



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Φυσικής - Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και
Στοιχειωδών Σωματιδίων

Κοσμολογικός Πληθωρισμός σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας

Γιώργος Κονταξής - Α.Μ. 201622

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων: Α. Λαχανάς

Αθήνα 2018

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετάται ο κοσμολογικός πληθωρισμός σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας. Ο πληθωρισμός επιλύει ορισμένα από τα κοσμολογικά προβλήματα του προτύπου Big Bang και στην πιο απλή περιγραφή του περιλαμβάνει ένα βαθμωτό πεδίο. Ένα από τα μοντέλα που βρίσκεται σε εξαιρετική συμφωνία με τα τελευταία παρατηρησιακά δεδομένα είναι το μοντέλο Starobinsky, το οποίο προκύπτει από μια $f(R)$ θεωρία βαρύτητας με $f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$. Αυτό αποτελεί κίνητρο για την κοσμολογική μελέτη πιο γενικών $f(R)$ θεωριών, αφού αυτές είναι ισοδύναμες, στο σύστημα Einstein, με ένα βαθμωτό πεδίο με την παρουσία δυναμικού. Η γενίκευση αυτού με την προσθήκη επιπλέον όρων απαιτεί αυτοί να είναι εξαιρετικά μικροί για επιτυχή πληθωρισμό. Για τον λόγο αυτό μελετούμε θεωρίες βαρύτητας υψηλότερης τάξης που περιέχουν και παραγώγους του βαθμωτού Ricci R . Στην πιο απλή εκδοχή εστιάζουμε στις θεωρίες $f(R) + R\Box R$, οι οποίες είναι ισοδύναμες με μία θεωρία του Einstein με την παρουσία δύο βαθμωτών πεδίων. Σε αυτήν την κατηγορία η περίπτωση $f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$ οδηγεί σε ασταθές δυναμικό, οπότε θεωρούμε πιο γενικές μορφές της συνάρτησης f με εγγενή χαρακτηριστικά. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι παρόλο που τα προκύπτοντα δυναμικά είναι ευσταθή, τα ελάχιστα τους είναι κενά τύπου anti de Sitter. Για επιτυχή πληθωρισμό ένα ανέβασμα (uplift) του δυναμικού είναι αναγκαίο, έτσι ώστε το Σύμπαν μετά από μια περίοδο εκθετικής διαστολής να καταλήγει σε ένα κενό Minkowski. Για τον σκοπό αυτό ίσως είναι αναγκαία η γενίκευση αυτών σε υπερβαρυτικά πρότυπα τύπου no-scale, που χαρακτηρίζονται από θετικά ορισμένα βαθμωτά δυναμικά με κενά τύπου Minkowski.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: πληθωρισμός, τροποποιημένη βαρύτητα, $f(R)$ θεωρία, υπερβαρύτητα

ABSTRACT

In this thesis we study cosmological inflation in modified gravity theories. Inflation solves some of the fundamental problems arising in the standard Big Bang Cosmology and in the simplest models is driven by a single scalar field. A popular model, which is in excellent agreement with the latest cosmological observations, after the launch of the Planck satellite, is the Starobinsky model. This arises from an $f(R)$ gravity theory, with $f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$, which is equivalent to a standard Einstein theory and a scalar field moving under the influence of a potential, which exhibits an extended plateau and is characterized by one mass parameter. The success of this model motivates us to study more general $f(R)$ -theories, which are known to be conformally equivalent to an Einstein theory including a scalar field moving in a scalar potential whose form is dictated by the choice of $f(R)$. It is shown that generalizing the Starobinsky model by the addition of extra terms it demands that they are unnaturally small in order to continue to have successful inflation. For this reason we study higher order gravity theories which involve derivatives of the Ricci scalar R too. In the simplest version, we focus on $f(R) + R\Box R$ -theories, which are equivalent to an Einstein theory containing two scalar fields. In this class of theories, the case $f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$ leads to an unstable potential and thus we consider more general forms of $f(R)$ having all desired properties curing the aforementioned pathologies. The results of this study show that although the arising potentials can be stable, their minima correspond to anti de Sitter vacua. In order to describe successful inflation, an uplift of the potential is necessary, so that the Universe, after a period of de-Sitter accelerated expansion, falls to a Minkowski vacuum. An option towards reaching this goal is to encompass these models within the so-called no-scale Supergravity theories, which feature positive defined potentials having stable Minkowski vacua.

