



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Τομέας Αστρονομίας, Αστροφυσικής και Μηχανικής

Διπλωματική Εργασία

Ο ρυθμός διαστολής του Σύμπαντος σε κοσμολογικά μοντέλα σκοτεινής ενέργειας

Συγγραφή:

Φώτιος Αναγνωστόπουλος

Επιβλέπων:

Δρ. Σπυρίδων Βασιλάκος

9 Μαρτίου 2017



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Τομέας Αστρονομίας, Αστροφυσικής και Μηχανικής

Διπλωματική Εργασία

Ο ρυθμός διαστολής του Σύμπαντος σε κοσμολογικά μοντέλα σκοτεινής ενέργειας

Τριμελής επιτροπή

Δρ. Σπυρίδων Βασιλάκος
Δρ. Αποστολάτος Θεοχάρης
Δρ. Καζαντζίδης Στυλιανός

9 Μαρτίου 2017

Περίληψη

Η καθιερωμένη κοσμολογία έχει να κάνει με ένα διαστελλόμενο Σύμπαν, στο οποίο κυριαρχεί ενεργειακά η σκοτεινή ενέργεια και η οποία αποτελεί το αίτιο της επιταχυνόμενης διαστολής. Λόγω του ότι η φύση της σκοτεινής ενέργειας είναι άγνωστη, αναπτύχθηκαν πληθώρα κοσμολογικών μοντέλων, πολύ διαφορετικά ως προς τη φυσική τους, έχοντας ωστόσο εκφυλισμό ως προς τις προβλέψεις τους. Η άρση του παραπάνω εκφυλισμού αποτελεί σημαντικό πρόβλημα της σύγχρονης κοσμολογίας. Ταυτόχρονα, είναι αναγκαίο να περιοριστούν επαρκώς οι ελεύθερες παράμετροι του κάθε μοντέλου. Σε αυτή τη κατεύθυνση χρησιμοποιούνται εξωγαλαξιακά αστροφυσικά φαινόμενα ως κοσμικοί ιχνηλάτες. Το βασικό μειονέκτημα των περισσότερων κοσμικών ιχνηλατών είναι το γεγονός ότι τα αποτελέσματα της ανάλυσής τους εξαρτώνται από την μορφή της διαστολής Hubble, ήτοι το κοσμολογικό μοντέλο. Παρουσιάζουμε την χρήση απευθείας μετρήσεων της διαστολής Hubble, ανεξάρτητων από υποθέσεις για το κοσμολογικό μοντέλο με τελικό σκοπό τον περιορισμό των κοσμολογικών παραμέτρων. Επίσης, γίνεται συζευγμένη ανάλυση των προηγούμενων δεδομένων με δεδομένα από SN Ia. Η εργασία μας διαφοροποιείται από αντίστοιχες της βιβλιογραφίας στο ότι η ανάλυση που πραγματοποιήθηκε είναι ανεξάρτητη της τιμής της σταθεράς του Hubble. Τα αποτελέσματά μας είναι σε καλή συμφωνία με τα αντίστοιχα από το PLANCK.

Ευχαριστίες

Μετά απο αρκετές δυσκολίες ολοκλήρωσα την διπλωματική μου εργασία, κομμάτι των τυπικών υποχρεώσεων για τη λήψη του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης Αστροφυσική, Αστρονομία, Μηχανική του Τμήματος Φυσικής του ΕΚΠΑ. Αρχικά και πέρα απο κάθε τυπικότητα θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα μου, Δρ Σπύρο Βασιλάκο. Χωρίς αυτόν δεν θα ολοκληρώνοταν η παρούσα εργασία. Θέλω να ευχαριστήσω επίσης το φίλο και συμφοιτητή Μιχάλη Παπαχρήστου που με έφερε σε επαφή με τη γλώσσα προγραμματισμού Python.

Μια και πηγαίνει ο δρόμος μας προς το νεκροταφείο
Δίχως αγάπη και κρασί ειν' η ζωή φορτίο.
Φιλόσοφε, πες μας λοιπόν, τι σκέπτεσαι για τούτα;
Το κέρδος ποιο να ξέρουμε του κόσμου το βιβλίο;
Για μένα που των μυστικών ανοιγοκλείει η θύρα
Όμοια και λύπη και χαρά μαζί τα δυο τα επήρα
Μια και στον κόσμο αυτόν εδώ όλα ένα τέλος θάχουν,
Πάμε παιδιά στο καπηλειό να φέρουμε μια γύρα
Omar Khayyam, (μτφ Πάυλος Γνευτός, εκδ. Ερατώ, 1997)

Περιεχόμενα

Περίληψη

Ευχαριστίες

1	Εισαγωγή	1
1.1	Βασικές Έννοιες	3
1.1.1	Το καθιερωμένο κοσμολογικό μοντέλο	4
1.1.2	Εξισώσεις <i>Friedmann</i>	5
1.1.3	Σύσταση του Σύμπαντος	7
1.1.4	Κοσμικές αποστάσεις	8
1.2	Κοσμολογικά Μοντέλα	9
1.2.1	Λ CDM	9
1.2.2	ϕ CDM	11
2	Μεθοδολογία	12
2.1	Ανάλυση Πιθανοφάνειας	12
2.1.1	Στοιχεία Πιθανοθεωρίας	12
2.2	Περιθωριοποίηση του H_0 στη συνάρτηση Hubble	12
2.3	Ανάλυση πιθανοφάνειας του distance modulus	15
2.4	Συζευγμένη ανάλυση πιθανοφάνειας δεδομένων διαφόρων κοσμολογικών δεικτών	15
3	Αποτελέσματα	17
3.1	Δεδομένα $H(z)$	17
3.1.1	Παρουσίαση και Συζήτηση	17
3.1.2	Έλεγχος του κώδικα	19
3.1.3	Ανάλυση πιθανοφάνειας με περιθωριοποιημένη την σταθερά του Hubble .	22
3.2	Δεδομένα απο <i>SN Ia</i>	23
3.2.1	Ανάλυση πιθανοφάνειας ανεξάρτητη της σταθεράς του Hubble	24
3.3	Συζευγμένη ανάλυση δεδομένων απο <i>SN Ia</i> και $H(z)$	27
3.4	Συμπεράσματα και Προεκτάσεις	33

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Αντικείμενο της κοσμολογίας είναι η μελέτη της ύλης ως ολότητας στο χωρόχρονο. Θεωρώντας ότι ένα τέτοιο εγχείρημα είναι εφικτό^{*}, η κοσμολογία στηρίζεται στους φυσικούς νόμους, στην παρατήρηση καθώς και σε επιπλέον υποθέσεις που βασίζονται σε φιλοσοφικές αρχές.

Λόγω του θεμελιώδους χαρακτήρα του αντικειμένου, οι πρώτες κοσμογονίες, συναντώνται σε μυθολογικές αναφορές ήδη από την πρώιμη αρχαιότητα. Επιγραμματικά θα αναφέρουμε μερικές από αυτές. Για τους Βίκινγκς, ο Κόσμος φτιάχτηκε από τον Odin με πρώτη ύλη το νεκρό σώμα του γίγαντα Ymir. Σύμφωνα με τους Πέρσες, το Σύμπαν εκτεινόταν χωρικά και χρονικά χωρίς τέλος, μέχρις ότου η σύγκρουση του Ahura Mazda, θεού του Καλού με τον αδερφό του, τον Ahriman, οδήγησε στη δημιουργία πεπερασμένου, γραμμικά μεταβαλλόμενου χρόνου σε κύκλους των 3000 ετών και πεπερασμένου χώρου. Για τους αρχαίους Έλληνες, στην Θεογονία του Ησίοδου προϋπάρχουν τρία στοιχεία, το Χάος, η Γαία και ο Έρως. Αυτές οι τρεις μορφές δεν έχουν γεννηθεί η μία από την άλλη, καθώς είναι αυτογέννητες κι απέχουν μόνο χρονικά στη σειρά της γέννησής τους. Ο Έρως δε γεννά απογόνους, αλλά ενώνει και ωθεί τις άλλες δυνάμεις σε δημιουργία[†].

Οι πρώτες κοσμολογίες που προσπάθησαν να ξεφύγουν από μεταφυσικά στοιχεία εμφανίστηκαν στην αρχαία Ελλάδα. Είναι ενδιαφέρουσα η θεώρηση του Εμπεδοκλή η οποία περιλαμβάνει τέσσερα στοιχεία, το πυρ, τον αήρ, το ύδωρ και τη γη και δυο "δυνάμεις", το νείκος και τη φιλία. Με σύγχρονους όρους θα λέγαμε ότι η πρώτη είναι απωστική και η δεύτερη ελκτική, βέβαια αυτό αποτελεί απλά έναν αναχρονισμό. Δεν γίνεται να παρουσιαστούν εδώ όλες οι αρχαιοελληνικές κοσμολογίες, ωστόσο δεν μπορεί να αγνοηθεί αυτή του Αριστοτέλη. Το Σύμπαν κατά τον Αριστοτέλη είναι αιώνιο και άφθαρτο, δε δημιουργήθηκε και θα υπάρχει για πάντα. Χαρακτηριστικό του είναι η κίνηση, όπου ως τέτοια εννοείται η μεταβολή. Αν μας επιτραπεί πάλι ένας αναχρονισμός, θα αναφερόμασταν στο γίνεσθαι. Αφού η κίνηση εμπεριέχει το χρόνο και η κίνηση "υπάρχει" από πάντα, ο χρόνος είναι αιώνιος.

Η ιστορία της σύγχρονης κοσμολογίας ξεκινάει ουσιαστικά με την ανάπτυξη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ), το 1915. Λίγο αργότερα, ο Einstein προσπαθεί να εφαρμόσει τη θεωρία του σε ομογενές και ισότροπο Σύμπαν, εισάγοντας έναν επιπλέον όρο στις εξισώσεις του ώστε να εξηγήσει την τότε θεωρούμενη στατικότητα του σύμπαντος. Ακολούθως, η ανακάλυψη του νόμου του Hubble τη δεκαετία του '30 και της μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου (Cosmic Microwave Background, CMB), το 1964 από τους Wilson και Penzias, θεμελίωσαν στην θεωρία του διαστελλόμενου σύμπαντος η οποία επικρατήσε απέναντι στην θεωρία της σταθερής κατάστασης. Ένα ερώτημα που προκύπτει αφορά την ταχύτητα της διαστολής. Το 1998 δυο ανεξάρτητες ομάδες,

^{*} Προκειται για μια μή τετριμμένη παραδοχή από φιλοσοφικής πλευράς. Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι χρειάζεται να δεχτούμε αρχικά το ότι *υπάρχει* πραγματικότητα ανεξάρτητα από εμάς και κατά δεύτερον, ότι αυτή η πραγματικότητα είναι γνώσιμη. Η τελευταία παραδοχή αναφέρεται ως *ανθρωπική αρχή*.

[†] Προφανώς η εις βάθος διερεύνηση των πρώτων κοσμολογικών θεωρήσεων ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας.

οι Supernova Cosmology Project, [13], και High-Z Supernova Search Team, [15], χρησιμοποιώντας ως ιχνηλάτες κοσμικών αποστάσεων υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το Σύμπαν διαστέλλεται επιταχυνόμενα. Προκειμένου να εξηγηθεί η παρατήρηση αυτή εισάγουμε την έννοια της σκοτεινής ενέργειας (Dark Energy) ως το αίτιο της αύξησης του ρυθμού διαστολής. Το τελευταίο έφερε πάλι στο προσκήνιο την κοσμολογική σταθερά του Einstein, όπου όμως δεν γίνεται κάποια άλλη υπόθεση για τη φύση της σκοτεινής ενέργειας πέρα από το ότι λειτουργεί ως απωστική δύναμη εναντίον της βαρύτητας (παρουσιάζει δηλαδή αρνητική πίεση). Αυτό μαζί με το γεγονός ότι δεν έχει παρατηρηθεί έως σήμερα σε κάποιο πείραμα επιταχυντή σωματιδίων οδήγησε σε πληθώρα μοντέλων τα οποία εμφανίζουν ισχυρό εκφυλισμό ως προς τις προβλέψεις τους. Ένα ακόμα πρόβλημα είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις μια κοσμολογική θεωρία μπορεί να ελεγχθεί μόνο έμμεσα από τις παρατηρήσεις κάτι το οποίο εισάγει σημαντικές αβεβαιότητες.

Στις αρχές του 21ου αιώνα, παρατηρήθηκε για πρώτη φορά αστροφυσική ροή νετρίνων από το κέντρο του Γαλαξία μας, στο A του Τοξότη, όπου βρίσκεται μια υπερμαζική μελανή οπή από το παρητηρητήριο νετρίνων IceCube. Παράλληλα, από την ομάδα της συνεργασίας LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) παρατηρήθηκε για πρώτη φορά βαρυτικό κύμα το οποίο προήλθε από την συνένωση δύο μελανών οπών. Οι δυο τελευταίες παρατηρήσεις δεν μπορούν παρα να καταδεικνύουν τις μελλοντικές δυνατότητες για αμιγώς κοσμολογικές παρατηρήσεις. Παράλληλα, τα διαθέσιμα δεδομένα αυξάνονται με ραγδαίους ρυθμούς. Ελάχιστες μέρες πριν γραφτούν αυτές οι γραμμές ξεκίνησε το πρόγραμμα Wide Field Infrared Survey Telescope (WFIRST)[‡] Φαίνεται λοιπόν ότι υπάρχει μια ζωτικότητα η οποία εκφράζεται και με τη δημοσίευση εργασιών οι οποίες πολλές φορές αμφισβητούν την παρούσα κοσμολογία, όπως επι παραδείγματι η [12], όπου αμφισβητείται η επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος με χρήση στατιστικών επιχειρημάτων. Στο παραπάνω πλαίσιο είναι πολύ σημαντικό να ελεγχθούν τα υπάρχοντα κοσμολογικά μοντέλα με βάση τις υπάρχουσες παρατηρήσεις, περιορίζοντας όσο το δυνατόν τις ελεύθερες παραμέτρους του κάθε μοντέλου, τόσο για τον έλεγχο της ορθότητας τους όσο και για να υπάρξει μια κατεύθυνση στο σχεδιασμό νέων παρατηρήσεων.

Από παρατηρησιακής πλευράς σημαντικό εργαλείο σε αυτές τις κατευθύνσεις είναι οι λεγόμενοι κοσμολογικοί ιχνηλάτες (cosmological probes). Οι κοσμολογικοί ιχνηλάτες διακρίνονται περαιτέρω σε *γεωμετρικούς* και *δυναμικούς*. Οι γεωμετρικοί κοσμολογικοί ιχνηλάτες είναι ανεξάρτητοι της βαρυτικής θεωρίας, εξαρτώνται όμως από την μετρική του χωρόχρονου. Ουσιαστικά χρησιμοποιούν εξωγαλαξιακά αστροφυσικά αντικείμενα των οποίων η φωτεινότητα είναι είτε a priori γνωστή είτε μπορεί να εκτιμηθεί με χρήση μιας παρατηρησιακής παραμέτρου ανεξάρτητα από την απόσταση. Οι υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia αποτελούν παράδειγμα γεωμετρικών κοσμολογικών ιχνηλατών. Έτσι, η κοσμική ιστορία του σύμπαντος ιχνηλατείται με βάση την απόσταση φωτεινότητας, d_L . Οι δυναμικοί ιχνηλάτες χρησιμοποιούν το ρυθμό αύξησης των κοσμολογικών διαταραχών και άρα δεν είναι ανεξάρτητοι της θεωρίας βαρύτητας. Προκειμένου να ελεγχθούν τα συστηματικά σφάλματα είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθούν όσο το δυνατόν περισσότερα είδη αστροφυσικών φαινομένων ως κοσμολογικοί ιχνηλάτες. Μεχρι σήμερα, τέτοιου είδους παρατηρήσεις παρέχουν πληροφορίες για την συνάρτηση Hubble στις ερυθρομετατοπίσεις έως και $z \sim 1.5$ (πχ SN Ia), ή στην ερυθρομετατόπιση της επανασύνδεσης ($z \sim 1100$), (CMB).

Μπορούμε λοιπόν να δούμε ότι η συνάρτηση Hubble στο εύρος των ερυθρομετατοπίσεων $1.5 < z < 1100$ δεν μπορεί να διερευνηθεί άμεσα. Όπως θα δούμε και παρακάτω, παρατηρήσεις της συνάρτησης Hubble στο διάστημα $1.5 < z < 3.5$ είναι ιδιαίτερα σημαντικές ώστε να αρθεί ο εκφυλισμός των διάφορων κοσμολογικών μοντέλων. Πρόσφατα οι παρατηρησιακές τεχνικές των

[‡]Το πρόγραμμα αυτό αφορά την εκτόξευση ενός διαστημοπλοίου με στόχο, μεταξύ άλλων, την παρατήρηση υπερκαινοφανών αστερών τύπου Ia. Το WFIRST θα φέρει τηλεσκόπιο συστήματος αναστιγματικού φακού 3 κατόπτρων, με διάμετρο κυρίου κατόπτρου 2.4 m. Η εκτόξευση προβλέπεται να γίνει στα μέσα της δεκαετίας του 2020, <http://newscenter.lbl.gov/2016/02/18/berkeley-lab-role-wfirst/>.

κοσμικών χρονομέτρων και των ΒΑΟ έφτασαν σε ένα επίπεδο πληρότητας τέτοιο ώστε να αποκτηθούν μετρήσεις του ρυθμού της κοσμολογικής διαστολής (συνάρτησης Hubble) σε ερυθρομετατόψεις μεγαλύτερες του 2. Στη βιβλιογραφία υπάρχει πληθώρα εργασιών όπου χρησιμοποιούνται μετρήσεις $H(z)$ για τον περιορισμό των κοσμολογικών παραμέτρων (πχ [10],[11],[5]), και συνήθως δίνουν περιορισμούς συγκρίσιμους ή/και καλύτερους από αυτές των υπερκαινοφανών, αλλά χειρότερους από αυτούς του CMB. Το ισχύρο πλεονέκτημα της μεθόδου διαφορικής ηλικίας είναι ότι τα αποτελέσματα της δεν εξαρτώνται από κάποια αρχική υπόθεση για το κοσμολογικό μοντέλο.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εφαρμογή μεθόδων στατιστικής συμπερασματολογίας σε ένα σύνολο παρατηρησιακών δεδομένων από άμεσες μετρήσεις της συνάρτησης του Hubble και υπερκαινοφανείς αστέρες για τον περιορισμό των κοσμολογικών παραμέτρων. Η βασική διαφοροποίηση την παρούσας εργασίας από αντίστοιχες έρευνες στη βιβλιογραφία είναι η ανεξαρτησία της ανάλυσης μας από την σταθερά του Hubble.

