχνά ερευνητές της μάθησης των Μαθηματικών τη συγχέουν με τη γνώση και δε δίνουν προσοχή στο κομμάτι του θυμικού, καθώς τα Μαθηματικά θεωρούνται κοινώς αποκλειστικά ορθολογικά και τα συναισθήματα δεν έχουν θέση (Debellis & Goldin, 2006).Παρόλο που η έρευνα γύρω από τη μαθηματική σκέψη των μαθητές/τριών εστιάζεται κυρίως γύρω από το γνωστικό κομμάτι, στην πραγματικότητα το θυμικό παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδοση των μαθητών/τριών (DeBellis, 1998).

Ο Goldin (2002) προσεγγίζει το θυμικό σαν ένα εσωτερικό σύστημα αναπαράστασης, που συναντάται σε κάθε άνθρωπο και κωδικοποιεί πληροφορίες από το φυσικό περιβάλλον, από τις δικές του γνωστικές και συναισθηματικές παραμέτρους ή και των υπολοίπων. Στα Μαθηματικά ειδικά, το θυμικό είναι συνυφασμένο με το γνωστικό σύστημα αναπαράστασης και αλληλεπιδρά είτε θετικά είτε αρνητικά με αυτό. Από τη μία δηλαδή διαχωρίζεται από το γνωστικό σύστημα, αλλά ταυτόχρονα συνδέεται άμεσα μαζί του.

Ο McLeod (1992) αναγνώρισε τρεις διαστάσεις που εμφανίζονται στις έρευνες για το θυμικό: τις πεποιθήσεις, τις συμπεριφορές και τα συναισθήματα. Ως πεποίθηση μπορεί να θεωρηθεί το ότι τα Μαθηματικά στηρίζονται σε κανόνες και ότι η διδασκαλία τους γίνεται μέσω αφήγησης. Στάση είναι για παράδειγμα, η δυσαρέσκεια κατά την ενασχόληση με μια γεωμετρική απόδειξη ή η ευχαρίστηση της επίλυσης προβλήματος, ενώ ως συναισθήματα μπορούμε να θεωρήσουμε τη χαρά ή τη σύγχυση κατά την επίλυση προβλημάτων μη-ρουτίνας. Οι DeBellis και Goldin (2006) πρόσθεσαν μια τέταρτη διάσταση στο θυμικό, τις αξίες, εμπλουτίζοντας έτσι το θεωρητικό πλαίσιο του McLeod (1992). Διακρίνουν λοιπόν 4 στοιχεία που συνιστούν το θυμικό:

- Συναισθήματα: ραγδαία μεταβαλλόμενες συναισθηματικές καταστάσεις που βιώνονται συνειδητά ή ασυνείδητα σε μια μαθηματική (ή άλλη) δραστηριότητα. Κυμαίνονται από ήπια έως πολύ έντονα, ενώ γίνονται αντιληπτά ως τοπικά και ενσωματωμένα στο εκάστοτε πλαίσιο.
- Στάσεις: προσανατολισμοί ή προδιαθέσεις ενός ατόμου αναφορικά με τα συναισθήματα που εμφανίζει σε συγκεκριμένα (μαθηματικά ή μη) πλαίσια. Εμφανίζουν μια σχετική σταθερότητα, διατηρώντας μια ισορροπία ανάμεσα στο θυμικό και τη γνώση.
- Πεποιθήσεις: περιλαμβάνουν την απόδοση κάποιας αλήθειας σε συστήματα προτάσεων ή άλλες γνωστικές διατάξεις. Οι πεποιθήσεις διαθέτουν υψηλό βαθμό σταθερότητας, σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό με γνωστικούς παράγοντες και είναι αρκετά δομημένες.
- Αξίες: περιλαμβάνουν ηθικές αρχές και βαθιές, προσωπικές αλήθειες του κάθε ατόμου, βάσει των οποίων ιεραρχεί της προτεραιότητές του. Οι αξίες έχουν υψηλό βαθμό σταθερότητας, σχετίζονται με γνωστικούς και θυμικούς παράγοντες.

Οι DeBellis και Goldin (2006) επίσης επισημαίνουν ότι το θυμικό δε λειτουργεί επικουρικά με το γνωστικό παράγοντα, αντίθετα είναι άμεσα συνυφασμένο μαζί του. Θεωρούν δηλαδή ότι το θυμικό είναι ένα άκρως δομημένο σύστημα, που κωδικοποιεί πληροφορίες, αλληλεπιδρώντας αμοιβαία με τη γνώση, όπως και στη θεωρία του Damasio (1994). Στην έρευνά του αναδεικνύεται η σύνδεση ανάμεσα στη γνώση και το θυμικό, βασιζόμενος στο γεγονός ότι τα συναισθήματα συνδέονται με τις νοητικές διαδικασίες και στο ότι η σύνδεση αυτή συμβαίνει όταν το άτομο αποκτά συνειδητή επίγνωση.

Η αλληλεπίδραση αυτή αναδεικνύεται και στην έρευνα των Selden, McKee και Selden (2009) για τη σχέση μεταξύ διαστάσεων του θυμικού και αποδεικτικής διαδικασίας. Κατά τη διαδικασία απόδειξης ενός Θεωρήματος, ένας από τους μαθητές/τριες είχε την επίγνωση ότι χρειαζόταν μια ιδέα για να συνεχίσει να αποδεικνύει, αφού συνειδητοποίησε ότι η απόδειξη δεν ήταν ολοκληρωμένη. Οι απαντήσεις του δεν είχαν κάποια λογική σύνδεση με την απόδειξη, κάτι που οι ερευνητές δε μπορούσαν να το αποδώσουν στο θυμικό. Υπέθεσαν ότι οι ισχυρισμοί του δημιουργήθηκαν από το αίσθημα της σύγχυσης ή του ότι «δεν ξέρει πώς να συνεχίσει».

Έτσι η σχέση μεταξύ θυμικού και απόδειξης μελετήθηκε εστιάζοντας σε συναισθήματα που σχετίζονται με γνωστικές διαδικασίες, όπως το συναίσθημα ότι «βρίσκεται στο σωστό δρόμο» κατά την κατασκευή μιας απόδειξης. Οι ερευνητές επικεντρώθηκαν σε συναισθήματα γνώσης, εξοικείωσης, γνώσης του επόμενου βήματος, καταλληλότητας, κατεύθυνσης και ανακεφαλαίωσης, που επηρεάζουν τις ενέργειες του μαθητή κατά την εμπλοκή του με μια αποδεικτική διαδικασία.

Διάφορα συναισθήματα όπως η περιέργεια ή η απορία μπορούν να κινητοποιήσουν τους μαθητές/τριες για την καλύτερη κατανόηση ή και το αντίθετο, να προκαλέσουν δηλαδή άγχος και απογοήτευση στην περίπτωση που ακολουθήσουν αποτυχημένες διαδικασίες. Έτσι και στα Μαθηματικά, τα συναισθήματα μπορούν να οδηγήσουν στην ενασχόληση των μαθητών/τριών με ένα task, στη συνεχή διατύπωση ερωτήσεων, στην αναζήτηση στρατηγικών, ενδυναμώνοντας έτσι τη σχέση τους με τα Μαθηματικά. Αντίθετα συναισθήματα εμποδίζουν την κατανόηση και οδηγούν στο άγχος και το φόβο (Debellis & Goldin, 2006).

Σε ένα περιβάλλον μάθησης Μαθηματικών οι απαντήσεις των μαθητών/τριών που βασίζονται στο συναίσθημα, συνδέονται με τις αντιλήψεις που έχουν για τον εαυτό τους, όσον αφορά τους στόχους, τις προσπάθειες και τον αυτό-έλεγχο. Η σύνδεση της συνειδητής παρακολούθησης και αξιολόγησης των απαντήσεων και επιλογών, που βασίζονται στο συναίσθημα, οδηγούν στις συνειδητές εκτιμήσεις και έλεγχο των απαντήσεων, που βασίζονται στο θυμικό (Hannula, Evans, Philippoy & Zan, 2004).

Οι Hannula και συν. (2004) αναφέρουν ότι «η αυτό-επίγνωση όσον αφορά το λειτουργικό του μαθητή αποτελεί ένα πηγαίο μονοπάτι από τη γνώση στο θυμικό και αντίστροφα» (σελ. 9). Η αλληλεπίδραση του θυμικού και της γνώσης βασίζεται στους διάφορους βαθμούς της συναίσθησης ή των φάσεων της αυτό-επίγνωσης σχετικά με τη λειτουργικότητα των πεποιθήσεων, της κατανόησης και των ικανοτήτων τους.

2.1.4 Επίγνωση και μετά-θυμικό

Οι Debellis και Goldin (2006) αναφέρουν ότι «το λειτουργικό του ανθρώπινου θυμικού είναι ένα εσωτερικό παραστατικό σύστημα, που ανταλλάσσει πληροφορίες με γνωστικά συστήματα. Το μετά-θυμικό είναι μια έννοια, που σχετίζεται με το θυμικό, όπως σχετίζεται και η μετά-γνώση με τη γνώση. Αναφέρεται στο θυμικό, στο θυμικό για τη γνώση σχετικά με το θυμικό και στην παρακολούθηση του θυμικού μέσω της γνώσης (σκέψη για την κατεύθυνση των συναισθημάτων) και του περαιτέρω θυμικού» (σελ. 2).

Όσον αφορά τα Μαθηματικά, σίγουρα πολλοί μαθητές/τριες τα φοβούνται και η πρώτη ενστικτώδης κίνηση των καθηγητών είναι να κατευνάσουν αυτό το συναίσθημα. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που αν αναλογιστούμε, ο φόβος μπορεί να είναι «απολαυστικός», όπως το τρενάκι του τρόμου σε ένα λούνα πάρκ. Η γνώση ότι το τρενάκι παρέχει ασφάλεια επιτρέπει στο φόβο να συμβεί σε ένα μετά-θυμικό πλαίσιο απόλαυσης και χαράς. Στα Μαθηματικά πολλοί μαθητές/τριες φοβούνται τις εξισώσεις, τα προβλήματα, τα τεστ, τον καθηγητή, την αποτυχία ή την αποδοκιμασία από το σπίτι. Αρνητικά αισθήματα όπως η σύγχυση επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, που δεν είναι το ίδιο ισχυρή με το φόβο, μπορούν να ενσωματωθούν σε θετικό μετά-θυμικό, όταν ο μαθητής αποκτήσει την πεποίθηση ότι μπορεί να οδηγηθεί σε επιτυχία και έχει αυτοπεποίθηση ότι συμμετέχει σε μια ικανοποιητική μαθησιακή διαδικασία, όπου έρχεται αντιμέτωπος με προκλήσεις. Στην αντίθετη περίπτωση που η σύγχυση για το μαθητή μεταφράζεται ως αναμονή για την αποτυχία, το πλαίσιο του μετά-θυμικού είναι τελείως διαφορετικό. Δυναμικές αναπαραστάσεις θυμικού, που προάγουν τη μαθηματική επιτυχία, ενυπάρχουν κυρίως στο μετά-θυμικό παρά στα επιφανειακά επίπεδα θυμικού (Goldin, 2002).

Για τους Debellis και Goldin (2006) όσον αφορά τα Μαθηματικά και το μετά-θυμικό, ο σημαντικότερος στόχος δεν είναι να μετριαστεί η σύγχυση, να απομακρυνθεί ο φόβος και το άγχος και να γίνουν τα Μαθηματικά εύκολα και διασκεδαστικά. Αντίθετα επισημαίνουν ότι πρέπει να αναπτυχθεί το μετά-θυμικό για τα συναισθήματα που αναπτύσσει ο μαθητής/τρια όταν βρίσκεται σε αδιέξοδο ή αντιμετωπίζει δυσκολίες και να μετατραπούν σε θετικά και παραγωγικά αισθήματα, ικανά να οδηγήσουν στην επιτυχία (Debellis & Goldin, 2006). Συνεπώς όπως η γνώση ότι το τρενάκι είναι ασφαλές μετατρέπει το φόβο σε μια απολαυστική βόλτα, έτσι και στη μαθηματική τάξη, η ανακάλυψη σε ένα περιβάλλον, όπου οι μαθητές/τριες συνειδητοποιούν ότι το να κάνουν λάθη ή το ότι «κολλάνε» είναι «ασφαλές», μπορεί να μετατρέψει αρνητικά συναισθήματα σε θετικά. Η γνώση επομένως παίζει σημαντικό ρόλο στο μετά- θυμικό, όπως επίσης οι πεποιθήσεις και οι αξίες, καθώς επηρεάζουν το πώς ένα συναίσθημα επηρεάζει την προσωπικότητα του μαθητή.

Η σύγχυση για παράδειγμα του μαθητή/τριας για ένα μαθηματικό πρόβλημα, μπορεί και θα έπρεπε να αναδεικνύει ότι αυτό το μαθηματικό πρόβλημα είναι μη ρουτίνας, ενδιαφέρον κάνοντας το μαθητή/τρια να νιώθει ότι κατανοεί κάτι καινούριο και επιτυγχάνει ένα δύσκολο στόχο. Η σύγχυση δημιουργεί τότε περιέργεια, ενδιαφέρον αλλά και ευχαρίστηση. Οι γνωστικές πεποιθήσεις και αξίες στα Μαθηματικά μπορούν να συνεισφέρουν για ένα δυνατό μετά- θυμικό, όπως για παράδειγμα η πεποίθηση ότι η επιτυχία είναι πιθανή μαζί με την αξία ότι αντιμετωπίζεται μια πρόκληση. Η δημιουργία ενός υποστηρικτικού περιβάλλοντος στην τάξη παρέχει στους μαθητές/τριες το αίσθημα της ασφάλειας σε περιπτώσεις που ‘κολλάνε’. Τότε η σύγχυση σε συνδυασμό με το μετά- θυμικό, κάνει το πρόβλημα να φαίνεται ότι αξίζει την προσπάθεια και κινητοποιεί για περαιτέρω ανακαλύψεις παρά την εγκατάλειψή του.

Η μαθηματική οικειότητα (intimacy) αφορά περισσότερο τους λύτες προβλημάτων και τα στάδια που περνούν κατά την αντιμετώπιση ενός προβλήματος. Είναι περισσότερο τοπικό συναίσθημα και αφορά την αυτό-εκτίμηση του λύτη. Για παράδειγμα κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος ένας μαθητής/τρια θα μπορούσε στην αρχή να νιώθει σύγχυση, αλλά το συναίσθημα αυτό να μετατραπεί σε ενθουσιασμό με την ανακάλυψη της λύσης. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η μαθηματική οικειότητα αποτελεί ένα συναίσθημα για το οποίο ο μαθητής έχει τον έλεγχο και το οποίο αναδεικνύει τη δομή της μαθηματικής γνώσης (DeBellis, 1998). Η συμπεριφορά ενός τέτοιου λύτη χαρακτηρίζεται από απορρόφηση και συγκέντρωση στο πρόβλημα, που καλείται να επιλύσει, καθώς εστιάζει τόσο πολύ στην αλληλεπίδραση με αυτό, που η προσοχή του δε διασπάται από εξωτερικές επιρροές. Η μαθηματική οικειότητα χαρακτηρίζεται από θετικά συναισθήματα και αναδεικνύει το δεσμό μεταξύ του λύτη και του μαθηματικού περιεχομένου. Τέτοια συναισθήματα μπορεί να είναι ενθουσιασμός, θαλπωρή, διασκέδαση και από τη στιγμή που αυτά αλληλεπιδρούν με το θυμικό, δίνουν πληροφορίες για το μαθηματικό περιεχόμενο και αξιολογούν πόσο βαθιά είναι η μαθηματική κατανόηση του μαθητή/τριας. Ο δεσμός που χτίζεται μεταξύ της δομημένης προσωπικής γνώσης και του μαθηματικού περιεχομένου, μέσω αυτών των συναισθημάτων, μπορεί να εξηγήσει γιατί είναι πολύ συχνά δύσκολο για τους μαθητές/τριες να «αποχωριστούν» παρανοήσεις, που προκύπτουν από διάφορα μαθηματικά περιεχόμενα (Debellis & Golden, 2006). Η μαθηματική οικειότητα μπορεί φυσικά να χαρακτηριστεί και από αρνητικά συναισθήματα, όπως φόβος ή σύγχυση, κάτι που εξαρτάται από την πρόθεση του λύτη να ενασχοληθεί με το μαθηματικό περιεχόμενο που αντιμετωπίζει.

Στην περίπτωση που ένας μαθητής/τρια νιώθει αρνητικά συναισθήματα λόγω μαθηματικής οικειότητας, όταν έρχεται αντιμέτωπος με μη αναμενόμενα αποτελέσματα ή αποτυχίες, ο μόνος τρόπος να ανταπεξέλθει είναι η ικανότητα ανάπτυξης μετά-θυμικών αντιδράσεων που αποτελείται κυρίως από στοιχεία μαθηματικής ακεραιότητας.

Η μαθηματική ακεραιότητα (integrity) αποτελεί στοιχείο του μετά-θυμικού και αναφέρεται στη συναισθηματική στάση του μαθητή/τριας σε σχέση με το πότε τα Μαθηματικά είναι «σωστά», πότε η επίλυση προβλήματος είναι ικανοποιητική, πότε η κατανόηση του μαθητή/τριας επαρκεί ή πότε η μαθηματική επιτυχία απαιτεί επιδοκιμασίες. Ορισμένα στοιχεία της ακεραιότητας, άρα και του μετά-θυμικού είναι η αναγνώριση της μη επαρκούς μαθηματικής κατανόησης και η απόφαση για περαιτέρω διαδικασίες (Debellis & Goldin, 2006).

Παρόλο που οι μαθητές/τριες με υψηλή ακεραιότητα μπορούν να πετύχουν ολοκληρωμένη μάθηση, είναι δύσκολο σε κάθε μαθηματική κατάσταση να αναγνωρίζεται η έλλειψη κατανόησης, η μερική αναγνώριση ή η πλήρης επίγνωση. Η ανάπτυξη όμως του μετά-θυμικού επιτρέπει στο μαθητή να κάνει υποθέσεις που θα τον βοηθήσουν στην ενίσχυση της γνώσης (Debellis & Goldin, 2006).

2.1.5 Η επίγνωση στην παρούσα έρευνα: ένας πρώτος ορισμός

Συχνά πολλοί ερευνητές χρησιμοποιούν έννοιες χωρίς πρώτα να τις ορίσουν, καθώς θεωρούν ότι είναι γνωστές στους αναγνώστες. Στον τομέα όμως της Διδακτικής των Μαθηματικών, κάτι τέτοιο δεν υφίσταται, αφού οι συνηθισμένοι ορισμοί δεν αποτελούν κανόνα (Schunk, 2008). Αυτό συμβαίνει και με την έννοια της επίγνωσης, η οποία χρησιμοποιείται πολλές φορές στη βιβλιογραφία, χωρίς βέβαια να υπάρχει ένας τυπικός ορισμός που να τη χαρακτηρίζει. Επειδή λοιπόν πρόκειται για μια σύνθετη και πολύπλευρη έννοια, που δε μπορεί να αποδοθεί επακριβώς, δε μπορούμε να είμαστε απόλυτα σίγουροι από τι επηρεάζεται και από τις διαστάσεις που αποτελείται.

Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως επίγνωση τη σύνδεση της γνώσης, μετά-γνώσης, θυμικού και μετά-θυμικού. Ξεκινώντας από αυτά που ξέρει ο μαθητής (γνώση) μελετάμε πώς νιώθει για αυτά που ξέρει (θυμικό) και τι νιώθει για αυτά που νιώθει ότι ξέρει (μετά- θυμικό). Η επίγνωση όμως θεωρούμε ότι δεν προκύπτει όταν περιοριζόμαστε στην εξέταση του τριαδικού σχήματος γνώση- θυμικό- μετά-θυμικό, αλλά εμβαθύνοντας στη μελέτη της μετά-γνώσης του τριαδικού αυτού σχήματος και στην έρευνα του θυμικού και μετά-θυμικού στη μετά-γνώση.

2.2 Διαστάσεις της επίγνωσης

2.2.1 Αυτό-αποτελεσματικότητα (self-efficacy)

Ο ορισμός της αυτό-αποτελεσματικότητας δόθηκε αρχικά από τον Bandura (1986) ως «οι κρίσεις των ανθρώπων για τις ικανότητές τους να οργανώνουν και να εκτελούν ενέργειες που απαιτούνται ώστε να επιτύχουν οριζόμενες μορφές απόδειξης» (σελ. 391). Σε σχέση με τα Μαθηματικά οι Hackett καιBetz (1989) αναφέρουν ότι «η μαθηματική αυτό-αποτελεσματικότητα είναι μια περιστασιακή, πάνω σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, αξιολόγηση της αυτοπεποίθησης ενός ατόμου, όσον αφορά τις ικανότητές του να αποδώσει επιτυχώς σε μια συγκεκριμένη δραστηριότητα ή πρόβλημα» (σελ. 262).

Στην έρευνά τους οι Unlu και Ertekin (2013) αναφέρουν ότι η αυτό-αποτελεσματικότητα είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες για την αποτελεσματική διδασκαλία των Μαθηματικών. Ο Bandura (1977) επισημαίνει ότι σχετίζεται με το πόση προσπάθεια θα ξοδέψει ένας μαθητής/τρια σε μια δραστηριότητα, κάτι με το οποίο συμφωνούν και οι Pampaka, Kleanthous, Hutchesonκαι Wake (2011), σημειώνοντας ότι οι πεποιθήσεις για την αυτό-αποτελεσματικότητα παίζουν σημαντικό ρόλο στον καθορισμό της προσπάθειας, που καταβάλλει ένας μαθητής σε ένα taskκαι της επιμονής του σε αυτό. Συγκεκριμένα στο κομμάτι της μαθηματικής απόδειξης ,οι Selden και Selden (2014) συμπεραίνουν ότι η διδασκαλία της απόδειξης και της κατασκευής αποδείξεων δυσκολεύει τους μαθητές/τριες, κάτι που οφείλεται στο βαθμό επιμονής, που έχει τις ρίζες του στην αυτό-αποτελεσματικότητα.

Ο Bandura (1993) αναφέρει ότι «υπάρχει διαφορά όσον αφορά την κατοχή γνώσεων και της δυνατότητας σωστής χρήσης τους» (σελ.3), κάτι που οφείλεται στις πεποιθήσεις των μαθητές/τριών για την αυτό-αποτελεσματικότητα, αφού επηρεάζουν τις επιλογές τους, τις προσπάθειες που καταβάλλουν, την επιμονή αλλά και το άγχος. Σύμφωνα με αυτές τις πεποιθήσεις οι μαθητές/τριες αποφασίζουν πώς θα χειριστούν τις γνώσεις και τις ικανότητές τους, επομένως είναι ουσιαστική η σημασία τους στο να εξηγηθεί γιατί η απόδοση των μαθητών/τριών διαφέρει, ακόμα και σε περιπτώσεις που έχουν ίδιες γνώσεις και δυνατότητες (Pajares & Miller, 1995).

Αναφορικά με την αυτό-αποτελεσματικότητα των μαθητές/τριών διάφοροι ερευνητές έχουν αναδείξει τη σημασία της στη μάθηση και τη σχολική επίδοση (Pintrich & Schunk, 1996˙ Bandura, 1993˙ Schunk & Miller, 2002). Οι αντιλήψεις αυτό-αποτελεσματικότητας των μαθητές/τριών για τη μάθηση αφορούν τις απόψεις τους για την ικανότητά τους να ανταποκριθούν με επιτυχία σε συγκεκριμένα έργα. Ειδικά στον κλάδο των Μαθηματικών το να είναι κανείς καλός, δε σημαίνει μόνο να κατανοεί και να χρησιμοποιεί τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, αλλά και να αξιοποιεί τις μετά-γνωστικές του δυνατότητες και να έχει παραγωγικά συναισθήματα όπως υψηλές προσδοκίες αυτό-αποτελεσματικότητας (Schoenfeld, 2006).

Έχουν γίνει πολλές έρευνες γύρω από τη σχέση των πεποιθήσεων των μαθητών/τριών για την αυτό-αποτελεσματικότητά τους και την επίδοσή τους στα Μαθηματικά. Στην έρευνά τους οι (Brown, Brown & Bibby, 2008) αναφέρουν ότι ο προβλεπόμενος βαθμός των μαθητές/τριών συνδέεται με τις προθέσεις τους να συνεχίσουν τα Μαθηματικά, αλλά και με τις αντιλήψεις τους για τις δυσκολίες και τη χαμηλή αυτό-αποτελεσματικότητά τους. Οι Bouffard-Bouchard, Parent και Larivee (1991) επισημαίνουν ότι μαθητές/τριες με το ίδιο επίπεδο δεξιοτήτων διαφέρουν πολύ ως προς τις δυνατότητές τους να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, κάτι που συσχετίζεται με τις αντιλήψεις για την αυτό-αποτελεσματικότητά τους. Οι μαθητές/τριες με υψηλότερη αυτό-αποτελεσματικότητα εφαρμόζουν με συνέπεια και αποτελεσματικότητα τις γνώσεις που είχαν, είναι περισσότερο επίμονοι και λιγότερο πιθανό να απορρίψουν τις σωστές λύσεις πρόωρα.

Η αυτό-αποτελεσματικότητα και οι προσδοκίες των μαθητές/τριών για τα αποτελέσματα της ενασχόλησής τους με ένα θέμα δε συνάδουν πάντα, καθώς σύμφωνα με την έρευνα των Usher και Pajares (2009) μαθητές/τριες με υψηλή αυτοπεποίθηση για τις μαθηματικές τους δυνατότητες, μπορεί για παράδειγμα να μην επιλέξουν ένα μάθημα στατιστικής αν γνωρίζουν ότι έχει υψηλές απαιτήσεις.

Παρόλο που στην έρευνα των Schunk και Ertmer (2000) διαπιστώνεται ότι η βελτίωση της αυτό-αποτελεσματικότητας των μαθητές/τριών σχετίζεται θετικά με την επίδοσή τους, οι Williams και Williams (2010) καταλήγουν στο ότι δεν υπάρχει αμοιβαία σχέση μεταξύ της αυτό-αποτελεσματικότητας και της επίδοσης. Οι Schunk και Miller (2002) θεωρούν ότι η αυτό-αποτελεσματικότητα δε μπορεί από μόνη της να οδηγήσει τους μαθητές/τριες σε υψηλές αποδόσεις, αν οι ίδιοι δεν έχουν τις απαραίτητες δεξιότητες και γνώσεις, παρόλο που μπορεί να επηρεάσει την εμπλοκή τους και την ποιότητα της προσπάθειάς τους. Δηλαδή η αυτό-αποτελεσματικότητα μπορεί να οδηγήσει σε υψηλή επίδοση όταν οι μαθητές/τριες είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση γνωστικών και μετά-γνωστικών στρατηγικών (Pintrich & De Groot, 1990).

Όσο περισσότερο αποτελεσματικοί θεωρούν οι μαθητές/τριες τον εαυτό τους τόσο περισσότερο τελειοποιούν τις γνωστικές τους δυνατότητες. Υψηλότερη αποτελεσματικότητα παρατηρείται σε μαθητές/τριες που βλέπουν προκλήσεις στα απαιτητικά προβλήματα, εκδηλώνουν περισσότερο ενδιαφέρον στα tasks που συμμετέχουν και ανακτούν γρήγορα τις δυνάμεις τους μετά από μια αποτυχία ή απογοήτευση. Αντίθετα οι μαθητές/τριες που έχουν χαμηλή αίσθηση της αποτελεσματικότητας, τείνουν να αποφεύγουν απαιτητικές δραστηριότητες, καθώς νιώθουν απειλή, έχουν χαμηλές προσδοκίες από τον εαυτό τους, χαμηλή αφοσίωση στους στόχους που θέτουν και χάνουν εύκολα την αυτοπεποίθησή τους (Selden & Selden, 2014).

Οι πεποιθήσεις των μαθητών/τριών όσον αφορά την αποτελεσματικότητα συνδέονται θετικά και αρνητικά με το κίνητρο και τη συμπεριφορά (Bandura, 1997). Οι Skaalvik, Federici και Klassen

(2015) συμπληρώνουν ότι σίγουρα το κίνητρο σχετίζεται με την αποτελεσματικότητα από τη στιγμή που συνδέεται με την προσπάθεια και την επιμονή των μαθητών/τριών πάνω σε μια δραστηριότητα. Τα αποτελέσματα που αναμένει ένας μαθητής/τρια εξαρτώνται από την κρίση για το τι μπορεί να επιτύχει. Για παράδειγμα από τη μία, αν ένας μαθητής/τρια νιώθει αυτοπεποίθηση αναμένει επιτυχίες στις εξετάσεις, ενώ μπορεί να μη θέλει να παρακολουθήσει το μάθημα των Μαθηματικών αν γνωρίζει ότι οι βαθμολογίες από τον καθηγητή δε θα είναι υψηλές (Usher & Pajares, 2008).

ο Bandura (1997) υποθέτει ότι οι πεποιθήσεις για την αποτελεσματικότητα σχετίζονται και με συναισθηματικές και ψυχολογικές καταστάσεις, όπως το άγχος, στρες, κούραση και διάθεση. Το υψηλό άγχος μπορεί να υπονομεύσει την αποτελεσματικότητα. Οι μαθητές/τριες που φοβούνται ένα μάθημα με το οποίο έρχονται σε επαφή κάθε μέρα, ερμηνεύουν αυτή την ανησυχία σαν στοιχείο έλλειψης ικανότητας πάνω σε αυτή την περιοχή. Γενικά η ενίσχυση της φυσικής και συναισθηματικής ευημερίας την μαθητές/τριών και η ελάττωση των αρνητικών συναισθημάτων ενδυναμώνει την αποτελεσματικότητα (Usher & Pajares, 2008).

Ο Bandura (1977) υποστηρίζει ότι η αποτελεσματικότητα επηρεάζει τις επιλογές των ανθρώπων πάνω στις δραστηριότητες, την προσπάθεια και την επιμονή. Σύμφωνα με αυτές τις προσδοκίες, πολλές έρευνες έδειξαν ότι το κίνητρο των μαθητές/τριών σχετίζεται με την αποτελεσματικότητα. Αναφέρει (1993) ότι η κατανόηση της απλής γνώσης και οι συλλογιστικές λειτουργίες, που απαιτούνται για τις δραστηριότητες δεν επαρκούν για να είναι ένας μαθητής/τρια αποτελεσματικός. «Παράγοντες όπως ο έλεγχος του κινήτρου και του θυμικού, που σχετίζονται με το γνωστικό λειτουργικό, είναι απαραίτητοι στο εννοιολογικό πλαίσιο των ανθρωπίνων δυνατοτήτων» (σελ. 2).

Η πρόσβαση στην μετά-γνωστική κατανόηση, που σχετίζεται πιο στενά με την απόδοση καθώς τα παιδιά μεγαλώνουν, αποτελεί σημαντική συνθήκη για την αποτελεσματική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Η αυτό-επίγνωση του τι δεν ξέρει ή καταλαβαίνει ένας μαθητής/τρια δεν είναι επαρκής για να τον κάνει καλύτερο μαθητή/τρια. Θα πρέπει να αφιερωθεί χρόνος και προσπάθεια για την εκπαίδευση των μαθητές/τριών για να αξιολογούν τις δυσκολίες των διάφορων εκδοχών ενός task και για να τους ενθαρρύνει να εκφράσουν αυτοπεποίθηση κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής τους με αυτό (Boekartes, 1999).

2.2.2 Απόψεις των μαθητών/τριών για τα Μαθηματικά

Οι απόψεις των μαθητές/τριών για τα Μαθηματικά περιγράφονται σε τρία επίπεδα, από το πιο περιορισμένο στο πιο ευρύ, εστιάζοντας στις τεχνικές, τα μαθηματικά μοντέλα και τα Μαθηματικά σαν προσέγγιση ζωής σύμφωνα με τους Wood, Pecotz και Reid (2012). Αυτά τα επίπεδα ακολουθούν μια ιεραρχική σχέση: οι μαθητές/τριες που θεωρούν τα Μαθηματικά στοιχείο της καθημερινής ζωής, έχουν επίγνωση της μοντελοποίησης των Μαθηματικών αλλά και των τεχνικών τους, κάτι που δε συμβαίνει με όσους θεωρούν τα Μαθηματικά απλά τεχνικές. Και προηγούμενες έρευνες όπως αυτή των Crawfordκ.ά. (1994) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι απόψεις των μαθητές/τριών ποικίλουν, από την πιο κατακερματισμένη στην πιο ενιαία και από την πιο επιφανειακή σε μια βαθύτερη.

ΟιWood, Pecotz και Reid (2012) καταλήγουν λοιπόν σε τρία επίπεδα για τις απόψεις των μαθητές/τριών για τα Μαθηματικά. Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά ως δομικά στοιχεία και τεχνικές. Εστιάζουν την προσοχή τους σε διαφορετικές μαθηματικές δραστηριότητες, που περιλαμβάνουν την έννοια του υπολογισμού με την ευρεία έννοια. Στο δεύτερο επίπεδο οι μαθητές/τριες βλέπουν τα Μαθηματικά σαν μοντέλα, που μεταφράζουν διαστάσεις της πραγματικότητας σε μαθηματική μορφή ενώ το τρίτο επίπεδο είναι η πιο ευρεία και ολιστική άποψη των μαθητών/τριών, ότι τα Μαθηματικά είναι μια προσέγγιση στη ζωή και ένας τρόπος σκέψης. Θεωρούν ότι η πραγματικότητα μπορεί να αναπαρασταθεί με μαθηματικούς όρους και ο τρόπος σκέψης τους για την πραγματικότητα μπορεί να πραγματοποιηθεί στα Μαθηματικά. Δημιουργείται δηλαδή ένας ισχυρός δεσμός ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη ζωή τους.

2.2.3 Στάσεις και ταυτότητες στα Μαθηματικά

Τα τελευταία σαράντα χρόνια έχει υπάρξει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη μελέτη της στάσης των μαθητές/τριών προς τα μαθηματικά. Η έννοια της στάσης στα Μαθηματικά διαχωρίζεται σε δύο βασικές προσεγγίσεις σύμφωνα με τους DiMartino και Zan (2001). Η πρώτη αποτελεί έναν απλό ορισμό, που περιγράφει τη στάση με τις διαστάσεις του θυμικού για τα Μαθηματικά, χωρίς να γίνεται κάποια αναφορά στα γνωστικά της στοιχεία. Η δεύτερη προσέγγιση αποτελεί έναν τρισκελή ορισμό, που θεωρεί το συναίσθημα, την πεποίθηση και τη συμπεριφορά ως επιμέρους μέρη της στάσης.

Σύμφωνα με τον Hannula (2002) η στάση προκύπτει μέσα από διαδικασίες αξιολόγησης, οπότε αποτελεί θετικό ή αρνητικό κατασκεύασμα. Ο ίδιος επισημαίνει τέσσερις διαφορετικές αξιολογικές διαδικασίες: 1) τα συναισθήματα του μαθητή/τριας κατά την ενασχόλησή του με τα Μαθηματικά, 2) τα συναισθήματα που συσχετίζει ο μαθητής/τρια με τα Μαθηματικά, 3) τις καταστάσεις που ακολουθεί ο μαθητής/τρια ως συνέπεια της ενασχόλησής του με τα Μαθηματικά και 4) την αξία των στόχων που θέτει ο μαθητής/τρια στα Μαθηματικά.

Πολλοί ερευνητές (Ma & Kishor, 1997· Zan κ.ά., 2006) έχουν επισημάνει την έλλειψη εργαλείων μέτρησης των στάσεων των μαθητές/τριών προς τα Μαθηματικά. Στην έρευνά τους οι Tapia και Marsh (2004) κατασκεύασαν ένα τέτοιο εργαλείο (ATMI), το οποίο αποτελούνταν από κλίμακες που μετρούσαν την ευχαρίστηση, το κίνητρο, την αυτοπεποίθηση και τις αξίες. Σαν ευχαρίστηση θεωρήθηκε ο βαθμός στον οποίο ο μαθητές/τριες απολαμβάνουν να δουλεύουν στα Μαθηματικά και σαν κίνητρο το ενδιαφέρον και η επιθυμία τους να ακολουθήσουν τα Μαθηματικά στις περαιτέρω σπουδές τους. Η κλίμακα της αυτοπεποίθησης μετρήθηκε μέσω της αυτοπεποίθησης που νιώθουν οι μαθητές/τριες για την επίδοσή τους και η κλίμακα των αξιών μέσω των πεποιθήσεων των μαθητές/τριών για τη χρησιμότητα, τη σχετικότητα και την αξία των Μαθηματικών για τη ζωή τους.

Οι Lim και Chapman (2012) κατασκεύασαν μια μικρή εκδοχή του προηγούμενου εργαλείου, που πραγματοποιήθηκε σε ασιατικό δείγμα εξετάζοντες τους παράγοντες που προαναφέραμε και εκτιμώντας τη συνάφεια του ερωτηματολογίου στο σύνολό του. Η Λεοντίου (2015) στη διπλωματική της εργασία για τις στάσεις και γονική εμπλοκή στα Μαθηματικά, βασιζόμενη στην προηγούμενη έρευνα, ανέπτυξε και αξιολόγησε τις ψυχομετρικές ιδιότητες μιας σύντομης εκδοχής της Attitudes Toward Mathematics Inventory (ATMI) σε ελληνικό δείγμα.

Η έννοια της ταυτότητας έχει συζητηθεί πολύ σε έρευνες στη Διδακτική των Μαθηματικών (Abreu & Cline, 2003; Anderson, 2007; Crafter & Abreu, 2010; Wenger, 1998). Η μαθηματική ταυτότητα δομείται μέσω συμμετοχής σε διάφορες πρακτικές, όπως οι σχολικές τάξεις, το οικογενειακό περιβάλλον και ευρύτερες κοινότητες (Καφούση, Μούτσιος-Ρέντζος & Χαβιάρης, 2017). Οι Abreu και Cline (2003) διατυπώνουν ότι η μαθηματική ταυτότητα των μαθητές/τριών ενσωματώνει τρεις συμπληρωματικές διαδικασίες: 1) ταυτοποίηση του άλλου (identifying the other), 2)το να είσαι ταυτοποιημένος (being identified) και 3)αυτό-ταυτοποίηση (self-identification). Η πρώτη διαδικασία αφορά την κατανόηση για τις κοινωνικές ταυτότητες των υπολοίπων, η δεύτερη αφορά την κατανόηση της ταυτότητας από άλλους και η τρίτη αναφέρεται στο εσωτερικευμένο και ατομικό επίπεδο ταυτότητας. Στην πρώτη δηλαδή διαδικασία οι μαθητές/τριες κατηγοριοποιούν και συγκρίνουν χρήσεις των Μαθηματικών σε διαφορετικές πρακτικές της κοινωνίας τους, στη δεύτερη κατανοούν τον τρόπο με τον οποίο σημαντικοί άνθρωποι της ζωής τους, παρατηρούν τη συμμετοχή τους σε συγκεκριμένες μαθηματικές πρακτικές και στην τρίτη οι μαθητές/τριες αναπτύσσουν προτιμήσεις και ταυτοποιούν οι ίδιοι τον εαυτό τους.

2.2.4 Κίνητρα, στόχοι και ανάγκες

Ποικίλοι παράγοντες μπορεί να ευθύνονται για την έλλειψη ενασχόλησης των μαθητές/τριών στο σχολείο. Μπορεί πολλοί μαθητές/τριες να μην έχουν αυτοπεποίθηση, να εγκαταλείπουν εύκολα, να μη βλέπουν τις συνδέσεις στα Μαθηματικά ή να μην έχουν επίγνωση των δυσκολιών τους (Sullivan, Tobias & McDonough, 2006).

O Hannula (2004) αναφέρει ότι ένας παράγοντας της έλλειψης ενασχόλησης των μαθητές/τριών είναι το κίνητρο. Το κίνητρο ορίζεται ως «η δυνατότητα να κατευθύνουμε τη συμπεριφορά που χτίζεται σε μηχανισμούς ελέγχου των συναισθημάτων και μπορεί να εκδηλωθεί σε γνωστικές λειτουργίες, στα συναισθήματα ή/και στη συμπεριφορά» (σελ. 24) και σύμφωνα με τον Karaali (2015) «το κίνητρο αναφέρεται στην ενέργεια που αφιερώνει κάποιος για να φτάσει μια επιθυμητή κατάσταση ή αποτέλεσμα» (σελ. 5). Παρόλο που οι μαθητές/τριες πάντα κινητοποιούνται να κάνουν κάτι, θα πρέπει τα κίνητρά τους συμφωνούν με τους διδακτικούς σκοπούς. Όπως αναφέρει και ο Bandura (1977) «αν το κίνητρο σχετίζεται με τη δραστηριοποίηση και τη συμπεριφορά έχει εν μέρει τις ρίζες του σε γνωστικές δραστηριότητες (σελ. 3).

O Pintrich (1990) ανακάλυψε ότι υπάρχουν διαδραστικές σχέσεις μεταξύ του κινήτρου, της γνωστικής ενασχόλησης και της απόδοσης των μαθητές/τριών στην τάξη και ότι οι μαθητές/τριες που χαρακτηρίζονται από περισσότερη μαεστρία και πρόκληση χρησιμοποιούν περισσότερο γνωστικές στρατηγικές και ενασχολούνται περισσότερο με μετά-γνωστικές δραστηριότητες από ότι οι μαθητές/τριες που δεν το έχουν έμφυτο. Συμπεραίνει δηλαδή ότι το κίνητρο και η γνωστική λειτουργία είναι αλληλοεξαρτώμενες έννοιες.

Την τελευταία δεκαετία η έρευνα γύρω από το κίνητρο εστιάζει στον προσανατολισμό των στόχων των μαθητές/τριών. Οι στόχοι διακρίνονται στους στόχους εκμάθησης, οι οποίοι εστιάζουν στο ίδιο το task και δίνουν έμφαση στην κατανόηση και τους στόχους απόδοσης που εστιάζουν στην ικανότητα ή αυτοπεποίθηση και αναφέρονται στην επιθυμία που έχει κάποιος να θεωρείται ικανός (Sullivan, Tobias & McDonough, 2006).

Οι αντιλήψεις του κάθε μαθητή/τριας ξεχωριστά για τον προσανατολισμό των στόχων του, ποικίλλουν ανάλογα με τις εμπειρίες τους και την αξιολόγηση από τους καθηγητές στο σχολείο, αλλά και έξω από αυτό, από τους γονείς και τα σχόλια για την επίδοσή τους στο σχολείο. Ειδικά η σχέση μαθητή-καθηγητή σχετίζεται με το κίνητρο και τους στόχους, καθώς η ψυχολογική υποστήριξη από τον καθηγητή οδηγεί στην ενθάρρυνση του μαθητή/τριας προς την επίτευξη των στόχων του (E.M.Skaalvik & S.Skaalvik, 2013). Ειδικά στο μάθημα των Μαθηματικών, πολλοί μαθητές/τριες σχετίζουν την επιτυχία με τις σωστές απαντήσεις και την επιβεβαίωση από τον καθηγητή, έχοντας δηλαδή περιορισμένη αντίληψη της αξίας των Μαθηματικών. Όταν λοιπόν η επιβεβαίωση από τον καθηγητή σταματήσει για οποιοδήποτε λόγο, παρατηρείται ότι οι μαθητές/τριες εγκαταλείπουν εύκολα (Sullivan, Tobias & McDonough, 2006).

Οι ίδιοι ερευνητές στο άρθρο τους (2006) για τις απαντήσεις των μαθητές/τριών που σχετίζονται με βραχυπρόθεσμους στόχους, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές/τριες θεωρούν ότι θα ευχαριστήσουν τον καθηγητή, δίνοντας σωστές απαντήσεις, ολοκληρώνοντας μια δραστηριότητα και γράφοντας καλά στα τεστ. Οι μαθητές/τριες θα μπορούσαν να επωφεληθούν αν οι καθηγητές έδιναν προσοχή σε μακροπρόθεσμους στόχους βαθιάς κατανόησης, στη σύνδεσης μεταξύ της νέας και παλιάς γνώσης, στη σύνδεσης της νέας γνώσης με τη χρησιμότητα και τις εφαρμογές της και γενικότερα στην εστίαση στο περιεχομένου και όχι στην απόδοσή τους, ώστε να ευχαριστήσουν τους γονείς και τους καθηγητές.

Όσον αφορά τις δυσκολίες των μαθητές/τριών με τα Μαθηματικά συμπεραίνουν ότι οι μαθητές/τριες που στοχάζονται πάνω στη μαθηματική δραστηριότητα μπορούν να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες τους. Αυτή η επίγνωση δείχνει ότι οι μαθητές/τριες έχουν πιθανότητες να αναγνωρίσουν τις ανάγκες τους στη μάθηση Μαθηματικών και συνεπώς να επιδιώξουν να ακολουθήσουν συγκεκριμένους στόχους στη μάθησή τους.

Το κίνητρο των μαθητές/τριών οδηγεί τις αποφάσεις τους και κατευθύνονται στις ανάγκες. Οι ανάγκες κατηγοριοποιούνται σε σχέση με τον εαυτό μας, τις γνωστικές λειτουργίες και τις κοινωνικές σχέσεις (Sullivan, Tobias & McDonough, 2006,). «Οι ανάγκες του εαυτού μας σχετίζονται με την ταυτότητα, την αυτονομία και τη συνοχή. Η γνωστική λειτουργία απαιτεί ανταλλαγή πληροφοριών και περιλαμβάνει την κατανόηση του εαυτού, των υπολοίπων και του κόσμου και οι κοινωνικές σχέσεις απαιτούν θετικές απαντήσεις από τους άλλους. Παρόλο που το σχολείο έχει τη δυνατότητα να ενεργοποιήσει καθεμία από αυτές τις ανάγκες, αυτό δεν πετυχαίνεται πάντα και οι μαθητές/τριες ικανοποιούν αυτές τις ανάγκες με τρόπους αντίθετους από αυτούς που προορίζει το σχολείο και ο καθηγητής» (σελ. 2-3). Για να καταλάβουμε τη βάση για τις αποφάσεις που παίρνουν οι μαθητές/τριες πρέπει να ερευνήσουμε τις ικανότητές τους για αυτοέλεγχο και πώς οδηγούνται σε αυτό.

2.2.5 Διαστάσεις της επίγνωσης στην παρούσα έρευνα

Έχουμε προσεγγίσει την επίγνωση μέσα από εφτά διαστάσεις: αυτό-αποτελεσματικότητα, στάσεις, ταυτότητες, απόψεις των μαθητές/τριών για τα Μαθηματικά, κίνητρα, στόχοι και ανάγκες. Στην εργασία μας κρατώντας σαν σταθερές τις διαστάσεις κίνητρα-στόχοι και ανάγκες, θα εξετάσουμε τις υπόλοιπες τέσσερις, οι οποίες θα αποτελέσουν φακό για τη μελέτη της σχέσης των βασικών εννοιών που αναφέραμε προηγουμένως, τη γνώση, μετά-γνώση, θυμικό και μετά-θυμικό.

