ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η   Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Η έννοια του συμβόλου του ίσον (=) στη Γεωμετρία

Ηλίας Τυροβολάς
Δ201328

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Σπύρου Παναγιώτης τ. Αναπλ. Καθηγητής

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 22α Σεπτεμβρίου 2017 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪	Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪	Δ. Λάππα	Αναπλ. Καθηγητή
▪	Γ. Ψυχάρη	Επικ.. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪	Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητής
▪	Δ. Λάππα	Αναπλ. Καθηγητής
▪	Α. Μούτσιο-Ρέντζο	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα της παρούσης διπλωματικής εργασίας κ. Σπύρου Παναγιώτη για τις συζητήσεις που είχαμε για την επιλογή του θέματος, για την καθοδήγηση του πριν και κατά τη διάρκεια της εκπόνησης και για τις πολύτιμες συμβουλές του.
- Τον κ. Λάππα Διονύσιο για τις γνώσεις που μου παρείχε, για το ενδιαφέρον που έδειξε και για την τιμή μου έκανε να είναι μέλος της συμβουλευτικής επιτροπής.
- Τον κ. Μούτσιο-Ρέντζο Ανδρέα για τη συνεργασία μας στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, για την επικοινωνία που είχαμε κατά τη διάρκεια των τελευταίων μηνών, για τη συνεχή υποστήριξη, για τις πολύτιμες συμβουλές του και για την επιμονή και υπομονή που έδειξε.
- Τον κ. Ψυχάρη Γιώργο ως σύμβουλο καθηγητή και για την παρουσία του στην εξεταστική επιτροπή.

Περίληψη

Η έλλειψη ερευνητικών μελετών όσον αφορά την ισότητα και την χρήση του συμβόλου του ίσον στον τομέα της Γεωμετρίας, εν αντιθέσει με τον τομέα της Άλγεβρας, οδήγησε στον σχεδιασμό της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Η παρούσα διπλωματική εργασία αντλεί από τη θεωρητική-μεθοδολογική οπτική των Moutsios-Rentzos, Kritikos και Kalavasis (in press) για να μελετήσει αν διαφέρει η χρήση του ίσον ανάμεσα σε Άλγεβρα και Γεωμετρία, πώς εμφανίζεται το ίσον στα σχολικά εγχειρίδια, πώς αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί το σύμβολο, πώς βιώνουν τις διαφορετικές χρήσεις του και τι θα πρότειναν οι ίδιοι σε συναδέλφους τους, στους συγγραφείς των βιβλίων και στην ομάδα σχεδιασμού της ύλης. Η έρευνα κινήθηκε σε τρεις άξονες, πρώτον τη μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας που αφορά την ισότητα και την χρήση του ίσον στην Άλγεβρα και συσχετισμός αυτής με τη Γεωμετρία, δεύτερον ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων με ιδιαίτερη βαρύτητα στις παραγράφους της Γεωμετρίας στη Β’ και Γ’ Γυμνασίου και στην Α’ Λυκείου και τρίτον ανάλυση των συνεντεύξεων που διεξήγαμε με εκπαιδευτικούς που αφορούσαν την χρήση του ίσον στη Γεωμετρία. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να διακρίνουν τις διαφορές του ίσον ανάμεσα σε Άλγεβρα και Γεωμετρία, με σαφείς οδηγίες θα μπορούσαν να διακρίνουν και τις διαφορές αποκλειστικά στη Γεωμετρία. Το βιβλίο καθηγητή χρήζει ανανέωσης με οδηγίες που αφορούν την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν το συμβουλεύονται.

Λέξεις κλειδιά: ίσον, ισότητα, Γεωμετρία

Abstract

The lack of research with respect to the notion of equality and the equal sign in Geometry, in contrast to the Algebra, was led to the design of the present dissertation. The dissertation drew upon the theoretical-methodological framework introduced by Moutsio-Rentzos, Kritikos and Kalavasis (in press) to investigate whether the equal sign is used in Geometry is used differently from Algebra or not, the way it is presented in school textbooks, the ways the teachers deal with this sign, the ways they experience differences in its use and what they would suggest to their colleagues, to the authors of the school books as well as the curriculum design team. The research was conducted in three axes. Firstly, the existing literature concerning equality and the use of equals sign in Algebra was studied as well as the relation between Algebra and Geometry. Secondly, school textbooks were analysed, emphasizing on the paragraphs of Geometry in the 2nd and 3rd year of Junior High School (Gymnasio) and 1st year of Senior High School (Lykeio). Thirdly, an analysis of the interviews conducted among teachers concerning the use of equals sing in Geometry was also included. Teachers can distinguish differences between Algebra and Geometry, while with clear instructions they would be able to distinguish differences within Geometry as well. The teacher's book calls for renewal so that it could include instructions on the concept of equality in Geometry in order for teachers to consult it.

Key words: equals sing, equality, Geometry

Πίνακας Περιεχομένων

Ευρετήριο Πινάκων

Ευρετήριο Εικόνων

1. Εισαγωγή

Η ιστορία των Μαθηματικών μας έχει δείξει ότι η έννοια της ισότητας είναι μία από τις πιο σημαντικές έννοιες της επιστήμης αυτής. Πριν ακόμα γεννηθεί η επιστήμη των Μαθηματικών η έννοια της ισότητας απασχολούσε όσους έκαναν υπολογισμούς. Από τους πρώτους μαθηματικούς της αρχαιότητας μέχρι και τους σύγχρονους, αυτή η έννοια δεν έπαψε ποτέ να είναι στο επίκεντρο της επιστήμης. Στον αρχαιότερο Έλληνα μαθηματικό, τον Θαλή το Μιλήσιο (περ. 624 – 547 π.Χ.) αποδίδεται η έννοια της ισότητας σχημάτων (Katz, V. (1998). A History of Mathematics, An Introduction, Second Edition). Ο Ευκλείδης με το έργο του «Στοιχεία» που γράφτηκε πριν 2300 χρόνια, σφράγισε την εξέλιξη των Μαθηματικών και της Γεωμετρίας. Τα «Στοιχεία» αποτελούνται από 13 βιβλία στα οποία περιέχονται 5 αιτήματα (ή αξιώματα), τα οποία αναφέρονται σε γεωμετρικές προτάσεις ή ιδιότητες που συνδέουν απροσδιόριστους όρους, η αλήθεια τους γίνεται δεκτή και από τον μη ειδικό, χρησιμοποιούνται στη διαδικασία των αποδείξεων. Το τέταρτο αίτημα αναφέρεται στην έννοια της ισότητας. Στο αίτημα αυτό γίνεται η παραδοχή ύπαρξης της ορθής γωνίας και χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης μεταξύ των γωνιών, η μέθοδος της σύγκρισης μέσω της επίθεσης μιας γωνίας σε μία άλλη αφήνει να εννοηθεί ότι κατά τη διάρκεια της μετακίνησης τα σχήματα παραμένουν αναλλοίωτα στο συνεχή και ομοιογενή χώρο. Μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο David Hilbert (1862 – 1943) εργάστηκαν ώστε να βρεθεί ένα πλήρες σύνολο αξιωμάτων, το οποίο θα περιόριζε ή θα εξέλειπε τις παθογένειες των «Στοιχείων». Στο σύστημα του Hilbert τα αξιώματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες, μία εξ αυτών είναι τα αξιώματα ισότητας, η κατηγορία αυτή ορίζει τις βασικές ιδέες της ισότητας και κατ' επέκταση την έννοια της κίνησης, με αυτόν τον τρόπο αξιωματικοποιείται η διαδικασία της επίθεσης που χρησιμοποιείται στα στοιχεία του Ευκλείδη (Katz, V. (1998). A History of Mathematics, An Introduction, Second Edition). Να σημειώσουμε ότι το δεύτερο αξίωμα της ισότητας (συμφωνία ή congruence) αναφέρει ότι: $Αν\ A'B' \equiv AB\ και\ A''B'' \equiv AB\ τότε\ και\ A'B' \equiv A''B''$, από το αξίωμα αυτό προκύπτει ότι η ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας, συνεπώς ισχύει η μη αυτονόητη σχέση $AB \equiv AB$ (Βασιλείου 2012).

Μέσα σε αυτή την πορεία των μαθηματικών, που πολύ επιγραμματικά είδαμε νωρίτερα, η έννοια της ισότητας απέκτησε και ένα δικό της σύμβολο που την εκφράζει.

Το σύμβολο του ίσον όπως το ξέρουμε επινοήθηκε από τον Robert Recorde το 1557, ο οποίος γράφει στις σημειώσεις του «Για να αποφύγω την κουραστική επανάληψη των λέξεων αυτών – είναι ίσο προς – θα χρησιμοποιώ, όπως κάνω συχνά όταν εργάζομαι, ένα ζεύγος παράλληλων, ή δίδυμα ισομήκη ευθύγραμμα τμήματα, =====, επειδή δεν μπορεί να υπάρχουν δύο πιο ίσα πράγματα» (Katz, V. (1998). A History of Mathematics, An Introduction, Second Edition).

2. Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1 Εισαγωγή

Η σχέση ισότητας η οποία συμβολίζεται με το σύμβολο της ισότητας, δηλαδή το σύμβολο του «ίσον» είναι μια θεμελιώδης έννοια που χρησιμεύει ως βασικός σύνδεσμος μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας. Το σύμβολο του ίσον στα μαθηματικά είναι ίσως το πιο διαδεδομένο σύμβολο και η πανταχού παρουσία του σε όλα τα επίπεδα των μαθηματικών τονίζει τη σημασία του, η κατανόηση του θεωρείται από πολλούς καθηγητές σχετικά απλή, στην πραγματικότητα, μετά την αρχική του εισαγωγή στο μάθημα των μαθηματικών, δαπανάται πολύ λίγος χρόνος στην κατανόηση και στην εμβάθυνση της κατανόησης της έννοιας και έτσι η έρευνα δείχνει ότι πολλοί μαθητές, σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, δεν έχουν αναπτύξει επαρκή κατανόηση του συμβόλου και συναντούν διάφορες δυσκολίες όταν έρχονται αντιμέτωποι με αυτό (Baroody & Ginsburg, 1983 · Behr, Erlwanger & Nichols, 1976 · Falkner, Levi & Carpenter, 1999 · Kieran, 1981 · Knuth, 2006) συχνά δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν, να μετατρέψουν σύνθετες μορφές εξισώσεων σε απλούστερες και ως εκ τούτου να επιλύσουν εξισώσεις ειδικά όταν σε αυτές εμπλέκονται αρκετοί αριθμητικοί όροι (Herscovics, Linchevski 1994 · Kieran 2007). Ιδίως στις μικρότερες τάξεις πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στον τρόπο που χρησιμοποιούν το σύμβολο και δεν το αντιλαμβάνονται ως ένα εργαλείο που τους βοηθάει στους αλγεβρικούς συλλογισμούς. Το ίσον υποδηλώνει διάφορα πράγματα όπως το αποτέλεσμα μιας πράξης ή γενικότερα ενός πιο σύνθετου υπολογισμού όπως για παράδειγμα $2 + 3 = 5$, μια ταυτότητα (ταύτιση) όπως $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$, μια συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, μια αντικατάσταση για τη μεταβλητή $x = \frac{3}{2}$ και η λίστα συνεχίζεται.

Η ψηφιακή τεχνολογία, με την οποία πλέον τα παιδιά έρχονται σε επαφή από πολύ μικρή ηλικία, υποστηρίζει επίσης διαφορετικές χρήσεις του ίσον, στους συνηθισμένους υπολογιστές και αριθμομηχανές εμφανίζεται το «=» ως ένα κουμπί που όταν το πατήσουμε μας δίνει το αποτέλεσμα μιας πράξης ή μιας αλληλουχίας πράξεων με αριθμούς και άλλα μαθηματικά σύμβολα. Στον προγραμματισμό και στις γλώσσες προγραμματισμού το «=» (ή πολλές φορές «==») χρησιμοποιείται και για την εκχώρηση τιμών ή για τη σύγκριση δύο εκχωρήσεων (τιμών εισόδων) και για επιστρέψει ένα αποτέλεσμα Boole.

Οι αντιλήψεις των παιδιών σχετικά με το μαθηματικό σύμβολο του ίσον ως γνωστό είναι πολύ σημαντικές στην κατανόηση τόσο της αριθμητικής όσο και της άλγεβρας. Οι περισσότερες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί για το μαθηματικό αυτό αντικείμενο οριοθετούνται ως τη διχοτομία ανάμεσα στην απλοϊκή αντίληψη του ίσον ως το νόημα του «γράψε κάτι εδώ» και στην πιο ώριμη αντίληψη του «αυτό είναι όμοιο με…». Οι μαθητές συνήθως τείνουν να αντιλαμβάνονται το ίσον σαν μια έννοια / σύμβολο που υποδεικνύει την θέση που πρέπει να γράψουν κάτι, δηλαδή σαν μια κενή θέση που πρέπει να δηλώσουν ένα αποτέλεσμα συμπληρώνοντας το κενό (Behr, Erlanger, Nichols 1976 · Kieran 1981 · McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill 2006 · Renwick 1932 · Warren 2003), μικρότερα παιδιά φαίνεται να αντιλαμβάνονται το σύμβολο «=» όπως χρησιμοποιούν τα σύμβολα «$+, -, \cdot, :$». Οι περισσότεροι μαθητές δέχονται πιο εύκολα την δηλωτική έννοια του ίσον και λιγότεροι είναι αυτοί που δέχονται τη διαδικαστική έννοια (Behr 1976). Αυτό τους επιτρέπει να γράφουν $3+4=7$ όμως τους οδηγεί και σε λανθασμένες χρήσεις του ίσον σε διαδικασίες επίλυσης πιο σύνθετων προβλημάτων όπως τη λανθασμένη γραφή και χρήση του συμβόλου στην αλληλουχία πράξεων με έναν ανορθόδοξο γραμμικό τρόπο γραφής όπως αυτός που ακολουθεί $3+4=7+2=9+1=10$ (Hewitt 2001 · Renwick 1932 · Saenz, Ludlow, Walgamuth 1998) και παρ' όλο που η λύση του μαθητή δεν είναι συμβολικά σωστή, δεν πραγματοποιεί κάποιο σφάλμα στον τρόπο που αντιλαμβάνεται και που χειρίζεται νοητικά τα δεδομένα του προβλήματος . Οι μαθητές επίσης, δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν τις ιδιότητες των αντίστροφων πράξεων, για παράδειγμα από την πρόσθεση $3+5-8$ δεν φτάνουν εύκολα στις αφαιρέσεις $8-3=5$ και $8-5=3$. Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι αυτές οι αντιλήψεις οδηγούν τους μαθητές σε σύγχυση και σε δυσκολίες στην κατανόηση της άλγεβρας που προκαλούνται και από τη λανθασμένη χρήση της στην καθημερινή ζωή. Επικρατεί από πολλούς η αντίληψη ότι η άλγεβρα δεν έχει πρακτικές εφαρμογές και ότι δεν είναι χρήσιμη στην καθημερινότητα μας, όμως στη σύγχρονη ζωή όλο και πιο πολύ χρησιμοποιούμε το λεξιλόγιο της άλγεβρας, στην καθημερινή γλώσσα λέμε «αυτό είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων ή συναρτήσει πολλών παραγόντων», «ο ρυθμός ανάπτυξης της οικονομίας», «απόψε θα σημειωθούν αρνητικές θερμοκρασίες» κτλ., χρησιμοποιούμε γραφήματα και διαβάζουμε στατιστικές έρευνες. Η άλγεβρα έχει τη δική της δομή, τις δικές της αρχές και κανόνες, πολλές φορές οι κανόνες αυτοί έρχονται σε αντίθεση με τους κανόνες της αριθμητικής αλλά και τις καθημερινής γλώσσας. Έχουν παρατηρηθεί δυσκολίες στη διαδικασία μετατροπής των λεκτικών δεδομένων ενός προβλήματος σε μαθηματική ισότητα με μία μεταβλητή.

Παρόλα αυτά υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι τέτοιες καταστάσεις μπορούν να αποφευχθούν από τον διδάσκοντα, διδάσκοντας στους μαθητές να χρησιμοποιούν το ίσον με την έκφραση «είναι το ίδιο με…» που τους επιτρέπει την πρόσβαση σε μια ευρεία ποικιλία τύπων δήλωσης (Baroody, Ginsburg 1983 · Carpenter, Franke, Levi 2003 · Li 2008 · Linchevsky, Livneh 1999 · Molina, Castro, Mason, 2008 · Pirie Martin 1997 · Rittle-Johnson, Matthews, Taylor, McEldoon, 2011). Η αντιμετώπιση των εμποδίων και η υπέρβασή τους είναι καθοριστική για το ομαλό πέρασμα από τον κόσμο της αριθμητικής στον κόσμο της άλγεβρας (Van Amerom, 2003), διαφορετικά οι μαθητές θα συνεχίζουν να δρουν παθητικά χωρίς να σκέφτονται ενεργά και να κατανοούν, δυσκολευόμενοι να αναγνωρίσουν τις αλγεβρικές δομές. Οι δυσκολίες αφορούν κυρίως την κατανόηση της μεταβλητής (ή του αγνώστου στις εξισώσεις) και την επίλυση εξισώσεων.

Η δομική κατανόηση της άλγεβρας προέρχεται από την ικανότητα των μαθητών να «βλέπουν» αφηρημένες ιδέες κρυμμένες πίσω από τα σύμβολα (Kieran, 2007). Για τους μαθητές με μια δομική αντίληψη των εξισώσεων, τα σύμβολα γίνονται διαφανή και ο εντοπισμός των επιτρεπόμενων μετασχηματισμών είναι απλός (Carpenter, 2003 · Knuth, 2005). Τα παιδιά που έχουν μια αντίληψη για το ίσον ως μια έννοια ομοιότητας και μπορούν να αποδεχθούν μια ευρεία ποικιλία αριθμητικών τύπων δήλωσης έχουν για το ίσον μια σχεσιακή άποψη (Baroody, Ginsburg 1983).

2.2 Τι μας Δείχνουν οι Έρευνες

Στην έρευνα των Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil και Stephens (2008) μαθητές κλήθηκαν να παράσχουν έναν ορισμό για το σύμβολο του ίσον μέσω ενός τεστ που τους δόθηκε. Το τεστ απαιτεί από τους μαθητές να «ονομάσουν» το σύμβολο του ίσον (πρώτη προτροπή), ζητάει να παρέχουν μια δήλωση σχετικά με την έννοια του συμβόλου δηλαδή τη σημασία του ίσον (δεύτερη προτροπή) και στη συνέχεια, αν είναι δυνατόν, να παρέχουν μια εναλλακτική σημασία του ίσον (τρίτη προτροπή). Για να απαντηθούν τα ερωτήματα αυτά, στους μαθητές δόθηκε το ακόλουθο:

$3 + 4 = 7$
Α) το βελάκι στην προηγούμενη γραμμή δείχνει ένα σύμβολο. Πώς ονομάζεται αυτό το σύμβολο;
Β) τι σημαίνει αυτό το σύμβολο;
Γ) σημαίνει κάτι άλλο αυτό το σύμβολο;

Εικόνα 1 – Οι 3 προτροπές προς τους μαθητές

Η πρώτη προτροπή είχε ως στόχο να προκαταβάλει τους ερωτηθέντες να χρησιμοποιήσουν το όνομα του συμβόλου στη δεύτερη προτροπή πχ το σύμβολο σημαίνει ίσα. Το σκεπτικό της ερευνητικής ομάδας πίσω από την τρίτη προτροπή βασίστηκε σε παλιότερες εργασίας της ερευνητικής ομάδας που έδειξαν ότι οι μαθητές προσφέρουν περισσότερες από μία ερμηνείες ενός συμβόλου, πόσο μάλλον για το ίσον.

Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα κατατάχθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες σχετικά με τη χρήση του ίσον:

i. Σχεσιακή
ii. Λειτουργική
iii. Άλλο
iv. Άγνοια ή καθόλου απόκριση στα ερωτήματα

Στην πρώτη κατηγορία (i σχεσιακή) κατατάχθηκαν όσοι μαθητές εξέφρασαν τη γενική ιδέα/έννοια του ίσον ως μια ισοδυναμία μεταξύ μεγεθών, όπου είναι και το επιθυμητό αποτέλεσμα. Καταλαβαίνουν το σύμβολο της ισότητας ως ένα σύμβολο που εκφράζει μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των δύο εκφράσεων και όχι μεταξύ δύο υπολογισμών. Σε αυτή την κατηγορία οι μαθητές έδωσαν απαντήσεις όπως

- Σημαίνει ότι ό,τι είναι στα αριστερά (αριστερό μέλος της ισότητας) είναι ίδιο με ό,τι είναι στα δεξιά (δεξί μέλος της ισότητας)
- Το ίδιο με…, ίδια τιμή στα δύο μέλη της ισότητας

- Το αριστερό μέλος της ισότητας λαμβάνει την ίδια τιμή με το δεξί

Στη δεύτερη κατηγορία (ii λειτουργική) κατατάχθηκαν όσοι μαθητές εξέφρασαν το ίσον ως την θέση που πρέπει να μπει ο αριθμός ή γενικά η απάντηση, δηλαδή ως κίνητρο για «να κάνουν κάτι», «να υπολογίσουν κάτι» και μόνον έτσι. Μαθητές με τέτοια αντίληψη είναι πολύ πιθανόν να απορρίψουν εξισώσεις όπως $8 = 8$ ως ψευδείς γιατί δεν υπάρχει μια εμφανής δράση. Σε αυτή την κατηγορία οι μαθητές έδωσαν απαντήσεις όπως οι ακόλουθες

- Το ίσον είναι το άθροισμα δύο αριθμών
- Το ίσον συνδέει την απάντηση με την ερώτηση που τέθηκε στην εκφώνηση του προβλήματος
- Είναι το τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας
- Το πόσο κάνουν οι αριθμοί αν τους βάλω μαζί (αν τους αθροίσω για παράδειγμα)

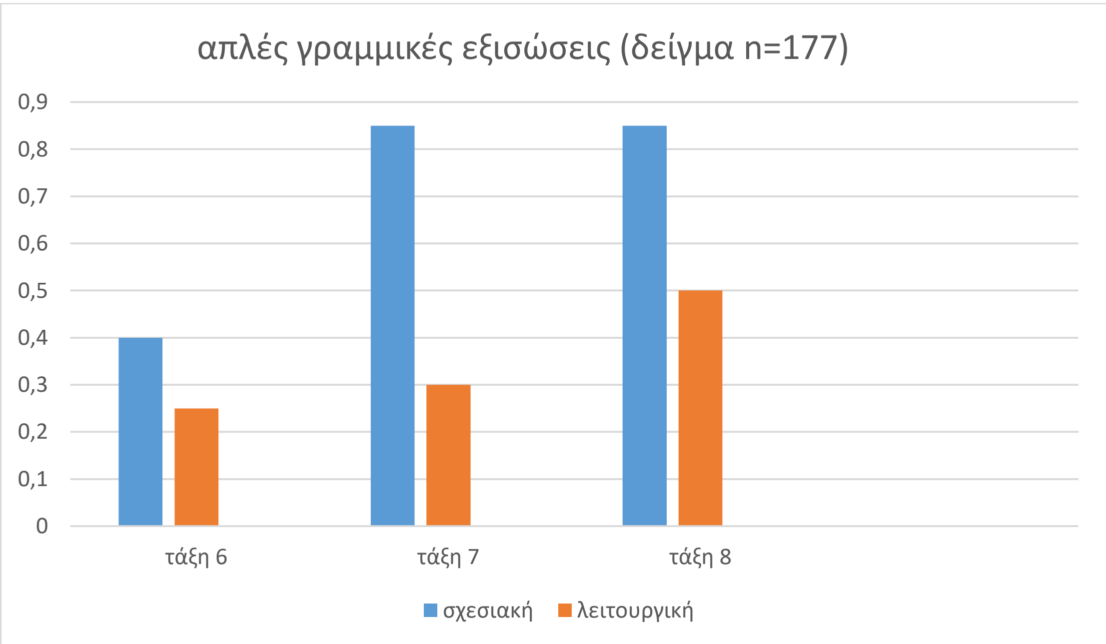
Στην Τρίτη κατηγορία (iii άλλο) κατατάχθηκαν όσοι μαθητές ανέφεραν ότι σημαίνει «ίσον» ή «ίσο με», δηλαδή όσοι μαθητές έκαναν μια απλή μετάφραση του συμβόλου στην φυσική γλώσσα, για παράδειγμα «τρία συν τέσσερα ίσον 7». Σε περιπτώσεις που οι ερωτηθέντες έδωσαν δύο απαντήσεις, μία σχεσιακή και μία λειτουργική, εντάχθηκαν στην πρώτη κατηγορία.

Τα ποσοστά (επί τοις εκατό - %) της έρευνας σε δείγμα 375 μαθητών της $6^{ης}$, $7^{ης}$, $8^{ης}$ τάξης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

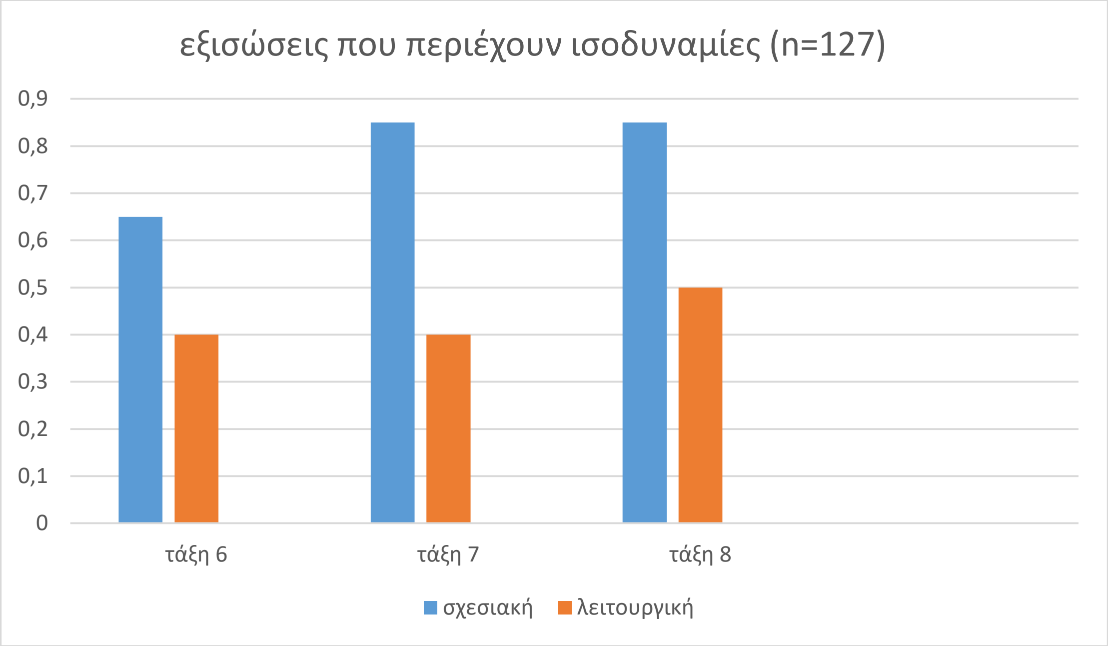
Πίνακας 1 – Ποσοστά χρήσης του ίσον στην Άλγεβρα

κατηγορία	6η τάξη	7η τάξη	8η τάξη
Σχεσιακή	29%	36%	46%
Λειτουργική	58%	52%	45%
Άλλο	7%	9%	8%
Άγνοια	6%	3%	1%

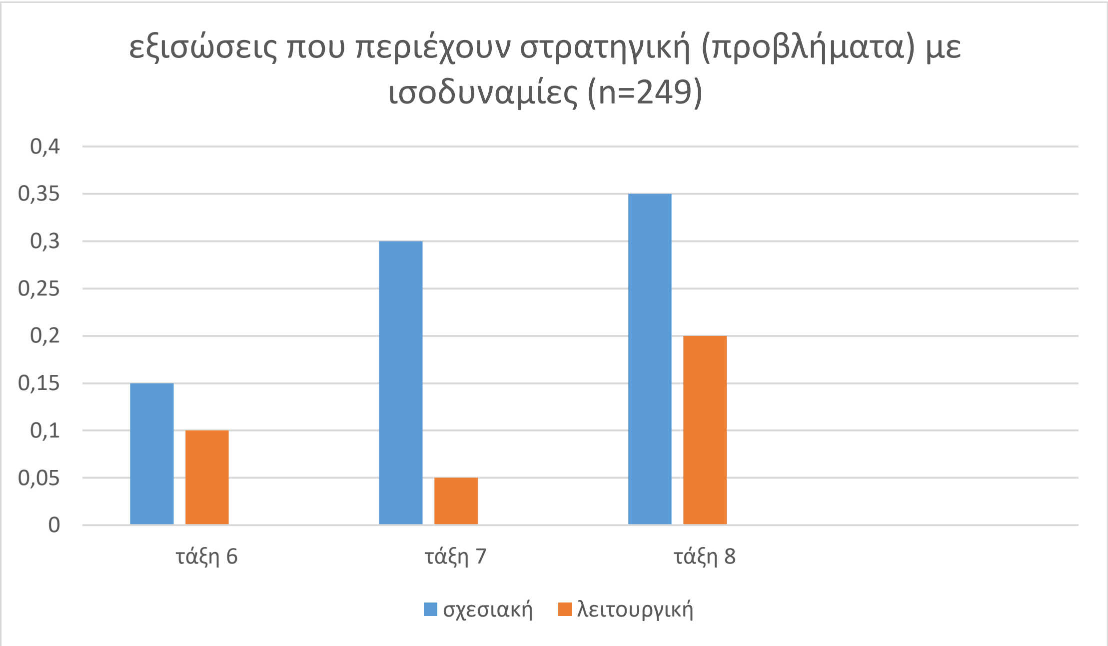
Η έρευνα έδειξε ότι είναι σαφές ότι οι μαθητές που αντιλαμβάνονται το σύμβολο του ίσον ως μια σχέση ισοδυναμίας ξεπέρασαν σε επίδοση τους συμμαθητές τους που δεν δέχονται ή δεν κατέχουν μια σχεσιακή άποψη του ίσον στην επίλυση προβλημάτων και στην κατανόηση μεταξύ ισοδύναμων εξισώσεων. Επιπλέον αποδείχθηκε ότι οι μαθητές που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία ήταν πιο πιθανό να χρησιμοποιήσουν μια πιο μαθηματικά αυστηρά στρατηγική για την επίλυση προβλημάτων που τους τίθενται. Φάνηκε επίσης ότι οι ικανότεροί μαθητές χρησιμοποιούν τη μαθηματικοί γλώσσα με ευφράδεια και με περισσότερη εμπιστοσύνη, σε σχέση με τους λιγότερο ικανούς μαθητές.



Εικόνα 2 – Ποσοστά επίλυσης γραμμικών εξισώσεων



Εικόνα 3 – Ποσοστά επίλυσης εξισώσεων με ισοδυναμίες



Εικόνα 4 – Ποσοστά επίλυσης προβλημάτων

Τα περισσότερα παιδιά είναι σε θέση να αναπτύξουν μια σχεσιακή κατανόηση του ίσον εφόσον τους δοθεί κατάλληλη εκπαίδευση και υποστήριξη από τον εκάστοτε διδάσκοντα (Asquith, 2007 · Behr, 1980 · Kieran, 1981 · Seo & Ginsburg, 2003). Οι μαθητές χρειάζονται σαφείς οδηγίες που θα τους επιτρέψουν να διαβάσουν, να γράψουν και ερμηνεύσουν τα μαθηματικά σύμβολα και γενικότερα τη μαθηματική γλώσσα. Έτσι μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι οι έρευνες για τις μαθηματικές γνώσεις και πόσο ικανότητα έχουν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας είναι πολύ σημαντικές.

Κατά την ανάλυση των απαντήσεων στην έρευνα των Fauskanger και Mosvold σε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που δόθηκαν σε εκπαιδευτικούς αλλά και σε άλλες έρευνες μπορούμε να εστιάσουμε στις μαθηματικές τους γνώσεις για τη διδασκαλία (κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας). Η κατανόηση της ισότητας από τους καθηγητές οδηγεί σε αντίστοιχη κατανόηση και από τους μαθητές (Asquith, Stephens, Knuth, Alibali). Στην έρευνα των Fauskanger και Mosvold η οποία επικεντρώθηκε στην ισότητα οι απαντήσεις που δόθηκαν ως επί το πλείστων ήταν σωστές (Fauskanger, J. & Mosvold, R (2013). Teacher's Mathematical Knowledge for Teaching Equality), σε αντίθεση με παλιότερη έρευνα της ίδιας ερευνητικής ομάδας. Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι η έρευνα έγινε με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και χρειάζεται να γίνουν περισσότερες έρευνες με ερωτήσεις ανάπτυξης ή συνεντεύξεις ώστε να αντληθούν νέα στοιχεία για τις μαθηματικές γνώσεις για τη διδασκαλία σε διάφορες πτυχές της διδακτικής πράξης.

Τα σχολικά εγχειρίδια ασκούν ισχυρή επίδραση στο μαθηματικό περιεχόμενο που μαθαίνουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία. Τα σχολικά βιβλία διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη δραστηριοποίηση των μαθησιακών κινήτρων και την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Schmid, 2002 · Pepin, 2008 · Hudson, 2010). Η ανάλυση πολλών βιβλίων μαθηματικών έχει δείξει ότι στις περισσότερες χρήσεις του συμβόλου του ίσον δεν προωθείται η σχεσιακή κατανόηση αλλά το χρησιμοποιούν λειτουργικά, αυτό φαίνεται από τη σπάνια εμφάνιση ισοτήτων με διαδικασίες (πράξεις) και στα δύο μέλη. Τα βιβλία δηλαδή δεν έχουν σχεδιαστεί ώστε να εξασκούν τους μαθητές στην ισότητα με στόχο να αποκτήσουν τη σχεσιακή κατανόηση. Καθώς οι μαθητές περνούν από τη μία τάξη στην άλλη τα μαθηματικά στρέφονται όλο και περισσότερο από την αριθμητική στην άλγεβρα, όμως καθώς η λειτουργική αντίληψη του ίσον από τις μικρότερες τάξεις έχει εδραιωθεί και έτσι το ποσοστό των μαθητών που δυσκολεύονται ή που δεν κατορθώνουν να αναπτύξουν τη σχεσιακή άποψη είναι μεγάλο και ανέρχεται στο 44% (McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur and Krill, (2006). Middle - school students' understanding of the equal sign: the books they read can't help).