KEY WORDS: inflation, modified gravity, $f(R)$ theory, supergravity

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	9
2	Κοσμολογία Big Bang	11
2.1	Χωρόχρονος FRW και εξισώσεις Friedmann	11
2.2	Σύμμορφος χρόνος και Ορίζοντες	14
2.2.1	Σύμμορφος χρόνος και null γεωδαισιακές	14
2.2.2	Ορίζοντας Hubble (Hubble horizon)	15
2.2.3	Σωματιδιακός ορίζοντας (particle horizon)	16
2.2.4	Ορίζοντας γεγονότων (event horizon)	17
2.3	Προβλήματα της συμβατικής Big Bang κοσμολογίας	17
2.3.1	Πρόβλημα του ορίζοντα	17
2.3.2	Πρόβλημα της χωρικά επίπεδης γεωμετρίας	19
2.3.3	Πρόβλημα των μονοπόλων	19
3	Φυσική του Πληθωρισμού	21
3.1	Επίλυση των κοσμολογικών προβλημάτων	21
3.1.1	Πρόβλημα του ορίζοντα	22
3.1.2	Πρόβλημα της χωρικά επίπεδης γεωμετρίας	25
3.1.3	Πρόβλημα των μονοπόλων	25
3.2	Πληθωρισμός από ένα βαθμωτό πεδίο	26
3.3	Προσέγγιση slow-roll	27
3.4	Παραδείγματα μοντέλων Πληθωρισμού	29
4	$f(R)$-θεωρίες και Πληθωρισμός	33
4.1	Σύμμορφοι μετασχηματισμοί της μετρικής	33

4.2	Συστήματα Jordan και Einstein	34
4.3	$f(R)$ θεωρίες	35
4.3.1	Μοντέλο Starobinsky	36
4.3.2	Μία μοναδική ιδιότητα του μοντέλου Starobinsky .	40
4.3.3	Πρόσθετος όρος R^3 στο Μοντέλο Starobinsky	41
5	Higher-order θεωρίες βαρύτητας και multi-field πληθωρισμός	49
5.1	Θεωρίες $f(R) + R \square R$	50
5.1.1	Το όριο $\gamma \rightarrow 0$	53
5.1.2	Υπολογισμός φάσματος μαζών	53
5.1.3	Η περίπτωση $f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$ και τα προβλήματα που υπάρχουν	56
5.1.4	Βελτιστοποίηση του δυναμικού	57
5.2	Προσέγγιση slow-roll για multi-field πληθωρισμό	63
5.2.1	Εφαρμογή στη δράση της προηγούμενης ενότητας .	64
5.3	Uplifting του δυναμικού	65
6	Επίλογος	69
	Βιβλιογραφία	71

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο πληθωρισμός επινοήθηκε προκειμένου να λύσει θεμελιώδη προβλήματα που προκύπτουν στο πλαίσιο της βασικής κοσμολογίας Big Bang [1] και μια από τις συνταρακτικές προβλέψεις του είναι ότι το Σύμπαν δεν είναι εντελώς ομοιόμορφο αλλά υπάρχουν διακυμάνσεις της πυκνότητας και της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB). Στις μέρες μας μελετώνται αρκετά διάφορες τροποποιήσεις της Γενικής Σχετικότητας, καθώς μπορεί να εξηγήσουν την απότομη επιταχυνόμενη διαστολή στο πολύ πρώιμο στάδιο του Σύμπαντος, δηλαδή τον πληθωρισμό [2].