2.3 Η μαθηματική επίγνωση στην παρούσα έρευνα

Στην παρούσα εργασία θα ερευνηθεί η μαθηματική επίγνωση των μαθητών/τριών Α΄ Λυκείου στην απόδειξη. Αρχικά έχοντας ως φακό την αυτό-αποτελεσματικότητα των μαθητών/τριών στα Μαθηματικά, τις στάσεις, τις ταυτότητες και τις απόψεις τους για τα Μαθηματικά, σχηματίζουμε μια γενικότερη εικόνα για αυτούς. Οι όψεις της επίγνωσης για την απόδειξη συγκροτούνται σε ένα σύνθετο, μερικώς ιεραρχημένο δόμημα, που αποτελείται από την αυτό-αποτελεσματικότητα των μαθητών/τριών στην απόδειξη, την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων, τη βεβαιότητά τους για την αξιολόγηση και τα συναισθήματα που νιώθουν για αυτή τη βεβαιότητα. Συγκεκριμένα εστιάζουμε σε ολιστικές αξιολογήσεις πειστικότητας αποδεικτικών επιχειρημάτων, στο βαθμό βεβαιότητας για τις αξιολογήσεις και στα συναισθήματα για το βαθμό βεβαιότητας. Προχωράμε σε (ανά)αξιολογήσεις πειστικότητας αποδεικτικών επιχειρημάτων, που γίνονται εμβαθύνοντας στις απόψεις των μαθητές/τριών για την απόδειξη, και είναι πιο αναλυτικές, στον πιθανά νέο βαθμό βεβαιότητας και τα πιθανώς νέα συναισθήματα για το βαθμό βεβαιότητας.

3. Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

3.1 Η απόδειξη και ο ρόλος της στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο λύκειο

Η απόδειξη κατέχει κεντρικό ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς είναι αυτή που ενισχύει την κατανόηση των μαθητών/τριών, αναδεικνύει τις συνδέσεις της μαθηματικής επιστήμης και αποτελεί μέσο αξιολόγησης μαθηματικών ισχυρισμών.

Ο Rave (1999) υποστηρίζει ότι η απόδειξη είναι η καρδιά των Μαθηματικών, καθώς είναι αυτή, που ενσωματώνοντας εργαλεία, μεθόδους, στρατηγικές, αναδεικνύει τη σύνδεση μεταξύ των θεωριών, τη συστηματική γνώση και κινητοποιεί για περαιτέρω ανάπτυξη και πρόοδο. Σίγουρα η πιο σημαντική και προφανής λειτουργία της απόδειξης είναι η εξακρίβωση της αλήθειας ενός μαθηματικού ισχυρισμού, υποθέτοντας ορισμένα αξιώματα. Βέβαια οι μαθηματικοί δε μένουν μόνο στην εξακρίβωση της αλήθειας, αλλά επιδιώκουν να δουν και το γιατί. Οι αποδείξεις μπορούν να εξηγούν (Hanna, 2000) γιατί μια μαθηματική δήλωση είναι αληθής δοθεισών ορισμένων υποθέσεων, υποστηρίζοντας την κατανόηση της απόδειξης (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron & Winicki-Landman, 2012) και αναδεικνύοντας έτσι την ανάγκη για τη διδασκαλία της. Στην τάξη η βασικότερη λειτουργία της απόδειξης είναι η προώθηση της μαθηματικής γνώσης και έτσι η πιο σημαντική πρόκληση για τους καθηγητές είναι να βρουν αποτελεσματικούς τρόπους χρήσης της απόδειξης για αυτό το σκοπό. Όταν ο καθηγητής είναι ικανός να χρησιμοποιεί αποδείξεις που μεταφέρουν την κατανόηση, η αξία της αναδεικνύεται και συνεισφέρει περισσότερο στην τάξη (Hanna, 2000).

Η μαθηματική κοινότητα πρώτα πείθεται για την αλήθεια ή την εγκυρότητα ενός μαθηματικού ισχυρισμού, στηριζόμενη σε εμπειρικά στοιχεία και στη συνέχεια περνά στην απόδειξη (deVilliers, 2010). Άλλωστε η αλήθεια ενός μαθηματικού ισχυρισμού προέρχεται μέσω έγκυρων παραγωγικών συλλογισμών, που στηρίζονται σε γνωστά αποτελέσματα. Συνεπώς ο ρόλος των καθηγητών είναι να εκπαιδεύσουν τους μαθητές/τριες στον παραγωγικό συλλογισμό και στα λογικά συμπεράσματα και να αναδείξουν τη σύνδεση μεταξύ της μαθηματικής κοινότητας και της κοινότητας στην τάξη (Rasmussen, Zandieh & Wawro, 2009).

Η Hanna (2000) αναφέρει ότι «μια απόδειξη όσο έγκυρη και αν φαίνεται όσον αφορά την τυπική της προέλευση, στην πραγματικότητα γίνεται πειστική και αποδεκτή σε ένα μαθηματικό όταν οδηγεί σε πραγματική μαθηματική κατανόηση» (σελ. 2). Για τους μαθηματικούς μια απόδειξη είναι μεγαλύτερης αξίας όταν οδηγεί στην κατανόηση, βοηθώντας τους να σκέφτονται πιο ξεκάθαρα και ουσιαστικά για τα Μαθηματικά (Rav, 1999). «Οι αποδείξεις για τους μαθηματικούς είναι ένας τρόπος να επιδείξουν τους μαθηματικούς μηχανισμούς για την επίλυση προβλημάτων και να αιτιολογήσουν ότι η λύση που προτείνεται είναι πράγματι η επίλυση» (σελ. 13).

Αν ο μοναδικός στόχος της απόδειξης ήταν να διαπιστώσει την εγκυρότητα, δε θα ήταν ανάγκη να αποδεικνύουμε με διαφορετικούς τρόπους (Hanna, 2000). Οι διαφορετικές όμως προοπτικές απόδειξης αναδεικνύουν περισσότερες συνδέσεις μεταξύ των γνώσεων και ενισχύουν τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Η συνεισφορά αυτή της απόδειξης στην επικοινωνία της μαθηματικής γνώσης, αναδεικνύει και μια άλλη ανάγκη για τη διδασκαλία της. Την ανάγκη για διαφώτιση της προέλευσης και της σύνδεσης της μαθηματικής γνώσης (Zaslavsky κ.ά., 2012).

3.2 Η απόδειξη και οι λειτουργίες της στα Μαθηματικά του Λυκείου

Η απόδειξη στην τάξη αναμένεται να εκφράσει όλες τις λειτουργίες της με κάποιο τρόπο. Ωστόσο θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερο βάρος σε αυτές που είναι περισσότερο συναφείς με τη μάθηση των Μαθηματικών (deVilliers, 1990; Hersh, 1993).

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, οι μαθηματικοί αναμένουν πολλά περισσότερα από την απόδειξη και όχι μόνο την αιτιολόγηση. Σύμφωνα και με το Manin (1977), θέλουν να τους κάνει πιο σοφούς. Επομένως η καλύτερη απόδειξη γι' αυτούς είναι αυτή που μας κάνει να σκεφτούμε γιατί ο ισχυρισμός που αποδεικνύεται είναι αληθής, κατανοώντας βαθύτερα το νόημα, πείθοντας και οδηγώντας έτσι σε περαιτέρω ανακαλύψεις.

Σύμφωνα με την Hanna (2000) όταν επιχειρούμε να καθορίσουμε το ρόλο της απόδειξης στη σχολική τάξη πρέπει να σκεφτούμε όλες τις λειτουργίες της απόδειξης οι οποίες εκτελούνται στη μαθηματική πρακτική. Για το Bell (1976) οι βασικές λειτουργίες της απόδειξης είναι τρεις. Η πρώτη είναι η επιβεβαίωση, μέσω της οποίας γίνεται η εξακρίβωση της αλήθειας ενός ισχυρισμού, στη συνέχεια είναι η εξήγηση, που μας βοηθά να αντιληφθούμε γιατί μια δήλωση είναι αληθής και τέλος η συστηματοποίηση, που αφορά την οργάνωση των ισχυρισμών δημιουργώντας έναν παραγωγικό συλλογισμό. Οι De Villiers (1990) και Tall (1989) εκτός από τις τρεις βασικές συμπεριλαμβάνουν και άλλες λειτουργίες όπως ανακάλυψη, επικοινωνία, νοητική πρόκληση, και αισθητική.

Η απόδειξη είναι μια δημόσια δραστηριότητα επαλήθευσης και ακολουθεί τη βεβαιότητα, μιας και αυτή επιτυγχάνεται από άλλα μέσα και όχι μόνο από την εφαρμογή μιας λογικής απόδειξης (Bell, 1976). Ο Schoenfeld θεωρεί ότι το μαθηματικό επιχείρημα γίνεται εργαλείο μεταξύ αυτού που ο μαθηματικός υποπτεύεται ότι είναι αλήθεια και αυτού που ξέρει ότι είναι αλήθεια.

Η δεύτερη λειτουργία βοηθά το μαθητή να κατανοήσει το αποτέλεσμα και να διαπιστώσει γιατί είναι αληθές. Σε αυτή τη λειτουργία σύμφωνα με τους Coe και Ruthven (1994) φαίνεται να δίνεται λιγότερη έμφαση, ίσως λόγω του ότι οι περισσότερες έρευνες γύρω από την απόδειξη γίνονται γύρω από μια φιλοσοφική και όχι παιδαγωγική σκοπιά. Άλλοι ερευνητές θεωρούν ότι η λειτουργία της απόδειξης ως εξήγηση είναι μεγαλύτερης σημασίας από αυτής της εγκυρότητας. Όπως αναφέρει ο Albers, παρόλο που ο πολύ γνωστός Paul Halmos δήλωσε πως η απόδειξη των τεσσάρων χρωμάτων μέσω δυναμικού περιβάλλοντος τον έπεισε, προτιμούσε μια πιο κατανοητή απόδειξη. Αλλά και οι Manin και Bell θεωρούν πως η εξήγηση αποτελεί κριτήριο μιας καλής απόδειξης, που θα μας κάνει πιο σοφούς.

Οι Coe και Ruthven (1994) αναφέρουν επίσης ότι «η τρίτη λειτουργία παρουσιάζει τη λογική δομή των ιδεών που αποτελούν παραγωγικές αλυσίδες ενός συλλογισμού. Η συστηματοποίηση συνδέεται στενά με την προηγούμενη λειτουργία, αφού η μάθηση των Μαθηματικών αποτελείται από συνδέσεις μεταξύ των ιδεών. Η διαφορά βρίσκεται στο γεγονός ότι η λογική δομή σχετίζεται με τυπικά, σαφή επιχειρήματα, που είναι δημόσια αποδεκτά και επιβεβαιώνονται από ρητούς κανόνες, ενώ η κατανόηση είναι περισσότερο προσωπική, έμμεση και ανακριβής στις συνδέσεις της» (σελ. 3).

3.3 Δυσκολίες των μαθητών/τριών στην απόδειξη

Από πολύ μικρή ηλικία οι μαθητές/τριες φαίνεται να αναπτύσσουν σε μεγάλο βαθμό ικανότητες λογικού συλλογισμού και αιτιολόγησης των επιχειρημάτων τους σε κοινωνικές καταστάσεις. Παρόλα αυτά δυσκολεύονται να αντιληφθούν την έννοια της μαθηματικής απόδειξης και του παραγωγικού συλλογισμού (Hanna, 2008).

Παρόλο που η λογική εξάρτηση μιας δήλωσης αναφορικά με τα αξιώματα και τα θεωρήματα της θεωρίας λαμβάνεται υπ’ όψιν, προκύπτει το θέμα της κατανόησης, δεδομένου ότι αναφέρεται στους δεσμούς ανάμεσα στα νοήματα που περιλαμβάνονται στη δήλωση και στα επιχειρήματα. Από τη μία αυτοί οι δεσμοί μπορεί να μην εκφράζονται απαραίτητα μέσω της δομής της λογικής συνέπειας και από την άλλη, όταν απαιτείται, είναι απίθανο να διατυπωθεί και να αποδειχθεί ο λογικός δεσμός ανάμεσα σε δύο δηλώσεις χωρίς καμιά αναφορά στα νοήματα (Mariotti, 2006).

Η πιο συνηθισμένη δυσκολία που προβάλλουν οι μαθητές/τριες στη απόδειξη εμφανίζεται στον έλεγχο της σύνθετης σχέσης μεταξύ της μαθηματικής επαλήθευσης, που έχει τις ρίζες της σε ένα θεωρητικό πλαίσιο και της κοινής αίσθησης της επαλήθευσης, που έχει τις ρίζες στην εμπειρική επιβεβαίωση. Όχι μόνο στο Δημοτικό αλλά και στο Λύκειο και σε πανεπιστημιακό επίπεδο, οι μαθητές/τριες και φοιτητές φαίνεται να μην έχουν την ικανότητα να δώσουν μαθηματικά επαρκείς απαντήσεις (Mariotti, 2006).

Σε έρευνα που έγινε στην Αμερική σε μαθητές/τριες Λυκείου σε ένα μάθημα Γεωμετρίας, αφού οι μαθητές/τριες είχαν εισαχθεί στην παραγωγική απόδειξη, τους ζητήθηκε να συγκρίνουν και να ξεχωρίσουν δύο επιχειρήματα, μια παραγωγική απόδειξη και ένα επιχείρημα που περιλάμβανε 4 παραδείγματα, ενώ είχαν διδαχθεί τις διαφορές μεταξύ τους. Ορισμένοι από τους μαθητές/τριες δε θεώρησαν ότι υπήρχαν διαφορές ανάμεσα στα στοιχεία και την απόδειξη και αναλογίστηκαν τα εμπειρικά στοιχεία ως επαρκή απόδειξη για μια δήλωση για όλες τις περιπτώσεις των δοθέντων τριγώνων και ότι η απόδειξη είναι απλώς στοιχείο για έναν ισχυρισμό (Selden & Selden, 2007).

Η σύγκριση μεταξύ της εκτίμησης της αλήθειας μέσω πραγματολογικής επαλήθευσης και λογικής επιβεβαίωσης αναφορικά με παραγωγικά συμπεράσματα οδηγεί στη σκέψη για το αποτέλεσμα της πραγματολογικής επιβεβαίωσης για την εγκυρότητα μιας δήλωσης. Φυσικά εμφανίζονται διάφορες συμπεριφορές σύμφωνα με μια εμπειρική και μια θεωρητική προσέγγιση: παρόλο που η τυπική απόδειξη παρέχει μια γενική εγκυρότητα σε μια μαθηματική δήλωση, περαιτέρω έλεγχοι φαίνεται να είναι επιθυμητοί ώστε να επιβεβαιωθεί η εγκυρότητα (Mariotti, 2007).Τα παιδιά φαίνεται να αντιμετωπίζουν με σκεπτικισμό την ικανότητα της παραγωγικής απόδειξης να εγγυηθεί ότι δεν πρόκειται να υπάρξουν αντιπαραδείγματα (Chazan, 1993).

Ο Duval δίνει έμφαση στις διαφορετικές προσεγγίσεις της απόδειξης, υπογραμμίζοντας την αντίθεση μεταξύ της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης. Από τη μια η επιχειρηματολογία αποτελείται από ρητορικά μέσα, που επιστρατεύονται για να πείσουν για την αλήθεια ή την αναλήθεια μιας δήλωσης, ενώ η απόδειξη αποτελείται από λογική συνέπεια των αποτελεσμάτων που αναδεικνύουν τη θεωρητική εγκυρότητα της δήλωσης (Mariotti, 2007).

Ένα από τα κυριότερα χαρακτηριστικά της απόδειξης είναι η κοινωνική της διάσταση, δηλαδή το γεγονός ότι νοηματοδοτείται όσον αφορά την κοινωνία μέσα στην οποία επικοινωνείται ο βαθμός αποδοχής των επιχειρημάτων. Στο σχολείο, αυτή η κοινωνία είναι η τάξη, όπου ο καθηγητής γίνεται ο μεσολαβητής, που παρουσιάζει στους μαθητές/τριες τη μαθηματική εγκυρότητα (Mariotti, 2007).

Τα παιδιά φαίνεται να κάνουν τη διάκριση μεταξύ εκείνων των αποδείξεων των οποίων τα επιχειρήματα θα μπορούσαν να αποσπάσουν καλύτερο βαθμό και εκείνων που οι ίδιοι θα μπορούσαν να υιοθετήσουν. Στην πρώτη κατηγορία τα αλγεβρικά επιχειρήματα είναι δημοφιλή, ενώ στη δεύτερη οι μαθητές/τριες προτιμούν επιχειρήματα, που εκείνοι μπορούν να αξιολογήσουν και να θεωρήσουν πειστικά και επεξηγηματικά, χωρίς να συμπεριλαμβάνουν τα αλγεβρικά επιχειρήματα (Healy & Hoyles, 2000).

3.4 Η απόδειξη ως επίλυση προβλήματος

Πολλοί ερευνητές αναφέρονται στην απόδειξη, δίνοντας βάση στις πεποιθήσεις των μαθητών/τριών και σε παράγοντες που αφορούν το κομμάτι του θυμικού, καθώς η απόδειξη επηρεάζει τη συμπεριφορά των μαθητών/τριών κατά την ενασχόλησή τους με αυτή (Mamona-Downs&Downs, 2005). Ο Weber (2001) ορίζοντας τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος ως μια αποδεικτική κατασκευή ανέδειξε τη μεταξύ τους σύνδεση. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι σε μια αποδεικτική διαδικασία ο μαθητής/τρια μπορεί να οδηγηθεί σε πολλά έγκυρα συμπεράσματα, αλλά λίγα από αυτά είναι κατάλληλα για την απόδειξη, κάτι που συμβαίνει και σε μια διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Η εστίαση στην κατασκευή μιας απόδειξης ως μια διαδικασία επίλυσης προβλήματος είναι σημαντική, γιατί επιτρέπει την κατανόηση των ευρετικών που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί (Polya, 1945), των λόγων για τους οποίους οι μαθητές/τριες φτάνουν σε αδιέξοδο και δε γνωρίζουν πώς να συνεχίσουν (Weber, 2001) και των στρατηγικών που χρησιμοποιούν στις αποδείξεις καθώς και τις δυσκολίες που συναντούν κατά την εφαρμογή αυτών των στρατηγικών (Koedinger & Anderson, 1993).

Ο Weber (2005) αναδεικνύει ένα λόγο που οι δύο αυτές διαδικασίες είναι συνυφασμένες μεταξύ τους. «Η μάθηση γύρω από την αποδεικτική διαδικασία δεν εξαρτάται ούτε από το θεώρημα που αποδεικνύεται ούτε από την απόδειξη που παράγεται. Η προσέγγιση που επιλέγεται για την κατασκευή μιας απόδειξης επηρεάζει τις ευκαιρίες μάθησης που δημιουργούνται από την παραγωγή απόδειξης» (σελ. 2).Όταν ένας μαθητής/τρια ασχολείται με μια διαδικαστική απόδειξη, έχει την ευκαιρία να εφαρμόσει τεχνικές, χωρίς βέβαια να κατανοεί τυπικά γιατί η υπόθεση ισχύει και τις συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών. Με τη συντακτική απόδειξη μπορεί να εφαρμόσει θεωρήματα ή στρατηγικές, αλλά και πάλι δε θα έχει επιτύχει την κατανόηση του αποτελέσματος και τη σύνδεση του με τις έννοιες που είναι συνυφασμένες με την απόδειξη. Η σημασιολογική απόδειξη είναι αυτή που οδηγεί στην εννοιολογική κατανόηση της απόδειξης και των μαθηματικών εννοιών που συνδέοντα με αυτή (Weber, 2005).

3.5 Η απόδειξη στα σχολικά εγχειρίδια του Λυκείου

Όπως αναφέραμε η απόδειξη θεωρείται βασικός κλάδος των Μαθηματικών και γι’ αυτό θα έπρεπε να δώσουμε προσοχή στα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην τάξη κατά τη διδασκαλία της.

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν βασικό εργαλείο καθώς έχουν να κάνουν με τη διδασκαλία και τη μάθηση, συνδέοντας το πρόγραμμα σπουδών με τα όσα πρέπει να μάθουν οι μαθητές/τριες. (Stein, Remillard & Smith, 2007). Οι Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή (2014) αναφέρουν ότι «η διδασκαλία της απόδειξης, για να είναι ουσιαστική, οφείλει κατά το δυνατόν να αντικατοπτρίζει τον πλούτο της απόδειξης στην μαθηματική πρακτική. Επομένως το σχολικό βιβλίο, που αποτελεί και το μοναδικό εργαλείο του καθηγητή, δεν θα πρέπει να περιορίζεται στη διδασκαλία της απόδειξης μόνο ως προϊόν. Αντιθέτως, θα πρέπει να φέρνει σε επαφή τους μαθητές/τριες και τις μαθήτριες με τις τεχνικές της αποδεικτικής διαδικασίας, καθώς και να προβλέπει η απόδειξη εντός των σχολικών τάξεων να κατέχει λειτουργίες αντίστοιχες αυτών που έχει στην μαθηματική πρακτική» (σελ. 3).

Πολλές φορές βέβαια σε μια τάξη αποτυγχάνεται να δοθεί έμφαση σε όλες τις λειτουργίες της απόδειξης και ειδικά στο να αιτιολογήσουν οι μαθητές/τριες γιατί η απόδειξη ισχύει. Αυτό συμβαίνει είτε λόγω της περιορισμένης παιδαγωγικής και μαθηματικής γνώσης των καθηγητών πάνω σε αυτό το θέμα είτε στο ότι θεωρούν πολλές δραστηριότητες στην απόδειξη δύσκολες για τους περισσότερους μαθητές/τριες και θα πρέπει να εφαρμόζονται μόνο στη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Η Hanna (2000) αναφέρεται σε τρεις λόγους που τα σχολικά εγχειρίδια περιορίζουν την απόδειξη. Ο πρώτος είναι το γεγονός ότι η απόδειξη διδάσκεται στους μαθητές/τριες που επιδιώκουν να αποκτήσουν πανεπιστημιακή εκπαίδευση, ο δεύτερος το ότι τα ευρετικά επιχειρήματα βοηθούν περισσότερο στην επιχειρηματολογία και τη δικαιολόγηση και ο τρίτος το ότι η χρήση των νέων τεχνολογιών θεωρείται αποτελεσματικότερη της απόδειξης όσον αφορά τη μαθηματική αιτιολόγηση.

Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου παρατηρούμε ότι η μορφή που παρουσιάζεται η απόδειξη είναι πολύ συγκεκριμένη. Είτε θα παρουσιάζεται ένα θεώρημα και στη συνέχεια η απόδειξή του είτε αντίστροφα. Ακόμα και οι ασκήσεις που παρουσιάζονται στη μορφή «αποδείξτε ότι», στην πραγματικότητα απαιτούν από τους μαθητές/τριες να αποφανθούν για την εγκυρότητα της δοθείσης δήλωσης. Τέτοιου είδους ασκήσεις δεν είναι τόσο αποτελεσματικές στο να προκαλέσουν τους μαθητές/τριες για την παραγωγή επιχειρημάτων. Αντίθετα ασκήσεις που απαιτούν την παραγωγή εικασίας ενισχύουν το συλλογισμό και αποτελούν χρήσιμες προσεγγίσεις απόδειξης στη σχολική τάξη.

Ακόμα και ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα θεωρήματα δεν αναδεικνύει το γιατί ισχύουν, αν και η πλειοψηφία των ανεπτυγμένων εφαρμογών και των αποδεικτικών ασκήσεων έχουν σαν στόχο την ενίσχυση της λειτουργίας της εξήγησης και της συστηματοποίησης. Η αλήθεια τους πιστοποιείται λόγω των προηγούμενων μαθηματικών εμπειριών. Οι μαθητές/τριες εμπλέκονται μέσω των εμπειριών και των γνώσεων τους, με τρόπο που τους καλεί να θυμηθούν όσα ήδη γνωρίζουν. Σε αυτό το πλαίσιο, κατασκευάζεται η αντίληψη ότι τα εν λόγω αποτελέσματα είναι αληθή, διότι οι μαθητές/τριες τα έχουν ήδη διδαχθεί, ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν επιπλέον επιχειρήματα για την ισχύ του θεωρήματος (είτε παραδείγματα, είτε μη ρητή απόδειξη). Έτσι, επιδιωκόμενη ενέργεια από πλευράς μαθητών/τριών είναι να θυμηθούν τα θεωρήματα και να τα χρησιμοποιούν και όχι να αναζητούν τους λόγους που τα καθιστούν αληθή. Δηλαδή μέσα από το σχολικό βιβλίο δηλαδή, η απόδειξη αναδεικνύεται ως προϊόν και όχι σαν διαδικασία επομένως δεν αντιστοιχίζεται με τη μαθηματική πρακτική.

Παρόλα αυτά κατάλληλα σχεδιασμένα σχολικά βιβλία μπορούν να παρέχουν πλούσιες δυνατότητες στους μαθητές/τριες ώστε να ενασχοληθούν με το κομμάτι της αιτιολόγησης και απόδειξης σε ένα συνεχή και σταθερό τρόπο. Επιπλέον τα σχολικά βιβλία μπορούν να προσφέρουν οδηγίες στους καθηγητές για το πώς να αντιμετωπίσουν μαθηματικά και παιδαγωγικά θέματα, που μπορεί να προκύψουν στην τάξη καθώς προσπαθούν να υποστηρίξουν την ενασχόληση των μαθητών/τριών με την απόδειξη και την αιτιολόγησή της.

3.6 Αξιολόγηση αποδείξεων από τους καθηγητές

Στην πράξη σπάνια μια απόδειξη είναι λεπτομερής ˙ συχνά σημειώνονται παραλείψεις είτε στην παραγωγική δικαιολόγηση είτε κατά τη χρήση ενός διαισθητικού επιχειρήματος, που δε συνοδεύεται από τυπική δικαιολόγηση που βασίζεται σε ακριβείς ορισμούς είτε στην εισαγωγή μεταβλητών χωρίς να διευκρινίζεται ο σκοπός τους (Miller, Infante & Weber, 2018).

Ο σκοπός της απόδειξης και στη μαθηματική κοινότητα και στη μαθηματική τάξη δεν είναι μόνο να πείσει τους μαθητές/τριες ότι μια εικασία είναι αληθής, αλλά και να παρέχει μαθηματική γνώση. Σύμφωνα με το Resnick οι μαθητές/τριες μαθαίνουν Μαθηματικά μέσω της αξιολόγησης της κατανόησής τους. Όμως αν στα τεστ κατανόησης τούς ζητείται να παράγουν μια απόδειξη ρουτίνας, το πιο πιθανό είναι να αναπτύξουν μια επιφανειακή κατανόηση της απόδειξης (Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff, 2012).

Όσον αφορά την αξιολόγηση των αποδείξεων παρατηρείται ότι δεν υπάρχει ομοιότητα στο πώς οι μαθηματικοί βαθμολογούν τις αποδείξεις των μαθητών/τριών κάτι που συμβαίνει ακόμα και με μια απόδειξη που οι μαθηματικοί εκτιμούν σωστή. Αυτό πιθανόν παρατηρείται καθώς, όταν οι μαθηματικοί βαθμολογούν την απόδειξη ενός μαθητή/τριας δε βαθμολογούν αυστηρά όσα γράφουν, αλλά στην πραγματικότητα με αυτό τον τρόπο σχηματίζουν ένα μοντέλο για την κατανόηση των μαθητών/τριών. Πολλές φορές και οι ίδιοι στη διδασκαλία τους, δε δίνουν τέλειες αποδείξεις, αλλά εστιάζουν στην ενίσχυση της κατανόησης. Οι εκτιμήσεις τους για τη δουλειά των μαθητών/τριών γύρω από την απόδειξη, βασίζονται στην ποιότητα του συλλογισμού των μαθητών/τριών και στο πόσο καλά κατανοούν γιατί οι ισχυρισμοί είναι αληθείς και όχι στη γλώσσα που χρησιμοποιούν για να τα εκφράσουν (Miller, Infante & Weber, 2018).

Το μοντέλο αξιολόγησης χρησιμοποιείται για να εξετάσει πώς αναπτύσσεται η κατανόηση της απόδειξης στους μαθητές/τριες και αξιολογεί διαφορετικά μέσα για τη βελτίωσή της. Με αυτό τον τρόπο οι καθηγητές πληροφορούνται τι καταλαβαίνουν οι μαθητές/τριες από μια δοθείσα απόδειξη. Ένας τρόπος για να αξιολογήσουμε αν ένας μαθητής/τρια έχει κατανοήσει μια απόδειξη είναι να εξετάσουμε κατά πόσο επιτυγχάνονται οι στόχοι της απόδειξης για το συγκεκριμένο μαθητή/τρια ή κατά πόσο μπορεί να εφαρμόσει τις μεθόδους της απόδειξης σε άλλες καταστάσεις (Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff, 2012).

Ένα μοντέλο αξιολόγησης της κατανόησης της απόδειξης από φοιτητές Μαθηματικών αποτελείται από τα εξής δύο είδη αξιολόγησης:

➢ Τρία τοπικά (local) είδη αξιολόγησης:
- Σημασία των όρων και των δηλώσεων.
- Το λογικό στάτους των δηλώσεων και του πλαισίου της απόδειξης.
- Δικαιολόγηση των ισχυρισμών.

➢ Τέσσερις ολιστικοί (holistic) τύποι αξιολόγησης:
- Ανακεφαλαίωση μέσω των βασικών ιδεών της απόδειξης.
- Αναγνώριση της δομής.
- Μεταφορά των γενικών ιδεών ή μεθόδων σε άλλο περιεχόμενο.
- Επεξήγηση με παραδείγματα.

(Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff, 2012)

3.7 Στόχοι και ανάγκες μαθητών/τριών/μαθητριών του Λυκείου γύρω από την απόδειξη

Προφανώς οι εμπειρίες των μαθητών/τριών με την απόδειξη διαφέρουν από αυτές των μαθηματικών, αφού διαφέρουν και οι στόχοι τους. Οι μαθητές/τριες στο σχολείο θεωρούν την απόδειξη σαν ένα μάθημα και δεν ενδιαφέρονται να ανακαλύψουν νέα μαθηματικά αποτελέσματα. Από τη δική τους οπτική, από τη στιγμή που δεν επιλύουν ένα πρόβλημα, η απόδειξη θεωρείται μέσο για την επιβεβαίωση ισχυρισμών χωρίς να αναδεικνύει τις συνδέσεις ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες (Herbst & Brach, 2006).

Για την εισαγωγή μιας νέας έννοιας ή γνώσης είναι απαραίτητη η ανάδειξη της ανάγκης που μας οδήγησε σε αυτή (Harel, 1998). Ο Balacheff (1991) ισχυρίζεται ότι αυτός είναι και ο λόγος που οι μαθητές/τριες δεν ασχολούνται με την απόδειξη. Δεν τους έχει δημιουργηθεί η ανάγκη για ενασχόληση με αποδεικτικές διαδικασίες. Οι Harel και Sowder (1998, 2007) δημιούργησαν πέντε πνευματικές ανάγκες των μαθητών/τριών, που ευθυγραμμίζονται με τους ρόλους που έχει η απόδειξη στα Μαθηματικά : βεβαιότητα, αιτιότητα, υπολογισμός, επικοινωνία και δομή.

Η βεβαιότητα αποτελεί έναν από τους κεντρικούς ρόλους της απόδειξης και ικανοποιεί την ανάγκη των μαθητών/τριών για επαλήθευση κατά την ενασχόλησή τους με μια αποδεικτική διαδικασία. Οι περισσότεροι μαθητές/τριες από τη στιγμή που επαληθεύουν προσωπικά έναν ισχυρισμό βασιζόμενοι σε εμπειρικά επιχειρήματα, δε βρίσκουν την ανάγκη να κάνουν μια μαθηματική απόδειξη. Ακόμα και σε περιπτώσεις που τους δίνεται η τυπική απόδειξη ενός θεωρήματος οι διαισθητικές αντιλήψεις δεν παύουν να ισχύουν. Αντίθετα αναμιγνύονται με την νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται για να σχηματίσουν τις προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών/τριών. Γι’ αυτούς είναι απαραίτητο το αίσθημα της συμφωνίας, δηλαδή η επαλήθευση της τυπικής απόδειξης μέσα από επιπλέον παραδείγματα (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidronκαι Winicki- Landman, 2012).

Οι Zaslavsky και συν. (2012) αναφέρουν ότι η αιτιότητα σχετίζεται με τη λειτουργία της εξήγησης και συγκεκριμένα με την ανάγκη των μαθητών/τριών να αποκτήσουν διορατικότητα και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται στην απόδειξη. «Αυτή η ανάγκη που διαφωτίζει όσον αφορά το γιατί, ποικίλει από άτομο σε άτομο και από πλαίσιο σε πλαίσιο» (σελ. 7). Μπορεί να εμφανιστεί σε καταστάσεις, στις οποίες παρατηρείται αβεβαιότητα από το μαθητή/τρια ενώ ο καθηγητής καλείται να τον ενθαρρύνει και να τον κινητοποιήσει προς την αναζήτηση εξηγήσεων (Movshovitz-Hadar & Hadass, 1990).

Ο Harel αναφέρει ότι η ανάγκη υπολογισμού αφορά την τάση των ανθρώπων να προσδιορίζουν, να καθορίζουν ή να κατασκευάζουν ένα αντικείμενο (όπως αναφέρεται στο Zaslavsky κ.ά., 2012). Η ανάγκη της επικοινωνίας παρουσιάζεται στην περίπτωση που οι μαθητές/τριες θέλουν να εξηγήσουν γιατί ισχύει ένας ισχυρισμός και ίσως δυσκολεύονται να διατυπώσουν συστηματικά το συλλογισμό τους. Επομένως τροποποιούν τους συμβολισμούς τους για να εκφράσουν καλύτερα αυτό που έχουν στο μυαλό τους (Thompson, 1992) ενώ η ανάγκη της δομής αναφέρεται στην ανάγκη να ξαναοργανώσει κάποιος τις πληροφορίες σε μια λογική δομή (Zaslavsky κ.ά., 2012).

Πολλές φορές οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν την απόδειξη σαν άσκηση που επαληθεύει έναν ισχυρισμό παρά σαν εργαλείο με το οποίο μαθαίνουμε (Healy and Hoyles 2000; Herbst and Brach, 2006). Οι Zaslavsky και συν. (2012) αναφέρουν ότι «όταν η απόδειξη θεωρείται εργαλείο με το οποίο μαθαίνουμε και επικοινωνεί μεθοδολογίες, η επικοινωνία συνδέεται με την ανάγκη του υπολογισμού και της δομής» (σελ. 8).

«Οι μαθητές/τριες συχνά δε βλέπουν το λόγο να αναπτύξουν μια απόδειξη σε ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο και έχουν βαθιά ριζωμένες παρανοήσεις για το τι σημαίνει να επαληθεύουν μαθηματικούς ισχυρισμούς. Το πρώτο αντανακλά την έλλειψη της εκτίμησης της ανάγκης για απόδειξη σε τοπικό επίπεδο, ενώ το επόμενο αντανακλά την έλλειψη εκτίμησης της ευρύτερης ανάγκης για απόδειξη ως μαθηματική κατασκευή. Αυτά τα δύο αλληλοσυνδέονται. Ένας μαθητής/τρια που δεν καταλαβαίνει τι μετρά σαν στοιχείο στα Μαθηματικά, δύσκολα θα δει το λόγο να αναπτύξει μια απόδειξη (όπως την αντιλαμβάνονται οι μαθηματικοί) σε ένα περιεχόμενο με συγκεκριμένες δραστηριότητες» (σελ. 9).

Συχνά όμως η ανάγκη για απόδειξη επηρεάζεται από εξωτερικές ανάγκες. Η συμπεριφορά των μαθητών/τριών κατά την ενασχόλησή τους με μια αποδεικτική διαδικασία επηρεάζεται από τους καθηγητές, αφού πείθονται μέσω της διαβεβαίωσης από αυτούς. Συνεπώς οι μαθητές/τριες αποτυχαίνουν να κατανοήσουν γιατί μια δήλωση είναι αληθής, αφού στοχεύουν στην εφαρμογή αποδεικτικών διαδικασιών που θεωρούν ότι αναμένουν οι καθηγητές (Balacheff, 1991). Επομένως οι τύποι των επιχειρημάτων που πείθουν προσωπικά τους μαθητές/τριες δεν είναι απαραίτητα οι ίδιοι τύποι που χρησιμοποιούν για να πείσουν τους άλλους, αφού όπως είπαμε και παραπάνω οι μαθητές/τριες πείθονται εύκολα.

Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών αναγνωρίζουν την αντίθεση μεταξύ των δύο λειτουργιών της απόδειξης: πείθομαι και πείθω κάποιο κοινό (Bell, 1976; Hersh, 1993; de Villiers, 1996; Segal, 2000; Raman, 2002, 2003; Mejia-Ramos& Tall, 2005). Αρχικά η Segal (2000) διαχώρισε τις ιδιωτικές αποδείξεις από τις δημόσιες αποδείξεις ενώ ο Μούτσιος-Ρέντζος (2009) πρότεινε την ανάλυση της κατηγορίας των δημοσίων αποδεικτικών σχημάτων σε ιδιωτικά αποδεικτικά σχήματα που αφορούν το «απόδειξε σε εσένα» και τα κοινωνικά αποδεικτικά σχήματα, δηλαδή την «απόδειξη σε άλλους». Τα τελευταία διαχωρίζονται με τη σειρά τους στα δημόσια αποδεικτικά σχήματα, που σχετίζονται με την απόδειξη σε έναν φίλο και τα δημοσιευμένα αποδεικτικά σχήματα που αφορούν την απόδειξη σε έναν εχθρό.

Οι μαθητές/τριες χρειάζεται πρώτα να πείσουν τον εαυτό τους, μετά ένα φίλο και μετά έναν εχθρό, χωρίς βέβαια αυτό να σημαίνει ότι τα επιχειρήματα που πείθουν τον εαυτό μας, πείθουν και τους άλλους. Τα επιχειρήματα που πείθουν τον εαυτό μας, ένα φίλο ή έναν εχθρό διαφέρουν ως προς την εγκυρότητα. Από την πλευρά τους οι μαθητές/τριες πείθονται μέσω εμπειρικών αποδείξεων, οι οποίες είναι πιο κοντά στον καθημερινό συλλογισμό, ενώ η μαθηματική κοινότητα μέσω μαθηματικών αποδείξεων. Οι μαθητές/τριες, δηλαδή προτιμούν τις λογικές αποδείξεις, καθώς πιστεύουν ότι αληθεύουν σε όλες τις περιπτώσεις, ικανοποιώντας έτσι το αίσθημα της βεβαιότητας και ενισχύοντας έτσι την ψυχολογική πλευρά της απόδειξης (Segal, 2000).

4. Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΜΕΛΕΤΗ

Η απόδειξη κατέχει κεντρικό ρόλο τόσο στη διδασκαλία όσο και στη μάθηση των Μαθηματικών. Ειδικά στο περιβάλλον της τάξης αποτελεί βασικό εργαλείο, που προωθεί τη μαθηματική γνώση, αξιολογεί την εγκυρότητα μαθηματικών ισχυρισμών και εξηγεί γιατί μια μαθηματική δήλωση αληθεύει. Για να καθοριστεί ο ρόλος της θα πρέπει πρώτα να σκεφτούμε όλες τις λειτουργίες της, που εκτελούνται στη μαθηματική πρακτική, και ειδικά τη λειτουργία εκείνη που βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα το νόημα του μαθηματικού ισχυρισμού που αποδεικνύεται.
Επειδή στην τάξη για μερικούς μαθητές/τριες η απόδειξη θεωρείται απλά μια άσκηση που αιτιολογεί τι είναι προφανές (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron&Winicki-Landman, 2012), πολλές φορές παρατηρείται ότι οι ίδιοι δε βλέπουν το λόγο να αναπτύξουν απόδειξη ή ακόμα και όταν το κάνουν δεν είναι σίγουροι για τη λογική την οποία πρέπει να ακολουθήσουν, τα βήματα που πρέπει να εκτελέσουν, αλλά και αν τελικά κατάφεραν να την ολοκληρώσουν. Μπορεί να κατανοούν και να κάνουν αποδείξεις, αλλά να μην είναι βέβαιοι για τη γενίκευση μιας απόδειξης ή για το αν χρειάζονται περαιτέρω εμπειρικοί έλεγχοι (Herbst & Brach, 2006). Στόχος των καθηγητών των Μαθηματικών είναι η βελτίωση και ενίσχυση της επίγνωσης των μαθητών/τριών όσον αφορά τους τύπους επιχειρημάτων και τις αποδείξεις, που είναι αποδεκτές για την απόδειξη διάφορων δηλώσεων (Tabach, Levenson, Barkai, Tirosh, Tsamir, &Dreyfus, 2010).

Καθώς η ανάπτυξη της επίγνωσης γύρω από την απόδειξη, μπορεί να παρέχει έναν τρόπο σκέψης, που ενδυναμώνει τη μαθηματική κατανόηση και τη φύση του ανθρώπινου συλλογισμού, στην παρούσα έρευνα μελετάμε την επίγνωση για την απόδειξη στην άλγεβρα του Λυκείου.

Στη βιβλιογραφία ο όρος «επίγνωση» δεν έχει καθολική σημασία, με αποτέλεσμα κάθε φορά που χρησιμοποιείται να μη γνωρίζουμε τι ακριβώς σημαίνει. Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε την επίγνωση των μαθητών/τριών στην απόδειξη του Λυκείου και συγκεκριμένα την επίγνωση των μαθητών/τριών γύρω από την απόδειξη ως προϊόν και ως διαδικασία.

Η μελέτη αυτή γίνεται εστιάζοντας στις ολιστικές αξιολογήσεις αποδεικτικών επιχειρημάτων των μαθητών/τριών για την απόδειξη, στο βαθμό βεβαιότητάς τους για αυτές και στα συναισθήματα για το βαθμό βεβαιότητας. Συνεχίζουμε εμβαθύνοντας στις αξιολογήσεις τους για τα αποδεικτικά επιχειρήματα, τον πιθανά νέο βαθμό βεβαιότητας για αυτές απόψεις τους για την απόδειξη, στον πιθανά καινούριο βαθμό βεβαιότητας και στα συναισθήματα που νιώθουν οι μαθητές/τριες για τη βεβαιότητα τους..

Θα διερευνήσουμε επομένως τα εξής:

1. Πώς αποτυπώνεται η επίγνωση για την απόδειξη (όπως εννοιοποιείται στην παρούσα έρευνα) σε μαθητές και μαθήτριες Α΄ Λυκείου;
2. Ποια η σχέση αυτής της επίγνωσης με διαφορετικούς τύπους αποδείξεων και αποδεικτικών επιχειρημάτων;
3. Ποιες οι ποιοτικές διαφοροποιήσεις στην επίγνωση μαθητών και μαθητριών υψηλής επίδοσης στην απόδειξη;

5. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

5.1 Μέθοδοι και διαδικασίες

5.1.1 Δείγμα- διαδικασίες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Απρίλιο του 2019 σε ένα δημόσιο Λύκειο της επαρχίας με τη συμμετοχή 59μαθητών/τριών της Α΄ Λυκείου. Κατόπιν συνεννοήσεως και αφού παραχωρήθηκε η άδεια του Διευθυντή για να γίνει η έρευνα, ξεκίνησε η διαδικασία της χορήγησης των ερωτηματολογίων στους μαθητές/τριες. Αρχικά τους εξηγήσαμε το σκοπό της έρευνας, την καταγραφή δηλαδή των απόψεων και τα βιωμάτων τους για τα Μαθηματικά και τη μαθηματική απόδειξη, με στόχο τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης. Αφού δόθηκαν τα ερωτηματολόγια και οι απαραίτητες οδηγίες, κλήθηκαν να τα συμπληρώσουν παρουσία του εκπαιδευτικού τους. Διευκρινίστηκε ότι είναι ανώνυμα, δεν αξιολογούνται από αυτό και ότι η συμπλήρωσή τους δεν είναι υποχρεωτική. Η διαδικασία συμπλήρωσης ολοκληρώθηκε σε δύο διδακτικές ώρες, καθώς το ερωτηματολόγιο αποτελούνταν από δύο ενότητες. Η πρώτη διήρκησε 20 λεπτά και η δεύτερη 30. Όλα τα ερωτηματολόγια είχαν κωδικοποιηθεί ώστε να μπορεί να πραγματοποιηθεί ταύτιση μεταξύ μαθητή/μαθήτριας και των δύο φάσεων του ερωτηματολογίου. Μετά από δύο εβδομάδες διεξήχθησαν οι συνεντεύξεις σε 3 από τους μαθητές/τριες υψηλής επίδοσης που συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια.

5.1.2 Ερευνητικά εργαλεία

Το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές/τριες περιείχε ερωτήσεις κλειστού τύπου και βασίστηκε σε ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν σε άλλες έρευνες και έχουν ελεγχθεί για την εγκυρότητά τους. Από τη στιγμή που στην προσέγγισή μας για τη μαθηματική επίγνωση στην απόδειξη βασιζόμαστε στη διάσταση του θυμικού, εξετάζουμε στάσεις, πεποιθήσεις, συναισθήματα, απόψεις και ταυτότητες, ώστε να δημιουργήσουμε και μια γενικότερη εικόνα για το προφίλ των μαθητών/τριών. Συγκεκριμένα το ερωτηματολόγιο αποτελούνταν από δύο ενότητες. Η πρώτη ενότητα περιείχε έξι μέρη και η δεύτερη δύο. Τα έξι μέρη της πρώτης ενότητας εξετάζουν την αυτό-αποτελεσματικότητα (self-efficacy) των μαθητών/τριών, τις απόψεις (views) και τις στάσεις τους προς τα Μαθηματικά, την αυτό-αποτελεσματικότητά τους και τις πεποιθήσεις τους για την απόδειξη και την ταυτότητα τους (identity).Η δεύτερη ενότητα αποτελούνταν από δύο μέρη, τα οποία εξετάζουν την αξιολόγηση αποδείξεων από τους μαθητές/τριες.

Το πρώτο εργαλείο ήταν αυτό που χρησιμοποιήθηκε στο πρώτο μέρος και εξέταζε την αυτό-αποτελεσματικότητα των μαθητών/τριών γενικότερα στα Μαθηματικά. Βασίστηκε στη διπλωματική εργασία της May (2009), που κατασκεύασε ένα έγκυρο, αξιόπιστο και αποτελεσματικό ερωτηματολόγιο για την αξιολόγηση της αυτό-αποτελεσματικότητας και του άγχους φοιτητών στα Μαθηματικά. Από αυτό χρησιμοποιήσαμε τις προτάσεις που εξέταζαν την αυτό-αποτελεσματικότητα και αφαιρέσαμε όσες εξέταζαν το άγχος. Συγκεκριμένα αντικαταστήσαμε τις φράσεις: «νιώθω νευρικός», «νιώθω άγχος», «φοβάμαι πως», «πιστεύω», «νιώθω αυτοπεποίθηση» με την έκφραση «μπορώ», σύμφωνα με τον οδηγό του Bandura για την κατασκευή ερωτηματολογίου αποτελεσματικότητας. Για να αυξήσουμε την αξιοπιστία της σκάλας χρησιμοποιήσαμε την κλίμακα που προτείνει και ο Bandura, από 0-100. Το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο μεταφράστηκε από εμάς καθώς δεν υπήρχε αντίστοιχη μετάφραση από έρευνες στην Ελλάδα.

Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου θέλουμε να εξετάσουμε τις επιστημολογικές απόψεις των μαθητών/τριών για τα Μαθηματικά (math epistemological views) και χρησιμοποιήσαμε το ερωτηματολόγιο από την έρευνα των Wood, Picots, Reid (2012). Οι ίδιοι στην έρευνά τους εξερευνούν τη μαθηματική ταυτότητα από την οπτική των φοιτητών των Μαθηματικών με σκοπό να μάθουν από αυτούς και να ορίσουν τις παιδαγωγικές προσεγγίσεις που προάγουν τη μαθηματική ταυτότητα. Συγκεκριμένα όρισαν τρεις τρόπους με τους οποίους οι φοιτητές κατανοούν τα Μαθηματικά και κυμαίνονται από την περιορισμένη άποψη ότι «τα Μαθηματικά είναι στοιχεία (components)», στη ευρύτερη άποψη ότι « τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με μοντέλα (is about models)» και στην ακόμα πιο ευρεία ότι «τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με τη ζωή (is about life)». Οι φοιτητές που βλέπουν τα Μαθηματικά ως στοιχεία και τεχνικές εστιάζουν σε ξεχωριστές μαθηματικές διαστάσεις, όπως η άποψη ότι τα Μαθηματικά είναι υπολογισμοί. Στη δεύτερη άποψη οι μαθητές/τριες βλέπουν τα Μαθηματικά ως τρόπο κατασκευής και χρήσης μοντέλων για να μεταφράσουν διαστάσεις της πραγματικής ζωής σε μαθηματική μορφή. Τέτοια μοντέλα είναι αναπαραστάσεις ειδικών καταστάσεων, όπως μια οικονομική διαδικασία ή ακόμα και καθολικές αρχές όπως ο νόμος της βαρύτητας. Η τελευταία άποψη είναι η πιο ευρεία και ολιστική και είναι αυτή κατά την οποία οι μαθητές/τριες βλέπουν τα Μαθηματικά σαν μια προσέγγιση της ζωής και ενός τρόπου σκέψης. Πιστεύουν δηλαδή ότι η πραγματικότητα μπορεί να αναπαρασταθεί με μαθηματικούς όρους. Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από 16 δηλώσεις με κλίμακα Likert 5 σημείων, που αντιπροσωπεύουν τις τρεις προαναφερθείσες απόψεις των μαθητών/τριών για τα Μαθηματικά.

Το τρίτο εργαλείο που χρησιμοποιήσαμε στο τρίτο μέρος του ερωτηματολογίου προέρχεται από την έρευνα των Limκαι Chapman (2013), που χρησιμοποιήθηκε μεταφρασμένο στα ελληνικά και με κλίμακα Likert 5 σημείων στην έρευνα της Λεοντίου (2015). Εξετάζει τις στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών και μέσα από αυτό αναδεικνύονται τρεις διαστάσεις των στάσεων: ευχαρίστηση, αυτοπεποίθηση και αξία. Η πρώτη διάσταση αφορά το βαθμό ευχαρίστησης των μαθητών/τριών κατά την ενασχόλησή τους με τα Μαθηματικά, η δεύτερη την αυτοπεποίθηση και αυτό-αντίληψή τους (self-concept) για την απόδοσή τους στα Μαθηματικά και η τρίτη τις πεποιθήσεις τους για τη χρησιμότητα, τη συνάφεια και την αξία των Μαθηματικών στις ζωές τους (Lim & Chapman, 2013, σελ. 146).

Το τέταρτο εργαλείο που χρησιμοποιήσαμε ήταν ένα ερωτηματολόγιο που εξέταζε την αυτό-αποτελεσματικότητα των μαθητών/τριών στις αποδείξεις. Για την κατασκευή του βασιστήκαμε στο πρώτο εργαλείο, που εξέταζε την αυτό-αποτελεσματικότητα στα Μαθηματικά από την έρευνα της May (2009) και διατυπώσαμε αντίστοιχες προτάσεις για την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη. Για παράδειγμα η πρόταση στο πρώτο ερωτηματολόγιο «Μπορώ να καταλάβω το μάθημα των Μαθηματικών» χρησιμοποιήθηκε και στο τέταρτο με μια μικρή παραλλαγή ως εξής: «Μπορώ να καταλάβω μια απόδειξη στα Μαθηματικά». Οι πρώτες 14 προτάσεις ήταν στην πραγματικότητα οι ίδιες με του πρώτου ερωτηματολογίου, αλλά εστίαζαν στο κομμάτι της απόδειξης. Οι προτάσεις 14-20 χρησιμοποιήθηκαν από την έρευνα των Hendricks και Millman (2013) για την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη. Στη συγκεκριμένη έρευνα οι μαθητές/τριες συμμετείχαν σε προχωρημένα μαθήματα στις αποδείξεις, όπου έπρεπε να αναγνωρίσουν πότε μια απόδειξη είναι σωστή και να κατασκευάσουν μια δική τους. Στη συνέχεια συμπλήρωναν το ερωτηματολόγιο που εξέταζε την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη. Εμείς χρησιμοποιήσαμε αυτό το ερωτηματολόγιο, μεταφράζοντας το στα ελληνικά, παραλείποντας όσες προτάσεις είχαν να κάνουν με τους στόχους του μαθήματος που διδάχτηκαν οι μαθητές/τριες, στη συγκεκριμένη έρευνα.

Στο πέμπτο μέρος του ερωτηματολογίου εξετάζονται οι πεποιθήσεις των μαθητών/τριών για την απόδειξη. Χρησιμοποιήσαμε το ερωτηματολόγιο από τη διπλωματική εργασία της Κόρδα (2018), η οποία βασίστηκε στην έρευνα του Almeida (2000), που μελέτησε τις απόψεις φοιτητών για την απόδειξη. Το ερωτηματολόγιο αποτελούνταν από 29 ερωτήσεις, που η καθεμιά υποδήλωνε και διαφορετική λειτουργία της απόδειξης και μετρήθηκε με κλίμακα Likert 5 σημείων.

Για το έκτο και τελευταίο μέρος του ερωτηματολογίου βασιστήκαμε στο θεωρητικό πλαίσιο των Καφούση, Μούτσιος-Ρέντζος και Χαβιάρης (2017), όπου ερευνήθηκε ο τρόπος με τον οποίο μαθητές/τριες Έκτης Δημοτικού αντιλαμβάνονται τον εαυτό τους σε σχέση με την επιτυχία τους στα Μαθηματικά. Το ερωτηματολόγιο μετρήθηκε με κλίμακα Likert 5 σημείων και αποτελούνταν από τρεις ερωτήσεις: 1) Πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύεις ότι είσαι; (self-identification), 2) Πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύουν οι φίλοι και οι φίλες σου ότι είσαι; (being-identified), 3) Πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύουν οι καθηγητές και οι καθηγήτριες των Μαθηματικών ότι είσαι; (being identified).

Στην επόμενη ενότητα του ερωτηματολογίου θέλουμε να εξετάσουμε την επίγνωση των μαθητών/τριών στην απόδειξη. Το έβδομο μέρος αποτελείται από μια εικασία στα πλαίσια ενός διαγωνίσματος που οι μαθητές/τριες καλούνται να αποδείξουν και στη συνέχεια δίνονται πέντε απαντήσεις μαθητών/τριών που να τη στηρίζουν. Η εικασία αποτελεί μια Πρόταση που βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Λυκείου και για την οποία δίνεται και η απόδειξή της. Οι απαντήσεις που επιλέξαμε να παρουσιάσουμε στους μαθητές/τριες βασίζονται στην έρευνα των Healy και Hoyles (2000)και στο θεωρητικό πλαίσιο του Balacheff (1988) για τους τύπους αποδεικτικών επιχειρημάτων.

Συγκεκριμένα δόθηκε στους μαθητές/τριες μια σωστή παραγωγική απόδειξη (Απάντηση 1), ένα εμπειρικό επιχείρημα που δηλώνει αφελή εμπειρισμό (Απάντηση 2), μια επίσης σωστή παραγωγική απόδειξη σε αφηγηματική γλώσσα (Απάντηση 3), ένα κρίσιμο πείραμα (Απάντηση 4), μια λάθος παραγωγική απόδειξη (Απάντηση 5),επειδή μας ενδιαφέρει ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές/τριες διακρίνουν το περιεχόμενο μιας απόδειξης και ένα οπτικό επιχείρημα που βασίζεται σε κοινές ιδιότητες ή μια γενική κατάσταση (Απάντηση 6).

Για κάθε απάντηση οι μαθητές/τριες καλούνται να απαντήσουν σε 7 ερωτήσεις. Στην πρώτη ο μαθητής επιλέγει την απάντηση που τον πείθει περισσότερο και στη δεύτερη το βαθμό στον οποίο είναι σίγουρος για αυτή του την κρίση, σε κλίμακα Likert 7 σημείων, με το 1 να δηλώνει ότι δεν είναι 'καθόλου σίγουρος' και το 7 'απόλυτα σίγουρος'. Με την πρώτη ερώτηση εξετάζουμε τις απόψεις τους στην απόδειξη, με τη δεύτερη το βαθμό βεβαιότητάς τους για τις απόψεις τους και στην τρίτη ζητώντας από τους μαθητές/τριες να κυκλώσουν τα συναισθήματα που νιώθουν για τις έως τώρα απαντήσεις τους, εξετάζουμε τα συναισθήματά τους για το βαθμό βεβαιότητάς τους. Στη συνέχεια θέλουμε να εμβαθύνουμε στις απόψεις των μαθητές/τριών για την απόδειξη. Σε αυτό το σημείο ζητάμε από τους μαθητές/τριες να αξιολογήσουν τα επιχειρήματα που τους δόθηκαν σε σχέση με την εγκυρότητα, τη γενίκευση και την εξήγηση. Θέλουμε δηλαδή να ελέγξουμε αν οι μαθητές/τριες θεωρούν ότι τα επιχειρήματα που τους δόθηκαν είχαν λάθη, αν η ιδέα μπορεί να γενικευτεί ή αν ισχύει για συγκεκριμένες περιπτώσεις και σε ποιο βαθμό εξηγούν την απόδειξη και τους πείθουν για την εγκυρότητά της. Οι ερωτήσεις 5 και 6 είναι ίδιες με τις ερωτήσεις 2 και 3, με τη διαφορά ότι σε αυτό το σημείο θέλουμε να εξετάσουμε το βαθμό βεβαιότητας για τις κρίσεις τους και τα συναισθήματά τους έως αυτό το σημείο. Με την ερώτηση 7 θέλουμε οι μαθητές/τριες να κρίνουν τι βαθμό θα έβαζε ο καθηγητής για καθένα από τα αποδεικτικά επιχειρήματα.

Στο όγδοο και τελευταίο μέρος του ερωτηματολογίου ζητείται από τους μαθητές/τριες να σημειώσουν την απόδειξη που θα επέλεγαν οι ίδιοι σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών και να αιτιολογήσουν αυτή τους την επιλογή. Σε αυτό το σημείο θέλουμε να εμβαθύνουμε ακόμα περισσότερο στις απόψεις των μαθητών/τριών για την απόδειξη, σκεπτόμενοι όλες τις προηγούμενες επιλογές τους και με τις δύο τελευταίες ερωτήσεις το βαθμό βεβαιότητας και τα συναισθήματά τους για αυτόν.

5.1.3 Μέθοδοι ανάλυσης ερωτηματολογίων

Για τη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων, διενεργήθηκε περιγραφική στατιστική με συσχετίσεις.

5.1.4 Μέθοδοι ανάλυσης συνεντεύξεων

Μετά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων επιλέξαμε τρεις μαθητές υψηλής επίδοσης για τη συνέντευξη. Οι ερωτήσεις που έγιναν στους μαθητές/τριες βασίστηκαν στους άξονες του ερωτηματολογίου. Η ανάλυση που επιλέχθηκε για τις συνεντεύξεις ήταν θεματική. Στην πρώτη ερώτηση ζητάμε από τους μαθητές/τριες να απαντήσουν ποια απόδειξη τους πείθει, χωρίς όμως να εμβαθύνουμε στους λόγους της επιλογής τους, μιας και σε αυτό το σημείο, δεν επιζητούμε να αναδείξουν τις μετά-γνωστικές στρατηγικές, που χρησιμοποίησαν και παραμένουμε σε μια επιφανειακή αξιολόγηση.

Στη συνέχεια τούς ζητάμε να εξηγήσουν το λόγο για το βαθμό βεβαιότητας των συναισθημάτων τους, ώστε να υπάρχει μετά η δυνατότητα της σύγκρισης πρότερων και τελικών συναισθημάτων, καθώς και πιθανής αλλαγής. Οι επόμενες ερωτήσεις βασίστηκαν στους τρεις άξονες, που εξέταζαν τις απόψεις των μαθητών/τριών, καθώς εμβαθύνουμε στην απόδειξη. Θέλουμε να αναδειχθούν οι λόγοι που οι μαθητές/τριες συμφωνούν ή όχι για την ορθότητα κάθε απόδειξης για το αν γενικεύεται και το κατά πόσο εξηγεί αυτό που πραγματεύεται.

Οι επόμενες ερωτήσεις αφορούν το βαθμό βεβαιότητας και τα συναισθήματά τους σε αυτό το σημείο και θέλουμε να αναδειχθούν ομοιότητες και διαφορές με τις αντίστοιχες ερωτήσεις, που κάναμε προηγουμένως.

Τέλος τους ζητάμε να μας αιτιολογήσουν την επιλογή της τελικής τους απάντησης, όπως επίσης και το βαθμό βεβαιότητας και τα τελικά τους συναισθήματα.

6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στη συγκεκριμένη έρευνα θέλουμε να μελετήσουμε την επίγνωση μαθητών/τριών Α΄ Λυκείου στην απόδειξη. Η μελέτη αυτή γίνεται έχοντας ως φακό τις διαστάσεις της επίγνωσης, που αναφέρθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο, την αυτό- αποτελεσματικότητα, τις στάσεις, τις ταυτότητες και τις απόψεις των μαθητών/τριών. Έχοντας υπό-φακό τους στόχους, τις ανάγκες και τα κίνητρα των μαθητών/τριών και κρατώντας τα ως σταθερές, εξετάζουμε τη σύνδεση της γνώσης, μετά- γνώσης, θυμικού και μετά- θυμικού στην απόδειξη. Συγκεκριμένα δόθηκε στους μαθητές/τριες ένα ερωτηματολόγιο, που μετρούσε τις διαστάσεις που προαναφέραμε, ενώ στη συνέχεια στα πλαίσια ενός διαγωνίσματος, δόθηκε μια εικασία με 6 απαντήσεις, τις οποίες οι μαθητές/τριες έπρεπε να αξιολογήσουν. Η κάθε απάντηση αποτελούνταν από μια απόδειξη που επέλεξε να κάνει κάποιος μαθητής/τρια για την εικασία που δόθηκε. Για τη μελέτη της επίγνωσης στην απόδειξη εξετάσαμε στην αρχή τις απόψεις των μαθητών/τριών για την απόδειξη, ζητώντας τους να αξιολογήσουν πόσο τους πείθουν κάποιες απαντήσεις, που επιχειρούσαν να αποδείξουν έναν ισχυρισμό. Στη συνέχεια τους ζητείται να επιλέξουν πόσο σίγουροι νιώθουν και μετά κυκλώσουν τα συναισθήματα που νιώθουν για τις απαντήσεις τους έως εκείνο το σημείο. Συνεχίζοντας την εκτενέστερη μελέτη για τις απόψεις των μαθητών για την απόδειξη, εμβαθύνουμε στην αξιολόγηση της κάθε απάντησης, ζητώντας από τους μαθητές/τριες να απαντήσουν αν ο ισχυρισμός είναι λάθος, αν ισχύει πάντα ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, αν δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός και αν είναι ένας εύκολος τρόπος να εξηγήσει αυτό τον ισχυρισμό σε κάποιον που δεν είναι σίγουρος. Οι επόμενες ερωτήσεις εξετάζουν και πάλι το βαθμό βεβαιότητας και τα συναισθήματά τους έως αυτό το σημείο.

6.1 Αποτελέσματα ποσοτικής έρευνας

Εξετάζοντας τα αποτελέσματα της ποσοτικής για την αυτό- αποτελεσματικότητα των μαθητών/τριών στα Μαθηματικά και την απόδειξη, παρατηρούμε ότι η μέση τιμή είναι 61,8 και 60,3 αντίστοιχα. Δηλαδή οι μαθητές/τριες απάντησαν ότι μπορούν μέτρια να ανταπεξέλθουν σε καταστάσεις που αφορούν τα Μαθηματικά και την απόδειξη στα Μαθηματικά. Οι στάσεις τους για τα Μαθηματικά διαχωρίστηκαν σε τρεις άξονες, αυτόν της ευχαρίστησης, της αυτοπεποίθησης και της αξίας των Μαθηματικών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις των μαθητών/τριών, παρατηρούμε ότι δεν είναι βέβαιοι για το αν έχουν αυτοπεποίθηση και για το αν ευχαριστιούνται τα Μαθηματικά, αλλά φαίνεται ότι αναγνωρίζουν πολύ την αξία τους. Για τις απόψεις τους για τα Μαθηματικά, φαίνεται ότι δεν είναι βέβαιοι για το αν τα Μαθηματικά σχετίζονται με μοντέλα ή αν σχετίζονται με τη ζωή, ενώ συμφωνούν ότι έχουν να κάνουν με στοιχεία.

Πίνακας 1. Αποτελέσματα διαστάσεων επίγνωσης.

	M	*SD*	*Min*	*Max*	*Range*
Αυτό- αποτελεσματικότητα στα Μαθηματικά	61,8	23,8	2,8	94,0	91,3
Αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη	60,3	24,4	,3	95,5	95,2
Στάσεις					
Ευχαρίστηση	3,1	1,0	1,0	5,0	4,0
Αυτοπεποίθηση	2,6	,9	1,0	5,0	4,0
Αξία	3,9	,7	2,2	5,0	2,8
Απόψεις					
Ζωή	3,1	,6	1,7	4,5	2,8
Μοντέλα/Αφηρημένο	3,4	,5	2,0	4,3	2,3
Αριθμοί/Στοιχεία	3,7	,6	2,0	4,7	2,7

Όσον αφορά την ταυτότητά τους στα Μαθηματικά πιστεύουν ότι είναι πολύ πάνω από μέτριοι*(Mdn=4)* , κάτι που θεωρούν ότι πιστεύουν γι' αυτούς οι φίλοι*(Mdn=4)* και οι καθηγητές τους *(Mdn=4)*. Για τις συσχετίσεις μεταξύ της ταυτοποίησης των μαθητών/τριών παρατηρούμε ότι είναι στατιστικά σημαντική με την αυτό-αποτελεσματικότητα στα Μαθηματικά και την απόδειξη, την ευχαρίστηση, τις πεποιθήσεις για την αξία των Μαθηματικών, τις απόψεις τους ότι «τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με τη ζωή», το βαθμό πειστικότητας της κάθε απάντησης, το βαθμό βεβαιότητας για τη δική τους απάντηση, το βαθμό που θα έβαζε ο καθηγητής και τον τελικό βαθμό βεβαιότητας για την απάντησή τους. Μόνο στην απάντηση 6, στο οπτικό επιχείρημα, η συσχέτιση είναι στατιστικά σημαντική και με το βαθμό βεβαιότητας μετά από τις ερωτήσεις που εμβαθύνουν στις απόψεις τους στην απόδειξη. Η συσχέτιση σε αυτές τις περιπτώσεις είναι θετική. Στατιστικά σημαντική είναι η συσχέτιση με την αυτοπεποίθηση, η οποία σε αυτή την περίπτωση είναι αρνητική.

Πίνακας 2. Αποτελέσματα ταυτοποίησης.

		f	%	*Mdn*	*M*
πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύεις ότι είσαι;	ΠΟΛΥ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	2	3,6		
	ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	9	16,4		
	ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	15	27,3		
	ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	23	41,8		
	ΠΟΛΥ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	6	10,9		
	Σύνολο			4,0	3,4
πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύουν οι φίλοι και οι φίλες σου ότι είσαι;	ΠΟΛΥ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	3	5,5		
	ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	5	9,1		
	ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	18	32,7		
	ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	16	29,1		
	ΠΟΛΥ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	13	23,6		
	Σύνολο			4,0	3,6
πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικάπιστεύουν οι καθηγητές και οι καθηγήτριες των Μαθηματικών ότι είσαι;	ΠΟΛΥ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	5	9,1		
	ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	8	14,5		
	ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	11	20,0		
	ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	21	38,2		
	ΠΟΛΥ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΜΕΤΡΙΟΣ/Α	10	18,2		
	Σύνολο			4,0	3,4

Μετρώντας τις απαντήσεις των μαθητών/τριών για το ποια απάντηση τους πείθει περισσότερο και πόσο, καταλήγουμε στο ότι αν και τα αποτελέσματα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα και ότι δεν υπάρχει μεγάλη απόκλιση μεταξύ των διαφορετικών απαντήσεων που δόθηκαν στους μαθητές, υπάρχει μια προτίμηση στο επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού (21%) και στη λανθασμένη παραγωγική απόδειξη (27,3%).

Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρούμε και στην εξέταση του βαθμού βεβαιότητας των μαθητών/τριών. Οι μαθητές/τριες φαίνεται ότι είναι πολύ σίγουροι για τις απαντήσεις που τους έπεισαν περισσότερο, τον αφελή εμπειρισμό (36,4%) και τη λάθος παραγωγική απόδειξη (26,4%) αλλά και για το οπτικό επιχείρημα (23,6%), παρόλο που τους είχε πείσει μέτρια. Για τις υπόλοιπες σημειώνουν ότι είναι μέτρια σίγουροι. Ο βαθμός βεβαιότητας δε φαίνεται να αλλάζει καθόλου μετά τις ερωτήσεις που εμβαθύνουν στις απόψεις τους στην απόδειξη, καθώς σε όλες τις απαντήσεις παρατηρούμε ότι η πλειοψηφία των μαθητών/τριών νιώθει το ίδιο σίγουρη.

Πίνακας 3. Αποτελέσματα κρίσεων και βαθμού βεβαιότητας.

		f	%	*Mdn*	*M*
Αν κρίνεις την Απάντηση 1 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Καθόλου πειστική	5	9,1		
	Σχεδόν καθόλου πειστική	5	9,1		
	Λίγο πειστική	5	9,1		
	Μέτρια πειστική	17	30,9		
	Πολύ πειστική	14	25,5		
	Πάρα πολύ πειστική	5	9,1		
	Απόλυτα πειστική	4	7,3		
	Σύνολο			4,0	4,1
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Καθόλου	4	7,3		
	Σχεδόν καθόλου	1	1,8		
	Λίγο	5	9,1		
	Μέτρια	20	36,4		
	Πολύ	16	29,1		
	Πάρα πολύ	5	9,1		
	Απόλυτα	4	7,3		
	Σύνολο			4,0	4,3
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 1 (στην Ερώτηση 1)	Πολύ λιγότερο σίγουρος/η	1	1,9		
	Λιγότερο σίγουρος/η	0	,0		
	Το ίδιο	43	81,1		
	Περισσότερο σίγουρος/η	7	13,2		
	Πολύ περισσότερο σίγουρος/η	2	3,8		
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 2 (από 0 έως 20);				16,0	14,7
Αν κρίνεις την Απάντηση 2 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Καθόλου πειστική	5	9,1		
	Σχεδόν καθόλου πειστική	5	9,1		
	Λίγο πειστική	8	14,5		
	Μέτρια πειστική	10	18,2		
	Πολύ πειστική	12	21,8		
	Πάρα πολύ πειστική	5	9,1		
	Απόλυτα πειστική	10	18,2		
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Καθόλου	3	5,5		
	Σχεδόν καθόλου	1	1,8		
	Λίγο	5	9,1		
	Μέτρια	10	18,2		
	Πολύ	15	27,3		
	Πάρα πολύ	10	18,2		
	Απόλυτα	11	20,0		
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 2 (στην Ερώτηση 2)	Πολύ λιγότερο σίγουρος/η	0	,0		
	Λιγότερο σίγουρος/η	3	6,0		
	Το ίδιο	39	78,0		
	Περισσότερο σίγουρος/η	6	12,0		
	Πολύ περισσότερο σίγουρος/η	2	4,0		
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 2 (από 0 έως 20);				17,0	14,7
Αν κρίνεις την Απάντηση 3 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Καθόλου πειστική	6	10,9		
	Σχεδόν καθόλου πειστική	7	12,7		
	Λίγο πειστική	7	12,7		
	Μέτρια πειστική	14	25,5		
	Πολύ πειστική	12	21,8		
	Πάρα πολύ πειστική	3	5,5		
	Απόλυτα πειστική	6	10,9		
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Καθόλου	2	3,6		
	Σχεδόν καθόλου	5	9,1		

	Λίγο	7	12,7		
	Μέτρια	15	27,3		
	Πολύ	11	20,0		
	Πάρα πολύ	5	9,1		
	Απόλυτα	10	18,2		
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 3 (στην Ερώτηση 3)	Πολύ λιγότερο σίγουρος/η	0	,0		
	Λιγότερο σίγουρος/η	3	5,8		
	Το ίδιο	36	69,2		
	Περισσότερο σίγουρος/η	9	17,3		
	Πολύ περισσότερο σίγουρος/η	4	7,7		
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 3 (από 0 έως 20);				16,0	14,2
Αν κρίνεις την Απάντηση 4 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Καθόλου πειστική	7	13,0		
	Σχεδόν καθόλου πειστική	8	14,8		
	Λίγο πειστική	13	24,1		
	Μέτρια πειστική	13	24,1		
	Πολύ πειστική	6	11,1		
	Πάρα πολύ πειστική	3	5,6		
	Απόλυτα πειστική	4	7,4		
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Καθόλου	2	3,6		
	Σχεδόν καθόλου	0	,0		
	Λίγο	8	14,5		
	Μέτρια	11	20,0		
	Πολύ	17	30,9		
	Πάρα πολύ	4	7,3		
	Απόλυτα	13	23,6		
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 4 (στην Ερώτηση 4)	Πολύ λιγότερο σίγουρος/η	1	2,0		
	Λιγότερο σίγουρος/η	1	2,0		
	Το ίδιο	40	78,4		
	Περισσότερο σίγουρος/η	5	9,8		
	Πολύ περισσότερο σίγουρος/η	4	7,8		
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 4 (από 0 έως 20);				15,0	13,9
Αν κρίνεις την Απάντηση 5 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Καθόλου πειστική	5	9,1		
	Σχεδόν καθόλου πειστική	9	16,4		
	Λίγο πειστική	5	9,1		
	Μέτρια πειστική	6	10,9		
	Πολύ πειστική	15	27,3		
	Πάρα πολύ πειστική	5	9,1		
	Απόλυτα πειστική	10	18,2		
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Καθόλου	1	1,9		
	Σχεδόν καθόλου	3	5,7		
	Λίγο	6	11,3		
	Μέτρια	7	13,2		
	Πολύ	14	26,4		
	Πάρα πολύ	7	13,2		
	Απόλυτα	15	28,3		
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 5 (στην Ερώτηση 5)	Πολύ λιγότερο σίγουρος/η	1	1,9		
	Λιγότερο σίγουρος/η	4	7,5		
	Το ίδιο	34	64,2		
	Περισσότερο σίγουρος/η	11	20,8		
	Πολύ περισσότερο σίγουρος/η	3	5,7		
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 5 (από 0 έως 20);				16,0	14,7
Αν κρίνεις την Απάντηση 6 σχετικά με το πόσο σε πείθει,	Καθόλου πειστική	4	7,3		
	Σχεδόν καθόλου πειστική	13	23,6		

ποια είναι η κρίση σου;	Λίγο πειστική	6	10,9		
	Μέτρια πειστική	12	21,8		
	Πολύ πειστική	4	7,3		
	Πάρα πολύ πειστική	7	12,7		
	Απόλυτα πειστική	9	16,4		
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Καθόλου	3	5,5		
	Σχεδόν καθόλου	2	3,6		
	Λίγο	8	14,5		
	Μέτρια	12	21,8		
	Πολύ	13	23,6		
	Πάρα πολύ	8	14,5		
	Απόλυτα	9	16,4		
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 6 (στην Ερώτηση 6)	Πολύ λιγότερο σίγουρος/η	0	,0		
	Λιγότερο σίγουρος/η	1	1,9		
	Το ίδιο	42	80,8		
	Περισσότερο σίγουρος/η	5	9,6		
	Πολύ περισσότερο σίγουρος/η	4	7,7		
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 6 (από 0 έως 20);				17,0	15,8

Αναφορικά με τα συναισθήματα των μαθητών/τριών για το βαθμό βεβαιότητας όσον αφορά τις ολιστικές τους αξιολογήσεις σημειώνουν πρωτίστως ότι αισθάνονται άνετα για τη σωστή παραγωγική απόδειξη με τη μορφή που βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο και για το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού, περιέργεια για τη σωστή παραγωγική απόδειξη και ηρεμία για τη σωστή παραγωγική απόδειξη σε αφηγηματική μορφή, το κρίσιμο πείραμα και τη λανθασμένη παραγωγική απόδειξη. Εμβαθύνοντας στις απόψεις τους για την απόδειξη, παρατηρούμε ότι για το βαθμό βεβαιότητας για τις αναλυτικές αξιολογήσεις τους, νιώθουν πρωτίστως περιέργεια για τις σωστές παραγωγικές αποδείξεις και για το οπτικό επιχείρημα, για το οποίο αρχικά ένιωθαν βαρεμάρα. Νιώθουν άνετα για το βαθμό βεβαιότητάς τους για την κρίση τους για το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού και το κρίσιμο πείραμα για το οποίο νιώθουν παράλληλα και ηρεμία. Για την τελική τους επιλογή, την απάντηση που θα έδιναν οι ίδιοι δηλαδή στο διαγώνισμα, νιώθουν ηρεμία και άνετα.

Από τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης για τα συναισθήματα των μαθητών/τριών για την κάθε απάντηση, παρατηρούμε ότι για τη σωστή παραγωγική απόδειξη στη μορφή του σχολικού βιβλίου, οι μαθητές/τριες νιώθουν ως επί το πλείστον περιέργεια, άνετα και μπλοκάρισμα για τις κρίσεις τους, κάτι που δεν αλλάζει εμβαθύνοντας στις απόψεις τους για την απόδειξη. Τα συναισθήματα των μαθητών/τριών για το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού είναι αρχικά άνετα, ενώ μετά τις αναλυτικότερες αξιολογήσεις τους αισθάνονται άνετα και ηρεμία. Για τη σωστή παραγωγική απόδειξη σε αφηγηματική γλώσσα παρατηρούμε ότι τα συναισθήματα τους είναι πιο ομοιόμορφα κατανεμημένα σε σχέση με τα υπόλοιπα αποδεικτικά επιχειρήματα, καθώς οι περισσότεροι μαθητές νιώθουν αρχικά ηρεμία, περιέργεια. άνετα και μπλοκάρισμα, ενώ εμβαθύνοντας στις κρίσεις τους αισθάνονται κυρίως περιέργεια, ηρεμία και άνετα. Συνεχίζοντας με το κρίσιμο πείραμα οι περισσότεροι μαθητές/τριες νιώθουν ηρεμία για το βαθμό βεβαιότητάς τους για τις ολιστικές αξιολογήσεις τους, ενώ εμβαθύνοντας στις απόψεις τους, τα συναισθήματά τους κυμαίνονται ανάμεσα στην ηρεμία και άνετα. Εξετάζοντας τα συναισθήματα των μαθητών/τριών για τη λάθος παραγωγική απόδειξη, παρατηρούμε ότι οι μαθητές/τριες αισθάνονται κατά κύριο λόγο ηρεμία και άνετα, κάτι που συνεχίζει να συμβαίνει και κατά τις αναλυτικότερες κρίσεις τους, ενώ παράλληλα προστίθεται και το συναίσθημα της χαράς. Τέλος για το οπτικό επιχείρημα, οι μαθητές/τριες νιώθουν πρωτίστως βαρεμάρα, ενώ κατά τις αναλυτικότερες αξιολογήσεις τους το αρχικό συναίσθημα μετατρέπεται σε περιέργεια. Όσον αφορά τα τελικά τους συναισθήματα για την απάντηση που θα διάλεγαν οι ίδιοι για την απόδειξη της εικασίας, νιώθουν άνετα και ηρεμία.

Πίνακας 4. Αποτελέσματα συναισθημάτων.

Απαντήσεις	**Συναισθήματα**	**Αρχικές Αξιολογήσεις**	**Τελικές αξιολογήσεις**
Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου στην Απάντηση 1;	Φόβος	2	0
	Χαρά	2	1
	Λύπη	0	0
	Σύγχυση	2	4
	Μπλοκάρισμα	10	9
	Περιέργεια	11	10
	Ηρεμία	5	8
	Βαρεμάρα	3	4
	Αδιαφορία	5	5
	Ενδιαφέρον	8	5
	Ενθουσιασμός	1	0
	Άβολα	3	3
	Άνετα	11	9
Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα	Φόβος	0	3
	Χαρά	7	4
	Λύπη	1	1

νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου στην Απάντηση 2;	Σύγχυση	3	3
	Μπλοκάρισμα	7	4
	Περιέργεια	4	3
	Ηρεμία	7	11
	Βαρεμάρα	4	4
	Αδιαφορία	3	4
	Ενδιαφέρον	8	6
	Ενθουσιασμός	3	7
	Άβολα	3	1
	Άνετα	12	12
Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου στην Απάντηση 3;	Φόβος	1	2
	Χαρά	2	4
	Λύπη	0	1
	Σύγχυση	6	1
	Μπλοκάρισμα	10	5
	Περιέργεια	9	13
	Ηρεμία	11	11
	Βαρεμάρα	3	6
	Αδιαφορία	4	2
	Ενδιαφέρον	3	2
	Ενθουσιασμός	3	1
	Άβολα	1	2
	Άνετα	9	10
Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου στην Απάντηση 4;	Φόβος	4	4
	Χαρά	6	1
	Λύπη	2	0
	Σύγχυση	3	1
	Μπλοκάρισμα	5	5
	Περιέργεια	7	8
	Ηρεμία	11	13
	Βαρεμάρα	6	4
	Αδιαφορία	3	3
	Ενδιαφέρον	3	3
	Ενθουσιασμός	1	3
	Άβολα	3	2
	Άνετα	8	13
Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου στην Απάντηση 5;	Φόβος	1	2
	Χαρά	5	10
	Λύπη	1	0
	Σύγχυση	2	1
	Μπλοκάρισμα	5	5
	Περιέργεια	5	5
	Ηρεμία	12	12

	Βαρεμάρα	5	5
	Αδιαφορία	4	7
	Ενδιαφέρον	7	3
	Ενθουσιασμός	4	1
	Άβολα	2	2
	Άνετα	11	10
Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου στην Απάντηση 6;	Φόβος	2	3
	Χαρά	6	3
	Λύπη	1	0
	Σύγχυση	2	2
	Μπλοκάρισμα	7	6
	Περιέργεια	8	10
	Ηρεμία	7	7
	Βαρεμάρα	10	9
	Αδιαφορία	8	9
	Ενδιαφέρον	4	6
	Ενθουσιασμός	4	2
	Άβολα	1	1
	Άνετα	9	9
Τώρα που απάντησες και στην τελευταία ερώτηση, ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις τώρα;	**Φόβος**	**2**	
	Χαρά	**7**	
	Λύπη	**0**	
	Σύγχυση	**1**	
	Μπλοκάρισμα	**5**	
	Περιέργεια	**6**	
	Ηρεμία	**12**	
	Βαρεμάρα	**6**	
	Αδιαφορία	**3**	
	Ενδιαφέρον	**5**	
	Ενθουσιασμός	**8**	
	Άβολα	**1**	
	Άνετα	**14**	

Αναφορικά με τις απαντήσεις των μαθητών/τριών για το αν συμφωνούν, διαφωνούν ή δε γνωρίζουν μια απάντηση παρατηρήσαμε τα εξής: παρόλο που η σωστή παραγωγική απόδειξη, που είναι στη μορφή που υπάρχει και στο σχολικό βιβλίο, δεν τους έπεισε, η πλειοψηφία απάντησε σωστά καθώς εμβαθύναμε στις απόψεις τους. Το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού θεωρήθηκε σωστό από την πλειοψηφία, αν και σημείωσαν ότι δεν ισχύει πάντα αλλά σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Για τη σωστή παραγωγική απόδειξη με τη μορφή αφήγησης δε μπορούν να αποφανθούν για το αν είναι σίγουροι ή όχι για την ορθότητά της, όμως πιστεύουν ότι ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις και ικανοποιεί τη λειτουργία της εξήγησης της απόδειξης. Το κρίσιμο πείραμα καθώς και η λάθος παραγωγική απόδειξη θεωρούνται σωστές από τους μισούς, αλλά σημειώνουν ότι ισχύουν σε συγκεκριμένες περιπτώσεις και όχι πάντα. Τέλος το οπτικό επιχείρημα θεωρείται απόδειξη σχεδόν από τους μισούς μαθητές/τριες, ότι ισχύει πάντα, ενώ δε φαίνεται να γνωρίζουν αν ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Βέβαια πάνω από τους μισούς μαθητές/τριες πιστεύουν ότι ικανοποιεί τη λειτουργία της εξήγησης.

Πίνακας 5. Αποτελέσματα κρίσεων και βαθμού βεβαιότητας.

		f	%
Είναι λάθος	Συμφωνώ	14	25,9
	Διαφωνώ	20	37,0
	Δεν γνωρίζω	19	35,2
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Συμφωνώ	11	20,8
	Διαφωνώ	23	43,4
	Δεν γνωρίζω	19	35,8
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Συμφωνώ	25	45,5
	Διαφωνώ	11	20,0
	Δεν γνωρίζω	18	32,7
Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Συμφωνώ	30	54,5
	Διαφωνώ	9	16,4
	Δεν γνωρίζω	16	29,1
Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Συμφωνώ	26	48,1
	Διαφωνώ	6	11,1
	Δεν γνωρίζω	22	40,7
Είναι λάθος	Συμφωνώ	10	18,9
	Διαφωνώ	29	54,7
	Δεν γνωρίζω	14	26,4
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Συμφωνώ	18	33,3
	Διαφωνώ	26	48,1
	Δεν γνωρίζω	10	18,5
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Συμφωνώ	22	40,0
	Διαφωνώ	17	30,9
	Δεν γνωρίζω	15	27,3
Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Συμφωνώ	30	55,6
	Διαφωνώ	12	22,2
	Δεν γνωρίζω	12	22,2
Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Συμφωνώ	37	67,3
	Διαφωνώ	9	16,4
	Δεν γνωρίζω	9	16,4
Είναι λάθος	Συμφωνώ	10	19,2
	Διαφωνώ	16	30,8
	Δεν γνωρίζω	26	50,0
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Συμφωνώ	11	20,8
	Διαφωνώ	25	47,2
	Δεν γνωρίζω	17	32,1
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Συμφωνώ	28	52,8
	Διαφωνώ	15	28,3
	Δεν γνωρίζω	10	18,9
	Συμφωνώ	21	38,9
Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Διαφωνώ	12	22,2
	Δεν γνωρίζω	20	37,0
Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Συμφωνώ	23	43,4
	Διαφωνώ	15	28,3
	Δεν γνωρίζω	15	28,3
Είναι λάθος	Συμφωνώ	15	27,8
	Διαφωνώ	27	50,0
	Δεν γνωρίζω	12	22,2
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Συμφωνώ	16	29,6

	Διαφωνώ	21	38,9
	Δεν γνωρίζω	17	31,5
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Συμφωνώ	31	57,4
	Διαφωνώ	14	25,9
	Δεν γνωρίζω	9	16,7
Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Συμφωνώ	27	49,1
	Διαφωνώ	16	29,1
	Δεν γνωρίζω	12	21,8
Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Συμφωνώ	21	38,9
	Διαφωνώ	15	27,8
	Δεν γνωρίζω	18	33,3
Είναι λάθος	Συμφωνώ	9	16,4
	Διαφωνώ	30	54,5
	Δεν γνωρίζω	16	29,1
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Συμφωνώ	19	34,5
	Διαφωνώ	21	38,2
	Δεν γνωρίζω	15	27,3
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Συμφωνώ	24	44,4
	Διαφωνώ	21	38,9
	Δεν γνωρίζω	9	16,7
Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Συμφωνώ	25	45,5
	Διαφωνώ	12	21,8
	Δεν γνωρίζω	18	32,7
Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Συμφωνώ	24	45,3
	Διαφωνώ	16	30,2
	Δεν γνωρίζω	13	24,5
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 5 (στην Ερώτηση 5)	Πολύ λιγότερο σίγουρος/η	1	1,9
	Λιγότερο σίγουρος/η	4	7,5
	Το ίδιο	34	64,2
	Περισσότερο σίγουρος/η	11	20,8
	Πολύ περισσότερο σίγουρος/η	3	5,7
Είναι λάθος	Συμφωνώ	10	18,5
	Διαφωνώ	26	48,1
	Δεν γνωρίζω	18	33,3
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Συμφωνώ	19	34,5
	Διαφωνώ	18	32,7
	Δεν γνωρίζω	18	32,7
Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Συμφωνώ	15	28,3
	Διαφωνώ	17	32,1
	Δεν γνωρίζω	21	39,6
Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Συμφωνώ	32	58,2
	Διαφωνώ	8	14,5
	Δεν γνωρίζω	14	25,5
Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Συμφωνώ	29	53,7
	Διαφωνώ	12	22,2
	Δεν γνωρίζω	13	24,1

Μελετώντας το βαθμό που οι μαθητές/τριες πιστεύουν ότι θα έβαζε ο καθηγητής σε ένα διαγώνισμα σε αυτές τις αποδείξεις παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο βαθμό (17) παίρνει το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού, που τους έπεισε πολύ και το οπτικό επιχείρημα που τους έπεισε μέτρια. Η λανθασμένη παραγωγική απόδειξη αν και είχε πείσει πολύ τους ίδιους φαίνεται ότι δεν πιστεύουν ότι θα πείσει τόσο τον καθηγητή, αφού ο βαθμός ήταν 16.

Τελικά οι μαθητές/τριες επιλέγουν ως απάντηση που θα έδιναν αυτοί σε ένα διαγώνισμα, το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού (26,9%) ενώ δεύτερο έρχεται το οπτικό επιχείρημα (21,2%). Στη συνέχεια ακολουθούν οι παραγωγικές αποδείξεις, σωστές και λάθος (13,5%) και τελευταίο το κρίσιμο πείραμα (7,7%). Υπήρχε και ένα μικρό ποσοστό μαθητών/τριών που δεν επέλεξαν καμία από τις δοθείσες αποδείξεις (3,8%).

		f	*%*	*Mdn*	*M*
Από τις προηγούμενες απαντήσεις ποια θα διάλεγες σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών;	1	7	13,5		
	2	14	26,9		
	3	7	13,5		
	4	4	7,7		
	5	7	13,5		
	6	11	21,2		
	7	2	3,8		
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου επιλογή;	Πολύ λιγότερο σίγουρος/η	2	3,6		
	Λιγότερο σίγουρος/η	5	9,1		
	Το ίδιο	34	61,8		
	Περισσότερο σίγουρος/η	10	18,2		
	Πολύ περισσότερο σίγουρος/η	4	7,3		
	Σύνολο			3,0	3,2

Για να εξετάσουμε τι ωθεί τους μαθητές/τριες να κάνουν τις συγκεκριμένες επιλογές, κατηγοριοποιήσαμε τις αιτιολογήσεις τους σε έξι παράγοντες. Ο πρώτος ήταν αυτός της κατανόησης, στον οποίο βασίστηκε η πλειοψηφία των μαθητών/τριών (35%) και αποτελούνταν από απαντήσεις της μορφής «είναι εύκολη και κατανοητή» ή «μπορεί να την καταλάβει ο καθένας». Ο επόμενος παράγοντας ήταν αυτός της αξίας/χρησιμότητας της απόδειξης και αποτελούνταν από αιτιολογήσεις της μορφής «είναι χρήσιμη απόδειξη» ή «πολύ ενδιαφέρουσα», ενώ στον τρίτο παράγοντα οι μαθητές/τριες βασίστηκαν στο βαθμό βεβαιότητας, δηλαδή το πόσο σίγουροι είναι ότι τους πείθει και ότι είναι σωστή. Εδώ υπήρξαν απαντήσεις της μορφής: «είναι σίγουρα σωστή», «είναι σωστή και πειστική». Ο τέταρτος παράγοντας είναι αυτός της δομής/εικόνας της απόδειξης. Οι μαθητές/τριες έδωσαν απαντήσεις της μορφής: «είναι καλύτερα διατυπωμένη», «πιο ολοκληρωμένη και με καλύτερο νόημα», «μου άρεσε περισσότερο». Ο τελευταίος παράγοντας είναι αυτός της εξήγησης, όπου οι μαθητές αιτιολόγησαν ότι επέλεξαν τη συγκεκριμένη απόδειξη, επειδή εξηγεί καλύτερα.

6.2 Συνέντευξη Αλκμήνης

Η πρώτη συνέντευξη έγινε με την Αλκμήνη, μια μαθήτρια 15 χρονών, της Α΄ Λυκείου, με πολύ καλή επίδοση στα Μαθηματικά, η οποία όπως μας ανέφερε στην αρχή, θεωρεί τον εαυτό της αλαζόνα. Εξετάζοντας τις διαστάσεις της επίγνωσης:

6.2.1 Αλκμήνη και αυτό-αποτελεσματικότητα

Παρατηρούμε ότι έχει πολύ υψηλή αυτοπεποίθηση, καθώς φαίνεται να είναι πολύ σίγουρη ότι μπορεί να τα πάει καλά στα Μαθηματικά, να τα καταλάβει, να δουλέψει σκληρά, να πάει καλούς βαθμούς, αλλά και να χρησιμοποιήσει τα Μαθηματικά και έξω από το σχολείο. Στις αντίστοιχες ερωτήσεις που εξέταζαν την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη, έχει εξίσου υψηλή αυτοπεποίθηση καθώς για όλες τις δηλώσεις σημείωνε ότι ήταν πολύ σίγουρη να ανταπεξέλθει.

6.2.2Απόψεις της Αλκμήνης για τα Μαθηματικά

Όσον αφορά τις απόψεις της στα Μαθηματικά κυμαίνονται από την πιο περιορισμένη ότι «τα Μαθηματικά είναι στοιχεία» στην ευρύτερη, ότι «τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με μοντέλα», ενώ για τις προτάσεις που σχετίζονται με την άποψη ότι «τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με τη ζωή» δεν είναι βέβαιη.