1.1 Βασικές Έννοιες

Μια πολύ σημαντική κοσμολογική παρατήρηση είναι το γεγονός ότι οι γαλαξίες απομακρύνονται από τον παρατηρητή με ταχύτητες ανάλογες της απόστασης του, κάτι που αναφέρεται ως νόμος του Hubble. Ο Hubble, βασιζόμενος και σε παλιότερες παρατηρήσεις του Slipher, χρησιμοποιώντας φασματοσκοπικές τεχνικές παρατήρησε στις αρχές της δεκαετίας του '30 ότι τα φάσματα της πλειοψηφίας των γαλαξιών παρουσιάζουν μετάθεση προς το ερυθρό, κάτι που σημαίνει ότι απομακρύνονται από εμάς. Λόγω της ομοιογένειας και της ισοτροπίας του Σύμπαντος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε σημείο απομακρύνεται από όλα τα υπόλοιπα. Όμως, οι χωρικές συντεταγμένες των γαλαξιών δεν μεταβάλλονται και συνεπώς ο ίδιος ο χώρος διαστέλλεται και συμπαρασέρνει τους γαλαξίες. Μια όμορφη αναλογία είναι αυτή ενός σταφιδόψωμου το οποίο ψήνεται και "φουσκώνει", με αποτέλεσμα η κάθε σταφίδα να απομακρύνεται από τις υπόλοιπες.

Για την ποσοτικοποίηση της μετάθεσης των φασματικών γραμμών ενός κινούμενου γαλαξία ως προς ακίνητο παρατηρητή ορίζουμε την ποσότητα z :

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_r}{\lambda_r}$$

όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος της φασματικής γραμμής του γαλαξία που παρατηρούμε και λ_r είναι το μήκος κύματος σε ηρεμία. Αν $z < 0$ έχουμε κυανομετατόπιση, ενώ αν $z > 0$ έχουμε ερυθρομετατόπιση. Ο Hubble απέδειξε ότι η ταχύτητα απομακρυνσης των γαλαξιών είναι ανάλογη της απόστασης.

$$v = H_0 d \quad (1.1.1)$$

όπου H_0 είναι η σταθερά του Hubble v είναι η ταχύτητα του γαλαξία και d η απόσταση του από εμάς. Παρατηρήθηκε επίσης ότι η τελευταία σχέση δεν εξαρτάται από την διεύθυνση παρατήρησης κάτι το οποίο ενισχύει την κοσμολογική αρχή.

Η άλλη εξίσου σημαντική κοσμολογική παρατήρηση αναφέρεται ως μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου (Cosmic Microwave Background) και είναι το γεγονός ότι η Γή δέχεται σχεδόν ισότροπη ροή ακτινοβολίας που αντιστοιχεί σε μέλαν σώμα θερμοκρασίας 2.73 K. Θεωρείται ότι πρόκειται για απομεινάρια της Μεγάλης Έκρηξης από την εποχή όπου έγινε η επανασύνδεση ηλεκτρονίων-πρωτονίων προς σχηματισμό ουδέτερων ατόμων υδρογόνου. Η απουσία ελεύθερων ηλεκτρονίων ουσιαστικά οδήγησε σε διαφάνεια του σύμπαντος, αφού πλέον δεν συνεβαίναν σκεδάσεις Thomson.

1.1.1 Το καθιερωμένο κοσμολογικό μοντέλο

Το καθιερωμένο κοσμολογικό μοντέλο ή μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης (Big Bang)[§] ανάγει τις απαρχές του στον George Lemaitre, [8], ο οποίος το 1931 πρότεινε την υπόθεση του πρωταρχικού ατόμου, ότι δηλαδή το Σύμπαν δημιουργήθηκε μετά απο την έκρηξη ενός πρωταρχικού ατόμου, αρχικά αποδίδοντας (εσφαλμένα) την ύπαρξη της κοσμικής ακτινοβολίας σε αυτήν την πρωταρχική έκρηξη. Μετά την ανακάλυψη της μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου και την ποσοτική της μελέτη (δεκαετία '90), το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης επικράτησε απέναντι στο μοντέλο σταθερής κατάστασης. Σήμερα, η βασική ιδέα του καθιερωμένου μοντέλου παραμένει αυτή του Lemaitre. Στο πλαίσιο της ΓΘΣ, η οποιαδήποτε συζήτηση γύρω απο το πρωταρχικό σημείο άπειρης πυκνότητας και θερμοκρασίας αποφεύγεται, αναμένοντας μια πλήρη θεωρία κβαντικής βαρύτητας. Ταυτόχρονα, ζητήματα φιλοσοφικής φύσης αγνοούνται. Ακολούθως, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την θεωρούμενη θερμική ιστορία.

1. περίπου 10^{-43} s Κοντά στην κλίμακα του Planck, βρισκόμαστε στα όρια της ισχύος της Κβαντικής Βαρύτητας. Παρόλα αυτά σε ενέργειες λίγο μικρότερες απο αυτές, ο κλασσικός χωρόχρονος έχει νόημα και θεωρείται ότι το Σύμπαν βρίσκεται σε φάση αυτο-διεύρυνσης.
2. περίπου $(10^{-43} - 10^{-14})$ s ή $(10 \text{ TeV} - 10^{19} \text{ GeV})$ Αυτή η ενεργειακή κλίμακα δεν προβλέπεται να πλησιαστεί απο τους επιταχυντές σωματιδίων στο κοντινο μέλλον. Στο πλαίσιο των επεκτάσεων του Καθιερωμένου προτύπου των Στοιχειώδων Σωματιδίων προβλέπεται παραβίαση της αρχής διατήρησης του βαρυονικού και του λεπτονικού αριθμού. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ΓΘΣ για να περιγράψουμε τη δυναμική του Σύμπαντος, ωστόσο η κοσμική σύσταση παραμένει άγνωστη, καθώς μπορεί να υπάρχουν πολύ περισσότερα είδη ατόμων απο αυτά που προβλέπει το Καθιερωμένο προτυπο των Στοιχειώδων Σωματιδίων.
3. περίπου $10^{-14} - 10^{-10}$ s ή $100 \text{ GeV} - 10 \text{ TeV}$. Σε αυτο το ενεργειακό εύρος μπορούν να φτάσουν οι επιταχυντές και φαίνεται ότι ισχύει το καθιερωμένο πρότυπο των στοιχειώδων σωματιδίων.
4. περίπου 10^{-5} s ή 200 MeV . Λαμβάνει χώρα η πρόσδεση ελευθέρων quarks και gluons σχηματίζοντας βαρυόνια και μεσόνια. Η φυσική αυτής της μετάβασης δεν είναι πλήρως κατανοητή αλλά δεν προβλέπεται ότι παραμένουν αξιοσημείωτα κοσμικά κατάλοιπα.
5. περίπου 0.2 s ή $1 - 2 \text{ MeV}$. Τα πρωταρχικά νετρίνα αποσυζεύγονται από τα άλλα σωματίδια και διαδίδονται άνευ σκεδάσεων. Επίσης, ο λόγος νετρονίων προς πρωτονίων σταθεροποιείται καθώς οι αντιδράσεις που διατηρούν νετρόνια/πρωτόνια σε χημική ισορροπία γίνονται μη αποδοτικές. Ως εκ τούτου, ο αριθμός των νετρονίων που έμειναν καθορίζει τα αποθέματα των πρωταρχικών στοιχείων.
6. περίπου 1 s ή 0.5 MeV . Η ενεργειακή κλίμακα αντιστοιχεί σε αυτή της μάζας ηρεμίας ενός ηλεκτονίου. Όταν η θερμοκρασία πέσει, τα ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων που υπήρχαν αλληλεπιδρούν με αποτέλεσμα τη δημιουργία φωτονίων σε θερμοδυναμική ισορροπία και η θερμοκρασία της ακτινοβολίας αυξάνεται εν συγκρίση με αυτή των νετρίνων, τα οποία έχουν αποσυζευχθεί νωρίτερα.
7. περίπου $200 - 300$ s ή 0.05 eV . Οι πυρηνικές αντιδράσεις γίνονται αποτελεσματικές. Έτσι, σχηματίζονται απο ελεύθερα πρωτόνια και νετρόνια δημιουργούν Ήλιο και άλλα ελαφρά στοιχεία. Τα αποθέματα των ελαφρών στοιχείων που προκύπτουν απο την πρωταρχική πυρηνοσύνθεση τυχάνουν πολύ καλής συμφωνίας με τα διαθέσιμα παρατηρησιακά δεδομένα.

[§]Ο όρος Μεγάλη Έκρηξη οφείλεται στον Fred Hoyle, σφοδρό πολέμιο της θεωρίας.

8. περίπου 10^{11} s ή 1 eV. Σε αυτό το ενεργειακό εύρος έχουμε ισοζύγιο ύλης-ακτινοβολίας, το οποίο διαχωρίζει την εποχή της ύλης απο την εποχή της ακτινοβολίας. Η ακριβής χρονική της θέση εξαρτάται απο τα συστατικά της σκοτεινής ενέργειας και ως εκ τούτου είναι γνωστή μέχρι ένα αριθμητικό παράγοντα της τάξης της μονάδας.
9. περίπου $10^{12} - 10^{13}$ s. Το Ήλιο, που αποτελεί περίπου το 25% της βαρυονικής ύλης επανασυνδέεται και γίνεται ουδέτερο. Σχεδόν όλα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια και πρωτόνια επανασυνδέονται και σχηματίζουν ουδέτερο υδρογόνο. Έτσι, το Σύμπαν γίνεται διαφανές για την ακτινοβολία υποβάθρου. Οι θερμοκρασιακές ανισοτροπίες του CMB θεωρείται ότι προκλήθηκαν απο ελαφρές ανομοιογένειες στην κατανομή της μάζας.
10. περίπου $10^{16} - 10^{17}$ s. Σχηματίζονται γαλαξίες και γαλαξιακά σμήνη ως αποτέλεσμα βαρυτικών ασταθειών λόγω ανισοτροπιών στη μάζα. Παρόλα αυτά, αποτελεί ένα μη γραμμικό πρόβλημα που αποτελεί ανοιχτό πεδίο έρευνας μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων. Τέλος, παραμένει το ερώτημα για τη φύση της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας.

1.1.2 Εξισώσεις *Friedmann*

Θα ξεκινήσουμε την μελέτη μας με την παρουσίαση του τετραδιάστατου γραμμικού στοιχείου που περιγράφει έναν ομογενή και ισότροπο χωρόχρονο (χωρόχρονος *Friedman – Lemaitre – Robertson – Walker, FLRW*):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \alpha^2(t) d\sigma^2 \quad (1.1.2)$$

όπου γίνεται χρήση της υπογραφής $(-, +, +, +)$ για την μετρική, ενώ $a(t)$ είναι ο παράγοντας κλίμακας, t ο κοσμικός χρόνος και $d\sigma^2$ η χρονοανεξάρτητη μετρική του 3-διάστατου χώρου. Η ποσότητα K είναι η χωρική καμπυλότητα της μετρικής και παίρνει τιμές $(-1, 0, +1)$ οι οποίες αντιστοιχούν σε ανοιχτό, επίπεδο και κλειστό σύμπαν αντίστοιχα. Για το χωρικό μέρος της μετρικής ισχύει ότι:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.1.3)$$

Απο την ΓΘΣ, γνωρίζουμε οτι τα σύμβολα Christoffel για μετρική $g_{\mu\nu}$ είναι:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \quad (1.1.4)$$

όπου

$$g_{\alpha\nu,\lambda} \equiv \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\lambda}$$

Ο τανυστής Ricci ορίζεται με τη βοήθεια των συμβόλων Christoffel, συνεπώς και της μετρικής, ως εξής:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \quad (1.1.5)$$

Η συστολή του τανυστή *Ricci* ορίζει το βαθμωτό *Ricci* (ή βαθμωτή καμπυλότητα):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.1.6)$$

Με χρήση των παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τον τανυστή Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.1.7)$$

και ακολούθως, τις εξισώσεις Einstein:

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi G T_{\nu}^{\mu} \quad (1.1.8)$$

όπου η ποσότητα T_{ν}^{μ} αντιστοιχεί στον ταυυστή ενέργειας ορμής. Στο πλαίσιο του FLRW χωρό-χρονου, έχουμε θεωρήσει ότι έχουμε ιδανικό ρευστό, άρα ο ταυυστής ενέργειας ορμής παίρνει τη μορφή:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + P)u^{\mu}u_{\nu} + P\delta_{\nu}^{\mu} \quad (1.1.9)$$

όπου $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ το τετράνυσμα της ταχύτητας στις συνμετακινούμενες συντεταγμένες, ενώ τόσο η συνολική πυκνότητα, ρ , όσο και η συνολική πίεση P είναι συναρτήσεις του κοσμικού χρόνου. Να τονιστεί ότι εφόσον χρησιμοποιούμε $c = 1$, η πυκνότητα μάζας είναι ουσιαστικά πυκνότητα ενέργειας. Οι (00) και (ii) συνιστώσες του ταυυστή ενέργειας-ορμής είναι $T_0^0 = -\rho$ και $T_j^i = P\delta_j^i$.

Το δεξί μέρος της σχέσης 1.1.8 περιγράφει την ενέργεια και την ορμή, ενώ το αριστερό τη γεωμετρία του χωρόχρονου. Για την μετρική $FLRW$, (1.1.3), τα μη μηδενικά Christoffel είναι τα ακόλουθα:

$$\Gamma_{ij}^0 = a^2 H \gamma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \delta_j^i, \quad (1.1.10)$$

όπου

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

η παράμετρος *Hubble*, η οποία περιγράφει το ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος. Η τελεία δηλώνει την παραγωγή ως προς τον κοσμικό χρόνο, t .

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{Kr}{1 - Kr^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1 - Kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - Kr^2)\sin^2\theta, \quad (1.1.11)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot\theta \quad (1.1.12)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις 1.1.10, 1.1.11, 1.1.12 στην 1.1.5, για τις συνιστώσες του ταυυστή *Ricci* έχουμε:

$$R_{00} = -3(H^2 + \dot{H}), \quad R_{0i} = R_{i0} = 0, \quad R_{ij} = a^2(3H^2 + \dot{H} + \frac{2K}{a^2})\gamma_{ij} \quad (1.1.13)$$

Με τη βοήθεια αυτών υπολογίζουμε και το βαθμωτό Ricci:

$$R = 6(2H^2 + \dot{H} + K/a^2) \quad (1.1.14)$$

Απο την έξ. (1.1.7) και την σχέση $G_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu}$ προκύπτει ότι:

$$G_0^0 = -3(H^2 + K/a^2), \quad G_i^0 = G_0^i = 0, \quad G_j^i = -(3H^2 + 2\dot{H} + K/a^2)\delta_j^i \quad (1.1.15)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.1.8) έχουμε:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \quad (1.1.16)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi GP - \frac{K}{a^2} \quad (1.1.17)$$

Απαλοίφοντας τον όρο $\frac{K}{a^2}$ από τις παραπάνω δυο σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (1.1.18)$$

Το γεγονός ότι ο τανυστής Einstein ικανοποιεί τις ταυτότητες Bianchi συνεπάγεται ότι:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (1.1.19)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την (1.1.16) με a^2 , να παραγωγίσουμε και να χρησιμοποιήσουμε την (1.1.18), καταλήγοντας στο ίδιο αποτέλεσμα. Η τελευταία εξίσωση αναφέρεται και ως εξίσωση συνέχειας.

1.1.3 Σύσταση του Σύμπαντος

Είναι χρήσιμο να δούμε πως εξελίσσεται στο χρόνο (ή ισοδύναμα στην ερυθρομετατόπιση) η κάθε κοσμική συνιστώσα. Θεωρώντας ότι το κοσμικό ρευστό αποτελείται από ακτινοβολία, ύλη και σκοτεινή ενέργεια έχουμε ότι $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_{DE}$. Ξεκινάμε από την εξίσωση συνέχειας, 1.1.19, υποθέτοντας ότι τα κοσμικά συστατικά δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, και την εξίσωση κατάστασης $P = w\rho$, ακολουθώντας τη σύμβαση όπου $a_0 = 1$ και μελετάμε ξεχωριστά κάθε κοσμική συνιστώσα. Για την σχετικιστική ύλη (ακτινοβολία) έχουμε $w = 1/3$, δηλαδή:

$$\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0 \Rightarrow \frac{d\rho_r}{\rho_r} = -4\frac{da}{a} \Rightarrow \rho_r = \rho_{r,0}a^{-4}$$

Δηλαδή

$$\rho_r = \rho_{r,0}(1+z)^4 \quad (1.1.20)$$

Για την μη σχετικιστική ύλη (βαρυονική ύλη και ψυχρή σκοτεινή ύλη) έχουμε $w = 0$, δηλαδή:

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0 \Rightarrow \frac{d\rho_m}{\rho_m} = -3\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho_m = \rho_{m,0}a^{-3}$$

$$\rho_m = \rho_{m,0}(1+z)^3 \quad (1.1.21)$$

Τέλος για την εξωτική ύλη (σκοτεινή ενέργεια) όπου $w \equiv w(z)$ έχουμε:

$$\rho_{DE}\dot{a} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w(z))\rho_{DE} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho_{DE}}{\rho_{DE}} = -\frac{3}{a}(1+w(z))da \Rightarrow \frac{d\rho_{DE}}{\rho_{DE}} = +3(1+w(z))\frac{dz}{1+z}$$

$$\rho_{DE} = \rho_{DE,0}e^{3\int_0^{\ln(1+z)}(1+w(z))d(\ln(1+z))} \quad (1.1.22)$$

Ορίζουμε την κρίσιμη πυκνότητα ως την πυκνότητα ρ_c για την οποία ισχύει $H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c$. Από τις εξισώσεις 1.1.22, 1.1.20, 1.1.21, 1.1.16 έχουμε:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_c} - \frac{3K}{a^2 8\pi G \rho_c} \Rightarrow \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_{DE,0}}{\rho_c} e^{3\int_0^{\ln(1+z)}(1+w(z))d(\ln(1+z))} + \frac{\rho_{m,0}}{\rho_c}(1+z)^3 + \frac{\rho_{r,0}}{\rho_c}(1+z)^4 - \frac{3K}{a^2 8\pi G \rho_c}$$

$$H = H_0 \left\{ \Omega_{DE,0} e^{3\int_0^{\ln(1+z)}(1+w(z))d(\ln(1+z))} + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 \right\}^{1/2} \quad (1.1.23)$$

Όπου $\Omega_{i,0} = \rho_{i,0}/\rho_c$ και $\Omega_{i,K} = -\frac{3K}{8\pi G \rho_c}$

1.1.4 Κοσμικές αποστάσεις

Για να χρησιμοποιήσουμε παρατηρησιακά δεδομένα ώστε να επιβάλουμε περιορισμούς στις παραμέτρους της συνάρτησης Hubble είναι απαραίτητο να ορίσουμε κάποιες κοσμικές αποστάσεις. Ξεκινάμε από την σχέση 1.1.3 όπου θέτουμε $r = \sin\xi$ για $K=+1$, $r = \xi$ για $K=0$ και $r = \sinh\xi$ για $K=-1$ οπότε προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$d^2\sigma = d\chi^2 + (f_K(\chi))^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.1.24)$$

όπου

$$f_K(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & K = +1 \\ \chi, & K = 0 \\ \sinh\chi, & K = -1 \end{cases} \quad (1.1.25)$$

Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση 1.1.25 σε μια περισσότερο συμπαγή μορφή:

$$f_K(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}\chi) \quad (1.1.26)$$

όπου η χωρικά επίπεδη περίπτωση προκύπτει αν πάρουμε το όριο -0 .