Στην έρευνα των Molina, Castro και Castro (2009), η οποία δε βασίστηκε μόνο στο αναγνωρισμένο μαθηματικό νόημα του συμβόλου του ίσον αλλά βασίστηκε, όπως και οι προηγούμενες έρευνες που είδαμε πιο πάνω, στο νόημα που δίνεται σε αυτό από τους μαθητές ή το νόημα που δίνεται στα σχολικά εγχειρίδια μέσω των δραστηριοτήτων, των εφαρμογών και των ασκήσεων, βλέπουμε το σύμβολο να κατατάσσεται, με πιο λεπτομερή τρόπο, σε 11 κατηγορίες, ως:

1. Έκφραση δραστηριότητας, χρησιμοποιείται για να «προτρέψει» τους μαθητές να υπολογίσουν ή να απλοποιήσουν μια σύνθετη έκφραση, για παράδειγμα $16 : 4 + 3 = \ldots$, $x(x-2) + 2x(x+2) = \ldots$, δηλαδή σε ατελείς αριθμητικές ή αλγεβρικές παραστάσεις οι οποίες αποτελούνται από μια αλληλουχία αριθμών ή μεταβλητών και πράξεων μεταξύ τους και ακολουθούνται από το σύμβολο του ίσον (Freudenthal, 1994)
2. Λειτουργική έννοια / αντικείμενο, χρησιμοποιείται για να δείξει το αποτέλεσμα σε έναν υπολογισμό όπως $2 \cdot 7 = 14,\ 2x(x+1) = 2x^2 + 2x$, εδώ προτρέπει τον μαθητή να αναγνώσει την έκφραση από τα αριστερά προς τα δεξιά και όχι να ενεργήσει
3. Έκφραση ενέργειας, δηλαδή χρησιμοποιείται ως μια αμφίδρομη έννοια και ο μαθητής αναγνωρίζει την συμμετρική ιδιότητα, πράξεις υπάρχουν μόνο στο ένα μέλος αλλά αυτές, σε αντίθεση με πριν, μπορεί να είναι και στο δεξί μέλος για παράδειγμα $3 + 3 = 6\ ,\ 6 = 3 + 3\ ,\ x = 3(x+1) - 2x - 3$
4. «Διαχωριστής» αλληλουχίας πράξεων, δεν το συναντάμε συχνά (καθόλου συχνά στα σχολικά εγχειρίδια) αλλά δηλώνει τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν, τα βήματα συνδέονται μεταξύ τους αλλά δεν σχετίζονται, όπως για παράδειγμα $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x} = x^2 + 1 = x = x^2 - x + 1$
5. Έκφραση ισοδυναμίας, το χρησιμοποιούν οι μαθητές για να συσχετίσει δύο εκφράσεις του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου, να τις δηλώσει ως ισοδύναμες, εδώ διακρίνονται τρεις υποκατηγορίες:
α) αριθμητική ισοδυναμία, $1 + 2 = 6 - 3\ , \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, εδώ το σύμβολο του

ίσον συνδέει δύο αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι είναι διαφορετική χρήση από τη λειτουργική χρήση που είδαμε πιο πάνω

β) συμβολική ισοδυναμία (αλγεβρική), μεταξύ μεταβλητών όπως $\alpha + 2\beta = \beta + \alpha + \beta\ , x(x-1) = -x + x^2$

γ) ισοδυναμία ορισμών / ισοδυναμία εκπροσώπου κλάσης με τα υπόλοιπα στοιχεία της κλάσης ισοδυναμίας / σημειογραφία, για παράδειγμα $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}\ ,\ \frac{a}{b} = ab^{-1}\ , 100cm = 1m\ , 1h = 3600s$

6. Έκφραση κατάστασης ισοδυναμίας ή εξίσωση, αναφέρεται στην άλγεβρα για να εκφράσει μια ισοτιμία μεταξύ των ποσοτήτων που είναι εκατέρωθεν του συμβόλου του ίσον, για παράδειγμα $x^2 + 5x + 1 = -5$
7. Έκφραση ενός τύπου ή μιας συνάρτησης η οποία εκφράζει μια σχέση μεταξύ μεταβλητών και παραμέτρων, $L = 2\pi\rho$
8. Ένδειξη σύνδεσης – συσχέτισης μεταξύ μη μαθηματικών αντικειμένων ή μεταξύ μαθηματικών και μη μαθηματικών αντικειμένων όπως για παράδειγμα ♫♫♫♫ $= 4$, Τιμή παπυτσιών $= 75$, Κόστος $= 3x + 20$
9. Ένδειξη εκτίμησης, αφορά μια μαθηματική έννοια όπως έναν άρρητο αριθμό και την προσέγγιση του για παράδειγμα $\frac{1}{3} = 0{,}333\ \ , \pi = 3{,}14$
10. Ορισμός ενός μαθηματικού αντικειμένου, εδώ το σύμβολο του ίσον χρησιμοποιείται για να καθορίσει μια έννοια, να δώσει τον τύπο μιας συνάρτησης κτλ., για παράδειγμα $\alpha^0 = 1\ , f(x) = \alpha x + \beta$
11. Εκχώρηση αριθμητικής τιμής, εδώ το σύμβολο χρησιμοποιείται για να εκχωρήσει μια αριθμητική τιμή σε μία μεταβλητή, όπως «$\alpha\nu\ x = 1\ \pi o\iota\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \tau\eta\varsigma\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma\ 2x - 3$;»

Από τις προηγούμενες έρευνες ένας πολύ σημαντικός παράγοντας που έπαιξε εξέχοντα ρόλο στην ανάλυση των αποτελεσμάτων και έδωσε μια πολύ καλή και σαφή εικόνα για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την ισότητα και το σύμβολο του ίσον ήταν οι ερωτήσεις ανάπτυξης. Οι ερωτήσεις δηλαδή εκείνες που μας αφήνουν να διακρίνουμε τις πεποιθήσεις των μαθητών για το ίσον μέσω της φυσικής γλώσσας και οι διαφορές αυτής με τη γλώσσα των μαθηματικών. Θα ασχοληθούμε λοιπόν με αυτό το ζήτημα.

2.3 Η Φυσική Γλώσσα και η Γλώσσα των Μαθηματικών

Η γλώσσα είναι μέσο μετάδοσης πληροφορίας και γενικότερα όργανο επικοινωνίας που δεν μπορεί να εκφράσει πλήρως το περιεχόμενο της εποπτικής δραστηριότητας του μαθηματικού. Η βασική αυτή εποπτεία έχει ως θεμελιώδες χαρακτηριστικό το ότι είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε γλώσσα (Χριστοδουλίδης, (1993) · Αναπολιτάνος, (1985)). Η γλώσσα των μαθηματικών είναι ένας από τους παράγοντες που τα μαθηματικά προκαλούν φόβο και δυσφορία στους μαθητές, η ακρίβεια, η τυπική τελειότητα, η συντομία και η αυστηρότητα λειτουργούν ανασταλτικά. Η καθημερινή γλώσσα διαφέρει σε τρία σημαντικά σημεία από τη γλώσσα των μαθηματικών, οποία είναι:

i. Μη χρονική. Δεν υπάρχει παρελθόν, παρόν ή μέλλον.
ii. Απαλλαγμένη από συναισθήματα.
iii. Ακριβής. (Jamison, 2000)

Στα μαθηματικά, λέξεις που χρησιμοποιούμε στην καθομιλουμένη έχουν διαφορετική σημασία και έτσι προκαλούν σύγχυση στους μαθητές. Για παράδειγμα η λέξη πίνακας αναφέρεται σε ένα έργο τέχνης ή στο διδακτικό εποπτικό μέσο που χρησιμοποιεί ο καθηγητής, ενώ στα μαθηματικά η έννοια αναφέρεται σε ένα μαθηματικό αντικείμενο, παρομοίως για τις λέξεις άρτιος, φυσικός, ύψος κτλ. Όπου οι λέξεις έχουν μαθηματικό και μη μαθηματικό νόημα οι μαθητές πρέπει να διαχωρίζουν την έννοια ανάλογα με το πλαίσιο. Δηλαδή στο ίδιο σημαίνον αντιστοιχεί διαφορετικό σημαινόμενο, αυτό το φαινόμενο καλείται πολυσημία. Το μαθηματικό λεξιλόγιο και τα μαθηματικά σύμβολα εξαιτίας της πολυσημίας είναι οι πλευρές της μαθηματικής γλώσσας που αναφέρονται συχνότερα ως πιθανές αιτίες δυσκολιών. Ένα μαθηματικό κείμενο δεν μπορεί να διαβαστεί γρήγορα γιατί κάθε λέξη, κάθε σύμβολο, κάθε μεταβλητή που ίσως χρησιμοποιείται είναι πολύ σημαντικά για τη νοηματοδότηση. Ιδίως στα μαθηματικά προβλήματα παρουσιάζονται δυσκολίες στην αποκωδικοποίηση του μαθηματικού κειμένου (Αγαλιώτης, (2002)).

Όπως είδαμε και πριν, οι διδάσκοντες πρέπει να βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές που στοχεύουν στις ανάγκες των μαθητών στη μαθηματική γλώσσα επικοινωνώντας με τους μαθητές μέσω της φυσικής γλώσσας σε προφορικό και γραπτό λόγο ώστε να εκφράζουν τις σκέψεις τους, να αναφέρονται σε έννοιες και ειδικούς όρους. Οι μαθητές καθώς ερευνούν και μαθαίνουν μαθηματικά πρέπει να χρησιμοποιούν τη δική τους γλώσσα και τον δικό τους κώδικα επικοινωνίας ώστε να μοιράζονται τα συμπεράσματα τους με τον εκπαιδευτικό ή με τους συμμαθητές τους αλλά και να τα περνούν και στο γραπτό τους (ασκήσεις, διαγωνίσματα) αναπτύσσοντας τεκμηριωμένη αιτιολόγηση και ορθό λόγο. Η μαθηματική γλώσσα πρέπει να θεμελιωθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνεται κατανοητή από κάθε μαθητή, με μοναδικό εφόδιο την καλή κατανόηση της φυσικής μητρικής του γλώσσας.

2.4 Πώς Μπορούμε να Βοηθήσουμε τους Μαθητές στην Εκπαιδευτική Δραστηριότητα στην Τάξη

Παρακάτω ακολουθούν παραδείγματα τύπων δήλωσης και ασκήσεις που θα μπορούσαν να παρουσιαστούν σε μαθητές από εκπαιδευτικούς για να προάγουν τη σχεσιακή έννοια του ίσον, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, κάποια από αυτά υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια που μελετήθηκαν στην παρούσα ερευνητική εργασία.

$10 + 2$	$=$	$2 + 10$	Αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης
$10 - 5$	$\neq$	$5 - 10$	Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην αφαίρεση
$20 - 3 + 3$	$=$	20	Αντίστροφη σχέση πρόσθεσης και αφαίρεσης
$7 + 8$	$=$	$12 + 3$	Σχεσιακή δήλωση

Εικόνα 5 – Τύποι Δήλωσης

Άλλες ερωτήσεις που μπορούν να τεθούν σε μαθητές με τον ίδιο στόχο

1)

Στις επόμενες δύο εξισώσεις είναι ο αριθμός που πρέπει να συμπληρωθεί στο κουτάκι ο ίδιος;	
$2 \cdot \square + 15 = 31$	$2 \cdot \square + 15 - 9 = 31 - 9$
Στην εξίσωση $\square + 18 = 35$ ο αριθμός που πρέπει να συμπληρωθεί στο κουτάκι είναι 17. Μπορείτε, χρησιμοποιώντας αυτό ως δεδομένο, να βρείτε ποιον αριθμό μπορούμε να βάλουμε στο κουτάκι της επόμενης εξίσωσης; $\square + 18 + 27 = 35 + 27$	

Εικόνα 6 – Άσκηση κατανόησης του ίσον

2)

Να συμπληρωθούν τα κουτάκια χρησιμοποιώντας διαφορετικά ζεύγη αριθμών σε κάθε γραμμή
$\square + \square = 6$
$\square + \square = 6$
$\square + \square = 6$
$\square - \square = 5$
$\square - \square = 5$
$\square - \square = 5$
$\square \cdot \square = 4$
$\square \cdot \square = 4$
$\square \cdot \square = 4$
$\square : \square = 3$

$\square : \square = 3$
$\square : \square = 3$

Εικόνα 7 – Άσκηση κατανόησης του ίσον

3)

Να συμπληρωθούν τα κουτάκια με κατάλληλους αριθμούς
$\square + \square + 4 = \square + \square + \square + 1$

Εικόνα 8 – Άσκηση κατανόησης του ίσον

4)

Σε κάθε γραμμή κύκλωσε αυτό που δεν ταιριάζει/ανήκει		
♠♠♠♠♠	♡♡♡♡♡	♦♦♦♦♦
$6 + 2$	$4 + 4$	$5 + 4$
$10 - 4$	$12 - 5$	$7 - 0$
$20 - 8$	$6 + 6$	$7 + 5$
$3 + x$	$3x$	$x + x + x$

Εικόνα 9 – Άσκηση κατανόησης του ίσον

5)

Να συμπληρωθεί το κενό με το κατάλληλο σύμβολο, $=$ ή $\neq$
⋆⋆⋆ ___ ⋆⋆⋆
⫯⫯⫯ ___ ⫯⫯⫯⫯
4___4
4___5

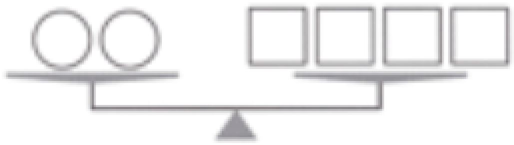
Εικόνα 10 – Άσκηση κατανόησης του ίσον

6)

Περιέγραψε τι βλέπεις στα παρακάτω
$10 - 4 = 11 - 5$
$4 + 5 = 5 + 4$
$6 \cdot (2 + 7) = (2 + 7) \cdot 6$
$2 \cdot (5 + 2) = 2 \cdot (5 + 3)$
$(6 + 5) \cdot (2 + 7) = (2 + 7) \cdot (6 + 5)$
$3 \cdot (x + 2) = 3x + 2$

Εικόνα 11 – Άσκηση κατανόησης του ίσον

7)



ο ζυγός
Α) αν ένας κύκλος αναπαριστά τον αριθμό 4 τότε ένα τετράγωνο ποιον αριθμό αναπαριστά;
Β) αν αφαιρέσουμε (πάρουμε) έναν κύκλο από τη δεξιά πλευρά του ζυγού πόσα τετράγωνα πρέπει να αφαιρέσουμε από τη δεξιά πλευρά ώστε να ισορροπεί;

Εικόνα 12 – Άσκηση κατανόησης του ίσον (ο ζυγός)

8)

Φτιάξε μόνος σου ένα πρόβλημα που να πρέπει να γίνει χρήση του ίσον.

Εικόνα 13 – Άσκηση κατανόησης του ίσον (πρόβλημα)

2.5 Ερευνητικά Ερωτήματα

Όπως είδαμε, η παρούσα βιβλιογραφία δεν αναφέρει την ισότητα και την χρήση του ίσον στη Γεωμετρία. Στην παρούσα εργασία επικεντρωθήκαμε στα επόμενα ερωτήματα:

1. Διαφέρει η χρήση του συμβόλου του ίσον στη Γεωμετρία σε σχέση με την Άλγεβρα;
2. Ποια είναι η γνώμη των εκπαιδευτικών, πώς αντιμετωπίζουν το σύμβολο του ίσον στη Γεωμετρία και πώς βιώνουν την ποικιλία των χρήσεων του συμβόλου στη Γεωμετρία;
3. Πώς εμφανίζεται και χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον στα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας, τι θα πρότειναν οι εκπαιδευτικοί σύμφωνα με την εμπειρία τους; Είναι οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί ενημερωμένοι;

Βάσει των παραπάνω ερωτημάτων που προέκυψαν από τη μελέτη της βιβλιογραφίας σχεδιάστηκε η παρούσα ερευνητική προσπάθεια.

3. Μεθοδολογία

3.1 Σχεδιασμός Συλλογής και Ανάλυσης Δεδομένων

Η μεθοδολογία της έρευνας βασίζεται στη θεωρητική-μεθοδολογική δομή, όπως προτάθηκε από τους Moutsios-Rentzos, Kritikos & Kalavasis (in press), η οποία αποτελείται, ανάμεσα σε άλλα, από παράλληλες μελέτες σε σχολικά εγχειρίδια και εκπαιδευτικούς. Η παρούσα έρευνα χωρίζεται σε δύο μέρη, την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων και τις συνεντεύξεις σε εκπαιδευτικούς. Η ανάλυση των συνεντεύξεων έγινε με ανάλυση περιεχομένου (Charmaz, 2006). Ο σχεδιασμός των συνεντεύξεων, τόσο στη δομή τους όσο και στο περιεχόμενο τους, υιοθετήθηκε η οπτική που αναφέρεται στην προαναφερθείσα μελέτη, ενώ για την ανάλυση τους υιοθετήθηκε μια επαγωγική ανάλυση Glaser & Strauss, 1967).

3.2 Σχολικά Εγχειρίδια

Στην έρευνα αναλύεται η παρουσίαση της ισότητας και η χρήση του συμβόλου του ίσον στα βιβλία: παλαιότερων ετών, του Δημοτικού, της Β’ Γυμνασίου, της Γ’ Γυμνασίου, της Άλγεβρας Α’ Λυκείου και της Γεωμετρίας Α’ Λυκείου. Εκτεταμένη ανάλυση έγινε στις παραγράφους της Γεωμετρίας, από αυτές τις παραγράφους, όπως θα δούμε και πιο κάτω, χρησιμοποιήθηκαν αποσπάσματα και στις συνεντεύξεις. Στο σχολικό βιβλίο Β’ Γυμνασίου – Μέρος Β’ – Κεφάλαιο 1ο – Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο Θεώρημα, στο σχολικό βιβλίο Γ’ Γυμνασίου – Μέρος Β’ – Κεφάλαιο 1ο – 1.1 Ισότητα Τριγώνων και στο σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας Α’ Λυκείου – Κεφάλαιο 3ο – Τρίγωνα έγινε η στατιστική ανάλυση μέσω πινάκων (χαρακτηριστικά αποσπάσματα των οποίων θα δούμε παρακάτω).

Στους τρεις πίνακες που ακολουθούν (Β’ Γυμνασίου, Γ’ Γυμνασίου και Α’ Λυκείου) η στήλη «Γεωμετρικό αντικείμενο / έννοια» συμπληρώνεται με τον εξής τρόπο:

- Γεωμετρικό αντικείμενο, όταν το σύμβολο του ίσον αναφέρεται στη Γεωμετρία. πχ. $AB = A'B'$ ή $E = 4$ ή $E = 3\ cm^2$
- Αριθμητικό αντικείμενο, όταν το σύμβολο του ίσον αναφέρεται σε διαδικασία που απαιτεί πράξεις μεταξύ αριθμών. πχ. $4^2 = 16$ ή $2^2 + 3^2 = 13$
- Αλγεβρικό αντικείμενο, όταν το σύμβολο του ίσον αναφέρεται σε διαδικασία που απαιτεί πράξεις μεταξύ μεταβλητών και/ή αριθμών. πχ. $E_1 + E_2 = E$
- Μονάδες μέτρησης, όταν το σύμβολο του ίσον αναφέρεται σε διαδικασία μετατροπής μονάδων. πχ. $1m = 10dm$ ή $1dm^2 = 100cm^2$

Στην προτελευταία στήλη κάθε πίνακα αναγράφεται το γράμμα «Σ» που σημαίνει ότι η χρήση του συμβόλου του ίσον χαρακτηρίζεται ως σχέση (σχέση ισοδυναμίας μεταξύ μεγεθών) ή το γράμμα «Λ» που σημαίνει ότι η χρήση του συμβόλου χαρακτηρίζεται ως λειτουργική (αποτέλεσμα μιας αριθμητικής ή αλγεβρικής πράξης ή μιας διαδικασίας), δηλαδή μια βασική κατηγοριοποίηση όπως αυτή των Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil και Stephens (2008). Επίσης, όπου ήταν δυνατόν να γίνει κατηγοριοποίηση, αναγράφεται ένας αριθμός, ο οποίος αντιστοιχεί την χρήση του συμβόλου «ίσον» σε μία από τις 11 κατηγορίες που βρίσκουμε στην έρευνα των Molina, Castro και Castro (2009).

Η χρήση του συμβόλου του ίσον είτε είναι σχεσιακή είτε είναι λειτουργική μπορεί να σχετίζει αποκλειστικά γεωμετρικές έννοιες (ΓΓ), αποκλειστικά αλγεβρικές (και αριθμητικές) έννοιες (ΑΑ) είτε γεωμετρικές και αλγεβρικές έννοιες (ΓΑ), το τελευταίο παρατηρείται πολλές φορές στη Γεωμετρία και καταδεικνύει μια μεγάλη διαφορά στην χρήση του συμβόλου ανάμεσα στη Γεωμετρία και στην Άλγεβρα. Όταν σε μία μαθηματική έκφραση χρησιμοποιείται περισσότερες από μί φορά το σύμβολο του ίσον, αναγράφεται για παράδειγμα ΓΓ-ΓΑ και σημαίνει ότι η πρώτη χρήση του συμβόλου είναι ανάμεσα σε δύο γεωμετρικές έννοιες ενώ η δεύτερη ανάμεσα σε μια γεωμετρική και μία αλγεβρική/αριθμητική.
Παραδείγματα:

α) $AB = A'B'$ το σύμβολο του ίσον χρησιμοποιείται για να δηλώσει την ισότητα δύο

ευθυγράμμων τμημάτων (ΓΓ) και η χρήση είναι σχεσιακή.
β) $3 + 5 = 8$ το σύμβολο του ίσον έχει λειτουργική χρήση και αναφέρεται σε αριθμούς (ΑΑ).
γ) $9 - 3 = 2 + 4$ αναφέρεται σε αριθμούς (ΑΑ) και η χρήση είναι σχεσιακή.
δ) $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ αναφέρεται στην ισότητα δύο αθροισμάτων εμβαδών (γεωμετρικές έννοιες) (ΓΓ) και η χρήση είναι σχεσιακή.
ε) $AB = 5$ η χρήση είναι λειτουργική και συνδέει ένα ευθύγραμμο τμήμα με έναν αριθμό (ΓΑ), δηλαδή στην φυσική γλώσσα θα λέγαμε ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος είναι 5 μονάδες μήκους.

Παραδείγματα – αποσπάσματα από τους πίνακες κατηγοριοποίησης του ίσον:

<u>Σχολικό βιβλίο Β’ Γυμνασίου – Μέρος Β’ – Κεφάλαιο 1ο – Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο Θεώρημα</u>

Πίνακας 2 – Αποτελέσματα κατηγοριοποίησης Β’ Γυμν, Κεφ 1 (απόσπασμα)

	Λέξη / έκφραση / σύμβολο	Σελίδα	Πως εμφανίζεται	Γεωμετρικό αντικείμενο / έννοια	Θεωρία / εφαρμογή / άσκηση	Γεωμετρία / άλγεβρα / φυσικός κόσμος / μη μαθηματικό	Χρήση συμβόλου	
1.	=	114	Μετρώντας τα τετραγωνάκια που υπάρχουν μέσα σε κάθε σχήμα παρατηρούμε ότι είναι 71. Άρα Ε = 71. Ε = 71	Γεωμετρικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Λ	ΓΑ
2.	=	114	τα δύο εμβαδά με μονάδα μέτρησης το θα είναι 2 · 71 = 142. Άρα Ε = 142. 2 · 71 = 142	Αριθμητικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Λ 2	ΑΑ
3.	=	114	Ε = 142	Γεωμετρικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Λ	ΓΑ
4.	=	114	$\frac{71}{2} = 35{,}5$	Αριθμητικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Λ 2	ΑΑ
5.	=	114	Ε = 35,5	Γεωμετρικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Λ	ΓΑ
6.	Ισούται με	114	το εμβαδόν του Γ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών Α και Β.		Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία		
7.	Ίσες	115			Εκφώνηση άσκησης	Γεωμετρία		

Σχολικό βιβλίο Γ' Γυμνασίου – Μέρος Β' – Κεφάλαιο 1ο – 1.1 Ισότητα Τριγώνων

Πίνακας 3 – Αποτελέσματα κατηγοριοποίησης Γ' Γυμν, Κεφ 1.1 (απόσπασμα)

	Λέξη / έκφραση / σύμβολο	Σελ ίδα	Πως εμφανίζεται	Γεωμετρικό αντικείμενο / έννοια	Θεωρία / εφαρμογ ή / άσκηση	Γεωμετρία / άλγεβρα / φυσικός κόσμος / μη μαθηματικό	Χρήση συμβό λου	
1.	=	186	Να συμπληρώσετε τις ισότητες: $AB = \ldots\ldots$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Δραστηρι ότητα	Γεωμετρία	Λ 1	ΓΓ
2.	=	186	$B\Gamma = \ldots\ldots$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Δραστηρι ότητα	Γεωμετρία	Λ 1	ΓΓ
3.	=	186	$\Gamma A = \ldots\ldots$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Δραστηρι ότητα	Γεωμετρία	Λ 1	ΓΓ
4.	=	186	$\hat{A} = \ldots\ldots$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Δραστηρι ότητα	Γεωμετρία	Λ 1	ΓΓ
5.	=	186	$\hat{B} = \ldots\ldots$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Δραστηρι ότητα	Γεωμετρία	Λ 1	ΓΓ
6.	=	186	$\hat{\Gamma} = \ldots\ldots$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Δραστηρι ότητα	Γεωμετρία	Λ 1	ΓΓ
7.	=	186	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Δραστηρι ότητα	Γεωμετρία	Λ	ΓΑ
8.	Ίσες	187			Θεωρία (σε πλαίσιο)	Γεωμετρία		
9.	Ίσες	187			Θεωρία (σε πλαίσιο)	Γεωμετρία		
10.	=	187	$AB = A\Gamma$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
11.	Ίσες	187			Θεωρία (σε πλαίσιο)	Γεωμετρία		
12.	Ίσες	187			Θεωρία	Γεωμετρία		

Σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας Α’ Λυκείου – Κεφάλαιο 3ο – Τρίγωνα

Πίνακας 4 – Αποτελέσματα κατηγοριοποίησης Α’ Λυκ, Κεφ 3 (απόσπασμα)

	Λέξη / έκφραση / σύμβολο	Σελίδα	Πως εμφανίζεται	Γεωμετρικό αντικείμενο / έννοια	Θεωρία / εφαρμογή / άσκηση	Γεωμετρία / άλγεβρα / φυσικός κόσμος / μη μαθηματικό	Χρήση συμβόλου	
1.	Ισότητας	39			Εισαγωγή κεφαλαίου	Γεωμετρία		
2.	Ίσες	40	***ισοσκελές***, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ η πλευρά ΒΓ λέγεται ***βάση*** του και το Α ***κορυφή*** του.		Θεωρία	Γεωμετρία		
3.	=	40	$AB = A\Gamma$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
4.	Ίσες	40			Θεωρία	Γεωμετρία		
5.	Ίσα	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
6.	Ίσα	41	**Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.**		Θεωρία	Γεωμετρία		
7.	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
8.	Ίσα	41	**Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**		Θεωρία	Γεωμετρία		
9.	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
10	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
11	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
12	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
13	Ισότητα	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
14	Ισότητα	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
15	Ισότητας	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
16	Ίσες	41	**ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.		Θεωρία, εκφώνηση θεωρήματος	Γεωμετρία		

3.3 Εκπαιδευτικοί – Συνέντευξη

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας συντάξαμε μία συνέντευξη ημιδομημένης μορφής που δώσαμε σε εκπαιδευτικούς.

Η συνέντευξη πραγματοποιήθηκε μετά το τέλος της σχολικής χρονιάς 2016-2017, στα τέλη Ιουλίου και σε προκαθορισμένη ημέρα και ώρα που ορίστηκε σε συνεννόηση με πέντε εκπαιδευτικούς, οι οποίοι διδάσκουν Γεωμετρία σε Γυμνάσιο και σε Λύκειο. Για την καταγραφή της συνέντευξης χρησιμοποιήθηκε ηλεκτρονικό μαγνητόφωνο και στη συνέχεια έγινε απομαγνητοφώνηση. Οι συνεντεύξεις διήρκησαν από 35 έως 45 λεπτά. Οι συνεντευξιαζόμενοι είχαν τη δυνατότητα να σημειώνουν πάνω στις κόλλες που τους δόθηκαν, στο τέλος της συνέντευξης οι κόλλες συλλέχθηκαν. Πριν τη συνέντευξη δεν είχε γίνει καμία αναφορά στους εκπαιδευτικούς για το θέμα της συνέντευξης και του θέματος που πραγματεύεται η παρούσα διπλωματική εργασία.

Η συνέντευξη περιλαμβάνει συνολικά πέντε αποσπάσματα που αφορούν τη Γεωμετρία από τις τάξεις Β’ Γυμνασίου, Γ’ Γυμνασίου και Α’ Λυκείου. Το πρώτο απόσπασμα αφορά τη διατύπωση και την απόδειξη ενός πορίσματος και είναι από το βιβλίο Γεωμετρίας της Α’ Λυκείου από το 3ο κεφάλαιο, τα τρίγωνα, υποπαράγραφος 3.1, 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων. Το δεύτερο απόσπασμα είναι η εκφώνηση της πρώτης άσκησης εμπέδωσης της παραγράφου 3.16, σχετικές θέσεις δύο κύκλων από το ίδιο βιβλίο. Το τρίτο απόσπασμα είναι από το βιβλίο της Γ’ Γυμνασίου, μέρος Β’, Γεωμετρία, ισότητα τριγώνων και προέρχεται από το κύριο μέρος της θεωρίας. Το επόμενο απόσπασμα είναι από το ίδιο βιβλίο και αφορά ένα παράδειγμα εφαρμογής του δεύτερου κριτηρίου ισότητας τριγώνων. Το τελευταίο παράδειγμα είναι μια εφαρμογή και η λύση της από το Β’ μέρος του βιβλίου της Β’ Γυμνασίου, υποπαράγραφος 1.3 εμβαδά επίπεδων σχημάτων.

Οι ερωτήσεις είναι ελεύθερης ανάπτυξης. Ο εκπαιδευτικός προτρέπεται να εστιάσει στο σύμβολο του ίσον, θα πρέπει να ξεδιπλώσει την σκέψη του και να περιγράψει την χρήση του συμβόλου και να παρατηρήσει αν υπάρχουν ομοιότητες ή διαφορές ανάμεσα στις περιπτώσεις που συνάντησε σε όλα τα αποσπάσματα. Από την εμπειρία του πρέπει να προσπαθήσει να συνδυάσει την χρήση του ίσον στη Γεωμετρία και την Άλγεβρα, δεν πρέπει να επεκταθεί όμως στην Άλγεβρα παρά να εστιάσει στις διαφορές της ισότητας με τη Γεωμετρία, δεν πρέπει να επεκταθεί όμως στην Άλγεβρα. Η συνέντευξη είναι σχεδιασμένη ώστε ο εκάστοτε εκπαιδευτικός να μην σταθεί σε κάθε απόσπασμα ξεχωριστά αλλά να τα δει όλα σε αντιπαραβολή.

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικό καλείται να επικαλεστεί την εμπειρία του και να απαντήσει ερωτήσεις που αφορούν τη δυσκολία που βιώνουν οι μαθητές σε σχέση με το ίσον, να αναφέρει τη διδακτική πρακτική που ακολουθεί στην ενότητα αυτή, να δώσει συμβουλές στους συναδέλφους του και να προτείνει αλλαγές στη συγγραφική ομάδα και στην ομάδα σχεδιασμού του αναλυτικού προγράμματος. Στη συνέχεια η συνέντευξη περιλαμβάνει δύο ειδικά θέματα που γίνεται χρήση του συμβόλου του ίσον. Τα θέματα αυτά επινοήθηκαν βάση της ανάλυσης των σχολικών βιβλίων που προηγήθηκε της εκπόνησης της συνέντευξης. Τέλος, ο εκπαιδευτικός συμπληρώνει τα προσωπικά του στοιχεία, τον τρόπο που χρησιμοποιεί το βιβλίο, τις επίσημες οδηγίες του υπουργείου και αν δίνει στους μαθητές επιπλέον υλικό.

Χαρακτηριστικά των πέντε εκπαιδευτικών που επιλέχθηκαν:

- Εκπαιδευτικός Α’ (Ανδρέας): Άνδρας, 47 ετών, 12 χρόνια διδακτική εμπειρία σε Γυμνάσιο και Λύκειο, 8 χρόνια διδακτική εμπειρία σε ιδιωτικό φροντιστήριο, 24 χρόνια διδακτική εμπειρία σε κατ’ οίκον ιδιαίτερα μαθήματα
- Εκπαιδευτικός Β’ (Βασίλης): Άνδρας, 43 ετών, 14 χρόνια διδακτική εμπειρία σε Γυμνάσιο και Λύκειο, 4 χρόνια διδακτική εμπειρία σε ιδιωτικό φροντιστήριο, 21 χρόνια διδακτική εμπειρία σε κατ’ οίκον ιδιαίτερα μαθήματα
- Εκπαιδευτικός Γ’ (Γρηγόρης): Άνδρας, 39 ετών, 10 χρόνια διδακτική εμπειρία σε ιδιωτικό Γυμνάσιο και Λύκειο, 8 χρόνια διδακτική εμπειρία σε ιδιωτικό φροντιστήριο, 21 χρόνια διδακτική εμπειρία σε κατ’ οίκον ιδιαίτερα μαθήματα, μεταπτυχιακός τίτλος σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
- Εκπαιδευτικός Δ’ (Δήμητρα): Γυναίκα, 51 ετών, 10 χρόνια διδακτική εμπειρία σε Γυμνάσιο και Λύκειο, 4 χρόνια διδακτική εμπειρία σε επαγγελματικό Λύκειο, 9 χρόνια διδακτική εμπειρία σε πρόσθετη διδακτική στήριξη, 10 χρόνια διδακτική εμπειρία σε κατ’ οίκον ιδιαίτερα μαθήματα, μεταπτυχιακός τίτλος σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

- Εκπαιδευτικός Ε’ (Ελένη): Γυναίκα, 52 ετών, 12 χρόνια διδακτική εμπειρία σε Γυμνάσιο και Λύκειο, 15 χρόνια διδακτική εμπειρία σε ιδιωτικό φροντιστήριο

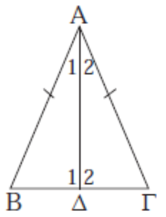
Ακολουθούν τα αποσπάσματα και το κείμενο με τις ερωτήσεις που δόθηκαν στους εκπαιδευτικούς στη διαδικασία της συνέντευξης.

Α’ Λυκείου, σελ. 42

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.



Σχήμα 12

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ (σχ.12).

Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{Δ}_1 + \hat{Δ}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

)

Α’ Λυκείου, σελ. 71

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Αν (Κ, R) και (Λ, ρ) είναι δύο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και R > ρ, ΚΛ = δ, να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της πρώτης στήλης με την αντίστοιχη σχέση στη δεύτερη στήλη.*

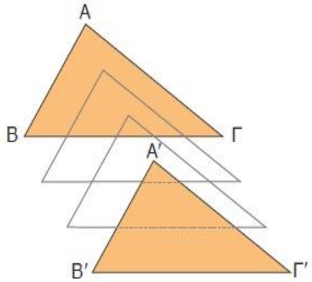
ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. *Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι εσωτερικός του (Κ, R).*	1. $δ > R + ρ$
β. *Ο κύκλος (Λ, ρ) εφάπτεται εσωτερικά του (Κ, R).*	2. $δ = R + ρ$
γ. *Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται.*	3. $δ = R - ρ$
δ. *Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.*	4. $δ < R - ρ$
ε. *Κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.*	5. $2δ = R - ρ$
	6. $ρ < δ < R$
	7. $2δ = Rρ$
	8. $R-ρ<δ<R+ρ$

Γ’ Γυμνασίου, σελ. 187

Αν μετατοπίσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε μια άλλη θέση και θεωρήσουμε ότι κατά τη μετατόπισή του αυτό δε μεταβάλλεται, τότε οι κορυφές του Α, Β, Γ θα πάρουν τις θέσεις των σημείων Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως και το τρίγωνο ΑΒΓ θα πάρει τη θέση του τριγώνου Α′Β′Γ′. Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ ταυτίζονται, τότε οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους θα είναι ίσες, αφού και αυτές ταυτίζονται. Έτσι έχουμε:

$$ΑΒ = Α'Β', \quad ΒΓ = Β'Γ', \quad ΑΓ = Α'Γ' \quad \text{και}$$

$$\hat{Α} = \hat{Α}', \quad \hat{Β} = \hat{Β}', \quad \hat{Γ} = \hat{Γ}'.$$



Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′, για τα οποία ισχύουν οι προηγούμενες ισότητες, λέμε ότι είναι ίσα. Δηλαδή

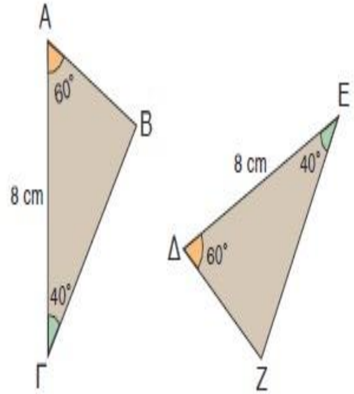
- **Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.**

Γ’ Γυμνασίου, σελ. 189

Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά ίση (ΑΓ = ΔΕ = 8 cm) και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες ($\hat{Α} = \hat{Δ} = 60^\circ$, $\hat{Γ} = \hat{Ε} = 40^\circ$).