Μία από τις απλούστερες τροποποιήσεις της Γενικής Σχετικότητας είναι οι $f(R)$ -θεωρίες βαρύτητας, όπου η Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση του βαθμωτού Ricci R [3]. Το μοντέλο με $f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$ ($k > 0$) μπορεί να οδηγήσει στην επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος λόγω της παρουσίας του όρου $\frac{k}{2}R^2$. Στην πραγματικότητα, αυτό είναι ένα πρότυπο που προτάθηκε από τον Starobinsky το 1980 [4]. Η θεωρία αυτή με κατάλληλο μετασχηματισμό αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με την θεωρία Einstein όπου εκτός του όρου $\frac{R}{2}$ υπάρχει ένα βαθμωτό πεδίο (το scalaron) με μάζα $1/\sqrt{6k}$ που κινείται σε κατάλληλο δυναμικό που δίνει επιτυχή πληθωρισμό συνεπή με τα παρατηρησιακά δεδομένα [5] .

Ωστόσο, από την άποψη της γενικής συναλλοιωτότητας, επιτρέπεται να

συμπεριλάβουμε και άλλους όρους που περιέχουν για παράδειγμα και τον τελεστή παραγωγίσης (την d'Alembertian \square , για την ακρίβεια) στη Λαγκρανζιανή, πράγμα που μας οδηγεί στις $f(R, \square R)$ θεωρίες βαρύτητας που μπορούν να θεωρηθούν ως μία φυσική γενίκευση των $f(R)$ -θεωριών. Τέτοιου τύπου Λαγκρανζιανές έχουν χρησιμοποιηθεί επίσης στην πληθωριστική κοσμολογία [2, 6, 7].

Η δομή της συγκεκριμένης εργασίας είναι η ακόλουθη: Στο κεφάλαιο 2 περιγράφουμε τις βασικές αρχές που διέπουν την κοσμολογία Big Bang και τα προβλήματα που ανακύπτουν σε αυτήν. Στο κεφάλαιο 3 αναφέρουμε πώς ο πληθωρισμός επιλύει αυτά τα κοσμολογικά προβλήματα και περιγράφουμε το γενικό φορμαλισμό των απλούστερων προτύπων του πληθωρισμού, τα οποία περιλαμβάνουν ένα βαθμωτό πεδίο σε δυναμικό. Δίνουμε επίσης ορισμένα παραδείγματα πληθωριστικών μοντέλων με ιδιαίτερη έμφαση στο μοντέλο Starobinsky, το οποίο έχει προκύψει από μια $f(R)$ θεωρία βαρύτητας με $f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$. Στο κεφάλαιο 4 μελετάμε τη δομή των $f(R)$ θεωριών και το πώς καταλήγουμε από αυτές σε πληθωρισμό από ένα βαθμωτό πεδίο, δίνοντας σαν παράδειγμα εκτός από το μοντέλο Starobinsky και ένα μοντέλο με τον πρόσθετο όρο R^3 στην f . Τέλος στο κεφάλαιο 5 μελετούμε θεωρίες βαρύτητας υψηλότερης τάξης, η δράση των οποίων περιέχει και παράγωγο του βαθμωτού Ricci R και εστιάζουμε κυρίως στις θεωρίες $f(R) + R\square R$, οι οποίες οδηγούν σε πιθανό πληθωρισμό από δύο πεδία.