Απόσταση φωτεινότητας

Η απόσταση φωτεινότητας ορίζεται ως:

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi\mathcal{F}}$$

όπου L_s είναι η απόλυτη φωτεινότητα του αστροφυσικού αντικειμένου και \mathcal{F} είναι η παρατηρούμενη ροή. Να τονιστεί ότι η παρατηρούμενη φωτεινότητα L_0 η οποία παρατηρείται στη χωροχρονική θέση όπου $\chi = 0$, $z = 0$ είναι εν γένει διαφορετική από την απόλυτη φωτεινότητα L_s την οποία εξεπεμψε η πηγή στην συνμετακινούμενη απόσταση χ με ερυθρομετατόπιση z . Η ροή ορίζεται ως $\mathcal{F} = \frac{L_0}{S}$ όπου $S = 4\pi(a_0 f_K(\chi))^2 (z = 0)$.

$$d_L^2 = (a_0 f_K(\chi))^2 \frac{L_s}{L_0} \quad (1.1.27)$$

Ακολούθως θα υπολογιστεί η ποσότητα $\frac{L_s}{L_0}$. Αν η ενέργεια που εκπέμπεται από την πηγή στο διάστημα Δt_1 είναι ΔE_1 , προφανώς η απόλυτη φωτεινότητα ορίζεται ως $L_s = \Delta E_1 / \Delta t_1$. Όμοια η παρατηρούμενη φωτεινότητα ισούται με $L_0 = \Delta E_0 / \Delta t_0$, $\Delta E_0 \Delta t_0$. Καθώς η ενέργεια ενός φωτονίου είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους κύματος λ , έχουμε ότι: $\Delta E_0 / \Delta t_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 + z$, όπου χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός της ερυθρομετατόπισης. Ακόμα, ισχύει ότι $c = \lambda / \Delta t$ και συνεπώς $\lambda_1 / \Delta t_1 = \lambda_0 / \Delta t_0$, όπου λ_1 , λ_0 είναι τα μήκη κύματος του φωτός στα σημεία εκπομπής και μέτρησης αντιστοίχως. Από αυτό έχουμε ότι $\Delta t_0 / \Delta t_1 = \lambda_0 / \lambda_1 = 1 + z$.

$$\frac{L_s}{L_0} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = (1 + z)^2 \quad (1.1.28)$$

Τελικά:

$$d_L = a_0 f_K(\chi) (1 + z) \quad (1.1.29)$$

Δηλαδή

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{\Omega_{K,0}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_{K,0}} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right)$$

(1.1.30)

Η έκφραση (1.1.4) παρότι συμπαγής, δεν προσφέρεται για αριθμητικούς υπολογισμούς. Γράφουμε λοιπόν την απόσταση φωτεινότητας στην μορφή:

$$d_L = \begin{cases} \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \sin \left(H_0\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) & \Omega_{K,0} < 0, K = 1 \\ \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \sinh \left(H_0\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) & \Omega_{K,0} > 0, K = -1 \\ (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} & \Omega_{K,0} = 0, K = 0 \end{cases} \quad (1.1.31)$$

1.2 Κοσμολογικά Μοντέλα

1.2.1 Λ CDM

Η απλούστερη υπόθεση για την σκοτεινή ενέργεια αφορά την ύπαρξη μιας χωρικά και χρονικά σταθερής πυκνότητας ενέργειας, η οποία αναφέρεται ως κοσμολογική σταθερά Λ . Η έννοια αυτή εισήχθη πρώτη φορά από τον Einstein το 1917 για να παραγωγή της τότε επικρατούς θεώρησης του στατικού Σύμπαντος. Το Λ CDM μοντέλο είναι γενικά το επικρατέστερο ωστόσο έχει δυο σημαντικά προβλήματα, το πρόβλημα της τιμής της κοσμολογικής σταθεράς και το πρόβλημα της σύμπτωσης, τα οποία θα παρουσιαστούν επιγραμματικά παρακάτω.

Ας δούμε αρχικά το σύμπαν του Einstein. Καθώς για τον τανυστή ενέργειας-ορμής ισχύει ότι $T_{\mu\nu}^{;\nu} = 0$ και επίσης $g_{\mu\nu}^{;\nu} = 0$, μπορούμε να γράψουμε $T_{\mu\nu} \leftarrow T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$.

Καταλήγουμε λοιπόν στην εξίσωση:

$$G_{\nu}^{\mu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\nu}^{\mu} \quad (1.2.1)$$

Παραπέρα, με τον ίδιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, εξάγουμε τις εξισώσεις Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.2.2)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.2.3)$$

Για στατικό Σύμπαν όπου κυριαρχεί υλικό άνευ πίεσης, δηλαδή $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ και $P=0$, προκύπτει ότι:

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G}, \quad \Lambda = \frac{K}{a^2} \quad (1.2.4)$$

Το τελευταίο αποτελεί την προσπάθεια του Einstein να συνδέσει την μάζα με την αδράνεια (η οποία εδώ αντιστοιχεί στη μετρική $g_{\mu\nu}$, κάτι το οποίο αποτελεί μια διατύπωση της Αρχής του Mach[¶]. Ωστόσο, εύκολα φαίνεται από την σχέση 1.2.2 ότι αν $\Lambda/3 > 4\pi G\rho/3$ ($\Lambda/3 < 4\pi G\rho/3$), $\ddot{a} > 0$ ($\ddot{a} < 0$) άρα και το Σύμπαν θα απομακρυνθεί από την κατάσταση 1.2.4 όσο αυξάνεται (μειώνεται) το a .

Ένας περισσότερο κομψός τρόπος να γραφτούν οι εξισώσεις 1.2.2 και 1.2.3 είναι να ενσωματώσουμε την κοσμολογική σταθερά Λ στην πυκνότητα, χρησιμοποιώντας τη μορφή $\Lambda = 4\pi G\rho_{DE}$.

[¶]ΛΛΛ Παραπομπή και σχόλια

Εν τέλει, απο τα παραπάνω οπως και την Εξίσωση 1.1.23 έχουμε για το Λ CDM μοντέλο:

$$H(z; H_0\phi^\mu) = H_0[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2] \quad (1.2.5)$$

όπου $\phi^\mu = (\Omega_{m0}, \Omega_\Lambda)$. Χρησιμοποιώντας το οτι $\Omega_{m0} + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1$, έχουμε:

$$H(z; H_0\phi^\mu) = H_0[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_\Lambda)(1+z)^2] \quad (1.2.6)$$

Το μοντέλο Λ CDM παρότι είναι το πλέον επικρατέστερο μέχρι σήμερα αντιμετωπίζει ορισμένα προβλήματα. Τα φιλοσοφικά προβλήματα που ενυπάρχουν εγγενώς στην BB κοσμολογία, όπως για παράδειγμα η έννοια του κοσμικού χρόνου, δε θα συζητηθούν εδώ. Υπάρχουν ωστόσο και αμιγώς φυσικά προβλήματα, όπως αυτό της τιμής της κοσμολογικής σταθεράς (αναφέρεται και ως *fine tuning problem*) και αυτό της σύμπτωσης τα οποία θα παρουσιάστουν συνοπτικά παρακάτω.

Πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς

Ξεκινάμε απο την εξίσωση 1.2.5. Προκειμένου να λειτουργεί στο σήμερα ο μηχανισμός που προκαλεί την κοσμική επιτάχυνση, πρέπει η ποσότητα Λ να είναι ίδιας τάξης μεγέθους με τη σταθερά του Hubble στο τετράγωνο. Αυτό σημαίνει οτι:

$$\Lambda \sim H_0^2 = (10^2 \cdot h \cdot 3.241 \cdot 10^{-20} s^{-1})^2 \quad (1.2.7)$$

Ακολουθως, ερμηνεύοντας το παραπάνω ως πυκνότητα ενέργειας:

$$\rho_\Lambda \sim \frac{\Lambda m_{pl}^2}{8\pi} \sim 10^{-47} GeV^4 \quad (1.2.8)$$

οπου χρησιμοποιήσαμε οτι $h \sim 0.7$.

Υπολογίζοντας την ενέργεια του κενού για ένα πεδίο μάζας m , ορμής k και συχνότητας ω , αθροίζουμε την ποσότητα $E = \frac{\omega}{2} = \sqrt{k^2 + m^2}/2$ για όλα τα k μέχρι ένα $k_{max} \gg m$ όπου έχουμε αποκοπή:

$$\rho_{vac} = \int_0^{k_{max}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \quad (1.2.9)$$

Υποθέτοντας χωρική ισοτροπία και χρήση σφαιρικών συντεταγμένων, έχουμε ότι:

$$\rho_{vac} = \int_0^{k_{max}} \frac{4\pi k^2 d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \quad (1.2.10)$$

Καθώς το ολοκλήρωμα κυριαρχείται απο τον όρο για μεγάλο k , έχουμε οτι:

$$\rho_{vac} \sim \frac{k_{max}^4}{16\pi^2} \quad (1.2.11)$$

Η ΓΘΣ ευστάθει σε κλιμακες μέχρι και την κλίμακα Planck. Θεωρώντας λοιπον την κλίμακα αποκοπής k_{max} ίση με $m_{pl} \sim 10^{19} GeV$, η ενέργεια του κενού ισούται με:

$$\rho_{vac.} \sim 10^{74} GeV^4$$

Η τελευταία τιμή είναι περίπου 10^{121} φορές μεγαλύτερη απο την παρατηρούμενη τιμή. Μια εξήγηση μπορεί να είναι μια κάποια αυθαιρεσία στην επιλογή του k_{max} . Παρόλα αυτά όμως αν διαλέξουμε μια άλλη ενεργειακή κλίμακα, πχ την κλίμακα της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής (QCD), $k_{max} \sim 0.1 GeV$ το αποτέλεσμα παραμένει πολύ μεγάλο.

1.2.2 φCDM

Αν το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς λυθεί με έναν τρόπο όπου η κοσμολογική σταθερά εξαλειφθεί χρειάζονται εναλλακτικές προτάσεις για την εξήγηση της επιταχυνόμενης διαστολής του Σύμπαντος. Υπάρχουν δύο δυνατές κατευθύνσεις. Η μία είναι να τροποποιήσουμε τον ταυυστή ενέργειας-ορμής εισάγοντας έναν όρο που δίνει αρνητική πίεση. Η άλλη είναι να τροποποιήσουμε την βαρυτική μας θεωρία ώστε ο ταυυστής *Einstein* να δίνει έναν επιπλέον όρο. Στο πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ) οι δύο προσεγγίσεις δεν είναι διαφορετικές καθώς μπορούμε πάντα να γράψουμε τις εξισώσεις *Einstein*, $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, απορροφώντας οποιονδήποτε επιπλέον όρο στον ταυυστή ενέργειας ορμής. Δηλαδή, δεν υπάρχει τρόπος να δούμε αν έχουμε εξωτική ύλη ή τροποποιημένη βαρύτητα. Ωστόσο, στο πλαίσιο της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου, (*QFT*), τα δύο αυτά είδη σκοτεινής ενέργειας είναι, επι της αρχής τουλάχιστον, διαχωρίσιμα. Μιά θεωρηση σε αυτό το πλαίσιο είναι η εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου το οποίο αλληλεπιδρά με τα υπόλοιπα κοσμικά συστατικά μόνο μέσω της βαρτητας και αναφέρεται ως *πεμπτουσία* (quintessence)¹. Εν αντιθέσει με την κοσμολογική σταθερά, η εξίσωση κατάστασης της πεμπτουσίας αλλάζει με το χρόνο. Δεν χρειάζεται επίσης η απαίτηση ότι η πυκνότητα σκοτεινής ενέργειας να είναι πολύ μικρότερη εν συγκρίσει με την πυκνότητα ενέργειας της ύλης στο νεαρό Σύμπαν.

Εξαιτίας της άγνωστης φυσικής της σκοτεινής ενέργειας έχουν προταθεί πολλές καθαρά φαινομενολογικές παραμετρήσεις για την παραγωγή της καταστατικής εξίσωσης $w(z)$. Ξεκινώντας απο την Εξίσωση 1.1.23, είναι αναγκαίο να κάνουμε κάποιες υποθέσεις για την μορφή του $w(z)$.

Η πιο γενική έκφραση για την ποσότητα $w(z)$ είναι το ακόλουθο ανάπτυγμα:

$$w_{DE}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x_n(z)$$

όπου η ποσότητα x_n είναι:

1. $x_n(z) = z^n$
2. $x_n(z) = \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ ή ισόδύναμα $x_n(a) = (1-a)^n$, δηλαδή πρόκειται για ένα ανάπτυγμα Taylor γύρω απο την σημερινή εποχή, $a=1$.
3. $x_n(z) = (\ln(1+z))^n$

Η χρήση της παραμέτρησης 1 με $n_{max} = 1$ δημιουργεί απειρισμούς για μεγάλα z .

Η παραμέτρηση 2 όπου το άπειρο άθροισμα στο παραπάνω ανάπτυγμα αντικαθίσταται με μερικό άθροισμα έως και $n_{max} = 1$, εισήχθη απο τους Chevallier, Polarski, Linder, ([4],[9]) και αναφέρεται ως παραμέτρηση *CPL*. Έχουμε λοιπόν $w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{z+1}$, οπότε ο συντελεστής της πυκνότητας σκοτεινής ενέργειας γράφεται ως:

$$e^{3 \int_0^{\ln(1+z)} (1+w_0+w_1 \frac{z'}{z'+1}) d(\ln(1+z'))}$$

Υπολογίζοντας αυτο το ολοκλήρωμα έχουμε ότι:

$$E(z) = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\phi}(1+z)^{3(1+w_0+w_1)} e^{-3w_1 \frac{z}{z+1}} + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 \quad (1.2.12)$$

Το πλεονέκτημα της τελευταίας είναι η ασυμπτωτική της συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, όταν το z τείνει στο άπειρο, η *CPL* παραμέτρηση γίνεται $w(z) = w_0 + w_1$ ενώ όταν το z τείνει στο 0, γίνεται $w(z) = w_0$. Είναι αξιοσημείωτο ότι το Λ CDM μοντέλο αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση όπου $w_0 = -1$, $w_1 = 0$ και το w CDM στην περίπτωση όπου $w_0 = const.$, $w_1 = 0$.

¹Ο όρος πεμπτουσία οφείλεται στον Πλάτωνα. Πρωτοχρησιμοποιήθηκε στην σύγχρονη κοσμολογία απο τους Caldwell *et al.*[?].

Κεφάλαιο 2

Μεθοδολογία

Στο παρόν κεφάλαιο αναπαράγονται τα κοσμολογικά μοντέλα που θα μελετηθούν στην παρούσα εργασία όπως και τα στατιστικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν.

2.1 Ανάλυση Πιθανοφάνειας

2.1.1 Στοιχεία Πιθανοθεωρίας

Ορισμός. Έστω μια τυχαία μεταβλητή x η οποία υπακούει σε μια συνεχή κατανομή πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \theta)$, η οποία εξαρτάται από κάποιες άγνωστες παραμέτρους ϕ^μ . Έστω επίσης ότι έχουμε πραγματοποιήσει n πειράματα και έχουμε n δεδομένα x_i . Αν επαναλάβουμε τις μετρήσεις και υποθέτοντας μια θεωρητική τιμή ϕ^μ , η πιθανότητα να βρούμε πάλι τα δεδομένα μας λέγεται συνάρτηση πιθανοφάνειας (Likelihood function) και είναι*

$$\mathcal{L} = f_1(x_1; \phi^\mu) f_2(x_2; \phi^\mu) \dots f_n(x_n; \phi^\mu) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Προφανώς, για διάφορες εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων ϕ^μ έχουμε και διαφορετική συνάρτηση πιθανοφάνειας. Το βέλτιστο ϕ^μ είναι αυτό που μεγιστοποιεί την συνάρτηση πιθανοφάνειας. Δηλαδή η λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^\mu)}{\partial \phi^\mu} = 0$$

Συχνά ενδιαφερόμαστε για κάποιο υποσύνολο των παραμέτρων και οι υπόλοιπες, οι οποίες αναφέρονται και ως nuisance παράμετροι δεν μας ενδιαφέρουν. Είναι επίσης πολύ βασικό να μειώσουμε αν μπορούμε τον χώρο των σταθερών παραμέτρων. Η διαδικασία με την οποία τις απαλοΐφουμε λέγεται *περιθωριοποίηση* (marginalization) και ουσιαστικά συνίσταται στην ολοκλήρωση σε όλο το διάστημα τιμών της παραμέτρου που δεν μας ενδιαφέρει.