Επομένως τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$$\hat{Β} = \hat{Ζ}, \quad ΑΒ = ΔΖ, \quad ΒΓ = ΕΖ.$$



Παρατηρούμε ότι οι ίσες πλευρές ΑΒ, ΔΖ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{Γ}$, $\hat{Ε}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

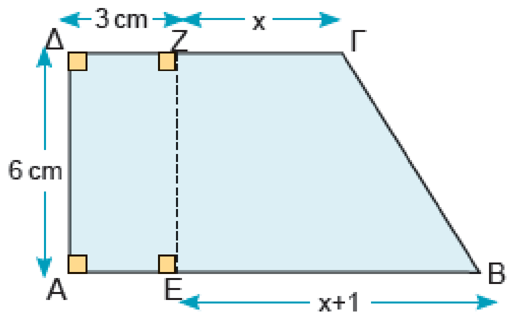
Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x.

β) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι το τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΖΔ, να υπολογίσετε το x.

Λύση: α) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μικρή βάση είναι $ΔΓ = x + 3$ (cm), η μεγάλη βάση είναι $ΑΒ = x + 1 + 3 = x + 4$ (cm) και το ύψος του είναι $ΔΑ = 6$ (cm). Άρα, το εμβαδόν του είναι: $(ΑΒΓΔ) = \dfrac{(β + Β) \cdot υ}{2} = \dfrac{(x + 3 + x + 4) \cdot 6}{2} = 3(2x + 7)$ (cm^2).

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι
$(ΑΕΖΔ) = 3 \cdot 6 = 18$ (cm^2).
Αφού το εμβαδόν του τραπεζίου είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου, έχουμε:
$(ΑΒΓΔ) = 3 \cdot (ΑΕΖΔ)$ ή $3(2x + 7) = 3 \cdot 18$
Δηλαδή:
$2x + 7 = 18$ ή $2x = 11$ ή $x = 5{,}5$ (cm).



1. Μελετήστε τα παραπάνω αποσπάσματα που σας δόθηκαν και επικεντρωθείτε στο σύμβολο του ίσον και στην έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία. Σημειώστε που αυτά εμφανίζονται (κυκλώστε ή υπογραμμίστε).

2. Περιγράψτε τον τρόπο που χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον και η έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία στα παραπάνω αποσπάσματα.
   Εντοπίζετε ομοιότητες ή διαφορές στην χρήση του συμβόλου και στην έννοια της ισότητας στα πέντε αποσπάσματα;

Ομοιότητες   Διαφορές

3. Βάσει αυτών των αποσπασμάτων, πιστεύετε ότι οι μαθητές/μαθήτριες θα αντιμετωπίσουν δυσκολίες κατανόησης σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

4. Πιστεύετε ότι οι ανωτέρω δυσκολίες σχετίζονται με τον τρόπο που χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον και παρουσιάζεται η έννοια της ισότητας στην Άλγεβρα;

5. Βάσει των ανωτέρω αποσπασμάτων και την εμπειρία σας, πιστεύετε ότι ο τρόπος που χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον και παρουσιάζεται η έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία, μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες κατανόησης στους μαθητές και στις μαθήτριες στην Άλγεβρα;

6. Ποια είναι η διδακτική πρακτική σας σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

7. Τι διδακτικές συμβουλές θα προτείνατε σε συναδέλφους σας σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

8. Τι θα προτείνατε στη συγγραφική ομάδα του μελλοντικού σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

9. Τι θα προτείνατε στην ομάδα σχεδιασμού του μελλοντικού αναλυτικού προγράμματος της Γεωμετρίας σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

10. Πιστεύετε ότι η έννοια της ισότητας και η χρήση του συμβόλου του ίσον στη Γεωμετρία είναι ίδια ή διαφέρει με της Άλγεβρας;

Ειδικά θέματα Α

Στο σχολικό βιβλίο συναντάμε πολύ συχνά τις δύο ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις που και οι δύο περιέχουν το σύμβολο του ίσον:

α) $\widehat{\mathrm{A}} = 90^{\mathrm{o}}$

β) $\widehat{\mathrm{A}} = 1 \llcorner$

Εντοπίζετε διαφορές στην χρήση του συμβόλου του ίσον ανάμεσα στις δύο αυτές περιπτώσεις;

Ειδικά θέματα Β

Στο σχολικό εγχειρίδιο, όχι στις λύσεις των ασκήσεων, δε συναντάμε πουθενά μια μαθηματική έκφραση όπως $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$, αντίθετα συναντάμε την έκφραση «τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ είναι ίσα», γιατί πιστεύετε ότι συμβαίνει αυτό;

Στοιχεία συμμετέχοντα/συμμετέχουσας στην έρευνα
Φύλο:
Ηλικία (σε έτη):
Εκπαίδευση
Σπουδές:
Μεταπτυχιακά (τίτλοι)

1. …………………………………………………………………………
2. …………………………………………………………………………

Διδακτορικό (τίτλος)

…………………………………………………………………………

Διδακτική εμπειρία:

Κατ' οίκον: ………… έτη
Φροντιστήριο: ………… έτη
Σχολείο:
Γυμνάσιο: ………… έτη
Λύκειο: ………… έτη
Γεωμετρία στο Λύκειο: ………… έτη

Διοικητική εμπειρία
Διοικητική θέση (διευθυντής/διευθύντρια, υποδιευθυντής/υποδιευθύντρια): ………… έτη

Διδακτικές πρακτικές

1. Με ποιο τρόπο χρησιμοποιείτε το σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας στο μάθημά σας;

2. Δίνετε προσωπικές σημειώσεις / φυλλάδια:

3. Ποια η γνώμη σας για τις οδηγίες του υπουργείου (ΦΕΚ, Βιβλίο καθηγητή κτλ) για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας;

4. Ειδικότερα, για την έννοια τη ισότητας γνωρίζετε αν υπάρχουν συγκεκριμένες επίσημες οδηγίες;

5. Θέλετε να προσθέσετε κάτι βάσει της συνέντευξης που προηγήθηκε;

Ευχαριστώ για το χρόνο σας!

3.4 Περιορισμοί

Η παρούσα ερευνητική προσπάθεια δεν είχε τη δυνατότητα στήριξης σε προϋπάρχουσα βιβλιογραφία που να αφορά την ισότητα και την χρήση του ίσον στη Γεωμετρία, έγινε βασιζόμενη στη βιβλιογραφία που αφορούσε την ισότητα και την χρήση του ίσον στην Άλγεβρα, μέσω προσπάθειας τα ευρήματα αυτής της βιβλιογραφίας να αναχθούν και στο πεδίο της Γεωμετρίας.

Η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων επικεντρώθηκε σε παραγράφους που είχαν άμεση σχέση με την ισότητα στη Γεωμετρία. Δεν αναλύθηκε όλη η ύλη που διδάσκονται οι μαθητές και μαθήτριες στη Γεωμετρία κατά τη διάρκεια των τάξεων του Γυμνασίου και της πρώτης Λυκείου. Επίσης δεν αναλύθηκαν οι σημειώσεις που δίνουν οι εκπαιδευτικοί στους μαθητές κατά τη διάρκεια των μαθημάτων.

Το δείγμα των εκπαιδευτικών που πήρε μέρος στις συνεντεύξεις ήταν μικρό, πήραν μέρος μόλις πέντε εκπαιδευτικοί, οι ηλικίες τους κυμαίνονται από 39 έως 52 έτη, είχαν διδακτική εμπειρία πάνω από 10 χρόνια σε σχολείο και δύο από αυτούς ήταν απόφοιτοι του μεταπτυχιακού προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», οπότε το δείγμα εκτός από μικρό ήταν και αρκετά ανομοιογενές. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν μετά το πέρας της σχολικής χρονιάς και όχι κατά τη διάρκεια των μαθημάτων πάνω στις συγκεκριμένες παραγράφους που διαπραγματεύτηκαν στην ανάλυση των σχολικών των σχολικών εγχειριδίων.

4. Σχολικά Βιβλία – Ανάλυση

Σε συνέχεια όσων αναφέραμε πριν για τα εκπαιδευτικά βιβλία, η γλώσσα τους πρέπει να είναι προσιτή, οι μαθηματικές έννοιες πρέπει να προσφέρονται απλουστευμένες χωρίς όμως να στερούνται επιστημονικής βάσης, εγκυρότητας και συνέπειας. Τα μαθηματικά σύμβολα θα πρέπει να εισάγονται προσεκτικά και με αντιστοιχία με τα καθιερωμένα. Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια στροφή των βιβλίων της χώρας μας προς αυτή την κατεύθυνση, μια καλλιέργεια δηλαδή της μαθηματικής γλώσσας μέσω της επικοινωνίας που προσπαθεί να άρει τις συγχίσεις των μαθητών και να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να επικοινωνήσει με τους μαθητές μέσω της φυσικής γλώσσας. Στην σύγχρονη συγγραφή μαθηματικών βιβλίων παρατηρούμε μια διαθεματική προσέγγιση. Η διαθεματική προσέγγιση αναφέρεται στα διαφορετικά νοήματα που μπορούν να δοθούν σε μία μαθηματική έννοια. Η έννοια της διάταξης για παράδειγμα (δηλαδή και της ισότητας) μπορεί να αποδίδει μια σχέση που υφίσταται σε μια μορφή κοινωνικής οργάνωσης (πχ ισότητα φύλων) ή οι κλίμακες στην φυσική (πχ ενεργειακή κλίμακα) (Σκούρας, 2002). Η διαθεματικότητα επιχειρεί τη διασύνδεση του πραγματικού κόσμου με τα μαθηματικά και την καλύτερη κατανοήσει των μαθηματικών εννοιών.

Ας δούμε μερικά αποσπάσματα από τα προηγούμενα βιβλία και το πώς αυτά διαρθρώνονται και στη συνέχεια να σχολιάσουμε τη δομή των νέων βιβλίων, ο σχολιασμός που θα κάνουμε αφορά κυρίως το σύμβολο του ίσον και την ισότητα. Ένα πρώτο βασικό σχόλιο είναι παλιότερα τα βιβλία, ακόμα και αυτά των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου, ήταν δομημένα με έναν αυστηρό μαθηματικό τρόπο και τα βιβλία των μεγαλύτερων τάξεων του Γυμνασίου (σημερινού Λυκείου δηλαδή) ήταν μια συνέχεια αυτών. Ενώ τα σημερινά βιβλία του Γυμνασίου είναι πιο ελεύθερα και χρησιμοποιούν πολύ περισσότερο την φυσική γλώσσα για την εισαγωγή των εννοιών και τα βιβλία του Λυκείου είναι αυστηρότερα και κάνουν την εισαγωγή των εννοιών εκ νέου.

4.1 Σχολικά Βιβλία Παλαιότερων Ετών

Από το βιβλίο της Α' Γυμνασίου του οργανισμού εκδόσεως σχολικών βιβλίων (ΟΕΣΒ) της έκδοσης του 1962 δίνουμε το ακόλουθο χωρίο για την ισότητα δύο ακέραιων αριθμών, ο ορισμός αυτός δίνεται πριν καν οριστούν οι πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, σε κάθε πράξη που ορίζεται δίνονται και προβλήματα προς επίλυση, δηλαδή εισάγονται οι εξισώσεις: «§2. **Πότε δύο αριθμοί είναι ίσοι.** Έστω ότι έχομεν ένα κυτίον με πέννας και δίδομεν εις έκαστον μαθητήν μιας τάξεως από μίαν πένναν. Αν λάβουν όλοι οι μαθηταί από μίαν πένναν και δεν μείνη καμμία εις το κυτίον, θα λέγωμεν ότι ο αριθμός των μαθητών είναι **ίσος** με τον αριθμόν των πεννών.

Γενικώς θα λέγωμεν ότι: **δύο αριθμοί είναι ίσοι, αν εις κάθε μίαν μονάδαν του καθενός αντιστοιχή μια μονάς του άλλου**. Δια να δείξωμεν ότι δύο αριθμοί είναι ίσοι, τους χωρίζουμε με το σημείον $=$, το οποίο απαγγέλλεται **ίσον**. Δυνάμεθα λοιπόν να γράψωμεν: πέντε $=$ πέντε και να απαγγείλωμεν πέντε ίσον πέντε. Οι δύο ίσοι αριθμοί και το μεταξύ αυτών σημείον $=$ εκφράζουν μιαν σχέσιν, η οποία λέγεται **ισότης**.

Οι εκατέρωθεν του ίσον αριθμοί καλούνται **μέλη της ισότητος**. Και ο μέν προς τα αριστερά λέγεται **πρώτον μέλος της ισότητος**, ο δε προς τα δεξιά **δεύτερον μέλος αυτής**.»

Στην έκδοση του 1985 του βιβλίου της Α' Γυμνασίου συναντάμε τον ακόλουθο ορισμό για την ισότητα δύο φυσικών αριθμών: «Ας θεωρήσουμε δύο πεπερασμένα σύνολα A, B και ας ονομάσουμε α, β τους πληθάριθμους τους (σημειώνουμε ότι οι έννοιες όπως σύνολο, πληθάριθμος κτλ. έχουν οριστεί νωρίτερα στο ίδιο βιβλίο). Αν τα σύνολα A και B είναι ισοδύναμα, θα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο και έτσι οι γενικοί αριθμοί α και β θα παριστάνουν τον ίδιο φυσικό αριθμό. Δύο τέτοιοι γενικοί αριθμοί λέγονται **ίσοι**. Για να δηλώσουμε ότι δύο γενικοί αριθμοί α και β είναι ίσοι γράφουμε:

$$\alpha = \beta$$

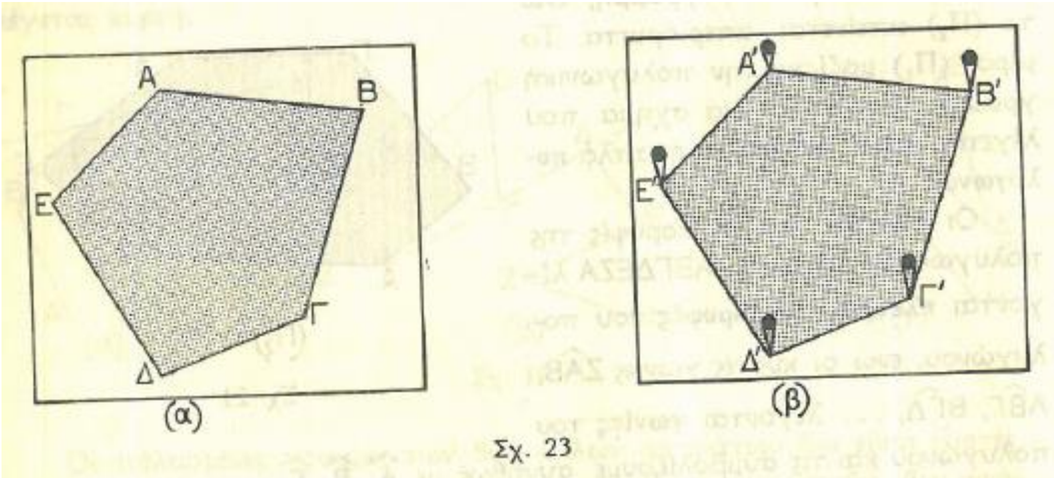
Δύο φυσικοί αριθμοί που δεν είναι ίσοι λέγονται **άνισοι** (όχι ίσοι), γράφουμε

$$\alpha \neq \beta$$

και διαβάζουμε «ο α είναι διαφορετικός από τον β» ή «ο α είναι άνισος προς τον β» .»

Στην συνέχεια στο βιβλίο δίνεται ο ορισμός για το πότε δύο σχήματα είναι ίσα και έχει ενδιαφέρον να δούμε πως φτάνουμε ως τον ορισμό:

«ένα επίπεδο σχήμα μπορούμε να το αποτυπώσουμε σ' ένα διαφανές χαρτί και μετά να το μετατοπίσουμε σε μια νέα θέση του επιπέδου. Η εργασία αυτή για το πολύγωνο $ΑΒΓΔΕ$ (σχ. 23α) γίνεται ως εξής:



Εικόνα 14 – Α' Γυμνασίου, σελ. 58 (1985)

Παίρνουμε ένα διαφανές χαρτί, το απλώνουμε πάνω στο σχήμα και σχεδιάζουμε το πολύγωνο $ΑΒΓΔΕ$ (σχ. 23α). Έπειτα μετατοπίζουμε το διαφανές σε μια άλλη θέση και τρυπάμε με μια καρφίτσα τις κορυφές του πολυγώνου (σχ. 23β). Οι τρυπίτσες που κάνει η καρφίτσα στο χαρτί σχεδιάσεως είναι οι κορυφές του $ΑΒΓΔΕ$ στη νέα του θέση. Βγάζουμε τώρα το διαφανές χαρτί, ονομάζουμε $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$ τα σημάδια στα οποία μεταφέρθηκαν οι αντίστοιχες κορυφές του $ΑΒΓΔΕ$ και σχηματίζουμε το πολύγωνο $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$, που είναι το ίδιο $ΑΒΓΔΕ$ στη νέα του θέση. Παρατηρούμε λοιπόν ότι στη μετατόπιση ενός σχήματος δεν αλλάζει η μορφή του και οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων παραμένουν αμετάβλητες (αναλλοίωτες). Γι' αυτό λέμε ότι:

Ένα επίπεδο σχήμα που μετατοπίζεται στο επίπεδο παραμένει αναλλοίωτο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας δίνουν τα δύο παραπάνω πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ και $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$ (σχ. 23) δίχως να ξέρουμε πως το δεύτερο έχει προκύψει από μετατόπιση του πρώτου. Τότε, αν αποτυπώσουμε το $ΑΒΓΔΕ$ σε διαφανές χαρτί και το τοποθετούσαμε το διαφανές κατάλληλα πάνω στο πολύγωνο $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$, θα βλέπαμε ότι τα δύο πολύγωνα εφαρμόζουν ακριβώς και αποτελούν ένα μόνο σχήμα. Δύο τέτοια πολύγωνα λέγονται ίσα και γράφουμε

$ΑΒΓΔΕ = Α'Β'Γ'Δ'Ε'$

Γενικά:

Δύο σχήματα λέγονται ίσα, όταν μπορούν (με κατάλληλη μετατόπιση του ενός) να εφαρμόσουν και να αποτελέσουν ένα μόνο σχήμα.»

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και η ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων (αναφέρεται και το άνοιγμα του διαβήτη), γωνιών, κύκλων κτλ.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο πίνακας συμβόλων που δίνεται στην πρώτη σελίδα του βιβλίου ο οποίος αντιστοιχεί κάθε σύμβολο (συμπεριλαμβανομένου και του ίσον) της πρώτης στήλης με τη σημασία του στη δεύτερη στήλη και είναι ο ακόλουθος (ο πίνακας αυτός βρίσκεται στην πρώτη σελίδα και των βιβλίων της Β' και Γ' Γυμνασίου)

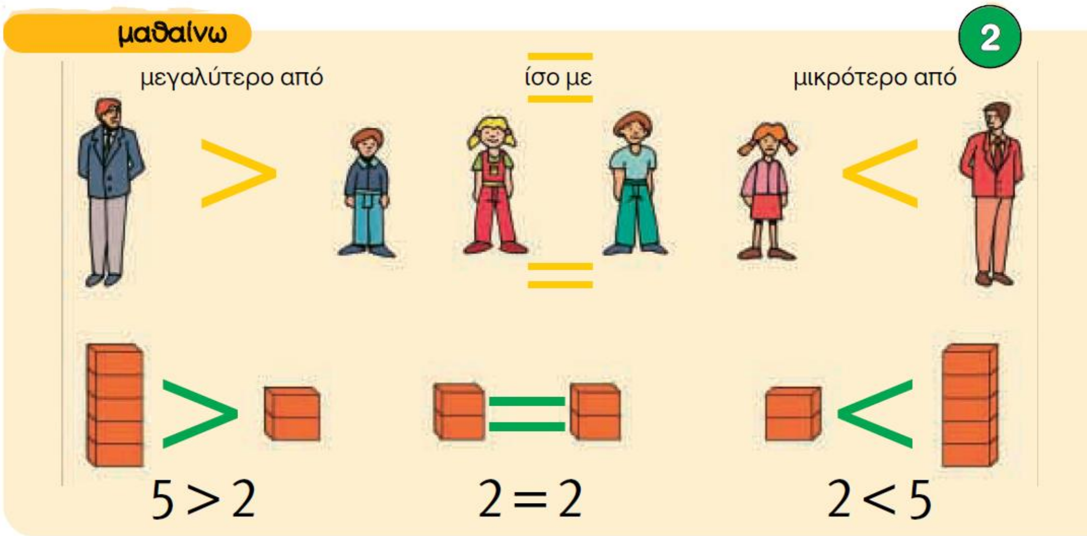
Σύμβολο	Σημασία
$\{\ \}$	Άγκιστρα
$\in, \notin$	Ανήκει, δεν ανήκει
$=, \neq$	Ίσο, διαφορετικό
$\{\ \}, \emptyset$	Το κενό σύνολο
$\sim$	Ισοδύναμο
$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\subset, \subseteq$	Γνήσιο υποσύνολο, υποσύνολο
T_ν	$T_\nu = \{1, 2, 3, \dots, \nu\}$
$<, >$	Μικρότερο, μεγαλύτερο
$\leq, \geq$	Μικρότερο ή ίσο, μεγαλύτερο ή ίσο
$A\hat{O}B$	Γωνία με κορυφή το O και πλευρές OA, OB
$κυκλ(O, ρ)$	Κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $ρ$
$κ.δισκ(O, ρ)$	Κυκλικός δίσκος με κέντρο O και ακτίνα $ρ$
$\widehat{AB}$	Τόξο με άκρα A και B

(AB)	Μέτρο του ευθυγράμμου τμήματος AB
$\simeq$	Ίσο με προσέγγιση
$\cup, \cap$	Ένωση, τομή
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$	ε_1 κάθετη στην ε_2
$\Leftrightarrow$	Ισοδυναμεί με
$\overrightarrow{AB}$	Διάνυσμα με αρχή το A και τέλος το B
$\overline{AB}, \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	Αλγεβρική τιμή του $\overrightarrow{AB}$, μέτρο του $\overrightarrow{AB}$
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^* = \{+1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-$	$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$
$\varepsilon_1 \mathbin{/\!/} \varepsilon_2$	ε_1 παράλληλη προς την ε_2
α^ν	$\alpha^\nu = \dfrac{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}{\nu\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$
$M.K.\varDelta, E.K.\varPi$	Μέγιστος κοινός διαιρέτης, ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο
$\mathbb{Q}$	Το σύνολο των ανάγωγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}, \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}^*$

Εικόνα 15 – Β’ & Γ’ Γυμνασίου, εισαγωγή (1985)

4.2 Σχολικά Βιβλία Δημοτικού

Αφού είδαμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα από τα βιβλία παλαιότερων ετών ας δούμε τώρα τι συμβαίνει στα σύγχρονα βιβλία μαθηματικών, των οποίων στόχος είναι ο μαθητής να μην αντιμετωπίζεται πλέον ως απλός δέκτης μαθηματικών πληροφοριών αλλά να διαμορφώνει ο ίδιος τη μαθηματική γνώση (όσο αυτό είναι εφικτό) με την υποστήριξη του διδάσκοντα καθηγητή ή δασκάλου στην περίπτωση του Δημοτικού. Τα σύγχρονα βιβλία στρέφονται προς αυτή την κατεύθυνση, δηλαδή οι μαθητές καλούνται να διαπραγματευτούν ατομικά ή συνεργατικά για να προσεγγίσουν τη νέα γνώση μέσω ποικίλων δραστηριοτήτων, εσκεμμένα χρησιμοποιείται η λέξη δραστηριότητα, και όχι η λέξη άσκηση, για να δηλώσει τη διαδικασία και την επικοινωνία μεταξύ μαθητών και καθηγητή, χρησιμεύει στην κατασκευή νέας γνώσης από τον ίδιο το μαθητή και δίνει την ευκαιρία για εφαρμογή της ήδη αποκτηθείσας γνώσης. Μια μαθηματική δραστηριότητα πρέπει να είναι σαφής και να αποτελεί πρόκληση για σκέψη και διερεύνηση. Ως δραστηριότητα ορίζουμε μια κατάσταση – πρόβλημα (ή τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος). Όσο αφορά το ίσον και την ισότητα, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με το σύμβολο του ίσον από την πρώτη κιόλας τάξη του Δημοτικού σχολείου, από το βιβλίο αυτής της τάξης «Μαθηματικά της φύσης και της ζωής» παραθέτουμε τα επόμενα αποσπάσματα από την ενότητα 12: σύγκριση αριθμών – τα σύμβολα $=, <, >$.

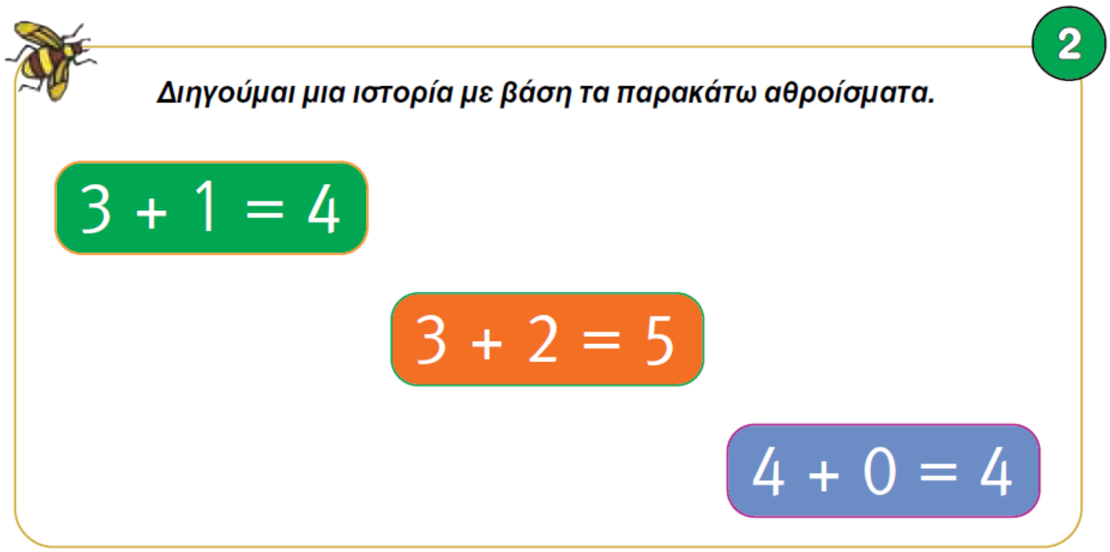


Εικόνα 16 – Α’ Δημοτικού, σελ. 37

Εικόνα 17 – Α’ Δημοτικού, σελ. 37

Στόχος των δραστηριοτήτων είναι να εισάγουμε τα τρία σύμβολα της σύγκρισης. Έως τώρα οι μαθητές έχουν μάθει τη σειρά κάθε αριθμού στην ακολουθία των αριθμών. Σε αυτή την περίοδο οι μαθητές είναι ώριμοι για την κατανόηση και χρήση των συμβόλων αφού γνωρίζουν τη σειρά των αριθμών και μπορούν να τους διατάσσουν και να τους συγκρίνουν αλλά και η γλωσσική ανάπτυξη τους επιτρέπει να κατανοούν και να χρησιμοποιούν αφηρημένα σύμβολα.

Στις επόμενες ενότητες το σύμβολο του ίσον θεωρείται δεδομένο και χρησιμοποιείται πολλές φορές στο σχολικό βιβλίο όπως για παράδειγμα στην επόμενη δραστηριότητα που γίνεται η εισαγωγή του αθροίσματος δύο αριθμών.



Εικόνα 18 – Α’ Δημοτικού, σελ. 41

Το σύμβολο του ίσον χρησιμοποιείται κατά κόρων και στις επόμενες τάξεις, ώσπου στην έκτη Δημοτικού οι μαθητές είναι ικανοί να λύσουν πιο σύνθετα προβλήματα που απαιτούν μια σειρά από βήματα στα οποία καλούνται να χρησιμοποιήσουν τις ιδιότητες και τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων. Το σχολικό βιβλίο της έκτης δημοτικού διαφέρει αρκετά από αυτά των προηγούμενων τάξεων του Δημοτικού, τα βιβλία των μικρότερων τάξεων ήταν απλουστευμένα ώστε να ανταποκρίνονται στο επίπεδο αντίληψης των παιδιών. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες τάξης, το βιβλίο αυτό δεν είναι πολύ αυστηρά γραμμένο όμως επιδιώκει τη μαθηματική ακρίβεια ώστε να αποφεύγονται οι παρανοήσεις και λειτουργεί ως εργαλείο στη διδακτική πράξη, στοχεύει στην εμπέδωση των γνώσεων που έχουν αποκτηθεί στις προηγούμενες τάξεις και τις συστηματοποιεί και τις διευρύνει, τις γενικεύει. Με άλλα λόγια η σημασία του βιβλίου αυτού είναι πολύ σημαντική και για τις τάξεις του Γυμνασίου, στις οποίες πολλές διαδικασίες θα θεωρούνται δεδομένες.

Το παρακάτω πρόβλημα , από το $9^{ο}$ κεφάλαιο του βιβλίου της έκτης δημοτικού είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα χρησιμοποίησης των τεσσάρων πράξεων:

Το υπερωκεάνιο "Τιτανικός" βυθίστηκε το 1912. Οι επιβάτες του ήταν 1316 άτομα και το πλήρωμά του 885. Είχε 20 σωσίβιες λέμβους, η καθεμία από τις οποίες χωρούσε 58 άτομα. Στο ναυάγιο χάθηκαν 1490 άτομα. Αν γέμιζαν όλες οι σωσίβιες λέμβοι, πόσο περισσότεροι διασωθέντες θα υπήρχαν; Αφού διαβάσεις με προσοχή το πρόβλημα, απάντησε στις ερωτήσεις: Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία που θα σε βοηθήσουν στη λύση; (τι ξέρεις;)... .... ● Ποια είναι τα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος; (τι δεν ξέρεις;).. ● Πώς σχετίζονται τα γνωστά με τα άγνωστα στοιχεία; .... ● Οργάνωσε το σχέδιο λύσης και διάλεξε ποιες πράξεις θα χρησιμοποιήσεις (+) (-) (:) (.) Αρχικά θα κάνω................................ ώστε να.................................

....

....

Στη συνέχεια

θα...

....

Τέλος...

....

● Κάνε τις πράξεις. (Μπορείς με τον νου ή με χαρτί και μολύβι.)

....

....

....

....

....

....

● Απάντησε στο πρόβλημα.

....

....

● Έλεγξε αν είναι η απάντηση λογική σύμφωνα με τα δεδομένα.

………………………………………………………………………………

……………………………..

Εικόνα 19 – Στ’ Δημοτικού, σελ. 25

Οι μαθητές ακολουθούν τα εξής βήματα για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων:

i. Αναγνώριση των γνωστών και των άγνωστων στοιχείων (δεδομένα – ζητούμενα)
ii. Εύρεση του τρόπου με τον οποίο σχετίζονται δεδομένα και ζητούμενα
iii. Επιλογή των πράξεων που θα τους οδηγήσουν στο αποτέλεσμα
iv. Κατάστρωση σχεδίου λύσης
v. Εκτέλεση των πράξεων
vi. Διατύπωση της απάντηση
vii. Έλεγχος ορθότητας (με βάση τη λογική)

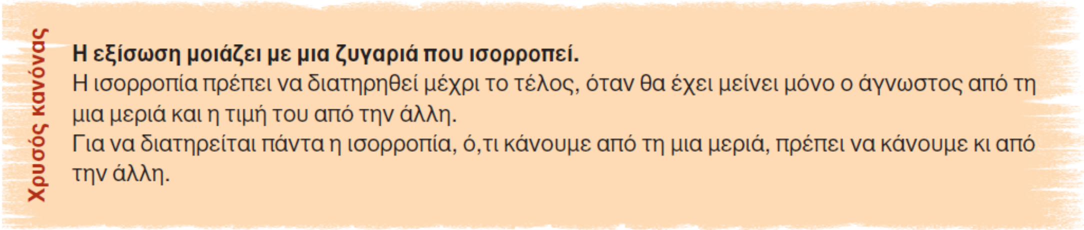
Η επίλυση του πιο πάνω προβλήματος δεν γίνεται με χρήση εξισώσεων αλλά μόνο με τις συνήθεις πράξεις,. Ένας τρόπος που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στο ομαλό πέρασμα από την αριθμητική στη στοιχειώδη άλγεβρα είναι να ξεκινήσει η διδασκαλία των εξισώσεων από τις άτυπες στρατηγικές των παιδιών και επάνω σε αυτές να οικοδομήσουν τις τυπικές μεθόδους επεξεργασίας αλγεβρικών παραστάσεων και επίλυσης εξισώσεων. Η δεύτερη θεματική ενότητα του βιβλίου αναφέρεται στις εξισώσεις και εισάγει τον τρόπο επίλυσης προβλημάτων με την χρήση τους. Η ενότητα αυτή, η οποία είναι σχετικά μικρή σε χρονική διάρκεια συγκριτικά με τις υπόλοιπες του σχολικού βιβλίου, ξεκινά με την έννοια της μεταβλητής, δηλαδή την χρήση γραμμάτων ή συμβόλων σε αριθμητικές παραστάσεις. Οι οδηγίες της διδασκαλίας αυτής της ενότητας τονίζουν στον εκπαιδευτικό να δώσει έμφαση, σε μια διαδικασία που έχει διδαχθεί και σε προηγούμενες τάξεις, στις αντίστροφες πράξεις και στην αντιμετώπιση τέτοιων καταστάσεων ώστε να φτάσουν να λύνουν εξισώσεις με ομαλό τρόπο και όχι ως κάτι καινούριο και αποκομμένο από τα προηγούμενα.

Τα παρακάτω αποσπάσματα είναι από τα κεφάλαια 26, 27, 28 και 29 στα οποία γίνεται μια εισαγωγή στις εξισώσεις με έναν άγνωστο και όπως θα δούμε αυτές χωρίζονται σε 4 «τύπους».