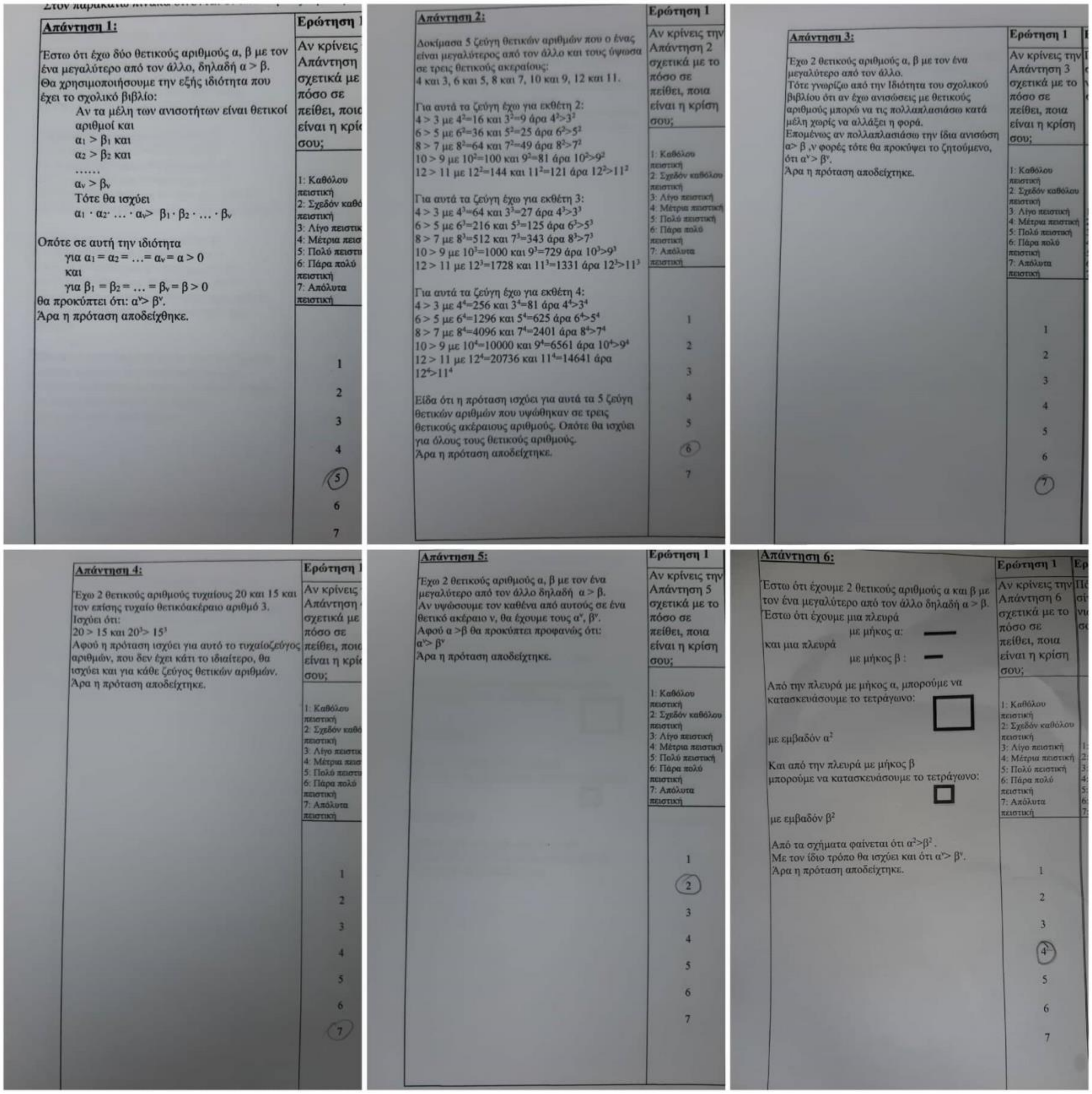
6.2.3 Στάσεις της Αλκμήνης στα Μαθηματικά

Μελετώντας το ερωτηματολόγιο, που συμπλήρωσε για τις στάσεις, φαίνεται ότι ευχαριστιέται το μάθημα των Μαθηματικών, έχει υψηλή αυτοπεποίθηση και αντιλαμβάνεται την αξία τους σε πολύ μεγάλο βαθμό, ενώ διαφωνούσε με όσες προτάσεις ταύτιζαν την τάξη των Μαθηματικών με αρνητικά συναισθήματα.

6.2.4Η μαθηματική ταυτότητα της Αλκμήνης

Σχετικά με την ταυτότητα της Αλκμήνης στα Μαθηματικά θεωρεί ότι είναι πολύ πάνω από μέτρια, κάτι που θεωρεί ότι πιστεύουν οι φίλοι/ες και οι καθηγητές/τριές της.

6.2.5Οι απόψεις της Αλκμήνης για την απόδειξη



Απάντηση 1:

Έστω ότι έχω δύο θετικούς αριθμούς α, β με τον ένα μεγαλύτερο από τον άλλο, δηλαδή $\alpha > \beta$.
Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ιδιότητα που έχει το σχολικό βιβλίο:
Αν τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί και
$\alpha_1 > \beta_1$ και
$\alpha_2 > \beta_2$ και
......
$\alpha_\nu > \beta_\nu$
Τότε θα ισχύει
$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu$

Οπότε σε αυτή την ιδιότητα
για $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha > 0$
και
για $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu = \beta > 0$
θα προκύπτει ότι: $\alpha^\nu > \beta^\nu$.
Άρα η πρόταση αποδείχθηκε.

Ερώτηση 1
Αν κρίνεις την Απάντηση 1 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;
1: Καθόλου πειστική
2: Σχεδόν καθόλου πειστική
3: Λίγο πειστική
4: Μέτρια πειστική
5: Πολύ πειστική
6: Πάρα πολύ πειστική
7: Απόλυτα πειστική
1 2 3 4 5 6 7

Απάντηση 2:

Δοκίμασα 5 ζεύγη θετικών αριθμών που ο ένας είναι μεγαλύτερος από τον άλλο και τους ύψωσα σε τρεις θετικούς ακεραίους:
4 και 3, 6 και 5, 8 και 7, 10 και 9, 12 και 11.

Για αυτά τα ζεύγη έχω για εκθέτη 2:
$4 > 3$ με $4^2=16$ και $3^2=9$ άρα $4^2>3^2$
$6 > 5$ με $6^2=36$ και $5^2=25$ άρα $6^2>5^2$
$8 > 7$ με $8^2=64$ και $7^2=49$ άρα $8^2>7^2$
$10 > 9$ με $10^2=100$ και $9^2=81$ άρα $10^2>9^2$
$12 > 11$ με $12^2=144$ και $11^2=121$ άρα $12^2>11^2$

Για αυτά τα ζεύγη έχω για εκθέτη 3:
$4 > 3$ με $4^3=64$ και $3^3=27$ άρα $4^3>3^3$
$6 > 5$ με $6^3=216$ και $5^3=125$ άρα $6^3>5^3$
$8 > 7$ με $8^3=512$ και $7^3=343$ άρα $8^3>7^3$
$10 > 9$ με $10^3=1000$ και $9^3=729$ άρα $10^3>9^3$
$12 > 11$ με $12^3=1728$ και $11^3=1331$ άρα $12^3>11^3$

Για αυτά τα ζεύγη έχω για εκθέτη 4:
$4 > 3$ με $4^4=256$ και $3^4=81$ άρα $4^4>3^4$
$6 > 5$ με $6^4=1296$ και $5^4=625$ άρα $6^4>5^4$
$8 > 7$ με $8^4=4096$ και $7^4=2401$ άρα $8^4>7^4$
$10 > 9$ με $10^4=10000$ και $9^4=6561$ άρα $10^4>9^4$
$12 > 11$ με $12^4=20736$ και $11^4=14641$ άρα $12^4>11^4$

Είδα ότι η πρόταση ισχύει για αυτά τα 5 ζεύγη θετικών αριθμών που υψώθηκαν σε τρεις θετικούς ακέραιους αριθμούς. Οπότε θα ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς.
Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.

Ερώτηση 1
Αν κρίνεις την Απάντηση 2 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;
1: Καθόλου πειστική
2: Σχεδόν καθόλου πειστική
3: Λίγο πειστική
4: Μέτρια πειστική
5: Πολύ πειστική
6: Πάρα πολύ πειστική
7: Απόλυτα πειστική
1 2 3 4 5 6 7

Απάντηση 3:

Έχω 2 θετικούς αριθμούς α, β με τον ένα μεγαλύτερο από τον άλλο.
Τότε γνωρίζω από την Ιδιότητα του σχολικού βιβλίου ότι αν έχω ανισώσεις με θετικούς αριθμούς μπορώ να τις πολλαπλασιάσω κατά μέλη χωρίς να αλλάξει η φορά.
Επομένως αν πολλαπλασιάσω την ίδια ανισώση $\alpha > \beta$,ν φορές τότε θα προκύψει το ζητούμενο, ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$.
Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.

Ερώτηση 1
Αν κρίνεις την Απάντηση 3 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;
1: Καθόλου πειστική
2: Σχεδόν καθόλου πειστική
3: Λίγο πειστική
4: Μέτρια πειστική
5: Πολύ πειστική
6: Πάρα πολύ πειστική
7: Απόλυτα πειστική
1 2 3 4 5 6 7

Απάντηση 4:

Έχω 2 θετικούς αριθμούς τυχαίους 20 και 15 και τον επίσης τυχαίο θετικόακέραιο αριθμό 3.
Ισχύει ότι:
$20 > 15$ και $20^3 > 15^3$
Αφού η πρόταση ισχύει για αυτό το τυχαίοζεύγος αριθμών, που δεν έχει κάτι το ιδιαίτερο, θα ισχύει και για κάθε ζεύγος θετικών αριθμών.
Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.

Ερώτηση 1
Αν κρίνεις την Απάντηση 4 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;
1: Καθόλου πειστική
2: Σχεδόν καθόλου πειστική
3: Λίγο πειστική
4: Μέτρια πειστική
5: Πολύ πειστική
6: Πάρα πολύ πειστική
7: Απόλυτα πειστική
1 2 3 4 5 6 7

Απάντηση 5:

Έχω 2 θετικούς αριθμούς α, β με τον ένα μεγαλύτερο από τον άλλο δηλαδή $\alpha > \beta$.
Αν υψώσουμε τον καθένα από αυτούς σε ένα θετικό ακέραιο ν, θα έχουμε τους α^ν, β^ν.
Αφού $\alpha > \beta$ θα προκύπτει προφανώς ότι:
$\alpha^\nu > \beta^\nu$
Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.

Ερώτηση 1
Αν κρίνεις την Απάντηση 5 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;
1: Καθόλου πειστική
2: Σχεδόν καθόλου πειστική
3: Λίγο πειστική
4: Μέτρια πειστική
5: Πολύ πειστική
6: Πάρα πολύ πειστική
7: Απόλυτα πειστική
1 2 3 4 5 6 7

Απάντηση 6:

Έστω ότι έχουμε 2 θετικούς αριθμούς α και β με τον ένα μεγαλύτερο από τον άλλο δηλαδή $\alpha > \beta$.
Έστω ότι έχουμε μια πλευρά
με μήκος α:
και μια πλευρά
με μήκος β :

Από την πλευρά με μήκος α, μπορούμε να κατασκευάσουμε το τετράγωνο:
με εμβαδόν α^2

Και από την πλευρά με μήκος β μπορούμε να κατασκευάσουμε το τετράγωνο:
με εμβαδόν β^2

Από τα σχήματα φαίνεται ότι $\alpha^2>\beta^2$.
Με τον ίδιο τρόπο θα ισχύει και ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$.
Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.

Ερώτηση 1
Αν κρίνεις την Απάντηση 6 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;
1: Καθόλου πειστική
2: Σχεδόν καθόλου πειστική
3: Λίγο πειστική
4: Μέτρια πειστική
5: Πολύ πειστική
6: Πάρα πολύ πειστική
7: Απόλυτα πειστική
1 2 3 4 5 6 7

Σχήμα 1. Κρίσεις της Αλκμήνης για τις απαντήσεις των μαθητών.

Μελετώντας όλες τις απαντήσεις της Αλκμήνης που εξετάζουν τις απόψεις της για την απόδειξη, παρατηρούμε ότι πείστηκε πολύ από την παραγωγική απόδειξη, με τη μορφή που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο αλλά και αυτή σε αφηγηματική γλώσσα (που ήταν και οι σωστές), με το επιχείρημα στη μορφή αφελή εμπειρισμού και με το κρίσιμο πείραμα, που τελικά επέλεξε ως σωστή απάντηση. Η λάθος παραγωγική απόδειξη δεν την έπεισε σχεδόν καθόλου ενώ το οπτικό επιχείρημα θεώρησε ότι είναι μέτρια πειστικό.

Στις αποδείξεις που δόθηκαν ως απαντήσεις μαθητών/τριών παρατηρούμε ότι για να πειστεί κάποιες φορές αναζητά εγγυητές στη μορφή μαθηματικών κανόνων:

Ε:Τι θα ήθελες δηλαδή να λέει για να σε πείσει;
Α: Μμμμ… Πώς λέγονται;; Προϋποθέσεις;
Ε:Ποιες προϋποθέσεις δηλαδή;
Α: Μια προϋπόθεση δηλαδή..Το ν.. Οι ν φορές που πολ/ζεις να είναι μεγαλύτερο του μηδενός..

Α: Γράφει πράγματα που τα λέει η εκφώνηση..πάλι..αρκετά χύμα..
Ε:Μετά που συνεχίζει και λέει ότι τα υψώνουμε σε θετικό αριθμό;
Α:Εεεεεεεε……….είναι πάλι… είναι πολύ απλό..καταλαβαίνω πώς θα μπορούσε να είναισωστό και πώς σκέφτηκε………. αλλά δεν είναι πλήρης απάντηση

Με άλλες αποδείξεις πείθεται βασιζόμενη στο πόσο κατανοητές είναι:

Α:Ήταν νομίζω η καλύτερη απόδειξη που διάβασα..
Ε:Γιατί το λες αυτό;
Α: Τα γράφει περιληπτικά… εεε αλλά δε λείπουν στοιχεία..και είναι απλά γραμμένο..δεν έχει πολλές σάλτσες..και…. είναι κατανοητή..

Σε ορισμένες περιπτώσεις βασίζεται στη λειτουργία της εξήγησης της απόδειξης για να αξιολογήσει το βαθμό πειστικότητας αλλά και στη δομή που είναι γραμμένο το κάθε επιχείρημα:

Ε:Τη θεωρείς πειστική καθόλου;
Α:Μμμμμ…μέτρια θα έλεγα πάλι..
Ε:λόγω των σχημάτων πάλι;

Α:Λόγω των σχημάτων, λόγω του ότι…………… γενικά… το να πετάς το α^2 *, ο άλλος το βλέπει και λέει γιατί* α^2*………………εεε μισό λεπτό.. το εμβαδόν είναι πλευρά επί πλευρά….εεε οπότε λίγο παραπάνω να εξηγήσουμε εκεί…*

Α: Είναι πειστική..Εεεε τώρα θα μπορούσε να είναι καλύτερα οργανωμένα;

Ε:Γιατί; Σε ποιο σημείο δηλαδή;

Α: Εεε λέει έστω ότι έχω 2 θετικούς αριθμούς α, β, θα μπορούσε να το γράψει πιο συνοπτικά με λιγότερα λόγια.

Ε: Και η συνέχεια;

Α: Εεε..μμμ η συνέχεια τώρα… Εγώ έτσι θα το έγραφα. Για το πρώτο δε θα έγραφα πολλά πολλά…

Ε:Θα τα έγραφες δηλαδή με λιγότερα λόγια.

Α: Ναι..με κανένα άρα, επειδή…

Υπήρξαν και περιπτώσεις που η μαθήτρια αξιολόγησε τις αποδείξεις σκεπτόμενη τον τρόπο που βαθμολογούν οι καθηγητές:

Ε:Γιατί του έκοψες δύο μονάδες;

Α: Πάλι επειδή έχει γράψει όλα αυτά και γνωρίζοντας από καθηγητές πώς βαθμολογούν κ.λ.π. εε δεν…

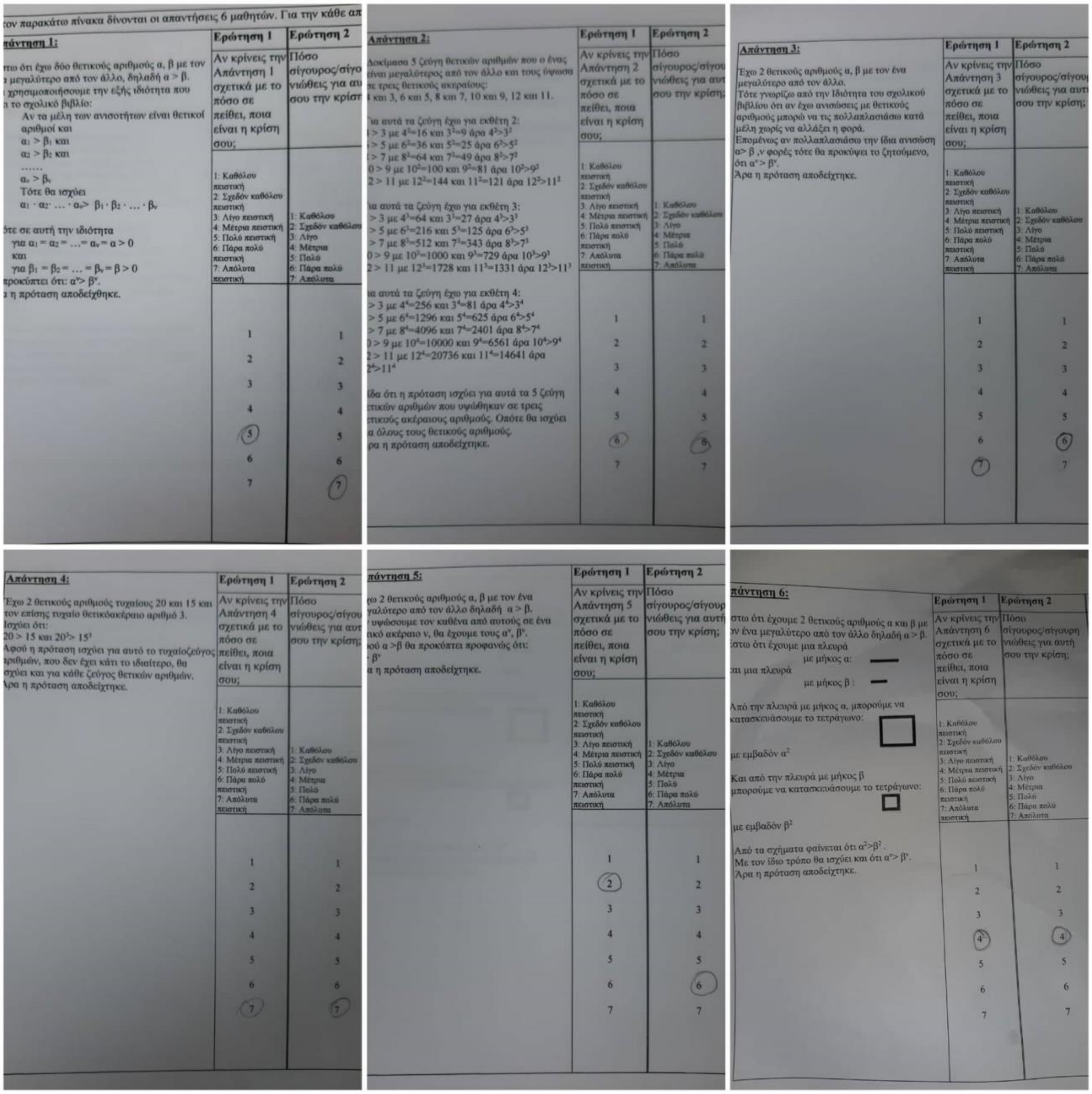
Ε: Σου έχει τύχει δηλαδή να γράφεις πολλά και να μην παίρνεις καλό βαθμό;

Α:Μου έχει τύχει να έχω γράψει από το άγχος μισή σελίδα αιτιολόγηση στα Μαθηματικά και μου το έκοψε όλο.. και μου έγραψε δύο σηματάκια από κάτω και μου λέει: αυτό είναι τέλος.

Ε: Κατάλαβα.. ενώ ήτανε σωστό αυτό που είχες γράψει;

Α: Δε νομίζω.. μπορεί να έλεγε και το ίδιο πράγμα και να μου το έκοψε λόγω διατύπωσης ή λέξης..δεν ξέρω..

6.2.6Η βεβαιότητα της Αλκμήνης για τις απόψεις της για την απόδειξη



Σχήμα 2. Βαθμός βεβαιότητας Αλκμήνης.

Περνώντας στη δεύτερη ερώτηση, όπου εξετάζουμε το πόσο σίγουρη είναι για τις απόψεις της για την απόδειξη, εμφανίζονται συναισθήματα γνώσης, εξοικείωσης ή και το συναίσθημα ότι «βρίσκεται στο σωστό δρόμο» :

Ε:Αν ήταν με λιγότερα λόγια θα άλλαζε; Ίσως και στο 7;
Α: Ναι ναι.
Ε:Οκ..βλέπω ότι είσαι απόλυτα σίγουρη γι' αυτό.
Α: (Γέλια)
Ε:Αυτό φταίει στο ότι θα την έκανες έτσι και εσύ ή είναι κάτι άλλο;
Α:Εεε.. δε νομίζω ότι είναι κάτι άλλο, γιατί μιλάει μόνο για τους θετικούς, οπότε δε νομίζω ότι μπορεί να γίνει και αλλιώς, οπότε είμαι απόλυτα σίγουρη σε αυτό.

Ε: Και είσαι ακόμα πιο σίγουρη και από την πρώτη απάντηση..τι σε κάνει να είσαι πιο σίγουρη; Το ότι έχει βάλει αριθμούς ή κάτι άλλο;
Α: Το ότι έχει βάλει παραδείγματα. Υπερβολικά πολλά πάντως..

Ε:Τη θεωρείς απόλυτα πειστική;
Α:Ναι!
Ε:Και είσαι απόλυτα σίγουρη για αυτό;
Α:Ναι! Ήταν νομίζω η καλύτερη απόδειξη που διάβασα..

Υπήρχαν και περιπτώσεις όπου παρατηρήσαμε συναισθήματα σύγχυσης και συναισθήματα που έδειχναν ότι δυσκολευόταν στο πώς να συνεχίσει:

Α:Είναι λίγο πειστική γιατί πάλι δε λέει με τι πολλαπλασιάζεις. Λέει μπορώ να τα πολ/σω κατά μέλη χωρίς να αλλάξει η φορά.
Ε: Λέει πάντως ότι αυτοί είναι θετικοί αριθμοί.
Α:Και αυτούς πώς τους πολ/με ;
Ε: Λέει πάντως από την ιδιότητα του σχολικού βιβλίου..
Α:Ναι δεν είμαι σίγουρη..δεν ξέρω καν πού είναι να πω την αλήθεια..
Ε: Ωραία και είσαι απόλυτα σίγουρη για το ότι είναι λίγο πειστική;
Α:Πάλι δεν το αναλύει πλήρως..Αναλύει ένα κομμάτι..

Ε:Ποιο κομμάτι δηλαδή;

Α:Λέει πολ/ζω κατά μέλη χωρίς να αλλάξει η φορά… Αυτό ισχύει μόνο για θετικούς.

Ε: Λέει πάντως ότι είναι θετικοί

Α:Ναι αυτοί είναι θετικοί

Ε:Λέει δηλαδή ότι αν έχω ανισώσεις με θετικούς αριθμούς μπορώ να πολ/σω κατά μέλη χωρίς να αλλάξει η φορά.

Α:μμμμμμμ…..

Υπήρξαν στιγμές που παρατηρήσαμε μια μικρή ανασφάλεια σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου, όπου η αυτοπεποίθησή της ήταν πολύ υψηλή:

Ε: Βλέπω ότι τελικά σε πείθει πάρα πολύ. Σκέψου και πόσο σίγουρη είσαι.. (βάζει 6) Γιατί όχι 7;;

Α: Είναι η ανασφάλεια..Μια μικρή ανασφάλεια..

Ε:Στην αρχή όμως είπες ότι είσαι αλαζόνας οπότε…

Α:είναι πάντα μια μικρή ανασφάλεια..

Τέλος παρατηρήσαμε και αρνητικές στάσεις προς το οπτικό επιχείρημα, όπου εκδηλώθηκε δυσαρέσκεια προς την παρουσία σχημάτων και το μάθημα της Γεωμετρίας:

Α:Σε αυτή δεν ήξερα καθόλου!

Ε:Γιατί έτσι σε αυτή;

Α:Κάθε φορά που βλέπω σχήματα……Δε μ αρέσει η Γεωμετρία..

Ε:Γι' αυτό δηλαδή;

Α:Ναι ήταν όλα δεν ξέρω, δεν ξέρω, δεν ξέρω…

Ε:Θες μήπως να το διαβάσεις πάλι να το ξαναδείς;

Α:………………

Ε:Τώρα; Τη θεωρείς πειστική καθόλου;

Α:Μμμμμ…μέτρια θα έλεγα πάλι..

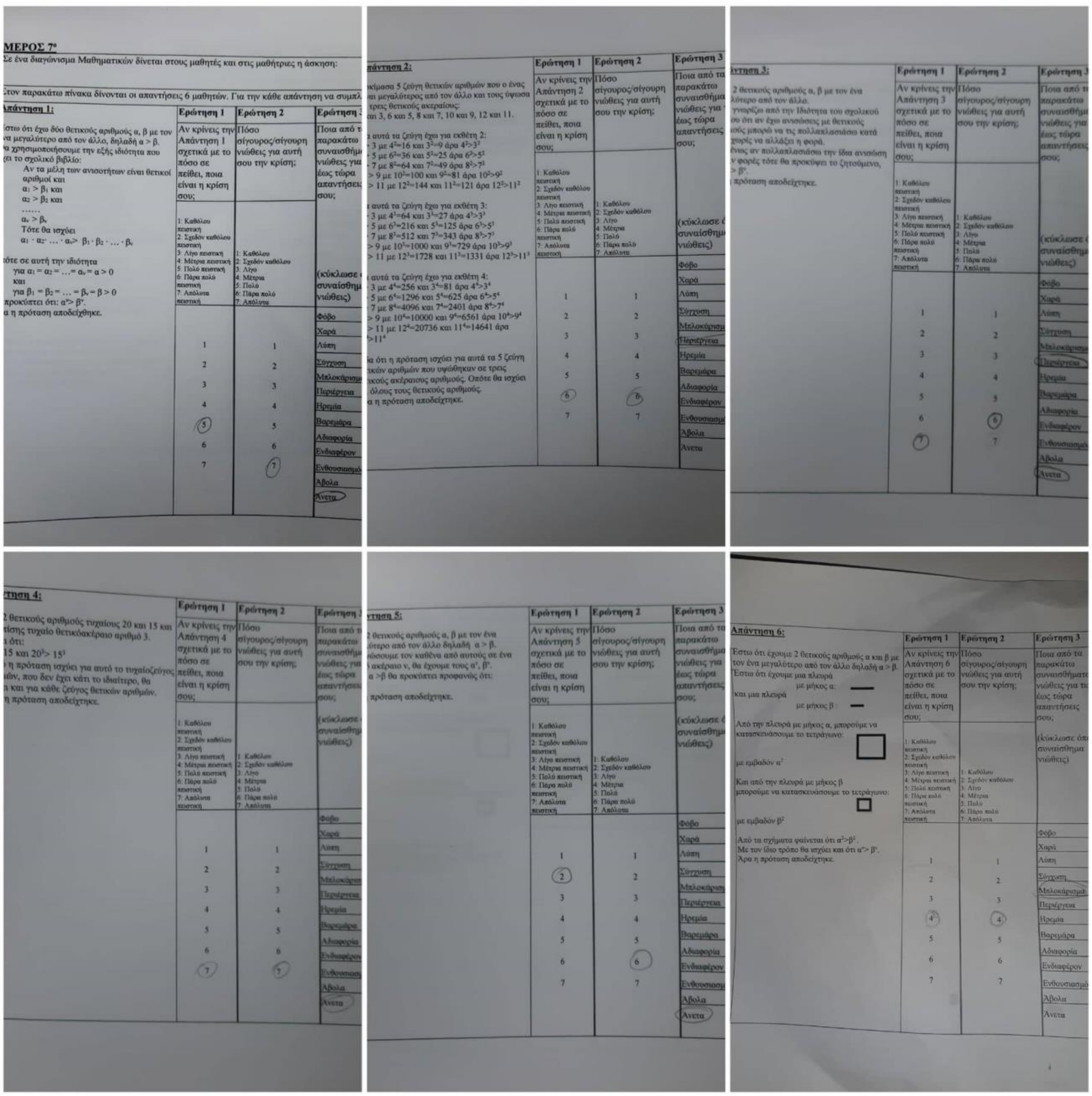
Ε:τώρα είσαι σίγουρη για τις απαντήσεις που δίνεις;

Α:όχι! Πάλι μέτρια..

Ε:Το μπλοκάρισμα λόγω γεωμετρίας ή κάτι άλλο;

Α:Γενικότερα όταν μπλέκονται σχήματα, λίγοοοοοοο… λίγο κολλάω… προτιμώ να το κρατάμε στους αριθμούς και στις σχέσεις..δηλαδή τα σχηματάκια….

6.2.7Τα συναισθήματα της Αλκμήνης για τις απαντήσεις της έως τώρα



Σχήμα 3. Συναισθήματα Αλκμήνης.

Περνώντας στην τρίτη ερώτηση, όπου εξετάζουμε τα συναισθήματα της Αλκμήνης για τις απαντήσεις που έχει δώσει μέχρι αυτό το σημείο, παρατηρούμε ότι νιώθει πολύ άνετα για τις απαντήσεις της σε ορισμένες αποδείξεις, καθώς η στάση της δείχνει ότι είναι σίγουρη, απαντάει γρήγορα και με ακρίβεια, ίσως και απόλυτα κάποιες φορές, χωρίς κενά στην ομιλία της και χωρίς να κομπιάζει:

Ε: Ωραία και για τα συναισθήματα που νιώθεις για τις απαντήσεις σου μέχρι τώρα; Βλέπω σημείωσες το άνετη και είσαι και τώρα.. Υπάρχει κάτι που λες ότι θες να αλλάξεις;
Α:Όχι σε αυτό. Όχι στην απάντηση 1.

Ε:και πώς νιώθεις μέχρι τώρα για τις απαντήσεις
Α:Μια χαρά άνετη..
Ε:Δεν έχει αλλάξει κάτι δηλαδή..
Α:Όχι

Ε:Είσαι ακόμη άνετη για αυτά που έχεις απαντήσει;
Α:Ναι
Ε:Άρα θεωρείς ότι είναι λάθος;
Α:Ναι

Υπήρξαν και περιπτώσεις στις οποίες ένιωθε μπλοκάρισμα για τις απαντήσεις της, κάτι που οφειλόταν στην επιλογή σχημάτων για την απόδειξη ενός ισχυρισμού στην Άλγεβρα και στη γενικότερη αρνητική στάση που κρατάει απέναντι στη Γεωμετρία.

Τέλος υπήρξε και μια απόδειξη για την οποία ένιωσε εκτός από άνεση, και περιέργεια για τις απαντήσεις της. Συγκεκριμένα νιώθει άνετη, γιατί πιστεύει ότι μέχρι ένα σημείο οι απαντήσεις της είναι σωστές και περιέργεια γιατί θέλει τη γνώμη κάποιου για επιβεβαίωση:

Ε:και τα συναισθήματα για τις απαντήσεις σου έως τώρα;(Βάζει περιέργεια και άνετα)Περίεργη γιατί είσαι;
Α:Να πάρω τη γνώμη κάποιου με εμπειρία και να μου το επιβεβαιώσει..μόνο και μόνο για αυτό.
Ε:Και άνετα;
Α:Άνετη γιατί μέχρι ένα σημείο πιστεύω ότι είναι σωστή.

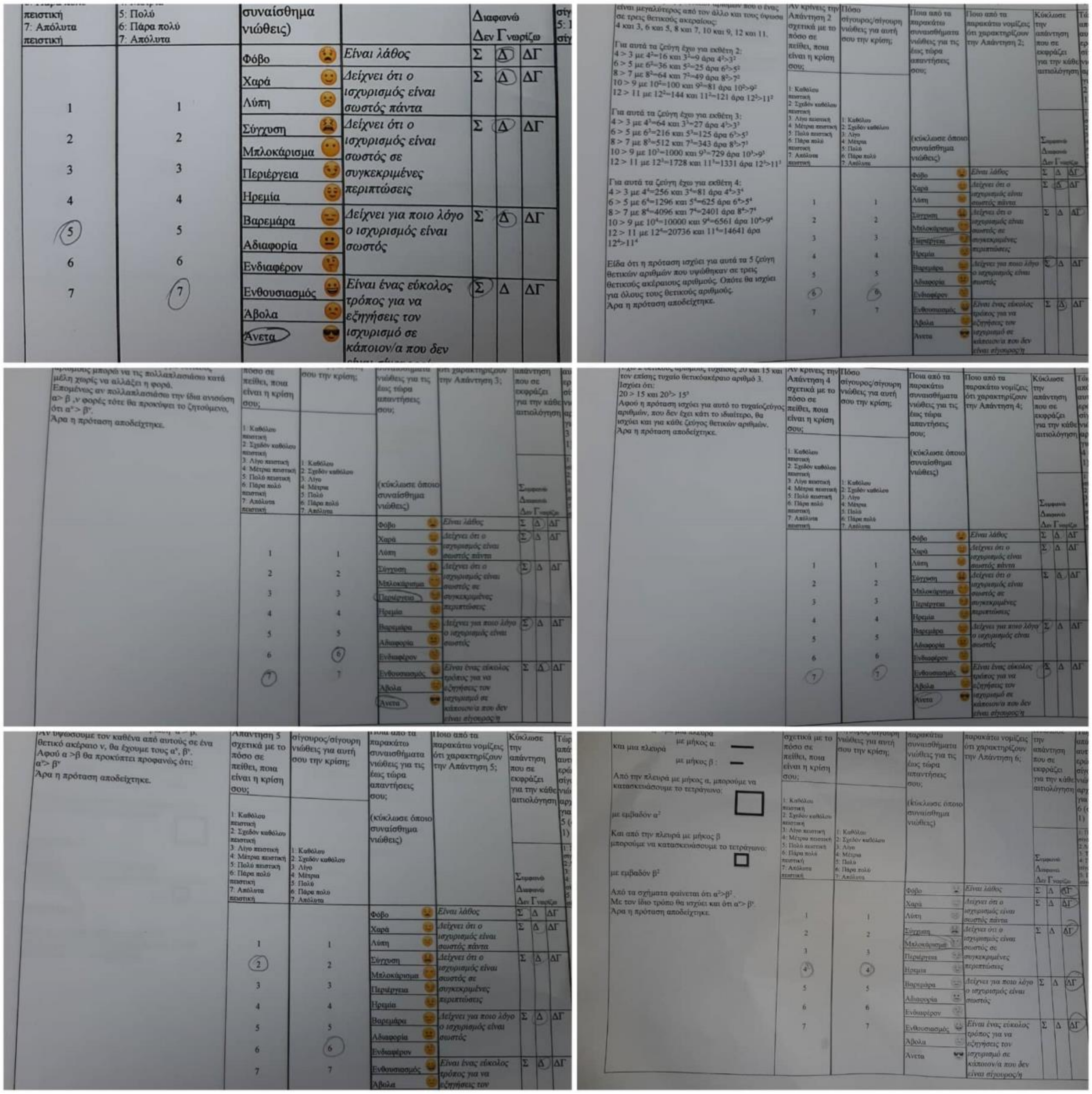
Ε: Για τις δικές σου απαντήσεις έτσι;
Α:Ναι, πιστεύω ότι είμαι σωστή..

Συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι όσον αφορά τη μία από τις δύο σωστές αποδείξεις που έκαναν οι μαθητές/τριες, η Αλκμήνη τη θεωρεί πειστική, είναι πολύ σίγουρη για την απάντησή της και νιώθει πολύ άνετα. Άρα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε σε ένα πρώτο συμπέρασμα ότι έχει επίγνωση για την απόδειξη που της δόθηκε.

Προχωρώντας βέβαια στη συνέντευξη βλέπουμε ότι υπάρχουν και περιπτώσεις που είναι σίγουρη και νιώθει άνετα για επιχειρήματα, που δεν αποδεικνύουν τον ισχυρισμό. Επομένως θα λέγαμε ότι σε αυτή την περίπτωση δεν έχει επίγνωση.

Υπήρξε βέβαια και η περίπτωση της δεύτερης σωστής απόδειξης για την οποία ήταν πολύ σίγουρη ότι πείθει απόλυτα, αναφέροντας ότι νιώθει άνεση, γιατί πιστεύει ότι μέχρι σημείο είναι σωστή, αλλά και περιέργεια, γιατί χρειάζεται τη γνώμη κάποιου έμπειρου για επιβεβαίωση. Επομένως δε μπορούμε μέχρι στιγμής να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα και να αποφανθούμε αν έχει ή όχι επίγνωση.

6.2.8Εμβαθύνοντας στις απόψεις της Αλκμήνης για την απόδειξη



Σχήμα 4. Εμβαθύνοντας στις απόψεις της Αλκμήνης.

Η περαιτέρω μελέτη των απόψεων της μαθήτριας έγινε σύμφωνα με τρεις άξονες: 1) την ορθότητα της απάντησης, 2) τη γενίκευση και 3) τη λειτουργία της εξήγησης της απόδειξης. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης παρατηρήθηκαν διάφορες αντιφάσεις στις απαντήσεις της μαθήτριας σε σχέση και με τα προηγούμενα ερωτήματα. Σε σωστή απόδειξη, παρόλο που προηγουμένως αναφέρει ότι είναι απόλυτα πειστική και είναι πολύ σίγουρη για την απάντησή της, θεωρεί ότι δεν είναι αρκετά ξεκάθαρο το αν ισχύει πάντα και ότι σίγουρα θα υπάρχουν περιπτώσεις που ο ισχυρισμός δε θα ισχύει και χρειάζεται μία συγκεκριμένη αιτιολόγηση. Αυτοί οι ισχυρισμοί της έρχονται σε αντίφαση με τις απαντήσεις που έδωσε στην εξέταση της γνώσης-θυμικού-μετά-θυμικού, αφού πλέον φαίνεται ότι η απόδειξη του μαθητή στην πραγματικότητα δεν την έπεισε και χρειάζεται κάτι άλλο.

Στη συνέχεια ενώ τελικά καταλήγει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός και ισχύει πάντα φαίνεται ότι δεν ικανοποιεί τον παράγοντα της εξήγησης, αφού ισχυρίζεται ότι υπάρχει ασάφεια, αν και ίσως με κάποιες αλλαγές να μπορούσε να το εξηγήσει σε κάποιον άλλο.

Ε: Εσύ το πιστεύεις αυτό ή πιστεύεις ότι αυτός ο ισχυρισμός ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπως λέει στο τρίτο; Επειδή βλέπω ότι διαφωνείς και με τα δύο.

Α: Μμμμμ…Δεν ξέρω..

Ε: Να ξέρεις ότι δεν εξετάζεσαι.. τη γνώση σου πιο πολύ θέλω..

Α: Ναι ναι..κατά τη γνώμη μου ισχύει πάντα.. τώρα στη συγκεκριμένη περίπτωση έτσι όπως το έχει διατυπώσει σωστό θεωρείται..

Ε:Οκ.. Δηλαδή πιστεύεις ότι θα είναι σωστός πάντα..

Α: Ναι έτσι όπως το έχει διατυπώσει..

Ε: Ωραία.. στην τέταρτη που λέει ότι δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός;

Α:……………………

Ε: Σου εξηγεί δηλαδή γιατί είναι σωστό;

Α: Εεεε εξηγεί… Προσωπικά δεν πιστεύω ότι είναι τελείως σωστός.. Είναι μόνο με τους θετικούς και δεν το αναλύει περαιτέρω..

Ε: Δηλαδή για σένα δε σου εξηγεί γιατί όντως ισχύει..

Α: Ναι ότι υπάρχει ασάφεια δηλαδή..

Ε:Οκ κατάλαβα.. Και για το τελευταίο;

Α: Αν δεν είναι καθόλου σίγουρος ο άλλος, είναι ένας απλός τρόπος..μπορεί και λανθασμένος να το εξηγήσεις σε κάποιον. Καταλαβαίνω πώς μπορεί κάποιος να το καταλάβει με αυτή την απλή εξήγηση..

Ε: Βλέπω ότι συμφωνείς εδώ, ενώ στο προηγούμενο νομίζεις ότι δεν εξηγεί γιατί ισχύει..

Α: Σε εμένα..

Ε:Αλλά μπορεί σε κάποιον άλλο να μπορεί. Θα μπορούσες όμως εσύ να το εξηγήσεις σε κάποιον άλλο;

Α: Ναι, θα μπορούσα..Θα έβαζα και άλλα.

Η δεύτερη σωστή απόδειξη, η οποία αρχικά την είχε μπερδέψει, μιας και δε διάβασε προσεκτικά το δοθέντα ισχυρισμό, την πείθει απόλυτα και είναι πάρα πολύ σίγουρη γι' αυτό, ενώ αναφέρει βέβαια ότι υπάρχει μια μικρή ανασφάλεια. Στη συνέχεια περνώντας στις ερωτήσεις που εξετάζουν τη μετά- γνώση, υπάρχει μια μικρή σύγχυση για το αν η απόδειξη είναι σωστή και αν ισχύει πάντα ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Ενώ πρώτα ισχυρίζεται ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός, στις επόμενες ερωτήσεις 'κολλάει', προσπαθεί να βασιστεί στα δεδομένα, χωρίς όμως να καταφέρνει να απαντήσει:

Ε: Πιστεύεις δηλαδή ότι είναι πάντα σωστός..και όχι ότι ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Α:Εεεεε….μμμμμμμ…ναι.. σε συγκεκριμένες περιπτώσεις..τώρα που είναι και θετικός..

Ε: Πιστεύεις ότι είναι γενικά σωστός και ότι ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Α:Μμμμμ…κόλλησα..

Ε: σκέψου το λίγο

Α:…………..

Α: Ναι δείχνει, αφού είναι θετικός ακέραιος και δε μας μιλάει για αρνητικό.. ………Εεεεε… Έτσι όπως είναι……………..

Ε: Τώρα τι σε μπερδεύει, αφού θεωρείς ότι είναι απόλυτα πειστική;

Α:Μιλάει για συγκεκριμένη περίπτωση για το ν..

Ε: Αυτό το λέει η άσκηση..Για διάβασέ το..Η απόδειξη αυτή ισχύει γενικά ή ισχύει μόνο για συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Α:Μμμμμ… Ισχύει πάντα;;; Δηλαδή υποθέτω..Δεν είμαι σίγουρη…

Σε άλλες απαντήσεις για να αποφανθεί για τη γενίκευση και την εξήγηση της κάθε απόδειξης βασίζεται πολύ σε παραδείγματα αλλά και στη δομή, που είναι γραμμένες:

Ε:Πιστεύεις ότι ο ισχυρισμός είναι πάντα σωστός ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Α:Εεεε…μμμμ.. σε συγκεκ…μμμμμ…και πάντα..ναι πάντα..

Ε:Σε έπεισε δηλαδή με ένα παράδειγμα που πήρε

Α:Ναι

Ε:Οκ..δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός;

Α:Ναι

Ε:Και πώς το δείχνει;

Α:Λέει ότι αφού 20 >15 αν τους υψώσουμε και τους δύο στον ίδιο εκθέτη, τότε σίγουρα θα είναι..

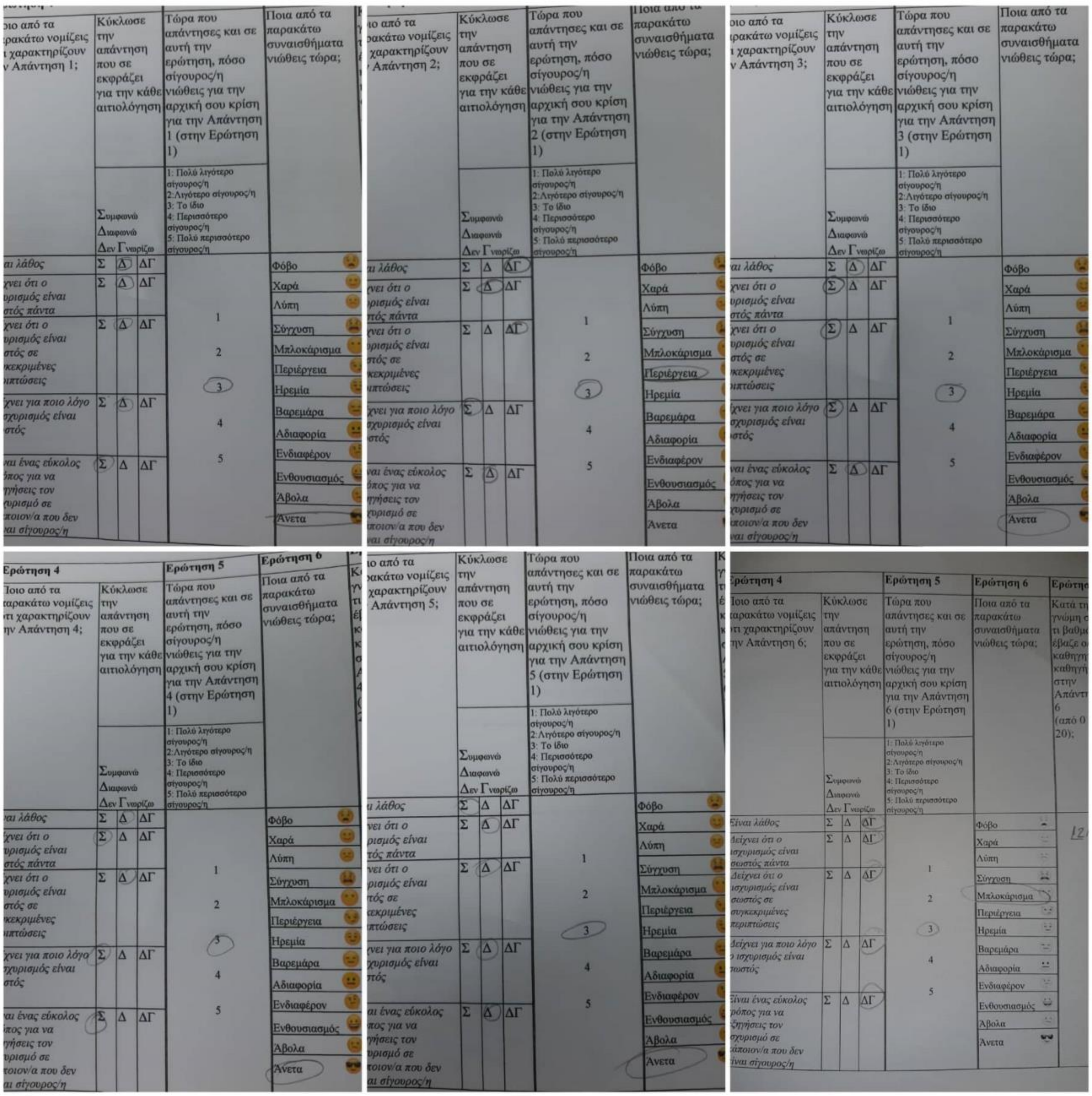
Ε:Θα μπορούσες αυτό να το χρησιμοποιήσεις για να το εξηγήσεις σε κάποιον άλλο:

Α:Ναι

Ε:Δεν ισχύει ούτε γενικά ούτε σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Α:Εεεεεε…γενικά γιατί και πάλι δεν έχει αρκετά… δεν έχουμε αρκετά… πώς να το πω; Η απάντηση δεν είναι μεγάλη για να μπορούμε να πούμε ότι αυτό θα ναι σωστό ή αυτό λάθος..Αν δεν ισχύει εκεί, θα ισχύει αλλού..

6.2.9Τα συναισθήματα της Αλκμήνης εμβαθύνοντας στις απόψεις της για την απόδειξη



Σχήμα 5. Τα τελικά συναισθήματα της Αλκμήνης.

Σε πολλές περιπτώσεις η Αλκμήνη ήταν πάρα πολύ σίγουρη και ένιωθε άνετα για τις απαντήσεις της, κάτι που άλλαζε μετά τις ερωτήσεις που είχαν να κάνουν με την περαιτέρω εξέταση αυτών των απόψεων.

<u>*1ο Παράδειγμα:*</u>

Ε: Εσύ το πιστεύεις αυτό ή πιστεύεις ότι αυτός ο ισχυρισμός ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπως λέει στο τρίτο; Επειδή βλέπω ότι διαφωνείς και με τα δύο.

Α: Μμμμμ…Δεν ξέρω..

Ε: Να ξέρεις ότι δεν εξετάζεσαι.. τη γνώση σου πιο πολύ θέλω..