2.2 Περιθωριοποίηση του H_0 στη συνάρτηση Hubble

Εν συνεχεία θα περιθωριοποιήσουμε την σταθερά του Hubble στην έκφραση της πιθανοφάνειας, με όμοια διαδικασία με αυτή που χρησιμοποιήθηκε από τους Basilakos και Nesseris, 2016, [2] σε ένα διαφορετικό θεωρητικό πλαίσιο. Ξεκινάμε από την έκφραση για την κατανομή χ^2 , (chi-square),

*Υποθέτοντας επιπλέον ότι οι μετρήσεις είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

$$x^2(\phi^\mu) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{H_D(z_i) - H_M(z_i, \phi^\mu)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (2.2.1)$$

όπου τα D, M αντιστοιχούν στα δεδομένα (Data) και στις προβλέψεις του εκάστοτε μοντέλου (Model) αντιστοίχως, ενώ τα ϕ^μ, σ είναι το στατιστικό διάνυσμα υποβάθρου (της μορφής (Ω_m, Ω_L) για το Λ CDM μοντέλο) και το σφάλμα για κάθε μέτρηση αντίστοιχα. Ισχύει ότι $H(z) = H_0 E(z)$ και άρα:

$$x^2(\phi^\mu) = \sum_{i=1}^N \frac{H_D(z_i)^2}{\sigma_i^2} - 2H_0 \sum_{i=1}^N \frac{E_M(z_i)H_D(z_i)}{\sigma_i^2} + H_0^2 \sum_{i=1}^N \frac{E_M^2(z_i)}{\sigma_i^2} \quad (2.2.2)$$

Στο σημείο αυτό μπορεί κανείς να δει ότι η παράμετρος H_0 βρίσκεται εκτός των αθροισμάτων. Έτσι είναι χρήσιμο να ξαναγράψουμε την ανωτέρω σχέση ως εξής:

$$x^2(\phi^\mu) = AH_0^2 - 2BH_0 + \Gamma$$

όπου

$$A = \sum_{i=1}^N \frac{E_M^2(z_i)}{\sigma_i^2}$$

,

$$B = \sum_{i=1}^N \frac{E_M(z_i)H_D(z_i)}{\sigma_i^2}$$

και

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \frac{H_D(z_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι:

$$\mathcal{L} = e^{-x^2/2} \Rightarrow \mathcal{L} = e^{-\frac{AH_0^2 - 2BH_0 + \Gamma}{2}}$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο στον εκθέτη, προσθαφαιρούμε την ποσότητα B^2/A και έχουμε

$$\mathcal{L} = e^{-\frac{A(H_0 - \frac{B}{A})^2 - B^2/A + \Gamma}{2}}$$

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Bayes:

$$p(\phi^\mu|D, M) = \frac{p(D|\phi^\mu, M)p(\phi^\mu|M, H_0)}{p(D|M)}$$

Όπου η ποσότητα $p(\phi^\mu|M, H_0)$ αναφέρεται ως prior και λαμβάνεται ίση με τη μονάδα. Ολοκληρώνουμε ως προς H_0 και τα δυο μέλη:

$$p'(\phi^\mu|D, M) = \frac{1}{p(D|M)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(H_0 - B/A)^2 - B^2/A + \Gamma}{2}} dH_0$$

Θέτουμε $y = H_0 - \frac{B}{A}$:

$$p'(\phi^\mu|D, M) = \frac{1}{p(D|M)} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma - B^2/A)} \int_{-\frac{B}{A}}^{+\infty} e^{-\frac{A}{2}y^2} dy$$

Μια ακόμα αλλαγή μεταβλητής $\omega = \sqrt{A/2}y$:

$$p'(\phi^\mu|D, M) = \frac{1}{p(D|M)} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma - B^2/A)} \sqrt{2/A} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\omega^2} d\omega + \sqrt{\pi/2} \int_0^{B\sqrt{1/2A}} e^{-\omega^2} d\omega \right)$$

Τελικά έχουμε:

$$p'(\phi^\mu|D, M) = \frac{1}{p(D|M)} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma - B^2/A)} \sqrt{\pi/2A} \left(1 + \text{erf}(B\sqrt{1/2A}) \right)$$

Στην παραπάνω συνάρτηση πιθανοφάνειας αντιστοιχεί η ακόλουθη κατανομή x^2 :

$$x_{marg.}^2 = \Gamma - B^2/A + \ln A - 2\ln \left(1 + \text{erf}(B\sqrt{1/2A}) \right) \quad (2.2.3)$$

όπου αγνοήσαμε την σταθερά $\ln(\pi/2)$ καθώς εξαλείφεται εν συνεχεία στην διαδικασία ελαχιστοποίησης. Επίσης η $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ είναι η συνάρτηση σφάλματος. Η σχέση 2.2.3 είναι όμοια με την σχέση (44) στην αναφορά [2].

Μιά άλλη μέθοδος είναι η ολοκλήρωση της σταθεράς του Hubble συμπεριλαμβανοντας το σφάλμα της ως διακύμανση γύρω απο την δοθείσα τιμή, η οποία θεωρείται ως μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής. Αρχικά υποθέτουμε ότι οι μετρήσεις του H_0 ακολουθούν Gaussian κατανομή γύρω απο τη μετρηθείσα τιμή, δηλαδή:

$$P(H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(H_0 - \bar{H}_0)^2}{2\sigma_H^2}}$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση πιθανοφάνειας η οποία να εξαρτάται μόνο απο τις παραμέτρους που μας ενδιαφέρουν πολλαπλασιάζοντας με την $e^{-x(H_0, \phi^\mu)^2/2}$ και ολοκληρώνοντας ως προς H_0 , ακολουθώντας τους Farooq *et al*, 2013, [6]. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathcal{L}_H(\phi^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_H} \int_0^\infty e^{-\frac{(H_0 - \bar{H}_0)^2}{2\sigma_H^2}} e^{-x(H_0, \phi^\mu)^2/2} dH_0 \quad (2.2.4)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.2.2 και με επιχειρήματα όμοια με παραπάνω καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$\mathcal{L}_H(\phi^\mu) = \frac{1}{2\sqrt{a}\sigma_{H_0}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\beta^2}{a}\right)\right) \left(1 + \text{erf}(\beta/\sqrt{2a})\right) \quad (2.2.5)$$

Όπου

$$a = \frac{1}{\sigma_{H_0}^2} + \sum_{i=1}^N \frac{E^2(z_i; \phi^\mu)}{\sigma_i^2}, \quad \beta = \frac{\bar{H}_0}{\sigma_{H_0}^2} + \sum_{i=1}^N \frac{H_{obs}(z_i)E(z_i; \phi^\mu)}{\sigma_{H_i}^2}, \quad \gamma = \frac{\bar{H}_0^2}{\sigma_{H_0}^2} + \sum_{i=1}^N \frac{H_{obs}^2(z_i)}{\sigma_{H_i}^2}$$

Παραπέρα η x^2 γράφεται συναρτήσει της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως:

$$x^2 = -2\ln \mathcal{L}_H(\phi^\mu)$$

$$x^2 = -2\ln \left(\frac{1}{2\sqrt{a}\sigma_{H_0}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\beta^2}{a}\right)\right) \left(1 + \text{erf}(\beta/\sqrt{2a})\right) \right) \quad (2.2.6)$$

Η σχέση 2.2.6 μετά απο απλές πράξεις ανάγεται στην

$$x^2 = \gamma - \frac{\beta^2}{a} + \ln a - 2\ln \left(1 + \text{erf}(\beta/\sqrt{2a}) \right) \quad (2.2.7)$$

όπου αγνοήθηκε η ποσότητα $2(\ln 2 + \ln \sigma_{H_0})$ καθώς δεν εξαρτάται απο τις κοσμολογικές παραμέτρους. Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την εξίσωση 2.2.7 με την 2.2.3. Παρατηρούμε οτι είναι σχεδόν ταυτόσημες. Η διαφορά είναι οτι σε κάθεμια απο τις ποσότητες α, β, γ υπεισέρχεται ένας σταθερός, ως προς τις κοσμολογικές παραμέτρους, όρος, ο οποίος εξαρτάται απο την τιμή της σταθεράς του Hubble και το σφάλμα της τελευταίας, ενώ οι ποσότητες A, B, Γ είναι ανεξαρτητες της σταθεράς του Hubble.

2.3 Ανάλυση πιθανοφάνειας του distance modulus

Ορίζουμε το distance modulus, μ , ως:

$$\mu = 5 \log d_L(\phi^\mu, z) + 25 \quad (2.3.1)$$

όπου η ποσότητα d_L είναι η απόσταση φωτεινότητας. Επίπλέον, ακολουθώντας τους Chavez *et al*, 2016, [14], ορίζουμε την ποσότητα D_L ως $D_L = \frac{d_L H_0}{c}$. Το βασικό πλεονέκτημα της παραμέτρου D_L είναι η ανεξαρτησία της από την σταθερά του Hubble.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 2.3.1 την απόσταση φωτεινότητας ως συνάρτηση της παραμέτρου D_L , έχουμε:

$$\mu = 5 \log D_L(\phi^\mu, z) + (5 \log c - 5 \log H_0 + 25)$$

Ακολουθως, γράφοντας το H_0 στη μορφή $H_0 = 100h$ έχουμε:

$$\mu = 5 \log D_L(\phi^\mu, z) + \mu_0$$

Όπου $\mu_0 = 42.3856 - 5 \log h$. Να σημειωθεί ότι πλέον μόνο η παράμετρος μ_0 έχει εξάρτηση από την σταθερά του Hubble.

Είμαστε σε θέση πλέον να ορίσουμε την συνήθη συνάρτηση x^2 για το distance modulus:

$$x^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{obs}(z_i) - \mu_{th.}(z_i, \phi^\mu))^2}{\sigma_i^2} \quad (2.3.2)$$

Ορίζουμε επιπλέον τις ποσότητες:

$$A = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{obs} - 5 \log D_L)^2}{\sigma_i^2}$$

$$B = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_{obs}(z_i) - 5 \log D_L}{\sigma_i^2}$$

$$C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Απο την εξίσωση 2.3.2 έχουμε

$$x^2 = C\mu_0^2 - 2B\mu_0 + A$$

Αν θέσουμε $\mu_0 = \frac{B}{C}$, έχουμε ότι:

$$x^2 = A - \frac{B^2}{C}$$

και η τελευταία έκφραση είναι ανεξάρτητη της σταθεράς του Hubble.

2.4 Συζευγμένη ανάλυση πιθανοφάνειας δεδομένων διαφόρων κοσμολογικών δεικτών

Στη προσπάθεια μας να επιβάλλουμε στενότερους περιορισμούς στον χώρο των παραμέτρων, οι διαφορετικοί κοσμολογικοί ανιχνευτές (cosmological probes) είναι σκόπιμο να συνδυαστούν σε μία συζευγμένη ανάλυση πιθανοφάνειας. Η συζευγμένη πιθανοφάνεια δίνεται από την έκφραση

$$\mathcal{L}(\phi^\mu)_{tot} = \prod_{i=1}^N \mathcal{L}_i(\phi^\mu) \quad (2.4.1)$$

Ισοδύναμα, για το ολικό x^2 έχουμε:

$$x_{tot}^2(\phi^\mu) = \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^2 \quad (2.4.2)$$

όπου το \tilde{x}_i αντιστοιχεί στην κανονικοποιημένη ποσότητα x^2 , ήτοι την ποσότητα $x^2 - x_{min}^2$. Εν προκειμένω, εφόσον θα χρησιμοποιήσουμε δεδομένα απο υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia (SN Ia) και δεδομένα απο μετρήσεις H(z), έχουμε:

$$x_{tot} = x_H^2 + x_{SN\ Ia}^2$$

Κεφάλαιο 3

Αποτελέσματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται και συζητιούνται τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε, όπως και τα αποτελέσματα που λήφθηκαν εφαρμόζοντας τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, εν συγκρίσει με τα αποτελέσματα του PLANCK, [1]. Από τα τελευταία έχουμε ότι οι ενεργειακές πυκνότητες μάζας (βαρυονικής και σκοτεινής ύλης) και σκοτεινής ενέργειας για το χωρικά επίπεδο Λ CDM μοντέλο είναι $\Omega_{\Lambda,0}^{(0)} = 0.682 \pm 0.015$ και $\Omega_{m,0}^{(0)} = 0.308 \pm 0.012$, η σταθερά του Hubble (για το Λ CDM μοντέλο) είναι ίση με $H_0 = 67.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ και η χωρική καμπυλότητα είναι μικρότερη του $|\Omega_{K,0}| = 0.005$. Για την παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης w έχουμε ότι $w = -1.008 \pm 0.068$. Τα ανωτέρω αποτελέσματα θα αναφέρονται εφεξής ως προβλεπόμενα.

3.1 Δεδομένα $H(z)$

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η συλλογή δεδομένων από μετρήσεις $H(z)$ η οποία συστάθηκε από τους Farooq *et al*, 2016, [5] και παρουσιάζεται στον πίνακα 3.1. Αρχικά αναπαράγονται ορισμένα αποτελέσματα του ίδιου με σκοπό τον έλεγχο των υπολογιστικών διαδικασιών (αλγορίθμων) που αναπτύξαμε, και εν συνεχεία παράγουμε πρωτότυπα αποτελέσματα για τον περιορισμό των κοσμολογικών παραμέτρων, ανεξάρτητα της σταθεράς του Hubble.

3.1.1 Παρουσίαση και Συζήτηση

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στη συνέχεια να εξετάσουμε μερικές από τις ιδιότητες των δεδομένων μας, όπως επί παραδείγματι την κατανομή των διαθέσιμων παρατηρησιακών τιμών στο χώρο των ερυθρομετατοπίσεων και την συσχέτιση του σχετικού σφάλματος με την ερυθρομετατόπιση.

Κοιτάζοντας την εικόνα 3.1, παρατηρούμε αρχικά ότι υπάρχει ανομοιομορφία στην κατανομή των μετρήσεων ως προς την ερυθρομετατόπιση. Συγκεκριμένα, έχουμε περίπου τα τρία τέταρτα των μετρήσεων στο διάστημα 0.0–1.0. Το τελευταίο είναι λογικό καθώς οι παρατηρησιακές δυσχέρειες αυξάνονται όσο πάμε σε μεγαλύτερες ερυθρομετατοπίσεις. Ακόμα, παρατηρούμε ότι έχουμε περίπου 9 μετρήσεις για $z > 1$. Η μαύρη συμπαγής γραμμή αντιστοιχεί στην συνάρτηση Hubble για το Λ CDM μοντέλο όπου χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές των κοσμολογικών παραμέτρων από τα αποτελέσματα του PLANCK θεωρώντας επίπεδο Σύμπαν, ενώ η διακεκομμένη μαύρη γραμμή αντιστοιχεί στην καμπύλη προσαρμογής των δεδομένων, όπου οι παράμετροι προσαρμογής βρέθηκαν

Πίνακας 3.1: Δεδομένα τα οποία αναλύθηκαν απο τους Farooq *et al*, 2016, [5], και αναφορές του τελευταίου. Οι ενδείξεις I,II αντιστοιχουν στις παρατηρησιακές μεθόδους της διαφορικής ηλικίας αργά εξελισσόμενων γαλαξιών και των Βαρυονικών Ακουστικών Ταλαντώσεων (BAO).

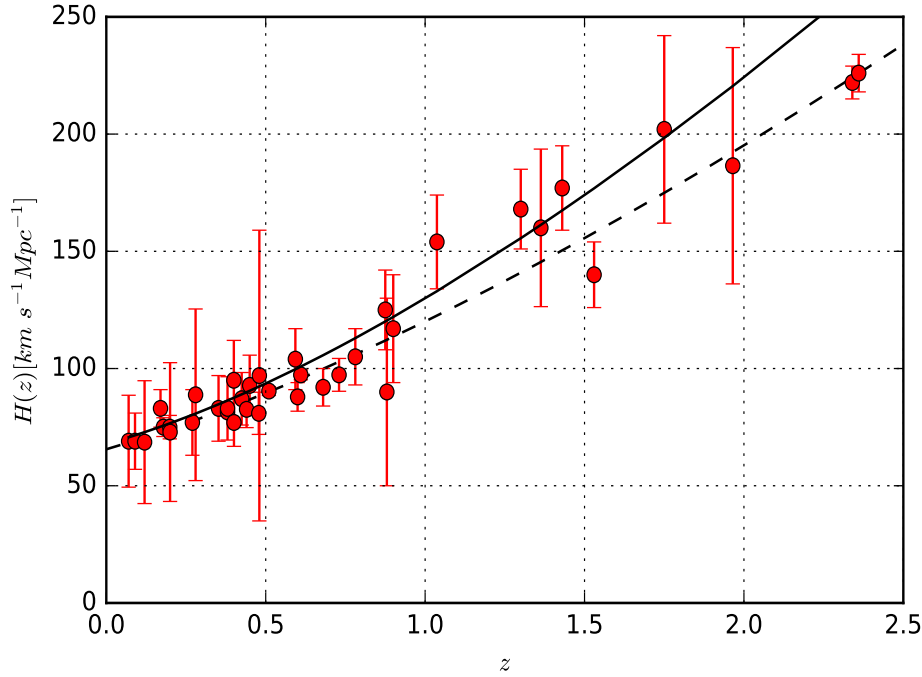
z	$H(z)[km\ s^{-1}Mpc^{-1}]$	$\sigma_H[km\ s^{-1}Mpc^{-1}]$	Μέθοδος
0.070	69.0	19.6	I
0.090	69.0	12.0	I
0.120	68.6	26.2	I
0.170	83.0	8.0	I
0.179	75.0	4.0	I
0.199	75.0	5.0	I
0.200	72.9	29.6	I
0.270	77.0	14.0	I
0.280	88.8	36.6	I
0.352	83.0	14.0	I
0.380	81.5	1.9	II
0.3802	83.0	13.5	II
0.400	95.0	17.0	I
0.4004	77.0	10.2	II
0.4247	87.1	11.2	II
0.440	82.6	7.8	I
0.4497	92.8	12.9	II
0.4783	80.9	9.0	II
0.480	97.0	62.0	I
0.510	90.4	1.9	II
0.593	104.0	13.0	I
0.600	87.9	6.1	II
0.610	97.3	2.1	I
0.680	92.0	8.0	I
0.730	97.3	70.0	II
0.781	105.0	12.0	I
0.875	125.0	17.0	I
0.880	90.0	40.0	I
0.900	117.0	23.0	I
1.037	154.0	20.0	I
1.300	168.0	17.0	I
1.363	160.0	33.6	I
1.430	177.0	18.0	I
1.530	140.0	14.0	I
1.750	202.0	40.0	I
1.965	186.5	50.4	I
2.340	222.0	7.0	II
2.360	226.0	8.0	II

να είναι*

$$H_0 = 69.9 \pm 2.3, \Omega_{m,0} = 0.24 \pm 0.03, \Omega_{\Lambda,0} = 0.69 \pm 0.12$$

Είναι εύκολο να δει κανείς οτι μέχρι και για $z = 1$ υπάρχει ισχυρός εκφυλισμός. Φαίνεται λοι-

*Η προσαρμογή έγινε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, με χρήση της κλάσης `curve_fit` της βιβλιοθήκης `scipy.optimize`, https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.18.1/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html



Σχήμα 3.1: Τα δεδομένα του Πίνακα 3.1. Η μαύρη συμπαγής καμπύλη αντιστοιχεί στην συνάρτηση Hubble για το Λ CDM μοντέλο όπου χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές των κοσμολογικών παραμέτρων από τα αποτελέσματα του PLANCK θεωρώντας επίπεδο Σύμπαν, ενώ η διακεκομμένη μαύρη γραμμή αντιστοιχεί στην καμπύλη προσαρμογής.