• **Μεταβλητή** οποιοδήποτε γράμμα που μπαίνει στην θέση μιας άγνωστης τιμής • **Εξίσωση** μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό, που συμβολίζουμε συνήθως με x ή ψ ή z …κτλ., λέγεται εξίσωση με έναν άγνωστο • **Λύση της εξίσωσης** η τιμή που την επαληθεύει	• ω, x, … • $5 + x = 10{,}5$ • $x = 5{,}5$
• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους προσθετέους**	• Κάνουμε αφαίρεση, π.χ.: $x + 0{,}2 = 12{,}8$ $άρα\ x = 12{,}8 - 0{,}2$

	$ά\rho\alpha\ x = 12{,}6$ $2 + x = 11{,}5$ $ά\rho\alpha\ x = 11{,}5 - 2$ $ά\rho\alpha\ x = 9{,}5$
• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι μειωτέος** • **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι αφαιρετέος**	• Κάνουμε πρόσθεση, π.χ.: $x - 31 = 45$ $ά\rho\alpha\ x = 45 + 31$ $ά\rho\alpha\ x = 76$ • Κάνουμε αφαίρεση, π.χ.: $20{,}1 - x = 7$ $ά\rho\alpha\ x = 20{,}1 - 7$ $ά\rho\alpha\ x = 13{,}1$
• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους παράγοντες του γινομένου**	• Κάνουμε διαίρεση, π.χ.: $x \cdot 3 = 96$ $ά\rho\alpha\ x = 96 : 3$ $ά\rho\alpha\ x = 32$ $14 \cdot x = 11{,}2$ $ά\rho\alpha\ x = 11{,}2 : 14$ $ά\rho\alpha\ x = 0{,}8$
• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος** • **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρέτης**	• Κάνουμε πολλαπλασιασμό, π.χ.: $x : 0{,}5 = 24$ $ά\rho\alpha\ x = 24 \cdot 0{,}5$ $ά\rho\alpha\ x = 12$ • Κάνουμε διαίρεση, π.χ.: $144 : x = 9$ $ά\rho\alpha\ x = 144 : 9$ $ά\rho\alpha\ x = 16$

Εικόνα 20 – Στ’ Δημοτικού, σελ. 71

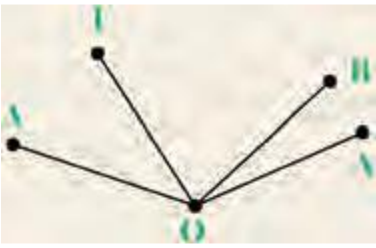


Χρυσός κανόνας

Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί.
Η ισορροπία πρέπει να διατηρηθεί μέχρι το τέλος, όταν θα έχει μείνει μόνο ο άγνωστος από τη μια μεριά και η τιμή του από την άλλη.
Για να διατηρείται πάντα η ισορροπία, ό,τι κάνουμε από τη μια μεριά, πρέπει να κάνουμε κι από την άλλη.

Εικόνα 21 – Στ’ Δημοτικού, σελ. 71

Η έκτη θεματική ενότητα αφορά τη Γεωμετρία, στο 57^{ο} Κεφάλαιο γίνεται λόγος για τις γωνίες και το βιβλίο προσπαθεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν ότι γωνία είναι μέρος του επιπέδου και ότι το μέγεθος της δεν εξαρτάται από το «μήκος» των πλευρών της. Σύγκριση μεταξύ γωνιών γίνεται μέσω της τεχνικής της υπέρθεσης αλλά και της μέτρησης μέσω μοιρογνωμονίου. Χαρακτηριστικά αναφέρει: «μπορούμε να συγκρίνουμε δύο γωνίες μεταξύ τους αν τοποθετήσουμε τη μία πάνω στην άλλη, με τη την κορυφή και τη μία πλευρά τους να συμπίπτουν. … Για να συγκρίνω τις γωνίες $A\hat{O}B, A\hat{O}\Gamma \text{ και } A\hat{O}\Delta$ μεταξύ τους δεν χρειάζεται να τις αποτυπώσουμε σε διαφανές χαρτί, καθώς με τον τρόπο που είναι σχεδιασμένες συμπίπτει η κορυφή (O) και η μία πλευρά τους (AO). Είναι φανερό ότι είναι $A\hat{O}\Delta > A\hat{O}\Gamma > A\hat{O}B$



».

Εικόνα 22 – Στ’ Δημοτικού, σελ. 139

4.3 Σχολικό Βιβλίο Α’ Γυμνασίου

Στην πρώτη κιόλας παράγραφο του σχολικού βιβλίου (Α.1.1 Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη – Στρογγυλοποίηση) γίνεται αναφορά του συμβόλου του ίσον. Η παράγραφος δίνει μεγάλη βαρύτητα σε αυτά που διδάχθηκαν οι μαθητές στο δημοτικό και δεν κάνει εκτεταμένη αναφορά στα σύμβολα της διάταξης. Χαρακτηριστικά αναφέρει «Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα:

το = που σημαίνει ‘ίσος με’

το < που σημαίνει ‘μικρότερος από’ και

το > που σημαίνει ‘μεγαλύτερος από’

Στις επόμενες παραγράφους η χρήση των συμβόλων αλλά και οι λεκτικές τους εκφράσεις χρησιμοποιούνται πολύ συχνά όπως για παράδειγμα στις ιδιότητες της πρόσθεσης:

Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί το μηδέν *ισούται με* το μηδέν	$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$

Εικόνα 23 – Α’ Γυμνασίου, σελ. 15

Στην παράγραφο Α.4.1 εισάγεται η έννοια της εξίσωσης. Οι στόχοι της παραγράφου είναι 4:

1ος: η μετατροπή των λεκτικών εκφράσεων σε μαθηματικές
2ος: ο χειρισμός αριθμητικών παραστάσεων με μεταβλητή και η μετατροπή σε απλούστερη (πιο εύχρηστη) έκφραση πχ $\alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\alpha + 2\beta$
3ος: την αναγκαιότητα χρήσης των εξισώσεων για τη λύση προβλημάτων (Α.4.2), ως παράδειγμα δίνεται η ζυγαριά στην οποία στο ένα μέρος βάζουμε μια σοκολάτα και στο άλλο μισή σοκολάτα και ένα βαρίδι 100 γραμμαρίων
4ος: η εμπέδωση της επαλήθευσης ή μη μιας ισότητας παραστάσεων

Η παράγραφος χωρίζει τις εξισώσεις σε 4 κατηγορίες όπως και στην έκτη δημοτικού όμως εδώ δίνει και τη μορφή της λύσης και ένα παράδειγμα εφαρμογής

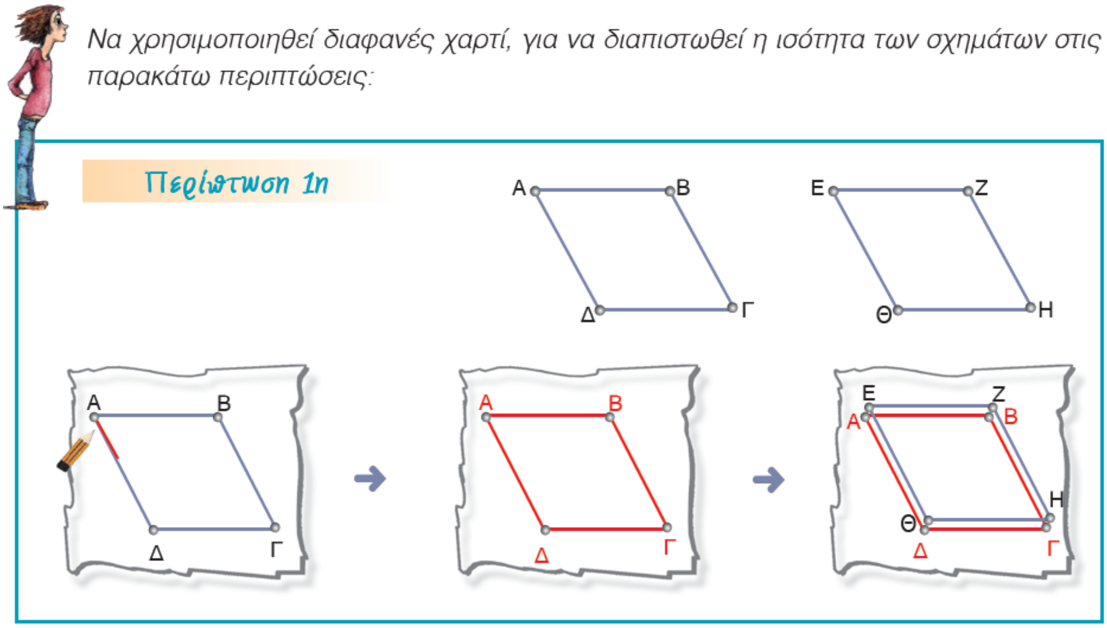
Βάσει των ορισμών των πράξεων

η εξίσωση:	x+α=β	έχει λύση την	x=β – α	Η εξίσωση:	x + 5 = 12	έχει λύση την	x=12-5 ή x=7
-//-	x – α=β	-//-	x=β+α	-//-	y - 2 = 3	-//-	y=3+2 ή y=5
-//-	α – x=β	-//-	x=α – β	-//-	10 - z = 1	-//-	z=10-1 ή z=9
-//-	α·x=β	-//-	x=β:α	-//-	7 · φ = 14	-//-	φ=14:7 ή φ=2
-//-	x:α=β	-//-	x=β·α	-//-	w : 5 = 4	-//-	w=4·5 ή w=20
-//-	α:x=β	-//-	x=α:β	-//-	24 : ψ = 6	-//-	ψ=24:6 ή ψ=4

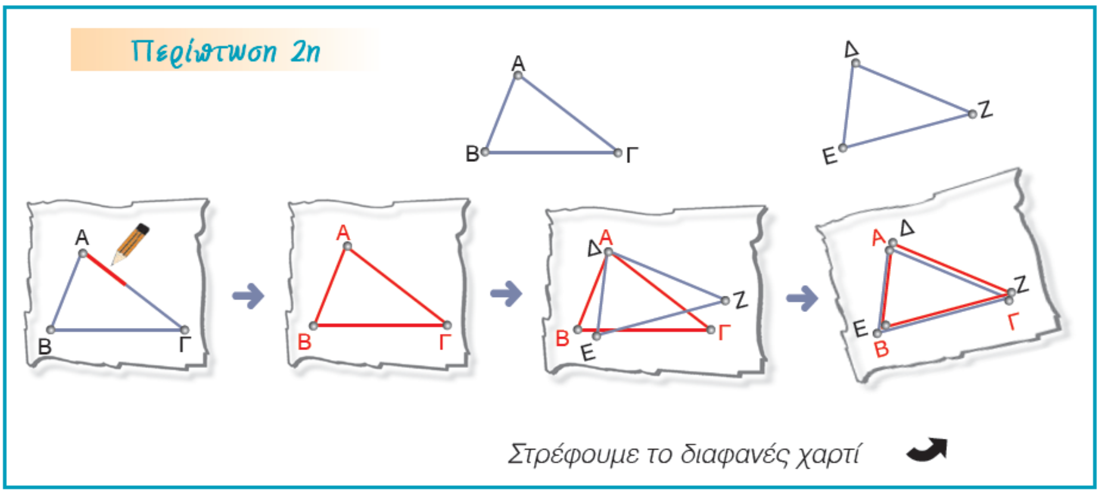
Εικόνα 24 – Α’ Γυμνασίου, σελ. 73

Δίνονται οι ορισμοί της αόριστης εξίσωσης (ή ταυτότητα) και της αδύνατης εξίσωσης.

Β.1.2 Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα, αυτή ενότητα προσπαθεί να κάνει κατανοητή την έννοια της γωνίας, ορίζει τα κυρτά και μη κυρτά σχήματα και δίνεται ο ορισμός των ίσων ευθυγράμμων σχημάτων. Μέσα από τις δύο εφαρμογές που δίνονται οι μαθητές ελέγχουν την ισότητα δύο σχημάτων είτε με τον τρόπο της αποτύπωσης είτε με την επίθεση του ενός σχήματος πάνω στο άλλο.

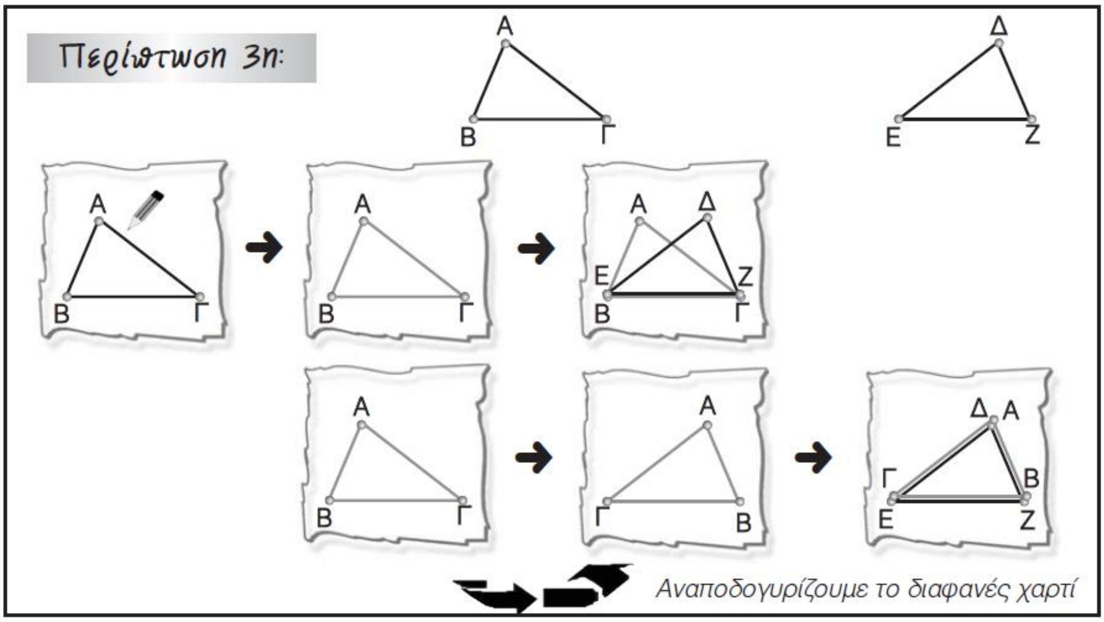


Εικόνα 25 – Α’ Γυμνασίου, σελ. 155



Εικόνα 26 – Α’ Γυμνασίου, σελ. 155

Στο βιβλίο με τις οδηγίες που δίνει το Υπουργείο στους διδάσκοντες υπάρχει και μία τρίτη εφαρμογή που επαφίεται στον διδάσκοντα να την παρουσιάσει αν θεωρηθεί σκόπιμο



Εικόνα 27 Α’ Γυμνασίου, βιβλίο καθηγητή, σελ. 76

4.4 Σχολικό Βιβλίο Β’ Γυμνασίου

Αφού, στην πρώτη παράγραφο, εισάγει την έννοια της μεταβλητής και τη διαφορά ανάμεσα στην αριθμητική και αλγεβρική παράσταση, στη δεύτερη παράγραφο (Μέρος Α’ 1.2) αναφέρεται το εξής:

«Μια σχέση ισότητας ή ανισότητας είναι στην ουσία μια ζυγαριά, η οποία είτε ισορροπεί, είτε γέρνει από τη μία πλευρά, είτε από την άλλη. Αν α και β παριστάνουν τα βάρη των αντικειμένων του σχήματος, τότε θα ισχύει μία μόνο από τις σχέσεις: $\alpha + \beta, \alpha < \beta, \alpha > \beta$»

Στη συνέχεια, μέσω του παραδείγματος της ζυγαριάς, παραθέτει 4 βασικούς κανόνες για τις ισότητες:

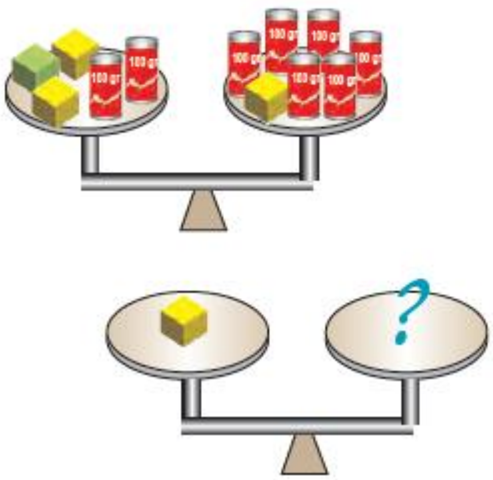
$A\nu\ \alpha = \beta\ \tau \acute{o} \tau \varepsilon\ \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

$A\nu\ \alpha = \beta\ \tau \acute{o} \tau \varepsilon\ \alpha - \gamma = \beta - \gamma$

$A\nu\ \alpha = \beta\ \tau \acute{o} \tau \varepsilon\ \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

$A\nu\ \alpha = \beta\ \tau \acute{o} \tau \varepsilon\ \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}, \mu\varepsilon\ \gamma \neq 0.$

Η έννοια της εξίσωσης δίνεται πάλι μέσω παραδείγματος με την ζυγαριά



Εικόνα 28 Β’ Γυμνασίου, σελ 16

και αφού φτάσει στην εξίσωση $3x + 200 = x + 600$ δίνει τους ακόλουθους ορισμούς:

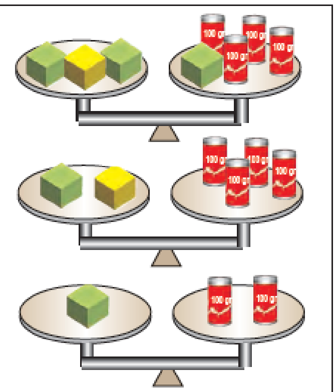
Η ισότητα αυτή, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x, ονομάζεται **εξίσωση**
Η παράσταση $3x + 200$ λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $x + 600$ λέγεται **δεύτερο μέλος** αυτής

Εικόνα 29 – Β’ Γυμνασίου, σελ. 17

Σε αυτά που είδαμε, φαίνεται ότι στην Β’ Γυμνασίου χρησιμοποιείται πάλι το παράδειγμα της ζυγαριάς και ότι εισάγεται το πρώτο και δεύτερο μέλος της εξίσωσης, δε δίνεται μια τυποποιημένη λύση των εξισώσεων όπως στην Α’ Γυμνασίου αλλά μια αλληλουχία ενεργειών για να φτάσει ο μαθητής στην επίλυση.

Για να βρούμε τώρα τον άγνωστο αριθμό x, λύνουμε την εξίσωση.

Εξίσωση $3x + 200 = x + 600$	Περιγραφή λύσης
$3x + 200 - 200 = x + 600 - 200$	Αφαιρούμε το 200 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης
$3x = x + 400$	Κάνουμε τις πράξεις
$3x - x = x + 400 - x$	Αφαιρούμε το x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης
$(3 - 1)x = 400$ άρα $2x = 400$	Αναγωγή ομοίων όρων
$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$	Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης
$x = 200$	Απλοποιούμε τα κλάσματα



Άρα, ο κάθε κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια.

Εικόνα 30 – Β’ Γυμνασίου, σελ. 17

Στο απόσπασμα αυτό, στο πρώτο βήμα, αναφέρει το βιβλίο ότι αφαιρούμε έναν αριθμό και από τα δύο μέλη. Στην επόμενη σελίδα δίνει αυτή τη διαδικασία πιο «τεχνικά» λέγοντας:

> Σε μια εξίσωση μπορούμε να **«μεταφέρουμε»** όρους από το ένα μέλος στο άλλο, **αλλάζοντας το πρόσημο τους**

Εικόνα 31 – Β' Γυμνασίου, σελ. 18

Δίνεται έτσι η επίλυση της ίδιας εξίσωσης με τα παρακάτω βήματα

$$3x+200 = x+600$$

← Μεταφέρουμε το +x στο πρώτο μέλος, οπότε γίνεται -x. Επίσης, μεταφέρουμε το +200 στο δεύτερο μέλος, οπότε γίνεται -200.

$$3x-x = 600-200$$

$$2x = 400$$

← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$$

← Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και απλοποιούμε τα κλάσματα.

$$x = 200$$

Εικόνα 32 – Β' Γυμνασίου, σελ. 18

Την τεχνική της μεταφοράς αριθμών ή μεταβλητών από το ένα μέλος στο άλλο θα τη δούμε και στις ανισώσεις, οι μαθητές την χρησιμοποιούν και ουσιαστικά ξεχνάνε από πού προήλθε η τεχνική, έτσι ένα σχόλιο που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι το εξής, ο διδάσκοντας πρέπει να τονίσει σε αυτό το σημείο ότι η χρήση της τεχνικής αυτής γίνεται για λόγους συντομίας. Όπως θα δούμε στο βιβλίο της επόμενης τάξης, όταν έχω διπλή ανίσωση δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την τεχνική και θα πρέπει να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε τον ίδιο αριθμό και στα τρία μέλη.

Παρακάτω (1.4 Μέρος Α'), είναι η παράγραφος επίλυσης προβλημάτων με την χρήση εξισώσεων. Τα τελευταία δύο χρόνια η διδακτέα ύλη έχει και αυτή την πολύ σπουδαία παράγραφο που παλιότερα είχε αφαιρεθεί, ίσως για το λόγο ότι δυσκολεύει τους μαθητές και ότι απαιτεί ιδιαίτερη προσπάθεια. Στόχοι αυτής της παραγράφου είναι οι μαθητές να διακρίνουν τα δεδομένα του προβλήματος από τα ζητούμενα, να εισάγουν τον άγνωστο, να καταστρώσουν ένα σχέδιο επίλυσης και ως εκ τούτου να μεταφράσουν το πρόβλημα από την φυσική γλώσσα στη μαθηματική γλώσσα (αυτό είναι και το πιο δύσκολο μέρος που απαιτεί καλή αντίληψη), να επιλύσουν την εξίσωση που έχει προκύψει και να ελέγχουν την ορθότητα των αποτελεσμάτων τους.

Στην παράγραφο 1.4 Μέρος Β' δίνεται ένα από τα σπουδαιότερα και γνωστότερα (αν όχι το πιο γνωστό) θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που η διατύπωση του περιέχει και την έννοια της ισότητας, στις επίσημες οδηγίες που δίνονται στους εκπαιδευτικούς αναφέρεται ότι μέσω του Πυθαγορείου θεωρήματος δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αναγνωρίσουν τη συσχέτιση της άλγεβρας με τη γεωμετρία και προτρέπει το διδάσκοντα να μετατρέψει τη σχέση των εμβαδών σε αλγεβρική σχέση μεταξύ των πλευρών, από τις εφαρμογές και τις ασκήσεις που αναφέρονται σε αυτή την παράγραφο επιχειρείται η αυτή η συσχέτιση της άλγεβρας με τη γεωμετρία. Από τα προηγούμενα λοιπόν συμπεραίνουμε ότι επιχειρείται μια εισαγωγή, χωρίς μαθηματική αυστηρότητα, στις μετρικές σχέσεις. Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι μία μετρική ιδιότητα και όχι μία παραστατική, οι μετρικές αφορούν τη μέτρηση αποστάσεων ή γωνιών, ενώ στις παραστατικές οι μετρήσεις είναι επουσιώδεις. Αυτό φαίνεται πολύ έντονα, και από τις οδηγίες διδασκαλίας του υπουργείου στο ένατο κεφάλαιο του βιβλίου γεωμετρίας που χρησιμοποιείται στο Λύκειο.

Στατιστικά βιβλίο Β' Γυμνασίου, Μέρος Β', Κεφάλαιο 1ο – Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων – Πυθαγόρειο Θεώρημα

Πίνακας 5 – Β'Γ Συχνότητες εμφάνισης Γεωμ. Αντικείμενο / Έννοια

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
Γεωμετρικό αντικείμενο	55+16+6=77	0.66	66%
Αριθμητικό αντικείμενο	13	0.11	11%
Μονάδες μέτρησης	13	0.11	11%
Αλγεβρικό αντικείμενο	13	0.11	11%
	116		

Πίνακας 6 – Β’Γ Συχνότητες εμφάνισης Θεωρία / Εφαρμογή / Άσκηση

x_i	v_i	f_i	f_i%
Θεωρία	33	0.28	28%
Εφαρμογή	60	0.52	53%
Άσκηση	23	0.20	20%
Για διασκέδαση	0	0	0%
Ιστορικό απόσπασμα	0	0	0%
	116		

Πίνακας 7 – Β’Γ Συχνότητες εμφάνισης Γεωμετρία / Άλγεβρα / Φυσικός Κόσμος

x_i	v_i	f_i	f_i%
Γεωμετρία	114	0.98	98%
Άλγεβρα	2	0.02	2%
Φυσικός κόσμος	0	0	
	116		

Πίνακας 8 – Β’Γ Συχνότητες εμφάνισης Χρήσης του Ίσον, Σχεσιακή / Λειτουργική

x_i	v_i	f_i	f_i%
Σχεσιακή	15	0.13	13%
Λειτουργική	101	0.87	87%
	116		

Πίνακας 9 – Β’Γ Συχνότητα εμφάνισης ΓΓ / ΓΑ / ΑΑ

x_i	v_i	f_i	f_i%
ΓΓ	34	0.23	23%
ΓΑ (ΑΓ)	52	0.34	34%
ΑΑ	64	0.43	43%
	116+34=150		

4.5 Σχολικό Βιβλίο Γ' Γυμνασίου

Στην Τρίτη τάξη του Γυμνασίου οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με πολλές μαθηματικές έννοιες οι οποίες είναι πολύ σημαντικές και για την πορεία τους στο Λύκειο. Θα λέγαμε ότι η αυτή η τάξη είναι κομβική για την κατανόηση των μαθηματικών των επόμενων ετών, όχι μόνο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά και στην τριτοβάθμια.

Στην πρώτη παράγραφο του βιβλίου γίνεται μια επανάληψη των εννοιών πραγματικοί αριθμοί και πράξεις μεταξύ τους, ρητοί αριθμοί, δυνάμεις, ρίζες κτλ. από προηγούμενες τάξεις.

Στην παράγραφο 1.2 ορίζονται οι αριθμητικές, αλγεβρικές παραστάσεις και μεταξύ τους διαφορές και ομοιότητες, ορίζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση και η αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης. Δίνεται ακόμα ο ορισμός του μονωνύμου, το κύριο μέρος του, ο συντελεστής και ο βαθμός του. Ορίζεται επίσης πότε δύο μονώνυμα είναι όμοια, αντίθετα ή ίσα, είναι οι πρώτη φορά που οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την ισότητα αλγεβρικών παραστάσεων και καταφέρνουν να λύσουν ασκήσεις όπως η επόμενη

Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ, ν ώστε τα μονώνυμα $4x^3y^\nu, \lambda x^\kappa y^2$ να είναι: α) όμοια β) ίσα γ) αντίθετα

Εικόνα 33 – Γ' Γυμνασίου, σελ. 29 (άσκηση)

Δηλαδή είναι η πρώτη φορά που τους δίνονται ισότητες που πρέπει να ισχύουν για κάθε x και για κάθε y. Οι μαθητές δυσκολεύονται να κάνουν το διαχωρισμό ανάμεσα σε τέτοιου είδους ασκήσεων από τις εξισώσεις, αξίζει να σημειώσουμε ότι σε μεγαλύτερες τάξεις (πολύ έντονα φαίνεται αυτό σε πολλές ασκήσεις των πανελληνίων εξετάσεων στην ύλη της Γ' Λυκείου ή στην ισότητα πολυωνύμων στην ύλη της Β' Λυκείου) στις εκφωνήσεις των ασκήσεων γίνεται ο διαχωρισμός ανάμεσα στις ισότητες που ισχύουν για κάθε τιμή της μεταβλητής και στις εξισώσεις, η εκφώνηση τονίζει να αποδειχθεί η ισότητα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή να λυθεί η εξίσωση.

Στην παράγραφο 1.5 βρίσκουμε τις αξιοσημείωτες ταυτότητες, στόχος της παραγράφου είναι οι μαθητές να θυμηθούν την έννοια της ταυτότητας, να γνωρίζουν πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα, να μπορούν να τις αποδεικνύουν και να τις χρησιμοποιούν, ακόμα μια προτροπή προς τους διδάσκοντες είναι μέσω των οδηγιών διδασκαλίας είναι να μπορούν οι μαθητές να διατυπώνουν λεκτικά τις βασικές ταυτότητες και να μην αρκεστούν απλά στην αναγραφή τους. Αυτό διευκολύνει τους μαθητές στην χρησιμοποίηση των ταυτοτήτων στις ασκήσεις. Η εισαγωγή μπορεί να γίνει μέσω γεωμετρικών παραδειγμάτων που μέσω της άλγεβρας θα οδηγήσει στην απόδειξη τους. Μια παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι στον ορισμό που δίνει το βιβλίο αναφέρεται η ισότητα, χωρίς όμως να έχει δοθεί κάπου πιο πριν ο ορισμός της ισότητας.

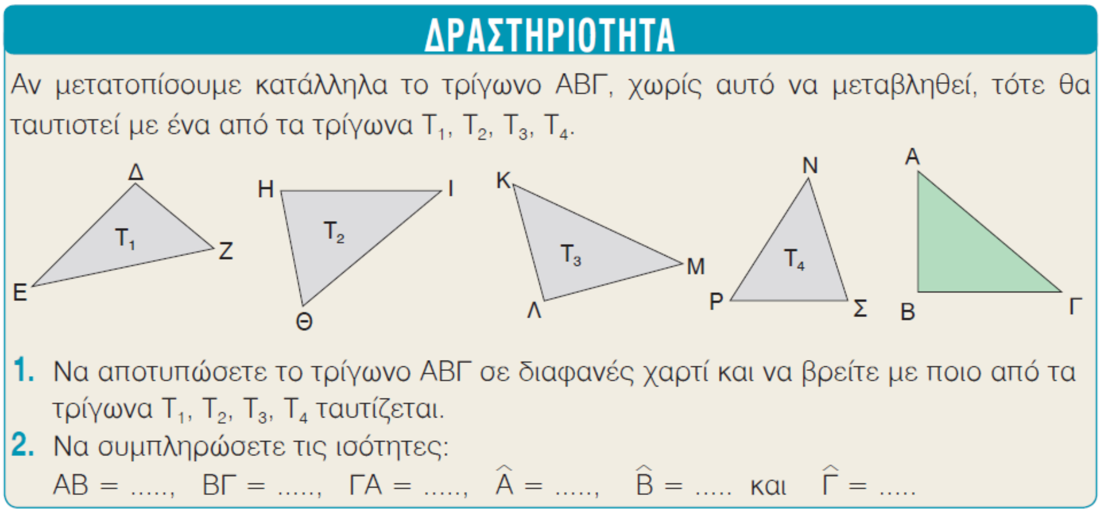
Το δεύτερο κεφάλαιο αφορά τις εξισώσεις και τις ανισώσεις, γίνεται μια υπενθύμιση όσων έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις και γίνεται η εισαγωγή στις εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Η επίλυση των εξισώσεων γίνεται είτε με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων είτε με την χρήση του τύπου της διακρίνουσας, την οποία την χρησιμοποιούν και για τον προσδιορισμό του πλήθους λύσεων. Για την επίλυση των κλασματικών εξισώσεων δίνονται τα βήματα επίλυσης τους, σε ένα από τα οποία, όπως γνωρίζουμε, πρέπει οι μαθητές να πάρουν τον περιορισμό οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός, έρχονται σε επαφή με το σύμβολο «≠» το οποίο το διαβάζουν και το προφέρουν ως «διάφορο».

Στο μέρος Β’ του σχολικού βιβλίου η πρώτη παράγραφος αφορά την ισότητα τριγώνων. Η ισότητα τριγώνων αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και βασικό εργαλείο της ανάπτυξης της. Αφού αναφερθούν τα είδη τριγώνων και τα κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία, δίνονται παρακάτω δύο προτάσεις.

• Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.
• Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Εικόνα 34 – Γ’ Γυμνασίου, σελ. 187-188

Η δραστηριότητα που δίνεται στην αρχή έχει ως στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν με κατάλληλη μετατόπιση είναι δυνατόν το ένα να συμπέσει με το άλλο.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο ΑΒΓ, χωρίς αυτό να μεταβληθεί, τότε θα ταυτιστεί με ένα από τα τρίγωνα $Τ_1$, $Τ_2$, $Τ_3$, $Τ_4$.

1. Να αποτυπώσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε διαφανές χαρτί και να βρείτε με ποιο από τα τρίγωνα $Τ_1$, $Τ_2$, $Τ_3$, $Τ_4$ ταυτίζεται.
2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

ΑΒ = ..., ΒΓ = ..., ΓΑ = ..., $\widehat{Α}$ = ..., $\widehat{Β}$ = ... και $\widehat{Γ}$ = ...

Εικόνα 35 – Γ' Γυμνασίου, σελ. 186

Σε αυτή την παράγραφο οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να μπορούν να εφαρμόσουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και μέσω αυτών να μπορούν να αποδεικνύουν την ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών.

Στατιστικά βιβλίο Γ' Γυμνασίου, Μέρος Β', Παράγραφος 1.1 – Ισότητα Τριγώνων

Πίνακας 10 – Γ'Γ Συχνότητες εμφάνισης Γεωμ. Αντικείμενο / Έννοια

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
Γεωμετρικό αντικείμενο	107+2=109	1	100%
Αριθμητικό αντικείμενο	0	0	0%
Μονάδες μέτρησης	0	0	0%
Αλγεβρικό αντικείμενο	0	0	0%
	109		

Πίνακας 11 – Γ’Γ Συχνότητες εμφάνισης Θεωρία / Εφαρμογή / Άσκηση

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
Θεωρία	34	0.31	31%
Εφαρμογή	27	0.25	25%
Άσκηση	39	0.36	36%
Για διασκέδαση	0	0	0%
Ιστορικό απόσπασμα	2	0.02	2%
Δραστηριότητα	7	0.06	6%
	109		

Πίνακας 12 – Γ’Γ Συχνότητες εμφάνισης Γεωμετρία / Άλγεβρα / Φυσικός Κόσμος

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
Γεωμετρία	109	1	100%
Άλγεβρα	0	0	0%
Φυσικός κόσμος	0	0	0%
	109		

Πίνακας 13 – Γ’Γ Συχνότητες εμφάνισης Χρήσης του Ίσον, Σχεσιακή / Λειτουργική

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
Σχεσιακή	88	0.80	80%
Λειτουργική	21	0.20	20%
	109		

Πίνακας 14 – Γ’Γ Συχνότητα εμφάνισης ΓΓ / ΓΑ / ΑΑ

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
ΓΓ	108	0.88	88%
ΓΑ (ΑΓ)	15	0.12	12%
ΑΑ	0	0	0%
	109+14=123		

4.6 Σχολικό Βιβλίο Άλγεβρας Α’ Λυκείου

Το βιβλίο της Άλγεβρας της Α’ Λυκείου είναι πιο αυστηρό, σε σχέση με αυτά του Γυμνασίου, στις μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζει. Το Λύκειο αποτελεί μέρος της μη υποχρεωτικής εκπαίδευσης και έτσι η εμβάθυνση στις μαθηματικές έννοιες με μια πιο επιστημονική προσέγγιση είναι φανερή. Συχνά γίνονται αναφορές στο βιβλίο για αυτά που έχουν διδαχθεί οι μαθητές από το Γυμνάσιο και επιχειρείται μια ολοκλήρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης και η προώθηση ενός πιο θεωρητικού και αφαιρετικού τρόπου σκέψης. Η διδασκαλία έχει ως στόχο την κατανόηση των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, τη μετάφραση από την φυσική γλώσσα στη μαθηματική και αντίστροφα, τις εννοιολογικές συνδέσεις.

Στην αρχή του βιβλίου της Άλγεβρας παρουσιάζεται ένα εισαγωγικό κεφάλαιο που αφορά το «λεξιλόγιο της λογικής» και τα «σύνολα». Στο πρώτο παρουσιάζονται οι έννοιες συνεπαγωγή, ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή, οι σύνδεσμοί «ή», «και», από τις οδηγίες όμως που δίνει το υπουργείο το κεφάλαιο αυτό δεν διδάσκεται ως αυτόνομο. Στο δεύτερο παρουσιάζεται η έννοια του συνόλου για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο και είναι πολύ σημαντικό για την εξέλιξη του μαθήματος.