Α: Ναι ναι..κατά τη γνώμη μου ισχύει πάντα.. τώρα στη συγκεκριμένη περίπτωση έτσι όπως το έχει διατυπώσει σωστό θεωρείται..

Ε:Οκ.. Δηλαδή πιστεύεις ότι θα είναι σωστός πάντα..

Α: Ναι έτσι όπως το έχει διατυπώσει..

Ε: Ωραία.. στην τέταρτη που λέει ότι δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός;

Α:……………………

Ε: Σου εξηγεί δηλαδή γιατί είναι σωστό;

Α: Εεεε εξηγεί… Προσωπικά δεν πιστεύω ότι είναι τελείως σωστός.. Είναι μόνο με τους θετικούς και δεν το αναλύει περαιτέρω..

<u>Συναισθήματα:</u>

Ε: Τώρα για τις απαντήσεις που έχεις δώσει μέχρι τώρα σε αυτό το σημείο.. Είσαι το ίδιο σίγουρη ή έχει αλλάξει κάτι;

Α: Μμμ.. Πάλι το ίδιο είναι..

Ε: Και για τα συναισθήματα νιώθεις ακόμα άνετη ή έχεις νιώθεις και κάτι άλλο;

Α: Ναι.. Μπορεί να υπάρχει και λίγη περιέργεια..

Ε:Περιέργεια γιατί;

Α; Ως προς γιατί διάλεξε να το διατυπώσει έτσι..

Μέσα από τις ερωτήσεις παρατηρούμε ότι δεν είναι πια τόσο σίγουρη όσο στην αρχή. Σε ορισμένα σημεία κολλάει, διστάζει, καταλαβαίνει ότι τελικά δεν είναι τόσο απλό, χωρίς βέβαια να νιώθει άβολα ή σύγχυση. Επιτρέπει στον εαυτό της να νιώσει και άλλο συναίσθημα, αυτό της περιέργειας, μπορεί να το ελέγξει και να νιώσει άνετα γι' αυτό. Επομένως ενώ η αρχική της αντίδραση για την απόδειξη του μαθητή ήταν γρήγορη και άνετη, πλέον η περιέργεια την οδηγεί στο να εμβαθύνει και να αναρωτηθεί γιατί επιλέχθηκε αυτός ο τρόπος. Συνεπώς το μετά- θυμικό είναι θετικό και ασφαλές. Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι έχει καταλάβει ότι η απόδειξη είναι σωστή και διερευνεί τους λόγους.

2^{ο} Παράδειγμα:

Α: Με έχει πείσει, αλλά ταυτόχρονα δεν είμαι απόλυτα σίγουρη.. Με το να δίνει τόσα παραδείγματα και να το έχει αναλύσει τόσο, εεε ξέρει και αν αυτός που το γράφει είναι σωστό; Δηλαδή εγώ το βλέπω έτσι είναι πειστική, αλλά το πιστεύει και αυτός που το γράφει;;

Α: Είναι γενικό.. τώρα φυσικά και έχει φέρει τα παραδείγματα που υψώνει σε 3, 4.. αλλά και πάλι δεν είμαι τόσο σίγουρη..

Συναισθήματα:

Ε:Και τα συναισθήματα που νιώθεις; Είναι η περιέργεια ή μήπως και κάτι άλλο;
Α: περιέργεια και… ενδιαφέρον ίσως..
Ε: Τι σε κάνει να τα νιώθεις αυτά;
Α: Γιατί είναι τόσο μεγάλη η απόδειξη, γιατί αποφάσισε συγκεκριμένα τον εκθέτη 3 και 4…και αν είναι όντως σωστή..

Παρατηρούμε ότι ενώ στην αρχή έχει πειστεί λόγω των παραδειγμάτων, μέσα από τις ερωτήσεις που είχαν σαν στόχο να εμβαθύνουν στις απόψεις της για την απόδειξη, αρχίζει να αναρωτιέται για τα παραδείγματα και να υποψιάζεται για την επιλογή των τυχαίων αριθμών. Δε νιώθει άβολα για αυτές τις υποψίες, αντίθετα το ενδιαφέρον μπορεί να την οδηγήσει σε περαιτέρω διαδικασίες για την αξιολόγηση του επιχειρήματος. Το μετά- θυμικό επομένως είναι και σε αυτή την περίπτωση θετικό και ασφαλές.

3^{o} Παράδειγμα:

Ε: Τώρα τι σε μπερδεύει, αφού θεωρείς ότι είναι απόλυτα πειστική;

Α:Μιλάει για συγκεκριμένη περίπτωση για το ν..

Ε: Αυτό το λέει η άσκηση..Για διάβασέ το..Η απόδειξη αυτή ισχύει γενικά ή ισχύει μόνο για συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Α:Μμμμμ… Ισχύει πάντα;;; Δηλαδή υποθέτω..Δεν είμαι σίγουρη…

Συναισθήματα:

Ε:Πλέον πόσο σίγουρη είσαι για τις απαντήσεις σου;
Α:Μμμμμ…Το ίδιο…Εεε Μήπως….; Λίγο λιγότερο…
Ε: Γιατί; Πώς άλλαξε αυτό;
Α: Επειδή έχω μπερδευτεί τόσο πολύ.. Έχω πονοκεφαλιάσει (γέλια)..εεεεε ναι ..λίγο λιγότερο..ανάμεσα στο 2 και το 3..
Ε:Και τι συναισθήματα νιώθεις τώρα για τις απαντήσεις σου;
Α:έχω την άνεσή μου….έχω συγχυστεί και λίγο(γέλια)
Ε:Πιο πολύ συγχύστηκες επειδή έχεις μπερδευτεί;
Ναι δε μπορώ να πω ότι έχω μπλοκάρει..Λίγο συγχυσμένη..

Ε:Οκ..τελικά θα μείνεις στο 15;
Α:όοοχι.. θα του βάλω 20

Στο παράδειγμα της δεύτερης σωστής απόδειξης παρατηρούμε για πρώτη φορά να έχει προστεθεί το συναίσθημα της σύγχυσης. Νιώθει την άνεση του ότι η απόδειξη είναι σωστή και προσπαθεί να βρει τρόπο να το αιτιολογήσει. Αντιλαμβάνεται και η ίδια ότι αυτό που νιώθει δεν είναι μπλοκάρισμα και δε νιώθει άβολα. Ξέρει ότι έχει απαντήσει σωστά, αλλά δε μπορεί να το αιτιολογήσει και επιτρέπει στον εαυτό της να νιώσει σύγχυση, αναγνωρίζοντας ότι με αυτό τον τρόπο θα οδηγηθεί στην επιτυχή αξιολόγηση της απόδειξης. Πρόκειται δηλαδή για άλλη μια περίπτωση που το μετά-θυμικό είναι θετικό και ασφαλές.

6.2.10Αλκμήνη και επίγνωση

Όσον αφορά τις απόψεις της Αλκμήνης για την απόδειξη φαίνεται να έχει επίγνωση ως προς το βαθμό πειστικότητας των σωστών ή λανθασμένων παραγωγικών αποδείξεων και του οπτικού επιχειρήματος, πράγμα που φαίνεται από τους εγγυητές που χρησιμοποιεί, ενώ παράλληλα δεν έχει για τα επιχειρήματα αφελή εμπειρισμού και κρίσιμου πειράματος, που θεωρεί πολύ ή και απόλυτα πειστικά.

Εξετάζοντας τη βεβαιότητα για τις απόψεις της στην απόδειξη, παρατηρούμε εναλλαγές στις αντιδράσεις της. Άλλοτε η βεβαιότητα βασίζεται στο γνωστικό περιεχόμενο και είναι δικαιολογημένη και άλλοτε προέρχεται από τη λειτουργία της εξήγησης της απόδειξης και του βαθμού κατανόησής της. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις η Αλκμήνη καταλήγει να αξιολογεί λανθασμένα την απόδειξη, συνεπώς θα λέγαμε ότι δεν έχει επίγνωση της βεβαιότητάς της. Όσον αφορά την πρώτη περίπτωση, αν και αιτιολογεί με λογική το βαθμό βεβαιότητάς της, παρατηρούνται κάποιες εναλλαγές ως προς αυτόν. Οι εν λόγω εναλλαγές προκύπτουν, καθώς εμφανίζονται αισθήματα ανασφάλειας, που έρχονται σε σύγκρουση με το βαθμό αυτό-αποτελεσματικότητάς της, μέσω του ερωτηματολογίου, και των αρχικών της δηλώσεων περί μαθηματικής αλαζονείας. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση θα λέγαμε ότι δεν έχει επίγνωση για τη βεβαιότητά της για τις απόψεις της στην απόδειξη.

Σχετικά με τα συναισθήματα που νιώθει η Αλκμήνη για τις απόψεις της στην απόδειξη, παρατηρούμε ότι δεν έχει επίγνωση στην πλειοψηφία των απαντήσεών της. Παρόλο που υπάρχουν στιγμές που έχει άνετα ότι έχει επιχειρηματολογήσει ορθά για τις πράγματι σωστές αποδείξεις, παρόμοια συναισθήματα προκύπτουν και σε επιχειρήματα που δεν αποδεικνύουν τον ισχυρισμό.

Εμβαθύνοντας στις απόψεις της για την απόδειξη παρατηρούμε ότι πολλές φορές οι απαντήσεις της έρχονται σε αντίφαση με τις προηγούμενες. Αποδείξεις για τις οποίες ήταν απόλυτα σίγουρη, πλέον θεωρεί ότι έχουν ασάφειες, τα επιχειρήματα στις απαντήσεις της δεν έχουν λογική συνοχή και δε βασίζεται στους κατάλληλους εγγυητές για να αποφανθεί για τις λειτουργίες της απόδειξης. Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι εμβαθύνοντας στις απόψεις της για την απόδειξη, δεν έχει επίγνωση.

Μελετώντας τα συναισθήματά της σε αυτό το σημείο παρατηρούνται ορισμένες εναλλαγές. Υπήρχαν περιπτώσεις για τις οποίες ενώ σημείωνε ότι ήταν το ίδιο σίγουρη για τις απαντήσεις της, εμείς παρατηρήσαμε δισταγμό. Οι στιγμές που 'κολλούσε' ή που καταλάβαινε και η ίδια ότι οι απαντήσεις της έρχονται σε αντίφαση και ίσως να μην έχουν λογική συνοχή, ήταν αυτές που επηρέαζαν, θετικά σε αυτή την περίπτωση το μετά- θυμικό, αφού τα νέα συναισθήματα που παρουσιαζόντουσαν, ήταν περιέργεια και ενδιαφέρον. Ακόμα και τη στιγμή που ένιωσε σύγχυση, ανέφερε ότι δεν ήταν μπλοκάρισμα και ότι συνέχιζε να είναι άνετη. Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει επίγνωση των καινούριων συναισθημάτων της, που κάνουν τη διαδικασία να φαίνεται πιο προκλητική και θα μπορούσαν να την κινητοποιήσουν για περαιτέρω ανακαλύψεις.

6.3 Συνέντευξη Μάρκου

Η δεύτερη συνέντευξη έγινε με το Μάρκου ένα μαθητή 16 χρονών της Α΄ Λυκείου με υψηλή επίδοση στα Μαθηματικά. Όπως μας ανέφερε τα Μαθηματικά στο Λύκειο δεν έχουν καμία σχέση με αυτά του Γυμνασίου, μιας και είναι πολύ πιο δύσκολα, αλλά συνεχίζουν να του αρέσουν.

6.3.1 Μάρκος και αυτό-αποτελεσματικότητα

Παρατηρούμε ότι έχει αρκετά υψηλή αυτοπεποίθηση, καθώς φαίνεται ότι είναι πολύ σίγουρος ότι μπορεί να βάζει στόχους στα Μαθηματικά (μπορεί και ο μόνος που έβαλε 100), να δουλέψει σκληρά, να κάνει τακτικά τις ασκήσεις του και να τα χρησιμοποιήσει έξω από το σχολείο αλλά και στη μελλοντική του καριέρα. Υπήρχαν βέβαια και προτάσεις για τις οποίες δεν είχε τόσο υψηλή αυτοπεποίθηση, καθώς σημείωσε ότι μπορεί αρκετά να κάνει ερωτήσεις στην τάξη και να ζητήσει βοήθεια από καθηγητές, να πάρει άριστα σε ένα τεστ και να ολοκληρώσει τις ασκήσεις του στα Μαθηματικά. Εξετάζοντας τις αντίστοιχες προτάσεις για την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη, παρατηρούμε ότι η αυτοπεποίθησή του συγκριτικά με πριν είναι σε γενικές γραμμές χαμηλότερη. Φαίνεται να είναι πολύ σίγουρος ότι μπορεί να καταλάβει τη σημασία των αποδείξεων στα Μαθηματικά, να κάνει τακτικά τις αποδείξεις του για το σπίτι, να μάθει διαφορετικές μεθόδους κατασκευής αποδείξεων και να δουλέψει με τους συμμαθητές/τριες του σε μια απόδειξη. Δεν είναι πλέον τόσο σίγουρος ότι μπορεί να βάζει στόχους στις αποδείξεις, αλλά θεωρεί ότι μπορεί αρκετά, όπως επίσης να κατασκευάσει σωστές αποδείξεις και να καταλάβει το λανθασμένο συλλογισμό στις λάθος αποδείξεις. Τα χαμηλότερα ποσοστά εμφανίστηκαν στις προτάσεις που είχαν να κάνουν με την εξήγηση της ιδέας πίσω από την απόδειξη και στην επιχειρηματολογία για την ορθότητα της απόδειξης στα Μαθηματικά.

6.3.2 Απόψεις του Μάρκου για τα Μαθηματικά

Οι απόψεις του Μάρκου ποικίλουν καθώς κυμαίνονται από την πιο περιορισμένη ότι «τα Μαθηματικά είναι στοιχεία» στην ευρύτερη, ότι «τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με μοντέλα», και στην ακόμα πιο ευρεία ότι «τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με τη ζωή». Δεν είναι βέβαιος ότι τα Μαθηματικά είναι ένα σύνολο μεθόδων και περιγραφών για να εξηγήσουν τον κόσμο ή η γλώσσα της φύσης που μας βοηθά να κατανοήσουμε το σύμπαν ενώ διαφωνεί στο ότι είναι ένα σύνολο κανόνων και εξισώσεων και στο ότι δε θα του χρειαστούν καθόλου.

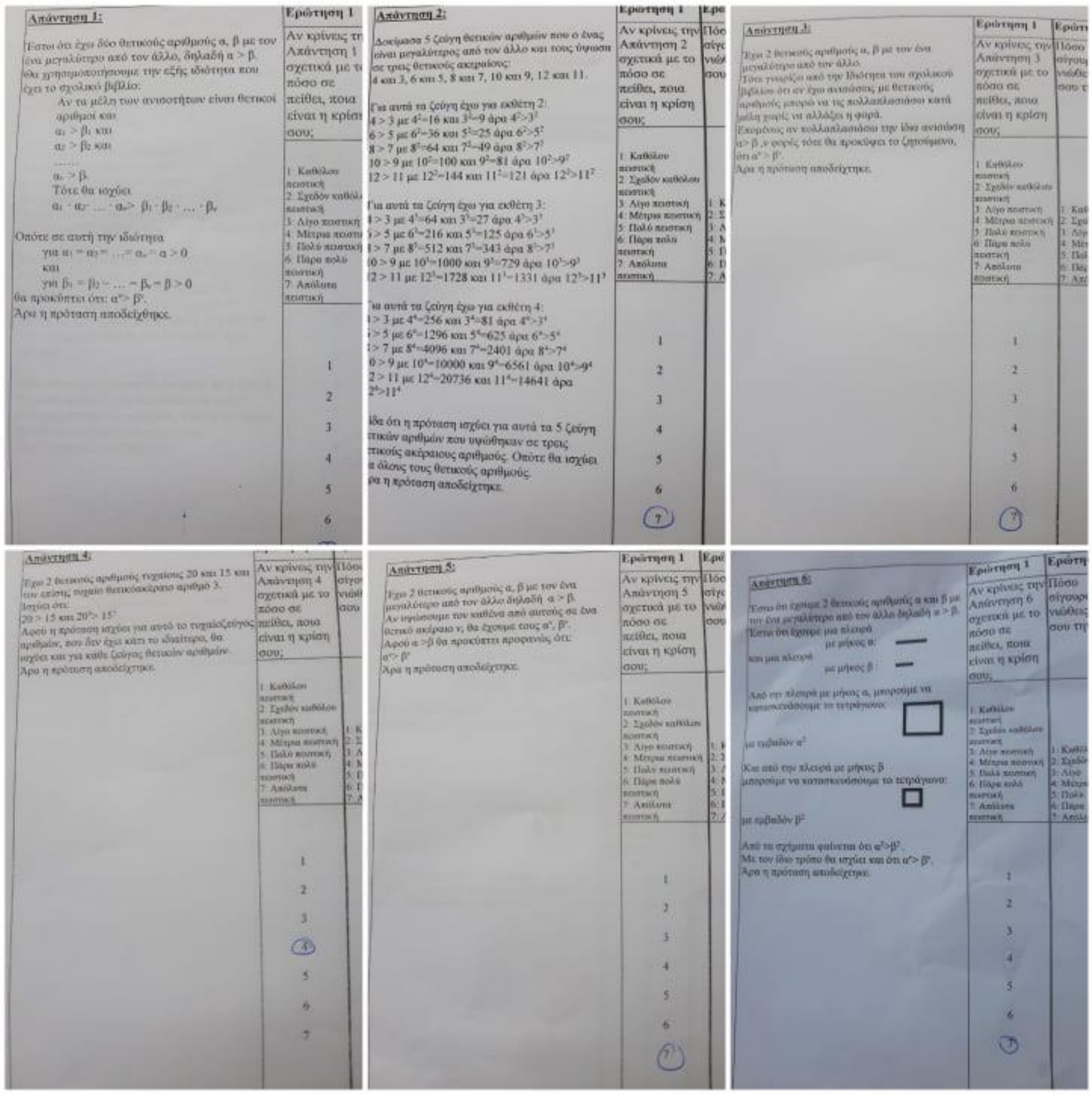
6.3.3 Στάσεις του Μάρκου στα Μαθηματικά

Μελετώντας το ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσε ο Μάρκος παρατηρούμε ότι αναγνωρίζει απόλυτα την αξία των Μαθηματικών και διαφωνεί ως επί το πλείστον με τις προτάσεις που συνδέουν τα Μαθηματικά με αρνητικά συναισθήματα αν και έχει σημειώσει ότι έχει μια αίσθηση ανασφάλειας όταν προσπαθεί να κάνει Μαθηματικά. Παρόλο που του αρέσουν τα Μαθηματικά, παράλληλα δεν είναι βέβαιος ότι τα ευχαριστιέται στο σχολείο και ότι του αρέσει να λύνει νέα προβλήματα ενώ διαφωνεί ότι είναι περισσότερο ευτυχισμένος στην τάξη των Μαθηματικών από οποιαδήποτε άλλη τάξη.

6.3.4Η μαθηματική ταυτότητα του Μάρκου

Ο μαθητής θεωρεί ότι είναι πολύ πάνω από μέτριος, κάτι που πιστεύει ότι θεωρούν οι φίλοι και οι καθηγητές του.

6.3.5Οι απόψεις του Μάρκου για την απόδειξη



Σχήμα 6. Οικρίσεις του Μάρκου για τις απαντήσεις των μαθητών.

Μελετώντας τις απόψεις του Μάρκου για την απόδειξη, παρατηρούμε ότι πείθεται απόλυτα από όλες τις απαντήσεις των μαθητών/τριών με εξαίρεση το επιχείρημα του κρίσιμου πειράματος, επιλέγοντας τελικά την απόδειξη 1, αναφέροντας ότι αυτή ήταν που «τον κάλυψε» από την αρχή και «ήταν σωστή από αρκετές πλευρές».

Στις αποδείξεις που δόθηκαν ως αποδείξεις του ισχυρισμού από μαθητές/τριες στα πλαίσια διαγωνίσματος, παρατηρούμε ότι ο Μάρκος για να πειστεί βασίζεται στο μέγεθος της απόδειξης και στα παραδείγματα που χρησιμοποιεί για να εξηγήσει:

Ε: Πόσο πειστική την έβαλες αυτή;
Μ:7.. Απόλυτα πειστική.. έχει πολύ μεγάλο μήκος γι' αυτό το λόγο και ότι μας δίνει ξεχωριστό παράδειγμα για τον καθένα αριθμό που μας λέει παραπάνω οπότε γι' αυτό το λόγο έβαλα 7..

Σε άλλες αποδείξεις αναζητά πιο τυπικούς και αυστηρούς εγγυητές, όπως η παρουσία ιδιότητας του σχολικού βιβλίου:

Ε: Αυτή πόσο πειστική σου φαίνεται;
Μ: Έχω βάλει 7.. μου φάνηκε αρκετά πειστική.. πατάει σε ιδιότητα σχολικού βιβλίου οπότε θεώρησα ότι αφού στηρίζεται εκεί η απάντηση είναι αξιόπιστη

Ενώ υπάρχουν και περιπτώσεις που πείθεται μέσω της αφηγηματικής γλώσσας και του απλού τρόπου εξήγησης της απόδειξης, όπως επίσης και με την ύπαρξη σχημάτων που επίσης εξηγούν:

Ε:Αυτή πόσο πειστική τη θεωρείς;
Μ: Αυτή τη θεωρώ απόλυτα πειστική διότι μας λέει ότι αν πάρουμε αυτούς τους δύο αριθμούς και τους υψώσουμε στον ίδιο αριθμό ν θα έχουμε πάλι τον κάθε αριθμό στη δύναμη που τον έχουμε υψώσει και αφού ισχύει και ότι ο ένας είναι μεγαλύτερος από τον και αν τα υψώσουμε στη δύναμη θα ναι ο ένας μεγαλύτερος από τον άλλο.. με πείθει δηλαδή.. είναι σωστό..

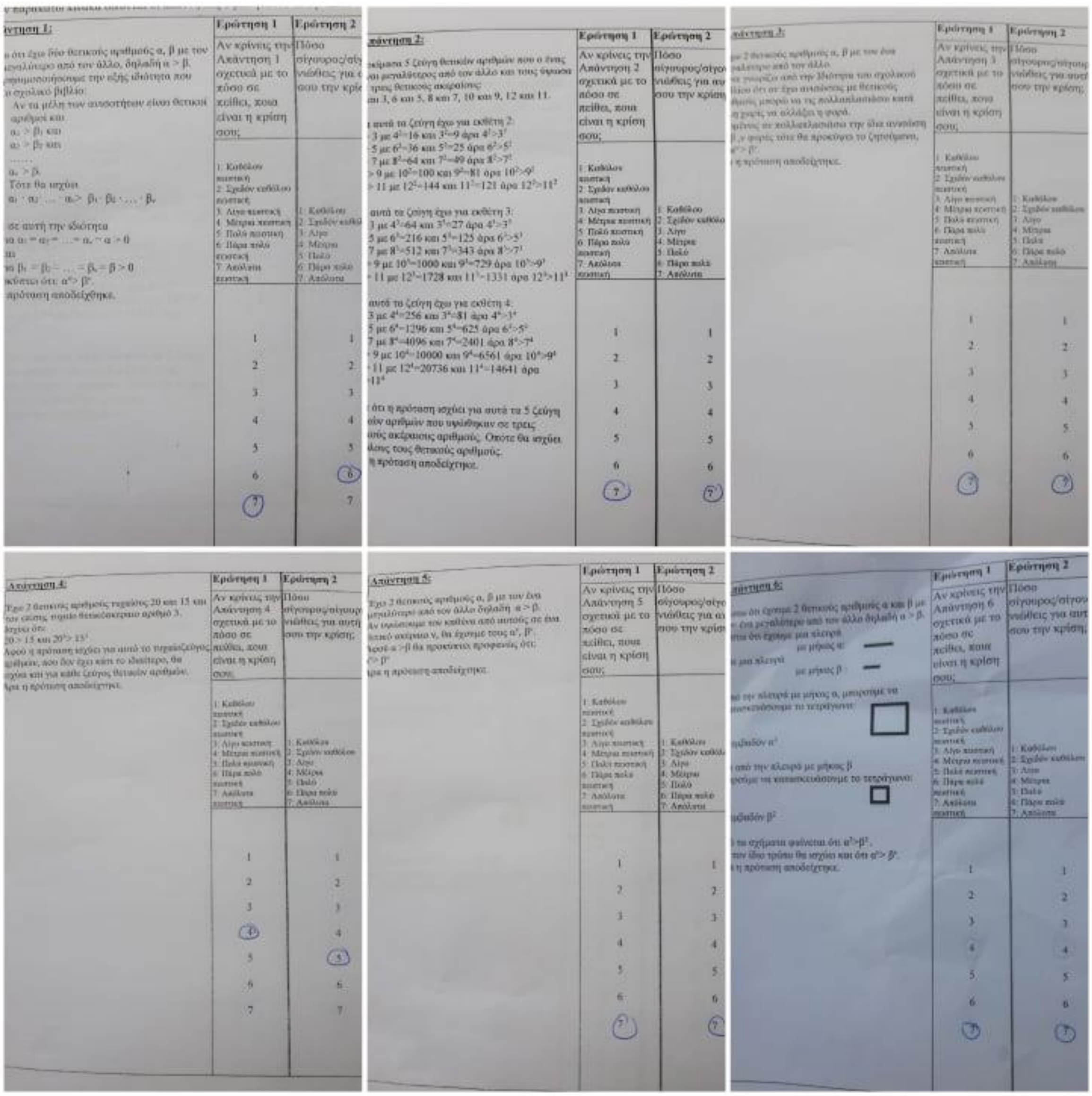
Ε: Αυτή τώρα πόσο πειστική τη θεωρείς;
Μ: Έχω βάλει 7..τη θεωρώ απόλυτα πειστική, διότι κατ' αρχήν έχει και σχήμα και εξηγεί στο κάθε ένα τι είναι τι, οπότε βοηθάει περισσότερο το σχήμα σε γενικές γραμμές να καταλάβεις αυτό που λέει μια άσκηση ή απόδειξη και νομίζω ότι είναι απόλυτα πειστική..

Ιδιαίτερη εντύπωση μας κάνει το γεγονός ότι από την πρώτη απόδειξη, μία από τις σωστές παραγωγικές και η οποία υπάρχει με την ίδια ακριβώς μορφή στο σχολικό βιβλίο, πείθεται όπως αναφέρει λόγω της ύπαρξης παραδείγματος, ενώ στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κάποιο παράδειγμα:

Ε:Γιατί πιστεύεις ότι είναι απόλυτα πειστική;

Μ: Διότι έχει το παράδειγμα που μας δείχνει μας εξηγεί κατανοητά ότι ο ισχυρισμός αυτός ισχύει οπότε γι' αυτό έβαλα 7..

6.3.6Η βεβαιότητα του Μάρκου για τις απόψεις του στην απόδειξη



Σχήμα 7. Βαθμός Βεβαιότητας Μάρκου.

Στη δεύτερη ερώτηση εξετάζουμε το πόσο σίγουρος είναι για τις απόψεις του για την απόδειξη. Ο μαθητής φαίνεται να είναι πολύ σίγουρος για την κρίση του, ορισμένες φορές και απόλυτα, χωρίς να διστάζει ή να δίνει την εντύπωση ότι έχει δεύτερες σκέψεις. Ακόμα και στην περίπτωση της απόδειξης που χρησιμοποιούσε σχήματα, φάνηκε να κρατά θετική στάση αν και ανέφερε στο τέλος ότι η Γεωμετρία δεν του αρέσει πολύ. Στις απαντήσεις του εμφανίζονται συναισθήματα γνώσης, καταλληλότητας ή και το συναίσθημα ότι «βρίσκεται στο σωστό δρόμο» :

Ε:Και πόσο σίγουρος νιώθεις για αυτή την κρίση;
Μ:Νομίζω ένα 6 έχω βάλει εδώ πέρα..
Ε: Είσαι πάρα πολύ σίγουρος δηλαδή…
Μ:Νομίζω ναι..
Ε:Γιατί;
Μ:Εεε νομίζω ότι είναι πολύ πειστική… απλά λέω ότι είναι σωστή.. αυτό νομίζω..

Ε:Και πόσο σίγουρος νιώθεις για την απάντησή σου;
Μ:Έχω βάλει ένα 6.. πάρα πολύ.. το βλέπω δηλαδή.. αφού το διάβασα είναι αρκετά..είμαι νομίζω σίγουρος ότι είναι αυτό που έχω βάλει γιατί εντάξει η απάντηση με καλύπτει νομίζω..

Ε:Και πόσο σίγουρος νιώθεις για αυτή την απάντηση;
Μ: Έχω βάλει 7 γιατί βάζει μέσα στην απάντηση από το σχολικό βιβλίο οπότε αυτό είναι σίγουρο ότι ισχύει.. γι' αυτό το λόγο έβαλα 7.

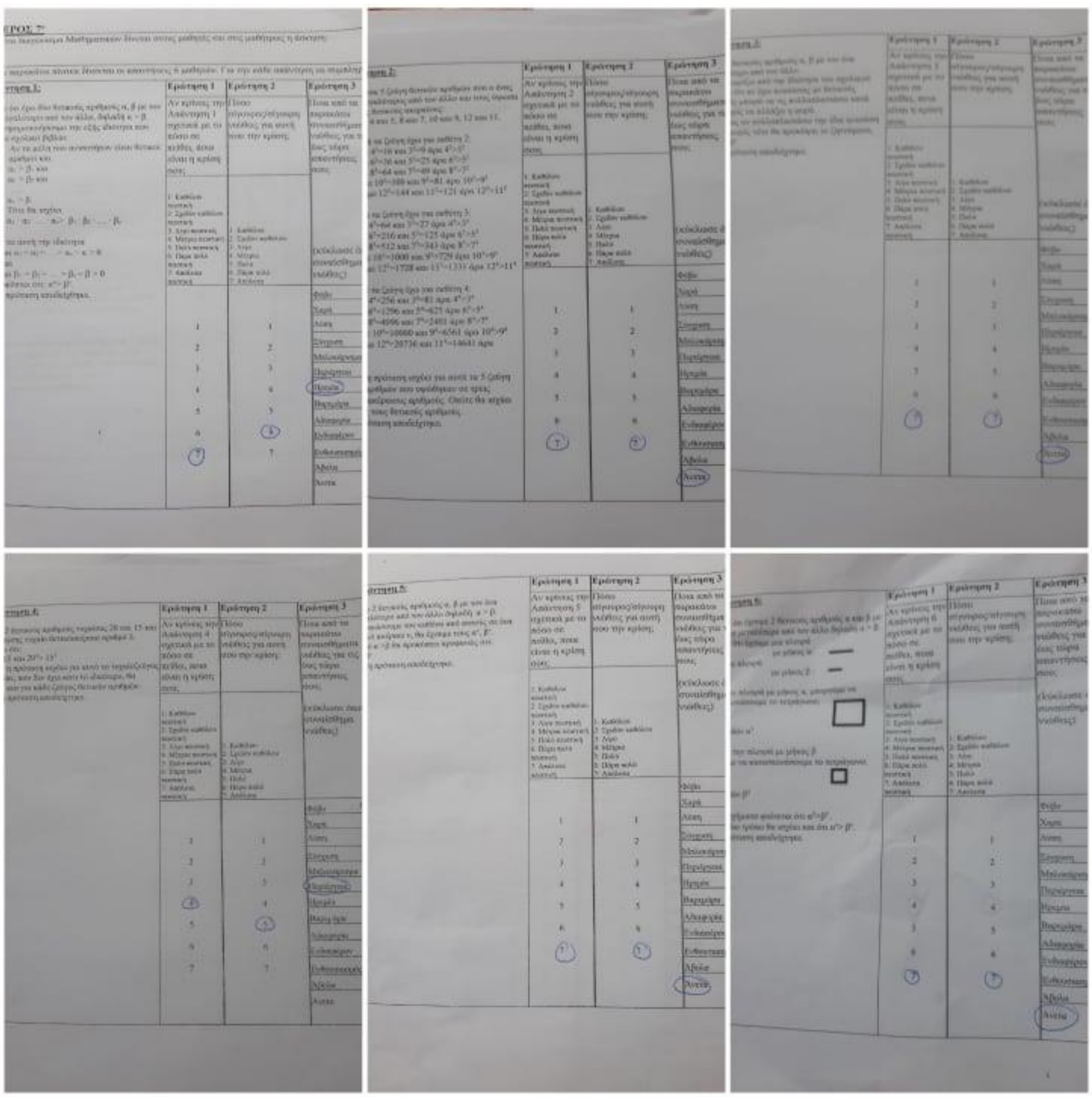
Ε:Και πόσο σίγουρος είσαι για αυτή την απάντηση;
Μ: έχω βάλει 7.. είμαι απόλυτα σίγουρος για την απάντησή μου..

Ε:Και πόσο σίγουρος είσαι για την απάντησή σου;
Μ:Εεε έχω βάλει ένα 7, είμαι σίγουρος για την απάντησή μου και πιστεύω ότι είναι σωστή..

Υπήρξαν όμως και αποδείξεις για τις οποίες δεν ήταν τόσο σίγουρος, μιας και παρουσιάστηκαν απορίες και ενδοιασμοί σχετικά με την απάντηση:

Μ: Εδώ έβαλα ένα 5, πολύ σίγουρος.. έχω και κάποιους ενδοιασμούς..να είναι και λάθος αυτό που λέω..
Ε:Τους ενδοιασμούς γιατί τους έχεις; Για αυτό που είπες πριν ότι δεν ξέρεις για ποιες περιπτώσεις θα ισχύει ή είναι και κάτι άλλο;
Μ:Ναι ναι αυτό..

6.3.7Τα συναισθήματα του Μάρκου για τις απαντήσεις του έως τώρα



Σχήμα 8. Συναισθήματα Μάρκου.

Μελετώντας τα συναισθήματα του Μάρκου για τις έως τώρα απαντήσεις του παρατηρούμε ότι σε γενικά πλαίσια είναι άνετος και ήρεμος. Ανέφερε και ο ίδιος ότι για τα συναισθήματα δεν ήξερε τι ακριβώς έπρεπε να απαντήσει.

Ε:Και τα συναισθήματά σου μέχρι τώρα;
Μ: Μέχρι τώρα έχω βάλει ηρεμία
Ε:Γιατί;
Μ:Εντάξει.. να πω την αλήθεια δε μου έρχεται και κάτι άλλο να βάλω.. νομίζω εκείνη τη στιγμή αυτό ένιωθα..

Ε:Και τα συναισθήματά σου μέχρι τώρα;
Μ:Εεεε άνετα διότι… εε άνετα..(γέλια)

Ε:Και ποια είναι τα συναισθήματά σου για τις απαντήσεις σου γενικότερα;
Μ: Τώρα έχω βάλει άνετα ότι είμαι..
Ε:Γιατί αυτό;
Μ: Νομίζω δεν είχε καμιά ιδιαίτερη δυσκολία η απάντηση αυτή και νομίζω με καλύπτει..

Ε:Και τα συναισθήματά σου;
Μ: Έχω βάλει άνετα εδώ πέρα γιατί δε με δυσκόλεψε κάπου αυτή η απάντηση..νομίζω ότι με καλύπτει.. αυτό..

Ε:Ωραία.. και τα συναισθήματά σου μέχρι στιγμής;
Μ: έχω βάλει άνετα
Ε:Γιατί;
Μ:Δεν έχω κάποιο λόγο να ανησυχώ..νομίζω με καλύπτει η απόδειξη αυτή..

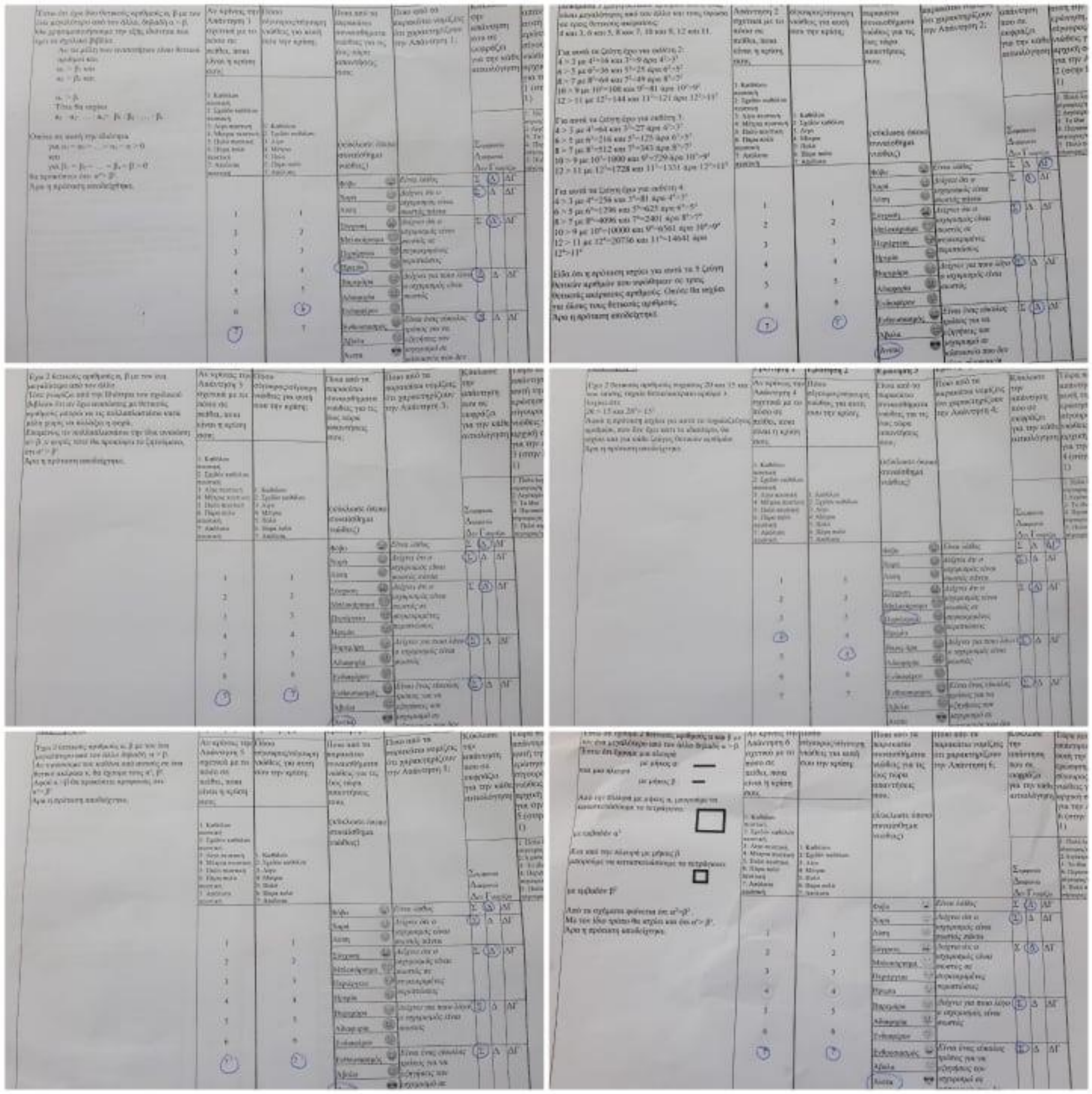
Υπήρξε όμως και η περίπτωση της απόδειξης η οποία τον έπεισε μέτρια από την αρχή και αισθάνθηκε περιέργεια για την κρίση του:

Ε:Και τα συναισθήματά σου μέχρι στιγμής;
Μ:Έχω βάλει περιέργεια, γιατί αυτό που είπαμε και πριν..αναρωτήθηκα αν έχει και άλλα ποια θα είναι τα υπόλοιπα ζεύγη αριθμών που θα… για τα οποία θα ισχύει.. και αν όλα είναι που θα ισχύει και όχι σε μερικά μόνο..

Συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι ο Μάρκος πείθεται από τις περισσότερες αποδείξεις, από τις δύο σωστές παραγωγικές, αλλά και από τη λάθος παραγωγική, το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού και το οπτικό επιχείρημα. Βασίζεται κυρίως σε τυπικούς εγγυητές, όπως το σχολικό βιβλίο, αλλά και στη λειτουργία της απόδειξης, την εξήγηση και στο βαθμό κατανόησής τους. Έχει πειστεί μέτρια από το κρίσιμο πείραμα, επισημαίνοντας σωστά, ότι ίσως υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις, για τις οποίες δε μπορούμε να αποφανθούμε αν ισχύει ο ισχυρισμός.

Σε αυτό το σημείο σίγουρα δε μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ο Μάρκος έχει επίγνωση για την απόδειξη, μιας και από τη μία υπάρχουν στιγμές που αιτιολογεί με λογική το βαθμό πειστικότητας και τα συναισθήματά του συγκλίνουν με αυτό, αλλά από την άλλη είναι πολύ σίγουρος για τον υψηλό βαθμό πειστικότητας επιχειρημάτων που δεν είναι αποδείξεις.

6.3.8Εμβαθύνοντας στις απόψεις του Μάρκου για την απόδειξη



Σχήμα 9. Εμβαθύνοντας στις απόψεις του Μάρκου.

Συνεχίζοντας τη συνέντευξη με το Μάρκου και εμβαθύνοντας στις απόψεις του παρατηρούμε ότι υπάρχουν κάποιοι ενδοιασμοί ακόμα και με αποδείξεις που αρχικά τον είχαν πείσει. Για τις σωστές παραγωγικές αποδείξεις αιτιολογεί σωστά στις περισσότερες ερωτήσεις που του κάνουμε:

Ε: Πιστεύεις ότι αυτός ο ισχυρισμός είναι σωστός ή λάθος;

Μ: Να σας πω έχω βάλει ότι δεν είναι λάθος..

Ε:Γιατί;

Μ: Μου φαίνεται αρκετά πειστική η απάντηση και ότι είναι και τα παραδείγματα, ότι στηρίζεται σε μια βάση αυτή η απόδειξη..

Ε: Πιστεύεις ότι ισχύει πάντα ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Μ: Νομίζω ότι ισχύει πάντα διότι δεν έχει κάποια συγκεκριμένη περίπτωση και λέει α αριθμό και β αριθμό.. και μας το κάνει με α^{ν} *δηλαδή μπορεί να ναι οποιοσδήποτε αριθμός οπότε πιστεύω ότι ισχύει πάντα.*

Ε: Και πιστεύεις ότι εξηγεί γιατί είναι σωστός ο ισχυρισμός;

Μ: Ναι έχω βάλει συμφωνώ..

Ε: Και γιατί; Πώς στο εξηγεί για σένα;

Μ:Μου το εξηγεί στο τέλος της απόδειξης με το $\alpha_1=\alpha_2$ *κ.τ.λ. μας λέει ότι ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι μεγαλύτερος από το 0 και στο β, λέει* $\beta_1=\beta_2$ *κ.τ.λ. και λέει ότι έτσι προκύπτει το αποτέλεσμα..και μας λέει μετά ότι αποδείχτηκε.. οπότε γι αυτό πιστεύω ότι είναι σωστό*

Ε: Εσύ αυτή την απόδειξη θα τη χρησιμοποιούσες για να το εξηγήσεις σε κάποιον άλλο;

Μ: Έχω βάλει δε γνωρίζω.. στις αποδείξεις γενικά δεν είμαι και πάρα πολύ καλός εντάξει..εάν χρειαζόταν θα προσπαθούσα να κάνω κάτι..θα έκανα το καλύτερο που μπορούσα..

Παρόλο που στην αρχή της απάντησής του αναφέρεται στη χρήση παραδειγμάτων, κάτι που δεν υπάρχει στη συγκεκριμένη παραγωγική απόδειξη, υποθέτουμε ότι θεώρησε σαν παράδειγμα την πρόταση «έστω ότι έχω δύο θετικούς αριθμούς α, β με τον ένα μεγαλύτερο από τον άλλο, δηλαδή α > β». Συνεχίζει να συμφωνεί με την αρχική του κρίση και θεωρεί την απόδειξη σωστή βασιζόμενος στη μορφή που είναι γραμμένη και στη χρήση μεταβλητών. Παρατηρούμε μια μικρή ανασφάλεια όταν παρουσιάζεται η περίπτωση να πρέπει να εξηγήσει αυτός την απόδειξη σε κάποιον, κάτι που συνάδει με τις θεωρήσεις του για την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη, στο τέταρτο μέρος του ερωτηματολογίου.

Υπάρχουν και αποδείξεις για τις οποίες ο βαθμός πειστικότητας αλλάζει καθώς εμβαθύνουμε:

Ε:Πιστεύεις ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός ή λάθος;

Μ:Εκεί είχα κάποιες αμφιβολίες οπότε έβαλα δε γνωρίζω..

Ε:αμφιβολίες γιατί είχες; Επειδή στην αρχή είπες ότι είναι απόλυτα πειστική;

Μ:Ναι το ξέρω ότι είναι απόλυτα πειστική, αλλά μετά άρχιζα να είχα αμφιβολίες.. και λέω: λες να έχει κάποιο λάκκο η φάβα;

Ε:Και πώς σου ήρθε αυτό; Για την προηγούμενη δεν είχες

Μ:Ναι το ξέρω αυτό.. και το μέγεθος είναι κάποιες φορές της άσκησης που…………………………….εεεεεε………..προσπαθώ να βρω τη λέξη…….που ενδεχομένως σε επηρεάζει..

Ε:Πιστεύεις ότι αυτός ο ισχυρισμός ισχύει πάντα ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Μ: Νομίζω ότι ισχύει για συγκεκριμένες γιατί μας δείχνει κάποιους συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς ακέραιους που λέει.. οπότε γι' αυτό το λόγο..

Ε:Και είναι ένας ισχυρισμός που δείχνει γιατί είναι σωστός; Εξηγεί δηλαδή;

Μ:Ναι γιατί μας έχει.. δηλαδή λέει για τους δύο αυτούς αριθμούς και μετά από κάτω αναλύει τον κάθε αριθμό, το κάθε ζεύγος..

Ε:Θα τη χρησιμοποιούσες για να το εξηγήσεις σε κάποιον άλλο;

Μ: Έχω βάλει διαφωνώ γιατί δε νομίζω να μπορούσα εγώ να το εξηγήσω αυτό σε έναν άλλο..

Σε αντίθεση με την αρχική του κρίση, που θεωρούσε το επιχείρημα απόλυτα πειστικό, φαίνεται ότι υπάρχουν πλέον κάποιες αμφιβολίες. Επιχειρηματολογεί με λογική στις ερωτήσεις που εμβαθύνουν στις απόψεις του για την απόδειξη, ενώ παρατηρούμε και πάλι ανασφάλεια στην εξήγηση της απόδειξης από τον ίδιο.

Ακόμα και στην απόδειξη που τον έπεισε μέτρια έχει κάποιους ενδοιασμούς, οι οποίοι φαίνονται συγκλίνουν με τις απαντήσεις του:

Ε:Οκ! Πιστεύεις ότι ισχύει γενικά ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Μ: Συμφωνώ ότι ισχύει… δεν ξέρω τώρα τι να σας πω..δεν είμαι και σίγουρος για αυτή την

απάντηση..
Ε:Δε μπορείς να είσαι σίγουρος δηλαδή αν ισχύει πάντα ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις..
Μ:Ναι ναι νομίζω ότι ισχύει πάντα για αυτή την περίπτωση, αλλά νομίζω δεν ισχύει για όλες
Ε:Σου εξηγεί για ποιο λόγο είναι σωστός;
Μ:Ναι μου εξηγεί.. αν το υψώσουμε στην τρίτη τέλοσπαντων θα εξακολουθεί να είναι το ένα μεγαλύτερο από το άλλο.. μου το εξηγεί οπότε ναι..
Ε:Και θα χρησιμοποιούσες τον ισχυρισμό για να τον εξηγήσεις σε κάποιον άλλον;
Μ:Ναι.. αν βέβαια είναι σωστός..γιατί όχι; Θα τον χρησιμοποιούσα..