πόν καθαρά η σημασία των μετρήσεων σε υψηλές ερυθρομεταθέσεις. Επίσης, για ερυθρομεταθέσεις μεγαλύτερες του 1, φαίνεται να υπάρχουν συστηματικά σφάλματα, καθώς περισσότερα σημεία βρίσκονται κάτωθεν της μαύρης γραμμής και λιγότερα άνωθεν. Περαιτέρω, είναι ενδιαφέρον να δούμε αν υπάρχει κάποια σχέση του στατιστικού σφάλματος ως προς την ερυθρομετατόπιση. Ένας τρόπος να γίνει συσχέτιση μεταξύ των σφαλμάτων (στατιστικών και συστηματικών) και της ερυθρομετατόπισης είναι να ασχοληθούμε με τη γραφική παράσταση των διαφορών ($H_{obs.} - H_{th.,P}$) όπου το $H_{th.,P}$ είναι η θεωρητική τιμή της συνάρτησης Hubble, ως συνάρτηση της ερυθρομετατόπισης για τις τιμές των κοσμολογικών παραμέτρων του PLANCK, Εικόνα 3.2.

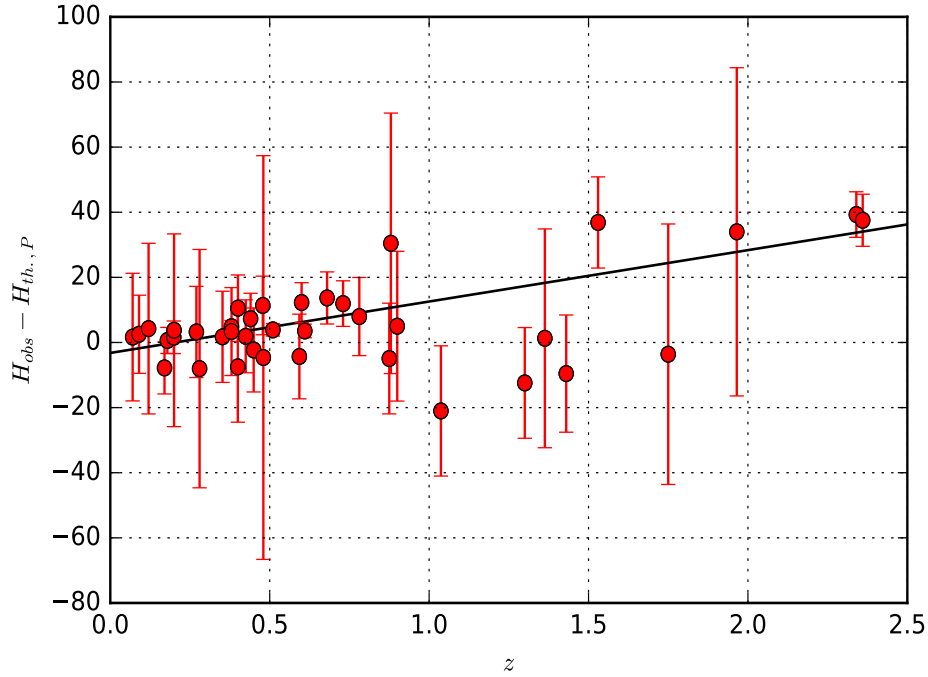
Παρατηρώντας την εικόνα 3.2, βλέπουμε σχετικά μικρή διασπορά. Ποιοτικά φαίνεται ότι η πλειοψηφία των δεδομένων μας απέχει απόσταση μικρότερη από 10 μονάδες H από την αντίστοιχη τιμή με βάση τα προβλεπόμενα. Φαίνεται ακόμα ότι υπάρχει μια τάση γραμμικής αύξησης της ποσότητας $H_{obs.} - H_{th.,P}$ ως προς την ερυθρομετατόπιση. Υποθέτωντας γραμμική εξάρτηση, προκύπτει λοιπόν η καμπύλη προσαρμογής (συμπαγής μαύρη γραμμή) η οποία είναι της μορφής:

$$H_{obs.} - H_{th.,P} = az + b, \quad a = 15.79 \pm 1.94, \quad b = -3.21 \pm 1.27$$

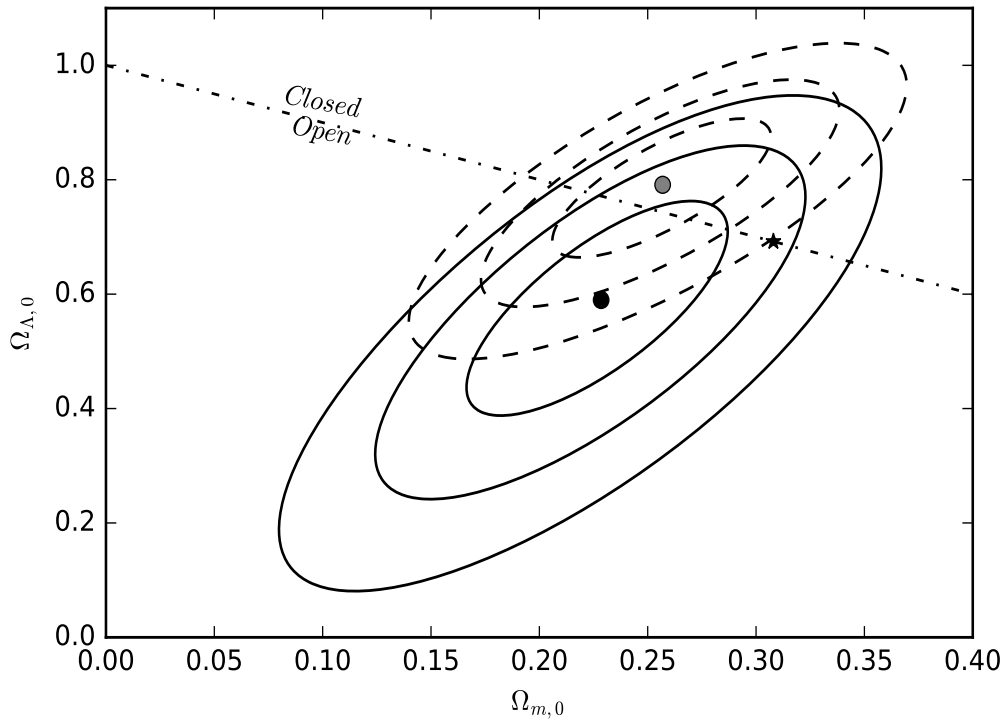
Είναι ακόμα ενδιαφέρον το γεγονός ότι για ερυθρομεταθέσεις στο διάστημα [1,2], οι παρατηρησιακές τιμές είναι μικρότερες των θεωρητικών τιμών. Θεωρώντας τα αποτελέσματα του PLANCK ως πρότυπα, η Εικόνα 3.2 μπορεί να αποτελέσει μέτρο των συστηματικών σφαλμάτων.

3.1.2 Έλεγχος του κώδικα

Μια προσέγγιση στο πρόβλημα της αβεβαιότητας στην σταθερά H_0 είναι η κατασκευή μιας επιμέρους συνάρτησης πιθανοφάνειας, όπως αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ακολούθως, με χρήση αυτής της μεθόδου θα αναπαράγουμε μερικά από τα αποτελέσματα των [5].

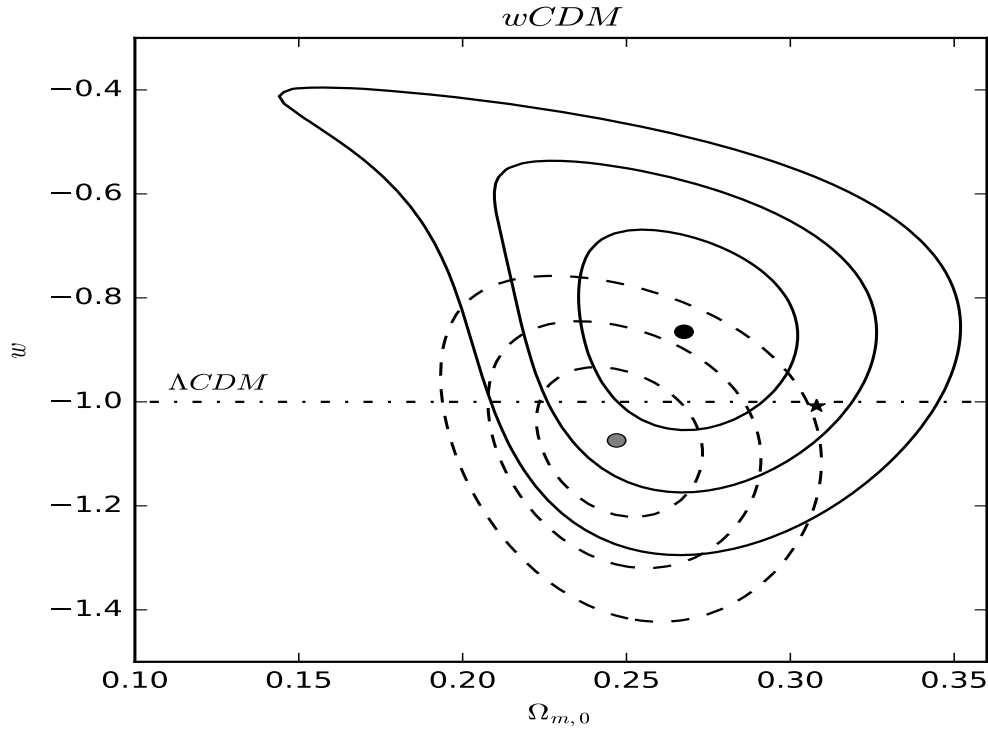


Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση των υπολοίπων (Residuals) $H_{obs.} - H_{th.,P}$ ως συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης.



Σχήμα 3.3: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για το χωρικά επίπεδο Λ CDM μοντέλο στο χώρο των παραμέτρων $\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}$ με $H_0 = 73.8 \pm 1.74 (H_0 = 68 \pm 2.8) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Τα σημεία $\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0} = (0.2569, 0.7911)$ και $\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0} = (0.2285, 0.5898)$ είναι τα σημεία βέλτιστης προσαρμογής και η τιμή της χ^2 είναι $\chi^2 = 25.4844$ και $\chi^2 = 24.1150$ αντίστοιχα.

Παρατηρώντας την Εικόνα 3.3 έχουμε να πούμε ότι για την τιμή $H_0 = 73.24 \pm 1.74 \text{ km}$.



Σχήμα 3.4: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ - 2σ - 3σ για την παραμετροποίηση $wCDM$ για επίπεδο σύμπαν στο χώρο των παραμέτρων $\Omega_{m,0}, w$. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί σε $H_0 = (73.24 \pm 1.74) km \cdot s^{-1} Mpc^{-1}$, ενώ η συμπαγής γραμμή σε $H_0 = (68 \pm 2.8) km \cdot s^{-1} Mpc^{-1}$. Η ευθεία $w = -1$ αντιστοιχεί στο ΛCDM μοντέλο. Ακόμα, το γκριζο σημείο αντιστοιχεί στο σημείο βέλτιστης προσαρμογής για την πρώτη απο τις άνω τιμές του H_0 στη θέση $(0.267, -0.865)$, ενώ το μαύρο στο αντιστοιχο σημείο για την δεύτερη, στη θέση $(0.247, -1.074)$. Η τιμή της x^2 είναι 25.0508 και 24.5148 αντίστοιχως.

$s^{-1} Mpc^{-1}$ (διακεκομμένη γραμμή), το σημείο βέλτιστης προσαρμογής κείται πλησιέστερα στην ευθεία που αντιστοιχεί σε επίπεδο Σύμπαν, με τη θέση του να αντιστοιχεί στις τιμές $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}, \Omega_{K,0}) = (0.2569, 0.7911, -0.048)$ και $(x^2 = 25.4844)$. Απο την άλλη πλευρά, για την τιμή $H_0 = 68 \pm 2.8 km s^{-1} Mpc^{-1}$ (συμπαγής γραμμή), στο σημείο βέλτιστης προσαρμογής έχουμε ότι $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}, \Omega_{K,0}) = (0.2285, 0.5898, 0.1817)$ και $x^2 = 24.1150$. Ταυτόχρονα, τα σημεία εντός της περιοχής 1σ παίρνουν τιμές στο εύρος των παραμέτρων $\Omega_{m,0} \in [0.2066, 0.3064]$, $\Omega_{\Lambda,0} \in [0.6650, 0.9067]$ και $\Omega_{K,0} \in [0.167, 0.286]$, $\Omega_{\Lambda,0} \in [0.388, 0.762]$ αντίστοιχως. Απο τα προηγούμενα φαίνεται ότι τα $H(z)$ δεδομένα συνηγορούν σε μια μεγαλύτερη τιμή για τη σταθερά του Hubble και ακόμα ότι η εξάρτηση απο τη σταθερά του Hubble είναι ισχυρή. Εν συγκρίσει τώρα με την αντίστοιχη εικόνα των Farooq *et al*, 2016, [5], βλέπουμε πλήρη ταύτιση. Αυτό μεταξύ άλλων σημαίνει ότι δεν υπάρχουν σωρεύσεις αριθμητικών σφαλμάτων στον κώδικα μας ή/και λογικά λάθη. Ακόμα, υπάρχει ταυτιση εως και το τρίτο δεκαδικό ψηφίο στα αποτελέσματα μας για τα σημεία βέλτιστης προσαρμογής. Παρότι τα σημεία βέλτιστης προσαρμογής δεν βρίσκονται ακριβώς επι της ευθείας $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$, η τελευταία διέρχεται απο τις περιοχές 1σ . Είναι ενδιαφέρον να δούμε για ποιά ακριβώς τιμή $H_{0,eff}$ οδηγούμαστε σε μηδενική χωρική καμπυλότητα. Μέσω αριθμητικών δοκιμών καταλήγουμε στην τιμή $H_0 = 73.00 \pm 1.74$ για την οποία έχουμε $x^2 = 24.4393$, $\Omega_{m,0} = 0.2513$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7511$ στο σημείο βέλτιστης προσαρμογής. Να σημειωθεί όμως ότι υπάρχει ισχυρή εξάρτηση και απο την αβεβαιότητα στην τιμή του H_0 . Μάλιστα, η διαφορά στο εμβαδό των χωρίων εμπιστοσύνης για τις δυο προηγούμενες τιμές της σταθεράς του Hubble οφείλονται σε αυτό. Τέλος, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το προβλεπόμενο απο το PLANCK σημείο βέλτιστης προσαρμογής βρίσκεται οριακά εκτός του 3σ για την μεγαλύτερη τιμή της σταθεράς του Hubble. Το τελευταίο

είναι αναμενόμενο, καθώς το PLANCK δίνει χαμηλότερη τιμή για τη σταθερά του Hubble. Ακόμα, μπορούμε να δούμε ότι βρίσκεται εντός του χωρίου 2σ για την μικρότερη τιμή της σταθεράς του Hubble και η τιμή της x^2 στο σημείο αυτό είναι $x^2 = 28.914$.

Σχολιάζοντας την Εικόνα 3.4 μπορούμε να πούμε ότι το Λ CDM μοντέλο είναι συμβατό με τα αποτελέσματα μας καθώς η ευθεία $w=-1$ διέρχεται από την 1σ περιοχή και για τις δύο τιμές της σταθεράς του Hubble. Ωστόσο, τα σημεία βέλτιστης προσαρμογής δεν βρίσκονται επί της ευθείας. Ακόμα, η τιμή της x^2 είναι μεγαλύτερη για την υψηλότερη τιμή της σταθεράς του Hubble. Παρατηρούμε επίσης ότι μεταβολή του H_0 αντιστοιχεί σε μετακίνηση των χωρίων εμπιστοσύνης στην κατακόρυφη διεύθυνση, w . Αυτό εξηγείται στη βάση του ότι στην έκφραση για την συνάρτηση Hubble, η ενεργειακή πυκνότητα μάζας είναι ένας πολλαπλασιαστικός παράγοντας, ενώ η παράμετρος κατάστασης της σκοτεινής ενέργειας, w , επηρεάζει την διαστολή Hubble μέσω του όρου $(1+z)^{3(1+w)}$. Να σημειωθεί ακόμα ότι στη θέση του Planck η τιμή της x^2 είναι $x^2 = 28.858$.

Συνοψίζοντας, συνθεωρώντας τις Εικόνα 3.3, Εικόνα 3.4 μπορεί κάποιος να δει τα εξής:

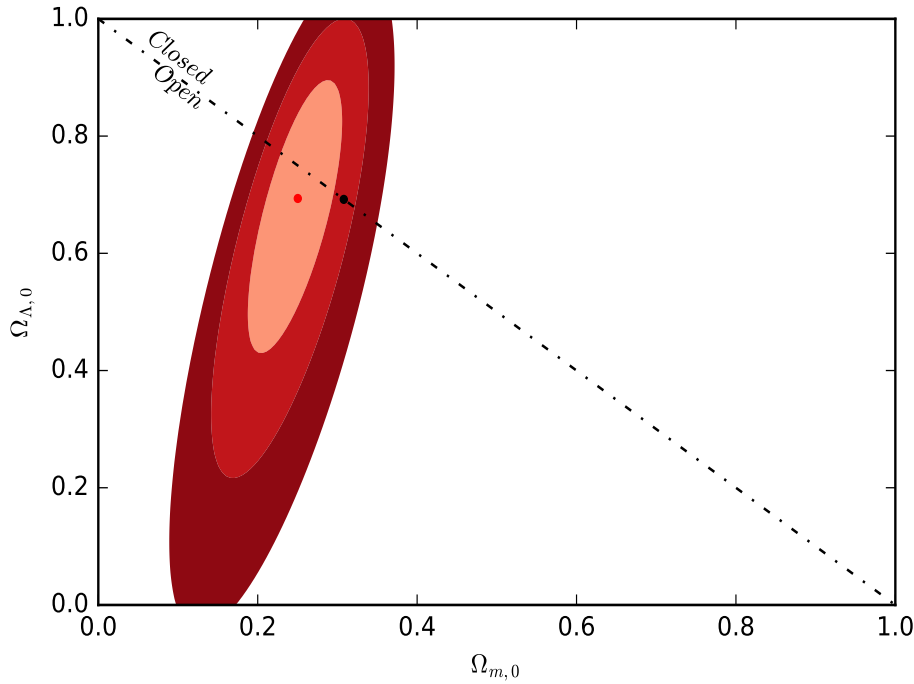
1. Ο κώδικας που αναπτύχθηκε είναι σε θέση να αναπαράγει τα αποτελέσματα στη βιβλιογραφία με πλήρη συνέπεια.
2. Τα δεδομένα είναι συμβατά σε εύρος 2σ με τα αποτελέσματα του PLANCK για την περίπτωση του χαμηλού H_0 .
3. Η τιμή της σταθεράς του Hubble που υποδεικνύουν τα $H(z)$ δεδομένα είναι υψηλότερη από την αντίστοιχη του PLANCK.
4. Υπάρχει ισχυρή εξάρτηση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης πιθανοφάνειας από τις τιμές της σταθεράς του Hubble και το σφάλμα τους.