Κεφάλαιο 2

Κοσμολογία Big Bang

2.1 Χωρόχρονος FRW και εξισώσεις Friedmann

Η σύγχρονη κοσμολογία στηρίζεται στην "κοσμολογική αρχή", η οποία αναφέρει ότι το Σύμπαν, σε μεγάλες κλίμακες, είναι ομοιογενές και ισότροπο. Η γεωμετρία του δηλαδή είναι αναλλοίωτη σε χωρικές μεταθέσεις και στροφές, ή με άλλα λόγια δεν υπάρχει προτιμητέο σημείο στο χώρο ούτε προτιμητέα κατεύθυνση. Άλλωστε οι κοσμολογικές παρατηρήσεις, ιδιαίτερα τις δύο τελευταίες δεκαετίες, από την κοσμική μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου (CMB) και από τις δομές μεγάλης κλίμακας επιβεβαιώνουν την ομοιογένεια και την ισοτροπία του Σύμπαντος σε κλίμακες μεγαλύτερες των $100Mpc$. [8]

Η πιο γενική μετρική σε 4 χωροχρονικές διαστάσεις, που σέβεται την κοσμολογική αρχή, είναι η μετρική Friedman-Robertson-Walker (FRW) [9, 10], η οποία σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

Σε αυτήν $\alpha(t)$ είναι ο κοσμικός παράγοντας κλίμακας και $k = -1, 0, +1$ αντιστοιχεί σε ένα ανοιχτό, επίπεδο ή κλειστό Σύμπαν. Δηλαδή η χωρική γεωμετρία είναι τρισδιάστατες φέτες, που είναι υπερβολικές επιφάνειες αρνητικής καμπυλότητας, επίπεδες Ευκλείδειες επιφάνειες μηδενικής καμπυλότητας ή τρισδιάστατες σφαίρες θετικής καμπυλότητας.

Οι συντεταγμένες (r, θ, ϕ) ονομάζονται συμμετακινούμενες (comoving) συντεταγμένες. Η φυσική απόσταση μεταξύ δύο σημείων με συντεταγμένες $(t, 0, \theta, \phi)$, (t, r, θ, ϕ) είναι

$$d(r, t) = \int ds = \alpha(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \alpha(t) \times \begin{cases} \sinh^{-1} r, & k = -1 \\ r, & k = 0 \\ \sin^{-1} r, & k = +1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Μπορούμε λοιπόν να δούμε ότι σε ένα μη στατικό Σύμπαν η απόσταση μεταβάλλεται με το χρόνο ως:

$$\dot{d} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} d = H d \quad (2.3)$$

όπου $H(t) \equiv \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ είναι η παράμετρος Hubble. Σήμερα γνωρίζουμε ότι $\dot{\alpha} > 0$ και επομένως το Σύμπαν διαστέλλεται. Η σχέση (2.3) είναι σε συμφωνία με τις αστρονομικές παρατηρήσεις. Ως γνωστόν οι Γαλαξίες απομακρύνονται με ταχύτητα που είναι ανάλογη της μεταξύ τους απόστασης, νόμος του Hubble. Η σημερινή τιμή του H είναι $H_0 = (67.74 \pm 0.46)(km/s)/Mpc$ [11].

Η δυναμική του Σύμπαντος καθορίζεται από τις εξισώσεις Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε μονάδες όπου $M_{Pl}^2 = \frac{1}{8\pi G} = 1$ (για την επαναφορά των κανονικών μονάδων προσθέτουμε κατάλληλες δυνάμεις της ανηγμένης μάζας του Planck $M_{Pl} = 2.4 * 10^{18} GeV$).

Ο ταυιστής ενέργειας-ορμής T_{ν}^{μ} , λόγω της ισοτροπίας και της ομοιογένειας του Σύμπαντος, θα πρέπει να είναι της μορφής ενός τέλειου ρευστού [12]:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} + p\delta_{\nu}^{\mu} \quad (2.5)$$

όπου ρ και p είναι η ενεργειακή πυκνότητα και πίεση στο σύστημα ηρεμίας του ρευστού και u^{μ} η τετραταχύτητα του ρευστού. Σε ένα σύστημα

συμμετακινούμενο με το ρευστό μπορούμε να επιλέξουμε $u^\mu = (1, \vec{0})$, $u_\mu = (-1, \vec{0})$ και επομένως

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Για τη μετρική (2.1) οι εξισώσεις Einstein δίνουν μόνο δύο ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις, που ονομάζονται εξισώσεις Friedmann:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{\alpha^2} \quad (2.7)$$

και

$$H^2 + \dot{H} = \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) \quad (2.8)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις Friedmann, μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση της συνέχειας:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.9)$$

η οποία μπορεί να εξαχθεί και από την $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ (με ∇_{μ} εννοούμε συναλλοίωτη παράγωγο).