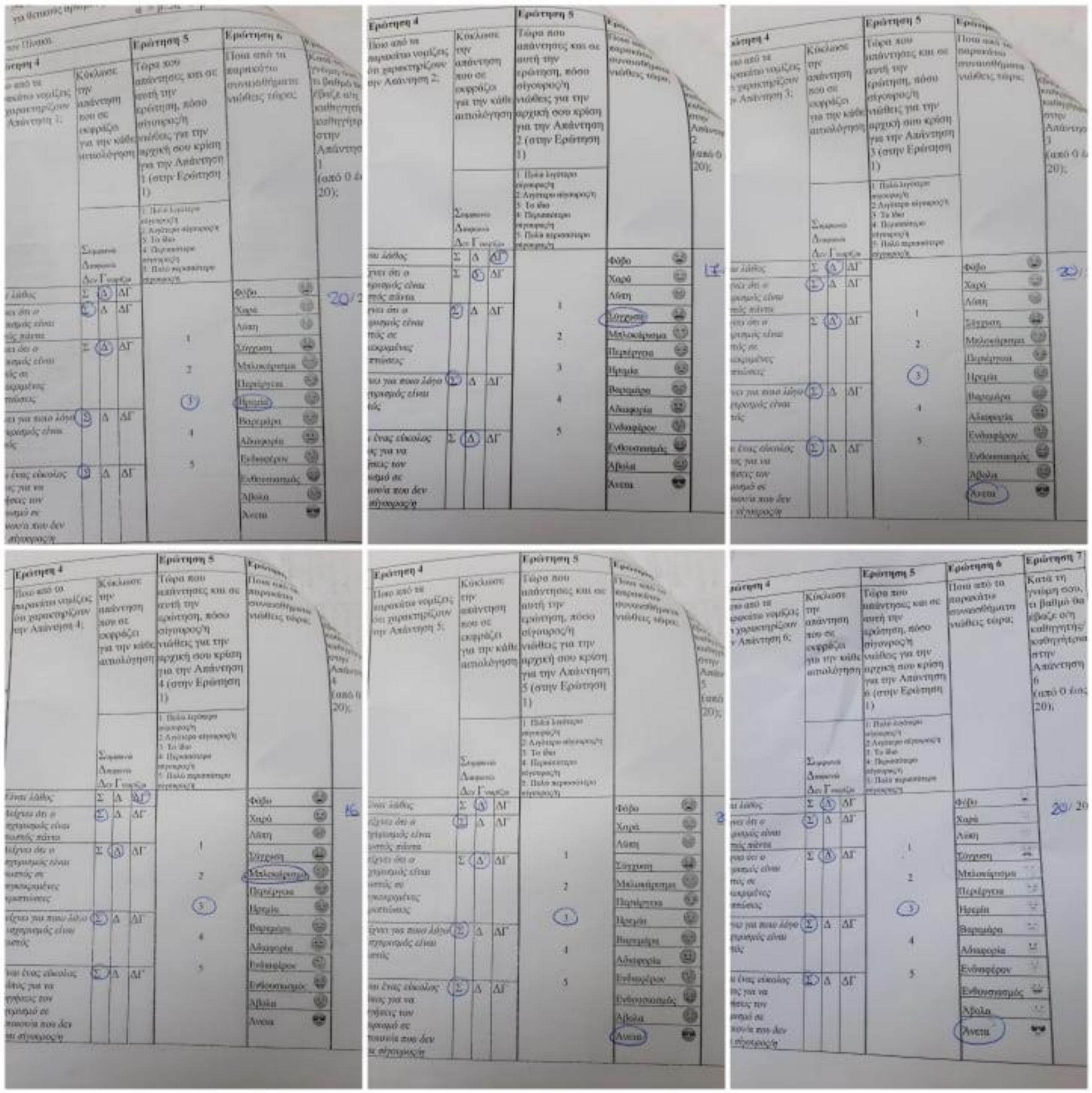
Για τις αποδείξεις με τις οποίες πείθεται αν και δεν είναι σωστές φαίνεται να βασίζεται για τις απαντήσεις του κυρίως στη δομή της απόδειξης, στη λειτουργία της εξήγησης και το βαθμό κατανόησης:

Ε:Οπότε πιστεύεις ότι είναι σωστή ή λάθος;
Μ:Πιστεύω ότι είναι σωστό..
Ε:Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα η σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;
Μ:Δείχνει ότι είναι σωστός πάντα και διαφωνώ ότι είναι σε συγκεκριμένες περιπτώσεις διότι δε μας λέει δύο συγκεκριμένους αριθμούς 2 και 3..μας λέει α και β..μπορεί να είναι οποιοιδήποτε άρα νομίζω ότι ισχύει πάντα..
Ε:Πιστεύεις ότι ένας ισχυρισμός που δείχνει για ποιο λόγο είναι σωστός; Εξηγεί δηλαδή;
Μ:ναι γιατί μας λέει προς το τέλος ότι αφού ισχύει το ένα θα ισχύει και το άλλο..μας αιτιολογεί για ποιο λόγο είναι σωστό..
Ε:Και είναι ένας ισχυρισμός που θα τον χρησιμοποιούσες για να το εξηγήσεις και σε κάποιον άλλο;
Μ:Ναι διότι ναι θα μπορούσα να το χρησιμοποιήσω για να το εξηγήσω σε κάποιον…

Ε:Και πιστεύεις ότι είναι σωστή ή λάθος;
Μ: Είναι σωστή..
Ε:Πιστεύεις ότι ισχύει πάντα ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Μ: Είναι σωστός πάντα πάλι γιατί δε μας δείχνει δύο συγκεκριμένα παραδείγματα.. μας δείχνει πάλι με άγνωστους αριθμούς..μπορεί να είναι ο οποιοσδήποτε άρα ισχύει πάντα αυτή η εικασία..
Ε:Πιστεύει ότι είναι ένας ισχυρισμός που δείχνει ότι είναι σωστός; Εξηγεί δηλαδή;
Μ:Ναι εξηγεί διότι έχει και το σχήμα που όπως είπα πριν βοηθάει στην εξήγηση και κατά δεύτερον στο τέλος έχει ένα σαν συμπέρασμα ότι από τα σχήματα αυτά ισχύει αυτό άρα ισχύει και το από κάτω που λέει..
Ε:Και θα τον χρησιμοποιούσες για να το εξηγήσεις και σε κάποιον άλλο που δεν είναι σίγουρος;
Μ:Ναι..εεε…διότι τον έχω καταλάβει και νομίζω ότι θα μου ήταν εύκολο να το εξηγήσω σε κάποιον..για να καταλάβει και αυτός..

6.3.9Τα συναισθήματα του Μάρκου εμβαθύνοντας στις απόψεις του για την απόδειξη



Σχήμα 10. Τα συναισθήματα του Μάρκου εμβαθύνοντας στις απόψεις του.

Ε:Και τι συναισθήματα έχεις για τις απαντήσεις σου μέχρι τώρα;
Μ: Άνετα..
Ε:Και πώς έγινε η ηρεμία άνετα;
Μ:Εεεε γενικά δεν ξέρω..σε αυτά τα συναισθήματα ήμουν λίγο μπερδεμένος, γιατί δεν ήξερα τι ακριβώς, που πάει αυτό τώρα..νομίζω άνετα ήμουν όταν τα απαντούσα..

Μ:Ναι το ξέρω ότι είναι απόλυτα πειστική, αλλά μετά άρχιζα να είχα αμφιβολίες.. και λέω: λες να έχει κάποιο λάκκο η φάβα;

Ε:Και πώς σου ήρθε αυτό; Για την προηγούμενη δεν είχες
Μ:Ναι το ξέρω αυτό.. και το μέγεθος είναι κάποιες φορές της άσκησης που………………………….εεεεεε………..προσπαθώ να βρω τη λέξη…….που ενδεχομένως σε επηρεάζει..
Ε:Πιστεύεις ότι αυτός ο ισχυρισμός ισχύει πάντα ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;
Μ: Νομίζω ότι ισχύει για συγκεκριμένες γιατί μας δείχνει κάποιους συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς ακέραιους που λέει.. οπότε γι' αυτό το λόγο..

Ε:Και πώς νιώθεις για τις απαντήσεις σου μέχρι στιγμής;
Μ: Μία σύγχυση..
Ε:Γιατι; Επειδή πριν ήσουν άνετος..
Μ:Ναι ήμουν πριν.. άλλα απέκτησα κάποιες αμφιβολίες και για αυτό το λόγο..
Ε:Αυτές οι αμφιβολίες δεν ξέρεις δηλαδή πώς προέκυψαν;
Μ: Όχι.. (γέλια)

Ε:Και τα συναισθήματά σου;
Μ:Ναι άνετα έχω βάλει.. το ίδιο με πριν… με κάλυψε δηλαδή εντάξει..

Μ: Έχω γράψει ένα μπλοκάρισμα..
Ε:Γιατί;
Μ:Εεε ναι αυτό το ότι δεν είμαι σίγουρος..δεν ξέρω στο τέλος είχα μπλοκάρει ναι..

Ε:Και τα συναισθήματά σου..
Μ:Εεεε άνετα έχω βάλει πάλι..
Ε:Γιατί αυτό;
Μ:Δεννν….εεεε…το κατάλαβα την απόδειξη και νομίζω ότι δεν υπάρχει κάποιος λόγος να μην είμαι άνετα με αυτή ή να νιώθω π.χ. μπλοκάρισμα όπως πριν..γι' αυτό το λόγο έχω βάλει άνετα ξανά

Όσον αφορά τα συναισθήματα του Μάρκου καθώς εμβαθύνουμε στις σωστές παραγωγικές αποδείξεις που τον είχαν πείσει στην αρχή, δε φαίνεται να αλλάζουν σε σχέση με τα συναισθήματά του στην αρχή. Νιώθει ήρεμος και άνετος, απαντά σωστά και με σιγουριά στις ερωτήσεις, χωρίς να διστάζει ή να έχει αμφιβολίες για τις απαντήσεις του. Αλλαγή στα συναισθήματα παρατηρούμε στο επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού, το οποίο θεώρησε απόλυτα πειστικό, ήταν απόλυτα σίγουρος και ένιωθε άνετα γι' αυτό. Εξετάζοντας περισσότερο το επιχείρημα, αναφέρει ότι αν και ήταν σίγουρος στην αρχή, άρχισε να νιώθει αμφιβολίες, τις οποίες δε μπόρεσε να εξηγήσει πώς προέκυψαν. Παρατηρούμε αρχικά να διστάζει, να υπάρχουν κενά στην ομιλία του, κάτι που δεν υπήρξε στις άλλες απαντήσεις και τελικά να αποδίδει την αλλαγή του βαθμού βεβαιότητας στο μέγεθος της απόδειξης, κάτι που αρχικά αποτέλεσε στοιχείο για το βαθμό πειστικότητάς της. Επιτρέπει στον εαυτό του να νιώσει σύγχυση, χωρίς βέβαια να οδηγείται σε αρνητικά συναισθήματα. Αντίθετα αναγνωρίζει ότι το επιχείρημα του μαθητή ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, δίχως όμως να συνδέει αυτή την άποψη με τη δημιουργία των αμφιβολιών. Αυτό το συναίσθημα τον οδηγεί τελικά στην απόκλιση αυτής της απόδειξης από την τελική του απάντηση. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και με την απόδειξη που τον έπεισε μέτρια από την αρχή, για την οποία αισθανόταν περιέργεια. Αν και επιχειρηματολογεί σωστά και επισημαίνει ότι αυτός ο ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα, αλλά εξηγεί γιατί μπορεί να είναι σωστός, μπλοκάρει και δυσκολεύεται να συνειδητοποιήσει ότι απαντά ορθά.

6.3.10 Μάρκος και επίγνωση

Ο Μάρκος φαίνεται με μια πρώτη ματιά να πείθεται από όλες τις αποδείξεις και είναι σίγουρος ή και απόλυτα σίγουρος για την κρίση του. Δε θα μπορούσαμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι έχει επίγνωση για τη βεβαιότητά του, καθώς από τις έξι απαντήσεις, δύο ήταν οι ορθές αποδείξεις. Φαίνεται όμως να αποκτά επίγνωση των συναισθημάτων για τη βεβαιότητά του, αφού υπάρχουν στιγμές που νιώθει αμφιβολίες και ενδοιασμούς σε δύο από τις απαντήσεις που είναι πράγματι λάθος. Εμβαθύνοντας στην αρχική του κρίση, φαίνεται ότι έχει επίγνωση, αφού απαντά με σωστά επιχειρήματα για το αν ικανοποιούνται οι λειτουργίες των αποδείξεων, ενώ πλέον μοιάζει να μην είναι τόσο σίγουρος για τις λανθασμένες αξιολογήσεις που έκανε προηγουμένως, μιας και πλέον η άνεση έχει αντικατασταθεί από μπλοκάρισμα και περιέργεια. Τέλος υπήρξαν και δύο περιπτώσεις, αυτής της λάθος παραγωγικής απόδειξης και του οπτικού επιχειρήματος, που συνέχισαν να πείθουν το μαθητή, χωρίς να αλλάξει κάτι στη σκέψη του ή στα τελικά συναισθήματά του. Παρόλο που απάντησε λανθασμένα, κρίνοντας από τον τρόπο που επιχειρηματολόγησε μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει επίγνωση για τις απόψεις του για την απόδειξη, μιας και για την αξιολόγησή ψάχνει σωστούς εγγυητές, που σχετίζονται με τις λειτουργίες της απόδειξης.

6.4 Συνέντευξη Κατερίνας

Η τρίτη συνέντευξη έγινε με την Κατερίνα, μια μαθήτρια της Α΄ Λυκείου με υψηλή επίδοση στα Μαθηματικά.

6.4.1 Κατερίνα και αυτό-αποτελεσματικότητα

Παρατηρούμε ότι η Κατερίνα έχει πολύ υψηλή αυτοπεποίθηση, καθώς φαίνεται ότι είναι πολύ σίγουρη ότι μπορεί να ζητήσει τη βοήθεια από τους καθηγητές της στα Μαθηματικά, να πάρει καλό βαθμό, ακόμα και Άριστα και γενικά να τα πάει καλά σε ένα μάθημα Μαθηματικών. Θεωρεί ότι μπορεί αρκετά να κάνει τακτικά τις ασκήσεις που έχει στα Μαθηματικά, ενώ δε μπορεί καθόλου να σκεφτεί σαν Μαθηματικός. Στις αντίστοιχες ερωτήσεις που εξέταζαν την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη, έχει εξ' ίσου υψηλή αυτοπεποίθηση, με εξαίρεση το ότι μπορεί να κάνει τακτικά τις αποδείξεις που έχει για το σπίτι.

6.4.2 Απόψεις της Κατερίνας για τα Μαθηματικά

Παρατηρούμε ποικιλία στις απόψεις της Κατερίνας για τα Μαθηματικά, καθώς σύμφωνα με αυτά που έχει σημειώσει, δε μπορούμε να συμπεράνουμε σε ποια άποψη συγκλίνει περισσότερο. Για την άποψη ότι «τα Μαθηματικά είναι στοιχεία» υπάρχουν προτάσεις με τις οποίες συμφωνεί και διαφωνεί, κάτι που συμβαίνει και με την άποψη ότι «τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με μοντέλα». Για την άποψη ότι «τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με τη ζωή», κυρίως διαφωνεί αν και υπήρχε και πρόταση με την οποία συμφωνούσε απόλυτα.

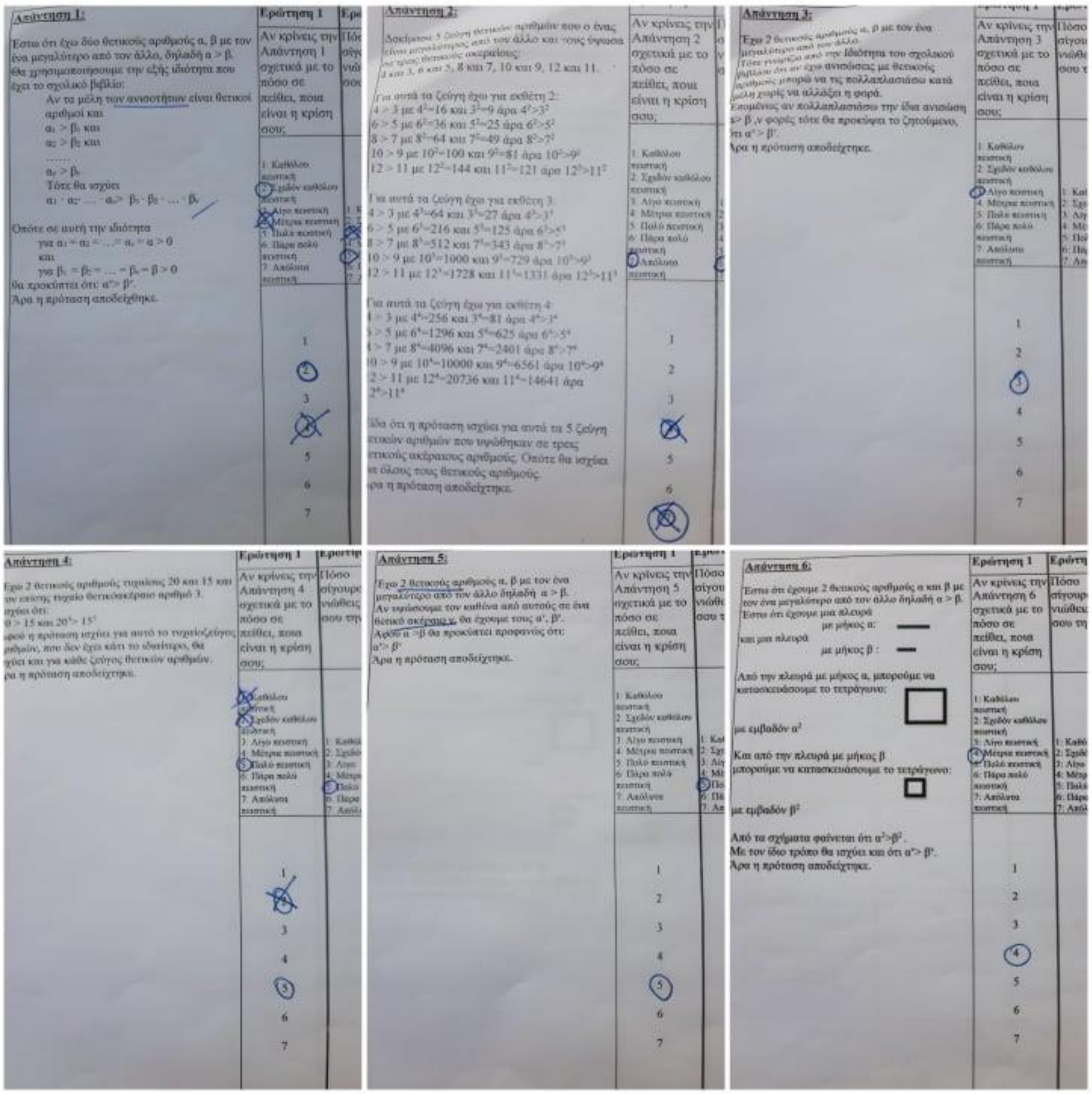
6.4.3 Στάσεις της Κατερίνας στα Μαθηματικά

Από τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου φαίνεται ότι, η Κατερίνα δεν ευχαριστιέται τα Μαθηματικά στην τάξη και πολλές φορές νιώθει αρνητικά συναισθήματα και έχει χαμηλή αυτοπεποίθηση, κάτι που έρχεται σε αντίφαση με όσα σημείωσε προηγουμένως. Παρόλο αυτά αναγνωρίζει και αντιλαμβάνεται την αξία των Μαθηματικών.

6.4.4Η μαθηματική ταυτότητα της Κατερίνας

Η Κατερίνα θεωρεί τον εαυτό της πολύ πάνω από μέτρια κάτι που πιστεύει ότι θεωρούν και οι καθηγητές της για αυτή, ενώ για τους φίλους της πιστεύει ότι θεωρούν πάρα πολύ πάνω από μέτρια.

6.4.5Οι απόψεις της Κατερίνας για την απόδειξη



Σχήμα 11. Κρίσεις της Κατερίνας για τις απαντήσεις των μαθητών.

Μελετώντας όλες τις απαντήσεις της Κατερίνας που εξετάζουν τις απόψεις της για την απόδειξη, παρατηρούμε ότι πείθεται απόλυτα και πολύ με το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού και το κρίσιμο πείραμα αντίστοιχα. Πολύ λιγότερο την πείθουν οι παραγωγικές αποδείξεις, σωστές ή όχι, όπως επίσης και το οπτικό επιχείρημα.

Ε: Βλέπω η πρώτη δε σου φαίνεται πειστική, σχεδόν καθόλου

Κ:Ναι..

Ε:Γιατί;

Κ:Εεεεεεε……Δε με έπεισε αρκετά…

Ε:Γιατί;Τι είχε και δε σε έπεισε τόσο:

Κ:…………………..

Κ:Σκέφτηκα ότι δεν ισχύει για όλες τις περιπτώσεις, γιατί λέει ότι το α1 ισούται με το α2..και χρησιμοποιεί και τον πολ/μό οπότε νομίζω ισχύει μόνο για συγκεκριμένες περιπτώσεις τις οποίες δεν αναφέρει εδώ..

Ε: ας περάσουμε στην επόμενη..Γιατί απόλυτα πειστική αυτή;

Κ: Γιατί έχει πάρα πολλά παραδείγματα και μας τα εξηγεί πολύ αναλυτικά..

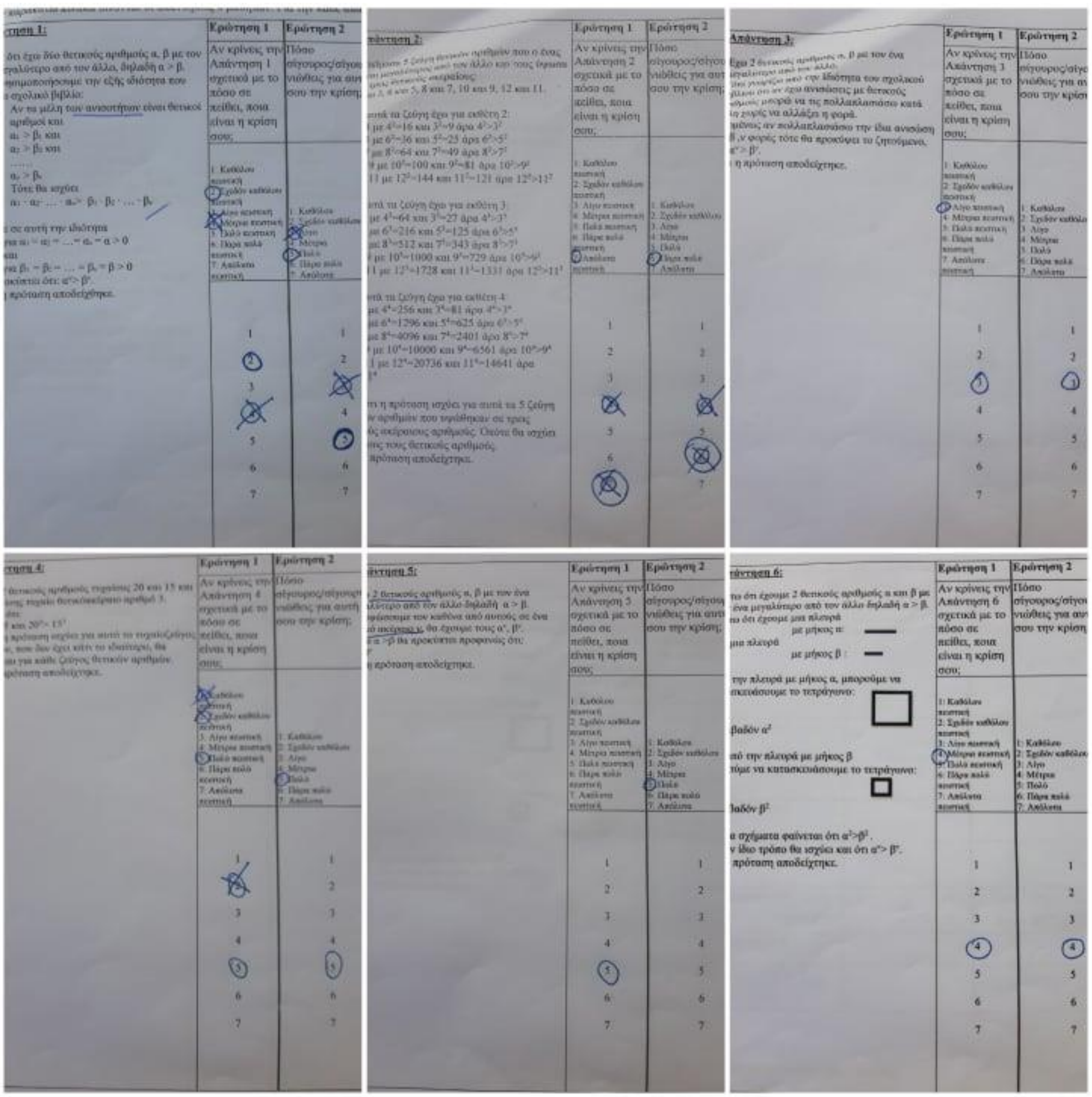
Ε:Λίγο πειστική αυτή εε;
Κ:ναι..
Ε: Γιατί;
Κ;Είναι λίγο πιο δύσκολη η απόδειξη στο να την καταλάβει κάποιος..έχει πολ/μό κατά μέλη με ανισώσεις μάλιστα.. άρα πιστεύω ότι είναι λιγότερο πειστική..

Ε:Γιατί πιστεύεις ότι αυτή είναι πολύ πειστική;
Κ:Γιατί μας λέει ότι έχει δύο θετικούς αριθμούς και μάλιστα μας δίνει δύο παραδείγματα… το 20 και το 15 συγκεκριμένα.. και επειδή το 20 είναι μεγαλύτερο του 15, αν υψώσουμε το 20 στον κύβο θα ισχύει το ίδιο και για το 15..

Ε: Σου φαίνεται πολύ πειστική αυτή..
Κ: Ναι όπως και η προηγούμενη, γιατί είναι ακριβώς σχεδόν.. είναι σχεδόν τα ίδιο.. μόνο που δε μας δίνει παραδείγματα με κανονικούς αριθμούς..

Ε: Αυτή βλέπω μέτρια πειστική.. Γιατί;
Κ: Γιατί χρησιμοποιεί σχήματα..
Ε: Και έχεις κάποιο θέμα με αυτό;
Κ:Εεεεε… δε συμπαθώ πολύ τη Γεωμετρία, γιατί θέλει πολύ σκέψη.. αν και εδώ είναι πολύ απλό το παράδειγμα που χρησιμοποιεί απλά………..και χρησιμοποιεί και το εμβαδόν.. και……. Ναι….δεν είναι απαραίτητο ότι αν ισχύει και με το εμβαδόν θα ισχύει και με άλλες περιπτώσεις στα Μαθηματικά..

6.4.6Η βεβαιότητα της Κατερίνας για τις απόψεις της στην απόδειξη



Σχήμα 12. Βαθμός βεβαιότητας Κατερίνας.

Περνώντας στη δεύτερη ερώτηση, όπου εξετάζουμε το πόσο σίγουρη είναι για τις απόψεις της στην απόδειξη, παρατηρούμε ότι υπάρχουν μεγάλες εναλλαγές, καθώς στην πρώτη απάντηση δε μπορούσε να αποφασίσει το αν είναι λίγο ή πολύ σίγουρη ενώ στη δεύτερη μέτρια ή πάρα πολύ. Στις απαντήσεις που δεν την έπεισαν, εμφανίζονται συναισθήματα σύγχυσης και συναισθήματα που δείχνουν πως «δεν ξέρει πώς να συνεχίσει»:

Ε:Βλέπω είσαι πολύ σίγουρη για την απάντησή σου..

Κ:Ναι..

Ε:Γιατί;

Κ:εεεεεε… νομίζω ότι έχω ξαναδεί σε μία άσκηση στο βιβλίο, αλλά δεν είναι απόλυτα σίγουρη, γι' αυτό δεν έβαλα ούτε το πάρα πολύ ούτε το απόλυτα..

Ε: Είσαι βλέπω λίγο σίγουρη για την απάντησή σου..Γιατί;

Κ:Γιατίιιι.. δε θυμάμαι και πολύ αυτό το κεφάλαιο στα Μαθηματικά..

Ε: Βλέπω είσαι μέτρια σίγουρη για την απάντηση που έδωσες.. Γιατί έτσι;

Κ: Γιατί πάλι δεν είμαι 100% σίγουρη… μπορεί να έχω κάνει λάθος..

Ε: Γιατί το λες αυτό;

Κ: Δεν είμαι ποτέ σίγουρη με τα Μαθηματικά.. δεν ξέρω..

Υπήρξαν περιπτώσεις που η βεβαιότητά της βασίστηκε σε συναισθήματα εξοικείωσης, που τη βοηθούσαν να κατανοήσει το επιχείρημα:

Ε: Και είσαι πάρα πολύ σίγουρη;

Κ:Ναι..

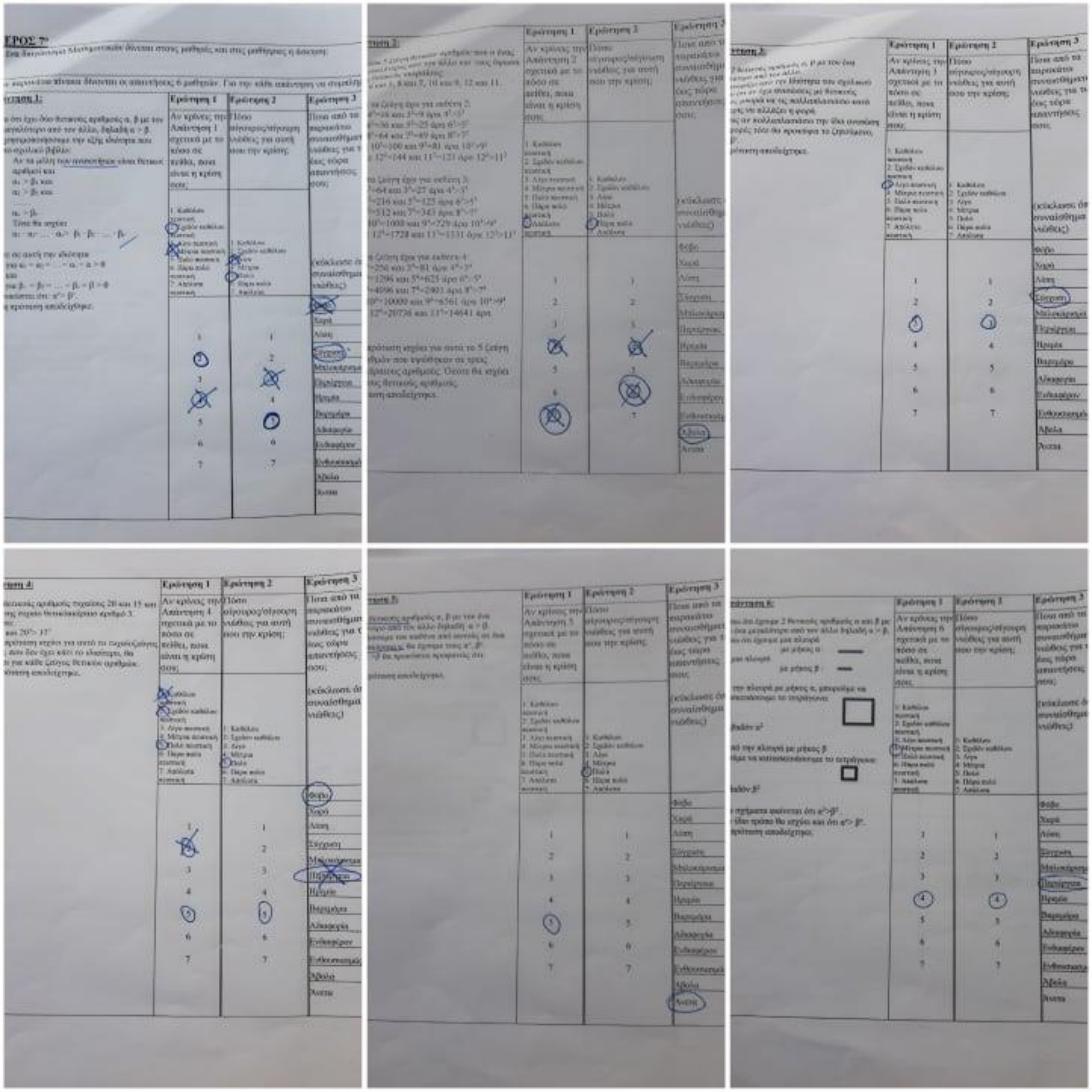
Ε: Από πού προκύπτει όλη αυτή η σιγουριά;

Κ:Εεεεεεεε… επειδή είχε πολλά παραδείγματα, με έπεισε αρκετά οπότε νομίζω ότι είμαι σίγουρη..

Ε: Ωραία και σε βλέπω πολύ σίγουρη..
Κ:Ναι αρκετά..
Ε:Γιατί;
Κ:Βλέπω μπροστά μου τα νούμερα και το καταλαβαίνω καλύτερα..

3)*Ε: Και νιώθεις πολύ σίγουρη;*
Κ:Ναι!
Ε: Πώς προκύπτει αυτό;
Κ: Γιατίιι… πάλι μου φαίνεται πιο εύκολο και ήταν και το ίδιο με το προηγούμενο οπότε αρχίζω και γίνομαι πιο σίγουρη για τις απαντήσεις μου..

6.4.7Τα συναισθήματα της Κατερίνας για τις απαντήσεις της έως τώρα



Σχήμα 13. Συναισθήματα Κατερίνας.

Στις απαντήσεις για τα συναισθήματά της παρατηρούμε κάτι παρόμοιο με τις απαντήσεις της για τη βεβαιότητά της. Υπάρχουν ερωτήσεις για τις οποίες δεν ήταν πολύ σίγουρη αν ένιωθε φόβο ή περιέργεια και φόβο ή σύγχυση και υπήρξαν και φορές που άλλαξε την απάντησή της κατά τη διάρκεια της συνέντευξης. Τα συναισθήματά της ήταν ανάμεικτα· παρόλο που ενδιαφέρεται για τα Μαθηματικά και τις νέες έννοιες που ανακαλύπτει, αναφέρει ότι χρειάζονται πολύ σκέψη και ότι τη μπερδεύουν. Οι αντιδράσεις της αυτές έρχονται σε αντίθεση με το ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσε για την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη, το οποίο μας υπέδειξε ότι η αυτοπεποίθησή της ήταν πολύ υψηλή.

Ε:Και για τις μέχρι τώρα απαντήσεις σου πώς νιώθεις;

Κ:εεεεε….μμμμμμμμμ…. λίγο άβολα γιατί δεν το θυμάμαι πολύ καλά αυτό το κεφάλαιο

Ε: και σύγχυση;

Κ:Εεεε… είμαι μπερδεμένη… σκέφτομαι.. ισχύει δεν ισχύει;;

Ε:Και τι νιώθεις για τις απαντήσεις που έχεις δώσει μέχρι τώρα;

Κ:Εεεεεεεε……………………περιέργεια… και ενδιαφέρον..

Ε:Γιατί;

Κ: Περιέργεια για να δω ποια είναι η απάντηση και ενδιαφέρον γιατί είναι ωραίο να μαθαίνουμε καινούρια πράγματα ειδικά πάνω στα Μαθηματικά, που είναι χρήσιμο σαν μάθημα..

Ε:Και για αυτά που έχεις απαντήσει πώς νιώθεις;

Κ: λίγο σύγχυση, γιατί τα Μαθηματικά θέλουν αρκετή σκέψη, οπότε.. είμαι λίγο μπερδεμένη..

Ε: Και τα συναισθήματα που νιώθεις μέχρι τώρα;

Κ:Εεεεε περιέργεια πάλι για να μάθω την απάντηση.. νιώθω και λίγο ενθουσιασμό γιατί είναι κάτι ενδιαφέρον..

Ε: Νιώθεις περιέργεια επειδή δεν ξέρεις αν έχεις απαντήσει σωστά;

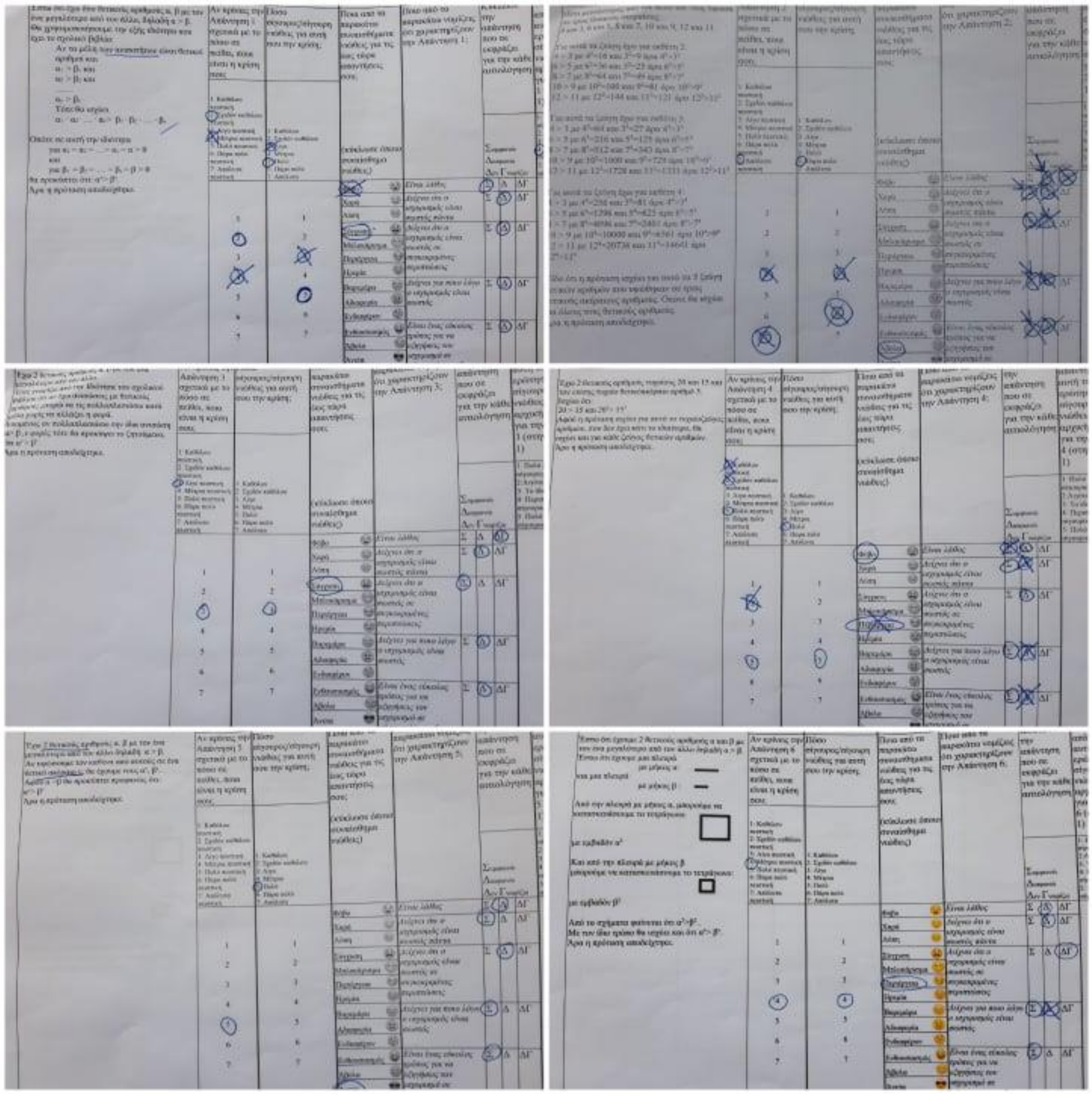
Κ:Ναι.. και είμαι και λίγο περίεργη να μάθω τι συμβαίνει τελικά.. αν είναι σωστή η απόδειξη..

Υπήρξε επίσης και η περίπτωση της απόδειξης, που παρόλο που την έπεισε από την αρχή, ένιωσε φόβο για της απαντήσεις της, πράγμα που δεν αναμέναμε λόγω της υψηλής αυτοπεποίθησής της, μιας και ήθελε τη γνώμη ενός ειδικού, όπως ανέφερε, για επιβεβαίωση:

Ε: Και μέχρι τώρα για τις απαντήσεις σου πώς νιώθεις; Γιατί φοβάσαι;

Κ: Γιατί μπορεί να είμαι σίγουρη για αυτό, αλλά πάλι επειδή δεν είμαι ειδικός έχω έναν ενδοιασμό σχετικά με αυτό..

6.4.8Εμβαθύνοντας στις απόψεις της Κατερίνας για την απόδειξη



Σχήμα 14. Εμβαθύνοντας στις απόψεις της Κατερίνας.

Στις επόμενες ερωτήσεις που έχουν σαν στόχο να εμβαθύνουν στην αρχική της κρίση, φαίνεται να υπάρχουν πολλές στιγμές σύγχυσης και μπλοκαρίσματος. Αρκετές παρανοήσεις παρουσιάζονται συγκριτικά με τις παραγωγικές αποδείξεις, το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού και το κρίσιμο πείραμα, σχετικά με το αν το επιχείρημα ισχύει πάντα ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Συγκεκριμένα η μαθήτρια θεώρησε ότι οι παραγωγικές αποδείξεις δεν ίσχυαν πάντα σε αντίθεση με τις άλλες δύο μορφές επιχειρημάτων:

Ε: Βλέπω πιστεύεις ότι δεν ισχύει πάντα και δεν ισχύει και σε συγκεκριμένες περιπτώσεις…

Τελικά;

Κ:……………………………

Κ: Μπορεί να ισχύει σε κάποιες περιπτώσεις ή και καθόλου..

Ε: Αν δηλαδή ισχύει σε κάποιες περιπτώσεις ποιες είναι αυτές;

Κ:εεεεεε…μμμμμμμ…Αν….εεεε… ο αριθμός α1 ισούται με τους άλλους ήταν το 1, οπότε σε όποια δύναμη και αν υψωθεί θα έχουμε τα ίδια αποτελέσματα..

Ε: Γιατί δεν πιστεύεις ότι ισχύει πάντα;

Κ:Εεεε… γιατί…. Δεν ξέρουμε ποιο εκθέτη θα έχουμε… γιατί δεν ξέρουμε… βασικά αυτό.

Ε: πιστεύεις ότι ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Κ: Δεν το γνωρίζω αυτό..

Ε:Βλέπω όμως ότι συμφωνούσες..

Κ: Δεν είμαι ακριβώς σίγουρη.. έχει μια λογική αυτό που λέει.. αν είναι από μόνος του ένας αριθμός μεγαλύτερος από τον άλλο και δεν αλλάξουμε… απλά πολ/με τις ανισώσεις κατά μέλη.. έχει μια λογική.. αλλά επειδή στα Μαθηματικά έχουμε πολλές εξαιρέσεις.. δεν είμαι σίγουρη..

Ε:πιστεύεις ότι αυτό που γράφει εξηγεί αν ισχύει ή όχι;

Ε:Πιστεύεις δηλαδή ότι είναι σωστή ή λάθος;

Κ: Διαφωνώ ότι είναι λάθος και συνεχίζω να πιστεύω ότι είναι σωστή…

Ε: πιστεύεις ότι ισχύει πάντα ή σε συγκεκριμένες περιπτώσεις;

Κ: Διαφωνώ ότι ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.. οπότε ισχύει πάντα..

Ε: τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό;

Κ:Γιατί μιλάμε μόνο για θετικούς αριθμούς..που δεν υπάρχουν και πολλές εξαιρέσεις σχετικά με αυτούς οπότε ναι.. είμαι πιο σίγουρη

Ε: Και πιστεύεις ότι αυτός ο ισχυρισμός εξηγεί γιατί είναι σωστός;

Κ:Μας δίνει πάρα πολλά παραδείγματα και με διαφορετικούς εκθέτες και έχει και ακέραιους οπότε ναι..

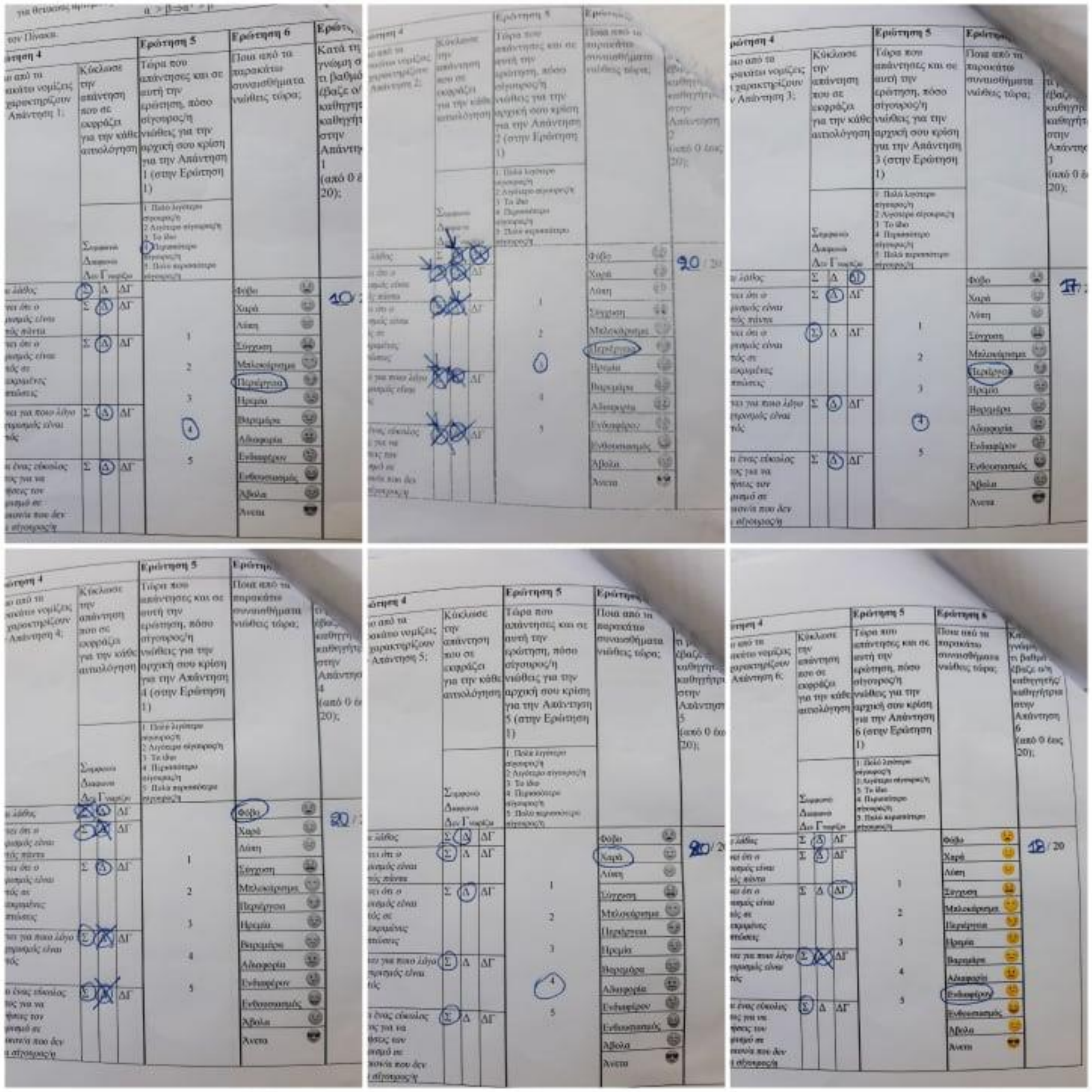
Ε: Πιστεύεις ότι είναι σωστή ή λάθος;
Κ:Διαφωνώ ότι είναι λάθος… επειδή μου έδωσε να καταλάβω τη διατύπωση της άσκησης από την αρχή….εεεεεε… και πιστεύω ότι δεν ισχύει μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις αλλά γενικά..
Ε: Και τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό;
Κ:Εεε το ότι είναι πολύ πειστικό και δίνει παραδείγματα.. και εφόσον μιλάμε μόνο για θετικούς αριθμούς..
Ε:Πιστεύεις ότι ο ισχυρισμός εξηγεί γιατί είναι σωστό;
Κ:Εε ναι..αφού μας δίνει το παράδειγμα..