3.1.3 Ανάλυση πιθανοφάνειας με περιθωριοποιημένη την σταθερά του Hubble

Το τελευταίο συμπέρασμα της προηγούμενης ενότητας μας ωθεί στο να περιθωριοποιούμε την ποσότητα H_0 χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό που αναπτύχθηκε στην αρχή της ενότητας 2.2. Στην Εικόνα 3.5 φαίνεται ότι τα σημεία εντός της περιοχής 1σ παίρνουν τιμές στο εύρος των παραμέτρων $\Omega_{m,0} \in [0.188, 0.306]$ και $\Omega_{\Lambda,0} \in [0.430, 0.895]$, ενώ το σημείο βέλτιστης προσαρμογής είναι το σημείο $\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}, \Omega_{K,0} = (0.250_{-0.0435}^{+0.0393}, 0.693_{-0.186}^{+0.147}, 0.057 \pm 0.191)$, ενώ στο σημείο αυτό έχουμε $x^2 = 23.0035$. Ως προς τη θέση του σημείου βέλτιστης προσαρμογής πρέπει να σημειωθεί ότι έχουμε αναντιστοιχία με τα αποτελέσματα του PLANCK καθώς η χωρική καμπυλότητα είναι τρεις τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την προβλεπόμενη καμπυλότητα. Ακόμα, η τιμή της πυκνότητας σκοτεινής ενέργειας είναι χαμηλότερη κατά ένα δέκατο, ενώ η ενεργειακή πυκνότητα της μάζας είναι χαμηλότερη κατά μερικά εκατοστά. Είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα αυτό δεν επαρκεί για την επιβολή περιορισμών επί των κοσμολογικών παραμέτρων καθώς ουσιαστικά επιτρέπει μεγάλο εύρος τιμών της πυκνότητας σκοτεινής ενέργειας.

Στην Εικόνα 3.6 φαίνεται ότι τα σημεία εντός της περιοχής 1σ παίρνουν τιμές στο εύρος των παραμέτρων $\Omega_{m,0} \in [0.226, 0.304]$ $w \in [-1.230, -0.685]$. Επίσης, η θέση του σημείου βέλτιστης προσαρμογής είναι πολύ κοντά στην ευθεία $w=-1$ που αντιστοιχεί στο Λ CDM. Το αποτέλεσμα αυτό μας παρέχει ισχυρό περιορισμό στην τιμή του $\Omega_{m,0}$ αλλά ασθενή περιορισμό στην τιμή του w . Συγκεκριμένα, το σημείο βέλτιστης προσαρμογής βρίσκεται στη θέση $(\Omega_{m,0}, w) = (0.262_{-0.032}^{+0.036}, -0.960 \pm 0.226)$ $x^2 = 23.056$.

Στην Εικόνα 3.9, τα χωρία εμπιστοσύνης με μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχούν στα δεδομένα από μερήσεις της συνάρτησης Hubble. Είναι εμφανές ότι η παραμέτρηση CPL είναι συμβατή με τα δεδομένα μας καθώς το σημείο βέλτιστης προσαρμογής (γκρί κουκίδα) και η μεγαλύτερη επιφάνεια των χωρίων εμπιστοσύνης βρίσκονται εντός της επιτρεπόμενης περιοχής, χαμηλότερα



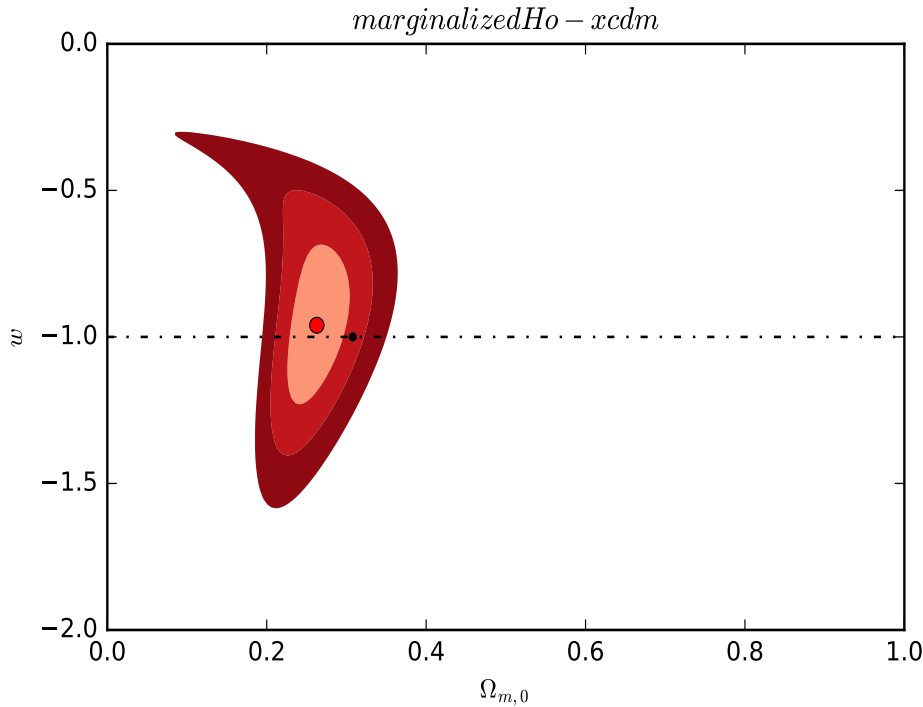
Σχήμα 3.5: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για το Λ CDM μοντέλο στο χώρο των παραμέτρων $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$ όπου η σταθερά του Hubble έχει περιθωριοποιηθεί. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής είναι το (0.250,0.693), και στο σημείο αυτό $\chi^2 = 23.0035$. Επίσης η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στο επίπεδο Σύμπαν.

δηλαδή απο την κόκκινη διακεκομμένη γραμμή. Η θέση του σημείου βέλτιστης προσαρμογής με $w_0 = -0.967$, $w_1 = 0.072$ σχεδόν συμπίπτει με αυτή του Λ CDM (κόκκινο αστέρι). Το εύρος των παραμέτρων στην περιοχή 1σ είναι $w_0 \in [-1.303, -0.711]$ και $w_1 \in [-0.710, -0.947]$.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι ανεξάρτητα απο την αβεβαιότητα στην τιμή της σταθερας του Hubble, γεγονός που μας επιτρέπει να καταλήξουμε σε στέρεα συμπεράσματα για το εύρος των κοσμολογικών παραμέτρων. Ωστόσο, αυτό το πλεονέκτημα έρχεται με κάποιο τίμημα, το οποίο είναι η μικρή διεύρυνση των εμβαδών των χωρίων εμπιστοσύνης. Το μειονέκτημα αυτό μπορεί να αντισταθμιστεί απο τη συνδυασμένη χρήση κοσμολογικών ιχνηλατών, όπως επι παραδείγματι μετρήσεις απο υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia.

3.2 Δεδομένα απο SNIa

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης πιθανοφανειας των αποστάσεων φωτεινότητας ως προς τις κοσμολογικές παραμέτρους για μια σειρά δεδομένων απο υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia. Οι τελευταίοι είναι ουσιαστικά λευκοί νάνοι, οι οποίοι ανήκουν σε κάποιο πολλαπλό αστρικό σύστημα όπου μέσω της διαδικασίας της προσαύξεσης μάζας (accretion), σωρεύεται μάζα μεγαλύτερη απο $1.44 M_{\odot}$ και συνεπακόλουθα εκρύνονται. Η συλλογή που χρησιμοποιήθηκε αναφέρεται ως Union 2.1 και συνετέθηκε απο τους Suzuki *et al.*, [16], και Kowalski *et al.*, [7]. Ουσιαστικά αποτελείται απο 580 τιμες του distant modulus στο διάστημα των ερυθρομετατοπίσεων 0.0149 ως 1.414. Η μέθοδος συνίσταται στην λήψη φωτομετρικών καμπυλών και στην εκμετάλλευση της εμπειρικής συσχέτισης της μέγιστης φωτεινότητας ενός υπερκαινοφανούς Ia και του ρυθμού μείωσης αυτής. Στην βιβλιογραφία υπάρχει μια νέα συλλογή δεδομένων απο φωτομετρικές καμπύλες υπερκαινοφανών SN Ia, αυτή των Betoule *et al.*, 2014, [3]. Η τελευταία,



Σχήμα 3.6: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για το χωρικά επίπεδο $wCDM$ μοντέλο στο χώρο των παραμέτρων $\Omega_{m,0}$, w όπου η σταθερά του Hubble έχει περιθωριοποιηθεί. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής βρίσκεται στη θέση $(\Omega_{m,0}, w) = (0.262, -0.960)$ και η τιμή του χ^2 στη θέση αυτή είναι 23.0563. Η ευθεία $w = -1$ αντιστοιχεί στο $\Lambda CD M$ μοντέλο.

παρότι αποτελείται από μεγαλύτερο αριθμό δεδομένων την αντίστοιχή του Union 2.1, έχει κάποιες τεχνικές δυσχέρειες ως προς τη χρήση των δεδομένων της. Λόγω του τελευταίου, χρησιμοποιήσαμε τα δεδομένα του Union 2.1.

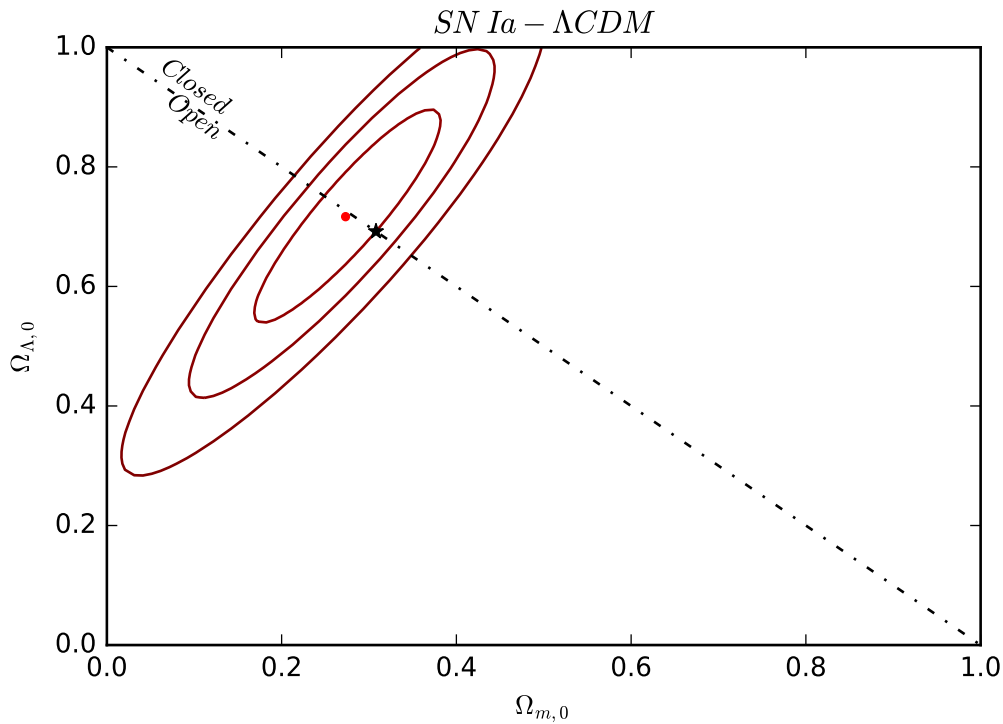
3.2.1 Ανάλυση πιθανοφάνειας ανεξάρτητη της σταθεράς του Hubble

Στην παρούσα υποενότητα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της ανάλυσης πιθανοφάνειας για τα δεδομένα από υπερκαινοφανείς. Θα γίνει επίσης σύγκριση με τα αποτελέσματα των Suzuki *et al.*, [16], τα οποία όμως λήφθηκαν με τρόπο εξαρτώμενο από την σταθερά του Hubble, H_0 .

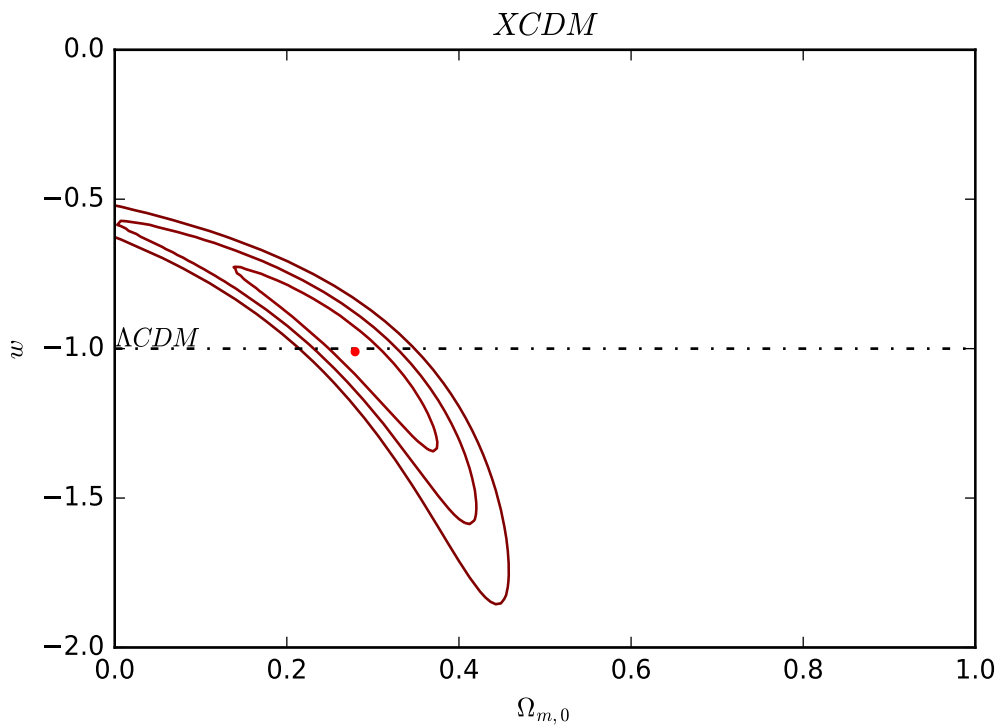
Στην Εικόνα 3.7 μπορούμε να δούμε ότι το σημείο βέλτιστης προσαρμογής βρίσκεται πολύ κοντά στην ευθεία που αντιστοιχεί σε επίπεδο σύμπαν. Ακόμα, η περιοχή 1σ βρίσκεται στο εύρος των παραμέτρων $\Omega_{m,0} \in [0.169, 0.382]$, $\Omega_{\Lambda,0} \in [0.540, 0.896]$, ενώ το σημείο βέλτιστης προσαρμογής βρίσκεται στη θέση $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}) = (0.273, 0.717)$ όπου $\chi^2 = 562.233$. Παρατηρούμε επίσης ότι το προβλεπόμενο σημείο βρίσκεται οριακά εντός της περιοχής 1σ.

Στην Εικόνα 3.8 βλέπουμε ότι το σημείο βέλτιστης προσαρμογής κείται επί της ευθείας $w = -1$, συνεπώς το επίπεδο CDM μοντέλο ανάγεται στο $\Lambda CD M$. Παραπέρα, η περιοχή 1σ βρίσκεται στο εύρος των παραμέτρων $\Omega_{m,0} \in [0.138, 0.375]$, $w \in [-1.344, -0.726]$.

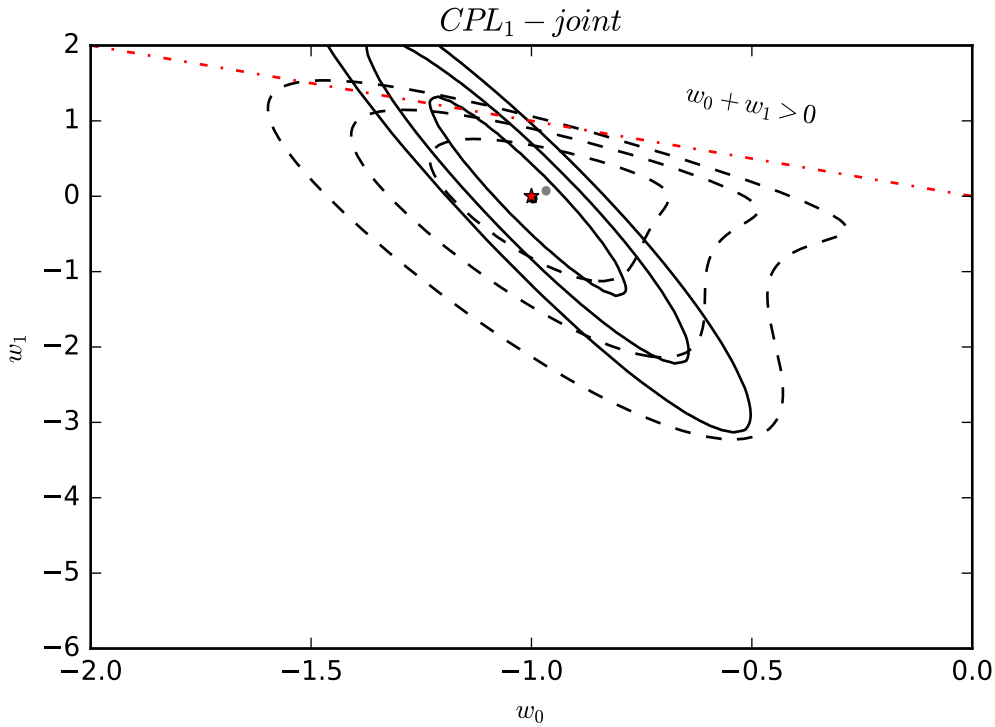
Στην Εικόνα 3.9 βλέπουμε ότι η παραμέτρηση CPL του χωρικά επιπέδου μοντέλου $\phi CD M$ είναι συμβατή με τα δεδομένα τόσο από υπερκαινοφανείς όσο και από μετρήσεις $H(z)$. Ακόμα, το σημείο που αντιστοιχεί στο $\Lambda CD M$ βρίσκεται εντός της περιοχής 1σ και για τα δύο σετ δεδομένων, κάτι που σημαίνει ότι η CPL παραμέτρηση εκφυλίζεται στο $\Lambda CD M$. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής για τα δεδομένα από υπερκαινοφανείς Ia είναι το $w_0 = 0.997$, $w_1 = -0.033$ με $\chi^2 = 562.231$ και εντός της περιοχής 1σ οι τιμές των παραμέτρων βρίσκονται στα διαστήματα $w_0 \in [-1.231, -0.786]$



Σχήμα 3.7: Χωρία εμπιστοσύνης 1 σ -2 σ -3 σ για το μοντέλο Λ CDM στο χώρο των παραμέτρων $\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}$. Η ευθεία αντιστοιχεί σε επίπεδο Σύμπαν. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής είναι το σημείο $\Omega_{m,0} = 0.273, \Omega_{\Lambda,0} = 0.716$ με $\chi^2 = 562.233$. Το αστέρι αντιστοιχεί στις προβλεπόμενες τιμές.