Η παράγραφος 3 «απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού» του 2^{ου} κεφαλαίου «οι πραγματικοί αριθμοί» είναι μια πολύ καλή ευκαιρία να επισημάνουμε αυτά που είπαμε παραπάνω, οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της απόλυτης τιμής ενός αριθμού από το Γυμνάσιο, εδώ όμως δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και γίνεται η απόδειξη των βασικών ιδιοτήτων. Οι μαθητές πρέπει να δουλέψουν με τα σύμβολα της ισότητας $(=)$ και της διάταξης $(<, \leq, >, \geq)$. Γίνεται αναφορά και χρήση του «πρέπει» $(\Rightarrow)$ και του «αρκεί» $(\Leftarrow)$, της ισοδυναμίας $(\Leftrightarrow)$, της ένωσης $(\cup)$ και τομής συνόλων $(\cap)$, ακόμα γίνεται αναφορά και στη γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής, δηλαδή μια σύνδεση της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής ερμηνείας, αποδίδοντας νόημα στην έννοια, μια διαδικασία, που όπως μας έχει δείξει η εμπειρία, δυσκολεύει πολύ τους μαθητές. Τέλος το πέρασμα από τη μαθηματική γλώσσα στην ερμηνεία μέσω της φυσικής γλώσσας και το αντίστροφο έχει ιδιαίτερη σημασία στη συγκεκριμένη παράγραφο και απαιτεί από τους μαθητές ιδιαίτερη ευχέρεια.

Το τρίτο κεφάλαιο αφορά τις εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού και ως ιδιαίτερη περίπτωση τις διώνυμες εξισώσεις της μορφής $x^{\nu} = \alpha$, τις οποίες τις μελετούν συστηματικά και τις διερευνούν. Γίνεται ιδιαίτερη μνεία των παραμετρικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού, οι οποίες αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος των ασκήσεων του συγκεκριμένου κεφαλαίου. Η εισαγωγή στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις γίνεται και μέσω μιας εφαρμογής η οποία αφορά ένα πρόβλημα φυσικής, στο οποίο δίνεται ο τύπος, της ελεύθερης πτώσης, $s = \frac{1}{2}gt^2$

4.7 Σχολικό Βιβλίο Γεωμετρίας Α’ Λυκείου

4.7.1 Γενικές Οδηγίες – Σημαντικές Παρατηρήσεις

Πριν αναλύσουμε το βιβλίο της Γεωμετρίας της Α’ και Β’ τάξης του Λυκείου είναι σκόπιμο να δούμε μερικές σημαντικές γενικές οδηγίες που δίνει στους διδάσκοντες το υπουργείο. Πολύ σημαντική είναι η διατύπωση των συλλογισμών να γίνεται με ακρίβεια, όροι και φράσεις που συναντάμε στο βιβλίο και δεν ερχόμαστε σε επαφή με αυτούς στην καθημερινότητας μας πρέπει να εξηγούνται σωστά στους μαθητές ώστε να αποφεύγονται παρερμηνείες, για την καλύτερη κατανόηση συχνά πρέπει να ζητείται από τους μαθητές μια αναδιατύπωση ή/και απόδοση τους σε απλή – κοινή φυσική γλώσσα, οι μαθητές πρέπει να έχουν σαφή γνώση των ορισμών. Οι επίσημες οδηγίες αφήνουν ελεύθερο το διδάσκοντα να τροποποιήσει το μάθημα όπως αυτός κρίνει, η διδασκαλία μπορεί να είναι άλλοτε ερευνητική, ανακαλυπτική με βάση συγκεκριμένες ερωτήσεις, αυστηρά προγραμματισμένη με φύλλο εργασίας ή με αλληλουχία ασκήσεων και άλλοτε να πάρει τη μορφή διάλεξης ή με ομάδες εργασίας που προωθούν και την επικοινωνία μεταξύ των μαθητών.

4.7.2 Κεφάλαιο 1^{ο} – Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο αναφέρεται η διαφορά ανάμεσα στη Γεωμετρία που οι μαθητές διδάχθηκαν στο Γυμνάσιο και σε αυτή που θα διδαχθούν τώρα στο Λύκειο, ανάμεσα δηλαδή στην εμπειρική – πρακτική Γεωμετρία και στην θεωρητική

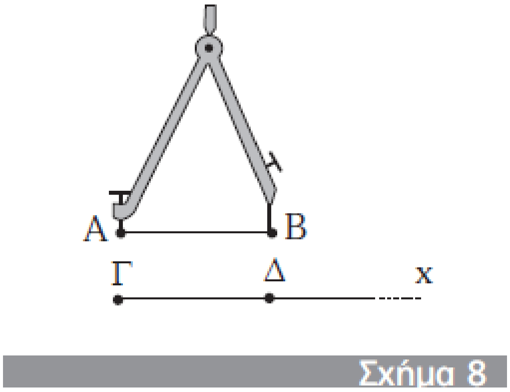
Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στηρίζεται στη συστηματική χρήση της Λογικής και όχι στις μετρήσεις με τον χάρακα ή το μοιρογνωμόνιο όπως οι μαθητές έκαναν στο Γυμνάσιο. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία απαντά στα ερωτήματα που τίθενται μέσω των αξιωμάτων και των αποδείξεων που στηρίζονται στους κανόνες Λογικής, στοιχεία δηλαδή που διαφοροποιούν την θεωρητική από την πρακτική Γεωμετρία. Η Γεωμετρία ακολουθεί την πορεία από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.

Στις επίσημες οδηγίες του Υπουργείου προς του διδάσκοντες θεωρείται χρήσιμο να τονισθεί ο ρόλος των σχημάτων, στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών εξέχοντα ρόλο έπαιξε η απεικόνιση των γεωμετρικών αντικειμένων που λειτουργούσαν στην αρχή ως μοντέλα των πραγματικών.

4.7.3 Κεφάλαιο 2^{o} – Τα βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

Στο κεφάλαιο αυτό αρχίζει ουσιαστικά η διδασκαλία του μαθήματος. Στόχος του κεφαλαίου είναι η κατανόηση των βασικών εννοιών όπως η ευθεία, το ευθύγραμμο τμήμα, το ημιεπίπεδο, τη γωνία, την ύπαρξη καθέτου από σημείο σε ευθεία κτλ., η αφομοίωση του ρόλου των αξιωμάτων και η τριβή και εξοικείωση με τη διαδικασία της απόδειξης. Σημαντικό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν την κίνηση και ότι κατά τη διαδικασία μετακίνησης ενός σχήματος στον χώρο, εδώ στο επίπεδο, αυτό μένει αναλλοίωτο.

Ας δούμε μερικά βασικά κομμάτια που αφορούν την έρευνα μας: «§2.6 Για κάθε επίπεδο σχήμα δεχόμαστε ότι μπορεί να μετατοπισθεί μέσα στο επίπεδο πηγαίνοντας από την αρχική του θέση σε μια οποιαδήποτε άλλη θέση και να παραμείνει αναλλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος», «§2.7 Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν. … Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB. Τότε για κάθε ημιευθεία Γx υπάρχει μοναδικό σημείο της Δ, ώστε $AB = \Gamma\Delta$ $(\sigma\chi. 8)$»



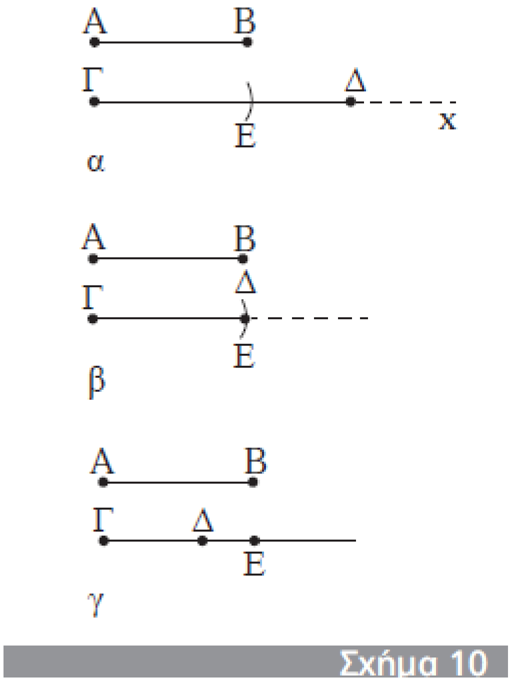
Εικόνα 36 – Α' Λυκείου Γεωμετρία, σελ. 18

Εδώ γίνεται για πρώτη φορά στο βιβλίο η χρήση του συμβόλου του ίσον. Συνεχίζοντας στην ενότητα που αφορά τα άνισα ευθύγραμμα τμήματα διαβάζουμε: «Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το $\Gamma\Delta$ οπότε προκύπτει η ημιευθεία Γx. Μετατοπίζουμε το AB ώστε το A να ταυτιστεί με το Γ. Τότε θα υπάρχει μοναδικό σημείο E της Γx, ώστε $AB = \Gamma E$.

• Αν το E είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος $\Gamma\Delta$, θα λέμε ότι το τμήμα AB είναι μικρότερο από το $\Gamma\Delta$. Συμβολίζουμε $AB < \Gamma\Delta$ (σχ.10α).

• Αν το E ταυτίζεται με το Δ, τότε $AB = \Gamma\Delta$, όπως προηγούμενα (σχ.10β).

• Αν το E δεν είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος $\Gamma\Delta$, θα λέμε ότι το τμήμα AB είναι μεγαλύτερο από το $\Gamma\Delta$. Συμβολίζουμε $AB > \Gamma\Delta$ (σχ.10γ).»



Εικόνα 37 – Α' Λυκείου Γεωμετρία, σελ. 19

Στο σημείο αυτό γίνεται πρώτη φορά αναφορά για ταύτιση σημείων, μέσω της οποίας αποδεικνύεται η ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων. Η έννοια της ταύτισης δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές αφού πολλές φορές χρησιμοποιούν την έκφραση «το ένα σημείο είναι ίσο με ένα άλλο».

Στην §2.8 γίνεται η εισαγωγή στο άθροισμα και στη διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων, «Με τη βοήθεια του διαβήτη ορίζουμε πάνω σε μία ευθεία ε τα διαδοχικά τμήματα $EZ = AB$ και $ZH = \Gamma\Delta$. Έτσι κατασκευάζουμε το τμήμα EH, που λέγεται άθροισμα των AB και $\Gamma\Delta$ και γράφουμε $EH = AB + \Gamma\Delta$. Η διαδικασία αυτή λέγεται πρόσθεση δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Στην πρόσθεση ευθύγραμμων τμημάτων ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ισχύουν στην πρόσθεση αριθμών (βλ. Δραστηριότητα). Αν $AB < \Gamma\Delta$ τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο E του $\Gamma\Delta$, ώστε $\Gamma E = AB$. Το τμήμα $E\Delta$ λέγεται διαφορά του AB από το $\Gamma\Delta$ και συμβολίζεται $E\Delta = \Gamma\Delta - AB$». Παρατηρούμε τα εξής, ότι εδώ γίνεται για πρώτη φορά χρήση του ίσον που να προσδιορίζει μια διαδικασία, δηλαδή στο δεξί μέλος έχουμε το άθροισμα ή τη διαφορά δύο ευθυγράμμων τμημάτων, επίσης στο τέλος της σελίδας μέσα σε πλαίσιο υπάρχει η εξής δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες που ισχύουν στην πρόσθεση των ευθύγραμμων τμημάτων:

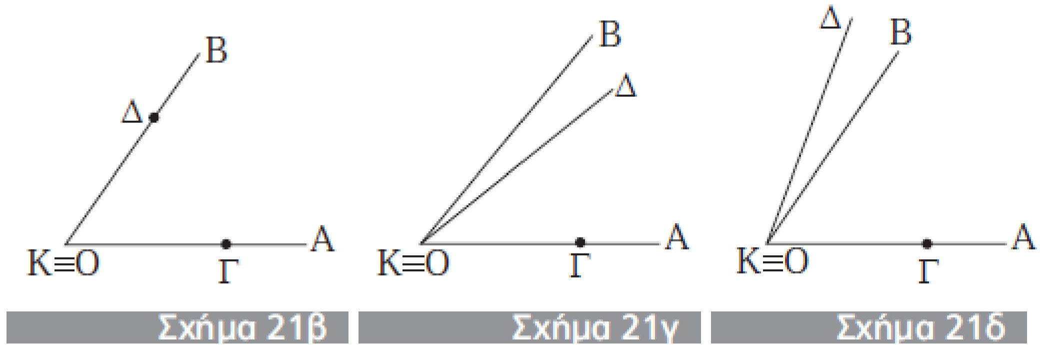
i) ΑΒ + ΓΔ = ΓΔ + ΑΒ ***(αντιμεταθετική)***

ii) (ΑΒ + ΓΔ) + ΕΖ = ΑΒ + (ΓΔ + ΕΖ) ***(προσεταιριστική).***

Εικόνα 38 – Α' Λυκείου Γεωμετρία, σελ. 19

στην οποία πάλι το ίσον χρησιμοποιείται ως διαδικασία και αυτή την φορά με πρόσθεση και στα δύο μέλη, γίνεται και μια προσπάθεια σύνδεσης των πράξεων στη γεωμετρία με τις αντίστοιχες στην άλγεβρα, ορίζει και στη γεωμετρία την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα. Στη διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων υπάρχει όμως μια σημαντική διαφορά από την αντίστοιχη πράξη στην άλγεβρα, για να αφαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα από ένα άλλο, το δεύτερο πρέπει να είναι μεγαλύτερο, μια παρατήρηση που το σχολικό βιβλίο έχει σε πλαίσιο (κάτι σαν σημαντική υποσημείωση) είναι η εξής, αν $AB = ΓΔ$, τότε η διαφορά $ΓΔ - AB$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, τα άκρα του οποίου συμπίπτουν, το οποίο λέγεται μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα.

Στη συνέχεια γίνεται η εισαγωγή στη γωνία, στην §2.12 συναντάμε τον ορισμό της μηδενικής γωνίας ως την κυρτή γωνία της οποίας οι ημιευθείες που ορίζουν της πλευρές της ταυτίζονται, ενώ η πλήρης γωνία είναι η μη κυρτή γωνία της οποίας οι πλευρές ταυτίζονται. Ο όρος ταύτιση εδώ αφορά ημιευθείες. Στην §2.13 γίνεται λόγος για τη σύγκριση γωνιών, συγκεκριμένα για την ισότητα γωνιών διαβάζουμε «ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $A\hat{O}B'$ που έχουν κοινή κορυφή O, την OA κοινή πλευρά και τις OB, OB' προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς το φορέα της OA. Τότε αν οι πλευρές OB και OB' συμπίπτουν, λέμε ότι οι γωνίες είναι ίσες και γράφουμε $A\hat{O}B = A\hat{O}B'$», και για την ισότητα (και σύγκριση) γωνιών που βρίσκονται σε διαφορετική θέση στο επίπεδο το βιβλίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο της επίθεση «για να συγκρίνουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $Γ\hat{K}Δ$ που βρίσκονται σε τυχαία θέση μετατοπίζουμε την $Γ\hat{K}Δ$ έτσι ώστε, η κορυφή της K να ταυτισθεί με το O και η μία της πλευρά $ΓK$ να συμπέσει με την πλευρά OA της γωνίας $A\hat{O}B$. Τότε αν η πλευρά $KΔ$ συμπίπτει με την OB, τότε οι γωνίες είναι ίσες, $A\hat{O}B = Γ\hat{K}Δ$». Όπως είδαμε και στη σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων, έτσι και στη σύγκριση γωνιών γίνεται ο διαχωρισμός δύο περιπτώσεων, στην πρώτη χρειάζεται να εφαρμοστεί η μέθοδος της επίθεσης ενώ στη δεύτερη η σύγκριση μπορεί να γίνει χωρίς αυτήν.



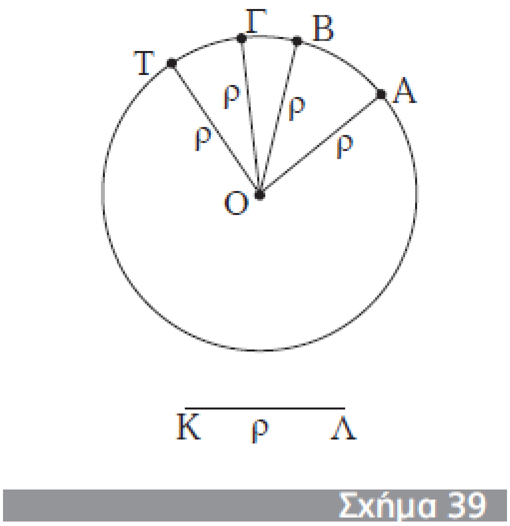
Εικόνα 39 – Α' Λυκείου Γεωμετρία, σελ. 23

Στο προηγούμενο σχήμα που αφορά τη σύγκριση γωνιών βλέπουμε το σύμβολο της ταύτισης, «≡», το οποίο διαχωρίζεται από το σύμβολο του ίσον και εμφανίζεται εδώ, που γίνεται η επίθεση της μιας γωνίας στην άλλη ώστε οι κορυφές να συμπέσουν.

Η ορθή γωνία ορίζεται ως εξής: «έστω $x\hat{O}y$ μια ευθεία γωνία και $Oδ$ η διχοτόμος της. Καθεμία από ίσες γωνίες $x\hat{O}δ$ και $δ\hat{O}y$ που προκύπτουν λέγεται ορθή γωνία και θα τη συμβολίζουμε με ∟.», η οξεία και η αμβλεία γωνία ορίζονται ως τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη της ορθής αντίστοιχα, η ορθή γωνία λοιπόν ορίζεται μέσω της ισότητας δύο γωνιών ενώ οι οξείες και αμβλείες συγκριτικά με την ορθή, το σχολικό βιβλίο αφήνει να εννοηθεί ότι οι ορθές μεταξύ τους είναι ίσες ενώ οι οξείες γωνίες είναι άπειρες, όπως και οι αμβλείες, κάτι που αναφέρεται και στο τέταρτο αίτημα από τα στοιχεία του Ευκλείδη, ότι «όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους». Όπως και στην πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων, έτσι και στις γωνίες το σύμβολο του ίσον χρησιμοποιείται σε μαθηματικές εκφράσεις όπως $A\hat{O}Δ = A\hat{O}B + B\hat{O}Γ + Γ\hat{O}Δ$, δηλαδή με πράξεις μόνο στο ένα μέλος, η διαφορά γωνιών γίνεται όταν από μια μεγαλύτερη γωνία αφαιρέσουμε μία μικρότερη.

Στην §2.16 ορίζονται οι παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες και δίνεται στον αναγνώστη το πρώτο θεώρημα του βιβλίου που αναφέρει ότι δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες, έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα. Στη συνέχεια ορίζονται οι κατακορυφήν γωνίες και το δίνεται το θεώρημα: οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, αυτό είναι το πρώτο θεώρημα που μέσω μιας λογικής διαδικασίας προκύπτει ένα αποτέλεσμα που αφορά την έννοια της ισότητας.

Η παράγραφος §2.17 ξεκινάει με την φράση «θεωρούμε ένα σταθερό σημείο O και ένα τμήμα $ΚΛ = \rho$» και δίνει το ακόλουθο σχήμα



Εικόνα 40 – Α' Λυκείου Γεωμετρία, σελ. 28

και δίνει τον ορισμό του κύκλου ως το σύνολο των σημείων που απέχουν από O απόσταση ίση με ρ. Εδώ η χρήση του ίσον γίνεται για να ονομάσει ένα μέγεθος, βλέπουμε στο σχήμα ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΟΤ, ΟΓ, ΟΒ, ΟΑ$ όλα είναι ίσα σε μήκος με το ευθύγραμμο τμήμα $ΚΛ$, χάριν συντομίας μπορούμε να λέμε ότι όλα τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα με ρ, κάθε σημείο του κύκλου απέχει απόσταση ρ από το κέντρο, δηλαδή όλες οι ακτίνες του κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους. Επίσης εδώ συναντάμε έναν ορισμό, αυτόν του κύκλου, που περιέχει την έννοια της ισότητας και τη λέξη ίσον.

Πιο κάτω διαβάζουμε: «για τα σημεία M ενός κύκλου (O, ρ) και μόνο γι' αυτά ισχύει $OM = \rho$. Η ισότητα αυτή είναι, επομένως, «χαρακτηριστική» για τα σημεία του». Εδώ με την έννοια χαρακτηριστική, εννοεί ότι αυτή η ιδιότητα είναι κοινή για όλα τα σημεία του κύκλου. Μέσω της προηγούμενης έκφρασης μπορούμε πλέον να ορίσουμε και τι σημαίνει γεωμετρικός τόπος, είναι το σύνολο των σημείων με μια χαρακτηριστική ιδιότητα.

Η ισότητα δύο κύκλων, προϋποθέτει και εδώ την επίθεση του ενός στον άλλον, χωρίς να αναφέρεται ξεκάθαρα στο βιβλίο, εννοείται ότι ο ένας πρέπει να ταυτιστεί με τον άλλο, για να γίνει αυτό πρέπει να μετακινηθεί ο ένας ώστε το κέντρο του να ταυτιστεί με το κέντρο του άλλου και στη συνέχεια να διαπιστωθεί ότι τα σημεία του ενός ταυτίζονται με του άλλου. Δύο κύκλοι λέγονται ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες. Στο σχολικό βιβλίο είναι η πρώτη φορά που χρησιμοποιείται η έκφραση «αν και μόνο αν» που υποδηλώνει τη διπλή συνεπαγωγή.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου γίνεται χρήση του συμβόλου του ίσον για την ισότητα τόξων κύκλου, δηλαδή γράφει $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, επίσης ορίζει το τόξο μίας μοίρας ως το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου και συμβολίζεται με 1^{o} και είναι αυτό με το οποίο συγκρίνουμε ένα τόξο με ένα άλλο. Τέλος το κεφάλαιο κλείνει με την παράγραφο §2.20 η οποία αναφέρεται στις τεθλασμένες γραμμές, τα πολύγωνα και τα στοιχεία αυτών. Εκεί γίνεται για πρώτη φορά αναφορά στο πλέον θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, το τρίγωνο.

4.7.4 Κεφάλαιο 3º – Τρίγωνα

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στο πιο απλό από όλα τα πολύγωνα αλλά και στο πιο βασικό από όλα τα γεωμετρικά σχήματα, το τρίγωνο. Στο κεφάλαιο αυτό συναντάμε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων που αποτελούν ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα και κρίσιμα σημεία της ύλης της Γεωμετρίας, όπως επίσης και εφαρμογές που αναφέρονται σε τρίγωνα. Οι μαθητές θα μελετήσουν τα κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία των τριγώνων, θα γνωρίσουν τα είδη τριγώνων και τις ιδιότητες τους και θα μπορούν να ερμηνεύουν τις δυνατές θέσεις ευθείας και κύκλου. Αφού οι μαθητές έχουν μελετήσει τα βασικά γεωμετρικά σχήματα από το δεύτερο κεφάλαιο, τώρα είναι σε θέση να ασχοληθούν με μεγαλύτερη ευχέρεια σε γεωμετρικές κατασκευές και να επιλύσουν ασκήσεις και εφαρμογές.

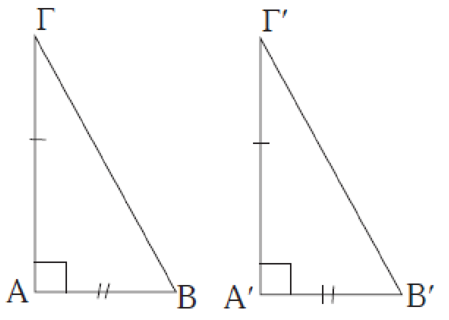
Η παράγραφος §3.1 έχει να κάνει με τα πρωτεύοντα και δευτερεύοντα στοιχεία και με τα είδη των τριγώνων, επίσης τονίζεται τη σημαίνει κριτήριο και πως αυτό αποκτά αποδεικτική ισχύ, «δύο τρίγωνα, είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται.

Συνεπώς:

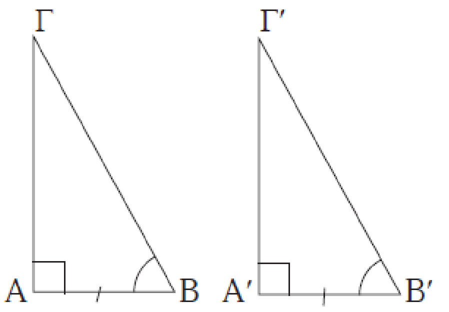
•Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.
•Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα. Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται αντίστοιχες ή ομόλογες. Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε προτάσεις, που θα μας εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους. Οι προτάσεις αυτές αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων». Οι παράγραφοι §3.2, §3.3 και §3.4 αναφέρονται στα κριτήρια ισότητας τριγώνων, στο πρώτο κριτήριο (ΠΓΠ) η απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο της μετατόπισης, στο δεύτερο κριτήριο (ΓΠΓ) η απόδειξη βασίζεται στο πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων, όμως υπάρχει η ακόλουθη σημείωση: «Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και με τη μέθοδο της μετατόπισης, όπως το θεώρημα Ι». Μια σημαντική οδηγία που δίνει το υπουργείο προς τους εκπαιδευτικούς είναι, με χρήση αντιπαραδείγματος να γίνει σαφές ότι για την ισότητα δύο τριγώνων η απόδειξη γίνεται με αυστηρή χρήση των κριτηρίων ισότητας τριγώνων, δηλαδή αν δύο τρίγωνα έχουν δύο ίσες πλευρές ίσες αντίστοιχα και μία γωνία ίση, όχι όμως την περιεχόμενη των πλευρών, δεν είναι ίσα.

Πολύ σημαντικό είναι και το ακόλουθο σχόλιο: «Η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών», αυτό θα επιτευχθεί με κατάλληλες ασκήσεις στις οποίες οι μαθητές για την ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών θα αναζητήσουν ίσα τρίγωνα, το πιο πάνω σχόλιο συνοψίζει και τη σημαντικότητα του κεφαλαίου αλλά και το λόγο που θα το μελετήσουμε στην παρούσα εργασία και μέσω των συνεντεύξεων που θα ακολουθήσουν με εκπαιδευτικούς.

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται εκτεταμένη χρήση του συμβόλου του ίσον αλλά και γενικά η έννοια της ισότητας, η χρήση του συμβόλου «=» αναφέρεται ανάμεσα σε ευθύγραμμα τμήματα, σε γωνίες και σε τόξα κύκλων όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο του βιβλίου. Εκτενείς χρήση γίνεται επίσης σε «σύμβολα» τα οποία εκφράζουν ισότητα πλευρών ή γωνιών σε σχήματα όπως στα δύο σχήματα που ακολουθούν



Σχήμα 24



Σχήμα 25

Εικόνα 41 – Α’ Λυκείου Γεωμετρία, σελ. 49

Αυτή τη διαδικασία την χρησιμοποιεί το βιβλίο όπως βέβαια και οι εκπαιδευτικοί κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης για λόγους οικονομίας χώρου και χρόνου αλλά και για να βλέπει ο μαθητής τα ίσα στοιχεία των τριγώνων ή των σχημάτων γενικότερα άμεσα στο σχήμα.

Στατιστικά βιβλίο Α’ Λυκείου, Ευκλείδεια Γεωμετρία, Τεύχος Α’, Κεφάλαιο 3ο – Τρίγωνα

Πίνακας 15 – Α’Λ Συχνότητες εμφάνισης Γεωμ. Αντικείμενο / Έννοια

x_i	v_i	f_i	f_i%
Γεωμετρικό αντικείμενο	403+12=415	1	100%
Αριθμητικό αντικείμενο	0	0	0%
Μονάδες μέτρησης	0	0	0%
Αλγεβρικό αντικείμενο	0	0	0%
	415		

Πίνακας 16 – Α'Λ Συχνότητες εμφάνισης Θεωρία / Εφαρμογή / Άσκηση

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
Θεωρία	140	0.34	34%
Εφαρμογή	92	0.22	22%
Παράδειγμα	2	0.00	0%
Πρόβλημα	32	0.08	8%
Άσκηση	109	0.26	26%
Για διασκέδαση	0	0	0%
Ιστορικό απόσπασμα	0	0	0%
Δραστηριότητα	2	0.00	0%
Παρατήρηση	10	0.02	2%
Σχόλιο	3	0.00	0%
Ανακεφαλαίωση	25	0.06	6%
	415		

Πίνακας 17 – Α'Λ Συχνότητες εμφάνισης Γεωμετρία / Άλγεβρα / Φυσικός Κόσμος

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
Γεωμετρία	415	1	100%
Άλγεβρα	0	0	0%
Φυσικός κόσμος	0	0	0%
	415		

Πίνακας 18 – Α'Λ Συχνότητες εμφάνισης Χρήσης του Ίσον, Σχεσιακή / Λειτουργική

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
Σχεσιακή	397	0.96	96%
Λειτουργική	18	0.04	4%
	415		

Πίνακας 19 – Β'Γ Συχνότητα εμφάνισης ΓΓ / ΓΑ / ΑΑ

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
ΓΓ	425	0.95	95%
ΓΑ (ΑΓ)	24	0.05	5%
ΑΑ	0	0	0%
	413+36=449		

5. Συνέντευξη – Ανάλυση

5.1 Ερευνητικό Ερώτημα 1^{ο}:

Διαφέρει η χρήση του συμβόλου του ίσον στη Γεωμετρία σε σχέση με την Άλγεβρα;

5.1.1 Ερωτήματα της Συνέντευξης που Αφορούν Αυτό το Ερευνητικό Ερώτημα:

5.1.1.1 Ερώτηση 2)

Περιγράψτε τον τρόπο που χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον και η έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία στα παραπάνω αποσπάσματα.

Εντοπίζετε ομοιότητες ή διαφορές στην χρήση του συμβόλου και στην έννοια της ισότητας στα πέντε αποσπάσματα;

Οι απαντήσεις των πέντε εκπαιδευτικών που ρωτήθηκαν δείχνουν ότι μπορούν να αντιληφθούν τις διάφορες χρήσεις του συμβόλου του ίσον, κάποιοι μπορούν με μεγάλη ακρίβεια και λεπτομέρεια να εντοπίσουν αυτές τις διαφορές ενώ άλλοι δεν μπορούν να εμβαθύνουν τόσο, οι διαφορές που μπορούν να εντοπίσουν μέσα από τα αποσπάσματα που τους δόθηκαν αφορούν κυρίως διαφορές ανάμεσα στη Γεωμετρία και την Άλγεβρα και όχι στη διαφορετική χρήση του συμβόλου ανάμεσα σε δύο χρήσεις που αφορούν τη Γεωμετρία. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι 4 κάνουν λόγω για τη διαδικασία της μετατόπισης και της ταύτισης, πράγμα που δείχνει έναν σαφή διαχωρισμό της χρήσης του ίσον ανάμεσα στη Γεωμετρία και την Άλγεβρα. Πιο συγκεκριμένα μόνο ο Γρηγόρης εντόπισε με σαφή τρόπο διαφορές στην χρήση του ίσον ανάμεσα σε περιπτώσεις που αφορούσαν τη Γεωμετρία, Γρηγόρης:

> «ΑΒ=ΑΓ ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων, αυτή προϋποθέτει μετατόπιση του ενός τμήματος πάνω στο άλλο (Γρηγόρης, ερώτηση 2, γραμμή 44) … ισότητα τριγώνων δε σημαίνει ίσα μέτρα (Γρηγόρης, ερώτηση 2, γραμμή 48) … η ΚΛ ισούται με το δ ας πούμε, εντάξει αυτή η ισότητα είναι ισότητα μόνο για εξυπηρέτηση, για να μη γράφεις ΚΛ και μπερδευτεί ο άλλος και θυμάσαι ότι το δ είναι η διάκεντρος (Γρηγόρης, ερώτηση 2, γραμμή 61) … σε αυτή την περίπτωση επειδή σου έχει ότι είναι ίση με 8 σημαίνει ότι σε ενδιαφέρει το μέτρο της, δε σου λέει ντε και καλά μετακίνησε τα (Γρηγόρης, ερώτηση 2, γραμμή 93) … ούτως ή άλλως για το εμβαδόν μιλάς για μέτρο (Γρηγόρης, ερώτηση 2, γραμμή 107)»,

από όλα αυτά τα αποσπάσματα βλέπουμε ότι ο Γρηγόρης είναι σε θέση να διακρίνει τις διαφορές, επίσης βλέπουμε και μία ορολογία που χρησιμοποιεί που μας είναι οικεία αφού παρόμοια χρήση λέξεων γίνεται στις 11 κατηγορίες που είδαμε στο άρθρο των Molina, Castro και Castro (2009) το οποίο αφορά την χρήση του ίσον στην Άλγεβρα. Ανδρέας:

> «τώρα μια άλλη χρήση που βλέπουμε εδώ είναι ότι από τη μία μεριά έχει τμήμα και από την άλλη πλευρά έχει cm. Το καθορίζει ότι είναι μονάδα μέτρησης (Ανδρέας, ερώτηση 2, γραμμή 137)»,

άλλη μία έκφραση που εντοπίζει διαφορά ανάμεσα στην ισότητα δύο ευθυγράμμων τμημάτων όπως εμφανίζεται στο Γυμνάσιο με μονάδες μέτρησης και στο Λύκειο χωρίς μονάδες μέτρησης. Μια διαφορά που εντόπισαν όλοι οι εκπαιδευτικοί που ρωτήθηκαν ήταν ανάμεσα στην χρήση του ίσον στις εξισώσεις και στις υπόλοιπες χρήσεις που δεν αφορούσαν εύρεση ενός αγνώστου, αυτό το ανέφεραν όλοι με βάση το $5^{ο}$ απόσπασμα από τη Β’ Γυμνασίου που ήταν το πιο χαρακτηριστικό με διαφορετική χρήση του συμβόλου ανάμεσα στη Γεωμετρία και την Άλγεβρα, Δήμητρα:

> «δηλαδή το $5^{ο}$ παράδειγμα (εννοεί απόσπασμα) ας πούμε χρησιμοποιείται το ίσον πολύ διαφορετικά από ότι χρησιμοποιείται στα 4 πρώτα (Δήμητρα, ερώτηση 2, γραμμή 69)».

Αν η συνέντευξη δεν περιλάμβανε το $5^{ο}$ απόσπασμα από τη Β’ Γυμνασίου ίσως οι εκπαιδευτικοί να μην εντόπιζαν κάποια διαφορά στην χρήση του συμβόλου του ίσον, το πέμπτο απόσπασμα είναι αυτό που τους προτρέπει να αναγνωρίσουν τη διαφορετική χρήση, ωστόσο δεν είναι από μόνο του ικανό να υποδείξει και διαφορετική χρήση σε ότι αφορά μόνο τη Γεωμετρία.

5.1.1.2 Ερώτηση 4)

Πιστεύετε ότι οι ανωτέρω δυσκολίες σχετίζονται με τον τρόπο που χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον και παρουσιάζεται η έννοια της ισότητας στην Άλγεβρα;

Όπως είδαμε από τις συνεντεύξεις οι εκπαιδευτικοί συνηγορούν ότι η έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία αλλά και το ίδιο το σύμβολο του ίσον δημιουργούν παρερμηνείες στους μαθητές. Έτσι σε αυτή την ερώτηση έχουμε ομοφωνία, η απάντηση όλων είναι ναι, δηλαδή ότι ο τρόπος που χρησιμοποιείται το ίσον στην Άλγεβρα δημιουργεί προβλήματα και παρερμηνείες και στη Γεωμετρία. Οι εκπαιδευτικοί συνηγορούν ότι η χρήση του συμβόλου στη Γεωμετρία είναι διαφορετική από την Άλγεβρα, να σημειώσουμε εδώ ότι κατά τη διάρκεια της συνέντευξης και λόγω του ότι οι εκπαιδευτικοί εξοικειώνονταν και σκέφτονταν πιο σφαιρικά η γνώμη όλων συνέκλινε σε αυτή την άποψη, χαρακτηριστικά ο Βασίλης αναφέρει:

> «Βάζουμε ένα ίσον παντού και δεν ξέρουμε τι σημαίνει αυτό το ίσον (Βασίλης, ερώτηση 4, γραμμή 66)».

