Απαρίθμηση Μεταθέσεων, Συμμετρικές Συναρτήσεις και το Θεώρημα Gessel-Reutenauer

Μεταπτυχιακή Εργασία

Σταύρος Μαυροθαλασσίτης

Επιβλέπων: Χρήστος Αθανασιάδης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2018

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Ένα γενικό πρόβλημα της απαρίθμησης μεταθέσεων είναι ο υπολογισμός των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ με δοσμένα χαρακτηριστικά. Το θέμα αυτής της εργασίας είναι η απαρίθμηση μεταθέσεων με δοσμένο κυκλικό τύπο και σύνολο καθόδων. Το βασικό αποτέλεσμα, το Θεώρημα Gessel-Reutenauer, μας πληροφορεί ότι το πλήθος αυτών των μεταθέσεων μπορεί να εκφραστεί ως το εσωτερικό γινόμενο δύο συμμετρικών συναρτήσεων, και έτσι συνδέει το θέμα της απαρίθμησης των μεταθέσεων με τη θεωρία αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ με απρόσμενο τρόπο. Οι δύο αυτές συμμετρικές συναρτήσεις σχετίζονται η μια με τον κυκλικό τύπο και η άλλη με το σύνολο καθόδων μιας μετάθεσης και αποτελούν εικόνες, μέσω της χαρακτηριστικής απεικόνισης, αναπαραστάσεων της $\mathfrak{S}_n$. Οι συμμετρικές συναρτήσεις που σχετίζονται με το σύνολο καθόδων, είναι λοξές συναρτήσεις του Schur (λωρίδων) και αυτές που σχετίζονται με τον κυκλικό τύπο απαριθμούν συλλογές από μεταγιόν.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής. Στο 1^o κεφάλαιο, ορίζονται οι βασικές έννοιες που θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια. Το 2^o κεφάλαιο, είναι μια μικρή εισαγωγή στις συμμετρικές συναρτήσεις προσαρμοσμένη στα πλαίσια και τους σκοπούς της εργασίας. Στο 3^o κεφάλαιο, εισάγονται οι συμμετρικές συναρτήσεις που σχετίζονται με τον κυκλικό τύπο και το σύνολο καθόδων, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το βασικό θεώρημα (Θεώρημα 3.1.1) και τέλος δίνεται μια εφαρμογή του στις μεταθέσεις ενός συγκεκριμένου κυκλικού τύπου. Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 στηρίζεται σε μια $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ λέξεων σε ένα ολικά διατεταγμένο αλφάβητο και συλλογών από μεταγιόν η οποία αποτελεί γενίκευση της γνωστής αντιστοιχίας μεταξύ των μεταθέσεων ως γραμμικές διατάξεις και ως γινόμενα ξένων κύκλων.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας κ. Χρήστο Αθανασιάδη για τα πολύτιμα σχόλια, τις διορθώσεις, καθώς και την συνολική βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχε.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

Οι μεταθέσεις, οι διαμερίσεις (και συνθέσεις) ακεραίων, και τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα, είναι θεμελιώδεις έννοιες της Συνδυαστικής. Αρχικά λοιπόν, θα παρουσιάσουμε τις έννοιες αυτές, εστιάζοντας σε σημεία που θα μας φανούν χρήσιμα στη συνέχεια.

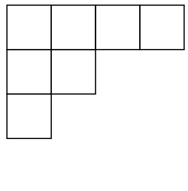
1.1 Τύπος μετάθεσης

Ορισμός 1.1.1. *Διαμέριση ενός θετικού ακεραίου n ($\lambda \vdash n$) λέγεται κάθε διάνυσμα $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{Z}^k_{>0}$, με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$ και $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_k = n$. Τα λ_i ονομάζονται μέρη της διαμέρισης λ. Γράφουμε επίσης $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n})$, όπου m_i είναι το πλήθος των μερών της λ που είναι ίσα με i.*

Μια διαμέριση παριστάνεται με το διάγραμμα $Young$, δηλαδή, μια διάταξη n τετραγώνων σε γραμμές που ξεκινούν απο την ίδια κατακόρυφο, ώστε το πλήθος των τετραγώνων της i γραμμής (μετρώντας απο πάνω προς τα κάτω) να ισούται με λ_i.

Παράδειγμα 1.1.2. *Η διαμέριση $(4, 2, 1)$ του 7 γράφεται $(1^1, 2^1, 3^0, 4^1, 5^0, 6^0, 7^0)$ και το διάγραμμα $Young$ της είναι:*

Σχήμα 1.1



Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ και $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l)$ δύο διαμερίσεις του n. Γράφουμε $\lambda \trianglerighteq \mu$ αν

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i \text{ , για κάθε } i \geq 1$$

όπου $\lambda_j = 0$, για $j > k$ και $\mu_j = 0$, για $j > l$. Η $\trianglerighteq$ είναι μια μερική διάταξη στο σύνολο των διαμερίσεων του n και λέγεται διάταξη κυριαρχίας (dominance order). Παρατητούμε οτι για $n = 6$ έχουμε $(3,3) \ntrianglerighteq (4,1,1)$ και $(4,1,1) \ntrianglerighteq (3,3)$, επομένως η $\trianglerighteq$ δεν είναι ολική διάταξη.

Γνωρίζουμε (βλ. [13] σελ. 29) οτι κάθε μετάθεση γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ξένων κύκλων. Έτσι, σε κάθε μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ αντιστοιχεί μια διαμέριση του n, ο (κυκλικός) τύπος της w, τα μέρη της οποίας είναι τα μήκη των κύκλων της w. Για παράδειγμα, αν $w = (123)(46)(5)$ τότε είναι $\lambda = \lambda(w) = (3,2,1)$. Δύο μεταθέσεις έχουν τον ίδιο τύπο αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι $w = (i_1 i_2 \dots i_k) \dots (i_l \dots i_m)$ και $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ τότε

$$\sigma w \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)) \dots (\sigma(i_l) \dots \sigma(i_m))$$

Για το πλήθος των μεταθέσεων με τύπο λ έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 1.1.3. *Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}) \vdash n$ και C_λ η κλάση συζυγίας των μεταθέσεων με τύπο λ. Τότε*

$$\# C_\lambda = \frac{n!}{\zeta_\lambda}$$

όπου $\zeta_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \dots n^{m_n} m_n!$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\phi : \mathfrak{S}_n \to C_\lambda$ με

$$\phi(w_1 w_2 \dots w_n) = (w_1 \dots w_{\lambda_1})(w_{\lambda_1+1} \dots w_{\lambda_1+\lambda_2}) \dots (w_{n-\lambda_s+1} \dots w_n)$$

Για κάθε $\sigma \in C_\lambda$ υπάρχουν $\zeta_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \dots n^{m_n} m_n!$ μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ ώστε $\phi(w) = \sigma$. Πράγματι, υπάρχουν $m_i!$ τρόποι να μεταθεσουμε τους m_i κύκλους μεταξύ τους και i^{m_i} επιλογές για να καθορίσουμε τις αφετηρίες των κύκλων μήκους i. Οπότε έχουμε $\# C_\lambda = \frac{\# \mathfrak{S}_n}{\zeta_\lambda} = \frac{n!}{\zeta_\lambda}$. $\square$

1.2 Σύνολο καθόδων

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $w \in \mathfrak{S}_n$. Ο ακέραιος $i \in [n-1]$ λέγεται κάθοδος (descent) της w αν $w(i) > w(i+1)$ και άνοδος (anscent) αν $w(i) < w(i+1)$. Ορίζουμε το σύνολο καθόδων της w ως*

$$Des(w) = \{i \in [n-1] : w(i) > w(i+1)\}$$

και συμβολίζουμε $\alpha(S)$ το πλήθος των μεταθέσεων το σύνολο καθόδων των οποίων περιέχεται στο S, και $\beta(S)$ το πλήθος των μεταθέσεων με σύνολο καθόδων S. Δηλαδή:

$$\alpha(S) = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : Des(w) \subseteq S\} \quad \textit{και} \quad \beta(S) = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : Des(w) = S\}$$

Είναι σαφές ότι $\alpha(S) = \sum_{T \subseteq S} \beta(T)$ και άρα απ' την αντιστροφή Möbius (βλ. παρακάτω 1.4) έχουμε

$$\beta(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{\#(S \setminus T)} \alpha(T)$$

Πρόταση 1.2.2. *Έστω* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}_<$ [1]$\subseteq [n-1]$. *Ισχύει*

$$\alpha(S) = \binom{n}{s_1, s_2 - s_1, \cdots, n - s_k} = \frac{n!}{s_1!(s_2-s_1)!\cdots(n-s_k)!}$$

Απόδειξη. Για να πάρουμε μια μετάθεση $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ με $Des(w) \subseteq S$ επιλέγουμε τα w_i με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτρέπουμε κάθοδο μόνο στα $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Δηλαδή, επιλέγουμε $w_1 < w_2 < \ldots < w_{s_1}$ με $\binom{n}{s_1}$ τρόπους, $w_{s_1+1} < \ldots < w_{s_2}$ με $\binom{n-s_1}{s_2-s_1}$ τρόπους κ.ο.κ. Τελικά,

$$\alpha(S) = \binom{n}{s_1}\binom{n-s_1}{s_2-s_1}\cdots\binom{n-s_k}{n-s_k} = \binom{n}{s_1, s_2-s_1, \cdots, n-s_k}$$

□

Παράδειγμα 1.2.3.

$$\beta(3,8) = \alpha(3,8) - \alpha(3) - \alpha(8) + \alpha(\emptyset) = \binom{n}{3, 5, n-8} - \binom{n}{3} - \binom{n}{8} + 1$$

1.3 Συνθέσεις

Σύνθεση (composition) ενός θετικού ακεραίου n, λέγεται κάθε διάνυσμα $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}^k_{>0}$, με $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$. Οι ακέραιοι α_i λέγονται *μέρη* της σύνθεσης α. Συμβολίζουμε με $l(\alpha) = k$ το μήκος (length) της α.

Τα υποσύνολα του $[n-1]$ βρίσκονται σε $1-1$ και επί αντιστοιχία με τις συνθέσεις του n. Συγκεκριμένα, έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση 1.3.1. *Έστω C_n το σύνολο των συνθέσεων του n. Τότε η απεικόνιση*

$$\begin{aligned} \phi : 2^{[n-1]} &\to C_n \\ \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}_< &\mapsto (d_1 - d_0, \ldots, d_{k+1} - d_k) \end{aligned}$$

με $d_0 = 0$ και $d_{k+1} = n$, είναι $1-1$ και επί.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $\psi : C_n \to 2^{[n-1]}$ με

$$\psi(c_1, c_2, \ldots, c_k) = \{c_1, c_1 + c_2, \ldots, c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1}\}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\psi \circ \phi = id$ και $\phi \circ \psi = id$ επομένως η ϕ είναι μία $1-1$ και επί αντιστοιχία. □

Ονομάζουμε *σύνθεση καθόδων* και τη συμβολίζουμε με $C(\sigma)$ τη σύνθεση που αντιστοιχεί στο σύνολο καθόδων της μετάθεσης σ.

[1]όπου $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}_< = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ με $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$.

Παράδειγμα 1.3.2. *Έστω* $\sigma = 423971856$, *τότε,* $Des(\sigma) = \{1,4,5,7\}$ *και άρα* $C(\sigma) = (1,3,1,2,2)$.

Σχόλιο 1.3.3. *Τα μέρη της* $C(\sigma)$ *μας πληροφορούν για το πόσο απέχει η κάθε κάθοδος απο την προηγούμενη. Έτσι, η* $C(\sigma)$ *μπορεί να διαβαστεί απευθείας απ' την* σ *ως τα μήκη των μεγιστικών (γνησίως) αύξουσων ακολουθιών στην λέξη* σ.

Μέσω της απεικόνισης της Πρότασης 1.3.1 μπορούμε να ορίσουμε μια μερική διάταξη $\leq$ στο C_n ως εξής:

$$D_1 \subseteq D_2 \quad \text{ανν} \quad \phi(D_1) \leq \phi(D_2)$$

Παρατηρούμε ότι για δύο συνθέσεις α, β του n θα είναι $\alpha \leq \beta$ ανν η α προκύπτει προσθέτοντας γειτονικά μέρη της β. Για παράδειγμα, $(3,2,4,2) \leq (3,1,1,1,2,1,2)$.

1.4 Μερικώς διατεταγμένα σύνολα

Μερικώς διατεταγμένο σύνολο (poset: partially ordered set) ονομάζεται ένα μη κενό σύνολο P εφοδιασμένο με μια σχέση $\leq$ η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\alpha \leq \alpha$, για κάθε $\alpha \in P$ (αυτοπάθεια)

(ii) αν $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha$, τότε $\alpha = \beta$ (αντισυμμετρία)

(iii) αν $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \gamma$, τότε $\alpha \leq \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)

Για κάθε $x, y \in P$ με $x \leq y$ ορίζουμε το κλειστό διάστημα $[x,y] := \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Το σύνολο όλων των κλειστών διαστημάτων του P συμβολίζεται με $Int(P)$.