Ε: Και θα το χρησιμοποιούσες για να το εξηγήσεις και σε κάποιον άλλον;

Κ:Ναι! Το θεωρώ πολύ εύκολα κατανοητό οπότε θα το χρησιμοποιούσα..

Αν και η Κατερίνα φαίνεται ότι πείθεται ξεκάθαρα από την παρουσία παραδειγμάτων, περισσότερο από όλες την πείθει η λανθασμένη παραγωγική απόδειξη, η οποία είναι παρόμοια με τις υπόλοιπες και ειδικά με την 4 και παρόλο που χρησιμοποιεί μεταβλητές, θεωρεί ότι είναι πιο βατή και κατανοητή. Βέβαια η τελική της απάντηση δε βασίζεται σε μαθηματικά κριτήρια, κατάλληλα για αξιολόγηση απόδειξης, αλλά στο γεγονός ότι ένιωσε πιο άνετα αφού είδε τόσες αποδείξεις και είχε συνηθίσει περισσότερο την ιδέα του ισχυρισμού.

6.4.9Τα συναισθήματα της Κατερίνας εμβαθύνοντας στις απόψεις της για την απόδειξη



Σχήμα 15. Τα συναισθήματα της Κατερίνας εμβαθύνοντας στις απόψεις της.

Εμβαθύνοντας στις απόψεις της Κατερίνας παρατηρούμε ότι τα συναισθήματά της είναι κάπως μπερδεμένα. Υπάρχουν φορές που νιώθει περισσότερο σίγουρη για τις απαντήσεις, χωρίς όμως να το αιτιολογεί με μια λογική επιχειρηματολογία, παρά μόνο βασιζόμενη στην ασφάλεια και άνεση που νιώθει κατά τη διάρκεια της συνέντευξης και καθώς ξαναβλέπει τις αποδείξεις.

Ε: Νιώθεις το ίδιο σίγουρη ή έχει αλλάξει κάτι;
Κ: Περισσότερο σίγουρη
Ε: Γιατί έτσι;
Κ: Πάλι σκέφτηκα, συμπλήρωσα το ερωτηματολόγιο, οπότε αισθάνομαι περισσότερη ασφάλεια..
Ε:νιώθεις όμως περισσότερο σίγουρη για τις απαντήσεις σου.. Γιατί αυτό;
Κ:Γιατί πάλι πέρασε λίγος χρόνος, το ξανασκέφτηκα.. οπότε..

Υπήρχαν αποδείξεις για τις οποίες στην αρχή ένιωθε σύγχυση, αφού όπως ανέφερε δε θυμόταν το αντίστοιχο κεφάλαιο στα Μαθηματικά. Μετά τις ερωτήσεις που εμβάθυναν στις απόψεις της, δεν είναι πολύ σίγουρη, προσπαθεί να βασιστεί σε μαθηματικούς κανόνες, που όμως δε μπορεί να ανακαλέσει και έχει κάποιους δισταγμούς λόγω των απόψεών της για τα Μαθηματικά. Παρόλα αυτά επιτρέπει στον εαυτό της να νιώσει και άλλο συναίσθημα, αυτό της περιέργειας για την τελική λύση και του ενδιαφέροντος για τα Μαθηματικά και νιώθει άνετα γι' αυτό.

Ε:Και πώς νιώθεις για τις απαντήσεις σου μέχρι τώρα;
Κ:Λίγο καλύτερα…
Ε: Περιέργεια ή μήπως και κάτι άλλο;
Κ:Περιέργεια σίγουρα και ενδιαφέρον..
Ε:Ωραία..περιέργεια γιατί;
Κ:Εεεε….μμμ για να δω το αποτέλεσμα τελικά!
Ε:Ωραία.. και ενδιαφέρον;;
Κ:Εεεμμμ.. γιατιιιιιι….μμμμ… μ αρέσουν λίγο τα Μαθηματικά οπότε..
Ε:Και για αυτά που έχεις απαντήσει εσύ; Πώς νιώθεις;
Κ:Μμμμμ… νομίζω ότι δε γνωρίζω την ακριβή απάντηση, αλλά είμαι λίγο κοντά σχετικά στη σωστή απάντηση

Η περίπτωση του οπτικού επιχειρήματος, που την έπεισε μέτρια και ήταν μέτρια σίγουρη από την αρχή, φαίνεται να της δημιούργησε περιέργεια και ενδιαφέρον για το αν τελικά ισχύει, κάτι που επηρεάστηκε και πάλι από τις απόψεις της στα Μαθηματικά. Στο τέλος αναφέρει ότι δεν είναι απόλυτα σίγουρη για το τι συμβαίνει τελικά, μιας και έχει ενδοιασμούς για το αν η απόδειξη ισχύει πάντα, αλλά νιώθει ενδιαφέρον για να δει τι πραγματικά είναι σωστό.

Ε: Βλέπω είσαι μέτρια σίγουρη για την απάντηση που έδωσες.. Γιατί έτσι;

Κ: Γιατί πάλι δεν είμαι 100% σίγουρη… μπορεί να έχω κάνει λάθος..

Ε: Γιατί το λες αυτό;

Κ: Δεν είμαι ποτέ σίγουρη με τα Μαθηματικά.. δεν ξέρω..

Ε: Και νιώθεις το ίδιο σίγουρη.. γιατί;

Κ:Δε γνωρίζω πολύ καλά αν ισχύει αυτός ο ισχυρισμός.. Οπότε παραμένω στην ίδια….

Ε:Και ενδιαφέρον γιατί νιώθεις; Για τις απαντήσεις σου…

Κ: Για να καταλάβω τελικά τι συμβαίνει με τη συγκεκριμένη απόδειξη..

Ε:Και για αυτά που έχεις απαντήσει εσύ μέχρι τώρα, πώς νιώθεις;

Κ:Άνετα

Ε:Γιατί;

Κ: Ήταν και η συγκεκριμένη απόδειξη που με έκανε να νιώσω πιο σίγουρη..

Ε: Γιατί αυτό;

Κ: Χρησιμοποιούσε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα και μιλάει για σχήματα που μας τα δείχνει κιόλας.. τα αναπαριστά..οπότε..

Ιδιαίτερη εντύπωση μας δημιουργεί το κρίσιμο πείραμα, το οποίο αν και την έπεισε από την αρχή, είχε ορισμένες αντιφάσεις για το βαθμό βεβαιότητας. Ένιωσε φόβο, γιατί δε μπορούσε να καταλάβει τι ισχύει, κάτι που και πάλι το συνέδεσε με τις απόψεις τις για τα Μαθηματικά. Μέσα από την εμβάθυνση στις απόψεις της, μπορεί να μην επιχειρηματολογεί σωστά, αλλά βασίζεται σε μια λογική. Αυτό δημιουργεί πολύ θετική αλλαγή στα συναισθήματά της, δημιουργώντας τη ενθουσιασμό, αφού πλέον νιώθει πιο σίγουρη για τις απαντήσεις της.

Ε: Και τώρα πώς νιώθεις για τις απαντήσεις σου; Το ίδιο σίγουρη; Κάτι διαφορετικό;

Κ:Μμμμμμμμμμμμμ… ενθουσιασμό!

Ε:Νιώθεις και το ίδιο σίγουρη ή άλλαξε αυτό;

Κ: Περισσότερο σίγουρη..

Ε: Και ενθουσιασμό γιατί νιώθεις;

Κ: Είναι το παράδειγμα που νιώθω πιο σίγουρη… οπότε..χάρηκα λίγο!

Ε:Και πώς και κύκλωσες το φόβο;

Κ:Δεν ήμουν ακριβώς σίγουρη.. έχω έναν ενδοιασμό γενικά με τα Μαθηματικά, γιατί ποτέ δεν *είμαι σίγουρη για τα Μαθηματικά.. και στα διαγωνίσματα που γράφω, νομίζω ότι τα πήγα καλύτερα και να τα έχω πάει χειρότερα… ακόμα και το αντίθετο..*

6.4.10Η επίγνωση της Κατερίνας για την απόδειξη

Παρόλο που η Κατερίνα επιλέγει μια λανθασμένη παραγωγική απόδειξη, ως την απόδειξη που θα επέλεγε η ίδια για ένα διαγώνισμα, φαίνεται ότι πείθεται κυρίως από το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού και το κρίσιμο πείραμα, μιας και δε βασίζεται σε γνωστικούς παράγοντες για αυτή της την επιλογή. Δε μπορούμε να συμπεράνουμε στο ότι έχει επίγνωση για τη βεβαιότητά της καθώς σε μερικές περιπτώσεις για να καταλήξει στην επιλογή της, ταλαντεύεται στο λίγο και το πάρα πολύ σίγουρη, πράγμα αντιφατικό. Παρατηρούμε και αρκετή ανασφάλεια στις υπόλοιπες από τις απαντήσεις της, γενικά για τα Μαθηματικά, κάτι που έρχεται σε σύγκρουση με τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου για την αυτό-αποτελεσματικότητα, όπου φάνηκε ότι η αυτοπεποίθησή της ήταν πολύ υψηλή. Παρόμοιες ήταν οι αντιδράσεις της και στην επιλογή των συναισθημάτων της. Άλλαξε αρκετές φορές γνώμη και κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, ενώ τα συναισθήματά της ταυτίστηκαν κυρίως με τις απόψεις της στα Μαθηματικά, παρά την ίδια την απόδειξη. Σίγουρα παρατηρήσαμε πολλές παρανοήσεις γύρω από την απόδειξη στα Μαθηματικά και τις λειτουργίες της, καθώς εμβαθύναμε στις απόψεις της, οπότε δε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι έχει επίγνωση. Αν και θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει επίγνωση των συναισθημάτων της, καθώς αυτά αλλάζουν σε αποδείξεις στις οποίες έχει ενδοιασμούς και καταλαβαίνει ότι ίσως δεν τις έχει αξιολογήσει σωστά, δημιουργώντας της περιέργεια και ενδιαφέρον, τελικά επιλέγει τη λάθος παραγωγική απόδειξη, για την οποία ένιωσε άνετα από την αρχή.

7. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα θέλουμε να εξετάσουμε πώς αποτυπώνεται η επίγνωση για την απόδειξη, σύμφωνα με τον τρόπο που την εννοιοποιήσαμε σε μαθητές και μαθήτριες Α΄ Λυκείου, τη σχέση αυτής της επίγνωσης με διαφορετικούς τύπους αποδείξεων και αποδεικτικών επιχειρημάτων και ποιες είναι οι ποιοτικές διαφοροποιήσεις στην επίγνωση μαθητών και μαθητριών υψηλής επίδοσης στην απόδειξη.

Απαντώντας στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα για το πώς αποτυπώνεται η επίγνωση, παρατηρούμε αναφορικά με την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη, μέσα από τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης, ότι οι μαθητές/τριες θεωρούν ότι έχουν μέτρια, καθώς πιστεύουν ότι μπορούν αρκετά να ανταπεξέλθουν στις αντίστοιχες προτάσεις. Αναφορικά με την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων σε γενικά πλαίσια, οι μαθητές/τριες πείθονται από όλα τα αποδεικτικά επιχειρήματα, είτε είναι έγκυρα, είτε όχι.

Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με την έρευνα των Healy και Hoyles (2000),οι μαθητές/τριες δε φαίνεται να αναγνωρίζουν ότι τα εμπειρικά επιχειρήματα, δε λαμβάνουν τους υψηλότερους βαθμούς από τους καθηγητές. Από τα αποτελέσματα της ποσοτικής έρευνας, αναδείχθηκε η προτίμηση των μαθητών/τριών στο επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού και το οπτικό επιχείρημα. Από τα αποτελέσματα της ποιοτικής έρευνας κανένας μαθητής/τρια δεν έκανε κάποια αντίστοιχη αναφορά, με εξαίρεση ίσως την Αλκμήνη, η οποία αναγνωρίζει στην περίπτωση του αφελή εμπειρισμού ότι τέτοιου είδους αποδείξεις, με τόσα παραδείγματα, δεν αντιστοιχούν σε αυτές που επιζητούν οι καθηγητές. Παρόλα αυτά δε θα μπορούσαμε να πούμε ότι η Αλκμήνη έχει επίγνωση για τις απόψεις της στην απόδειξη, αφού ο αφελής εμπειρισμός ήταν η μόνη περίπτωση, στην οποία έκανε αυτή τη διαπίστωση και επέλεξε ως τελική απάντηση το κρίσιμο πείραμα.

Τα αποτελέσματα της ποσοτικής έρευνας ανέδειξαν τη σύγκλιση με την έρευνα των Healy και Hoyles (2000) στο γεγονός ότι οι μαθητές/τριες έχουν επίγνωση ότι τα εμπειρικά επιχειρήματα, δε μπορούν να γενικευτούν, κάτι που παρατηρήσαμε και στη συνέντευξη του Μάρκου, ο οποίος είχε επίγνωση για τη γενίκευση στα περισσότερα από τα δοθέντα επιχειρήματα, με εξαίρεση την περίπτωση του οπτικού επιχειρήματος. Στις συνεντεύξεις υπήρξαν λίγες περιπτώσεις που και οι υπόλοιπες μαθήτριες αναγνώριζαν αν ένα επιχείρημα μπορούσε να γενικευτεί, αλλά είχαν μεγάλες δυσκολίες στο να αιτιολογήσουν την κρίση τους. Παράλληλα πείστηκαν απόλυτα και οι δύο από το κρίσιμο πείραμα, κάτι που έρχεται σε απόκλιση με την έρευνα των Harel και Showder (1998), οι οποίοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές/τριες κρίνουν αν ένα επιχείρημα είναι απόδειξη ανάλογα με το αν το επιχείρημα είναι διατυπωμένο σε συγκεκριμένη μορφή και αν χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα. Από την άλλη παρατηρήσαμε ότι ο Μάρκος βασίστηκε πολύ στις απαντήσεις του στα σύμβολα, τόσο για να αξιολογήσει τις πιθανές αποδείξεις, όσο για να αιτιολογήσει τη λειτουργία της γενίκευσης.

Τόσο ο Μάρκος όσο και η Αλκμήνη έδωσαν βάση στα εξωτερικά χαρακτηριστικά των επιχειρημάτων, όπως συνέβη και στην έρευνα των Inglis και Alcock (2012), κάτι που εμφανίστηκε και στα αποτελέσματα της ποσοτικής έρευνας, καθώς φάνηκε πως η δομή μιας απόδειξης αποτέλεσε παράγοντα επιλογής της από τους μαθητές/τριες. Από τη μία ο Μάρκος βασίστηκε πολύ στα αλγεβρικά σύμβολα για την κρίση του, ενώ η Αλκμήνη παρατηρούσε το μέγεθος των αποδείξεων για να αποφασίσει για την ορθότητα και την εξήγηση. Υπήρξε μάλιστα και η περίπτωση της σωστής παραγωγικής απόδειξης, που αξιολόγησε σωστά και για την οποία ανέφερε ότι αν την έγραφε η ίδια, θα χρησιμοποιούσε λιγότερες λέξεις.

Από την άλλη η Κατερίνα στην πλειοψηφία των απαντήσεών της δεν έδωσε μεγάλη σημασία στα μαθηματικά σύμβολα, αλλά στη λειτουργία της εξήγησης της απόδειξης και στο βαθμό κατανόησης, κάτι που έρχεται σε απόλυτη σύγκλιση με τα ποσοτικά αποτελέσματα, όπου η πλειοψηφία των μαθητών έκανε την τελική της επιλογή με άξονα το βαθμό κατανόησης, και με την έρευνα των Healy και Hoyles (2000). Οι ερευνήτριες κατέληξαν στο γεγονός ότι οι μαθητές/τριες αναγνωρίζουν ότι τα παραδείγματα αποτελούν ισχυρά μέσα, που πείθουν για την αλήθεια ενός ισχυρισμού, σε αντίθεση με τα αλγεβρικά επιχειρήματα, που είναι δύσκολο να τα καταλάβουν και δεν υποστηρίζουν την επικοινωνία και εξήγηση των Μαθηματικών που αφορούν.

Σε αυτό το συμπέρασμα καταλήγει και η Mariotti (2007), επισημαίνοντας ότι εν όψει μιας τυπικής απόδειξης, περαιτέρω έλεγχοι φαίνεται να είναι επιθυμητοί ώστε να επιβεβαιωθεί η εγκυρότητά της. Η περίπτωση της Αλκμήνης που αξιολόγησε σωστά όλες τις παραγωγικές αποδείξεις, αποτελεί τρανταχτό παράδειγμα που συγκλίνει με την προηγούμενη έρευνα, καθώς στην τελική της επιλογή αναφέρει ότι «τα παραδείγματα τα χρειάζεσαι». Ο Μάρκος ήταν αυτός που δε βασίστηκε τόσο στη λειτουργία της εξήγησης, με εξαίρεση το οπτικό επιχείρημα, το οποίο όπως ανέφερε, είχε σχήμα και τον βοήθησε να το καταλάβει και να το εξηγήσει καλύτερα, παρόλο που η Γεωμετρία δεν είναι από τα αγαπημένα του μαθήματα. Βέβαια ακόμα και σε αυτή την περίπτωση υπήρχαν μεταβλητές, κάτι που τον ώθησε προς την ορθότητα του επιχειρήματος.

Σχετικά με το βαθμό βεβαιότητας των μαθητών/τριών, ειδικά στο αρχικό στάδιο υπήρξαν πολλές περιπτώσεις για τις οποίες ήταν πολύ υψηλός σε απαντήσεις που αξιολογούσαν λάθος, πράγμα που συμπεραίνουμε από τα αποτελέσματα και των δύο ερευνών. Συγκεκριμένα οι μαθητές/τριες είναι πολύ σίγουροι ότι το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού, η λάθος παραγωγική απόδειξη και το οπτικό επιχείρημα, αποτελούν σωστές αποδείξεις του δοθέντος ισχυρισμού. Παρατηρούμε ότι εμβαθύνοντας στις αναλυτικές αξιολογήσεις των μαθητών/τριών, ο βαθμός βεβαιότητάς τους παραμένει ο ίδιος. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει αναφορικά και με τα συναισθήματα των μαθητών/τριών για το πόσο σίγουροι είναι. Για το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού και τη λανθασμένη παραγωγική απόδειξη, νιώθουν αντίστοιχα άνετα και ηρεμία για το βαθμό βεβαιότητάς τους, κάτι που δεν αλλάζει εμβαθύνοντας στις κρίσεις τους. Μέσω αυτών των αποτελεσμάτων οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές/τριες δεν έχουν την επιθυμητή μαθηματική επίγνωση που απαιτείται για την ορθή αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων. Ιδιαίτερη περίπτωση για περαιτέρω έρευνα για την επίγνωση των μαθητών/τριών αποτελεί το οπτικό επιχείρημα, για το οποίο στην αρχή νιώθουν βαρεμάρα, όμως στις πιο αναλυτικές αξιολογήσεις τους, φαίνονται ότι τα συναισθήματά τους αλλάζουν, καθώς σημειώνουν ότι πρωτίστως νιώθουν περιέργεια.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και τη σχέση της επίγνωσης με τους διαφορετικούς τύπους αποδεικτικών επιχειρημάτων, παρατηρούμε από τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης, ότι οι μαθητές/τριες σε γενικά πλαίσια πείθονται σχεδόν το ίδιο από όλα τα αποδεικτικά επιχειρήματα. Συγκεκριμένα το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού και η λανθασμένη παραγωγική απόδειξη ήταν τα επιχειρήματα που έπεισαν περισσότερο τους μαθητές/τριες, ήταν πολύ σίγουροι για την αξιολόγησή τους και ένιωθαν άνετα ηρεμία για αυτό. Στις πιο αναλυτικές αξιολογήσεις τους παρόλο που διαφωνούσαν ότι τα επιχειρήματα ισχύουν πάντα, ο βαθμός βεβαιότητας παρέμεινε ίδιος, όπως επίσης και τα συναισθήματά τους. Για τη σωστή παραγωγική απόδειξη στη μορφή που υπάρχει και στο σχολικό βιβλίο πείθονται μέτρια, είναι μέτρια σίγουροι και νιώθουν άνετα και περιέργεια. Παρόλο που οι απαντήσεις τους κατά την εμβάθυνση στην αξιολόγησή τους είναι σωστές, ο βαθμός βεβαιότητας δεν αλλάζει, όπως επίσης και τα συναισθήματα τους. Παρόμοια ανταποκρίνονται και για τη δεύτερη σωστή παραγωγική απόδειξη, χωρίς όμως σε αυτή την περίπτωση οι αναλυτικές αξιολογήσεις τους να είναι όλες σωστές όπως προηγουμένως. Το κρίσιμο πείραμα ήταν αυτό που τους έπεισε λίγο ή μέτρια, ήταν πολύ σίγουροι για την κρίση τους και ένιωθαν άνετα και ηρεμία. Μετά από την εμβάθυνση στην αξιολόγησή τους δε γνωρίζουν αν η απάντηση είναι σωστή, διαφωνούν ότι ισχύει πάντα και ό βαθμός βεβαιότητας, όπως και τα συναισθήματά τους συνεχίζουν να παραμένουν τα ίδια. Το συγκεκριμένο επιχείρημα θεώρησαν ότι θα αποσπούσε το χαμηλότερο βαθμό από τον καθηγητή, σε αντίθεση με το οπτικό επιχείρημα που αν και δεν τους έπεισε σχεδόν καθόλου, όμως θεώρησαν ότι θα αποσπούσε τον υψηλότερο βαθμό από τον καθηγητή. Μέσα από τα αποτελέσματα της ποσοτικής μελέτης συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές/τριες δεν έχουν την επιθυμητή μαθηματική επίγνωση για κανένα από τα δοθέντα αποδεικτικά επιχειρήματα. Θα ήταν χρήσιμο βέβαια να γίνει περαιτέρω έρευνα για το οπτικό επιχείρημα, καθώς είναι το μόνο, στο οποίο παρατηρήθηκε αλλαγή στα συναισθήματα των μαθητών/τριών.

Αναφορικά με τη σχέση της επίγνωσης και την αξιολόγηση διαφορετικών τύπων αποδεικτικών επιχειρημάτων, παρατηρούμε ότι σχετίζεται με την αυτό-ταυτοποίηση. Όσο καλύτερος θεωρεί ένας μαθητής/τρια ότι είναι, τόσο περισσότερο πείθεται, τόσο περισσότερο βέβαιος είναι για την κρίση του και τόσο υψηλότερο βαθμό αναμένει από τον καθηγητή για την απάντηση που αξιολογεί κάθε φορά. Υπήρχαν όμως δύο περιπτώσεις, αυτή του κρίσιμου πειράματος και της λάθος παραγωγικής απόδειξης, όπου ο βαθμός συσχέτισης της αυτό-ταυτοποίησης των μαθητών/τριών δεν είναι στατιστικά σημαντικός. Ειδικά το οπτικό επιχείρημα αποτελεί μια ιδιαίτερη περίπτωση γενικότερα, μιας και ο βαθμός συσχέτισης στο οπτικό επιχείρημα, δεν είναι στατιστικά σημαντικός ως προς την κρίση και το βαθμό βεβαιότητας. Όμως είναι η μόνη περίπτωση που είναι στατιστικά σημαντικός ο νέος βαθμός βεβαιότητας.

Σχετικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα και τις ποιοτικές διαφοροποιήσεις στην επίγνωση μαθητών και μαθητριών υψηλής επίδοσης στην απόδειξη από την ποσοτική ανάλυση συμπεραίνουμε ότι όσο καλύτερος/η θεωρεί ένας μαθητής/τρια τον εαυτό του, τόσο περισσότερο πείθεται από τις απαντήσεις και τόσο υψηλότερο βαθμό βεβαιότητας έχει. Σύμφωνα με το Mason (1998) η φύση της επίγνωσης σχετίζεται με το βαθμό προσοχής και από τη στιγμή που αυτός ο βαθμός ποικίλλει σε κάθε άτομο, όπως και το πού στρέφει την προσοχή του, συμπεραίνουμε ότι κάθε μαθητής/τρια έχει διαφορετική επίγνωση. Στην παρούσα έρευνα μέσα από τρεις διαφορετικές μελέτες περίπτωσης, παρατηρούμε ότι μαθητές/τριες υψηλής επίδοσης, βασίζονται σε διαφορετικά στοιχεία για να κρίνουν μια απάντηση, έχουν διαφορετικό βαθμό βεβαιότητας για τις αξιολογήσεις τους και εκφράζουν διαφορετικά συναισθήματα καθώς εμβαθύνουν στις κρίσεις τους.

Από την παραπάνω ανάλυση παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της Αλκμήνης ο τρόπος με τον οποίο είναι δομημένη μια απόδειξη αλλά και ο βαθμός εξήγησης αποτελούν στοιχεία που καθιστούν πειστική μια απάντηση. Από την άλλη ο Μάρκος φαίνεται ότι κρίνει την πειστικότητα ενός επιχειρήματος ανάλογα με το αν είναι διατυπωμένο σε συγκεκριμένη μορφή και αν χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα, ενώ η Κατερίνα βασίζεται κυρίως στο βαθμό εξήγησης και το πόσο κατανοητό είναι. Αναφορικά με το βαθμό βεβαιότητάς τους, καθώς εμβαθύνουμε στην αξιολόγηση ων αποδείξεων, η Αλκμήνη φαίνεται λιγότερο σίγουρη για τις απαντήσεις της στη σωστή παραγωγική απόδειξη σε αφηγηματική γλώσσα, κάτι που παρατηρούμε μέσα από τις αμφιβολίες που εμφανίζονται στα λεγόμενά της και τα κενά στις απαντήσεις της. Ο Μάρκος είναι λιγότερο σίγουρος για τις απαντήσεις του στο κρίσιμο πείραμα και οι ενδοιασμοί του φαίνεται ότι βασίζονται σε γνωστικούς παράγοντες και συγκεκριμένα στο γεγονός ότι αυτό το επιχείρημα δεν ικανοποιεί τη λειτουργία της γενίκευσης. Από την άλλη πλευρά εμβαθύνοντας στις απόψεις της Κατερίνας για την απόδειξη, δηλώνει πως είναι περισσότερο σίγουρη, χωρίς όμως αυτή η σιγουριά να βασίζεται σε γνωστικούς παράγοντες, παρά μόνο στο γεγονός ότι αισθάνθηκε πιο οικεία και άνετα.

Ο καθορισμός των συναισθημάτων των μαθητών/τριών από τους ίδιους ενισχύει την ανάπτυξη των καθολικών συναισθημάτων, όπως πεποιθήσεις, στάσεις και συμπεριφορές και αντίστροφα. Οι Debellis και Goldin (2006) επισημαίνουν ότι το θυμικό κρύβει βαθιά νοήματα, που γίνονται αντιληπτά μέσα από τη μελέτη του μετά- θυμικού, κάτι που προκύπτει μέσα από τις έννοιες της μαθηματικής οικειότητας και μαθηματικής ακεραιότητας. Τέτοιες περιπτώσεις μετά- θυμικού παρατηρήσαμε και στην παρούσα έρευνα από τα αποτελέσματα της ποιοτικής ανάλυσης, καθώς τα ποσοτικά δεν έδειξαν καμία διαφοροποίηση στο βαθμό βεβαιότητάς τους. Αν και πρωτίστως οι μαθητές/τριες νιώθουν άνετα και περιέργεια για το βαθμό βεβαιότητας για τις κρίσεις τους, παρατηρούμε διαφορετική επίγνωση των συναισθημάτων τους, καθώς εμβαθύνουμε στις πιο αναλυτικές αξιολογήσεις τους. Η Αλκμήνη κατά την αξιολόγηση της σωστής παραγωγικής απόδειξης, σε αφηγηματικό στυλ, 'κολλάει' σε ορισμένα σημεία και εμβαθύνοντας στις απόψεις της, αντιλαμβάνεται ότι η κατανόησή της δεν είναι επαρκής. Παρόλα τα κενά στις απαντήσεις της, δεν παρατάει την προσπάθεια και συνεχίζει να το σκέφτεται, αξιολογώντας τη τελικά σωστά. Ο Μάρκος αν και πείθεται απόλυτα από το επιχείρημα του αφελή εμπειρισμού, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, αρχίζει να έχει αμφιβολίες και ενδοιασμούς για την κρίση του, καθώς μετά τις ερωτήσεις που του θέτουμε, αντιλαμβάνεται ότι η αρχική του κρίση δεν ήταν τελικά σωστή.

Μέσα από την ποιοτική έρευνα και τις αναλύσεις των συνεντεύξεων, παρατηρούμε ότι κανένας μαθητής/τρια δεν είχε την επιθυμητή μαθηματική επίγνωση που απαιτείται για την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων. Σίγουρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε μαθητής/τρια χρειάζεται ενίσχυση σε διαφορετικούς τομείς και διαφορετική διδακτική προσέγγιση ώστε να αποκτήσει τελικά την επίγνωση με τον τρόπο που εννοιοποείται στην παρούσα έρευνα.

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα μελέτη διερευνήσαμε τις όψεις της μαθηματικής επίγνωσης σχετικά με την απόδειξη σε μαθητές/τριες Α΄ Λυκείου, βασιζόμενοι στο άρθρο του Mason (1998) για τα διάφορα επίπεδα επίγνωσης. Ο ίδιος αναφέρει ότι η επίγνωση αφορά την προσοχή όσων γνωρίζουμε ότι υπάρχουν. Επομένως αν ένας μαθητής/τρια δεν ξέρει τι να δει, δεν πρόκειται να το δει και συνεπώς δεν έχει επίγνωση. Πραγματικές πιθανότητες αποτελεσματικής διδασκαλίας της επίγνωσης προκύπτουν όταν η επίγνωση και η συμπεριφορά των μαθητών/τριών εκπαιδεύονται από κοινού, αξιοποιώντας τα συναισθήματά τους.

Στη δική μας έρευνα διαφοροποιηθήκαμε από τη μελέτη του Mason, ο οποίος εστίασε στην επίγνωση των καθηγητών των Μαθηματικών, και προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε την επίγνωση των μαθητών/τριών στην απόδειξη. Θέλουμε συγκεκριμένα να μελετήσουμε πώς αποτυπώνεται η επίγνωση για την απόδειξη, στους μαθητές/τριες Α΄ Λυκείου, ποια η σχέση της με διαφορετικούς τύπους αποδείξεων και αποδεικτικών επιχειρημάτων και ποιες είναι οι ποιοτικές διαφοροποιήσεις στην επίγνωση μαθητών και μαθητριών υψηλής επίγνωσης.

Από τη στιγμή που η επίγνωση των μαθητών/τριών δεν αφορά αποκλειστικά την αναγνώριση της γνώσης που έχουν αλλά και τα συναισθήματα για το παρόν και το αποβλεπόμενο μέλλον, την προσεγγίζουμε ολιστικά. Αρχικά θέλουμε να μελετήσουμε τη σχέση των εμφανίσεων της επίγνωσης με την εικόνα των μαθητών και αντλώντας από τον Ernest (1995, 2008), εξετάζουμε την αυτό-αποτελεσματικότητα των μαθητών/τριών για τα Μαθηματικά, τις στάσεις τους, τις απόψεις τους και την ταυτοποίησή τους. Το σύνθετο και μερικώς ιεραρχημένο δόμημα των όψεων της επίγνωσης στη μαθηματική απόδειξη συγκροτείται από την αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη και από την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων, το βαθμό βεβαιότητας και τα συναισθήματα των μαθητών για αυτό το βαθμό βεβαιότητας. Οι αξιολογήσεις τους γίνονται σε δύο φάσεις· στις πιο ολιστικές αρχικά και καθώς εμβαθύνουμε στις απόψεις τους για την απόδειξη στις πιο αναλυτικές. Δίνεται επομένως στα πλαίσια ενός διαγωνίσματος μια εικασία, που οι μαθητές/τριες καλούνται να αποδείξουν ενώ στη συνέχεια δίνονται πέντε απαντήσεις μαθητών/τριών που τη στηρίζουν, βασιζόμενες στην έρευνα των

Healy και Hoyles (2000) και στο θεωρητικό πλαίσιο του Balacheff (1988) για τους τύπους αποδεικτικών επιχειρημάτων.

Απαντώντας στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα για το πώς αποτυπώνεται η επίγνωση, όπως εννοιοποιείται στην παρούσα μελέτη, μέσα από την ανάλυση της ποσοτικής έρευνας οι μαθητές/τριες δηλώνουν ότι έχουν μέτρια αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη και πείθονται από όλα τα αποδεικτικά επιχειρήματα. Παρόλο που από τα ποσοτικά στοιχεία οι μαθητές/τριες φαίνεται να έχουν επίγνωση για την πλειοψηφία των αποδεικτικών επιχειρημάτων που γενικεύονται, κάτι που όμως δεν αναδείχθηκε από την ποιοτική, δεν έχουν επίγνωση ότι ένα επιχείρημα για να είναι έγκυρο και να αποτελεί απόδειξη πρέπει να πληρεί όλες τις λειτουργίες, που αναφέρθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο, άλλες σε μεγαλύτερο και άλλες σε μικρότερο βαθμό. Δεν αρκεί δηλαδή, απλά να αναγνωρίζουν ότι ένα επιχείρημα γενικεύεται ή όχι ·θα πρέπει να γίνεται σύνδεση σχετικά με το αν ο βαθμός γενίκευσης είναι ικανός να πείσει τον καθηγητή, καθώς αυτός απαιτεί μια ολοκληρωμένη και σωστή απόδειξη, κάτι που από ότι φάνηκε από τα αποτελέσματα της έρευνας οι μαθητές/τριες δεν έχουν επίγνωση. Αδυναμίες στην επίγνωση παρατηρούνται και στην αναγνώριση των κατάλληλων εγγυητών μιας απόδειξης, συμπέρασμα στο οποίο μας οδηγεί η λανθασμένη παραγωγική απόδειξη, ως δεύτερη επιλογή τελικής απάντησης από τους μαθητές. Σχετικά με το βαθμό βεβαιότητας έχουν αρχικά υψηλό, ο οποίος δεν αλλάζει εμβαθύνοντας στις κρίσεις τους. Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρούμε και στα συναισθήματά τους για το βαθμό βεβαιότητας, τα οποία αρχικά είναι άνετα, περιέργεια και ηρεμία και στην πλειοψηφία τους παραμένουν ίδια.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και τη σχέση της επίγνωσης με διαφορετικούς τύπους αποδεικτικών επιχειρημάτων, αν και οι μαθητές/τριες πείθονται σχεδόν από όλα τα αποδεικτικά επιχειρήματα παρατηρούμε αλλαγές ως προς το κρίσιμο πείραμα και το οπτικό επιχείρημα. Το πρώτο έπεισε λίγο ή μέτρια τους μαθητές και θεώρησαν ότι θα αποσπάσει το χαμηλότερο βαθμό από τον καθηγητή και το δεύτερο αν και δεν τους έπεισε σχεδόν καθόλου, θεώρησαν ότι θα αποσπάσει τον υψηλότερο. Παρατηρούμε ότι οι μαθητές/τριες είναι πολύ σίγουροι για τις απαντήσεις τους, κάτι που δεν αλλάζει ακόμα και όταν σημειώνουν ότι δε γνωρίζουν τι να συμπληρώσουν στις ερωτήσεις που εμβαθύνουν στις αξιολογήσεις τους. Σε παρόμοια συμπεράσματα καταλήγουμε και για τα συναισθήματά τους καθώς για απαντήσεις που δεν αποτελούν έγκυρες αποδείξεις, πείθονται πολύ, είναι σίγουροι για την κρίση τους και νιώθουν άνετα και ηρεμία στην πλειοψηφία των περιπτώσεων. Αυτά τα συναισθήματα παραμένουν ακόμα και κατά τη διάρκεια των πιο αναλυτικών αξιολογήσεων, κάτι που μας οδηγεί στην υπόθεση ότι οι μαθητές δεν έχουν επίγνωση της μαθηματικής απόδειξης. Εξαίρεση αποτελεί το οπτικό επιχείρημα, για το οποίο το συναίσθημα της βαρεμάρας μετατράπηκε σε περιέργεια.

Κατά την αξιολόγηση των επιχειρημάτων, συμπεραίνουμε από την ποσοτική ανάλυση ότι η επίγνωση σχετίζεται με την αυτό-ταυτοποίηση, με εξαίρεση την περίπτωση του κρίσιμου πειράματος, όπου παρατηρούμε ότι ο βαθμός συσχέτισης της αυτό-ταυτοποίησης των μαθητών/τριών δεν είναι στατιστικά σημαντικός, και τη λάθος παραγωγική απόδειξη, όπου το συμπέρασμα είναι παρόμοιο. Ειδικά το οπτικό επιχείρημα αποτελεί μια ιδιαίτερη περίπτωση γενικότερα, καθώς ο βαθμός συσχέτισης, δεν είναι στατιστικά σημαντικός ως προς την κρίση και το βαθμό βεβαιότητας. Όμως είναι η μόνη περίπτωση που είναι στατιστικά σημαντικός ο νέος βαθμός βεβαιότητας.

Αναφορικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα από τα αποτελέσματα της ποιοτικής ανάλυσης, οι μαθητές/τριες φαίνεται ότι βασίζονται σε διαφορετικά στοιχεία για να κρίνουν μια απόδειξη, έχουν διαφορετικό βαθμό βεβαιότητας, είτε αυτός βασίζεται σε γνωστικούς παράγοντες είτε όχι και εκφράζουν διαφορετικά συναισθήματα για αυτό το νέο βαθμό βεβαιότητας. Όσον αφορά το τρίτο ερευνητικό ερώτημα για τις ποιοτικές διαφοροποιήσεις στην επίγνωση μαθητών/τριών και μαθητριών υψηλής επίδοσης στα Μαθηματικά, εμβαθύνοντας στις απόψεις τους για την απόδειξη, παρατηρούμε ότι καθένας δίνει προσοχή σε διαφορετικά στοιχεία και λειτουργίες της και επομένως η φύση της επίγνωσης αλλάζει (Mason, 1998).Ειδικά στο ερώτημα για τη γενίκευση μιας απόδειξης αναδεικνύονται οι διαφορετικοί τρόποι σκέψης και προσέγγισης της απάντησης. Διαφορετική επίγνωση φαίνεται να υπάρχει και στο κομμάτι των συναισθημάτων των μαθητών για το βαθμό βεβαιότητάς τους και τα συναισθήματά τους για αυτόν, μετά τις ερωτήσεις που εμβαθύνουν στις απόψεις τους. Δυναμικές μορφές μετά- θυμικού, όπως η μαθηματική οικειότητα και ακεραιότητα στη συνέντευξη της Αλκμήνης και του Μάρκου, μπορούν να θεωρηθούν κλειδιά, που ξεκλειδώνουν μαθηματικές δυνάμεις στα υποκείμενα και να τα οδηγήσουν πιο κοντά στην απόκτηση της σύνθετης έννοιας της απόδειξης.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τη σύνθεση των δύο ερευνών παρατηρούμε ότι από την ποιοτική ανάλυση αναδεικνύονται οι λόγοι επιλογής και αξιολογήσεων των απαντήσεων, οι οποίες δε συγκλίνουν πάντα με τα ποσοτικά αποτελέσματα. Βέβαια το δείγμα των συνεντεύξεων είναι πολύ μικρό, επομένως δε μας οδηγεί σε ένα έγκυρο συμπέρασμα. Αναφορικά με το βαθμό βεβαιότητας και τα συναισθήματα για αυτόν η ποιοτική μελέτη δεν είχε ως επί το πλείστον αποκλίσεις από την ποσοτική, αν και μπόρεσαν να αναδειχτούν μικρές διαφοροποιήσεις σε ορισμένες περιπτώσεις σχετικά με τους λόγους επιλογής των συγκεκριμένων απαντήσεων.

Μέσα από την ποσοτική έρευνα θέλουμε να ενημερωθούμε ολιστικά για την επίγνωση και το πόσο ευπαθής είναι. Ανάμεσα στους δύο βαθμούς βεβαιότητας δεν παρατηρείται καμία απολύτως αλλαγή, όπως επίσης και στα συναισθήματα, με εξαίρεση την περίπτωση του οπτικού επιχειρήματος, καθώς σε όλες τις απαντήσεις η πλειοψηφία των μαθητών/τριών είναι το ίδιο σίγουρη για την κρίση της και νιώθει άνεση και ηρεμία για αυτό. Μπορεί τα ευρήματα της ποσοτικής να μην έδειξαν ότι η σιγουριά για τις κρίσεις και τα συναισθήματα για τη σιγουριά των μαθητών/τριών επηρεάζεται, αλλά τα ποσοστά και οι συνεντεύξεις κατά την εμβάθυνση στις απόψεις των μαθητών/τριών, δημιουργούν υποψίες, καθώς οι απαντήσεις τους δε συνάδουν με το βαθμό πειστικότητας κάθε απόδειξης, τα συναισθήματά τους και την τελική τους επιλογή. Φαίνεται δηλαδή, ότι οι μαθητές/τριες δεν έχουν επίγνωση σχετικά με τη σιγουριά και τα συναισθήματά τους· παρατηρείται ευαισθησία ως προς το βαθμό βεβαιότητας και τα συναισθήματα, κάτι που ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουν δεύτερες σκέψεις σχετικά με τις κρίσεις τους.

Συμπερασματικά η σύνθεση των δύο ερευνών, της ποσοτικής και της μελέτης των τριών μελετών περίπτωσης μας επέτρεψε μια αναλυτικότερη και συνθετότερη προσέγγιση, η οποία κατέδειξε τις όψεις και την πολυπλοκότητα των σχέσεων που υπάρχουν κατά τη μελέτη της σύνθετης έννοιας της επίγνωσης.

Όσον αφορά τη μελλοντική έρευνα, θα μπορούσε να επεκταθεί σε ένα μεγαλύτερο δείγμα μαθητών και μαθητριών, κάτι που στην παρούσα μας περιόρισε πολύ. Περαιτέρω έρευνα μπορεί να πραγματοποιηθεί για το οπτικό επιχείρημα, αφού αποτέλεσε ιδιαίτερη περίπτωση, καθώς ήταν το μόνο που ο βαθμός συσχέτισης της αυτοταυτοποίησης ήταν στατιστικά σημαντικός με τον καινούριο βαθμό βεβαιότητας.

Παρόλο που στη συγκεκριμένη έρευνα επιλέξαμε να μελετήσουμε την επίγνωση των μαθητών/τριών για την αξιολόγηση αποδείξεων, ενδιαφέρον θα είχε να εξεταστεί η επίγνωση των μαθητών/τριών καθώς κατασκευάζουν αποδείξεις και φυσικά να μελετηθούν και οι ποιοτικές διαφοροποιήσεις της επίγνωσης σε μαθητές/τριες χαμηλότερης επίδοσης.

Ένα βασικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε, το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό και για μελλοντικές έρευνες, είναι το γεγονός ότι μαθητές/τριες που βαθμολογούνται ως καλοί, έχουν υψηλή αυτό-αποτελεσματικότητα και αυτό-ταυτοποίηση, θεωρούν και οι ίδιοι δηλαδή τον εαυτό τους πάνω από το μέτριο, έχουν δυσκολίες στην αξιολόγηση αποδείξεων και δεν έχουν επίγνωση. Ίσως λοιπόν να ήταν χρήσιμο να μελετηθούν τέτοια φαινόμενα και με επίγνωση. Μέσα από μελέτες για τις δυσκολίες των μαθητών στην απόδειξη συναρτήσει της επίγνωσης τους, ενδεχομένως να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι τέτοιες καταστάσεις χρειάζονται διαφοροποιημένη διδακτική αντιμετώπιση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣΑΝΑΦΟΡΕΣ

Abreu, G. D., & Cline, T. (2003). Schooled mathematics and cultural knowledge. Pedagogy, Culture and Society, *11*(1), 11-30.

Anderson, R. (2007). Being a mathematics learner: four faces of identity. The Mathematics Educator, *17*(1), 7-14.

Aksan, N., & Kisac, B. (2009). A descriptive study: Reading comprehension and cognitive awareness skills. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *1*(1), 834-837.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications for mathematics education. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(6), 869-890.

Baker, L., & Brown, A. L. (1984). Metacognitive skills and reading. *Handbook of reading research*, *1*(353), V394.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), Mathematics, teachers and children (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 173-192). Springer, Dordrecht.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological review*, *84*(2), 191.

Bandura, A. (1986). Social foundations of thought and action: A social cognitive theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Bandura, A. (1993). Perceived self-efficacy in cognitive development and functioning. *Educational psychologist*, *28*(2), 117-148.

Bandura, A. (1997). Self-efficacy: The exercise of control. New York: Freeman.

Bandura, A. (2006). Guide for constructing self-efficacy scales. *Self-efficacy beliefs of adolescents*, *5*(1), 307-337.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational studies in mathematics*, *7*(1), 23-40.

Boekaerts, M., 1997, Self-regulated learning: A new concept embraced by researchers, policy makers, educators, teachers and students, *Learning and Instruction, 7 (2), 161-186.*

Bouffard-Bouchard, T., Parent, S., & Larivee, S. (1991). Influence of self-efficacy on self-regulation and performance among junior and senior high-school age students. International Journal of Behavioral Development, 14, 153-164.

Brown, M., Brown, P., & Bibby, T. (2008). “I would rather die”: Reasons given by 16-year-olds for not continuing their study of mathematics. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 3-18.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, *24*(4), 359-387.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41-53.

Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J., & Prosser, M. (1994). Conceptions of mathematics and how it is learned: The perspectives of students entering university. Learning and Instruction, 4 (4), 331–345.

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 131-147.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

De Villiers, M. (1996). Why proof in dynamic geometry. *Proceedings of Topic Group 8: Proofs and Proving: Why, When and How*, 24-42.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In *Explanation and proof in mathematics* (pp. 205-221). Springer, Boston, MA.

Di Martino P., Zan R. (2010). 'Me and maths': towards a definition of attitude grounded on students' narrative. Journal of Mathematics Teacher Education, 13, 27-48.

Georghiades, P. (2004). From the general to the situated: Three decades of metacognition. *International Journal of Science Education*, *26*(3), 365-383.

Goldin, G. A. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. In *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 59-72). Springer, Dordrecht.

Hackett, G., & Betz, N. E. (1989). An exploration of the mathematics self-efficacy/mathematics performance correspondence. *Journal for research in Mathematics Education*, 261-273.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-2), 5-23.