Σημαντικό ρόλο στην πεποίθηση των εκπαιδευτικών παίζει και ότι οι μαθητές έρχονται σε επαφή πρώτα με την Άλγεβρα και μετά με τη Γεωμετρία, έτσι ο τρόπος χρήσης του συμβόλου στην Άλγεβρα μεταφέρεται και στη Γεωμετρία, Γρηγόρης:

> «Ναι ξεκάθαρα. Εδώ μπορώ να σου πω ας πούμε τρία πραγματάκια. Καταρχήν τα παιδιά όταν βλέπουν στην άλγεβρα Χ=Ψ ας πούμε , καταλαβαίνουμε για τις αριθμητικές τιμές του Χ και Ψ δηλαδή όταν βλέπουμε μεταβλητές πιστεύουμε ότι μέσα κρύβονται μόνο νούμερα. Δεν είναι σωστό δεν είναι σωστή αντίληψη . Για παράδειγμα όταν λες η συνάρτηση είναι μια διαδικασία που αντιστοιχίζει κάποια στοιχεία ενός συνόλου που ανήκουμε ένα σύνολο του Χ κάθε στοιχεία

του Χ σε ένα μόνο στοιχείο του Ψ. Μετά τα στοιχεία του Ψ μπορεί να είναι παπούτσια που αντιστοιχίζονται σε πόδια. Δεν είναι ανάγκη να είναι αριθμοί . Δηλαδή υπάρχει ένα επιστημονικό εμπόδιο εδώ στους μαθητές το οποίο είναι ποιο; Νομίζουμε ότι τα πάντα είναι αριθμοί. Κι επειδή έχουμε συνηθίσει την άλγεβρα πολύ πιο νωρίς και τη γεωμετρία τη διδάσκουμε πολύ αργά έχουμε μάθει στην άλγεβρα έχουμε μάθει με αριθμούς που το Χ = 5 , είναι αριθμός απλά το βάζουμε με ένα γράμμα , πιστεύουμε ότι όλα τα σύμβολα είναι αριθμοί. Και πιστεύω αυτό το εμπόδιο έρχεται από δω(Γρηγόρης, ερώτηση 4, γραμμή 145)».

Ανδρέας:

«Τα παιδιά στην Άλγεβρα δεν έχουν πρόβλημα με το ίσον. Τα προβλήματα που εντοπίζω εγώ είναι στη Γεωμετρία κι εκεί γίνεται ο μέγας χαμός (Ανδρέας, ερώτηση 9, γραμμή 273)».

5.1.1.3 Ερώτηση 5)

Βάσει των ανωτέρω αποσπασμάτων και την εμπειρία σας, πιστεύετε ότι ο τρόπος που χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον και παρουσιάζεται η έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία, μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες κατανόησης στους μαθητές και στις μαθήτριες στην Άλγεβρα;

Αυτό το ερώτημα βάζει τους εκπαιδευτικούς να ακολουθήσουν μια αντίστροφη διαδικασία, πρέπει να σκεφτούν βάσει της εμπειρίας τους αν η Γεωμετρία γεννάει εμπόδια και δυσκολίες στην Άλγεβρα, έτσι λογικό ήταν οι εκπαιδευτικοί να εκπλαγούν ευχάριστα. Κλήθηκαν να απαντήσουν σε κάτι που δεν είχαν σκεφτεί στο παρελθόν και ίσως να μην είχαν συνδέσει και την χρήση τους συμβόλου στην Άλγεβρα μέσω της Γεωμετρίας. Από τους πέντε εκπαιδευτικούς ο ένας κράτησε μια ουδέτερη στάση χωρίς να δώσει μια σαφή απάντηση, οι δύο ήταν σαφείς ότι στη Γεωμετρία η χρήση του ίσον δε δημιουργεί πρόβλημα στην Άλγεβρα, Ανδρέας:

«νομίζω ότι είναι ένα λιθαράκι στην ανηφόρα τους αλλά δεν είναι η βασική προβληματική κατάσταση (Ανδρέας, ερώτηση 5, γραμμή 189)»,

Βασίλης:

«είναι αλληλένδετα, ίσως η Γεωμετρία να το επεκτείνει το πρόβλημα. Να το φουσκώνει αλλά νομίζω ότι ξεκινάει από την Άλγεβρα (Βασίλης, ερώτηση 5, γραμμή 73)»

και οι άλλοι δύο απάντησαν ότι από τη στιγμή που στη Γεωμετρία εισάγεται στους μαθητές η έννοια της ισότητας η παρανοήσεις στην χρήση του ίσον στην Άλγεβρα παραμένουν ως έχουν και δεν εντείνονται, Ελένη:

«Δηλαδή τώρα τους έχεις πει την άλγεβρα. Μετά τους λες και τη γεωμετρία αφού χρονικά η άλγεβρα προηγείται. Μετά κάνεις και τη γεωμετρία. Χρησιμοποιείς και το σύμβολο του ίσον στη γεωμετρία . Μπορεί κάποιος μαθητής τώρα να του δημιουργήσει επειδή χρησιμοποίησε το ίσον στη γεωμετρία να του δημιουργήσει πρόβλημα και στην άλγεβρα; Ε όχι, πιστεύω ότι από την άλγεβρα μπορεί να πάει πολύ εύκολα στη γεωμετρία. Γιατί η γεωμετρία δυσκολεύει τα παιδιά (Ελένη, ερώτηση 5, γραμμή 110)».

Γρηγόρης:

«πιστεύω ότι , δηλαδή κατά 99% η άλγεβρα δημιουργεί πρόβλημα στη γεωμετρία και όχι το ανάποδο (Γρηγόρης, ερώτηση 5, γραμμή 178)».

5.1.1.4 Ερώτηση 10)

Πιστεύετε ότι η έννοια της ισότητας και η χρήση του συμβόλου του ίσον στη Γεωμετρία είναι ίδια ή διαφέρει με της Άλγεβρας;

Όλοι οι εκπαιδευτικοί απάντησαν ότι η χρήση του ίσον στην Άλγεβρα δεν είναι ίδια με την χρήση του ίσον στη Γεωμετρία, αυτό το συμπέρασμα για την άποψη των εκπαιδευτικών το είχαμε δει και από τις προηγούμενες ερωτήσεις. Στην ερώτηση 10 όμως αυτή η άποψη είναι ξεκάθαρη από όλους, όχι. Χαρακτηριστικά η Δήμητρα λέει:

> «Όχι, εδώ δεν είναι το ίδιο. Για το 10 (Δήμητρα, ερώτηση 10, γραμμή 232)»

Το πρόβλημα είναι ότι οι εκπαιδευτικοί δεν μπορούν να δικαιολογήσουν επαρκώς την απάντηση τους γιατί δεν είναι εξοικειωμένοι με την ορολογία των αντίστοιχων άρθρων που παρουσιάσαμε παραπάνω και αφορούσαν την Άλγεβρα. Για παράδειγμα ο Ανδρέας αναφέρει:

> «η ισότητα στη Γεωμετρία έχει και άλλα επίπεδα κατανόησης (Ανδρέας, ερώτηση 10, γραμμή 298)»

χωρίς να είναι ξεκάθαρο τι εννοεί, ο Βασίλης με κάποιον παρόμοιο συλλογισμό αναφέρει:

> «στη Γεωμετρία μπορεί να είναι κάτι πιο αφηρημένο (Βασίλης, ερώτηση 10, γραμμή 170)»

Ελένη:

> «και η χρήση του είναι διαφορετική. Η Άλγεβρα μπαίνει μέσα στη Γεωμετρία για να λύσει τις ασκήσεις (Ελένη, ερώτηση 10, γραμμή 212)»

Λίγο πιο ξεκάθαρη αλλά αντίστοιχα όχι πολύ ακριβής είναι η απάντηση του Γρηγόρη:

> «είναι διαφορετική. Γενικά λοιπόν ισότητα υπάρχει πάντα, υπάρχει πάντα ισότητα ομοειδών πραγμάτων … στην άλγεβρα η ισότητα χ=ψ σημαίνει ότι το χ είναι κάποιος αριθμός και το ψ είναι κάποιος αριθμός και ταυτίζονται … Στη Γεωμετρία υπάρχει διπλή έννοια της ισότητας. Είναι ισότητα τμημάτων και ισότητα αριθμών. Και τι άλλο μπορείς να μου πεις τώρα; Και ισότητα τριγώνων ας πούμε (Γρηγόρης, ερώτηση 10, γραμμή 268)»

Σημαντική παρατήρηση, όπως θα δούμε και στις ερωτήσεις των επόμενων ερευνητικών ερωτημάτων, είναι ότι ο Γρηγόρης διαχωρίζει την ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών με την ισότητα τριγώνων.

5.2 Ερευνητικό Ερώτημα 2ο:

Ποια είναι η γνώμη των εκπαιδευτών και πως αντιμετωπίζουν το σύμβολο του ίσον οι εκπαιδευτικοί στη Γεωμετρία, πως βιώνουν την ποικιλία χρήσεων του συμβόλου στη Γεωμετρία

5.2.1 Ερωτήματα της Συνέντευξης που Αφορούν Αυτό Ερευνητικό Ερώτημα:

5.2.1.1 Ερώτηση 3)

Βάσει αυτών των αποσπασμάτων, πιστεύετε ότι οι μαθητές/μαθήτριες θα αντιμετωπίσουν δυσκολίες κατανόησης σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

Όλοι οι εκπαιδευτικοί συνηγορούν ότι οι μαθητές είναι πολύ πιθανόν να αντιμετωπίσουν δυσκολίες κατανόησης σχετικά με το σύμβολο του ίσον. Επίσης όλοι οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι έχουν παρατηρήσει μια γενικότερη δυσκολία των μαθητών στο μάθημα της Γεωμετρίας, χαρακτηριστικά η Δήμητρα αναφέρει:

> «αυτό που θα πω είναι ότι οι μαθητές δυσκολεύονται πάρα πολύ στη Γεωμετρία και δεν ξέρω αν έχει επηρεάσει αυτή η έννοια του συμβόλου ή όχι (ερώτηση 3, γραμμή 90) … για να είμαι ειλικρινής δεν το είχα σκεφτεί ποτέ αυτό, ότι μπορεί να φταίει το ίσον (Δήμητρα, ερώτηση 3, γραμμή 103)»,

Βασίλης:

> «μπερδεύονται, ειδικά στη Γεωμετρία γίνεται πανικός (ερώτηση 3, γραμμή 54) … Μπερδεύουν το ίσον της παράστασης με το ίσον της εξίσωσης, με το ίσον

του τριγώνου, τα μπερδεύουν ναι. Θα αντιμετωπίσουν δυσκολίες κατανόησης, ναι (Βασίλης, ερώτηση 3, γραμμή 55)»

Ο Ανδρέας, ο Γρηγόρης και η Ελένη κάνουν λόγω και για μεγαλύτερες δυσκολίες ανάλογα με το μαθηματικό επίπεδο των παιδιών είτε αυτό αφορά την ηλικία είτε αφορά το δείκτη νοημοσύνης. Πιο συγκεκριμένα ο Ανδρέας πιστεύει ότι δυσκολίες αντιμετωπίζουν τα μικρότερα παιδιά και κάνει έναν διαχωρισμό βάση της ηλικίας στην Γ’ Γυμνασίου, πιστεύει ότι οι μαθητές του Λυκείου μπορούν να χειρίζονται την έννοια της ισότητας και το σύμβολο του ίσον με μεγάλη ευχέρεια, Ανδρέας:

> «όταν είναι σε μεγαλύτερη ηλικία όπως είναι η Α’ Λυκείου και η Γ’ Γυμνασίου τέτοιες συγχίσεις δεν είναι εύκολο να συμβούν (Ανδρέας, ερώτηση 3, γραμμή 147) … σε άλλες τάξεις όπως η Α’ Λυκείου, το να εξισώσεις γράμματα με αριθμούς αυτό έχει γίνει βίωμα. Και δεν αντιμετωπίζει πρόβλημα (Ανδρέας, ερώτηση 3, γραμμή 152) … θεωρώ ότι είμαστε ακόμα μακριά στις μικρές τάξεις για να καταλάβουνε πέρα από το σύμβολο και κάποια εννοιολογική προσέγγιση (Ανδρέας, ερώτηση 3, γραμμή 158)»

Από την άλλη ο Γρηγόρης και η Ελένη διαχωρίζουν τα παιδιά βάση του μαθηματικού τους επιπέδου, αυτό που λέμε «καλός» ή «κακός» μαθητής, βέβαια και οι δύο εκπαιδευτικοί πιστεύουν πως και οι «καλοί» μαθητές θα δυσκολευτούν στην κατανόηση αλλά δίνουν και κάποιες πιθανότητες ότι αυτοί θα ξεδιαλύνουν την έννοια και ίσως να κατανοήσουν, Γρηγόρης:

> «δυσκολία θα έχει κάποιος μαθητής ο οποίος είναι σε κάποιο επίπεδο πιστεύω δηλαδή ένας κακός μαθητής δε θα καταλάβει καν τη διαφορά, με ότι συνεπάγεται κακός μαθητής δηλαδή ένας μαθητής που στα μαθηματικά δεν είναι τόσο καλός δε θα καταλάβει τη διαφορά του ίσον. Ένας μέτριος προς καλός μαθητής δε θα καταλάβει ότι τι σημαίνει ΑΒ = ΑΓ σημαίνει ισότητα τμημάτων; Ή ισότητα μέτρων; Αυτό στα παιδιά από την εμπειρία μου έχω δει ότι είναι μπερδεμένο θέμα (Γρηγόρης, ερώτηση 3, γραμμή 121) … Ο αδιάφορος μαθητής δε θα μπερδευτεί ποτέ. Ίσον, ίσον. Δε θα το καταλάβει (Η: Ο καλός θα το ξεδιαλύνει;) Δεν είμαι τόσο σίγουρος. Θα πει ΑΒ = ΑΓ. Δεν ξέρω δεν είμαι τόσο σίγουρος. Αν θα το ξεδιαλύνει. Τώρα μπορεί να το

κουβαλάει ως απορία αυτό. Ο μέτριος πιστεύω δε θα πάρει χαμπάρι κάτι (Γρηγόρης, ερώτηση 3, γραμμή 134)»

Η Ελένη μάλιστα τονίζει και τα δύο, δηλαδή και την καλή κατανόηση κάποιων μαθητών αλλά και την τάξη στην οποία βρίσκονται, θεωρεί ότι αν ένα παιδί δεν έχει κατανοήσει σωστά την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία μέχρι το τέλος της Γ' Γυμνασίου, στο Λύκειο δεν θα μπορέσει να το κατανοήσει, η απάντηση της στην ερώτηση είναι η εξής:

> «Ναι (Ελένη, ερώτηση 3, γραμμή 65) … Πρέπει να τα ξεκαθαρίσω. Πρέπει να έχεις και λίγο καλή αντίληψη και να καταλαβαίνεις τι είναι το ευθύγραμμο τμήμα , ποιο είναι το μήκος ποια είναι η γωνία την έννοια της γωνίας το άνοιγμά της πόσο είναι (Ελένη, ερώτηση 3, γραμμή 68) … Εγώ στην εφαρμογή 6 στη Β γυμνασίου σου λέω ότι λέω πραγματικά μπράβο αν κατανοήσουνε. Ας είναι Β γυμνασίου βλέπεις ποια είναι η διαφορά; Μετά είναι γ γυμνασίου και μετά η πρώτη λυκείου. Στην πρώτη λυκείου όλα είναι ξεκαθαρισμένα (Ελένη, ερώτηση 3, γραμμή 74)»

5.2.1.2 Ερώτηση 6)

Ποια είναι η διδακτική πρακτική σας σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

Οι τέσσερις από τους πέντε εκπαιδευτικούς ανέφεραν τη διαδικασία της επίθεσης και οι τέσσερις ακολουθούν αυτή τη διαδικασία είτε στον πίνακα χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα είτε στο τετράδιο με τη βοήθεια ριζόχαρτου, επίσης και οι τέσσερις αναφέρθηκαν στις τάξεις του Γυμνασίου και κυρίως στην Α' και Β' Γυμνασίου. Ανδρέας:

> «χρησιμοποιώ γεωμετρικά όργανα και μάλιστα τα βάζω αυτά (τα παιδιά) να χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα και δη το διαβήτη (Ανδρέας, ερώτηση 6, γραμμή 205) … Τώρα σε πιο μεγάλα παιδιά (Γ' Γυμνασίου και πάνω) δεν

κάνεις τέτοια γιατί είπαμε, πάντα πιέζει ο χρόνος, ίσως λίγο χρήση οργάνων (Ανδρέας, ερώτηση 6, γραμμή 220)»

Η Ελένη στην απάντηση της ανέφερε και την έννοια της σύγκρισης, χρησιμοποιώντας και αυτή τη διαδικασία της επίθεσης:

> «αυτό το λέμε με ένα τσιγαρόχαρτο, με ένα ψιλόχαρτο (ριζόχαρτο) κάνε μια γωνία και τοποθέτησέ τη μια γωνία πάνω στην άλλη να δεις είναι ίσες; Ταυτίζονται; Συμπίπτουν; Είναι μικρότερη; Είναι μεγαλύτερη; Εμπεριέχεται μέσα στην άλλη; Για να δεις το μήκος; Στην αρχή πρέπει να κάνεις τέτοια πράγματα. Για να αντιμετωπίσουν το άνοιγμα μιας γωνίας να δουν πόσο είναι (Ελένη, ερώτηση 6, γραμμή 137»

Από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών είδαμε ότι κυρίως χρησιμοποιούν πρακτικά παραδείγματα, βάζοντας τα ίδια τα παιδιά να ασχοληθούν, να έχουν ενεργό ρόλο στο μάθημα. Η απάντηση του Βασίλη δεν περιείχε καθόλου ενεργό συμμετοχή των μαθητών παρά μια αναφορά του ίδιου για την ισότητα και μια προσπάθεια να τους εξηγήσει την έννοια:

> «Προσπαθείς να τους εξηγήσεις ότι κάποια πράγματα είναι πιο αφηρημένα και κάποια πράγματα είναι συγκεκριμένα και χαρακτηριστικά είναι από τον τρόπο (Βασίλης, ερώτηση 6, γραμμή 91)».

5.2.1.3 Ειδικά Θέματα Α

Στο σχολικό βιβλίο συναντάμε πολύ συχνά τις δύο ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις που και οι δύο περιέχουν το σύμβολο του ίσον:

α)$\widehat{\mathrm{A}} = 90^{o}$

β) $\widehat{\mathrm{A}} = 1∟$

Εντοπίζετε διαφορές στην χρήση του συμβόλου του ίσον ανάμεσα στις δύο αυτές περιπτώσεις;

Σε αυτή την ερώτηση ούτε ένας εκπαιδευτικός δεν έδωσε μια σαφή απάντηση, πάραυτα στην προσπάθεια τους να απαντήσουν φάνηκαν κάποια σημεία που ίσως να μην περιμέναμε να δούμε και αξίζει να τα επισημάνουμε. Συγκεκριμένα αναφέρθηκαν εκφράσεις που ίσως να δημιουργούσαν σύγχυση και στους μαθητές, εκφράσεις που ίσως περιέπλεκαν τα πράγματα παρά τα απλοποιούσαν. Ο Ανδρέας, ο Βασίλης και ο Γρηγόρης ανέφεραν ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με το σύμβολο «∟», Βασίλης:

> «στο ένα είναι ξέρω γω πρώτα από όλα ίσο 90, μπορούν να το διαβάσουν όλοι. Το Α ίσον ένα (εννοεί την έκφραση $\hat{A} = 1∟$) μπορεί κάποιος να μην το διαβάσει (Βασίλης, ειδικό θέμα Α, γραμμή 178)»

αντίθετα η Δήμητρα τόνισε πως χρησιμοποιεί πολύ συχνά αυτή την γραφή στον πίνακα για να εξοικειωθούν τα παιδιά, Δήμητρα:

> «Αν σου πω ότι το χρησιμοποιώ κι εγώ; Μπορεί να βάλω ίσον μια ορθή και ίσον 90, για να τα βλέπουνε και τα δύο μαζί (Δήμητρα, ειδικό θέμα Α, γραμμή 254)»

Ο Ανδρέας μπορούμε να πούμε ότι ανέφερε μια ουσιώδη διαφορά ανάμεσα στις δύο εκφράσεις, για την έκφραση $\hat{A} = 1∟$ είπε ότι αναφέρεται σε σύγκριση με την γωνία του γνώμονα:

> «Ωραία στο πρώτο έχουμε ισότητα γράμματος, όπως είναι η γωνία Α, μέτρο με αριθμό ενώ στο επόμενο έχουμε ισότητα γράμματος σύμβολο και μάλιστα όχι τόσο συχνά χρησιμοποιούμενο. Άρα εκεί πρέπει να καταλάβουν τα παιδιά το μέγεθος ότι η γωνία σε σχέση με το μέγεθος της, ενώ το άλλο είναι ένα κατασκεύασμα που μπορείς να τους δείξεις την ορθή γωνία του γνώμονα για παράδειγμα. Και όταν βλέπετε και το ένα L , τότε μιλάμε για τη γωνία αυτή του γνώμονα. Άρα ότι συγκρίνουμε μια γωνία εκεί με το γνώμονα (Ανδρέας, ειδικό θέμα Α, γραμμή 318)»

Γρηγόρης:

> «στην περίπτωση Α υπάρχει ισότητα μέτρων, ενώ στην περίπτωση Β υπάρχει ισότητα γεωμετρικών αντικειμένων (Γρηγόρης, ειδικό θέμα Α, γραμμή 291)»

Στην απάντηση της Ελένης βλέπουμε να συνδέει το σύμβολο «∟» με τα σύμβολα «$=, \neq, <, >$», σε αυτό το σημείο ίσως ένας μαθητής να ερχόταν σε σύγχυση, επίσης δε διακρίνει κάποια διαφορά ανάμεσα στις δύο εκφράσεις, Ελένη:

> «Το L είναι η ορθή. Πρέπει να δουν ότι χρησιμοποιούμε και σύμβολα, πώς είναι το διάφορο πώς είναι το μεγαλύτερο πώς είναι το μικρότερο πώς είναι η ορθή (Ελένη, ειδικό θέμα Α, γραμμή 218) … Και τα δύο σου εκφράζουν το ίδιο πράγμα (Ελένη, ειδικό θέμα Α, γραμμή 223)»

Η Δήμητρα λέει ακόμα:

> «Εδώ (δεύτερη περίπτωση) απλά βλέπω ότι είναι στο δεύτερο αμέσως ουσιαστικά είναι σα να έρχεται το σχήμα ότι μια πλευρά είναι κάθετη της άλλης που σχηματίζεται η περιεχόμενη γωνία έτσι; Ενώ στο άλλο (πρώτη περίπτωση) έχεις μια αριθμητική τιμή. Της γωνίας. Που μπορεί να μην παραπέμπει απαραίτητα ότι είναι κάθετη. Δηλαδή το παιδί να μην το συσχετίσει απόλυτα. Τα παιδιά που ξέρουνε ότι είναι 90 μοίρες είναι ορθή μπορεί να σχεδιάσουνε και το σχήμα στο μυαλό τους έτσι; Μπορεί να μην ξέρουν το σύμβολο , το Λ αυτό να μην το ξέρουνε, φαντάζομαι ότι παραπέμπει στο σχήμα. Όσα παιδιά το ξέρουνε αυτό (Δήμητρα, ειδικό θέμα Α, γραμμή 272)»,

Παρατηρούμε λοιπόν ότι προσπαθεί να συνδέσει τη δεύτερη περίπτωση με ένα σχήμα με δύο ευθείες ή ευθύγραμμα τμήματα κάθετα μεταξύ τους, ενώ στο πρώτο απλά να αναφέρει πόσες μοίρες είναι η γωνία.

5.3 Ερευνητικό Ερώτημα 3^{ο}:

Πως εμφανίζεται και χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον στα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας, τι θα πρότειναν οι εκπαιδευτικοί σύμφωνα με την εμπειρία τους; Είναι οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί ενημερωμένοι;

5.3.1 Ερωτήματα της Συνέντευξης που Αφορούν Αυτό Ερευνητικό Ερώτημα:

5.3.1.1 Ερώτηση 7)

Τι διδακτικές συμβουλές θα προτείνατε σε συναδέλφους σας σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

Εδώ δεν είχαμε κάποια συγκεκριμένη απάντηση, άλλωστε ο κάθε εκπαιδευτικός κρίνει και από την τάξη που κάνει, από το πόσο καλό είναι το τμήμα, από τον χρόνο που θα μπορούσε να διαθέσει κλπ. Ο Ανδρέας και ο Βασίλης ανέφεραν ότι θα πρότειναν σε συναδέλφους να ασχοληθούν πιο πολύ με τον υπολογιστή και με προγράμματα όπως το GeoGebra για να κάνουν το μάθημα πιο διαδραστικό ώστε μέσω αυτών να μπορέσουν να ασχοληθούν με τη σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών και ειδικά με την ισότητα. Η Ελένη προτείνει στους συναδέλφους της να σηκώνουν τα παιδιά στον πίνακα και να προσπαθούν μόνα τους να ανακαλύψουν την έννοια της ισότητας με την έμμεση καθοδήγηση του καθηγητή και να δίνουν στους μαθητές περισσότερες ασκήσεις, επιπλέον του σχολικού βιβλίου αλλά και κάποια φύλα αξιολόγησης πάνω σε κάθε ενότητα, έτσι και στην ισότητα (όχι με τη μορφή διαγωνίσματος, για έλεγχο των γνώσεων). Η Ελένη επιμένει επίσης στην έννοια της ισότητας με παραδείγματα που αφορούν το οριζόντιο, κάθετο και πλάγιο (Ελένη, ερώτηση 7, γραμμή 149), όπως είπε. Η Δήμητρα περιέγραψε το μάθημα που έκανε την προηγούμενη σχολική χρονιά στην Α' Λυκείου στην έννοια της ισότητας, Δήμητρα:

> «Είναι ανάλογα με την τάξη πώς προκύπτει δεν είναι ότι α έχω αυτό τυφλοσούρτη το εφαρμόζω. Δε μπορώ να πω ότι έχω κάτι συγκεκριμένα απλά θυμάμαι τώρα πέρυσι είχε γίνει αυτό, όπως είχα το τρίγωνο, είχα το γνώμονα. Και τους λέω ποιο είναι μεγαλύτερο. Ποια πλευρά είναι μεγαλύτερα. Οπότε τα παιδιά τι κάνανε; Ο καθένας έλεγα και διαφορετικά. Και λέω πώς θα το δούμε αυτό δεν έχουμε χάρακα, οπότε κάποιος άλλος έκανε με τις παλάμες το άνοιγμα

των δαχτύλων, κάποιος άλλος πήρε το κινητό του , και είδε ότι δεν , κάπου τα έχασε, μετρούσε από το κινητό γιατί μου λέγανε ότι η κάθετη είναι μεγαλύτερη από την υποτείνουσα. Εγώ δεν έλεγα τίποτα, ψάχνανε να πούνε. Γιατί έτσι συμμετέχουν όλοι. Το θέμα είναι να συμμετάσχουν όλοι , όχι να τους πεις τη λύση. Οπότε μετά σηκώθηκε ένας άλλος, έκανε ένας από το κινητό το μετρούσε και μετά για να δει ποιες πλευρές είναι ίσες, ποιες είναι ίσες, μεγαλύτερες , το λέω αυτό επειδή μιλάμε για ισότητα έτσι; Μετά τι έκανε κάποιος, παίρνει το γνώμονα και λέει κυρία να σηκωθώ στον πίνακα; Γιατί οι άλλοι το παίρνανε στο θρανίο τους. Να μετρήσουνε να δούνε αν είναι ίσες ή ποια είναι μεγαλύτερη από ποια. Το παίρνει και σχεδιάζει , τραβάει μια γραμμή όσο είναι το μήκος της κάθετης. Μετά τραβάει μία άλλη γραμμή όσο είναι το μήκος της υποτείνουσας οπότε τα παιδιά και όλοι η τάξη κατάλαβαν ποια είναι η μεγαλύτερη και πείστηκαν και μετά είπαμε ποια είναι η μεγαλύτερη. Και μετά στον τοίχο μέσα στην αίθουσα τους λέω εγώ είμαι εδώ στον πίνακα. Θέλω να πάω εδώ και να πάω και εκεί. Ποια είναι η μεγαλύτερη απόσταση, αφού έγινε αυτό με τον γνώμονα οπότε ήταν το μάθημα κάθετες και πλάγιες. Αυτό ήτανε το μάθημα κάθετες και πλάγιες. Σε αυτό το μάθημα το χα κάνει, μου προέκυψε, δεν είναι ότι το κάνω σε κάθε τάξη, έτσι προέκυψε. Οπότε τα παιδιά μόνα τους είδανε ποιο είναι ίσο με αυτό. Δεν είχαμε χάρακα για να έχουμε αριθμητική τιμή οπότε είδαμε πλευρές ισότητες ή ανισότητες, ή άνισες (Δήμητρα, ερώτηση 7, γραμμή 174)»

5.3.1.2 Ερώτηση 8)

Τι θα προτείνατε στη συγγραφική ομάδα του μελλοντικού σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

Κατ’ αρχάς, μια πρώτη αντίδραση των Ανδρέα, Βασίλη και Γρηγόρης είναι ότι πιστεύουν πως το βιβλίο Γεωμετρίας της Α’ Λυκείου είναι πολύ καλό και δεν θα άλλαζαν κάτι, αυτή την πεποίθηση φαίνεται πως έχουν και οι Δήμητρα και η Ελένη αφού αναφέρουν ότι θα έκαναν αλλαγές στα βιβλία του Γυμνασίου. Ανδρέας:

> «το καλύτερο θα ήτανε να βλέπουν τα παιδιά πάνω κάτω την ίδια άσκηση, πάνω γραμμένη εννοιολογικά που να τους λένε ότι αυτή η ποσότητα είναι ίδια να σου πουν τη λέξη και από κάτω το ίδιο πράγμα με συμβολικό τρόπο γραφής (Ανδρέας, ερώτηση 8, γραμμή 237»

Δήμητρα:

> «Εμένα θα μου άρεσε τώρα που το σκέφτομαι να υπήρχε μια αντιπαράθεση. Το σύμβολο του ίσον στην άλγεβρα που χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον στη γεωμετρία. Δηλαδή να το αναφέρει το βιβλίο μέσα και να το πάρει και ο καθηγητής και αυτό να είναι ένα ερέθισμα και ένα κίνητρο για να μπορεί κάποια παιδιά μπορεί ο καθηγητής να δούνε αυτή τη διαφορά και ίσως λυθούνε κάποια προβλήματα που υπάρχουν σε κάποια παιδιά. Εμένα δηλαδή θα μου άρεσε να υπάρχει ένας παραλληλισμός σε αυτό (Δήμητρα, ερώτηση 8, γραμμή 214)»

Ο Ανδρέας και η Δήμητρα προτείνουν λοιπόν το σχολικό βιβλίο, στο κεφάλαιο που αφορά το ίσον στη Γεωμετρία (μέρος Β' για το Γυμνάσιο) να κάνει μια αντιπαράθεση της χρήσης του ίσον στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία ώστε οι μαθητές να μπορούν να αντιληφθούν τη διαφορά στην χρήση του συμβόλου αλλά έτσι να βοηθηθεί και ο διδάσκοντας για να τονίσει αυτή τη διαφορά. Πάλι βλέπουμε τους εκπαιδευτικούς να διαχωρίζουν το ίσον μόνο ανάμεσα στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία και όχι τη διαφορετική του χρήση αποκλειστικά στη Γεωμετρία.

Ενδιαφέρουσα είναι η πρόταση που κάνει ο Γρηγόρης στη συγγραφική ομάδα, Γρηγόρης:

> «Στην πρώτη λυκείου το βιβλίο είναι άψογο. Γιατί όταν σου λέει ΑΒ=ΑΓ σημαίνει ότι είναι ισότητα τμημάτων (ερώτηση 8, γραμμή 231) ... Στη Β' Λυκείου επειδή η γεωμετρία αλγεβροποιείται λιγάκι και λέει ΑΒ = 5 εκ. ας πούμε μπορεί να πει, δεν θυμάμαι να έχει παρένθεση ΑΒ=5 , έχεις κι το ΑΒ =5 , είναι σκέτο ΑΒ δεν έχουμε παρένθεση. Άρα η Α' λυκείου είναι μια χαρά. Στο γυμνάσιο γίνονται τραγικότητες. Δεν έχουνε την παρένθεση, κοίτα τώρα τι φαύλος κύκλος είναι αυτός. Δεν βάζουνε τώρα την παρένθεση ΑΒ για να μην

δημιουργήσουνε τη σύγχυση στα παιδιά και δεν καταλαβαίνουνε τι είναι η παρένθεση και τι είναι το σκέτο ΑΒ και τελικά τους δημιουργείται σύγχυση που μπορεί να δημιουργηθεί και σε μεγαλύτερη ηλικία. Χωρίς να το καταλάβουνε. Πάει αυτόματα , μαθαίνουνε αυτόματα έναν κανόνα λάθος. Οπότε γιατί να μην γράφουμε (ΑΒ) = 5 εκ (ερώτηση 8, γραμμή 235) ... Άρα βγάζουμε τα μάτια μας μόνοι μας και μπερδευόμαστε κι εμείς οι ίδιοι. Εκεί πιστεύω. Δηλαδή εννοείται βελτιώνουμε , άρα στην πρώτη γυμνασίου στη γεωμετρία εκεί που γράφω την αναφορά στο μέτρο να σβηστεί από κάτω ότι έχουν το δικαίωμα του ΑΒ και το (ΑΒ) είναι το ίδιο πράγμα, να σβηστεί. Γιατί είναι σα να λες ότι το ευθύγραμμο τμήμα που είναι ένα αντικείμενο ισούται με αριθμό. Είναι χρήση ανόμοιων πραγμάτων εντελώς. Στη Β Γυμνασίου κουβαλάει τα κουσούρια της Α. Η Γ γυμνασίου τα κουβαλάει κι αυτή 100% η Α λυκείου είναι πιστεύω εντάξει (Γρηγόρης, ερώτηση 8, γραμμή 247)»

5.3.1.3 Ερώτηση 9)

Τι θα προτείνατε στην ομάδα σχεδιασμού του μελλοντικού αναλυτικού προγράμματος της Γεωμετρίας σχετικά με το σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία;

Σε αυτό το ερώτημα οι εκπαιδευτικοί δεν έδωσαν κάποια συγκεκριμένη πρόταση, πρότειναν γενικά ότι πρέπει να αυξηθούν οι ώρες του μαθήματος της Γεωμετρίας, να δοθούν επιπλέον ασκήσεις προς τους εκπαιδευτικούς στο βιβλίο οδηγιών (κοινές δηλαδή για όλους τους εκπαιδευτικούς) και να δοθούν πιο συγκεκριμένες οδηγίες για να τονιστεί η διαφορετική χρήση του συμβόλου, πάλι τόνισαν όμως τη διαφορά του συμβόλου ανάμεσα σε Άλγεβρα και Γεωμετρία. Ο Ανδρέας ανέφερε ως πρόταση, το βιβλίο οδηγιών προς τους εκπαιδευτικούς να προτρέπει τον εκπαιδευτικό να ασχοληθεί με τη μαθηματική κουλτούρα των παιδιών, Ανδρέας:

«Κάποια στιγμή πίστεψα ότι είναι πιο σημαντικό από το να τους μαθαίνεις μαθηματικά, να τους κάνεις να ψάχνουν μαθηματικά γιατί αυτό θα τους κάνει να μάθουν και τα μαθηματικά (Ανδρέας, ερώτηση 9, γραμμή 273)»,

μάλιστα, όσον αφορά το σύμβολο του ίσον, είχε αναθέσει στους μαθητές και μαθήτριες του να βρουν πληροφορίες για το σύμβολο του ίσον.