Ορισμός 1.4.1. *Έστω* $(P, \leq)$ *ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Η συνάρτηση Möbius* $\mu : Int(P) \to \mathbb{R}$ *ορίζεται αναδρομικά ως εξής:*

(i) $\mu(x,x) = 1$, *για κάθε* $x \in P$ *και*

(ii) $\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z)$, *για κάθε* $x, y \in P$ *με* $x < y$.

Δηλαδή, για $x \leq y$, *γράφουμε* $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x,z) = \delta_{xy}$, *όπου* $\delta_{xy} = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } x = y \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$.

Ένας ισοδύναμος τρόπος να οριστεί η συνάρτηση Möbius είναι απ' τη σχέση

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(z,y) = \delta_{xy} \text{ , για κάθε } x \leq y \tag{1.4.1}$$

Πράγματι, συμβολίζουμε με $\mu_1(x,y)$ τη συνάρτηση που ορίζετε απ' τη σχέση 1.4.1 και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\mu_1(x,y) &= \sum_{x\le w\le y}\mu_1(w,y)\delta_{xw} = \sum_{x\le w\le y}\mu_1(w,y)\left(\sum_{x\le z\le w}\mu(x,z)\right) = \\ &= \sum_{x\le z\le y}\mu(x,z)\left(\sum_{z\le w\le y}\mu_1(w,y)\right) fd = \sum_{x\le z\le y}\mu(x,z)\delta_{zy} = \\ &= \mu(x,y)\end{aligned}$$

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή ως αντιστροφή Möbius και είναι πολύ χρήσιμη για προβλήματα απαρίθμησης.

Πρόταση 1.4.2. *Έστω $(P,\le)$ ένα πεπερασμένο, μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $f,g : P\to\mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $g(y) = \sum_{x\le y} f(x)$, *για κάθε* $y\in P$

(ii) $f(y) = \sum_{x\le y}\mu(x,y)\cdot g(x)$, *για κάθε* $y\in P$

Απόδειξη. $(i)\Rightarrow(ii)$: Σταθεροποιούμε ένα $y\in P$, και έχουμε διαδοχικά:

$$\sum_{x\le y}\mu(x,y)\cdot g(x) \overset{(i)}{=} \sum_{x\le y}\mu(x,y)\sum_{z\le x} f(z) = \sum_{z\le y} f(z)\sum_{z\le x\le y}\mu(x,y) = \sum_{z\le y} f(z)\cdot\delta_{zy} = f(y)$$

Όμοια έχουμε $(ii)\Rightarrow(i)$. □

Έστω $A\ne\emptyset$ ένα μη κενό σύνολο. Το δυναμοσύνολο 2^A είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο με διάταξη τη σχέση του "περιέχεσθαι" $\subseteq$.

Πρόταση 1.4.3. *Για $X,Y\subseteq A$ με $X\subseteq Y$ ισχύει:*

$$\mu(X,Y) = (-1)^{\#(Y\setminus X)}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο $n := \#(Y\setminus X)$. Για $n=0$ είναι $X=Y$ και άρα $\mu(X,Y)=\mu(X,X)=1$. Υποθέτουμε οτι η πρόταση ισχύει για κάθε $k<n$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(X,Y) &= -\sum_{X\subseteq Z\subsetneq Y}\mu(X,Z) = -\sum_{X\subseteq Z\subsetneq Y}(-1)^{\#(Z\setminus X)} = -\left(\sum_{X\subseteq Z\subseteq Y}(-1)^{\#(Z\setminus X)} - (-1)^{\#(Y\setminus X)}\right) \\ &= -\left(0-(-1)^{\#(Y\setminus X)}\right) = (-1)^{\#(Y\setminus X)}\end{aligned}$$

καθώς είναι

$$\sum_{X\subseteq Z\subseteq Y}(-1)^{\#(Z\setminus X)} = \sum_{Z'\subseteq Y\setminus X}(-1)^{\#Z'} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i = (1+(-1))^n = 0$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Έτσι, αν $f, g : 2^A \to \mathbb{R}$ απο 1.4.2 και 1.4.3 έχουμε

$$g(X) = \sum_{Y \subseteq X} f(Y) \quad \Leftrightarrow \quad f(X) = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{\#(Y \setminus X)} g(Y)$$

Κεφάλαιο 2

Συμμετρικές Συναρτήσεις

Οι συμμετρικές συναρτήσεις (symmetric functions) είναι τυπικές δυναμοσειρές σε άπειρες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots$ οι οποίες μένουν αναλλοίωτες ως προς τη μετάθεση (των δεικτών) των μεταβλητών. Αποτελούν ένα απ' τα πιο όμορφα και ενδιαφέροντα κομμάτια της Συνδυαστικής, καθώς εμφανίζονται συχνά ως γεννήτριες συναρτήσεις σε προβλήματα απαρίθμησης και συνδέονται άμεσα με τις αναπαραστάσεις της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$. Εδώ, θα περιοριστούμε στην παρουσίαση των βασικών στοιχείων της θεωρίας τους.

2.1 *Sym*

2.1.1 Η άλγεβρα των συμμετρικών συναρτήσεων

Ορισμός 2.1.1. *Ομογενής συμμετρική συνάρτηση βαθμού n λέγεται κάθε τυπική δυναμοσειρά της μορφής*

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha \ , \ c_\alpha \in \mathbb{Q}$$

όπου $\alpha = (a_1, a_2, \ldots)$ είναι ασθενής σύνθεση του n $\left(\text{δηλαδή } a_i \in \mathbb{N} \text{ και } \sum\limits_{i \geq 1} a_i = n\right)$ και $x^\alpha = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots$ ώστε

$$f(x_{w_1}, x_{w_2}, \ldots) = f(x_1, x_2, \ldots) \ , \ \text{για κάθε } w \in \mathfrak{S}(\mathbb{Z}_{>0})$$

Συμβολίζουμε με $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ το σύνολο όλων των ομογενών συμμετρικών συναρτήσεων στο $x = (x_1, x_2, \ldots)$ βαθμού n και $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \bigoplus\limits_{n \geq 0} \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ τον διαβαθμισμένο δακτύλιο (graded ring) των συμμετρικών συναρτήσεων. Γράφουμε $\Lambda_{\mathbb{C}}^n = \Lambda_{\mathbb{Q}}^n \bigotimes\limits_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$[1] για το $\mathbb{C}-$διανυσματικό χώρο των ομογενών συμμετρικών συναρτήσεων με συντελεστες απ'το $\mathbb{C}$ και $\Lambda_{\mathbb{C}} = \bigoplus\limits_{n \geq 0} \Lambda_{\mathbb{C}}^n$.

Έχουμε πέντε βάσεις για το $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ (βλ. [8] και [14]):

[1]όπου με $\otimes$ συμβολίζουμε το τανυστικό γινόμενο διανυσματικών χώρων.

(i) τις *μονωνυμικές συμμετρικές συναρτήσεις*

$$m_\lambda = \sum_\alpha x^\alpha$$

όπου $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \vdash n$ μια διαμέριση του n και το α στο άθροισμα διατρέχει όλες τις (διακεκριμένες) μεταθέσεις της λ.

(ii) τις *στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις* $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \ldots e_{\lambda_k}$, όπου $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ και

$$e_m = \sum_{i_1 < \ldots < i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m} = m_{(1^m)}$$

για $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, και κατά σύμβαση $e_0 = 1$. Η γεννήτρια συνάρτηση για τα e_n είναι η

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n t^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t)$$

(iii) τις *πλήρεις συμμετρικές συναρτήσεις* $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \ldots h_{\lambda_k}$, όπου

$$h_m = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m} = \sum_{\mu \vdash m} m_\mu$$

για $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, και κατά σύμβαση $h_0 = 1$. Η γεννήτρια συνάρτηση για τα h_n είναι η

$$H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n t^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i t}$$

καθώς είναι $\dfrac{1}{1 - x_i t} = \sum_{k \geq 0} x_i^k t^k$.

(iv) τις *power sum συμμετρικές συναρτήσεις* $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \ldots p_{\lambda_k}$, με

$$p_m = \sum_{i \geq 1} x_i^m$$

Η γεννήτρια συνάρτηση για τα p_n είναι η

$$P(t) = \sum_{n \geq 1} p_n t^{n-1} = \sum_{i \geq 1} \sum_{n \geq 1} x_i^n t^{n-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t}$$

και τέλος,

(v) τις *Schur συμμετρικές συναρτήσεις*

$$s_\lambda = s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\alpha_{\lambda+\delta}}{\alpha_\delta}$$

όπου $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, $\alpha_{\lambda+\delta} \coloneqq \det \left(x_i^{\lambda_j + n - j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ και $\alpha_\delta \coloneqq \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$

Όπως εξηγούμε στη συνέχεια, οι συναρτήσεις Schur μπορούν να οριστούν και συνδυαστικά, μέσω των γενικευμένων *Young* ταμπλώ (βλ. [8], [12], [14]).

Ορισμός 2.1.2. *Γενικευμένο ταμπλώ σχήματος λ λέγεται κάθε απεικόνιση T απ' το σύνολο των τετραγώνων του διαγράμματος Young της λ στο $\mathbb{Z}_{>0}$. Αν μ_i το πλήθος των τετραγώνων στα οποία αντιστοιχεί το $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ τότε η ασθενής σύνθεση $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ λέγεται τύπος ή περιεχόμενο του T. Συμβολίζουμε $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ το σύνολο των γενικευμένων ταμπλώ σχήματος λ και τύπου μ.*

Για παράδειγμα, το

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 5 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 5 & \\ \cline{1-3} 4 & & & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

είναι γενικευμένο ταμπλώ σχήματος $(4,3,1)$ και τύπου $(2,1,0,3,2)$.

Ορισμός 2.1.3. *Γενικευμένο Young ταμπλώ (semistandard Young tableau) λέγεται το γενικευμένο ταμπλώ του οποίου τα στοιχεία κάθε γραμμής αυξάνουν ασθενώς προς τα δεξιά και τα στοιχεία κάθε στήλης αυξάνουν γνήσια προς τα κάτω. Συμβολίζουμε με $\mathcal{Y}_{\lambda\mu}$ το σύνολο των γενικευμένων Young ταμπλώ σχήματος λ και τύπου μ.*

Για παράδειγμα, το

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \cline{1-3} 4 & 4 & & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

είναι ένα γενικευμένο *Young* ταμπλώ σχήματος $(4,3,2)$ και τύπου $(2,2,2,2,1)$.
Οι αριθμοί *Kostka* $K_{\lambda\mu}$ ορίζονται ως το πλήθος των γενικευμένων *Young* ταμπλώ σχήματος λ και τύπου μ, $K_{\lambda\mu} = \#\mathcal{Y}_{\lambda\mu}$ και ισχύει

$$(K_{\lambda\mu} \neq 0 \implies \lambda \trianglerighteq \mu) \quad \text{και} \quad K_{\lambda\lambda} = 1$$

Για γενικευμένο ταμπλώ T, γράφουμε $x^T = x^{\mu_1} x^{\mu_2} \ldots$ όπου $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ ο τύπος του T. Αποδεικνύεται οτι

$$s_\lambda(x) = \sum_T x^T$$

όπου το T διατρέχει τα γενικευμένα *Young* ταμπλώ σχήματος λ. Παρατηρούμε οτι $s_{(n)} = h_n$ και $s_{(1^n)} = e_n$. Ακόμη, αποδεικνύεται οτι $K_{\lambda\alpha} = K_{\lambda\widetilde{\alpha}}$ όπου η σύνθεση $\widetilde{\alpha}$ προκύπτει απο αναδιάταξη των μερών της α, επομένως είναι

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} m_\mu$$

Στη συνέχεια, θα εκμεταλλευτούμε τις γεννήτριες συναρτήσεις $E(t), H(t)$ και $P(t)$ που ορίσαμε παραπάνω για να αποδείξουμε κάποιες χρήσιμες σχέσεις μεταξύ των e_n, h_n και p_n. Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$E(t)H(-t) = \prod_{i\geq 0}(1+x_it)\prod_{i\geq 0}\frac{1}{1+x_it} = 1$$

και άρα θα είναι

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k h_{n-k} = 0 \text{ , για } n \geq 1 \tag{2.1.1}$$

Ακόμη, έχουμε διαδοχικά:

$$P(t) = \sum_{i\geq 1}\frac{x_i}{1-x_it} = \sum_{i\geq 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\log\frac{1}{1-x_it}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sum_{i\geq 1}\log\frac{1}{1-x_it} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\log\prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x_it} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\log H(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}$$

και όμοια έχουμε

$$P(-t) = \sum_{i\geq 1}\frac{x_i}{1+x_it} = \sum_{i\geq 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\log(1+x_it)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sum_{i\geq 1}\log(1+x_it) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\log\prod_{i\geq 1}(1+x_it) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\log E(t) = \frac{E'(t)}{E(t)}$$

Έτσι γράφουμε $H'(t) = P(t)H(t)$ και $E'(t) = P(-t)E(t)$, απ' τις οποίες προκύπτουν οι

$$nh_n = \sum_{k=1}^{n} p_k h_{n-k} \text{ , για κάθε } n \geq 1 \tag{2.1.2}$$

$$ne_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} p_k e_{n-k} \text{ , για κάθε } n \geq 1 \tag{2.1.3}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες και πληροφορίες για την άλγεβρα των συμμετρικών συναρτήσεων παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 1 του [8] και στο Κεφάλαιο 7 του [14]. Επίσης, μια προσέγγιση απο τη σκοπιά των αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας συναντάμε στο [12], ενώ στο [10] η παρουσίαση γίνεται με αμιγώς συνδυαστικά επιχειρήματα.