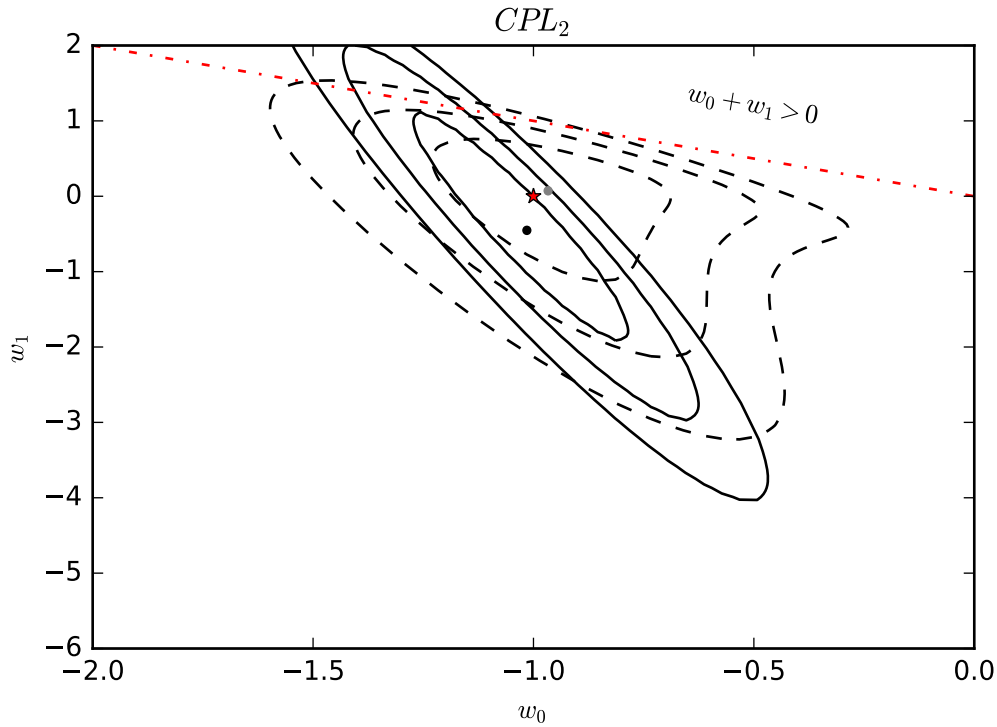
Σχήμα 3.8: Χωρία εμπιστοσύνης 1 σ -2 σ -3 σ για το μοντέλο x CDM στο χώρο των παραμέτρων $\Omega_{m,0}, w$. Η ευθεία $w = -1$ αντιστοιχεί στο όριο όπου τείνουμε στο Λ CDM. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής είναι το σημείο $\Omega_{m,0} = 0.279, w = -1.010$ με $\chi^2 = 562.233$.



Σχήμα 3.9: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για την παραμέτρηση CPL του χωρικά επίπεδου μοντέλου ϕ CDM στο χώρο των παραμέτρων w_0, w_1 για $\Omega_{m,0} = 0.279$. Το μαύρο σημείο είναι το σημείο βέλτιστης προσαρμογής για τα δεδομένα απο υπερκαινοφανείς όπου $w_0 = -1.015, w_1 = -0.452$ με $\chi^2 = 562.244$, ενώ το μαύρο σημείο αντιστοιχεί στο σημείο βέλτιστης προσαρμογής για τα δεδομένα απο μετρήσεις της συνάρτησης Hubble, όπου $w_0 = -1.967, w_1 = 0.072$ με $\chi^2 = 23.041$. Το κόκκινο αστέρι αντιστοιχεί στο Λ CDM, ήτοι $w_0 = -1$ και $w_1 = 0$. Η μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην απαγορευμένη περιοχή όπου το άθροισμα $w_0 + w_1$ γίνεται θετικό.

και $w_1 \in [-1.321, 1.322]$. Συγκρίνοντας με το άλλο διάγραμμα της ίδιας εικόνας, αυτό με διακεκομμένη μαύρη γραμμή, το οποίο προέρχεται απο ανάλυση πιθανοφάνειας με χρήση δεδομένων απο μετρήσεις της συνάρτησης Hubble, μπορούμε εύκολα να δούμε μια μείωση του εμβαδού των χωρίων εμπιστοσύνης. Το τελευταίο είναι λογικό καθώς τα δεδομένα απο $H(z)$ είναι πολύ λιγότερα το πλήθος απο αυτά των υπερκαινοφανών τύπου Ia. Να σημειωθεί επίσης οτι τα χωρία εμπιστοσύνης για τα δεδομένα απο υπερκαινοφανείς "βγαίνουν" λίγο εκτός της επιτρεπόμενης περιοχής, όπου δηλαδή το άθροισμα $w_0 + w_1$ γίνεται μεγαλύτερο του μηδενός. Να τονιστεί όμως οτι η παραμετροποίηση που χρησιμοποιήσαμε αποτελεί απλώς μια φαινομενολογική περιγραφή και οτι τα αποτελέσματα μας εξαρτώνται απο την παραμέτρηση.

Στην Εικόνα 3.10 έχουμε τα χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για την παραμέτρηση CPL του επίπεδου μοντέλου ϕ CDM στο χώρο των παραμέτρων w_0, w_1 για $\Omega_{m,0} = 0.308$. Βλέπουμε οτι η παραμέτρηση CPL του χωρικά επίπεδου μοντέλου ϕ CDM είναι συμβατή με τα δεδομένα τόσο απο υπερκαινοφανείς όσο και απο μετρήσεις $H(z)$. Ακόμα, το σημείο που αντιστοιχεί στο Λ CDM βρίσκεται πλέον οριακά εντός της περιοχής 1σ και για τα δύο σετ δεδομένων, κάτι που σημαίνει οτι η CPL παραμέτρηση εκφυλίζεται στο Λ CDM. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής για τα δεδομένα απο υπερκαινοφανείς Ia είναι το $w_0 = -1.015, w_1 = -0.452$ με $\chi^2 = 562.244$ και εντός της περιοχής 1σ οι τιμές των παραμέτρων βρίσκονται στα διαστήματα $w_0 \in [-1.272, -0.785]$ και $w_1 \in [-1.915, 1.120]$. Συγκρίνοντας με το άλλο διάγραμμα της ίδιας εικόνας, αυτό με διακεκομμένη μαύρη γραμμή, το οποίο προέρχεται απο ανάλυση πιθανοφάνειας με χρήση δεδομένων απο μετρήσεις της συνάρτησης Hubble, και πάλι βλέπουμε μια μείωση του εμβαδού των χωρίων εμπιστοσύνης. Εν αντιθέσει με την Εικόνα 3.9, βλέπουμε οτι τα χωρία εμπιστοσύνης για τα δεδομένα



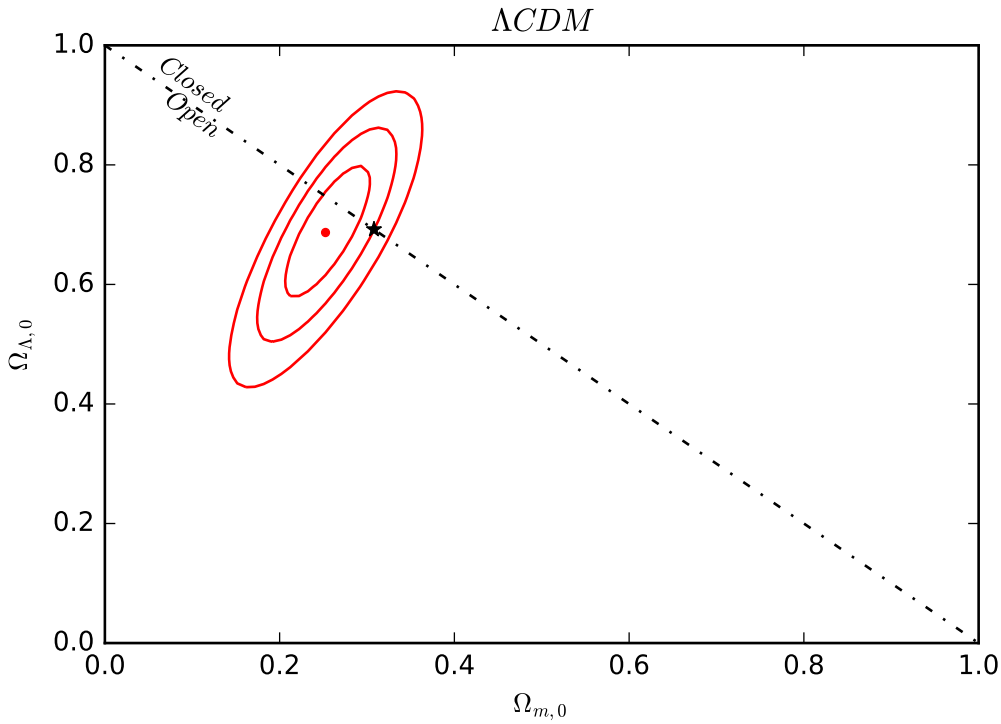
Σχήμα 3.10: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για την παραμέτρηση CPL του επίπεδου μοντέλου ϕ CDM στο χώρο των παραμέτρων w_0, w_1 για $\Omega_{m,0} = 0.308$. Τα χωρία με διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχούν στα δεδομένα απο μετρήσεις H(z), ενώ τα χωρία με συμπαγή γραμμή αντιστοιχούν σε μετρήσεις απο υπερκαινοφανείς. Το μαύρο σημείο είναι το σημείο βέλτιστης προσαρμογής για τα δεδομένα απο υπερκαινοφανείς όπου $w_0 = -1.015$, $w_1 = -0.452$ με $\chi^2 = 562.244$, ενώ το γκριζο σημείο αντιστοιχεί στο σημείο βέλτιστης προσαρμογής για τα δεδομένα απο μετρήσεις της συνάρτησης Hubble, όπου $w_0 = -1.015$, $w_1 = -0.452$ με $\chi^2 = 562.244$. Το κόκκινο αστέρι αντιστοιχεί στο Λ CDM, ήτοι $w_0 = -1$ και $w_1 = 0$. Η μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην απαγορευμένη περιοχή όπου το άθροισμα $w_0 + w_1$ γίνεται θετικό.

απο υπερκαινοφανείς είναι σε μεγαλύτερο βαθμό εντός της επιτρεπόμενης περιοχής. Παρατηρούμε δηλαδή οτι η αύξηση της τιμής της ενεργειακής πυκνότητας σκοτεινής ενέργειας κατα περίπου 3 δέκατα οδηγεί σε μικρή μετακίνηση προς τα κάτω στην διεύθυνση του μεγάλου άξονα των ελλείψεων των χωρίων εμπιστοσύνης.

3.3 Συζευγμένη ανάλυση δεδομένων απο SN Ia και H(z)

Στην ενότητα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της συνθεώρησης των δεδομένων απο υπερκαινοφάνεις αστέρες (ενότητα 3.2) και απο την περιθωριοποίηση της σταθεράς του Hubble (ενότητα 3.2) και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας.

Παρατηρώντας την Εικόνα 3.11 μπορούμε καταρχάς να πούμε οτι ποιοτικά τουλάχιστον έχουμε σημαντική μείωση του εμβαδού των χωρίων εμπιστοσύνης συγκριτικά με αυτό της εικόνας 3.5. Ποσοτικά, έχουμε ότι το εμβαδό των χωρίων εμπιστοσύνης της εικόνας 3.11 εν συγκρίσει με το αντίστοιχο της εικόνας 3.5 είναι 2 φορές μικρότερο. Το τελευταίο συνιστά σημαντική βελτίωση των περιορισμών επί των κοσμολογικών παραμέτρων. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής βρίσκεται στη θέση $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}, \Omega_0) = (0.253, 0.687, 0.059)$ και εντός της περιοχής 1σ έχουμε ότι $\Omega_{m,0} \in [0.206, 0.303]$ και $\Omega_{\Lambda,0} \in [0.580, 0.798]$. Η θέση του σημείου βέλτιστης προσαρμογής υποδηλώνει χωρική καμπυλότητα μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη απο τη μέγιστη παρατηρησιακά επιτρεπόμενη

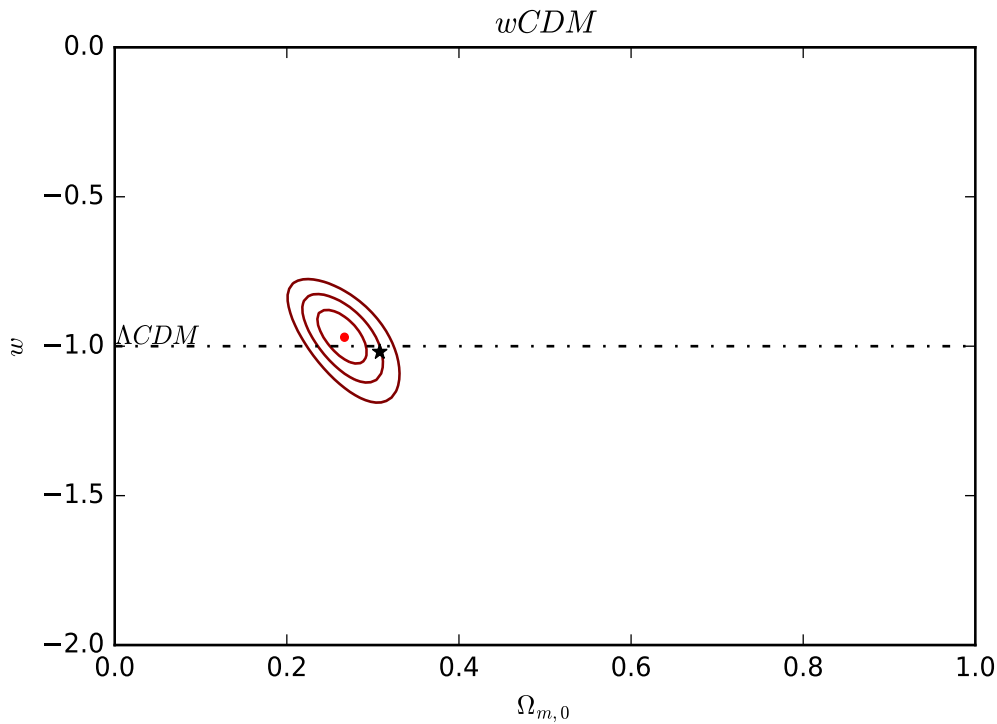


Σχήμα 3.11: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για το Λ CDM μοντέλο στο χώρο των παραμέτρων $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής είναι το $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}) = (0.253, 0.687)$. Η τιμή της χ^2 στο σημείο αυτό είναι 585.391. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί σε επίπεδο Σύμπαν.

τιμή. Ωστόσο, η ευθεία $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$ διέρχεται εντός της περιοχής 1σ συνεπώς τα αποτελέσματα μας είναι συμβατά με χωρικά επίπεδο σύμπαν. Ακόμα, το σημείο που αντιστοιχεί στις τιμές του PLANCK βρίσκεται εντός της περιοχής 2σ. Καταλήγουμε λοιπόν σε περιορισμό των πυκνοτήτων μάζας και ενέργειας σε εύρος μερικών δεκάτων.

Στην Εικόνα 3.12 βλέπουμε ότι το εμβαδό των χωρίων εμπιστοσύνης μειώθηκε αισθητά. Η θέση του σημείου βέλτιστης προσαρμογής βρίσκεται οριακά επί της ευθείας $w = -1$ και άρα υπάρχει αναγωγή στο Λ CDM μοντέλο. Επίσης, η τιμή της χ^2 στο ελάχιστο είναι λίγο μεγαλύτερη από την αντίστοιχη για την Εικόνα 3.11, κάτι που υποδηλώνει "προτίμηση" του Λ CDM μοντέλου εν συγκρίσει με το XCDM. Ακόμα, εντός της περιοχής 1σ βρίσκονται τα σημεία $\Omega_{m,0} \in [0.235, 0.293]$ και $w \in [-1.058, -0.879]$. Βλέπουμε δηλαδή ότι επιτεύχθηκε περιορισμός της ενεργειακής πυκνότητας μάζας σε εύρος μερικών εκατοστών και περιορισμός της παραμέτρου του ρευστού της σκοτεινής ενέργειας σε εύρος περίπου 2 δεκάτων.