5.3.1.4 Ειδικά Θέματα Β

Στο σχολικό εγχειρίδιο, όχι στις λύσεις των ασκήσεων, δε συναντάμε πουθενά μια μαθηματική έκφραση όπως $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$, αντίθετα συναντάμε την έκφραση «τα τρίγωνα ΑΒΓ και $Α'Β'Γ'$ είναι ίσα», γιατί πιστεύετε ότι συμβαίνει αυτό;

Οι πέντε εκπαιδευτικοί δεν είχαν παρατηρήσει ότι στο σχολικό δεν αναγράφεται πουθενά κάποια παρόμοια έκφραση με αυτήν, $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών δείχνουν μια σύγχυση και δεν μπορούν να αιτιολογήσουν την απουσία (στο επίσημο κείμενο της θεωρίας) μιας τέτοιας έκφρασης. Η Δήμητρα χαρακτηριστικά αναφέρει:

«Δεν το έχουμε πουθενά αυτό; … Γιατί εγώ στον πίνακα το χρησιμοποιώ συνέχεια αυτό … Μου έκανε εντύπωση τώρα, πραγματικά δεν το ‘χα συνειδητοποιήσει ότι δεν … Δεν το ξέρα ότι δεν το βάζουνε. Μου έκανε εντύπωση γιατί δεν θα το βάζανε καθόλου αλλά λες ότι το χρησιμοποιούν στο τέλος. Με βρίσκεις αδιάβαστη (Δήμητρα, αποσπάσματα από ειδικό θέμα Β, γραμμές 285 – 322)»,

η αιτιολόγηση που έδωσαν ο Βασίλης και η Ελένη είναι ότι τα παιδιά μπερδεύονται ανάμεσα στο τρίγωνο και στη γωνία όταν βλέπουν μια τέτοια έκφραση.

Και οι πέντε εκπαιδευτικοί είπαν ότι χρησιμοποιούν αυτή την έκφραση όταν λύνουν ασκήσεις στον πίνακα, βέβαια όλοι τόνισαν ότι μαζί με την έκφραση αναφέρουν και λεκτικά (προφορικά) ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Η Ελένη μάλιστα είπε πως γράφει με λέξεις στον πίνακα ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, «Εγώ γράφω πάντα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα με γράμματα ολογράφως καθαρά και γράφω από δίπλα, δηλαδή και γράφω το συμβολισμό ΑΒΓ τριγωνάκι πάνω = Α'Β'Γ' τριγωνάκι. Τους τυπώνεται πάντα ποιος είναι ο συμβολισμός του τριγώνου, της ισότητας του τριγώνου τον γωνιών των , είδες που είδαμε 90 με ένα L, πάντα η ανατροφοδότηση, πάντα να κάνουμε τα σύμβολα της γεωμετρίας δίπλα να τα επαναλαμβάνουμε συνέχεια. Αλλά καλό είναι να το γράφεις πρώτα ολογράφως τα τρίγωνα είναι ίσα και μετά δίπλα το συμβολισμό (Ελένη, ειδικό θέμα Β, γραμμή 249)»

Η αιτιολόγηση που δίνουν οι εκπαιδευτικοί για το ότι χρησιμοποιούν την έκφραση αυτή είναι η οικονομία χρόνου που επιδιώκουν στη διδακτική πρακτική, βέβαια επειδή η ερώτηση είναι η τελευταία της συνέντευξης και έχουν προηγηθεί πολλές ερωτήσεις, οι εκπαιδευτικοί έχουν προϊδεάσει ότι ίσως αυτό να είναι λάθος και προσπαθούν να δικαιολογηθούν.

Βασίλης:

«εγώ γράφω το τρίγωνο, λόγω έλλειψης χρόνου συνήθως, ΚΛΜ είναι ίσο με αυτό αλλά λεκτικά στο λέω, γιατί πως το ακούν… (Βασίλης, ειδικό θέμα Β, γραμμή 216)»

Γρηγόρης:

«Στις ασκήσεις που βλέπω στον πίνακα το χρησιμοποιώ (Γρηγόρης, ειδικό θέμα Β, γραμμή 341) … Το πρώτο μάθημα. Τι σημαίνει αυτό το ίσον για να μην μπερδεύεται. Τώρα δεν ξέρω αν κάνω λάθος κι εγώ, δεν ξέρω. Δεν το έχω σκεφτεί (Γρηγόρης, ειδικό θέμα Β, γραμμή 351)»

5.3.1.5 Διδακτικές Πρακτικές

1. Με ποιο τρόπο χρησιμοποιείτε το σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας στο μάθημά σας;

Ανδρέας: χρησιμοποιεί το βιβλίο ως πηγή ασκήσεων και για να διαβάζουν οι μαθητές την θεωρία με πιο αυστηρό τρόπο

Βασίλης: χρησιμοποιεί το βιβλίο ως πηγή ασκήσεων, επίσης στην τάξη λύνει εφαρμογές και ασκήσεις

Γρηγόρης: αντλεί ασκήσεις και θεωρεί από το σχολικό βιβλίο

Δήμητρα: κάνει πολύ περιορισμένη χρήση του βιβλίου

Ελένη: το χρησιμοποιεί για την θεωρία και για εφαρμογές και ασκήσεις, κυρίως τις εύκολες που πιστεύει ότι τα παιδιά μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα

2. Δίνετε προσωπικές σημειώσεις / φυλλάδια;

Ανδρέας: δίνει προσωπικές σημειώσεις οι οποίες περιέχουν μεθοδολογία των ασκήσεων και επιπλέον άλυτες ασκήσεις

Βασίλης: δίνει προσωπικές σημειώσεις που περιέχουν ασκήσεις και επιγραμματικά την θεωρία

Γρηγόρης: δίνει προσωπικές σημειώσεις, πολλές από τις οποίες περιέχουν και GeoGebra, οι μαθητές χρησιμοποιούν το λογισμικό και μόνοι τους στο σπίτι, οι σημειώσεις δίνονται σε όλους τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν το μάθημα της Γεωμετρίας από τη διεύθυνση του ιδιωτικού σχολείου που εργάζεται

Δήμητρα: δίνει ασκήσεις, συνήθως η μία μοιάζει με την άλλη και σταδιακά ανεβάζει το επίπεδο δυσκολίας

Ελένη: δίνει προσωπικές σημειώσεις με την θεωρία και δίνει μεγάλη έμφαση στα σχήματα που περιέχουν αυτά τα φυλλάδια και τα χρησιμοποιεί στη διάρκεια του μαθήματος

3. Ποια η γνώμη σας για τις οδηγίες του υπουργείου (ΦΕΚ, Βιβλίο καθηγητή κτλ.) για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας;

Ανδρέας: έχει γνώμη για τις οδηγίες, όμως τις θεωρεί βοηθητικές σε λίγες περιπτώσεις

Βασίλης: δεν θυμάται τι γράφουν οι οδηγίες, φαίνεται ίσως να μην τις έχει διαβάσει

Γρηγόρης: η γνώμη του είναι καλή και γνωρίζει ότι οι οδηγίες του υπουργείου περιέχουν και εφαρμογές με χρήση του λογισμικού GeoGebra

Δήμητρα: δεν θυμάται τις οδηγίες του υπουργείου στη Γεωμετρία

Ελένη: διαβάζει τις οδηγίες, σε πολλές περιπτώσεις όμως πιστεύει ότι πρέπει να αφιερώσει πιο πολλές ώρες από ότι προτρέπουν οι οδηγίες. ¨όπως χαρακτηριστικά είπε:

4. Ειδικότερα, για την έννοια τη ισότητας γνωρίζετε αν υπάρχουν συγκεκριμένες επίσημες οδηγίες;

Ανδρέας: θεωρεί ότι για την έννοια της ισότητας στην Άλγεβρα υπάρχει περισσότερο καλύτερο υλικό, δεν έχει σαφή εικόνα για τη Γεωμετρία

Βασίλης: δεν θυμάται

Γρηγόρης: γνωρίζει ότι στην Α’ Γυμνασίου υπάρχουν αναφορές για την ισότητα στη Γεωμετρία

Δήμητρα: δεν γνωρίζει αν υπάρχουν τέτοιες οδηγίες

Ελένη: δεν γνωρίζει, χαρακτηριστικά ανέφερε:

«Τώρα δεν θυμάμαι στην ισότητα τι δίνει. Αυτό δεν το θυμάμαι ακριβώς αλλά εγώ βλέπω το επίπεδο των παιδιών πάντα και κρίνω μόνη μου (Ελένη, διδακτικές πρακτικές ερώτηση 5, γραμμή 311)»

6. Συζήτηση

6.1 Γενικά

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκαν τρία ερευνητικά ερωτήματα που αφορούσαν την χρήση του συμβόλου του ίσον και την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία. Αυτά τα ερωτήματα ήταν:

1. Διαφέρει η χρήση του συμβόλου του ίσον στη Γεωμετρία σε σχέση με την Άλγεβρα;
2. Ποια είναι η γνώμη των εκπαιδευτικών, πώς αντιμετωπίζουν το σύμβολο του ίσον στη Γεωμετρία και πώς βιώνουν την ποικιλία των χρήσεων του συμβόλου στη Γεωμετρία;
3. Πώς εμφανίζεται και χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον στα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας, τι θα πρότειναν οι εκπαιδευτικοί σύμφωνα με την εμπειρία τους; Είναι οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί ενημερωμένοι;

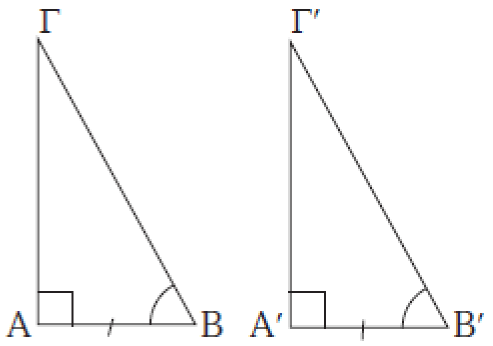
Σε κάθε ένα από τα ερευνητικά ερωτήματα προσπαθήσαμε να αναλύσουμε την υπάρχουσα βιβλιογραφία, τα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας και μέσω συνεντεύξεων να αποτυπώσουμε τις γνώσεις και τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών. Αξίζει να αναφέρουμε ότι τα άρθρα της υπάρχουσας βιβλιογραφίας που μελετήθηκαν αναφέρονται στο σύμβολο του ίσον και τη χρήση του αποκλειστικά στην Άλγεβρα. Όσον αφορά τη Γεωμετρία δεν υπάρχει βιβλιογραφία που να μελετά το συγκεκριμένο θέμα και ως εκ τούτου έπρεπε να κινηθούμε αυτόνομα όσον αφορά την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων και την κατάρτιση των ερωτηματολογίων που χρησιμοποιήθηκαν στις συνεντεύξεις.

Στην Άλγεβρα όπως είδαμε από την έρευνα των Molina, Castro και Castro (2009), το σύμβολο του ίσον έχει πολλές έννοιες ανάλογα με τον τρόπο χρήσης του και συγκεκριμένα εντοπίστηκαν 11 κατηγορίες χρήσης του συμβόλου. Στην έρευνα των Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil και Stephens (2008) είδαμε ότι οι μαθητές που είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν το σύμβολο του ίσον στις ασκήσεις χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες : αυτούς που μπορούν να καταλάβουν το ίσον ως ένα σύμβολο που εκφράζει μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ δύο μεγεθών και αυτούς που το βλέπουν λειτουργικά δηλαδή ως τη θέση που πρέπει να μπει ένας αριθμός ή η απάντηση ενός υπολογισμού δηλαδή ως κίνητρο για να κάνουν κάτι.

6.2 Σχολικά βιβλία – Συζήτηση

Μέσα από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων της Γεωμετρίας εντοπίσαμε την χρήση του συμβόλου άλλοτε με βάση την πρώτη κατηγορία, η οποία βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τη σημασία του συμβόλου και άλλοτε με βάση τη δεύτερη, η οποία δε δίνει αυτό το ερέθισμα στους μαθητές.

Η παρούσα μελέτη αφορά τα σχολικά εγχειρίδια της Β’ και Γ’ Γυμνασίου και της Γεωμετρίας της Α’ Λυκείου. Πραγματεύεται αποκλειστικά την χρήση του συμβόλου του ίσον και όχι εκφράσεις όπως «είναι ίσο με», «ισούται με», «είναι ίσα» κτλ. Επίσης δεν αφορά τη σήμανση που χρησιμοποιείται στα σχήματα των βιβλίων για να δείξει ότι δύο πλευρές ή δύο γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Εικόνα 42 – Α’ Λυκείου Γεωμετρία, σελ. 49

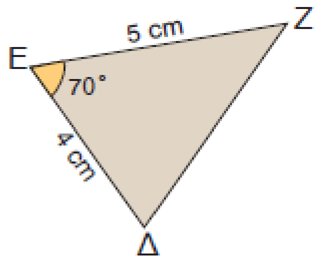
6.2.1 Β’ Γυμνασίου

Όσον αφορά το σχολικό βιβλίο της Β’ Γυμνασίου η μελέτη εστιάζει στο πρώτο κεφάλαιο του Β’ μέρους που αφορά τα εμβαδά επίπεδων σχημάτων και το πυθαγόρειο θεώρημα. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο εκτός από τις μαθηματικές εκφράσεις στην φυσική γλώσσα που αναφέραμε προηγουμένως, το σύμβολο του ίσον χρησιμοποιείται σε 150 εκφράσεις στη γλώσσα των μαθηματικών, εκ των οποίων οι 116 κάνουν χρήση μόνο μία φορά του συμβόλου, για παράδειγμα $E = 142$ και $\frac{72}{2} = 35{,}5$ και σε 34 περιπτώσεις η έκφραση περιέχει πάνω από μία φορά το σύμβολο, όπως $5 \cdot 5 = 5^2 = 125$ και $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}\, β \cdot υ$.

Στο 98% των περιπτώσεων το σύμβολο της ισότητας χρησιμοποιείται στη Γεωμετρία ενώ το υπόλοιπο ποσοστό στην Άλγεβρα. Σχεδόν τις μισές φορές που γίνεται χρήση του «=», αυτό συνδέει δύο αλγεβρικά αντικείμενα (43%) όπως $12 \cdot 8 = 96(m^2)$, σε ποσοστό 23% συνδέει δύο γεωμετρικά αντικείμενα, $(ΜΑΒ) = (ΜΑΓ)$ ή $(ΜΑΒ) = \frac{ΒΜ \cdot ΑΗ}{2}$ και στα υπόλοιπα (34%) συνδέει ένα γεωμετρικό αντικείμενο με ένα αλγεβρικό, όπως για παράδειγμα $(ΑΒΓΔ) = 18 \cdot 15$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι στα δύο τρίτα των περιπτώσεων χρήσης του συμβόλου η χρήση του γίνεται για να συνδέσει / συσχετίσει αντικείμενα του ίδιου είδους.

6.2.2 Γ’ Γυμνασίου

Στο σχολικό βιβλίο της Γ’ Γυμνασίου η μελέτη αφορά την παράγραφο 1.1 – ισότητα τριγώνων – από το Β’ μέρος. Σε αυτή την παράγραφο γίνεται χρήση του συμβόλου 123 φορές, με τις 14 από αυτές το σύμβολο να χρησιμοποιείται σε μια μαθηματική έκφραση πάνω από μία φορά. Σε όλες τις περιπτώσεις το «=» χρησιμοποιείται στη Γεωμετρία. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων το ίσον συνδέει δύο γεωμετρικά αντικείμενα (88%), στο 12% συνδέει ένα γεωμετρικό και ένα αλγεβρικό αντικείμενο ενώ δε γίνεται καθόλου χρήση που να συνδέει δύο αλγεβρικά αντικείμενα. Στις περιπτώσεις που συνδέει ένα γεωμετρικό με ένα αλγεβρικό αντικείμενο αυτό συμβαίνει γιατί δίνονται τα μήκη των πλευρών των τριγώνων και οι γωνίες των τριγώνων σε μοίρες, π.χ. σε αυτή την περίπτωση που δίνεται το σχήμα



Εικόνα 43 – Γ’ Γυμνασίου, σελ. 188

στο κείμενο που ακολουθεί αναγράφεται $ΔE = 4cm, \hat{E} = 70^o$. Η χρήση του ίσον είναι σχεσιακή στο 80% των περιπτώσεων ενώ στο υπόλοιπο 20% λειτουργική.

6.2.3 Α’ Λυκείου (Γεωμετρία)

Από το βιβλίο Γεωμετρίας της Α’ Λυκείου μελετήσαμε όλο το 3^o κεφάλαιο που αφορά τα τρίγωνα. Η έκταση αυτού του κεφαλαίου είναι μεγαλύτερη των εδάφιων των σχολικών εγχειριδίων της Β’ και Γ’ Γυμνασίου που αντίστοιχα μελετήθηκαν. Η χρήση του συμβόλου του ίσον έγινε 449 φορές, οι 413 αφορούσαν την χρήση του «=» μία φορά σε κάθε μαθηματική έκφραση ενώ οι υπόλοιπες 36 πάνω από μία φορά. Όλες τις φορές που χρησιμοποιήθηκε το ίσον έγινε αποκλειστικά στη Γεωμετρία, στο 96% των περιπτώσεων η χρήση είναι σχεσιακή ενώ λειτουργική μόνο στο 4%. Εδώ βλέπουμε το ίσον να συνδέει σε ποσοστό 95% δύο γεωμετρικά αντικείμενα και μόλις 5% ένα γεωμετρικό με ένα αλγεβρικό αντικείμενο, σε καμία περίπτωση δε συνδέεται ένα αλγεβρικό αντικείμενο με ένα άλλο αλγεβρικό αντικείμενο.

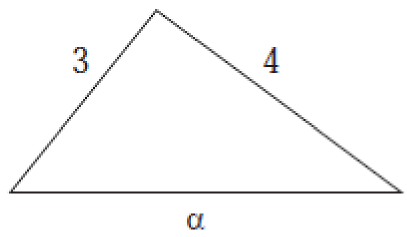
Σε αυτό το βιβλίο (Γεωμετρία Α’ λυκείου) βλέπουμε να γίνεται και μια πιο λεπτομερής κατηγοριοποίηση της ύλης:

- θεωρία (κυρίως κείμενο), χρήση του ίσον 34% των συνολικών περιπτώσεων
- εφαρμογή, χρήση του ίσον 22%
- παράδειγμα, χρήση του ίσον 0%

- πρόβλημα, χρήση του ίσον 8%
- άσκηση, χρήση του ίσον 26%
- δραστηριότητα, χρήση του ίσον 0%
- παρατήρηση, χρήση του ίσον 2%
- σχόλιο, χρήση του ίσον 0%
- ανακεφαλαίωση, χρήση του ίσον 6%

Στα βιβλία της Β' και Γ' Γυμνασίου οι κατηγορίες είναι σαφώς πιο λίγες.

Στο Λύκειο τα μαθηματικά γίνονται πιο αφαιρετικά και αυτό διακρίνεται και στη Γεωμετρία, π.χ. βλέποντας τα τρίγωνα να μην έχουν μονάδες μέτρησης μήκους ή γωνίας στα στοιχεία τους.



Εικόνα 44 – Α' Λυκείου Γεωμετρία, σελ. 63 (άσκηση)

Αυτός είναι ο λόγος που η χρήση του συμβόλου του ίσον ανάμεσα μόνο σε γεωμετρικά αντικείμενα αυξάνεται όσο οι σχολικές τάξεις διαδέχονται η μία την άλλη, ενώ η χρήση του ανάμεσα σε γεωμετρικό με αλγεβρικό αντικείμενο και ανάμεσα σε δύο αλγεβρικά αντικείμενα μειώνεται. Στα αναφερθέντα βιβλία δεν γίνεται αναφορά για τη διαφορά χρήσης του ίσον ανάμεσα σε Άλγεβρα και Γεωμετρία.

Στο κύριο μέρος του βιβλίου Γεωμετρίας της Α' Λυκείου πουθενά δεν χρησιμοποιείται το σύμβολο της ισότητας ανάμεσα σε δύο τρίγωνα, δηλαδή δε συναντάμε πουθενά τη λανθασμένη έκφραση $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$. Πρώτη φορά συναντάμε κάτι τέτοιο στις υποδείξεις (σύντομες απαντήσεις των αποτελεσμάτων) των άλυτων ασκήσεων. Αυτή η χρήση καταδεικνύει ότι γίνεται προς συντόμευση, κάτι που φαίνεται να είναι εκτός πλαισίου θεωρίας και τρόπου ανάπτυξης και διάρθρωσης του κύριου μέρους του βιβλίου. Στις υποδείξεις των ασκήσεων του τρίτου κεφαλαίου γίνεται χρήση του «=» 24 φορές, εκ των οποίων οι 15 (63%) κάνουν χρήση του συμβόλου όπως και στο κυρίως μέρος του βιβλίου ενώ στις υπόλοιπες 9 το ίσον χρησιμοποιείται με λάθος τρόπο για να συνδέσει δύο τρίγωνα (37%).

6.3 Συνεντεύξεις – Συζήτηση

Οι συνεντεύξεις στην παρούσα ερευνητική προσπάθεια πραγματοποιήθηκαν σε πέντε εκπαιδευτικούς: τον Ανδρέα, τον Βασίλη, τον Γρηγόρη, τη Δήμητρα και την Ελένη (τυχαία επιλογή ονομάτων). Το ηλικιακό εύρος τους ήταν 40 έως 51 ετών, είχαν εκπαιδευτική εμπειρία σε σχολείο πάνω από δέκα έτη ενώ συνυπολογίζοντας και την εργασιακή εμπειρία τους στην παρεκπαίδευση εργάζονται ως εκπαιδευτικοί γύρω στα είκοσι χρόνια. Ο Γρηγόρης και η Δήμητρα είχαν και μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών από το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών (ΠΜΣ) στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Η ανάλυση των συνεντεύξεων έδειξε ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί ήταν σε θέση να διακρίνουν τη διαφορά στην χρήση του ίσον ανάμεσα στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία

Δήμητρα:

> «Όχι, εδώ δεν είναι το ίδιο. Για το 10 (Δήμητρα, ερώτηση 10, γραμμή 232)»

δυσκολεύτηκαν όμως να εντοπίσουν τη διαφορετική χρήση του συμβόλου αποκλειστικά στη Γεωμετρία. Σε πολλά σημεία των συνεντεύξεων οι εκπαιδευτικοί στάθηκαν στην χρήση του ίσον σε μια εξίσωση και το αντιπαραθέτουν με την χρήση αυτού στη Γεωμετρία. Σε πιθανά μελλοντικές ερευνητικές προσπάθειες που θα πραγματοποιηθούν θα ήταν πολύ χρήσιμο να δημιουργηθεί ένας πίνακας / ένα εργαλείο κατηγοριοποίησης του συμβόλου του ίσον που να αφορά αποκλειστικά τη Γεωμετρία, δηλαδή κάτι αντίστοιχο με την έρευνα των Molina και συν. 2010. Στις απαντήσεις τους, οι τέσσερις από τους πέντε εκπαιδευτικούς κάνουν λόγο για τη διαδικασία της μετατόπισης ενός σχήματος και της επίθεσης του σε ένα άλλο, αυτό φανερώνει μια βασική διαφορά ανάμεσα στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία, στη Γεωμετρία αυτή η μεταφορά υπονοεί ότι η ισότητα είναι μια διαδικασία και όχι απλά μια λειτουργική χρήση του ίσον. Αν και κάτι τέτοιο δεν ειπώθηκε ευθέως από κανέναν εκπαιδευτικό φαίνεται να μπορούν να το κατανοήσουν. Χαρακτηριστικά ο Γρηγόρης αναφέρει:

> «ΑΒ=ΑΓ ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων, αυτή προϋποθέτει μετατόπιση του ενός τμήματος πάνω στο άλλο (Γρηγόρης, ερώτηση 2, γραμμή 44) … ισότητα τριγώνων δε σημαίνει ίσα μέτρα (Γρηγόρης, ερώτηση 2, γραμμή 48)».

Άλλη διαφορά που εντόπισαν οι εκπαιδευτικοί είναι ότι τα θέματα που πραγματεύεται η Γεωμετρία του Λυκείου είναι πιο αφηρημένα αφού τα σχήματα δεν έχουν μονάδες μέτρησης, όπως επισημάναμε προηγουμένως.

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν λέξεις ή εκφράσεις που αφορούσαν το ίσον όπως: «καθορίζει ότι είναι μονάδα μέτρησης (Ανδρέας, ερώτηση 2, γραμμή 137), διεκπαιρεωτικά (Βασίλης, γραμμή 224) ισότητα μόνο για εξυπηρέτηση (Γρηγόρης, γραμμή 62), πρακτικό (Γρηγόρης, γραμμή 68), πρακτική (Δήμητρα, γραμμή 138)». Αυτές οι εκφράσεις δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί είναι σε θέση να κατηγοριοποιήσουν το ίσον, δεν έχουν όμως το υπόβαθρο αφού δεν έχουν διαβάσει σχετική βιβλιογραφία.

Όλοι οι εκπαιδευτικοί παρατηρούν ότι η έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία όπως και το σύμβολο του ίσον δημιουργούν σύγχιση στους μαθητές. Αυτό φαίνεται να το υποστηρίζουν ως επακόλουθο της πεποίθησης που υπάρχει ότι η Γεωμετρία δυσκολεύει τους μαθητές. Παρατηρείται λοιπόν, μια διόγκωση των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με την ισότητα στην Άλγεβρα. Η πεποίθηση των εκπαιδευτικών οφείλεται στο ότι οι μαθητές έρχονται σε επαφή πρώτα με την Άλγεβρα και ύστερα με τη Γεωμετρία. Ας δούμε μερικά κρίσιμα σημεία των συνεντεύξεων που συνηγορούν σε αυτά που αναφέραμε:

> «μπερδεύονται, ειδικά στη Γεωμετρία γίνεται πανικός (ερώτηση 3, γραμμή 54) … Μπερδεύουν το ίσον της παράστασης με το ίσον της εξίσωσης, με το ίσον του τριγώνου, τα μπερδεύουν ναι. Θα αντιμετωπίσουν δυσκολίες κατανόησης, ναι (Βασίλης, ερώτηση 3, γραμμή 55)»

> «αυτό που θα πω είναι ότι οι μαθητές δυσκολεύονται πάρα πολύ στη Γεωμετρία και δεν ξέρω αν έχει επηρεάσει αυτή η έννοια του συμβόλου ή όχι (ερώτηση 3, γραμμή 90) … για να είμαι ειλικρινής δεν το είχα σκεφτεί ποτέ αυτό, ότι μπορεί να φταίει το ίσον (Δήμητρα, ερώτηση 3, γραμμή 103)»

«Ναι ξεκάθαρα. Εδώ μπορώ να σου πω ας πούμε τρία πραγματάκια. Καταρχήν τα παιδιά όταν βλέπουν στην άλγεβρα Χ=Ψ ας πούμε , καταλαβαίνουμε για τις αριθμητικές τιμές του Χ και Ψ δηλαδή όταν βλέπουμε μεταβλητές πιστεύουμε ότι μέσα κρύβονται μόνο νούμερα. Δεν είναι σωστό δεν είναι σωστή αντίληψη . Για παράδειγμα όταν λες η συνάρτηση είναι μια διαδικασία που αντιστοιχίζει κάποια στοιχεία ενός συνόλου που ανήκουμε ένα σύνολο του Χ κάθε στοιχεία του Χ σε ένα μόνο στοιχείο του Ψ. Μετά τα στοιχεία του Ψ μπορεί να είναι παπούτσια που αντιστοιχίζονται σε πόδια. Δεν είναι ανάγκη να είναι αριθμοί . Δηλαδή υπάρχει ένα επιστημονικό εμπόδιο εδώ στους μαθητές το οποίο είναι ποιο; Νομίζουμε ότι τα πάντα είναι αριθμοί. Κι επειδή έχουμε συνηθίσει την άλγεβρα πολύ πιο νωρίς και τη γεωμετρία τη διδάσκουμε πολύ αργά έχουμε μάθει στην άλγεβρα έχουμε μάθει με αριθμούς που το Χ = 5 , είναι αριθμός απλά το βάζουμε με ένα γράμμα , πιστεύουμε ότι όλα τα σύμβολα είναι αριθμοί. Και πιστεύω αυτό το εμπόδιο έρχεται από δω(Γρηγόρης, ερώτηση 4, γραμμή 145)»

«Δηλαδή το 5ο παράδειγμα ας πούμε χρησιμοποιείται το ίσον πολύ διαφορετικά από ότι χρησιμοποιείται στα 4 πρώτα (Δήμητρα, ερώτηση 2, γραμμή 69)»

«Και η χρήση του είναι διαφορετική Η άλγεβρα μπαίνει μέσα στη γεωμετρία για να λύσει τις ασκήσεις (Ελένη, ερώτηση 10, γραμμή 212)»

Κάτι αναπάντεχο ήταν ότι ο Ανδρέας στη συνέντευξή του αναφέρει

«Τα παιδιά στην Άλγεβρα δεν έχουν πρόβλημα με το ίσον. Τα προβλήματα που εντοπίζω εγώ είναι στη Γεωμετρία κι εκεί γίνεται ο μέγας χαμός (Ανδρέας, ερώτηση 9, γραμμή 273)».

Εδώ γεννάται ένα ερώτημα, ποιες θα ήταν οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών αν έλλειπε το 5^{ο} απόσπασμα από την συνέντευξη; Θα μπορούσαν να εντοπίσουν διαφορές στην χρήση του συμβόλου του ίσον σε αποσπάσματα που θα περιείχαν καθαρά Γεωμετρία;

Στο ερώτημα αν η ισότητα στη Γεωμετρία δημιουργεί περαιτέρω προβλήματα και στην ισότητα στην Άλγεβρα, οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να σκεφτούν αντίστροφα. Όπως φάνηκε, με αυτή την ερώτηση οι εκπαιδευτικοί εκπλαγήκαν ευχάριστα. Η απάντηση που εκλάβαμε ήταν ένα ξεκάθαρο όχι, Γρηγόρης:

> «πιστεύω ότι , δηλαδή κατά 99% η άλγεβρα δημιουργεί πρόβλημα στη γεωμετρία και όχι το ανάποδο (Γρηγόρης, ερώτηση 5, γραμμή 178)».

Τρεις εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα με το σύμβολο του ίσον ανάλογα: πρώτον την ηλικία και δεύτερον το δείκτη νοημοσύνης. Μάλιστα η Ελένη πιστεύει ότι ένας μαθητής μέχρι το τέλος της Γ' Γυμνασίου θα πρέπει να έχει κατανοήσει την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία, επίσης συνδυάζει και την ηλικία και το επίπεδο, λέει:

> «Πρέπει να τα ξεκαθαρίσω. Πρέπει να έχεις και λίγο καλή αντίληψη και να καταλαβαίνεις τι είναι το ευθύγραμμο τμήμα , ποιο είναι το μήκος ποια είναι η γωνία την έννοια της γωνίας το άνοιγμά της πόσο είναι (Ελένη, ερώτηση 3, γραμμή 68) … Εγώ στην εφαρμογή 6 στη Β' γυμνασίου σου λέω ότι λέω πραγματικά μπράβο αν κατανοήσουνε. Ας είναι Β γυμνασίου βλέπεις ποια είναι η διαφορά; Μετά είναι Γ' γυμνασίου και μετά η πρώτη λυκείου. Στην πρώτη λυκείου όλα είναι ξεκαθαρισμένα (Ελένη, ερώτηση 3, γραμμή 74)»

Τέσσερις στους πέντε εκπαιδευτικούς ακολουθούν στην διδακτική πρακτική την χρήση οργάνων και τη διαδικασία της επίθεσης, τις περισσότερες φορές με ένα ριζόχαρτο ή όπως αυτή φαίνεται μέσω λογισμικού όπως το GeoGebra. Χρησιμοποιούν δηλαδή πρακτικά παραδείγματα, ίσως και στον πίνακα, και προσπαθούν όλα τα παιδιά να έχουν ενεργό συμμετοχή. Μόνο ένας εκπαιδευτικός, ο Βασίλης, προσπαθεί να εξηγήσει την έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία λεκτικά, η πρακτική του δηλαδή σε αντίθεση με των υπολοίπων δεν ακολουθεί σύγχρονες μεθόδους διδασκαλίας, Βασίλης:

> ««Προσπαθείς να τους εξηγήσεις ότι κάποια πράγματα είναι πιο αφηρημένα και κάποια πράγματα είναι συγκεκριμένα και χαρακτηριστικά είναι από τον τρόπο (Βασίλης, ερώτηση 6, γραμμή 91)»

Στη συνέντευξη υπάρχει η εξής ερώτηση:

Στο σχολικό βιβλίο συναντάμε πολύ συχνά τις δύο ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις που και οι δύο περιέχουν το σύμβολο του ίσον:

α)$\widehat{A} = 90^o$

β) $\widehat{A} = 1∟$

Εντοπίζετε διαφορές στην χρήση του συμβόλου του ίσον ανάμεσα στις δύο αυτές περιπτώσεις;

Σε αυτή την ερώτηση κανένας εκπαιδευτικός δεν έδωσε μια συγκεκριμένη απάντηση, όμως η διδακτική πρακτική της Δήμητρας δίνει ένα πολύ καλό παράδειγμα ώστε οι μαθητές να μπορέσουν να αντιληφθούν τις δύο εκφράσεις, Δήμητρα:

> «Αν σου πω ότι το χρησιμοποιώ κι εγώ; Μπορεί να βάλω ίσον μια ορθή και ίσον 90, για να τα βλέπουνε και τα δύο μαζί (Δήμητρα, ειδικό θέμα Α, γραμμή 254)»

Βέβαια αυτό δεν παύει να αφήνει το ερώτημα αναπάντητο και μας δημιουργεί απορίες για το τι απάντηση θα έδινε ένας εκπαιδευτικός σε ένα μαθητή που θα του έθετε αυτό το ερώτημα. Στην απάντηση της Ελένης βλέπουμε και μια σύγχυση της ίδιας όσον αφορά τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται στις δύο εκφράσεις, φαίνεται η εκπαιδευτικός να κατατάσσει στην ίδια κατηγορία όλα τα σύμβολα και φαίνεται να απομακρύνεται αρκετά από την απάντηση που θα περιμέναμε, Ελένη:

«Το L είναι η ορθή. Πρέπει να δουν ότι χρησιμοποιούμε και σύμβολα, πώς είναι το διάφορο πώς είναι το μεγαλύτερο πώς είναι το μικρότερο πώς είναι η ορθή (Ελένη, ειδικό θέμα Α, γραμμή 218)».

Ο Γρηγόρης, χωρίς να δίνει μια σαφή απάντηση, φαίνεται να κινείται προς τη σωστή κατεύθυνση, δίνει μια απάντηση που επιδέχεται επιπλέον ανάλυσης

> «στην περίπτωση Α υπάρχει ισότητα μέτρων, ενώ στην περίπτωση Β υπάρχει ισότητα γεωμετρικών αντικειμένων (Γρηγόρης, ειδικό θέμα Α, γραμμή 291)».