2.1.2 Πρότυπα Specht

Είναι γνωστό ότι οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{S}_n$ είναι σε $1-1$ αντιστοιχία με τις διαμερίσεις του n. Πρόκειται για τα πρότυπα Specht, τα οποία θα ορίσουμε σ'αυτήν την ενότητα.

Ταμπλώ T σχήματος $\lambda \vdash n$ και περιεχομένου $[n]$ ονομάζεται κάθε $1-1$ αντιστοιχία από το $[n]$ στο σύνολο των τετραγώνων του T. Συμβολίζουμε με $R(T)$ και $C(T)$ τις υποομάδες της $\mathfrak{S}_n$ που αποτελούνται από τις μεταθέσεις που διατηρούν κάθε γραμμή και κάθε στήλη του T αντίστοιχα. Η $\mathfrak{S}_n$ δρά στο σύνολο των ταμπλώ "κατά τετράγωνο", δηλαδή αν $T = \{t_{ij}\}$ ταμπλώ σχήματος $\lambda \vdash n$ και περιχομένου n, και $w \in \mathfrak{S}_n$ θα είναι $w \cdot T = \{w(t_{ij})\}$.

Ορισμός 2.1.4. *Ταμπλοειδές σχήματος λ θα λέγεται κάθε κλαση ισοδυναμίας του συνόλου των ταμπλώ σχήματον λ και περιεχομένου $[n]$, όπου δύο τέτοια ταμπλώ θεωρούνται ισοδύναμα αν $T = w \cdot S$ για κάποιο $w \in R(S)$.*

Για παράδειγμα, είναι

$$\begin{array}{ccc} \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 8 \\ \hline 2 & 7 & \\ \cline{1-2} \end{array} = \begin{array}{ccc} \hline 6 & 4 & 1 \\ \hline 8 & 3 & 5 \\ \hline 7 & 2 & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Η $\mathfrak{S}_n$ δρά πάνω στο σύνολο των ταμπλοειδών σχήματος λ με $w \cdot \{T\} = \{w \cdot T\}$ όπου με $\{T\}$ συμβολίζουμε το ταμπλοειδές που είναι η κλάση ισοδυναμίας του ταμπλω T.

Ορισμός 2.1.5. *Συμβολίζουμε με M^λ την αναπαράσταση μεταθέσεων της $\mathfrak{S}_n$ που αντιστοιχεί στη δράση της $\mathfrak{S}_n$ στο σύνολο των ταμπλοειδών σχήματος λ.*

Ορισμός 2.1.6. *Πολυταμπλοειδές σχήματος $\lambda \vdash n$ λέγεται κάθε στοιχείο του M^λ της μορφής $e_T = k_T \cdot \{T\}$ όπου T ταμπλώ σχήματος λ και περιεχομένου $[n]$ και $k_T = \sum\limits_{w \in C(T)} sgn(w)w$.*

Για παράδειγμα, αν $\lambda = (3,2)$ και $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \cline{1-2} \end{array}$ τότε θα είναι $k_T = \varepsilon - (34) - (15) + (34)(15)$ και

$$e_T = k_T \cdot \{T\} = \begin{array}{ccc} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \cline{1-2} \end{array} - \begin{array}{ccc} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \cline{1-2} \end{array} - \begin{array}{ccc} \hline 4 & 5 & 2 \\ \hline 3 & 1 & \\ \cline{1-2} \end{array} + \begin{array}{ccc} \hline 3 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Ορισμός 2.1.7. *Το πρότυπο Specht που αντιστοιχεί στην $\lambda \vdash n$ ορίζεται ως ο υπόχωρος S^λ του M^λ που παράγεται γραμμικά απ' τα πολυταμπλοειδή $e_T \in M^\lambda$.*

Παράδειγμα 2.1.8. *Αν $\lambda = (n)$ υπάρχει μοναδικό πολυταμπλοειδές $\{T\} = \begin{array}{cccc} \hline 1 & 2 & \ldots & n \\ \hline \end{array}$ σχήματος λ και έχουμε $k_T = \epsilon$ και $S^\lambda = \mathbb{C} \cdot e_T = \mathbb{C} \cdot \{T\}$ η οποία είναι η προφανής αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_n$.*

Γενικά, έχουμε το εξής αποτέλεσμα (βλ. [12]):

Θεώρημα 2.1.9. *Τα S^λ , $\lambda \vdash n$ είναι όλα τα ανάγωγα $\mathfrak{S}_n-$πρότυπα όπου καθένα εμφανίζεται ακριβώς μια φορά (δηλαδή $S^\lambda \cong S^\mu \implies \lambda = \mu$). Επίσης, είναι*

$$M^\mu \cong_{\mathfrak{S}_n} \bigoplus_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} S^\lambda \tag{2.1.4}$$

Δηλαδή, οι αριθμοί Kostka ερμηνεύονται ως η πολλαπλότητα των αντίστοιχων προτύπων Specht στην ανάλυση του M^μ σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων.

2.1.3 Η χαρακτηριστική απεικόνιση

Η σύνδεση των συμμετρικών συναρτήσεων με τις αναπαραστάσεις της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ γίνεται μέσω της *χαρακτηριστικής απεικόνισης*.

Ορισμός 2.1.10. *Έστω $Cl_n = Cl_{\mathbb{C}}(\mathfrak{S}_n)$ το σύνολο των συναρτήσεων $\mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}$ που είναι σταθερές στις κλάσεις συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$ (class functions). Ορίζουμε την χαρακτηριστική απεικόνιση*

$$\begin{aligned} ch^n : Cl_n &\to \Lambda^n_{\mathbb{C}} \\ \chi &\mapsto \frac{1}{n!}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\chi(w)p_w = \sum_{\mu\vdash n}\frac{1}{\zeta_\mu}\chi(\mu)p_\mu \end{aligned}$$

όπου $p_w = p_\mu$ αν η w έχει κυκλικό τύπο μ και $\chi(\mu)$ είναι η τιμή του χαρακτήρα στις μεταθέσεις με κυκλικό τύπο μ.

Η Cl_n έχει ορθοκανονική βάση τους ανάγωγους χαρακτήρες της $\mathfrak{S}_n$ και η ch^n είναι μια γραμμική ισομετρία μεταξύ των δύο διανυσματικών χώρων (βλ. [12]) με

$$ch^n(\chi_\lambda) = s_\lambda \quad \text{και} \quad \langle f,g\rangle_{Cl_n} = \langle ch^n(f), ch^n(g)\rangle_{\Lambda^n_{\mathbb{C}}}$$

όπου τα εσωτερικά γινόμενα ορίζονται ως

$$\langle \chi_\lambda,\chi_\mu\rangle = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \lambda=\mu \\ 0 & , \text{αν } \lambda\neq\mu \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \langle s_\lambda,s_\mu\rangle = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \lambda=\mu \\ 0 & , \text{αν } \lambda\neq\mu \end{cases}$$

επεκτείνοντας γραμμικά σ' όλο το χώρο. Επίσης, ο $Cl := \bigoplus_{n\geq 0} Cl_n$ είναι ισόμορφος με τον $\Lambda_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{n\geq 0}\Lambda^n_{\mathbb{C}}$ μέσω της $ch := \bigoplus_{n\geq 0} ch^n$.

Από την 2.1.4 παίρνουμε

$$\phi^\mu = \sum_{\lambda\vdash n} K_{\lambda\mu}\chi^\lambda$$

όπου ϕ^μ ο χαρακτήρας του $\mathfrak{S}_n$-προτύπου M^μ και χ^μ ο χαρακτήρας του προτύπου $Specht$ που αντιστοιχεί στην διαμέριση μ. Ακόμη, αποδεικνύεται ότι η εικόνα μέσω της χαρακτηριστικής απεικόνισης του ϕ^μ είναι η πλήρης συμμετρική συνάρτηση h_μ. Έτσι, έχουμε

$$h_\mu = ch(\phi^\mu) = \sum_{\nu\vdash n} K_{\nu\mu} ch(\chi^\nu) = \sum_{\nu\vdash n} K_{\nu\mu}s_\nu$$

Επομένως, η πλήρης συμμετρική συνάρτηση εκφράζεται στη βάση των $Schur$ συμμετρικών συναρτήσεων ως εξής

$$h_\mu = \sum_{\nu\vdash n} K_{\nu\mu}s_\nu \tag{2.1.5}$$

Πρόταση 2.1.11. $\langle m_\lambda, h_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$

Απόδειξη. Πράγματι, έχουμε

$$K_{\lambda\mu} = \langle s_\lambda, h_\mu \rangle = \sum_\nu K_{\lambda\nu} \langle m_\nu, h_\mu \rangle$$

ή αλλιώς, στη γλώσσα των πινάκων:

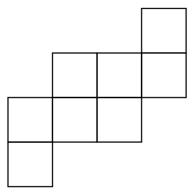
$$(K_{\lambda\mu}) = (K_{\lambda\nu}) \cdot (\langle m_\nu, h_\mu \rangle)$$

και επειδή ο $(K_{\lambda\mu})$ είναι αντιστρέψιμος θα είναι $(\langle m_\nu, h_\mu \rangle) = I$ απ' την οποία έπεται το ζητούμενο. □

2.1.4 Λοξές Διαμερίσεις και Λωρίδες

Έστω $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ και $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ δύο διαμερίσεις (όχι κατ' ανάγκη του ίδιου ακεραίου), γράφουμε $\mu \subseteq \lambda$ αν $\mu_i \leq \lambda_i$ για κάθε $i \geq 1$. Στην περίπτωση αυτή, ορίζεται η *λοξή διαμέριση (skew partition)* λ/μ το διάγραμμα *Young* της οποίας προκύπτει απ' αυτό της λ αφαιρώντας τα τετράγωνα που ανήκουν στο διάγραμμα της μ. Για παράδειγμα, το διάγραμμα *Young* της λοξής διαμέρισης $(4,4,3,1)/(3,1)$ είναι το εξής:

Σχήμα 2.1

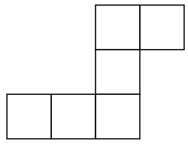


Μια λοξή διαμέριση λέγεται *συνεκτική* αν το εσωτερικό της ένωσης των τετραγώνων στο διάγραμμα *Young* της λ/μ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Για παράδειγμα, η $(2,2)/(1)$ είναι συνεκτική ενώ η $(2,1)/(1)$ όχι:

Σχήμα 2.2

Μια συνεκτική λοξή διαμέριση λ/μ λέγεται *λωρίδα (ribbon)* αν το διάγραμμα *Young* της δεν περιέχει 2×2 τετράγωνα. Κάθε λωρίδα αντιστοιχεί σε μία σύνθεση τα μέρη της οποίας είναι τα μήκη των γραμμών της λωρίδας (μετρώντας απο κάτω προς τα πάνω). Για παράδειγμα, η λοξή διαμέριση $(4,3,3)/(2,2)$ είναι λωρίδα, με αντίστοιχη σύνθεση $\alpha = (3,1,2)$:

Σχήμα 2.3



Οι έννοιες του γενικευμένου $Young$ ταμπλώ και του τύπου (περιεχομένου) τέτοιου ταμπλώ ορίζονται για λοξές διαμερίσεις ακριβώς όπως και στην περίπτωση των διαμερίσεων. Έτσι, το

$$T = \begin{array}{cccc} & & & 5 \\ & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & \\ 4 & & & \end{array}$$

είναι ένα γενικευμένο $Young$ ταμπλώ σχήματος $(4,4,3,1)/(3,1)$ και τύπου $(1,2,2,1,1,1)$.