Αν ορίσουμε το βαροτροπικό δείκτη w του ρευστού ως

$$w \equiv \frac{p}{\rho} \quad (2.10)$$

η εξίσωση (2.9) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln \alpha} = -3(1 + w) \quad (2.11)$$

από όπου παίρνουμε¹

$$\rho \propto \alpha^{-3(1+w)} \quad (2.12)$$

¹Η λύση (2.12) προϋποθέτει ότι το w είναι σταθερό. Αυτό όμως δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα για ένα βαθμωτό πεδίο σε Σύμπαν FRW ο λόγος p/ρ δεν είναι σταθερός

Από την (2.7) αγνοώντας τον όρο καμπυλότητας παίρνουμε

$$\alpha \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+w)}}, & w \neq -1 \\ e^{Ht}, & w = -1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Για παράδειγμα $\alpha(t) \propto t^{2/3}$, $\alpha(t) \propto t^{1/2}$ και $\alpha(t) \propto e^{Ht}$ για τον παράγοντα κλίμακας ενός απίπεδου Σύμπαντος ($k = 0$) που κυριαρχείται από μη σχετικιστική ύλη ($w = 0$), ακτινοβολία ($w = 1/3$) και μια κοσμολογική σταθερά ($w = -1$) αντίστοιχα.

Αν περισσότερα από ένα συστατικά συνεισφέρουν σημαντικά στην ενεργειακή πυκνότητα και πίεση, θα έχουμε:

$$\rho = \sum_i \rho_i, \quad p = \sum_i p_i \quad (2.14)$$

Για κάθε είδος "i" ορίζουμε το λόγο της ενεργειακής του πυκνότητας προς την κρίσιμη ενεργειακή πυκνότητα $\rho_c = 3H^2$ ως $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$. Τότε η εξίσωση (2.7) γίνεται

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = 1 + \frac{k}{(\alpha H)^2} \quad (2.15)$$

Από παρατηρήσεις (CMB, δομές μεγάλης κλίμακας) προκύπτει για τις σημερινές τιμές: [8]

$$\Omega_{-1} \approx 0, \quad \Omega_B \approx 0.04, \quad \Omega_{DM} \approx 0.23, \quad \Omega_\gamma \approx 8 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_\Lambda \approx 0.72$$

2.2 Σύμμορφος χρόνος και Ορίζοντες

2.2.1 Σύμμορφος χρόνος και null γεωδαισιακές

Κάνοντας ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων, η μετρική (2.1) μπορεί να γραφεί ως:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t) [d\chi^2 + \Phi_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (2.16)$$

όπου

$$r^2 = \Phi_k^2(\chi) = \begin{cases} \sinh^2 \chi, & k = -1 \\ \chi^2, & k = 0 \\ \sin^2 \chi, & k = +1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Η αιτιακή δομή του Σύμπαντος καθορίζεται από τη διάδοση του φωτός στο χωρόχρονο FRW. Τα φωτόνια ακολουθούν null γεωδαισιακές, $ds^2 = 0$. Αυτές οι τροχιές των φωτονίων μπορούν να μελετηθούν πιο εύκολα αν ορίσουμε τον σύμμορφο χρόνο (conformal time) τ :

$$d\tau = \frac{dt}{\alpha(t)} \Rightarrow \tau = \int \frac{dt}{\alpha(t)} \quad (2.18)$$