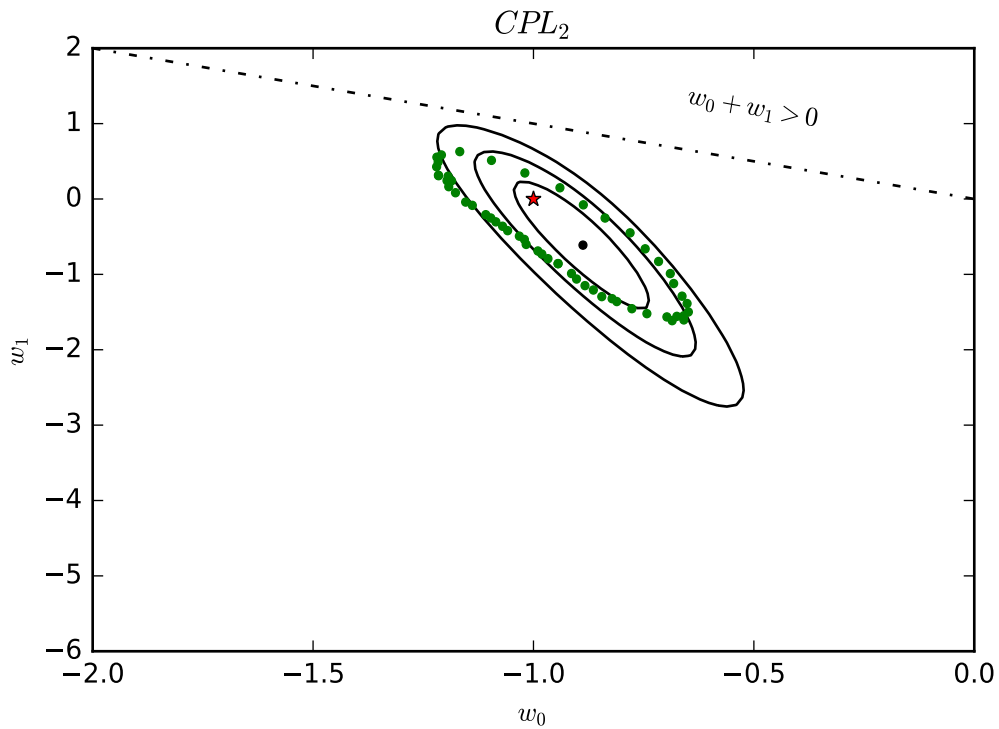
Στην εικόνα 3.13 βλέπουμε τα αποτελέσματα της συζευγμένης ανάλυσης πιθανοφάνειας για τα δεδομένα από υπερκαινοφανείς τύπου Ia και μετρήσεις της συνάρτησης Hubble, όπου θέσαμε $\Omega_{m,0} = 0.308$. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής βρίσκεται στη θέση $(w_0, w_1) = (-0.651, -0.535)$ όπου $\chi^2 = 588.037$. Για τα σημεία εντός της περιοχής 1σ ισχύει ότι $w_1 \in [-1.452, 0.230]$ και $w_0 \in [-1.045, -0.738]$. Έχουμε επίσης ότι στο σημείο που αντιστοιχεί στο Λ CDM ($\Delta\chi^2 = 589.151$), $\Delta\chi^2 = 1.113$. Παρατηρούμε σχεδόν πλήρη αλληλεπικάλυψη των χωρίων εμπιστοσύνης του PLANCK από τα δικά μας. Να σημειωθεί ότι όλες οι υπόλοιπες συζευγμένες αναλύσεις σε άλλες συλλογές δεδομένων που έγιναν από τους Abe *et al.*, [?] Στην εικόνα 3.14 βλέπουμε τα αποτελέσματα της συζευγμένης ανάλυσης πιθανοφάνειας για τα δεδομένα από υπερκαινοφανείς τύπου Ia και μετρήσεις της συνάρτησης Hubble. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής βρίσκεται στη θέση $(w_0, w_1) = (-1.007, 0.053)$ όπου $\chi^2 = 585.349$. Για τα σημεία εντός της περιοχής 1σ ισχύει ότι $w_0 \in [-1.137, -0.858]$ και $w_1 \in [-0.828, 0.689]$. Είναι πασίδηλο το γεγονός ότι το CPL μοντέλο εκφυλίζεται στο Λ CDM, καθώς όχι μόνο το σημείο που αντιστοιχεί σε αυτό βρίσκεται εντός της περιοχής 1σ, άλλα και



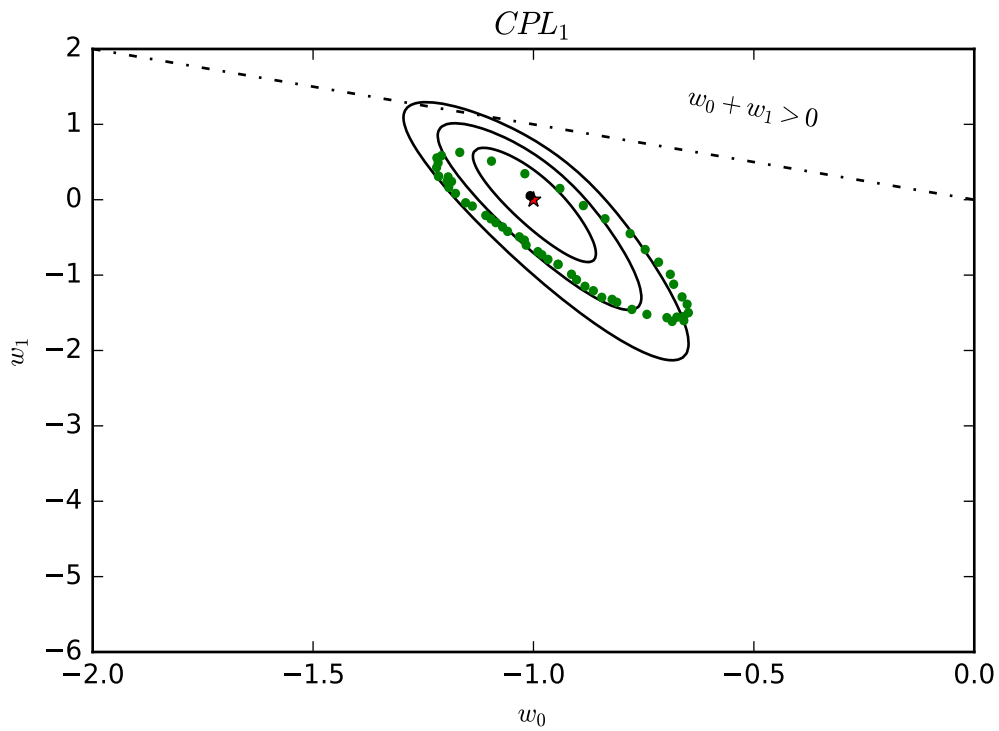
Σχήμα 3.12: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για το χωρικά επίπεδο $wCDM$ μοντέλο στο χώρο των παραμέτρων $\Omega_{m,0}$, w . Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής είναι το $(\Omega_{m,0}, w) = (0.27, -0.97)$. Η τιμή της χ^2 στο σημείο αυτό είναι 585.37. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί σε επίπεδο Σύμπαν.

διαφέρει ελάχιστα από το σημείο βέλτιστης προσαρμογής. Φαίνεται επίσης ότι τα χωρία εμπιστοσύνης βρίσκονται εξ' ολοκλήρου εντός της επιτρεπόμενης περιοχής. Εν συγκρίσει τώρα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των PLANCK, [1], μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει μεγάλη επικάλυψη. Να σημειωθεί ότι το εμβαδό των χωρίων μας είναι συγκρίσιμο με αυτό των χωρίων εμπιστοσύνης των Planck (συζευγμένα με μετρήσεις από BAO, δεδομένα των Betoule *et al.*, [3] και δεδομένα H_0), [1]. *Hubble*.

Τέλος, να τονιστεί ότι εν αντιθέσει με αντίστοιχα αποτελέσματα στην πλειοψηφία της βιβλιογραφίας, τα προαναφερθέντα είναι ανεξάρτητα της τιμής του H_0 , κάτι που τα καθιστά περισσότερο αξιόπιστα.



Σχήμα 3.13: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για την CPL παραμέτρηση στο χώρο των παραμέτρων w_0, w_1 όπου για τη τιμή της ενεργειακής πυκνότητας μάζας έχει χρησιμοποιηθεί η προβλεπόμενη τιμή. $w_0, w_1 = (-1.007, -0.535)$. Η τιμή της χ^2 στο σημείο αυτό είναι 588.037. Το κόκκινο αστέρι αντιστοιχεί στο Λ CDM μοντέλο. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην μη επιτρεπτή περιοχή όπου το άθροισμα των w_0, w_1 γίνεται μεγαλύτερο του μηδενός. Τα πράσινα σημεία αντιστοιχούν σε σημεία των χωρίων εμπιστοσύνης του PLANCK.



Σχήμα 3.14: Χωρία εμπιστοσύνης 1σ-2σ-3σ για την CPL παραμέτρηση στο χώρο των παραμέτρων w_0, w_1 όπου για τη τιμή της ενεργειακής πυκνότητας μάζας έχει χρησιμοποιηθεί η τιμή που εξήχθει από την εικόνα 3.5. Το σημείο βέλτιστης προσαρμογής είναι το $(w_0, w_1) = (-1.007, 0.053)$. Η τιμή της χ^2 στο σημείο αυτό είναι 585.349. Το κόκκινο αστέρι αντιστοιχεί στο Λ CDM μοντέλο. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην μη επιτρεπτή περιοχή όπου το άθροισμα των (w_0, w_1) γίνεται μεγαλύτερο του μηδενός. Τα πράσινα σημεία αντιστοιχούν σε σημεία των χωρίων εμπιστοσύνης του PLANCK.

Πίνακας 3.2: Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα μας από την ανάλυση πιθανοφάνειας. Το πρώτο τμήμα του παρακάτω πίνακα αφορά τα αποτελέσματα της ανάλυσης πιθανοφάνειας με χρήση των δεδομένων από μετρήσεις της συνάρτησης Hubble σε διάφορες ερυθρομεταθέσεις. Το δεύτερο τμήμα αφορά τα αντίστοιχα αποτελέσματα με χρήση δεδομένων από αποστάσεις φωτεινότητας υπερκαινοφανών τύπου Ia. Τέλος, στο τρίτο τμήμα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της συζυγμένης ανάλυσης πιθανοφάνειας. Διπλά σε κάθε τιμή βέλτιστης προσαρμογής παρουσιάζεται και το εύρος του διαστήματος 1σ .

Κοσμ. Μο-ντέλα	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{DE,0}$	$\Omega_{K,0}$	w_0	w_1	$\chi^2_{min.}$	$\frac{\chi^2_{min.}}{\nu}$
Λ CDM	$0.250^{+0.0393}_{-0.0435}$	$0.693^{+0.147}_{-0.186}$	0.057	-1	0	23.003	?
w CDM	0.262, [0.225, 0.304]	0.738	0	-0.960, [-1.230, -0.685]	0	23.056	?
CPL ₁	0.279	0.750	0	-0.967, [-1.303, -0.711]	0.072, [-0.710, 0.947]	23.041	?
CPL ₂	0.308	0.692	0	-0.687, [-0.951, -0.407]	-1.010, [-2.557, 0.030]	23.666	?
Λ CDM	0.273, [0.169, 0.382]	0.716, [0.540, 0.896]	0.011	-1	0	562.233	?
w CDM	0.279, [0.138, 0.375]	0.721	0	-1.010, [-1.344, -0.726]	0	562.234	?
CPL ₁	0.279	0.721	0	-0.997, [-1.231, -0.786]	-0.033, [-1.321, 1.322]	562.231	?
CPL ₂	0.308	0.692	0	-1.015, [-1.272, -0.785]	-0.452, [-1.915, 1.120]	562.244	?
Λ CDM	0.273, [0.206, 0.303]	0.716, [0.580, 0.798]	0.011	-1	0	585.391	?
w CDM	0.279, [0.138, 0.375]	0.721	0	-1.010, [-1.344, -0.726]	0	585.370	?
CPL ₁	0.250	0.750	0	-1.007, [-1.137, -0.858]	0.053, [-0.828, 0.689]	585.349	?
CPL ₂	0.308	0.692	0	-0.897, [-1.045, -0.738]	-0.535, [-1.452, 0.230]	588.037	?

3.4 Συμπεράσματα και Προεκτάσεις

Στην παρούσα εργασία εξήχθησαν περιορισμοί στις τιμές των κοσμολογικών παραμέτρων των πιο σημαντικών κοσμολογικών μοντέλων. Η σημασία της εργασίας μας έγκειται στην πληρέστερη κατανόηση της κοσμικής ιστορίας. Να τονιστεί ότι έγινε χρήση των πιο πρόσφατων δεδομένων απο μετρήσεις $H(z)$ στο εύρος των ερυθρομετατοπίσεων απο 0 έως και 2.36. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκε κατάλληλος κώδικας σε γλώσσα Python. Προκειμένου να δοκιμαστεί ο τελευταίος, αναπαρήχθησαν παλαιότερα αποτελέσματα στη βιβλιογραφία, με πολύ καλή συνέπεια. Ακολούθως, πραγματοποιήθηκε ανάλυση πιθανοφάνειας των βασικών κοσμολογικών μοντέλων με βάση τα δεδομένα που αναφέρθηκαν παραπάνω, όπως και συζευγμένη ανάλυση αυτών μαζί με δεδομένα απο υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia. Η ανάλυση μας είναι ανεξάρτητη της σταθεράς του Hubble, εν αντιθέσει με την πλειοψηφία των αντίστοιχων εργασιών στη βιβλιογραφία. Το τελευταίο προφανώς συνάδει σε πιο αξιόπιστα αποτελέσματα.

Ως προς τα αποτελέσματα της εργασίας μας, μπορούμε να πούμε οι περιορισμοί για τις κοσμολογικές παράμετρος $\Omega_{m,0}$ και $\Omega_{\Lambda,0}$ είναι πολύ κοντά στα αντίστοιχα του PLANCK. Η χωρική καμπυλότητα απο την άλλη. Ωστόσο, δεν καταλήγουμε σε ισχυρούς περιορισμούς για την χωρική καμπυλότητα, η οποία προκύπτει μεγαλύτερη κατά μία τάξη μεγέθους απο την αντίστοιχη των P. Αντίθετα, η παράμετρος κατάστασης του κοσμικού ρευστού περιορίζεται ισχύρα, με το σχετικό εύρος να είναι συγκρίσιμο με αυτό των PLANCK. Τέλος, για το κοσμολογικό μοντέλο ϕCDM όπου εμπεριέχεται η υπόθεση της χρονικά μεταβαλλόμενης ενεργειακής πυκνότητας σκοτεινής ενέργειας, χρησιμοποιώντας την CPL παραμέτρηση φτάσαμε σε περιορισμό των κοσμολογικών παραμέτρων σε εύρος αντίστοιχο με αυτό του PLANCK.

Απο πλευράς μεθοδολογίας, είναι σκόπιμο να γίνουν κάποιες επισημάνσεις. Καταρχάς, η χρήση των δεδομένων απο μετρήσεις $H(z)$ παρέχει το πλεονέκτημα ότι μετράται άμεσα η ζητούμενη ποσότητα, δηλαδή η τιμή της συνάρτησης Hubble για δοσμένη ερυθρομετατόπιση. Στα δεδομένα απο υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia, επι παραδείγματι, η ζητούμενη πληροφορία ενυπάρχει σε ολοκληρωτική μορφή, πράγμα το οποίο απο την μια αυξάνει το υπολογιστικό κόστος και απο την άλλη οδηγεί σε κάποια απώλεια πληροφορίας λόγω της ολοκλήρωσης. Ένα άλλο σημείο που πρέπει επίσης να τονιστεί είναι η διαχείριση της σταθεράς του Hubble. Η περιθωριοποίηση της σταθεράς του Hubble, ήτοι ολοκλήρωση της, παρότι οδηγεί σε μικρή αύξηση του εμβαδού των χωρίων εμπιστοσύνης, δεν μπορεί παρα να οδηγεί σε στερεότερα συμπεράσματα καθώς ουσιαστικά μειώσαμε τον χώρο των ελεύθερων παραμέτρων. Απο υπολογιστικής πλευράς, ο κώδικας που αναπτύχθηκε έχει την δυνατότητα εύκολης χρήσης για διάφορα κοσμολογικά μοντέλα.

Τέλος, όσον αφορά τις προεκτάσεις της παρούσας εργασίας, προκύπτουν κάποια ενδιαφέροντα ζητήματα. Ένα ερώτημα που χρήζει περαιτέρω διερεύνησης είναι αυτό του πλήθους ή/και της ποιότητας των μετρήσεων $H(z)$ που απαιτούνται προκειμένου το εύρος των χωρίων εμπιστοσύνης με χρήση μόνο των δεδομένων απο $H(z)$, να γίνει συγκρίσιμο με το αντίστοιχο αυτών που προέκυψαν απο την συζευγμένη ανάλυση πιθανοφάνειας. Το τελευταίο αποτελεί αντικείμενο έρευνας και θα τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν σε επιμέρους εργασίες. Παράλληλα, διερευνάται το ενδεχόμενο με την περάτωση των πιο πάνω εργασιών, ο κώδικας που αναπτύχθηκε να προταθεί για ενσωμάτωση σε κάποιο subpackage της Astropy ώστε να αυτοματοποιηθεί περαιτέρω η ανάλυση πιθανοφάνειας κοσμολογικών μοντέλων.

Βιβλιογραφία

- [1] PAR Ade, N Aghanim, M Arnaud, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, AJ Banday, RB Barreiro, JG Bartlett, N Bartolo, et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13, 2016.
- [2] Spyros Basilakos and Savvas Nesseris. Testing eistein's gravity and dark energy with growth of matter perturbations: Indications for new physics? *arXiv preprint arXiv:1610.00160*, 2016.
- [3] M Betoule, R Kessler, J Guy, J Mosher, D Hardin, R Biswas, P Astier, P El-Hage, M Konig, S Kuhlmann, et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. *Astronomy & Astrophysics*, 568:A22, 2014.
- [4] Michel Chevallier and David Polarski. Accelerating universes with scaling dark matter. *International Journal of Modern Physics D*, 10(02):213--223, 2001.
- [5] Omer Farooq, Foram Madiyar, Sara Crandall, and Bharat Ratra. Hubble parameter measurement constraints on the redshift of the deceleration-acceleration transition, dynamical dark energy, and space curvature. *arXiv preprint arXiv:1607.03537*, 2016.
- [6] Omer Farooq and Bharat Ratra. Hubble parameter measurement constraints on the cosmological deceleration-acceleration transition redshift. *The Astrophysical Journal Letters*, 766(1):L7, 2013.
- [7] Marek Kowalski, David Rubin, Greg Aldering, RJ Agostinho, A Amadon, R Amanullah, C Balland, K Barbary, G Blanc, PJ Challis, et al. Improved cosmological constraints from new, old, and combined supernova data sets. *The Astrophysical Journal*, 686(2):749, 2008.
- [8] Abbe G Lemaitre. A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 91(5):483--490, 1931.
- [9] Eric V Linder. Exploring the expansion history of the universe. *Physical Review Letters*, 90(9):091301, 2003.
- [10] Michele Moresco. Raising the bar: new constraints on the hubble parameter with cosmic chronometers at $z > 2$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 450(1):L16-L20, 2015.
- [11] Michele Moresco, Licia Verde, Lucia Pozzetti, Raul Jimenez, and Andrea Cimatti. New constraints on cosmological parameters and neutrino properties using the expansion rate of the universe to $z > 1.75$. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(07):053, 2012.
- [12] Jeppe Trøst Nielsen, Alberto Guffanti, and Subir Sarkar. Marginal evidence for cosmic acceleration from type ia supernovae. *Scientific reports*, 6, 2016.

- [13] Saul Perlmutter, G Aldering, G Goldhaber, RA Knop, P Nugent, PG Castro, S Deustua, S Fabbro, A Goobar, DE Groom, et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.
- [14] Manolis Plionis, Roberto Terlevich, S Basilakos, F Bresolin, E Terlevich, J Melnick, and R Chavez. A strategy to measure the dark energy equation of state using the h ii galaxy hubble function and x-ray active galactic nuclei clustering: preliminary results. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416(4):2981--2996, 2011.
- [15] Adam G Riess, Alexei V Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M Garnavich, Ron L Gilliland, Craig J Hogan, Saurabh Jha, Robert P Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998.
- [16] N Suzuki, D Rubin, C Lidman, G Aldering, R Amanullah, K Barbary, LF Barrientos, J Botyanszki, M Brodwin, N Connolly, et al. The hubble space telescope cluster supernova survey. v. improving the dark-energy constraints above $z > 1$ and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal*, 746(1):85, 2012.