Ορισμός 2.1.12. *Για κάθε λοξή διαμέριση λ/μ ορίζεται η λοξή συνάρτηση Schur (skew Schur function)*

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T$$

όπου το T διατρέχει όλα τα γενικευμένα $Young$ ταμπλώ σχήματος λ/μ. Ιδιαίτερα, αν λ/μ είναι λωρίδα τότε η $s_{\lambda/\mu}$ λέγεται ribbon Schur function και συμβολίζεται με r_α, όπου α είναι η σύνθεση που αντιστοιχεί στην λ/μ. Είναι:

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu K_{\lambda/\mu,\nu} m_\nu$$

όπου $K_{\lambda/\mu,\nu}$ το πλήθος των γενικευμένων $Young$ ταμπλώ σχήματος λ/μ και τύπου ν.

Θα δούμε τώρα πως εκφράζεται η $s_{\lambda/\mu}$ στη βάση των πλήρων συμμετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.1.13. ***(Jacobi-Trudi)*** *Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ και $\mu \subseteq \lambda$. Τότε,*

$$s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)_{i,j=1}^k$$
$$s_{\lambda'/\mu'} = \det\left(e_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)_{i,j=1}^k$$

όπου με λ', μ' συμβολίζουμε τις αντίστοιχες συζυγείς διαμερίσεις, $h_0 = e_0 = 1$ και $h_s = e_s = 0$ για $s < 0$.

Για αποδείξεις βλέπε [12] (σελ. 158) και [14] (σελ. 342). Στην ειδική περίπτωση όπου λ/μ είναι λωρίδα με αντίστοιχη σύνθεση $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.1.14. *Αν α σύνθεση του n, τότε είναι*

$$r_\alpha = \sum_{\beta \le \alpha} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)} h_\beta \tag{2.1.6}$$

Απόδειξη. Έστω λ/μ λωρίδα με σύνθεση $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Αρχικά, απ' το θεώρημα $Jacobi - Trudi$ έχουμε:

$$r_\alpha = \det \begin{pmatrix} h_{\alpha_k} & h_{\alpha_k+\alpha_{k-1}} & h_{\alpha_k+\alpha_{k-1}+\alpha_{k-2}} & \cdots & h_{\alpha_k+\ldots+\alpha_1} \\ 1 & h_{\alpha_{k-1}} & h_{\alpha_{k-1}+\alpha_{k-2}} & \cdots & h_{\alpha_{k-1}+\ldots+\alpha_1} \\ 0 & 1 & h_{\alpha_{k-2}} & \cdots & h_{\alpha_{k-2}+\ldots+\alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h_{a_1} \end{pmatrix}$$

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\lambda_{i+1} - \mu_i - 1 = 0$ και $\lambda_i - \mu_{i+1} + 1 = \alpha_{k-i+1} + \alpha_{k-i}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο $k = l(\alpha)$. Για $k = 1$, η πρόταση είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $s < k$. Τότε, αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη, παίρνουμε

$$r_\alpha = h_{\alpha_k} \cdot r_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} - r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots (\alpha_{k-1}+\alpha_k)} =$$

$$= h_{\alpha_k} \cdot \sum_{\beta \leq \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)-1} h_\beta - \sum_{\beta \leq \alpha_1 \ldots (\alpha_{k-1}+\alpha_k)} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)-1} h_\beta =$$

$$= \sum_{\substack{\beta \leq \alpha_1 \ldots \alpha_k \\ \beta_k = \alpha_k}} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)} h_\beta + \sum_{\beta \leq \alpha_1 \ldots (\alpha_{k-1}+\alpha_k)} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)} h_\beta =$$

$$= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)} h_\beta$$

□

Παράδειγμα 2.1.15. *Έχουμε* $s_{(2,1,3)} = h_{(2,1,3)} - h_{(3,3)} - h_{(2,4)} + h_{(6)}$.

2.1.5 Η αυτοαντίστροφη απεικόνιση ω

Οι στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις e_λ αποτελούν βάση του $\Lambda_\mathbb{C}$ και άρα, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας, μπορούμε να ορίσουμε ομομορφισμό διαβαθμισμένων δακτυλίων

$$\omega : \Lambda_\mathbb{C} \to \Lambda_\mathbb{C}$$
$$e_\lambda \mapsto h_\lambda$$

Από τη συμμετρία των σχέσεων 2.1.1, μεταξύ των στοιχειωδών και των πλήρων συμμετρικών συναρτήσεων, προκύπτει ότι $\omega(h_\lambda) = e_\lambda$, δηλαδή η ω είναι αυτοαντίστροφη απεικόνιση ($\omega^2 = id$). Έπεται ότι η ω είναι αυτομορφισμός του $\Lambda_\mathbb{C}$.

Εφαρμόζοντας την ω στις λοξές συναρτήσεις *Schur* παίρνουμε

$$\omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{\lambda'/\mu'} \tag{2.1.7}$$

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}\omega(s_{\lambda/\mu}) &= \omega\left(\det(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j})\right) = \det\left(\omega(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j})\right) = \\ &= \omega(e_{\lambda_i-\mu_j-i+j}) = s_{\lambda'/\mu'}\end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $\mu = \emptyset$ έχουμε $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$.

Παράδειγμα 2.1.16. *Εφαρμόζοντας την ω στη 2.1.5 παίρνουμε*

$$\begin{aligned}e_\lambda = \omega(h_\lambda) &= \omega\left(\sum_{\mu\vdash n} K_{\mu\lambda}s_\mu\right) = \sum_{\mu\vdash n} K_{\mu\lambda}\omega(s_\mu) = \\ &= \sum_{\mu\vdash n} K_{\mu\lambda}s_{\mu'} = \sum_{\mu\vdash n} K_{\mu'\lambda}s_\mu\end{aligned}$$

Έχουμε δηλαδή την έκφραση των στοιχειωδών συμμετρικών συναρτήσεων στη βάση των Schur.

Η επόμενη πρόταση μας πληροφορεί για την "δράση" της ω στις power sum συμμετρικές συναρτήσεις.

Πρόταση 2.1.17. *Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:*

$$\omega(p_n) = (-1)^{n-1}p_n$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$ έχουμε $p_1 = e_1 = h_1$, οπότε θα είναι

$$\omega(p_1) = \omega(e_1) = h_1 = (-1)^{1-1}p_1$$

Υποθέτουμε ώρα ότι $\omega(p_k) = (-1)^{k-1}p_k$, για κάθε $k \leq n$. Απο την 2.1.2 μπορούμε να γράψουμε

$$p_n = nh_n - \sum_{k=1}^{n-1} h_k p_{n-k}$$

συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned}\omega(p_n) &= n\omega(h_n) - \sum_{k=1}^{n-1}\omega(h_k)\omega(p_{n-k}) = ne_n - \sum_{k=1}^{n-1} e_k(-1)^{n-k-1}p_{n-k} = \\ &= ne_n - ne_n + (-1)^{n-1}p_n = (-1)^{n-1}p_n.\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.1.18. *Για κάθε $\lambda \vdash n$ ισχύει:*

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda p_\lambda$$

όπου $\varepsilon_\lambda = (-1)^{n-l(\lambda)}$.

Απόδειξη. Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}\omega(p_\lambda) &= \omega(p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\dots p_{\lambda_s}) = \omega(p_{\lambda_1})\omega(p_{\lambda_2})\dots\omega(p_{\lambda_s}) = \\ &= (-1)^{\lambda_1-1}p_{\lambda_1}(-1)^{\lambda_2-1}p_{\lambda_2}\dots(-1)^{\lambda_s-1}p_{\lambda_s} = \\ &= (-1)^{n-l(\lambda)}p_\lambda\end{aligned}$$

□

Τέλος, θα δείξουμε ότι η ω είναι γραμμική ισομετρία.

Πρόταση 2.1.19. *Για κάθε $f, g \in \Lambda^n_{\mathbb{C}}$ ισχύει:*

$$\langle \omega(f), \omega(g) \rangle = \langle f, g \rangle$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την πρόταση για τις συναρτήσεις $Schur$, καθώς αποτελούν βάση για τον $\Lambda^n_{\mathbb{C}}$. Πράγματι, είναι

$$\langle \omega(s_\lambda), \omega(s_\mu) \rangle = \langle s_{\lambda'}, s_{\mu'} \rangle = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } \lambda' = \mu' \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } \lambda = \mu \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases} = \langle s_\lambda, s_\mu \rangle$$

□

2.2 $QSym$

Μια γενίκευση των συμμετρικών συναρτήσεων είναι οι *quasi-symmetric συναρτήσεις* οι οποίες εμφανίζονται πρώτη φορά στα τέλη του $20^{ου}$ αιώνα και αποτελούν σήμερα ένα απ' τα δημοφιλέστερα πεδία έρευνας της Συνδυαστικής.

Έστω X ένα άπειρο ολικά διατεταγμένο σύνολο μεταβλητών. Μια τυπική δυναμοσειρά F στο $\mathbb{Q}[[X]]$ λέγεται quasi-symmetric αν για όλα τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ και $y_1, y_2, \dots, y_n$ στο X με $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ και $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ και για τυχαίους θετικούς ακέραιους $k_1, k_2, \dots, k_n$ οι συντελεστές στην F των $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ και $y_1^{k_1}y_2^{k_2}\dots y_n^{k_n}$ είναι ίσοι. Συμβολίζουμε με $QSym_n$ την άλγεβρα των quasi-symmetric ομογενών συναρτήσεων βαθμού n και ορίζουμε $QSym = \bigoplus_{n\geq 0} QSym_n$ την άλγεβρα των quasi-symmetric συναρτήσεων.

Δύο βάσεις του $QSym_n$ είναι η μονωνυμική βάση $\{M_\alpha\}$ και η θεμελιώδης βάση $\{F_\alpha\}$, όπου α σύνθεση του n (βλ. [14] σελ.356):

(i) Η μονωνυμική βάση M_α ορίζεται ως εξής

$$M_\alpha = \sum_{x_1 < x_2 < \ldots < x_k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$$

με $M_0 = 1$. Παρατηρούμε ότι $m_\lambda = \sum_\alpha M_\alpha$,όπου το α διατρέχει όλες τις συνθέσεις του n που προκύπτουν αναδιατάσσοντας τα μέρη της λ. Για παράδειγμα, είναι $m_{221} = M_{122} + M_{212} + M_{221}$.

(ii) Η θεμελιώδης βάση ορίζεται ως

$$F_\alpha = \sum_{\substack{x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \\ x_i < x_{i+1},\ \text{αν } i \in D}} x_1 x_2 \ldots x_n$$

όπου D το υποσύνολο του $[n-1]$ που αντιστοιχεί στη σύνθεση α. Δηλαδή, το άθροισμα είναι πάνω απ' τις $n-$άδες $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ όπου η διάταξη είναι γνήσια ($x_i < x_{i+1}$) όταν $i \in D$ και ενδεχομένως και για κάποια $j \in [n-1] \setminus D$. Επειδή όμως η διάταξη των συνθέσεων ορίστηκε με βάση την διάταξη του "περιέχεσθαι" των αντίστοιχων υποσυνόλων του $[n-1]$ μπορούμε να γράψουμε:

$$F_\alpha = \sum_{\beta \geq \alpha} M_\beta$$

Για παράδειγμα, είναι $F_{(1,2)} = M_{(1,2)} + M_{(1,1,1)}$.