Τότε η μετρική (2.16) γράφεται στη μορφή:

$$ds^2 = \alpha^2(\tau) [-d\tau^2 + d\chi^2 + \Phi_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (2.19)$$

Σε ένα ισότροπο Σύμπαν μπορούμε να θεωρήσουμε ακτινική διάδοση του φωτός ($d\theta = d\phi = 0$) και τότε το στοιχείο μήκους γράφεται

$$ds^2 = \alpha^2(\tau) [-d\tau^2 + d\chi^2] \quad (2.20)$$

Επομένως οι γεωδαισιακές των φωτονίων σε χωρόχρονο FRW ικανοποιούν τη σχέση [12]

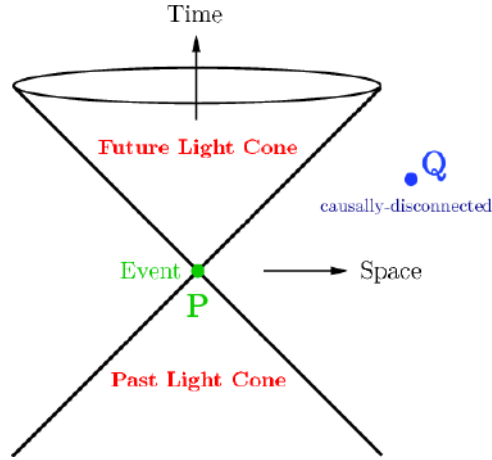
$$\chi(\tau) = \pm\tau + const. \quad (2.21)$$

δηλαδή αντιστοιχούν σε ευθείες σε γωνίες $\pm 45^\circ$ στο $\tau - \chi$ επίπεδο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1.

2.2.2 Ορίζοντας Hubble (Hubble horizon)

Ο ορίζοντας Hubble ή ακτίνα Hubble ορίζεται ως η απόσταση πέρα από την οποία η ταχύτητα απομάκρυνσης δύο σημείων λόγω διαστολής ξεπερνά την ταχύτητα του φωτός [13]. Από τη σχέση (2.3) παίρνουμε για τον ορίζοντα Hubble R_H :

$$1 = HR_H \Rightarrow R_H = \frac{1}{H} \quad (2.22)$$



Σχήμα 2.1: Κώνοι φωτός και αιτιακότητα. Το σύνολο όλων των null γεωδαισιακών που περνούν από ένα δεδομένο σημείο (ή γεγονός) στο χωρόχρονο ονομάζεται κώνος φωτός. Το εσωτερικό του κώνου φωτός, που αποτελείται από όλες τις null και τις χρονοειδείς γεωδαισιακές, ορίζει την περιοχή του χωροχρόνου που είναι αιτιακά συνδεδεμένη με αυτό το γεγονός.

Είναι βολικό πολλές φορές να χρησιμοποιούμε τον συμμετακινούμενο ορίζοντα Hubble (comoving Hubble horizon)

$$\chi_H = \frac{R_H}{\alpha} = \frac{1}{\alpha H} = \frac{1}{\mathcal{H}} \quad (2.23)$$

2.2.3 Σωματιδιακός ορίζοντας (particle horizon)

Ο συμμετακινούμενος σωματιδιακός ορίζοντας (comoving particle horizon) $\chi_p(t)$ είναι η μέγιστη συμμετακινούμενη απόσταση που μπορεί να διανύσει το φως μεταξύ $t = 0$ και t (δίνοντας το μέγεθος μιας αιτιακά συνδεδεμένης περιοχής). Από την εξίσωση γεωδαισιακών $ds^2 = 0$ του φωτονίου, παίρνουμε (για ακτινικό μονοπάτι) $d\chi = \frac{dt}{\alpha(t)}$ και επομένως [13]

$$\chi_p(t) = \int_0^t \frac{dt'}{\alpha(t')} \quad (2.24)$$

Το φυσικό μέγεθος του σωματιδιακού ορίζοντα είναι

$$R_p(t) = \alpha(t)\chi_p(t) \quad (2.25)$$

2.2.4 Ορίζοντας γεγονότων (event horizon)