Hanna, G., de Villiers, M., & International Program Committee. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM*, *40*(2), 329-336.

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational studies in Mathematics*, *49*(1), 25-46.

Hannula, M., Evans, J., Philippou, G., & Zan, R. (2004). Affect in Mathematics Education--Exploring Theoretical Frameworks. Research Forum. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, *7*, 234-283.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805-842.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*, 396-428.

Hendricks, C. C., & Millman, R. S. (2015). THE EFFECTS OF AN ADVANCED HIGH SCHOOL COURSE IN NUMBER THEORY AND ALGEBRA ON STUDENTS'MATHEMATICAL SELF-EFFICACY. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *6*(1).

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students?. *Cognition and Instruction*, *24*(1), 73-122.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389-399.

Kafoussi, S., Moutsios-Rentzos, A., & Chaviaris, P. Investigating parental influences on sixth graders'mathematical identity: the case of attainment. *Mathematics Education and Life at Times of Crisis*, 592.

Karaali, G. (2015). Metacognition in the classroom: Motivation and self-awareness of mathematics learners. *PRIMUS*, *25*(5), 439-452.

Κόρδα, Μ.Κ. (2018). *Οι απόψεις των μαθητών Λυκείου σχετικά με την εγκυρότητα αποδεικτικών επιχειρημάτων στην Άλγεβρα: Μια συστημική προσέγγιση*(Μεταπτυχιακή εργασία). ΕθνικόκαιΚαποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα

Koedinger, K. R., &Anderson, J. R. (1993, January). Effective use of intelligent software in high school math classrooms. In *Proceedings of the World Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 241-248).

Ku, K. Y., & Ho, I. T. (2010). Metacognitive strategies that enhance critical thinking. *Metacognition and learning*, *5*(3), 251-267.

Landine, J., & Stewart, J. (1998). Relationship between Metacognition, Motivation, Locus of Control, Self-Efficacy, and Academic Achievement. *CanadianJournalofCounselling*, *32*(3), 200-12.

Λεοντίου, Ε. (2015). *Στάσεις και γονική εμπλοκή για τα Μαθηματικά: μια συστημική προσέγγιση*(Μεταπτυχιακή εργασία). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.

Lim, S. Y., &Chapman, E. (2013). Development of a short form of the attitudes toward mathematics inventory. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 145-164.

Ma, X., & Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. Journal for Research in Mathematics Education, 28, 26-47.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 385-401.

Mamona-Downs, J. O. A. N. N. A., & Downs, M. A. R. T. I. N. (2011). Proof: A game for pedants. In *Proceedings of CERME*(Vol. 7, pp. 213-222).

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Brill Sense.

Mariotti, M. A. (2007). Geometrical proof: the mediation of a microworld. In *Theorems in School* (pp. 285-304). Brill Sense.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(3), 243-267.

May, D. K. (2009). *Mathematics self-efficacy and anxiety questionnaire* (Doctoral dissertation, University of Georgia).

Miller, D., Infante, N., & Weber, K. (2018). How mathematicians assign points to student proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 24-34.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 575-596.

Mejia-ramos, J. P., & Tall, D. (2005). Personal and public aspects of formal proof: A theory and a single-case study.

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3-18.

Moutsios-Rentzos, A. (2009). University mathematics students: thinking styles and strategies (unpublished PhD thesis). University of Warwick, UK.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., &Πιτσιλή-Χατζή, Δ. (2014). Όψεις της απόδειξης στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α' Λυκείου. Στο Χ. Σκουμπουρδή, & Μ. Σκουμιός (Επ.), Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες (σελ. 561-568). Ρόδος: Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Moutsios-Rentzos, A., & Spyrou, P. (2013).The Need For Proof In Geometry: A Theoretical Investigation Through Husserl's Phenomenology. In Lindmeier, A. M.& Heinze, A. (Eds.). Proceedings of the 37th Conference of the International (vol. 3, pp. 329-336). Kiel, Germany: PME.

Movshovitz-Hadar, N., & Hadass, R. (1990). Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(3), 265-287.

Pajares, F., & Miller, M. D. (1995). Mathematics self-efficacy and mathematics performances: The need for specificity of assessment. *Journal of counseling psychology*, *42*(2), 190.

Pampaka, M., Kleanthous, I., Hutcheson, G. D., & Wake, G. (2011). Measuring mathematics self-efficacy as a learning outcome. *Research in Mathematics Education*, *13*(2), 169-190.

Panaoura, A., Philippou, G., & Christou, C. (2003). Young pupils' metacognitive ability in mathematics. *European research in mathematics education III*.

Pintrich, P. R., & De Groot, E. V. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of educational psychology*, *82*(1), 33.

Pintrich, P. R. & Schunk, D. (1996). Motivation in education: theory, research, and practice. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Raman, M. J. (2002). *Proof and justification in collegiate calculus* (Doctoral dissertation, University of California, Berkeley).

Rasmussen, C., Zandieh, M., & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go? The emergence and brokering of a classroom mathematics practice. *Mathematical representations at the interface of the body and culture*, 171-218.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia mathematica*, *7*(1), 5-41.

Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2013). School goal structure: Associations with students' perceptions of their teachers as emotionally supportive, academic self-concept, intrinsic motivation, effort, and help seeking behavior. *International Journal of Educational Research*, *61*, 5-14.

Skaalvik, E. M., Federici, R. A., & Klassen, R. M. (2015). Mathematics achievement and self-efficacy: Relations with motivation for mathematics. *International Journal of Educational Research*, *72*, 129-136.

Schunk, D. H. (2008). Metacognition, self-regulation, and self-regulated learning: Research recommendations. *Educational psychology review*, *20*(4), 463-467.

Schunk, D. H., & Ertmer, P. A. (2000). Self-regulation and academic learning: Selfefficacy enhancing interventions. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), Handbook of self-regulation (pp. 631-649). San Diego: Academic Press.

Schunk, D. H. & Miller, S. D. (2002). Self-efficacy and adolescents' motivation. In F. Pajares, & T. Urdan (eds.), Academic motivation of adolescents (pp. 29-52). Greenwich, CO: IAP.

Selden, A. & Selden, J. (2007). Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs. (Tech. Rep. No. 2007-1). Cookeville, TN: Tennessee Technological University, Department of Mathematics.

Selden, A., McKee, K., & Selden, J. (2010). Affect, behavioural schemas and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 199-215.

Selden, A., & Selden, J. (2014). The roles of behavioral schemas, persistence, and self-efficacy in proof construction. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 246-255). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Sirmaci, N., & Ceylan, M. (2014). The effects of cognitive awareness strategies taught with cognitive coaching method on achievement, attitudes and cognitive awareness skills of students. *International Journal of Academic Research*, *6*(1).

Skaalvik, E. M., Federici, R. A., & Klassen, R. M. (2015). Mathematics achievement and self-efficacy: Relations with motivation for mathematics. *International Journal of Educational Research*, *72*, 129-136.

Skaalvik, S., & Skaalvik, E. M. (2004). Gender differences in math and verbal self-concept, performance expectations, and motivation. *Sex roles*, *50*(3-4), 241-252.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*(1), 319-370.

Sullivan, P., Tobias, S., & McDonough, A. (2006). Perhaps the decision of some students not to engage in learning mathematics in school is deliberate. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(1), 81-99.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, *127*, 28-32.

Tapia, M., & Marsh, G.E. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. Academic Exchange Quarterly, 8(2), 16-21.

Ünlü, M., & Ertekin, E. (2013). The relationship between mathematics teaching self-efficacy and mathematics self-efficacy. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *106*, 3041-3045.

Usher, E. L., & Pajares, F. (2009). Sources of self-efficacy in mathematics: A validation study. *Contemporary educational psychology*, *34*(1), 89-101.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational studies in mathematics*, *48*(1), 101-119.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 351-360.

Whitehead, A. (1932). *The aims of education and other essays*. London: Williams and Norgate.

Williams, T., & Williams, K. (2010). Self-efficacy and performance in mathematics: Reciprocal determinism in 33 nations. *Journal of educational Psychology*, *102*(2), 453.

Wong, B. Y. (1999). Metacognition in writing. *Developmental perspectives on children with high-incidence disabilities*, 183-198.

Wood, L. N., Petocz, P., & Reid, A. (2012). *Becoming a mathematician: An international perspective* (Vol. 56). Springer Science & Business Media.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2011). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215-229). Springer, Dordrec.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Αγαπητέ μαθητή/μαθήτρια.
Το ανώνυμο ερωτηματολόγιο σχεδιάστηκε για να καταγράψει τις απόψεις σας και τα βιώματά σας για τα μαθηματικά με στόχο τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης.Οι απαντήσεις σας είναι εμπιστευτικές.
Σας ευχαριστώ για το χρόνο σας!

<u>ΜΕΡΟΣ 1ο</u>

Στις παρακάτω ερωτήσεις, σκεφτείτε τα Μαθηματικά στο σχολείο και σημειώστε με έναν αριθμό από το 0 έως το 100 την απάντηση που σας εκφράζει χρησιμοποιώντας την παρακάτω κλίμακα:

0 30	40 70	80 100
Δεν μπορώ καθόλου	Μπορώ αρκετά	Πολύ σίγουρος/η ότι μπορώ

Τονίζουμε ότι δεν υπάρχουν σωστές και λάθος απαντήσεις.

		0-30: Δεν μπορώ καθόλου 40-70: Μπορώ αρκετά 80-100: Πολύ σίγουρος/η ότι μπορώ
1	Μπορώ να καταλάβω το μάθημα των Μαθηματικών.	
2	Μπορώ να τα πάω καλά σε ένα μάθημα Μαθηματικών.	
3	Είμαι από τους μαθητές/μαθήτριες που μπορεί να μάθει καλά τα Μαθηματικά.	
4	Μπορώ να κάνω ερωτήσεις σε ένα μάθημα Μαθηματικών.	
5	Μπορώ να ζητήσω βοήθεια από τους/τις καθηγητές/καθηγήτριές μου στα Μαθηματικά και έξω από την τάξη.	
6	Μπορώ να βάζω στόχους στο μάθημα των Μαθηματικών.	
7	Μπορώ να δουλέψω και με τους/τις συμμαθητές/συμμαθήτριες μου σε ένα μάθημα Μαθηματικών.	
8	Μπορώ να δουλέψω σκληρά σε ένα μάθημα Μαθηματικών.	
9	Μπορώ να κάνω τακτικά τις ασκήσεις που έχω για το σπίτι στα Μαθηματικά.	
10	Μπορώ να τα πάω καλά σε ένα τεστ Μαθηματικών.	
11	Μπορώ να πάρω 'Άριστα' σε ένα τεστ Μαθηματικών.	
12	Μπορώ να σκεφτώ σαν Μαθηματικός.	
13	Μπορώ να ολοκληρώσω όλες τις ασκήσεις σε ένα μάθημα Μαθηματικών.	
14	Μπορώ να πάρω καλό βαθμό στα Μαθηματικά.	
15	Μπορώ να χρησιμοποιήσω τα Μαθηματικά έξω από το σχολείο.	
16	Μπορώ να χρησιμοποιήσω τα Μαθηματικά στη μελλοντική μου καριέρα.	

<u>ΜΕΡΟΣ 2ο</u>

Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέξτε την απάντηση που δείχνει πόσο καλά σας περιγράφει:

1: Διαφωνώ απόλυτα 2: Διαφωνώ 3: Δεν είμαι βέβαιος/-η 4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώ απόλυτα

Τα Μαθηματικά είναι …	***1: Διαφωνώ απόλυτα 2: Διαφωνώ 3: Δεν είμαι βέβαιος/-η 4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώ απόλυτα***
ένα σύνολο περιγραφών/ μεθόδων που χρησιμοποιούνται για να εξηγήσουν τον κόσμο.	1 2 3 4 5
ένας τρόπος ανάλυσης ιδεών και προβλημάτων.	1 2 3 4 5
ένα σύνολο κανόνων και εξισώσεων.	1 2 3 4 5
βασική γνώση για όλες τις επιστήμες.	1 2 3 4 5
δεν είναι καθόλου χρήσιμα σε μένα.	1 2 3 4 5
ένας τρόπος να λύνω προβλήματα στη ζωή μου.	1 2 3 4 5
ένα εργαλείο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορα μαθήματα.	1 2 3 4 5
η λύση προβλημάτων χρησιμοποιώντας αριθμούς.	1 2 3 4 5

Τα Μαθηματικά είναι …	*1: Διαφωνώ απόλυτα 2: Διαφωνώ 3: Δεν είμαι βέβαιος/-η 4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώ απόλυτα*
η χρήση τύπων για την επίλυση προβλημάτων.	1 2 3 4 5
ένας τρόπος που δίνει στους ανθρώπους μία πιο ανεπτυγμένη ζωή.	1 2 3 4 5
η γλώσσα της φύσης και μας βοηθούν να κατανοήσουμε το σύμπαν.	1 2 3 4 5
υπολογισμοί.	1 2 3 4 5
επεξεργασία αριθμών.	1 2 3 4 5
ένα σύνολο θεωριών που περιγράφει την πραγματικότητα.	1 2 3 4 5
η μελέτη των αριθμητικών εννοιών.	1 2 3 4 5
ένας τρόπος παραγωγής νέων ιδεών.	1 2 3 4 5

ΜΕΡΟΣ 3ο

Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέξτε την απάντηση που δείχνει πόσο καλά σας περιγράφει:

1: Διαφωνώ απόλυτα 2: Διαφωνώ 3: Δεν είμαι βέβαιος/-η 4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώ απόλυτα

Τονίζουμε ότι δεν υπάρχουν σωστές και λάθος απαντήσεις.

	Πώς νιώθω για τα μαθηματικά …	*1: Διαφωνώ απόλυτα 2: Διαφωνώ 3: Δεν είμαι βέβαιος/-η 4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώ απόλυτα*
1	Πραγματικά μου αρέσουν τα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
2	Συνήθως ευχαριστιέμαι τα μαθηματικά στο σχολείο.	1 2 3 4 5
3	Τα μαθηματικά είναι ένα πολύ ενδιαφέρον μάθημα.	1 2 3 4 5
4	Είμαι πιο ευτυχισμένος/-η στην τάξη των μαθηματικών από ότι σε οποιαδήποτε άλλη τάξη.	1 2 3 4 5
5	Μου αρέσει να λύνω νέα προβλήματα στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
6	Τα μαθηματικά μου προκαλούν άγχος και ανασφάλεια.	1 2 3 4 5
7	Νιώθω πάντα σύγχυση και ένταση στην τάξη των μαθηματικών.	1 2 3 4 5
8	Τα μαθηματικά είναι ένα πολύ αξιόλογο και απαραίτητο μάθημα.	1 2 3 4 5
9	Τα μαθηματικά είναι σημαντικά στην καθημερινή ζωή.	1 2 3 4 5
10	Τα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμα ανεξαρτήτως τι θα αποφασίσω να ακολουθήσω στο μέλλον.	1 2 3 4 5
11	Ένα δυνατό υπόβαθρο μαθηματικών θα μπορούσε να με βοηθήσει στην επαγγελματική μου ζωή.	1 2 3 4 5
12	Τα μαθηματικά είναι ένα από τα πλέον σπουδαία μαθήματα που πρέπει να διδάσκονται οι άνθρωποι.	1 2 3 4 5
13	Νιώθω πάντα απαίσια ένταση στην τάξη των μαθηματικών.	1 2 3 4 5
14	Με αγχώνει ακόμα και η σκέψη πως έχω να κάνω ένα μαθηματικό πρόβλημα.	1 2 3 4 5
15	Έχω μία αίσθηση ανασφάλειας όταν προσπαθώ να κάνω μαθηματικά.	1 2 3 4 5

ΜΕΡΟΣ 4ο

Στις παρακάτω ερωτήσεις, σκεφτείτε τα Μαθηματικά στο σχολείο και **σημειώστε με έναν αριθμό από το 0 έως το 100** την απάντηση που σας εκφράζει χρησιμοποιώντας την παρακάτω κλίμακα:

0 30	40 70	80 100
Δεν μπορώ καθόλου	Μπορώ αρκετά	Πολύ σίγουρος/η ότι μπορώ

Τονίζουμε ότι δεν υπάρχουν σωστές και λάθος απαντήσεις.

		0-30: Δεν μπορώ καθόλου 40-70: Μπορώ αρκετά 80-100: Πολύ σίγουρος/η ότι μπορώ
1	Μπορώ να καταλάβω μια απόδειξη στα Μαθηματικά.	
2	Μπορώ να τα πάω καλά σε μια απόδειξη στα Μαθηματικά.	

		0-30: Δεν μπορώ καθόλου 40-70: Μπορώ αρκετά 80-100: Πολύ σίγουρος/η ότι μπορώ
3	Είμαι από τους/τις μαθητές/μαθήτριες που μπορεί να καταλάβει καλά μια απόδειξη στα Μαθηματικά.	
4	Μπορώ να κάνω ερωτήσεις όταν κάνουμε μια απόδειξη στο μάθημα των Μαθηματικών.	
5	Μπορώ να ζητήσω βοήθεια από τους/τις καθηγητές/καθηγήτριές μου για μια απόδειξη στα Μαθηματικά και έξω από την τάξη.	
6	Μπορώ να βάζω στόχους όταν κάνω μια απόδειξη.	
7	Μπορώ να δουλέψω και με τους/τις συμμαθητές/συμμαθήτριες μου σε μια απόδειξη.	
8	Μπορώ να δουλέψω σκληρά σε μια απόδειξη.	
9	Μπορώ να κάνω τακτικά τις αποδείξεις στα Μαθηματικά που έχω για το σπίτι.	
10	Μπορώ να τα πάω καλά σε ένα τεστ στα Μαθηματικά που έχει και αποδείξεις.	
11	Μπορώ να πάρω 'Άριστα' σε ένα τεστ στα Μαθηματικά που έχει και αποδείξεις.	
12	Μπορώ να ολοκληρώσω τις αποδείξεις σε ένα μάθημα Μαθηματικών.	
13	Μπορώ να πάρω καλό βαθμό στις αποδείξεις που κάνω.	
14	Μπορώ να καταλάβω τη σημασία των αποδείξεων στα Μαθηματικά.	
15	Μπορώ να μάθω διαφορετικές μεθόδους κατασκευής αποδείξεων.	
16	Μπορώ να βρω παραδείγματα που με βοηθούν να κατασκευάσω μια απόδειξη.	
17	Μπορώ να κατασκευάσω σωστές αποδείξειςστο μάθημα των Μαθηματικών.	
18	Μπορώ να καταλάβω το λανθασμένο συλλογισμό στις λάθος αποδείξεις.	
19	Μπορώ να εξηγήσω τις ιδέες πίσω από την απόδειξή μου.	
20	Μπορώ να επιχειρηματολογήσω για την ορθότητα μιας απόδειξης στο μάθημα των Μαθηματικών.	

<u>ΜΕΡΟΣ 5ο</u>

Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέξτε την απάντηση που δείχνει πόσο καλά σας περιγράφει:

1: Διαφωνώ πολύ 2: Διαφωνώ **3: Ούτε διαφωνώ, Ούτε συμφωνώ** ***4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώ πολύ***

Τονίζουμε ότι δεν υπάρχουν σωστές και λάθος απαντήσεις.

		1: Διαφωνώ πολύ 2: Διαφωνώ 3: Ούτε διαφωνώ, Ούτε συμφωνώ 4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώπολύ
1	Μια απόδειξη στα μαθηματικά επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	1 2 3 4 5
2	Αν αποδειχθεί ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά, μπορώ να είμαι βέβαιος/βέβαια ότι είναι αληθές.	1 2 3 4 5
3	Παραδείγματα που εξηγούν το συμπέρασμα δε με βοηθούν πάντοτε να καταλάβω γιατί είναι αληθές.	1 2 3 4 5
4	Η απόδειξη είναι απαραίτητη στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
5	Δε βλέπω το νόημα του να κάνω αποδείξεις, αφού όλα τα συμπεράσματα στο μάθημα έχουν ήδη αποδειχθεί χωρίς αμφιβολία από διάσημους μαθηματικούς.	1 2 3 4 5
6	Μόνο οι καλοί/ες μαθητές/μαθήτριες πρέπει να ασχολούνται με τις αποδείξεις.	1 2 3 4 5
7	Μου αρέσει να αποδεικνύω θεωρήματα και προτάσεις στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
8	Η απόδειξη ενός θεωρήματος με βοηθά να καταλάβω γιατί το θεώρημα είναι αληθές.	1 2 3 4 5
9	Η ανάγνωση της απόδειξης μιας πρότασης σε ένα βιβλίο με βοηθά να καταλάβω γιατί η πρόταση είναι αληθής.	1 2 3 4 5
10	Διαφορετικές αποδείξεις ενός θεωρήματος με βοηθούν να το καταλάβω καλύτερα.	1 2 3 4 5
11	Μια απόδειξη στα μαθηματικά βασίζεται σε άλλα μαθηματικά συμπεράσματα.	1 2 3 4 5

		1: Διαφωνώ πολύ 2: Διαφωνώ 3: Ούτε διαφωνώ, Ούτε συμφωνώ 4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώπολύ
12	Η απόδειξη δείχνει το πώς συνδέονται τα πάντα στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
13	Η απόδειξη βοηθά να δούμε ότι προφανή συμπεράσματα δεν είναι αναγκαστικά/σίγουρα αληθή πριν αποδειχθούν.	1 2 3 4 5
14	Οι αποδείξεις δείχνουν την ομορφιά της επιστήμης των μαθηματικών.	1 2 3 4 5
15	Δε μπορούν να τα καταφέρουν όλοι οι μαθητές/μαθήτριες με την απόδειξη, παρά μόνο αυτοί που είναι καλοί/ες στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
16	Η απόδειξη είναι μια δομή αιτιολόγησης, όπου τα διάφορα βήματα βασίζονται σε λογική, σε γνωστά θεωρήματα/προτάσεις και γνωστούς ορισμούς.	1 2 3 4 5
17	Δε μπορώ να πιστέψω τις προτάσεις χωρίς απόδειξη.	1 2 3 4 5
18	Η απόδειξη είναι μια ακολουθία λογικών προτάσεων που συνεπάγονται η μία την άλλη, μια λογική παραγωγή συμπερασμάτων.	1 2 3 4 5
19	Η απόδειξη ενισχύει τη λογική σκέψη.	1 2 3 4 5
20	Η απόδειξη μερικές φορές αποκαλύπτει την ανακρίβεια μιας μαθηματικής πρότασης που φαίνεται σωστή .	1 2 3 4 5
21	Η απόδειξη είναι φτιαγμένη για να πείσουμε κάποιον για τους ισχυρισμούς μας.	1 2 3 4 5
22	Η απόδειξη μπορεί να μας οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
23	Νομίζω ότι δεν είναι χρήσιμο να κάνουμε αποδείξεις, διότι με μπερδεύει.	1 2 3 4 5
24	Οι αποδείξεις δείχνουν από που προέρχονται οι μαθηματικές σχέσεις.	1 2 3 4 5
25	Οι αποδείξεις απαντούν στο γιατί ισχύουν θεωρήματα και προτάσεις χωρίς καμία αμφιβολία.	1 2 3 4 5
26	Οι αποδείξεις εξηγούν μια μαθηματική έκφραση/σχέση με τη βοήθεια της γνώσης που έχει ήδη αποκτηθεί.	1 2 3 4 5
27	Με τις αποδείξεις τα καταφέρνουν μόνο οι μαθητές/μαθήτριες που έχουν κλίση στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
28	Αν ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά είναι προφανές, τότε δεν έχει νόημα να το αποδείξουμε.	1 2 3 4 5
29	Η απόδειξη είναι η αιτιολόγηση που δείχνει την εγκυρότητα ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	1 2 3 4 5

<u>ΜΕΡΟΣ 6ο</u>

Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέξτε την απάντηση που δείχνει πόσο καλά σας περιγράφει:

1: Πολύ κάτω από μέτριος/α 2: Κάτω από μέτριος/α 3: Μέτριος/α 4: Πάνω από μέτριος/α 5: Πολύ πάνω από μέτριος/α

Κατά τη γνώμη σου,	**1: Πολύ κάτω από μέτριος/α 2: Κάτω από μέτριος/α 3: Μέτριος/α 4: Πάνω από μέτριος/α 5: Πολύ πάνω από μέτριος/α**
πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύεις ότι είσαι;	1 2 3 4 5
πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύουν οι φίλοι και οι φίλες σου ότι είσαι;	1 2 3 4 5
πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικάπιστεύουν οι καθηγητές και οι καθηγήτριες των Μαθηματικών ότι είσαι;	1 2 3 4 5

Και δύο τελευταίες ερωτήσεις!

ΦΥΛΟ: Αγόρι ….. Κορίτσι …..

ΗΛΙΚΙΑ: ….

Ευχαριστούμε για το χρόνο σου!

Μάντζιου Βασιλική

ΜΕΡΟΣ 7ο

Σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών δίνεται στους μαθητές και στις μαθήτριες η άσκηση: Να αποδείξετε τον ισχυρισμό ότι: για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η σχέση ότι

$$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι απαντήσεις 6 μαθητών. Για την κάθε απάντηση να συμπληρώσετε τον Πίνακα.

Απάντηση 1:	**Ερώτηση 1**	**Ερώτηση 2**	**Ερώτηση 3**	**Ερώτηση 4**		**Ερώτηση 5**	**Ερώτηση 6**	**Ερώτηση 7**
Έστω ότι έχω δύο θετικούς αριθμούς α, β με τον ένα μεγαλύτερο από τον άλλο, δηλαδή $\alpha > \beta$. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ιδιότητα που έχει το σχολικό βιβλίο: Αν τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί και $\alpha_1 > \beta_1$ και $\alpha_2 > \beta_2$ και …… $\alpha_\nu > \beta_\nu$ Τότε θα ισχύει $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu$ Οπότε σε αυτή την ιδιότητα για $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha > 0$ και για $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu = \beta > 0$ θα προκύπτει ότι: $\alpha^\nu > \beta^\nu$. Άρα η πρόταση αποδείχθηκε.	Αν κρίνεις την Απάντηση 1 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου;	Ποιο από τα παρακάτω νομίζεις ότι χαρακτηρίζουν την Απάντηση 1;	Κύκλωσε την απάντηση που σε εκφράζει για την κάθε αιτιολόγηση	Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 1 (στην Ερώτηση 1)	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις τώρα;	Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/ καθηγήτρια στην Απάντηση 1 (από 0 έως 20);
	1: Καθόλου πειστική 2: Σχεδόν καθόλου πειστική 3: Λίγο πειστική 4: Μέτρια πειστική 5: Πολύ πειστική 6: Πάρα πολύ πειστική 7: Απόλυτα πειστική	1: Καθόλου 2: Σχεδόν καθόλου 3: Λίγο 4: Μέτρια 5: Πολύ 6: Πάρα πολύ 7: Απόλυτα	(κύκλωσε όποιο συναίσθημα νιώθεις)		Συμφωνώ Διαφωνώ Δεν Γνωρίζω	1: Πολύ λιγότερο σίγουρος/η 2:Λιγότερο σίγουρος/η 3: Το ίδιο 4: Περισσότερο σίγουρος/η 5: Πολύ περισσότερο σίγουρος/η		
	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	*Είναι λάθος*	Σ Δ ΔΓ	1 2 3 4 5	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	__ / 20
				Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Σ Δ ΔΓ			
				Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Σ Δ ΔΓ			
				Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Σ Δ ΔΓ			
				Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Σ Δ ΔΓ			

Απάντηση 2:	**Ερώτηση 1**	**Ερώτηση 2**	**Ερώτηση 3**	**Ερώτηση 4**		**Ερώτηση 5**	**Ερώτηση 6**	**Ερώτηση 7**
Δοκίμασα 5 ζεύγη θετικών αριθμών που ο ένας είναι μεγαλύτερος από τον άλλο και τους ύψωσα σε τρεις θετικούς ακεραίους: 4 και 3, 6 και 5, 8 και 7, 10 και 9, 12 και 11. Για αυτά τα ζεύγη έχω για εκθέτη 2: $4 > 3$ με $4^2=16$ και $3^2=9$ άρα $4^2>3^2$ $6 > 5$ με $6^2=36$ και $5^2=25$ άρα $6^2>5^2$ $8 > 7$ με $8^2=64$ και $7^2=49$ άρα $8^2>7^2$ $10 > 9$ με $10^2=100$ και $9^2=81$ άρα $10^2>9^2$ $12 > 11$ με $12^2=144$ και $11^2=121$ άρα $12^2>11^2$ Για αυτά τα ζεύγη έχω για εκθέτη 3: $4 > 3$ με $4^3=64$ και $3^3=27$ άρα $4^3>3^3$ $6 > 5$ με $6^3=216$ και $5^3=125$ άρα $6^3>5^3$ $8 > 7$ με $8^3=512$ και $7^3=343$ άρα $8^3>7^3$ $10 > 9$ με $10^3=1000$ και $9^3=729$ άρα $10^3>9^3$ $12 > 11$ με $12^3=1728$ και $11^3=1331$ άρα $12^3>11^3$ Για αυτά τα ζεύγη έχω για εκθέτη 4: $4 > 3$ με $4^4=256$ και $3^4=81$ άρα $4^4>3^4$ $6 > 5$ με $6^4=1296$ και $5^4=625$ άρα $6^4>5^4$ $8 > 7$ με $8^4=4096$ και $7^4=2401$ άρα $8^4>7^4$ $10 > 9$ με $10^4=10000$ και $9^4=6561$ άρα $10^4>9^4$ $12 > 11$ με $12^4=20736$ και $11^4=14641$ άρα $12^4>11^4$ Είδα ότι η πρόταση ισχύει για αυτά τα 5 ζεύγη θετικών αριθμών που υψώθηκαν σε τρεις θετικούς ακέραιους αριθμούς. Οπότε θα ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	Αν κρίνεις την Απάντηση 2 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου;	Ποιο από τα παρακάτω νομίζεις ότι χαρακτηρίζουν την Απάντηση 2;	Κύκλωσε την απάντηση που σε εκφράζει για την κάθε αιτιολόγηση	Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 2 (στην Ερώτηση 1)	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις τώρα;	Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/ καθηγήτρια στην Απάντηση 2 (από 0 έως 20);
	1: Καθόλου πειστική 2: Σχεδόν καθόλου πειστική 3: Λίγο πειστική 4: Μέτρια πειστική 5: Πολύ πειστική 6: Πάρα πολύ πειστική 7: Απόλυτα πειστική	1: Καθόλου 2: Σχεδόν καθόλου 3: Λίγο 4: Μέτρια 5: Πολύ 6: Πάρα πολύ 7: Απόλυτα	(κύκλωσε όποιο συναίσθημα νιώθεις)		Συμφωνώ Διαφωνώ Δεν Γνωρίζω	1: Πολύ λιγότερο σίγουρος/η 2:Λιγότερο σίγουρος/η 3: Το ίδιο 4: Περισσότερο σίγουρος/η 5: Πολύ περισσότερο σίγουρος/η		
	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	*Είναι λάθος*	Σ Δ ΔΓ	1 2 3 4 5	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	__ / 20
				Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Σ Δ ΔΓ			
				Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Σ Δ ΔΓ			
				Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Σ Δ ΔΓ			
				Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Σ Δ ΔΓ			

Απάντηση 3:	**Ερώτηση 1**	**Ερώτηση 2**	**Ερώτηση 3**	**Ερώτηση 4**		**Ερώτηση 5**	**Ερώτηση 6**	**Ερώτηση 7**
Έχω 2 θετικούς αριθμούς α, β με τον ένα μεγαλύτερο από τον άλλο. Τότε γνωρίζω από την Ιδιότητα του σχολικού βιβλίου ότι αν έχω ανισώσεις με θετικούς αριθμούς μπορώ να τις πολλαπλασιάσω κατά μέλη χωρίς να αλλάξει η φορά. Επομένως αν πολλαπλασιάσω την ίδια ανισώση α> β ,ν φορές τότε θα προκύψει το ζητούμενο, ότι $α^ν > β^ν$. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	Αν κρίνεις την Απάντηση 3 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου; (κύκλωσε όποιο συναίσθημα νιώθεις)	Ποιο από τα παρακάτω νομίζεις ότι χαρακτηρίζουν την Απάντηση 3;	Κύκλωσε την απάντηση που σε εκφράζει για την κάθε αιτιολόγηση	Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 3 (στην Ερώτηση 1)	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις τώρα;	Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/ καθηγήτρια στην Απάντηση 3 (από 0 έως 20);
	1: Καθόλου πειστική 2: Σχεδόν καθόλου πειστική 3: Λίγο πειστική 4: Μέτρια πειστική 5: Πολύ πειστική 6: Πάρα πολύ πειστική 7: Απόλυτα πειστική	1: Καθόλου 2: Σχεδόν καθόλου 3: Λίγο 4: Μέτρια 5: Πολύ 6: Πάρα πολύ 7: Απόλυτα			Συμφωνώ Διαφωνώ Δεν Γνωρίζω	1: Πολύ λιγότερο σίγουρος/η 2:Λιγότερο σίγουρος/η 3: Το ίδιο 4: Περισσότερο σίγουρος/η 5: Πολύ περισσότερο σίγουρος/η		
	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	*Είναι λάθος* *Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα* *Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις* *Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός* *Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η*	Σ Δ ΔΓ Σ Δ ΔΓ Σ Δ ΔΓ Σ Δ ΔΓ Σ Δ ΔΓ	1 2 3 4 5	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	__ / 20

Απάντηση 4:	**Ερώτηση 1**	**Ερώτηση 2**	**Ερώτηση 3**	**Ερώτηση 4**		**Ερώτηση 5**	**Ερώτηση 6**	**Ερώτηση 7**
Έχω 2 θετικούς αριθμούς τυχαίους 20 και 15 και τον επίσης τυχαίο θετικόακέραιο αριθμό 3. Ισχύει ότι: $20 > 15$ και $20^3> 15^3$ Αφού η πρόταση ισχύει για αυτό το τυχαίοζεύγος αριθμών, που δεν έχει κάτι το ιδιαίτερο, θα ισχύει και για κάθε ζεύγος θετικών αριθμών. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	Αν κρίνεις την Απάντηση 4 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου; (κύκλωσε όποιο συναίσθημα νιώθεις)	Ποιο από τα παρακάτω νομίζεις ότι χαρακτηρίζουν την Απάντηση 4;	Κύκλωσε την απάντηση που σε εκφράζει για την κάθε αιτιολόγηση	Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 4 (στην Ερώτηση 1)	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις τώρα;	Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/ καθηγητής/ καθηγήτρια στην Απάντηση 4 (από 0 έως 20);
	1: Καθόλου πειστική 2: Σχεδόν καθόλου πειστική 3: Λίγο πειστική 4: Μέτρια πειστική 5: Πολύ πειστική 6: Πάρα πολύ πειστική 7: Απόλυτα πειστική	1: Καθόλου 2: Σχεδόν καθόλου 3: Λίγο 4: Μέτρια 5: Πολύ 6: Πάρα πολύ 7: Απόλυτα			Συμφωνώ Διαφωνώ Δεν Γνωρίζω	1: Πολύ λιγότερο σίγουρος/η 2:Λιγότερο σίγουρος/η 3: Το ίδιο 4: Περισσότερο σίγουρος/η 5: Πολύ περισσότερο σίγουρος/η		
	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	*Είναι λάθος* *Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα* *Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις* *Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός* *Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η*	Σ Δ ΔΓ Σ Δ ΔΓ Σ Δ ΔΓ Σ Δ ΔΓ Σ Δ ΔΓ	1 2 3 4 5	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	__ / 20

Απάντηση 5:	**Ερώτηση 1**	**Ερώτηση 2**	**Ερώτηση 3**	**Ερώτηση 4**				**Ερώτηση 5**	**Ερώτηση 6**	**Ερώτηση 7**
Έχω 2 θετικούς αριθμούς α, β με τον ένα μεγαλύτερο από τον άλλο δηλαδή $α > β$. Αν υψώσουμε τον καθένα από αυτούς σε ένα θετικό ακέραιο ν, θα έχουμε τους $α^ν$, $β^ν$. Αφού $α > β$ θα προκύπτει προφανώς ότι: $α^ν > β^ν$ Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	Αν κρίνεις την Απάντηση 5 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου; (κύκλωσε όποιο συναίσθημα νιώθεις)	Ποιο από τα παρακάτω νομίζεις ότι χαρακτηρίζουν την Απάντηση 5;	Κύκλωσε την απάντηση που σε εκφράζει για την κάθε αιτιολόγηση			Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 5 (στην Ερώτηση 1)	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις τώρα;	Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 5 (από 0 έως 20);
	1: Καθόλου πειστική 2: Σχεδόν καθόλου πειστική 3: Λίγο πειστική 4: Μέτρια πειστική 5: Πολύ πειστική 6: Πάρα πολύ πειστική 7: Απόλυτα πειστική	1: Καθόλου 2: Σχεδόν καθόλου 3: Λίγο 4: Μέτρια 5: Πολύ 6: Πάρα πολύ 7: Απόλυτα			Συμφωνώ Διαφωνώ Δεν Γνωρίζω			1: Πολύ λιγότερο σίγουρος/η 2:Λιγότερο σίγουρος/η 3: Το ίδιο 4: Περισσότερο σίγουρος/η 5: Πολύ περισσότερο σίγουρος/η		
	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	*Είναι λάθος*	Σ	Δ	ΔΓ	1 2 3 4 5	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	__ / 20
				Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Σ	Δ	ΔΓ			
				Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Σ	Δ	ΔΓ			
				Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Σ	Δ	ΔΓ			
				Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Σ	Δ	ΔΓ			

Απάντηση 6:	**Ερώτηση 1**	**Ερώτηση 2**	**Ερώτηση 3**	**Ερώτηση 4**				**Ερώτηση 5**	**Ερώτηση 6**	**Ερώτηση 7**
Έστω ότι έχουμε 2 θετικούς αριθμούς α και β με τον ένα μεγαλύτερο από τον άλλο δηλαδή $α > β$. Έστω ότι έχουμε μια πλευρά με μήκος α: και μια πλευρά με μήκος β : Από την πλευρά με μήκος α, μπορούμε να κατασκευάσουμε το τετράγωνο: με εμβαδόν $α^2$ Και από την πλευρά με μήκος β μπορούμε να κατασκευάσουμε το τετράγωνο: με εμβαδόν $β^2$ Από τα σχήματα φαίνεται ότι $α^2>β^2$. Με τον ίδιο τρόπο θα ισχύει και ότι $α^ν> β^ν$. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	Αν κρίνεις την Απάντηση 6 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις για τις έως τώρα απαντήσεις σου; (κύκλωσε όποιο συναίσθημα νιώθεις)	Ποιο από τα παρακάτω νομίζεις ότι χαρακτηρίζουν την Απάντηση 6;	Κύκλωσε την απάντηση που σε εκφράζει για την κάθε αιτιολόγηση			Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 6 (στην Ερώτηση 1)	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις τώρα;	Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 6 (από 0 έως 20);
	1: Καθόλου πειστική 2: Σχεδόν καθόλου πειστική 3: Λίγο πειστική 4: Μέτρια πειστική 5: Πολύ πειστική 6: Πάρα πολύ πειστική 7: Απόλυτα πειστική	1: Καθόλου 2: Σχεδόν καθόλου 3: Λίγο 4: Μέτρια 5: Πολύ 6: Πάρα πολύ 7: Απόλυτα			Συμφωνώ Διαφωνώ Δεν Γνωρίζω			1: Πολύ λιγότερο σίγουρος/η 2:Λιγότερο σίγουρος/η 3: Το ίδιο 4: Περισσότερο σίγουρος/η 5: Πολύ περισσότερο σίγουρος/η		
	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	*Είναι λάθος*	Σ	Δ	ΔΓ	1 2 3 4 5	Φόβο Χαρά Λύπη Σύγχυση Μπλοκάρισμα Περιέργεια Ηρεμία Βαρεμάρα Αδιαφορία Ενδιαφέρον Ενθουσιασμός Άβολα Άνετα	__ / 20
				Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός πάντα	Σ	Δ	ΔΓ			
				Δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός σε συγκεκριμένες περιπτώσεις	Σ	Δ	ΔΓ			
				Δείχνει για ποιο λόγο ο ισχυρισμός είναι σωστός	Σ	Δ	ΔΓ			
				Είναι ένας εύκολος τρόπος για να εξηγήσεις τον ισχυρισμό σε κάποιον/α που δεν είναι σίγουρος/η	Σ	Δ	ΔΓ			

<u>ΜΕΡΟΣ 8ο</u>

Από τις προηγούμενες απαντήσεις ποια θα διάλεγες σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών;

	Ερώτηση 1	**Ερώτηση 2**	**Ερώτηση 3**	**Ερώτηση 4**
	Σημείωσε με ✓ την επιλογή σου.	Για ποιους λόγους διάλεξες αυτή την απάντηση; Εξήγησε την άποψή σου.	Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου επιλογή; 1: Πολύ λιγότερο σίγουρος/η 2:Λιγότερο σίγουρος/η 3: Το ίδιο 4: Περισσότερο σίγουρος/η 5: Πολύ περισσότερο σίγουρος/η	Ποια από τα παρακάτω συναισθήματα νιώθεις τώρα;
Απάντηση 1				Φόβο Χαρά
Απάντηση 2				Λύπη Σύγχυση
Απάντηση 3			1 2	Μπλοκάρισμα Περιέργεια
Απάντηση 4			3 4	Ηρεμία Βαρεμάρα
Απάντηση 5			5	Αδιαφορία Ενδιαφέρον
Απάντηση 6				Ενθουσιασμός
Καμία από τις 6				Άβολα Άνετα

Και δύο τελευταίες ερωτήσεις!

ΦΥΛΟ(σημείωσε με ✓) **: Αγόρι …..   Κορίτσι …..**

ΗΛΙΚΙΑ(σε έτη)**: ….**

Ευχαριστούμε για το χρόνο σου!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Kendall's tau_b		**πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύεις ότι είσαι;**	**πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύουν οι φίλοι και οι φίλες σου ότι είσαι;**	**πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικάπιστεύουν οι καθηγητές και οι καθηγήτριες των Μαθηματικών ότι είσαι;**
Αυτό-αποτελεσματικότητα στα Μαθηματικά	*τ*	.530**	.423**	.469**
	P	0,000	0,000	0,000
	N	55	55	55
Αυτό-αποτελεσματικότητα στην απόδειξη	*τ*	.545**	.431**	.466**
	P	0,000	0,000	0,000
	N	55	55	55
Στάσεις				
Ευχαρίστηση	*τ*	.484**	.405**	.455**
	P	0,000	0,000	0,000
	N	55	55	55
Αυτοπεποίθηση	*τ*	-.318**	-.221*	-.317**
	P	0,003	0,036	0,002
	N	55	55	55
Αξία	*τ*	.326**	.222*	.416**
	P	0,002	0,037	0,000
	N	55	55	55
Απόψεις				
Ζωή	*τ*	.250*	.307**	.422**
	P	0,019	0,004	0,000
	N	55	55	55
Μοντέλα/Αφηρημένο	*τ*	0,152	.248*	.263*
	P	0,166	0,023	0,015
	N	55	55	55
Αριθμοί/Στοιχεία	*τ*	0,034	0,007	-0,122
	P	0,751	0,945	0,247
	N	55	55	55

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Kendall's tau_b		**πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύεις ότι είσαι;**	**πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύουν οι φίλοι και οι φίλες σου ότι είσαι;**	**πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικάπιστεύουν οι καθηγητές και οι καθηγήτριες των Μαθηματικών ότι είσαι;**
Αν κρίνεις την Απάντηση 1 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	τ	.254*	0,195	0,075
	P	0,023	0,078	0,495
	N	55	55	55
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	τ	.334**	.397**	.253*
	P	0,003	0,000	0,024
	N	55	55	55
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 1 (στην Ερώτηση 1)	τ	0,102	0,052	0,034
	P	0,413	0,672	0,779
	N	53	53	53
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 2 (από 0 έως 20);	τ	.255*	.237*	.252*
	P	0,017	0,025	0,017
	N	55	55	55
Αν κρίνεις την Απάντηση 2 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	τ	.391**	.229*	0,096
	P	0,000	0,036	0,378
	N	55	55	55
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	τ	.281*	0,210	0,104
	P	0,012	0,057	0,342
	N	55	55	55
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 2 (στην Ερώτηση 2)	τ	-0,025	-0,023	-0,021
	P	0,846	0,857	0,867
	N	50	50	50
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 2 (από 0 έως 20);	τ	.396**	.256*	0,115
	P	0,000	0,019	0,287
	N	53	53	53
Αν κρίνεις την Απάντηση 3 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	τ	.322**	.229*	.219*
	P	0,004	0,037	0,045
	N	55	55	55
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	τ	.291**	.239*	.256*
	P	0,009	0,030	0,019
	N	55	55	55
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 3 (στην Ερώτηση 3)	τ	0,080	0,067	0,043
	P	0,518	0,584	0,724
	N	52	52	52
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 3 (από 0 έως 20);	τ	.358**	.331**	.350**
	P	0,001	0,002	0,001
	N	53	53	53

Kendall's tau_b		**πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύεις ότι είσαι;**	**πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικά πιστεύουν οι φίλοι και οι φίλες σου ότι είσαι;**	**πόσο καλός/ή μαθητής/μαθήτρια στα Μαθηματικάπιστεύουν οι καθηγητές και οι καθηγήτριες των Μαθηματικών ότι είσαι;**
Αν κρίνεις την Απάντηση 4 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	*τ*	0,119	0,047	0,058
	P	0,287	0,675	0,601
	N	54	54	54
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	*τ*	0,114	0,141	0,093
	P	0,309	0,208	0,401
	N	55	55	55
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 4 (στην Ερώτηση 4)	*τ*	-0,005	0,086	-0,016
	P	0,971	0,491	0,897
	N	51	51	51
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 4 (από 0 έως 20);	*τ*	0,200	0,174	0,147
	P	0,071	0,114	0,179
	N	51	51	51
Αν κρίνεις την Απάντηση 5 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	*τ*	0,167	0,100	0,090
	P	0,130	0,364	0,406
	N	55	55	55
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	*τ*	0,222	0,120	.229*
	P	0,051	0,287	0,041
	N	53	53	53
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 5 (στην Ερώτηση 5)	*τ*	0,090	0,086	0,065
	P	0,459	0,476	0,587
	N	53	53	53
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 5 (από 0 έως 20);	*τ*	0,170	0,091	0,123
	P	0,117	0,398	0,248
	N	54	54	54
Αν κρίνεις την Απάντηση 6 σχετικά με το πόσο σε πείθει, ποια είναι η κρίση σου;	*τ*	0,131	0,200	0,171
	P	0,236	0,068	0,115
	N	55	55	55
Πόσο σίγουρος/σίγουρη νιώθεις για αυτή σου την κρίση;	*τ*	0,212	0,077	0,074
	P	0,056	0,484	0,498
	N	55	55	55
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου κρίση για την Απάντηση 6 (στην Ερώτηση 6)	*τ*	.278*	0,204	0,237
	P	0,026	0,101	0,055
	N	52	52	52
Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο/η καθηγητής/καθηγήτρια στην Απάντηση 6 (από 0 έως 20);	*τ*	.230*	.277*	.240*
	P	0,034	0,010	0,025
	N	55	55	55
Τώρα που απάντησες και σε αυτή την ερώτηση, πόσο σίγουρος/η νιώθεις για την αρχική σου επιλογή;	*τ*	.305**	.360**	.320**
	P	0,009	0,002	0,006
	N	55	55	55

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).