Απο την αντιστροφή Möbius έχουμε

$$M_\alpha = \sum_{\beta \geq \alpha} (-1)^{l(\beta) - l(\alpha)} F_\beta$$

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω F συμμετρική συνάρτηση. Τότε*

$$F = \sum_\alpha \langle F, r_\alpha \rangle F_\alpha$$

Απόδειξη. Αφού F συμμετρική, μπορούμε να γράψουμε $F = \sum_\lambda b_\lambda m_\lambda$, και επειδή είναι $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, έχουμε $\langle h_\lambda, F \rangle = b_\lambda$. Ακόμη, αφού $m_\lambda = \sum_\beta M_\beta$, όπου το β διατρέχει τις αναδιατάξεις της λ, μπορούμε να γράψουμε $F = \sum_\beta b_\beta M_\beta$, όπου το β διατρέχει όλες τις συνθέσεις του n και τα b_β είναι ίσα για αναδιατάξεις της ίδιας διαμέρισης. Έπεται ότι $b_\beta = \langle F, h_\beta \rangle$[2]. Έτσι, έχουμε διαδοχικά:

$$F = \sum_{\beta} b_\beta M_\beta = \sum_{\beta} b_\beta \sum_{\alpha \geq \beta} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)} F_\alpha = \sum_{\alpha} F_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)} b_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha} F_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)} \langle F, h_\beta \rangle = \sum_{\alpha} F_\alpha \langle F, \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)} h_\beta \rangle =$$

$$= \sum_{\alpha} F_\alpha \langle F, r_\alpha \rangle$$

□

[2] $h_\beta = h_{\beta_1} \dots h_{\beta_k} = h_\lambda$

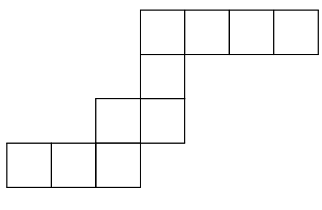
Κεφάλαιο 3

Το Θεώρημα Gessel-Reutenauer

Στο κεφάλαιο αυτό, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας, το Θεώρημα Gessel-Reutenauer (βλ. [5]). Αρχικά, εισάγουμε τις συμμετρικές συναρτήσεις που συνδέονται με τον κυκλικό τύπο και το σύνολο καθόδων μίας μετάθεσης οι οποίες είναι οι εικόνες -μέσω της χαρακτηριστικής απεικόνισης- των αναπαραστάσεωεν Lie και Foulkes αντίστοιχα. Στη συνέχεια, περιγράφουμε μια $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ λέξεων (ενός ολικά διατεταγμένου αλφαβήτου) και συλλογών απο μεταγιόν, στην οποία στηρίζεται η απόδειξη του βασικού θεωρήματος. Τέλος, κλείνουμε το κεφάλαιο με μια εφαρμογή του θεωρήματος στην κατανομή των συνόλων καθόδων μεταθέσεων ενός συγκεκριμένου κυκλικού τύπου.

3.1 Foulkes & Lie

Έστω $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ και $C(\sigma) = C\,(Des(\sigma))$ η σύνθεση που αντιστοιχεί στο σύνολο καθόδων της σ. Η σύνθεση αυτή αντιστοιχεί σε μια λωρίδα τα μήκη γραμμών της οποίας καθορίζονται από τα μέρη της $C(\sigma)$. Για παράδειγμα, η σύνθεση $\alpha = (3, 2, 1, 4)$ αντιστοιχεί στη λωρίδα:



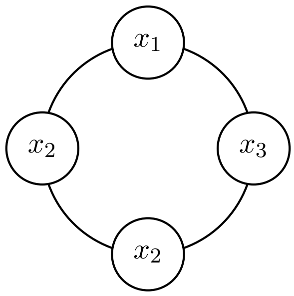
Έτσι, σε κάθε μετάθεση σ με $C(\sigma) = \alpha$ αντιστοιχεί μια ribbon Schur function r_α. Η σχετική -μέσω της χαρακτηριστικής απεικόνισης- αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_n$ λέγεται αναπαράσταση του Foulkes (βλ. [4])

Έστω $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ σύνολο μεταβλητών. Μία *λέξη* στο αλφάβητο X είναι μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του X συμπεριλαμβανομένης και της κενής ακολουθίας η οποία λέγεται *κενή λέξη*. Το X παίρνει τη δομή μονοειδούς με πράξη την ένωση λέξεων και ουδέτερο στοιχείο την κενή λέξη την οποία συμβολίζουμε με 1. Το $(X^*, \cdot)$ ονομάζεται *ελεύθερο μονοειδές που παράγεται απο το X* και το σύνολο των μη κενών λέξεων συμβολίζεται με X^+. Δύο λέξεις u, v στο X^* λέγονται *συζυγείς* αν

$$u = st \quad \text{και} \quad v = ts$$

για κάποιες λέξεις s, t. Η σχέση συζυγίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των λέξεων απ'το αλφάβητο X. Μια λέξη λέγεται *πρωταρχική* αν δεν είναι γνήσια δύναμη άλλης λέξης. Ένα *μεταγιόν* (necklace) είναι μια κλάση συζυγίας μιας πρωταρχικής λέξης. Το *μήκος του μεταγιόν* είναι το μήκος της αντίστοιχης λέξης και συμβολίζεται με $|\nu|$. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.1 φαίνεται το μεταγιόν μήκους 4 που ορίζουν οι συζυγείς λέξεις $x_1x_2x_2x_3 \sim x_2x_3x_1x_2$.

Σχήμα 3.1



Μία συλλογή απο μεταγιόν (multiset of necklaces) είναι μια απεικόνιση M απ' το σύνολο των μεταγιόν στο $\mathbb{N}$ με $suppM < +\infty$[1]. Ο κυκλικός τύπος της συλλογής M είναι η διαμέριση $\lambda(M) = 1^{n_1}2^{n_2}\ldots$ όπου n_i το πλήθος των μεταγιόν της M μήκους i. Δηλαδή,

$$n_i = \sum_{|\nu|=i} M(\nu)$$

Η *εκτίμηση* (evaluation) ενός μεταγιόν ν είναι το μονώνυμο $ev(\nu) = x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots \in \mathbb{Z}[X]$ όπου p_i το πλήθος των εμφανίσεων της x_i στο ν. Η εκτίμηση της συλλογής M είναι το γινόμενο των εκτιμήσεων των μεταγιόν που ανήκουν στη M. Δηλαδή, είναι

$$ev(M) = \prod_{\nu} ev(\nu)^{M(\nu)}$$

όπου το γινόμενο είναι πάνω απ' όλα τα μεταγιόν. Έτσι, ορίζουμε L_λ το άθροισμα των εκτιμήσεων όλων των συλλογών απο μεταγιόν τύπου λ.

$$L_\lambda = \sum_{\lambda(M)=\lambda} ev(M) \tag{3.1.1}$$

[1]αν $f : A \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση τότε $suppf := \{x \in A : f(x) \neq 0\}$
[1]αν $f : A \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση τότε $suppf := \{x \in A : f(x) \neq 0\}$

Η συμμετρική συνάρτηση L_λ αντιστοιχεί μέσω της χαρακτηριστικής απεικόνισης σε μία αναπαράσταση της $\mathfrak{S}_n$ γνωστή ως *αναπαράσταση του Lie*. Οι αναπαραστάσεις αυτές μελετήθηκαν πρώτα απ' τον *Thrall* (βλ. [16]) και στη συνέχεια απο πολλούς άλλους, ιδιαίτερα στην περίπτωση $\lambda = (n)$ όπου έχουμε τον παρακάτω τύπο (βλ. [2]):

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d) p_d^{n/d} \tag{3.1.2}$$

όπου

$$\mu(d) = \begin{cases} 0 & \text{, αν υπάρχει πρώτος αριθμός } p \text{ ώστε } p^2|d \\ 1 & \text{, αν } d = 1 \\ (-1)^k & \text{, αν ο } d \text{ είναι γινόμενο } k \text{ διακεκριμένων πρώτων αριθμών} \end{cases}$$

η συνάρτηση Möbius της Θεωρίας Αριθμών και p_d η power sum συμμετρική συνάρτηση.

Στη συνέχεια, διατυπώνουμε το κεντρικό θεώρημα της εργασίας, το οποίο αποδείχθηκε το 1993 απο τους I. Gessel και C. Reutenauer στο άρθρο [5].

Θεώρημα 3.1.1 (Gessel-Reutenauer). *Το πλήθος των μεταθέσεων με σύνθεση καθόδων C και κυκλικό τύπο λ ισούται με το εσωτερικό γινόμενο των χαρακτήρων της αναπαράστασης του Foulkes που αντιστοιχεί στη C και της αναπαράστασης του Lie που αντιστοιχεί στο λ ή ισοδύναμα, με το εσωτερικό γινόμενο των r_C και L_λ.*

Έστω $\alpha_{\lambda\mu}$ το πλήθος των συλλογών τύπου λ και εκτίμησης $x^{\mu_1}x^{\mu_2}\ldots$ όπου $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \vdash n$. Τότε είναι $L_\lambda = \sum\limits_{\mu \vdash n} \alpha_{\lambda\mu} m_\mu$.

Πόρισμα 3.1.2. *Έστω $D \subseteq [n-1]$, $C = C(D)$ η αντίστοιχη σύνθεση του n, και μ η διαμέριση του n που προκύπτει αναδιατάσσοντας τα μέρη της C. Τότε το πλήθος των μεταθέσεων τύπου λ με σύνολο καθόδων που περιέχεται στο D είναι ίσο με $\alpha_{\lambda\mu}$.*

Απόδειξη. Έστω $\beta_{\lambda\mu}$ το ζητούμενο πλήθος μεταθέσεων. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda\mu} &= \sum_{D' \subseteq D} \left\langle L_\lambda, r_{C(D')} \right\rangle = \left\langle L_\lambda, \sum_{D' \subseteq D} r_{C(D')} \right\rangle = \langle L_\lambda, h_\mu \rangle \\ &= \left\langle \sum_\nu \alpha_{\lambda\nu} m_\nu, h_\mu \right\rangle = \sum_\nu \alpha_{\lambda\nu} \langle m_\nu, h_\mu \rangle = \sum_\nu \alpha_{\lambda\nu} \delta_{\nu\mu} = \alpha_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την σχέση $\sum\limits_{D' \subseteq D} r_{C(D')} = h_\mu$ η οποία προκύπτει με αντιστροφή Möbius στην σχέση 2.1.5. □

Παράδειγμα 3.1.3. *Για $n = 4, D = \{2\}$ και $\lambda = (3,1)$ οι μεταθέσεις με σύνολο καθόδων που περιέχεται στο D και τύπο λ είναι οι $1423 = (243)(1)$ και $2314 = (123)(4)$. Οι δε συλλογές απο μεταγιόν τύπου λ και εκτίμησης $x_1^2 x_2^2$ είναι οι $\{(x_1x_1x_2), (x_2)\}$ και $\{(x_1x_2x_2), (x_1)\}$.*

3.2 Μια αντιστοιχία μεταξύ λέξεων και συλλογών απο μεταγιόν

Θα δώσουμε πρώτα έναν εναλλακτικό ορισμό για τις συναρτήσεις F_C. Έστω $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ μία λέξη στο ελεύθερο μονοειδές X^*. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \delta_w : \{1, 2, \ldots, n\} &\to X \times \{1, 2, \ldots, n\} \\ i &\mapsto \delta_w(i) = (x_i, i) \end{aligned}$$

Διατάσσουμε το $X \times \{1, 2, \ldots, n\}$ με τη λεξικογραφική διάταξη και ορίζουμε ολική διάταξη στο $\{1, 2, \ldots, n\}$ ως εξής

$$i \subset j \quad \text{ανν} \quad \delta_w(i) < \delta_w(j)$$

Δηλαδή,

$$i \subset j \quad \text{ανν} \quad x_i < x_j \text{ ή } (x_i = x_j \text{ και } i < j)$$

Αυτή η ολική διάταξη, λέγεται *standard numbering* της w και ουσιαστικά απαριθμεί τις θέσεις της w απ' τα αριστερά προς τα δεξιά, ξεκινώντας απ' το μικρότερο γράμμα, στο αμέσως επόμενο κ.ο.κ. Η *standard permutation* της w είναι η μοναδική μετάθεση $st(w) = \sigma$ ώστε

$$\sigma(i) < \sigma(j) \Leftrightarrow \delta_w(i) < \delta_w(j)$$

Παράδειγμα 3.2.1.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ w & = & b & b & a & a & b & c & c & c & b & c & b & b \\ \sigma & = & 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 9 & 10 & 11 & 6 & 12 & 7 & 8 \end{array}$$

Λήμμα 3.2.2. *Έστω $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ώστε $C(\sigma^{-1}) = C$. Τότε η F_C είναι το άθροισμα των εκτιμήσεων όλων των λέξεων με standard permutation σ.*

Απόδειξη. Εξ ορισμού έχουμε

$$F_C = \sum ev(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω απ' όλες τις αύξουσες λέξεις $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ ώστε για όλα τα $i \in D$ να είναι $y_i < y_{i+1}$, όπου D το υποσύνολο που αντιστοιχεί στην C. Θέτοντας $x_i = y_{\sigma(i)}$ έχουμε $F_C = \sum ev(x_1 x_2 \ldots x_n)$ όπου το άθροισμα είναι πάνω απ' όλες τις λέξεις για τις οποίες ισχύει:

$$x_{\sigma^{-1}(1)} \leq x_{\sigma^{-1}(2)} \leq \ldots \leq x_{\sigma^{-1}(n)} \quad \text{και} \quad (\text{για όλα τα } i \in D,\ x_{\sigma^{-1}(i)} < x_{\sigma^{-1}(i+1)}) \tag{3.2.1}$$

Θα αποδείξουμε ότι η 3.2.1 είναι ισοδύναμη με $\sigma = st(x_1x_2\dots x_n)$. Αρχικά, υποθέτουμε οτι $\sigma = st(x_1x_2\dots x_n)$. Δηλαδή, $\sigma(i) < \sigma(j) \Leftrightarrow \delta_w(i) < \delta_w(j)$ ή αλλιώς

$$\sigma(i) < \sigma(j) \Leftrightarrow [x_i < x_j \text{ ή } (x_i = x_j \text{ και } i < j)]$$