Οι εκπαιδευτικοί δεν έδωσαν κάποια ακριβή διδακτική συμβουλή στους συναδέλφους τους όσον αφορά το σύμβολο του ίσον στη Γεωμετρία, επίσης στις συμβουλές προς την ομάδα σχεδιασμού του βιβλίου καθηγητή είπαν ότι θα ήθελαν περισσότερες ασκήσεις και εφαρμογές αλλά και κάποια παραδείγματα, τα οποία θα μπορούσαν να μπουν και στο βιβλίο μαθητή, με εφαρμογές που θα τονίζουν τη διαφορά ανάμεσα στην χρήση του ίσον στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Εμείς θα προσθέταμε ότι θα μπορούσε το βιβλίο να περιέχει και εφαρμογές που να τονίζουν τις διαφορές και στη Γεωμετρία. Τέτοιου είδους παρεμβάσεις στις οδηγίες μπορούν εύκολα να ενταχθούν στο πρόγραμμα του Γυμνασίου γιατί όπως είπαν και οι εκπαιδευτικοί εκεί υπάρχουν τα περιθώρια του χρόνου αλλά και εκεί γίνεται η πρώτη επαφή των μαθητών με την έννοια της ισότητας.

Ένα συχνό λάθος που κάνουν και οι πέντε εκπαιδευτικοί, όταν θέλουν να δηλώσουν την ισότητα δύο τριγώνων, είναι ότι χρησιμοποιούν τη μαθηματική έκφραση $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}'\widehat{\mathrm{B}'}\Gamma'$. Στη σχετική ερώτηση, δεν μπορούσαν να δικαιολογήσουν την απουσία μιας τέτοιας έκφρασης από το κυρίως κείμενο των σχολικών βιβλίων. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών ήταν επιφανειακές, χαρακτηριστικά:

> «Δεν το έχουμε πουθενά αυτό; … Γιατί εγώ στον πίνακα το χρησιμοποιώ συνέχεια αυτό … Μου έκανε εντύπωση τώρα, πραγματικά δεν το ‘χα συνειδητοποιήσει ότι δεν … Δεν το ξέρα ότι δεν το βάζουνε. Μου έκανε εντύπωση γιατί δεν θα το βάζανε καθόλου αλλά λες ότι το χρησιμοποιούν στο τέλος. Με βρίσκεις αδιάβαστη (Δήμητρα, αποσπάσματα από ειδικό θέμα Β, γραμμές 285 – 322)»

Αφού πείστηκαν ότι τέτοια μαθηματική έκφραση δεν υπάρχει στο βιβλίο, αιτιολογήθηκαν ότι το κάνουν για οικονομία χρόνου και ότι προφορικά χρησιμοποιούν τη σωστή έκφραση, μόνο η Ελένη είπε ότι το γράφει ολογράφως αλλά και με το λάθος τρόπο. Βέβαια εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι και το ίδιο το βιβλίο στις λύσεις των ασκήσεων χρησιμοποιεί τέτοιου είδους εκφράσεις στις λύσεις των ασκήσεων, κάτι που ωθεί τόσο τους εκπαιδευτικούς όσο και τους μαθητές στην παρανόηση της σωστής χρήσης. Αυτές οι εκφράσεις πρέπει να αφαιρεθούν από το σχολικό βιβλίο.

Από τους πέντε εκπαιδευτικούς, οι τέσσερις χρησιμοποιούν το βιβλίο ως πηγή ασκήσεων και για να διαβάζουν από εκεί την θεωρία με έναν πιο αυστηρά μαθηματικό τρόπο σε σχέση με αυτόν της διδασκαλίας στην τάξη. Η Δήμητρα κάνει πολύ περιορισμένη χρήση του βιβλίου. Όλοι οι εκπαιδευτικοί δίνουν φυλλάδια με επιπλέον ασκήσεις στους μαθητές, άρα το βιβλίο θα μπορούσε να περιέχει και πιο πολλές ασκήσεις, κυρίως για εμπέδωση της θεωρίας.

Αναπάντεχα λίγοι ήταν οι εκπαιδευτικοί που δίνουν βάση στις επίσημες οδηγίες του υπουργείου. Μόνο ένας στους πέντε φάνηκε ότι έχει διαβάσει εις βάθος τις οδηγίες και ήταν σε θέση να τις κρίνει. Αυτός ήταν και ο μόνος που γνώριζε αν υπάρχουν συγκεκριμένες οδηγίες σε ότι αφορά το ίσον στη Γεωμετρία. Το υπουργείο θα πρέπει να δώσει ιδιαίτερη βαρύτητα για να αντιστρέψει αυτή την πεποίθηση των εκπαιδευτικών.

Η εικόνα που άφησαν οι εκπαιδευτικοί είναι ότι με κατάλληλη προετοιμασία θα μπορούσαν να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις ενός τόσο λεπτού μαθηματικού θέματος όπως η έννοια της ισότητας στη Γεωμετρία και η χρήση του συμβόλου του ίσον. Η πεποίθηση μας αυτή ενισχύεται και από την εργασία των Fauskanger και Mosvold, η οποία ερεύνησε τις γνώσεις των εκπαιδευτικών στο συγκεκριμένο θέμα στην Άλγεβρα και τα αποτελέσματα ήταν θετικά. Αν λάβουμε υπόψιν μας και τις έρευνες των Asquith (2007), Behr (1980), Kieran (1981) και Seo & Ginsburg (2003) μπορούμε να πιστεύουμε ότι αν τα σχολικά εγχειρίδια και οι οδηγίες εμπλουτιστούν, οι εκπαιδευτικοί θα αποκτήσουν τις απαραίτητες γνώσεις και οι περισσότεροι μαθητές θα κατανοήσουν τις διάφορες χρήσεις του ίσον και θα αποφύγουν εμπόδια και παρανοήσεις.

6.4 Μελλοντική Έρευνα

Βάση των περιορισμών που είχε η έρευνα αυτή και αναλύθηκαν στο εδάφιο 3.3, προτείνουμε στο μέλλον να διεξαχθούν επιπλέον έρευνες οι οποίες θα προσπαθήσουν να άρουν αυτούς τους περιορισμούς. Όσον αφορά την ανάλυση των σχολικών βιβλίων προτείνουμε αυτή να διευρυνθεί συμπεριλαμβάνοντας όλα τα κεφάλαια που είναι στον σχολικό προγραμματισμό κάθε τάξης, όπως επίσης και το βιβλίο με τις λύσεις των ασκήσεων της Α' Λυκείου που δίνεται στους μαθητές. Σημαντική βοήθεια θα προσέφερε η σχεδίαση ενός πίνακα κατηγοριοποίησης των διαφορετικών χρήσεων του συμβόλου του ίσον στη Γεωμετρία στα πρότυπα της κατηγοριοποίησης των Molina, Castro και Castro (2009). Αυτή η κατηγοριοποίηση θα ήταν δυνατόν να επιτευχθεί ύστερα από ερωτήσεις σε εκπαιδευτικούς, οι οποίοι θα ήταν γνώστες του θέματος και ενήμεροι επί της αναφερθείσας βιβλιογραφίας.

Οι συνεντεύξεις προτείνουμε να διεξαχθούν σε ένα πολύ μεγαλύτερο δείγμα. Λόγω του όγκου εργασίας που θα προέκυπτε, ο νέος ερευνητής θα μπορούσε να διαμερίσει τις συνεντεύξεις σε δύο τρία ή περισσότερα μέρη. Για παράδειγμα στο πρώτο μέρος θα μπορούσε να ρωτήσει μόνο για τις αντιλήψεις και τις γνώσεις τους σχετικά με την χρήση του ίσον, στο δεύτερο να ερευνήσει τον τρόπο χρήσης του συμβόλου κατά τη διδακτική πρακτική τους και στο τρίτο να αναλύσει τις σημειώσεις που δίνουν στους μαθητές. Επίσης όπως και στην έρευνα των Fauskanger και Mosvold θα μπορούσαν να δοθούν ερωτηματολόγια στους εκπαιδευτικούς εστιασμένα στις γνώσεις τους για το σύμβολο του ίσον στη Γεωμετρία και με ερωτήσεις κλειστού τύπου κάνοντας τη στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων πιο εύκολη. Επίσης στο κομμάτι που αφορά τον τρόπο διδασκαλίας της ισότητας στη Γεωμετρία είναι πολύ χρήσιμο για εξαγωγή συμπερασμάτων η βιντεοσκόπηση της διδασκαλίας εκπαιδευτικών και η ανάλυση της.

Σε συμφωνία με τους Moutsios-Rentzos, Kritikos & Kalavasis (in press), οι μελλοντικές έρευνες θα ήταν χρήσιμο να ασχοληθούν και με τους μαθητές και τις πεποιθήσεις τους για την ισότητα στη Γεωμετρία. Ένας μελλοντικός ερευνητής θα μπορούσε να παραδειγματιστεί από τον τρόπο που οργάνωσαν την ερευνά τους οι Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil και Stephens (2008) και να συντάξει παρόμοια ερωτηματολόγια με ερωτήσεις και προτροπές προς τους μαθητές.

7. Συμπεράσματα

7.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα μελέτη θέσαμε σε τρία ερευνητικά ερωτήματα:

1. Διαφέρει η χρήση του συμβόλου του ίσον στη Γεωμετρία σε σχέση με την Άλγεβρα;
2. Ποια είναι η γνώμη των εκπαιδευτών και πως αντιμετωπίζουν το σύμβολο του ίσον οι εκπαιδευτικοί στη Γεωμετρία, πως βιώνουν την ποικιλία χρήσεων του συμβόλου στη Γεωμετρία;
3. Πως εμφανίζεται και χρησιμοποιείται το σύμβολο του ίσον στα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας, τι θα πρότειναν οι εκπαιδευτικοί σύμφωνα με την εμπειρία τους; Είναι οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί ενημερωμένοι;

Η μελέτη κινήθηκε σε τρεις βασικούς άξονες:

1. Παρουσίαση ερευνητικών άρθρων που αφορούσαν την έννοια της ισότητας και την χρήση του συμβόλου του ίσον. Αυτά τα άρθρα αφορούσαν την Άλγεβρα, στη Γεωμετρία η παγκόσμια βιβλιογραφία παρουσιάζει έλλειψη εργασιών.
2. Ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων, των επίσημων οδηγιών που δίνει το υπουργείο προς τους εκπαιδευτικούς και το αναλυτικό πρόγραμμα.
3. Ανάλυση των γνώσεων και των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών πάνω στο συγκεκριμένο ζήτημα. Η ανάλυση αυτή έγινε μέσω συνεντεύξεων που πήραμε από 5 εκπαιδευτικούς.

Η μελέτη των άρθρων που αφορούσαν την ισότητα στην Άλγεβρα έδειξε ότι το σύμβολο του ίσον και ο τρόπος χρήσης του δημιουργεί πολλές δυσκολίες και παρανόηση στους μαθητές. Μέσω των συνεντεύξεων με τους εκπαιδευτικούς τα ίδια προβλήματα είδαμε ότι υπάρχουν και στη Γεωμετρία. Οι εκπαιδευτικοί δεν συνέδεσαν τις παρανοήσεις της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα, ισχυρίζονται ότι αν και η επαφή με την έννοια της ισότητας στην Άλγεβρα προηγείται της Γεωμετρίας, αυτό δεν επηρεάζει την κατανόηση της χρήσης του ίσον στη Γεωμετρία.

7.2 Σχολικά βιβλία – Συμπεράσματα

Στα σχολικά εγχειρίδια παρατηρήσαμε εκτενή χρήση του συμβόλου του ίσον. Τα σχολικά εγχειρίδια δεν κάνουν λόγο για τη διαφορετική χρήση του ίσον στις διάφορες περιπτώσεις χρήσης του, για τις κύριες διαφορές που αυτή έχει ανάμεσα στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία αλλά ούτε και για τις διαφορές που αυτό εμφανίζει κατά τη χρήση του αποκλειστικά στη Γεωμετρία. Το βιβλίο καθηγητή δίνει ενδιαφέροντα ιστορικά στοιχεία που αφορούν την έννοια της ισότητας πχ κάνει αναφορές για την έννοια της ισότητας στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ή στα «θεμέλια της Γεωμετρίας» του Hilbert, όμως το βιβλίο δεν περιλαμβάνει αναφορές για την χρήση του ίσον.

Στη Β' Γυμνασίου η χρήση του συμβόλου είναι σχεσιακή σε ποσοστό 13%, στη Γ' Γυμνασίου η χρήση είναι σχεσιακή σε ποσοστό 80% ενώ το ποσοστό ανέρχεται στο 96% στην Α' Λυκείου. Βλέπουμε δηλαδή ότι όσο ένας μαθητής ανεβαίνει σχολική βαθμίδα τόσο η λειτουργία του συμβόλου από απλώς λειτουργική και άρα σχετικά εύκολη στην κατανόηση, γίνεται σχεσιακή και άρα πιο δύσκολη στην κατανόηση.

Μια ακόμα παρατήρηση έχει να κάνει με την χρήση του συμβόλου ανάμεσα σε:

i. δύο γεωμετρικά αντικείμενα
ii. ένα γεωμετρικό αντικείμενο και ένα αλγεβρικό αντικείμενο
iii. δύο αλγεβρικά αντικείμενα

Συμπεραίνουμε ότι όσο οι σχολικές βαθμίδες ανεβαίνουν παρατηρούμε μια ολοένα και μεγαλύτερη χρήση του συμβόλου ανάμεσα σε δύο γεωμετρικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα στη Β' Γυμνασίου η χρήση είναι μόλις 23%, στη Γ' Γυμνασίου κάνει ένα άλμα στο 88% και τέλος στην Α' Λυκείου φτάνει στο 95%.

Στις απαντήσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας της Α' Λυκείου γίνεται λανθασμένη χρήση του ίσον (γράφει $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$) με συνέπεια να δημιουργείται σύγχιση τόσο στους εκπαιδευτικούς όσο και στους μαθητές. Στις 24 φορές που γίνεται χρήση του συμβόλου στις 9 είναι λανθασμένη. Πέρα από τη σύγχιση όμως, δίνεται μια έμμεση προτροπή στην χρήση αυτής της λανθασμένης χρήσης του συμβόλου.

7.3 Εκπαιδευτικοί – Συμπεράσματα

Οι εκπαιδευτικοί είναι σε θέση να εντοπίσουν τη διαφορά στην χρήση του ίσον ανάμεσα στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Στη Γεωμετρία οι τέσσερις από τους πέντε εκπαιδευτικούς ανέφεραν τη διαδικασία της επίθεσης. Αυτή φαίνεται να είναι και η κύρια διαφορά για τους εκπαιδευτικούς ανάμεσα σε Άλγεβρα και Γεωμετρία δηλαδή η επίθεση του ενός σχήματος στο άλλο δείχνει ότι η ισότητα στη Γεωμετρία αποδεικνύεται μέσω μιας διαδικασίας. Μολαταύτα στα αποσπάσματα που δόθηκαν στους εκπαιδευτικούς, αυτοί δε βρήκαν διαφορές στη χρήση του ίσον σε διαφορετικές εκφράσεις αποκλειστικά στη Γεωμετρία. Η μη εξοικείωση των εκπαιδευτικών με ορολογία όπως αυτή που παρουσιάστηκε στα ερευνητικά άρθρα που αφορούσαν την Άλγεβρα, δείχνει να γεννά την ασάφεια στις απαντήσεις τους αναφορικά με την χρήση του ίσον στη Γεωμετρία, όπως συνέβη όταν ρωτήθηκαν για τις διαφορές ανάμεσα στις εκφράσεις $\widehat{A} = 90^{o}$ και $\widehat{A} = 1 \llcorner$.

Τέσσερις στους πέντε εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία της εισαγωγής της ισότητας στη Γεωμετρία χρησιμοποιούν πρακτικά παραδείγματα, κάνοντας χρήση γεωμετρικών οργάνων, χρησιμοποιώντας ριζόχαρτο ή χρησιμοποιώντας λογισμικό όπως το GeoGebra. Όπως είπαν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί, αυτή η πρακτική φαίνεται να βοηθάει αρκετά τους μαθητές. Όπως είδαμε, τόσο από την υπάρχουσα βιβλιογραφία όσο και από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών, τα προβλήματα σχετικά με το ίσον στην Άλγεβρα υπάρχουν και εμφανίζονται και στη Γεωμετρία. Μάλιστα το φαινόμενο αυτό στη γεωμετρία οι εκπαιδευτικοί το παρατηρούν εντονότερα. Οι εκπαιδευτικοί δεν συνέδεσαν τις παρανοήσεις της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα, ισχυρίζονται ότι αν και η επαφή με την έννοια της ισότητας στην Άλγεβρα προηγείται της Γεωμετρίας, αυτό δεν επηρεάζει την κατανόηση της χρήσης του ίσον στη Γεωμετρία.

Μια ακόμα παρατήρηση που κάναμε μέσω των συνεντεύξεων είναι ότι οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν μελετήσει όσο προσεκτικά θα έπρεπε το σχολικό εγχειρίδιο π.χ. κανείς δεν είχε παρατηρήσει ότι απουσιάζει μια έκφραση όπως η $\frac{\Delta}{AB\Gamma} = \frac{\Delta}{A'B'\Gamma'}$, η οποία χρησιμοποιείται πολύ από τους ίδιους κατά τη διδασκαλία στην τάξη. Ουσιαστική αιτιολόγηση εκ μέρους των εκπαιδευτικών για την απουσία αυτής της έκφρασης δεν υπάρχει, οι απαντήσεις που πήραμε ήταν ασαφείς προδίδοντας και τη δική τους σύγχιση επί του θέματος. Η έκφραση αυτή ($\frac{\Delta}{AB\Gamma} = \frac{\Delta}{A'B'\Gamma'}$) δεν κρύβει κινδύνους μόνο για τους μαθητές αλλά και για τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι εμμέσως νομιμοποιούν τη χρήση της στις ασκήσεις που λύνουν στην τάξη και στις προσωπικές τους σημειώσεις που δίνουν στους μαθητές.

7.4 Συμπερασματικά Σχόλια

Από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών φάνηκε να κατανοούν ότι με την άνοδο των σχολικών βαθμίδων, τα μαθηματικά γίνονται όλο και πιο αφηρημένα. Άμεση συνέπεια αυτού είναι η χρήση του ίσον όλο και περισσότερο με τη σχεσιακή του ιδιότητα.

Αρνητικό είναι το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί δεν κάνουν χρήση του βιβλίου καθηγητή και στην εισαγωγή της ισότητας στη Γεωμετρία ενεργούν αυτόνομα (μόνο ένας από τους πέντε ακολουθούσε τις οδηγίες αυτού). Από τη βιβλιογραφία είδαμε ότι οι μαθητές χρειάζονται σαφείς οδηγίες που θα τους επιτρέψουν να ερμηνεύσουν και να κατανοήσουν το σύμβολο του ίσον και την χρήση του. Επίσης οι εκπαιδευτικοί, αν τους δοθούν ακριβείς οδηγίες και γνώσεις επί του θέματος, θα είναι σε θέση να λειτουργήσουν προς αυτή την κατεύθυνση. Συμπεραίνουμε λοιπόν την ανάγκη αναβάθμισης του βιβλίου του καθηγητή με ειδικές οδηγίες που σχετίζονται με την χρήση του ίσον στη Γεωμετρία (αλλά και στην Άλγεβρα). Η αναβάθμιση αυτή είναι απαραίτητη και λόγω του ότι οι εκπαιδευτικοί δίνουν ασαφείς απαντήσεις για τον τρόπο διδασκαλίας τους για την ισότητα στη Γεωμετρία και για τις συμβουλές προς τους συναδέλφους τους. Η συγγραφική ομάδα είναι απαραίτητο να μεριμνήσει για τις αλλαγές από τις μικρότερες τάξεις, εκεί δηλαδή που οι μαθητές έρχονται σε πρώτη επαφή με το σύμβολο του ίσον στη Γεωμετρία αλλά και στις υπόλοιπες τάξεις που πλέον η χρήση του συμβόλου θεωρείται γνωστή και στην ύλη προστίθενται επιπλέον γνώσεις όπως για παράδειγμα η ισότητα τριγώνων. Όπως προέκυψε, μέσω των συνεντεύξεων, από τον χρόνο που αφιερώνουν οι καθηγητές στο μάθημα, στο Γυμνάσιο και ιδίως στις δύο πρώτες τάξεις, υπάρχει διαθέσιμος χρόνος που μπορεί να αξιοποιηθεί για την εμπέδωση της ισότητας στη Γεωμετρία.

Ως γενικό συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι οι καθηγητές είναι σε θέση να κατανοήσουν τις διαφορετικές χρήσεις του ίσον ανάμεσα στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Όπως είδαμε στην ανάλυση των συνεντεύξεων και σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι εκπαιδευτικοί είναι ικανοί να κατανοήσουν τις διαφορές της χρήσης του συμβόλου του ίσον αποκλειστικά στη Γεωμετρία, αυτό θα επιτευχθεί αν τους δοθεί κατάλληλη υποστήριξη. Η υποστήριξη αυτή θα επιτευχθεί μέσω του βιβλίου καθηγητή, οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται πιο σαφείς οδηγίες για τη διδασκαλία της ισότητας στη Γεωμετρία από την πρώτη στιγμή που οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια έως και τις μεγαλύτερες τάξεις που βλέπουμε ότι οι παρανοήσεις συνεχίζουν να υπάρχουν. Το βιβλίο καθηγητή πρέπει να ανανεωθεί και συμπληρωθεί με τέτοιες οδηγίες ώστε να γίνει χρήσιμο στους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι έτσι θα αλλάξουν την εκτίμηση που του έχουν και θα το έχουν ως οδηγό στη διδασκαλία τους, πράγμα που τώρα δε συμβαίνει. Όσον αφορά τα σχολικά εγχειρίδια, οι διαφορές ανάμεσα στις χρήσεις του ίσον θα πρέπει να τονιστούν και να αποφεύγουν οι συγγραφείς λανθασμένες μαθηματικές εκφράσεις όπως η $\underset{AB\Gamma}{\Delta} = \underset{A'B'\Gamma'}{\Delta}$ που μελετήσαμε. Αυτή την έκφραση την χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί τόσο στον πίνακα όσο και σε προσωπικές σημειώσεις που δίνουν στους μαθητές όλων των τάξεων, τη συναντάμε στις υποδείξεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας στην Α’ Λυκείου.

8. Βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., & Δαμιανού, Χ. (2002). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων. Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2012). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2012). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σιδέρης, Π. (2007). *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α' Γενικού Λυκείου, Λύσεις των Ασκήσεων, Α' Τεύχος*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σιδέρης, Π. (2012). *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α' Τεύχος*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σιδέρης, Π. (2012). *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Β' Τεύχος*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σιδέρης, Π. (2000). *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου, Βιβλίο Καθηγητή*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2011). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου Βιβλίο Εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2011). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Βαρουχάκης, Ν., Αδαμόπουλος, Λ., Αλεξανδρής, Ν., Παπακωνσταντίνου, Δ., & Παπαμικρούλης, Α. (1983). *Μαθηματικά Α' Λυκείου, Άλγεβρα*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Βασιλείου, Ε. (2012). *Γεωμετρία για τη Διδακτική, Σημειώσεις*, Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Baroody, A., Ginsburg, H., & Waxman, B. (1983). *Children's Use of Mathematical Structure*. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 14, No. 3 (May, 1983), pp. 156-168

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, (1976). *How Children View Equality Sentences*. Washington: National Science Foundation

Duncan, C. (2015). *A Study of Mathematical equivalence: The Importance of the Equal Sign*. Louisiana: LSU Digital Commons

Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, P. (1999). *Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra*. Teaching Children Mathematics, 6(4), 56-60

Fauskanger, J., & Mosvold, R (2013). *Teacher's Mathematical Knowledge for Teaching Equality*. Proceedings of the 37th Conference of the International 2 -289 Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 289-296. Kiel, Germany: PME

Glaser, B., & Strauss, A. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994), *A cognitive gap between arithmetic and algebra*. Educational Studies in Mathematics 27: 59-78. Netherlans: Kluwer Academic Publishers.

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Evans, R. (2013). *Teaching the substitutive conception of the equals sign*. MATHEMATICS TEACHING 224 / SEPTEMBER 2011

Jones, I., & Pratt, D. (2012). *A Substituting Meaning for the Equals Signin Arithmetic Notating Tasks*. Journal for Research in Mathematics Education, 2012, 43 (1), pp. 2 - 33

Καραβασίλης, Γ., & Κοσύβας, Γ. (2016). *Όψεις κριτικής αποτίμησης του σχολικού βιβλίου μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου: το εγχειρίδιο υποστηρίζει δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας;*. Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών – Επιστημονικών Θεμάτων, Τεύχος 10ο, 68-84.

Κασσώπη, Ο., Κλιάππης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2006*). Μαθηματικά Στ' Δημοτικού, Βιβλίο Εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Κασσώπη, Ο., Κλιάππης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού.* Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Katz, V. (1998). *A History of Mathematics, An Introduction, Second Edition*. Reading: Addison Wesley Educational Publishers, Inc.

Kieran, C. (1981). *Concepts associated with the equality symbol*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. (2014). *Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations.* New York: National Council of Teachers of Mathematics

Knuth, E., Alibali, M., Hattikudur, S., McNeil, N., & Stephens, A. (2008). *The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades*. Abingdon: Taylor & Francis Group

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., & Stephens, A. (2005). *Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable*. Madison: ZDM 2005 Vol. 37

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., & Πνευματικός, Δ. (2010). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής, Βιβλίο Δασκάλου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., & Πνευματικός, Δ. (2010). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής, Πρώτο Τεύχος*. Αθήνα:Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Λεμονίδης, Χ. (2002). *Αριθμητισμός ή Μαθηματικός Γραμματισμός*. Προδιαγραφές Σπουδών για τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας, επιμ. Λ. Βεκρής & Ελ. Χοντολίδου -Αθήνα: ΓΓΕΕ-ΙΔΕΚΕ, σ. 119-138

Μαστρογιάννης, Α., & Μαλέτσκος, Α. (2007). *Η Μαθηματική Γλώσσα στα νέα διδακτικά εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου*. http://ipeir.pde.sch.gr/educonf/2/09ThetikesEpistimes/mastroyiannis maletskos/mastroyiannis-maletskos.pdf, 22/5/2009

Μπούσγου, Γ., & Ταμβακλής, Ι. (1978). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου, Τόμος Πρώτος*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). *Measure for Measure: What Combining Diverse Measures Reveals About Children's Understanding of the Equal Sign as an Indicator of Mathematical Equality*. Journal for Research in Mathematics Education 2012, Vol. 43, No. 3

McNeil, N., Grandau, L., Knuth, E., Alibali, M., Stephens, A., Hattikudur, S., & Krill, D. (2006). *Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help*. Abingdon: Taylor & Francis Group

Molina, M., Castro, E., & Castro E. (2009). *Elementary Students' Understanding of the Equal Sign in Number Sentences*. Electronic Journal of Research in Educational Psychology. ISSN. 1696-2095. No 17, Vol 7 (1) 2009, pp: 341 368. Spain

Molina, M., Castro, E., & Mason, J. (2008). *Elementary School Students' Approaches to Solving True/False Number Sentences*. PNA Revista De Invistigation en Didactica se la Mathematica, 2: 75-86

Moutsios-Rentzos, A., Kritikos, G., & Kalavasis, F. (in press). *Functions of operations and operands in school mathematics and physics: a complex interdisciplinary (de)mathematised phenomenology*. Proceedings of CIEAEM 69. Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)

Παπαμιχαήλ, Δ., Μπαλής, Σ., Γιαννίκος, Χ., Νοταράς, Δ., & Σολδάτος, Κ. (1985). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Πατεράκης, Α., Σταυρουλάκης, Γ., & Φωτόπουλος, Ε. (1985). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων

Στράντζαλος, Α. (2011). *Συμβολή στη Μελέτη των Γεωμετρικών Μετασχηματισμών από Ιστορική, Διδακτική και Μαθηματική Άποψη*, Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Saraswati, S., & Putri, R. (2015*). Supporting 7th Students' Understanding of Equal Sign "=" in Linear Equations with One Variable*. Journal on Mathematics Education Volume 7, No. 1, January 2016, pp. 19-30

Charmaz, K. (2006). *Constructing Grounded Theory: a Practice Guide through Qualitative Analysis*. London: Sage

Charmaz, K. (2003). Grounded theory. In: J. A. Smith (Ed.), *Qualitative Psychology: A practical guide to research methods* (pp. 81-110). London: Sage

Stephens, A., Knuth, E., Blanton, M., Isler, I., Gardiner, A., & Marum, T. (2013). *Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings*. The Journal of Mathematical Behavior

Τόγκας, Π., Πασσάς, Θ., & Νικολάου, Ν. (1962). *Αριθμητική δια τας Κατωτέρας Τάξεις των Γυμνασίων*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων

9. Παράρτημα

Σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας Α’ Λυκείου – Κεφάλαιο 3ο – Τρίγωνα

	Λέξη / έκφραση / σύμβολο	Σελίδα	Πως εμφανίζεται	Γεωμετρικό αντικείμενο / έννοια	Θεωρία / εφαρμογή / άσκηση	Γεωμετρία / άλγεβρα / φυσικός κόσμος / μη μαθηματικό	Χρήση συμβόλου	
1.	Ισότητας	39			Εισαγωγή κεφαλαίου	Γεωμετρία		
2.	Ίσες	40	***ισοσκελές***, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ η πλευρά ΒΓ λέ ται ***βάση*** του και το Α ***κορυφή*** του,		Θεωρία	Γεωμετρία		
3.	=	40	$AB = A\Gamma$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
4.	Ίσες	40			Θεωρία	Γεωμετρία		
5.	Ίσα	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
6.	Ίσα	41	**Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γων τους ίσες μία προς μία.**		Θεωρία	Γεωμετρία		
7.	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
8.	Ίσα	41	**Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές β σκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**		Θεωρία	Γεωμετρία		
9.	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
10.	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
11.	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
12.	Ίσες	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
13.	Ισότητα	41			Θεωρία	Γεωμετρία		

14.	Ισότητα	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
15.	Ισότητας	41			Θεωρία	Γεωμετρία		
16.	Ίσες	41	**ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.		Θεωρία, εκφώνηση θεωρήματος	Γεωμετρία		
17.	Ίσες	41			Θεωρία, εκφώνηση θεωρήματος	Γεωμετρία		
18.	Ίσα	41			Θεωρία, εκφώνηση θεωρήματος	Γεωμετρία		
19.	=	41	Ας υποθέσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχ $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.11). $AB = A'B'$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
20.	=	41	$A\Gamma = A'\Gamma'$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
21.	=	41	$\hat{A} = \hat{A}'$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
22.	=	41	$\hat{A} = \hat{A}'$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
23.	=	41	$AB = A'B'$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ

24.	=	41	$A\Gamma = A'\Gamma'$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
25.	Ίσα	41			Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος	Γεωμετρία		
26.	Ίσες	42			Θεωρία, εκφώνηση πορίσματος	Γεωμετρία		
27.	=	42	Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και Α έχουν $AB = A\Gamma$, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομέ είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. $AB = A\Gamma$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
28.	=	42	$AB = A\Gamma$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
29.	=	42	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
30.	=	42	$\hat{B} = \hat{\Gamma}$.	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
31.	Ισότητα	42			Θεωρία, απόδειξη θεωρήματος	Γεωμετρία		
32.	=	42	$B\Delta = \Delta\Gamma$,	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ

33.	=	42	$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
34.	Ισότητα	42	Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $B\Delta = \Delta\Gamma$, ο τε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ι τητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 9$		Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία		
35.	=	42	$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$	Γεωμετρικό / αλγεβρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Λ	ΓΑ
36.	=	42	$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$	Γεωμετρικό / αλγεβρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ/Λ	ΓΓ-ΓΑ
37.	Ίσες	42			Θεωρία, εκφώνηση πορίσματος	Γεωμετρία		
38.	=	42	$KA = KB$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
39.	=	42	$\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90°$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ/Λ	ΓΓ-ΓΑ
40.	Ίσα	42			Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία		
41.	=	42	$MA = MB$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
42.	Ίσα	42			Θεωρία, εκφώνηση πορίσματος	Γεωμετρία		

43.	Ίσες	42			Θεωρία, εκφώνηση πορίσματος	Γεωμετρία		
44.	Ίσα	42			Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία		
45.	=	42	$A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
46.	=	42	$OA = O\Gamma(=\rho)$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ 11	ΓΓ-ΓΓ
47.	=	42	$OB = O\Delta(=\rho)$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ 11	ΓΓ-ΓΓ
48.	=	42	$A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
49.	Ίσα	42			Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία		
50.	=	42	$AB = \Gamma\Delta$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Θεωρία, απόδειξη πορίσματος	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
51.	=	43	$\mathbf{M\Gamma = M\Delta}$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση εφαρμογής	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
52.	=	43	$\mathbf{M\hat{A}B = M\hat{B}A}$.	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση εφαρμογής	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
53.	=	43	$\mathbf{A\Delta = B\Gamma}$.	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση εφαρμογής	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ

54.	=	43	$MA = MB$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
55.	=	43	$M\hat{A}B = M\hat{B}A$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
56.	=	43	$MA = MB$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
57.	=	43	$M\Gamma = M\Delta$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
58.	=	43	$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
59.	Ίσα	43			Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία		
60.	=	43	$A\Delta = B\Gamma.$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Λύση εφαρμογής	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
61.	Ισότητα	43	*Η ισότητα τριγώνων είναι η βασι-κή μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών.*		Σχόλιο	Γεωμετρία		
62.	Ισότητας	43			Σχόλιο	Γεωμετρία		
63.	=	43	$A\Delta = AB$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση άσκησης εμπέδωσης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
64.	=	43	$AE = A\Gamma$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση άσκησης εμπέδωσης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
65.	=	43	$BE = \Gamma\Delta$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση άσκησης εμπέδωσης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ

66.	=	43	$BK = ΓΛ = AM$.	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση άσκησης εμπέδωσης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ-ΓΓ
67.	Ίσων	43			Εκφώνηση άσκησης εμπέδωσης	Γεωμετρία		
68.	Ίσες	43			Εκφώνηση άσκησης εμπέδωσης	Γεωμετρία		
69.	=	43	$AE = AB$	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση άσκησης εμπέδωσης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
70.	=	43	$AZ = AΓ$.	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση άσκησης εμπέδωσης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
71.	=	43	$A\hat{Γ}E = A\hat{Z}B$.	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση άσκησης εμπέδωσης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
72.	=	43	*θεωρήσουμε τμήματα* $KΔ = AK$, $KE = BK$, $KZ = ΓK$, *να απο-δείξετε ότι* $E\hat{Δ}Z = B\hat{A}Γ$. $KΔ = AK$,	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση αποδεικτικής άσκησης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
73.	=	43	$KE = BK$,	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση αποδεικτικής άσκησης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
74.	=	43	$KZ = ΓK$,	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση αποδεικτικής άσκησης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ

75.	=	43	$E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$.	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση αποδεικτικής άσκησης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
76.	Ίσων	43			Εκφώνηση αποδεικτικής άσκησης	Γεωμετρία		
77.	Ίσα	43			Εκφώνηση αποδεικτικής άσκησης	Γεωμετρία		
78.	Ίσα	43	*Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι* $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.		Εκφώνηση αποδεικτικής άσκησης	Γεωμετρία		
79.	=	43	$O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.	Γεωμετρικό αντικείμενο	Εκφώνηση αποδεικτικής άσκησης	Γεωμετρία	Σ	ΓΓ
80.	Ισότητας	44			Θεωρία	Γεωμετρία		
81.	Ίσες	44			Θεωρία, εκφώνηση θεωρήματος	Γεωμετρία		