Έτσι, έχουμε

$$i < i+1 \implies \sigma\left(\sigma^{-1}(i)\right) < \sigma\left(\sigma^{-1}(i+1)\right)$$

και άρα

$$x_{\sigma^{-1}(i)} < x_{\sigma^{-1}(i+1)} \text{ ή } (x_{\sigma^{-1}(i)} = x_{\sigma^{-1}(i+1)}\ , \text{ αν } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(i+1))$$

Τελικά, $x_{\sigma^{-1}(1)} \leq x_{\sigma^{-1}(2)} \leq \dots \leq x_{\sigma^{-1}(n)}$ και για όλα τα $i \in D$, είναι $x_{\sigma^{-1}(i)} < x_{\sigma^{-1}(i+1)}$. Από την άλλη, υποθέτοντας την 3.2.1 θα δείξουμε ότι $\sigma(i) < \sigma(j) \Leftrightarrow \delta_w(i) < \delta_w(j)$. Επειδή οι δύο διατάξεις είναι ολικές, αρκεί να δείξουμε μόνο το "$\Rightarrow$". Είναι

$$x_i = x_{\sigma^{-1}(\sigma(i))} \leq x_{\sigma^{-1}(\sigma(i)+1)} \leq \dots \leq x_{\sigma^{-1}(\sigma(j))} = x_j$$

άρα $x_i \leq x_j$ για $\sigma(i) < \sigma(j)$. Έστω τώρα $x_i = x_j$. Τότε έχουμε $\sigma(i), \sigma(i)+1, \dots, \sigma(j)-1 \notin D$. Όμως, παρατηρούμε ότι $k \notin D \Rightarrow \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)$ δηλαδή, το k βρίσκεται αριστερά απ' το $k+1$ στη λέξη $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$. Άρα, το $\sigma(i)$ βρίσκεται αριστερά απ' το $\sigma(i)+1$, το $\sigma(i)+1$ αριστερά απ' το $\sigma(i)+2$ κ.ο.κ. Τελικά, το $\sigma(i)$ βρίσκεται αριστερά απ' το $\sigma(j)$, πράγμα που σημαίνει ότι $i < j$. □

Το standard numbering των λέξεων θα μας επιτρέψει να περιγράψουμε μια $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ λέξεων και συλλογών από μεταγιόν η οποία σέβεται τον κυκλικό τύπο και την εκτίμηση. Μία $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ λέξεων και συλλογών απο μεταγιόν που διατηρεί την εκτίμηση είναι ήδη γνωστή και προκύπτει απ' τη μοναδική παραγοντοποίηση κάθε λέξης σε γινόμενο από λέξεις του *Lyndon* (βλ. [7] Θερώρημα 5.1.5). Άρα, το πλήθος των λέξεων με δοσμένη εκτίμηση ισούται με το πλήθος των συλλογών από μεταγιόν με την ίδια εκτίμηση, γεγονός που θα απλουστεύσει την απόδειξη μας.

Έστω $w = x_1x_2\dots x_n$ μια λέξη μήκους n στο X^* και $\sigma = st(w)$. Έστω ακόμη $c = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ ένας κύκλος της σ. Τότε, συμβολίζουμε με $v_c(w)$ το μεταγιόν που είναι η κλάση συζυγίας της λέξης $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$. Τώρα, ορίζουμε τη συλλογή

$$U(w) = \{v_c(w) : c \text{ κύκλος της } st(w)\}$$

Τυπικά, θα λέγαμε ότι η απεικόνιση $M = U(w)$ ορίζεται για κάθε μεταγιόν ως

$$M(v) = \text{ το πλήθος των κύκλων } c \text{ της } st(w) \text{ με } v_c(w) = v$$

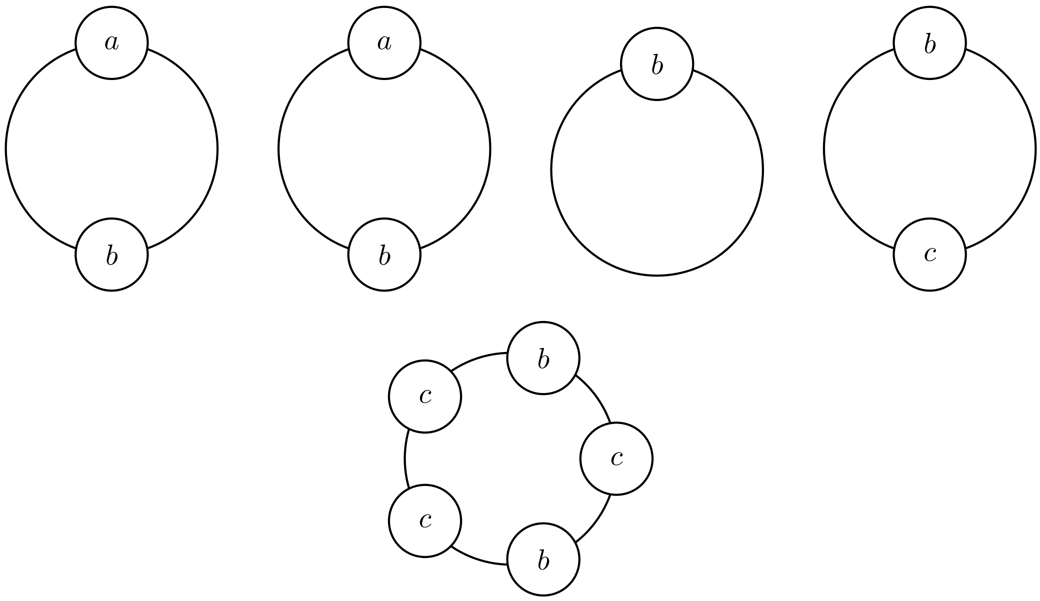
Παρατηρούμε ότι $ev(w) = ev\left(U(w)\right)$.

Παράδειγμα 3.2.3. *Αν w και σ όπως στο Παράδειγμα 3.2.1, τότε η σ γράφεται σε γινόμενο ξένων κύκλων ως εξής*

$$\sigma = (1\,3)\,(2\,4)\,(5)\,(6\,9)\,(7\,10\,12\,8\,11)$$

Έτσι, η συλλογή $U(w)$ -διαβάζοντας τα μεταγιόν αντιωρολογιακά- θα είναι:

Σχήμα 3.2



Λήμμα 3.2.4. *Η U είναι $1-1$ και επί αντιστοιχία η οποία διατηρεί την εκτίμηση, και ο κυκλικός τύπος της w είναι ο ίδιος με της $U(w)$.*

Απόδειξη. Αρχικά, επειδή η U σέβεται την εκτίμηση, αρκεί να δείξουμε το "επί", καθώς το σύνολο των λέξεων με δοσμένη εκτίμηση και αυτό των συλλογών απο μεταγιόν με την ίδια εκτίμηση είναι ισοπληθικά.

Έστω P το σύνολο των περιοδικών λέξεων στο $X^{\mathbb{N}}$.Κάθε στοιχείο στο P είναι της μορφής $\pi(u)$, όπου u πρωταρχική λέξη, και $\pi : X^+ \to P$ είναι η απεικόνιση:

$$\pi(y_1, y_2, \ldots, y_k) = (y_1, y_2, \ldots, y_k, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)\ ,\ y_i \in X$$

Παρατηρούμε ότι η π είναι μια $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ πρωταρχικών λέξεων και περιοδικών ακολουθιών. Έτσι, μπορούμε κάθε πρωταρχική λέξη, στο X να την ταυτίσουμε με την αντίστοιχη περιδική ακολουθία στο P.

Θεωρούμε την απεικόνιση $z : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ με $z(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$.Ο περιορισμός της z στο P είναι μετάθεση καθώς έχουμε:

$$z\left(\pi(y_1, \ldots, y_k)\right) = \pi(y_2, \ldots, y_k, y_1) \tag{3.2.2}$$

$$z^{-1}\left(\pi(y_1, \ldots, y_k)\right) = \pi(y_k, y_1 \ldots, y_{k-1}) \tag{3.2.3}$$

Έπεται ότι η τροχιά της $\pi(u)$ (όπου u πρωταρχική λέξη) μέσω της z^{-1} αποτελείται από τις ακολουθίες $\pi(v)$ όπου v συζυγής της u και έχει ακριβώς $|u|$ στοιχεία.

Διατάσσουμε τα $X^{\mathbb{N}}$ και $X^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ με τη λεξικογραφική διάταξη. Έστω $f : X^{\mathbb{N}} \to X$ η απεικόνιση που στέλνει κάθε ακολουθία στο πρώτο στοιχείο της $f(x_0, x_1, \ldots) = x_0$. Επεκτείνουμε την z και την f στο $X \times \mathbb{N}$ με $z(s,l) = (z(s), l)$ και $f(s,l) = f(s)$.

Συμβολίζουμε με (u) την κλάση συζυγίας της λέξης u και με $\tilde{u}$ την ανάστροφη λέξη της u (δηλαδή, αν $u = x_1 x_2 \ldots x_k$ τότε $\tilde{u} = x_k x_{k-1} \ldots x_1$). Έστω M πεπερασμένη συλλογή (πρωταρχικών) μεταγιόν μήκους n, δηλαδή $n = \sum\limits_u |u| M(u)$. Αντιστοιχούμε στην M το υποσύνολο του P που ορίζεται ως

$$E = \bigcup_{u \in X^*} \{\pi(\tilde{u})\} \times \{1, 2, \ldots, M\left((u)\right)\}$$

όπου $\{1, 2, \ldots, M\left((u)\right)\} = \emptyset$ αν $M\left((u)\right) = 0$. Σημειώνουμε ότι το E έχει n στοιχεία, αφού υπάρχουν $|u|$ στοιχεία στην κλάση συζυγίας της λέξης u. Ακόμη, παρατηρούμε ότι το E κληρονομεί την ολική διάταξη $<$ του $X^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ οπότε μπορούμε να γράψουμε $E = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}_<$. Όμως, $M\left((u)\right) = M\left((v)\right)$ για συζυγείς λέξεις u, v, επομένως απ' τις 3.2.2 και 3.2.3 προκύπτει ότι ο περιορισμός της z στο E αποτελεί μετάθεση του E. Ορίζουμε τώρα $\sigma := \delta^{-1} \circ z^{-1} \circ \delta$ τη μετάθεση του $\mathfrak{S}_n$ που αντιστοιχεί στην z^{-1}, όπου $\delta : [n] \to E$ με $\delta(i) = e_i$ για κάθε $i \in [n]$.

Έστω $w = x_1 \ldots x_n$ με $x_i = f \circ z^{-1}(e_i)$ για κάθε $i \in [n]$. Θα δείξουμε ότι $U(w) = M$. Αρχικά, ισχυριζόμαστε ότι $\sigma = st(w)$. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma(i) < \sigma(j) &\Leftrightarrow \left(\delta^{-1} \circ z^{-1} \circ \delta\right)(i) < \left(\delta^{-1} \circ z^{-1} \circ \delta\right)(j) \Leftrightarrow \left(\delta^{-1} \circ z^{-1}\right)(e_i) < \left(\delta^{-1} \circ z^{-1}\right)(e_j) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z^{-1}(e_i) < z^{-1}(e_j) \end{aligned}$$

καθώς οι δ και δ^{-1} είναι αύξουσες συναρτήσεις. Η τελευταία ανισότητα όμως, σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη, είναι ισοδύναμη με

$$f\left(z^{-1}(e_i)\right) < f\left(z^{-1}(e_j)\right) \text{ ή } \left(f\left(z^{-1}(e_i)\right) = f\left(z^{-1}(e_j)\right) \text{ και } e_i < e_j\right)$$

δηλαδή, $x_i < x_j$ ή ($x_i = x_j$ και $i < j$).

Απ' τις 3.2.2 και 3.2.3, προκύπτει ότι ένας κύκλος της z^{-1} είναι της μορφής

$$\left(\pi(y_k y_{k-1} \ldots y_1), l\right), \left(\pi(y_1 y_k \ldots y_2), l\right), \ldots, \left(\pi(y_{k-1} y_{k-2} \ldots y_k), l\right)$$

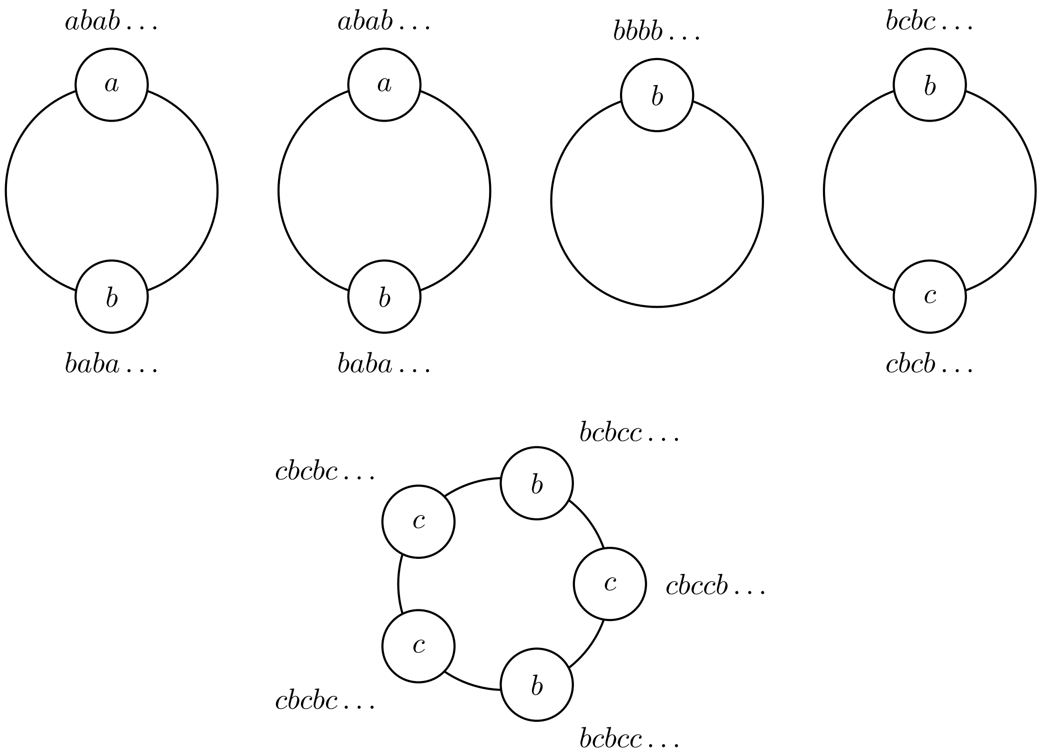
για κάποια πρωταρχική λέξη $u = y_1 y_2 \ldots y_k$ και κάποιο $1 \leq l \leq M\left((u)\right)$. Παρατηρούμε ότι συζυγείς λέξεις, ορίζουν τον ίδιο κύκλο. Οι δε κύκλοι της $\sigma = \delta^{-1} \circ z^{-1} \circ \delta$ είναι της μορφής $c = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, όπου

$$\begin{aligned} i_1 &= \delta^{-1}\left(\pi(y_k y_{k-1} \ldots y_1), l\right) \\ i_2 &= \delta^{-1}\left(\pi(y_1 y_k \ldots y_2), l\right) \\ &\vdots \\ i_k &= \delta^{-1}\left(\pi(y_{k-1} y_{k-2} \ldots y_k), l\right) \end{aligned}$$

Έπεται ότι το αντίστοιχο μεταγιόν $v_c(w)$ ισούται με (u) οπότε καταλήγουμε ότι $U(w) = M$. $\square$

Παράδειγμα 3.2.5. *Θα βρούμε την αντίστροφη της U για τη συλλογή από μεταγιόν που περιγράφεται στο Σχήμα 3.2. Αντιστοιχούμε σε κάθε κορυφή, την περιοδική λέξη που προκύπτει διαβάζοντας το μεταγιόν ανάποδα (δηλαδή, με τη φορά του ρολογιού):*

Σχήμα 3.3



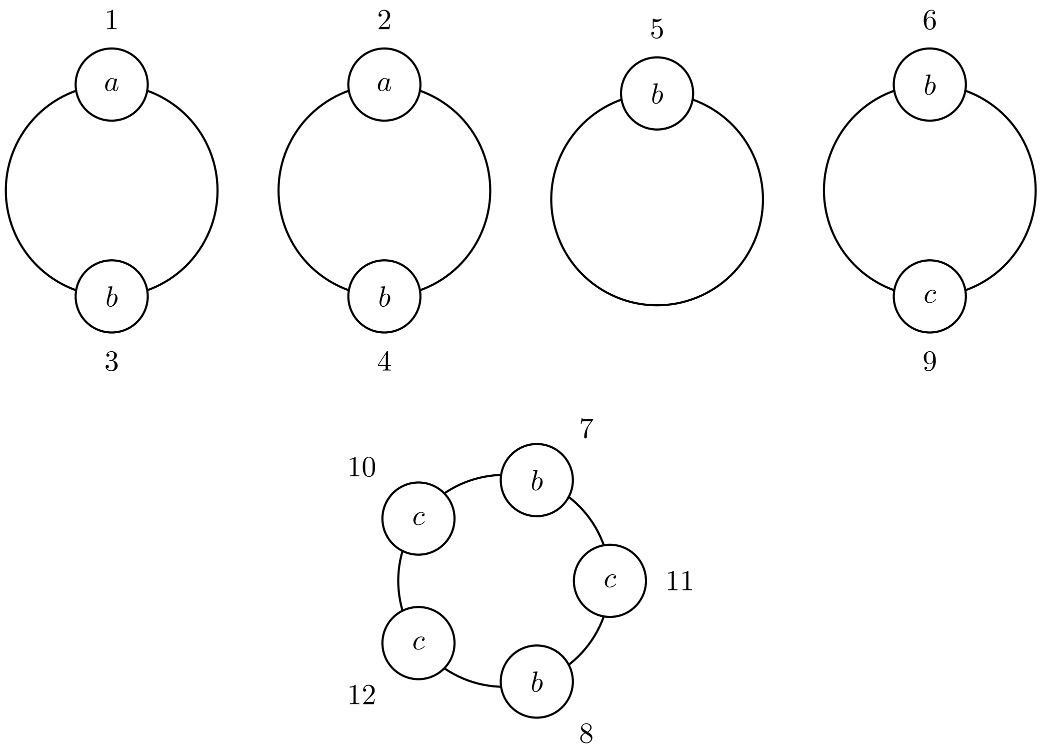
Στη συνέχεια, διατάσσουμε λεξικογραφικά αυτές τις ακολουθίες (αν δύο λέξεις είναι ίδιες, πρέπει πρώτα να ορίσουμε μια διάταξη στα μεταγιόν της συλλογής, στο παράδειγμα μας δίνουμε προτεραιότητα από τα αριστερά στα δεξιά Σχήμα 3.4). Έτσι, παίρνουμε μια μετάθεση σε κυκλική μορφή:

$$\sigma = (1\,3)\,(2\,4)\,(5)\,(6\,9)\,(7\,10\,12\,8\,11) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 9 & 10 & 11 & 6 & 12 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

την γράφουμε ως λέξη $\sigma = 3\,4\,1\,2\,5\,9\,10\,11\,6\,12\,7\,8$, και τέλος βάζοντας στη θέση κάθε αριθμού το αντίστοιχο γράμμα, παίρνουμε τη λέξη $w = bbaabcccbcbb$ του Παραδείγματος 3.2.3.

Σχήμα 3.4



Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα Gessel-Retenauer.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.4, μπορούμε να γράψουμε

$$L_\lambda = \sum_{\lambda(M)=\lambda} ev(M) = \sum_{\lambda(st(w))=\lambda} ev(w)$$

και εφόσον $\lambda(\sigma) = \lambda(\sigma^{-1})$, απ' το Λήμμα 3.2.2, θα είναι:

$$L_\lambda = \sum_{\lambda(\sigma)=\lambda} \sum_{st(w)=\sigma^{-1}} ev(w) = \sum_{\lambda(\sigma)=\lambda} F_{C(\sigma)}$$

Από την άλλη, η L_λ ως συμμετρική συνάρτηση, γράφεται σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1 ως εξής:

$$L_\lambda = \sum_\alpha \langle L_\lambda, r_\alpha \rangle F_\alpha$$

Έτσι, εξισώνοντας τους συντελεστές του F_α στις δύο εκφράσεις παίρνουμε $\langle L_\lambda, r_\alpha \rangle = \sum_{\substack{\lambda(\sigma)=\lambda \\ C(\sigma)=\alpha}} 1$, δηλαδή το $\langle L_\lambda, r_\alpha \rangle$ ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων με τύπο λ και σύνθεση καθόδων α. □

3.3 Πλήθυνση

Στον δακτύλιο Λ των συμμετρικών συναρτήσεων, ορίζεται και ένα άλλο είδος πολλαπλασιασμού, γνωστό ως πλήθυνση (plethysm).

Ορισμός 3.3.1. *Έστω g συμμετρική συνάρτηση. Για οποιαδήποτε συμμετρική συνάρτηση f γράφουμε $f \circ g$ για την πλήθυνση των δύο συναρτήσεων, και είναι:*

(i) $c \circ g = c$, *για κάθε σταθερά c.*

(ii) $p_k \circ g = g(x_1^k, x_2^k, \ldots)$, *για κάθε $k \geq 1$.*

(iii) $(f_1 \cdot f_2) \circ g = (f_1 \circ g) \cdot (f_2 \circ g)$, *για όλα τα $f_1, f_2 \in \Lambda$.*

(iv) $(f_1 + f_2) \circ g = (f_1 \circ g) + (f_2 \circ g)$, *για όλα τα $f_1, f_2 \in \Lambda$.*

Επειδή οι power sum συμμετρικές συναρτήσεις αποτελούν βάση του δακτυλίου των συμμετρικών συναρτήσεων (πάνω απ' το $\mathbb{Q}$), οι παραπάνω συνθήκες ορίζουν το $f \circ g$ για κάθε συμμετρική συνάρτηση f. Πράγματι, είναι

$$f \circ g = \left(\sum_{\lambda} c_\lambda p_\lambda \right) \circ g = \sum_{\lambda} c_\lambda \left(p_\lambda \circ g \right) = \sum_{\lambda} c_\lambda \left(\prod_{i=1}^{l(\lambda)} p_{\lambda_i} \circ g \right)$$
$$= \sum_{\lambda} c_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} (p_{\lambda_i} \circ g) = \sum_{\lambda} c_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} g(x_1^{\lambda_i}, x_2^{\lambda_i}, \ldots)$$

όπου στη δεύτερη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε ότι για κάθε $f, g \in \Lambda$ ισχύει $(cf) \circ g = c(f \circ g)$, για κάθε σταθερά c. Πράγματι, αρκεί να γράψουμε

$$(cf) \circ g = (c \circ g) \cdot (f \circ g) = c(f \circ g)$$

Σχόλιο 3.3.2. *Ένας ισοδύναμος ορισμός για την πλήθυνση είναι ο εξής. Αν $f, g \in \Lambda$ συμμετρικές συναρτήσεις, και η f γράφεται ως άθροισμα μονωνύμων $f = \sum_{i \geq 1} t_i$, όπου $t_i = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots$, τότε είναι $f \circ g = g(t_1, t_2, \ldots)$.*

Απο τον Ορισμό 3.3.1 προκύπτει ότι η απεικόνιση $f \mapsto f \circ g$ είναι ενδομορφισμός του Λ, ισοδύναμα η $\circ$ είναι πράξη στο Λ η οποία είναι γραμμική και πολλαπλασιαστική στην πρώτη μεταβλητή. Καταγράφουμε τώρα κάποιες ιδιότητες της πλήθυνσης που προκύπτουν άμεσα απ' τον ορισμό.

Πρόταση 3.3.3. *Ισχύουν τα εξής:*

(i) $p_n \circ p_m = p_{nm} = p_m \circ p_n$, *για όλα τα $n, m \in \mathbb{N}$.*

(ii) $p_\lambda \circ p_m = p_{\lambda \cdot m} = p_m \circ p_\lambda$, *για όλα τα $m \in \mathbb{N}$ και $f \in \Lambda$ (όπου $\lambda \cdot m = (\lambda_1 m, \lambda_2 m, \ldots)$ η διαμέριση που προκύπτει απ' τη λ πολλαπλασιάζοντας κάθε μέρος της με m).*

(iii) $f \circ p_m = p_m \circ f$, *για όλα τα* $m \in \mathbb{N}$ *και* $f \in \Lambda$.

(iv) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, *για όλα τα* $f, g, h \in \Lambda$.

Απόδειξη. (i) Είναι

$$p_n \circ p_m = p_m(x_1^n, x_2^n, \ldots) = \sum_{i \geq 1} (x_i^n)^m = \sum_{i \geq 1} x_i^{nm} = p_{nm}$$

Όμοια παίρνουμε $p_m \circ p_n = p_{nm}$.

(ii) Γράφουμε

$$\begin{aligned} p_\lambda \circ p_m &= (p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \ldots p_{\lambda_k}) \circ p_m = (p_{\lambda_1} \circ p_m)(p_{\lambda_2} \circ p_m) \ldots (p_{\lambda_k} \circ p_m) = \\ &= p_{\lambda_1 m} \cdot p_{\lambda_2 m} \ldots p_{\lambda_k m} = p_{\lambda \cdot m} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} p_m \circ p_\lambda = p_{\lambda \cdot m} &= p_\lambda(x_1^m, x_2^m, \ldots) = p_{\lambda_1}(x_1^m, x_2^m, \ldots) \cdot \ldots \cdot p_{\lambda_k}(x_1^m, x_2^m, \ldots) = \\ &= (p_{\lambda_1} \circ p_m) \cdot \ldots \cdot (p_{\lambda_k} \circ p_m) = p_\lambda \circ p_m \end{aligned}$$

(iii) Αρχικά, είναι $p_\lambda \circ p_k = p_k \circ p_\lambda = p_\lambda(x_1^k, x_2^k, \ldots)$. Επομένως, γράφουμε $f = \sum_\lambda c_\lambda p_\lambda$ και έχουμε

$$f \circ p_m = \left(\sum_\lambda c_\lambda p_\lambda \right) \circ p_m = \sum_\lambda c_\lambda (p_\lambda \circ p_m) = \sum_\lambda c_\lambda p_\lambda (x_1^m, x_2^m, \ldots) = p_m \circ f$$

(iv) Αν f σταθερή, η πρόταση ισχύει.Αποδεικνύουμε πρώτα την ειδική περίπτωση όπου $f = p_k$, $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι είναι

$$(h \circ p_m) \circ p_n = h(x_1^m, x_2^m, \ldots) \circ p_n = h(x_1^{mn}, x_2^{mn}, \ldots) = h \circ p_{mn} = h \circ (p_m \circ p_n)$$

Έτσι, γράφουμε $g = \sum_\mu c_\mu p_\mu$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h) = p_k \circ \left(\sum_\mu c_\mu p_\mu \circ h \right) &= \left(\sum_\mu c_\mu (p_\mu \circ h) \right) \circ p_k = \\ &= \sum_\mu c_\mu \left(\prod_{i=1}^{l(\mu)} p_{\mu_i} \circ h \right) \circ p_k = \sum_\mu c_\mu \prod_{i=1}^{l(\mu)} (p_{\mu_i} \circ h) \circ p_k = \\ &= \sum_\mu c_\mu \prod_{i=1}^{l(\mu)} (h \circ p_{\mu_i}) \circ p_k = \sum_\mu c_\mu \prod_{i=1}^{l(\mu)} h \circ (p_{\mu_i} \circ p_k) = \\ &= \sum_\mu c_\mu \prod_{i=1}^{l(\mu)} (p_{\mu_i} \circ p_k) \circ h = \left(\sum_\mu c_\mu p_\mu \circ p_k \right) \circ h = \\ &= (g \circ p_k) \circ h = (f \circ g) \circ h \end{aligned}$$

Στην περίπτωση $f = p_\lambda$, όπου $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h) = p_\lambda \circ (g \circ h) = \prod_{i=1}^{k} p_{\lambda_i} \circ (g \circ h) = \\ = \prod_{i=1}^{k} (p_{\lambda_i} \circ g) \circ h = (\prod_{i=1}^{k} p_{\lambda_i} \circ g) \circ h = \\ = (f \circ g) \circ h \end{aligned}$$

Για τη γενική περίπτωση, γράφουμε $f = \sum_\lambda c_\lambda p_\lambda$ και είναι:

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h = \left(\sum_\lambda c_\lambda p_\lambda \circ g \right) \circ h = \sum_\lambda c_\lambda (p_\lambda \circ g) \circ h = \\ = \sum_\lambda c_\lambda (p_\lambda \circ (g \circ h)) = f \circ (g \circ h) \end{aligned}$$

□

Σχόλιο 3.3.4. *Η πλήθυνση δεν έχει την μεταθετική ιδιότητα. Πραγματί, είναι* $(-1) \circ h_2 = -1$. *Από την άλλη, έχουμε*

$$\begin{aligned} h_2 = \sum_{i \geq 1} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j = \frac{1}{2} \left(\sum_{i \geq 1} x_i^2 + \sum_{i \geq 1} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(\sum_{i \geq 1} x_i^2 + \left(\sum_{i \geq 1} x_i \right)^2 \right) = \frac{1}{2}(p_2 + p_1^2) \end{aligned}$$

οπότε, είναι $h_2 \circ (-1) = \frac{1}{2}(p_2 + p_1^2) \circ (-1) = \frac{1}{2} p_2 \circ (-1) + \frac{1}{2} p_1^2 \circ (-1) = 0$

Η επόμενη πρόταση μας πληροφορεί για την "συμπεριφορά" της πλήθυνσης σε σχέση με την αυτο-αντίστροφη απεικόνιση ω.

Πρόταση 3.3.5. *Για κάθε συμμετρική συνάρτηση f και g ομογενή συμμετρική συνάρτηση βαθμού n, ισχύει:*

$$\omega(f \circ g) = \begin{cases} f \circ \omega(g) & , \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \omega(f) \circ \omega(g) & , \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Απόδειξη. Η πρόταση ισχύει αν η f είναι σταθερή. Αρκεί να την αποδείξουμε για την περίπτωση $f = p_\lambda$. Έστω $g = \sum_\mu c_\mu p_\mu$. Γράφουμε $f \circ g = p_\lambda \circ \sum_\mu c_\mu p_\mu = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \sum_\mu c_\mu p_{\lambda_i \cdot \mu}$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1.18 έχουμε:

$$\omega(f \circ g) = \omega \left(\prod_{i=1}^{l(\lambda)} \sum_\mu c_\mu p_{\lambda_i \cdot \mu} \right) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \sum_\mu c_\mu (-1)^{|\mu|\lambda_i - l(\mu)} p_{\lambda_i \cdot \mu}$$

Αν n άρτιος, τότε $|\mu|$ άρτιος για όλα τα μ του αθροίσματος όποτε έχουμε

$$\omega(f \circ g) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \sum_{\mu} c_\mu (-1)^{|\mu|-\lambda(\mu)} p_\mu \circ p_{\lambda_i} = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \omega(g) \circ p_{\lambda_i} = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} p_{\lambda_i} \circ \omega(g) = f \circ \omega(g)$$

Από την άλλη, αν n περιττός, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \omega(f \circ g) &= (-1)^{|\lambda|} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \sum_{\mu} c_\mu (-1)(-1)^{|\mu|-l(\mu)} p_\mu \circ p_{\lambda_i} = (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \omega(g) \circ p_{\lambda_i} = \\ &= \omega(p_\lambda) \circ \omega(g) = \omega(f) \circ \omega(g) \end{aligned}$$

□

Το παρακάτω θεώρημα προκύπτει απο το Θεώρημα 3.1.1 και την σχέση 3.1.1 και μας δίνει μια εναλλακτική έκφραση για την συμμετρική συνάρτηση L_λ.

Θεώρημα 3.3.6. *Αν $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$ διαμέριση του n, τότε*

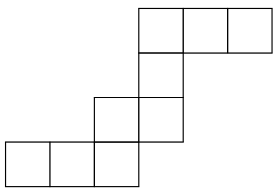
$$L_\lambda = (h_{m_1} \circ L_1)(h_{m_2} \circ L_2) \dots$$

3.4 Μια εφαρμογή

Σ' αυτήν την ενότητα θα δείξουμε ότι για κάποιους κυκλικούς τύπους, η κατανομή των συνόλων καθόδων είναι συμμετρική ως προς το συμπλήρωμα.

Αν η σύνθεση $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ αντιστοιχεί στο υποσύνολο D του $[n-1]$, τότε γράφουμε α' για τη σύνθεση που αντιστοιχεί στο συμπλήρωμα του D στο $[n-1]$. Μπορούμε να πάρουμε την α' απ' τη λωρίδα που αντιστοιχεί στην α διαβάζοντας τις στήλες αντί για τις γραμμές. Για παράδειγμα, η λωρίδα του Σχήματος 3.5 αντιστοιχεί στη σύνθεση $(3, 2, 1, 3)$ του 9 και το αντίστοιχο υποσύνολο του $[8]$ είναι το $\{3, 5, 6\}$.

Σχήμα 3.5



Διαβάζοντας τις στήλες, παίρνουμε τη σύνθεση $(1, 1, 2, 3, 1, 1)$ του 9 με αντίστοιχο υποσύνολο $\{1, 2, 4, 7, 8\}$, το οποίο είναι το συμπλήρωμα του $\{3, 5, 6\}$ στο $[8]$.

Θεώρημα 3.4.1. *Υποθέτουμε ότι η διαμέριση λ δεν έχει μέρη ισοϋπόλοιπα με 2 modulo 4 και κάθε περιττό μέρος της λ εμφανίζεται μόνο μια φορά. Τότε, το πλήθος των μεταθέσεων με κυκλικό τύπο λ και δοσμένο σύνολο καθόδων ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων με κυκλικό τύπο λ και συμπληρωματικό σύνολο καθόδων.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η υπόθεση του θεωρήματος συνεπάγεται ότι $\omega(L_\lambda) = L_\lambda$, αφού τότε, θα είναι

$$\langle L_\lambda, r_\alpha \rangle = \langle \omega(L_\lambda), \omega(r_\alpha) \rangle = \langle L_\lambda, r_{\alpha'} \rangle$$

για κάθε σύνθεση α (καθώς απ' την 2.1.7 έχουμε $\omega(r_\alpha) = r_{\alpha'}$), και το θεώρημα προκύπτει απ' το Θεώρημα $Gessel - Reutenauer$. Έστω, λοιπόν, $\lambda = 1^{m_1}2^{m_2}\ldots$. Τότε, απ' το Θεώρημα 3.3.6 γράφουμε $L_\lambda = (h_{m_1} \circ L_1)(h_{m_2} \circ L_2)\ldots$. Αρχικά, απο την 3.1.2 παίρνουε

$$\omega(L_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d)(-1)^{(d-1)n/d} p_d^{n/d}$$

και παρατηρούμε ότι $\mu(d)(-1)^{(d-1)n/d} = \mu(d)$, εκτός d άρτιος, $4 \nmid d$ και $\frac{n}{d}$ περιττός, δηλαδή αν $n = 2k$ με k περιττός. Όμως, απο υπόθεση, η λ δεν έχει μέρη ισοϋπόλοιπα με 2 mod 4. Ακόμη, απ' την 3.3.1 έχουμε

$$\omega(h_r \circ L_n) = \begin{cases} h_r \circ \omega(L_n) & , n \text{ άρτιος} \\ e_r \circ \omega(L_n) & , n \text{ περιττός} \end{cases}$$

και επειδή κάθε περιττό μέρος της λ εμφανίζεται μόνο μια φορά ($r = 1$), έπεται ότι $\omega(h_r \circ L_n) = h_r \circ L_n$ σε κάθε περίπτωση. □

Σχόλιο 3.4.2. *Το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.4.1 δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έχουμε*

$$L_4 = \frac{1}{4}(p_1^4 - p_2^2) = L_{(2,1,1)}$$

οπότε, $\omega(L_{(2,1,1)}) = L_{(2,1,1)}$. Απ' το παράδειγμα αυτό έπεται και ότι τα L_λ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως δεν σχηματίζουν βάση των συμμετρικών συναρτήσεων.

Βιβλιογραφία

[1] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol.2, Addison-Wesley, Reading, MA 1976.

[2] A. J. Brandt, *The free Lie ring and Lie representations of the full linear group*, Trans.Amer.Math.Soc. 56 (1944) 528-536.

[3] W. Foulton, *Young Tableux With Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[4] H. O. Foulkes, *The analysis of the characters of the Lie representations of the general linear group*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959) 497-501.

[5] I. M. Gessel, C. Reutenauer, *Counting permutations with given cycle structure and descent set*, J.Combinatorial Theory (A) 64 (1993) 189-215.

[6] I. M. Gessel, C. Reutenauer, *Multipartite P-partitions and inner product of skew Schur functions*, Contemp. Math. 34 (1984) 289-301.

[7] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Addison-Wesley, Reading, MA 1983.

[8] I. G. MacDonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs,Oxford, New York 1995.

[9] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, Cham: Chelsea, New York 1960.

[10] A. Mendes, and J. Remmel, *Counting with Symmetric Functions*, Springer 2015.

[11] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Clarendon Press, Oxford 1993.

[12] B. Sagan, *The Symmetric Group Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Springer-Verlag, New York 2001.

[13] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics vol.1*, Cambridge University Press, Cambridge, UK 1997.

[14] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics vol.2*, Cambridge University Press, Cambridge, UK 1999.

[15] R. P. Stanley, *Ordered Structures and Partitions*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol.119, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1972.

[16] R. M. Thrall, *On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring*, Amer.J.Math. 64 (1942) 371-388.