Ο ορίζοντας γεγονότων ορίζει το σύνολο των σημείων από τα οποία τα σήματα που στέλνονται μία δεδομένη χρονική στιγμή t δε θα ληφθούν ποτέ από έναν παρατηρητή στο μέλλον [12]. Με άλλα λόγια είναι η απόσταση που μπορεί να διανύσει το φως από τη χρονική στιγμή t έως το τέλος του Σύμπαντος [13]. Συγκεκριμένα ο συμμετακινούμενος ορίζοντας γεγονότων δίνεται από τη σχέση

$$\chi_e(t) = \int_t^{t_{end}} \frac{dt'}{\alpha(t')} \quad (2.26)$$

Το φυσικό μέγεθος του ορίζοντα γεγονότων θα είναι τότε

$$R_e(t) = \alpha(t)\chi_e(t) \quad (2.27)$$

2.3 Προβλήματα της συμβατικής Big Bang κοσμολογίας

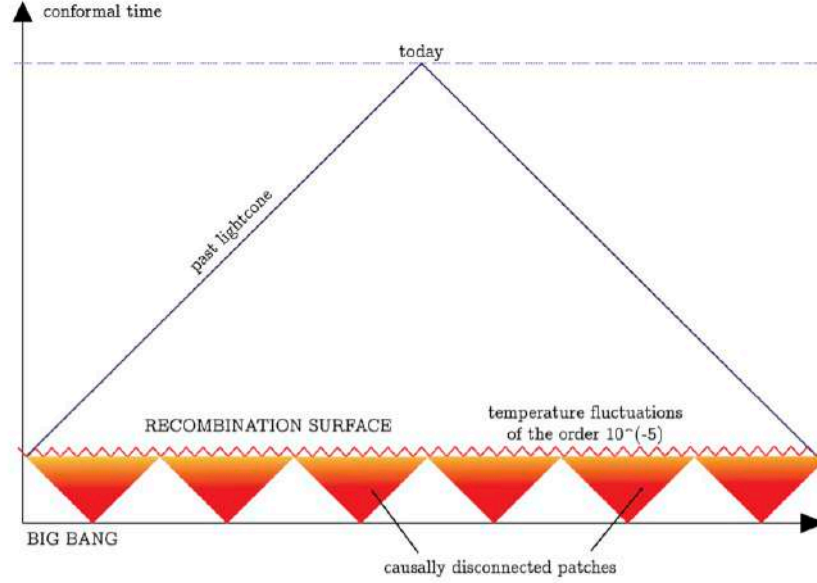
2.3.1 Πρόβλημα του ορίζοντα

Ο συμμετακινούμενος σωματιδιακός ορίζοντας που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να γραφεί ως:

$$\chi_p(t) = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{H\alpha^2} = \int_0^\alpha \frac{d \ln \alpha}{(\alpha H)} = \int_0^\alpha \chi_H d \ln \alpha \quad (2.28)$$

όπου τον εκφράσαμε ως ένα ολοκλήρωμα του συμμετακινούμενου ορίζοντα Hubble $\chi_H = (\alpha H)^{-1}$.

Μία άμεση συνέπεια των ορισμών των παραπάνω οριζόντων είναι η εξής: σωματίδια που βρίσκονται σε (συμμετακινούμενη) απόσταση μεγαλύτερη από χ_p δεν έχουν επικοινωνήσει ποτέ μεταξύ τους, ενώ σωματίδια που βρίσκονται σε απόσταση μεγαλύτερη από χ_H δεν επικοινωνούν μεταξύ τους τώρα. Στη συμβατική κοσμολογία (χωρίς πληθωρισμό) ο ορίζοντας Hubble $\chi_H = (\alpha H)^{-1}$ αυξάνεται μονότονα με το



Σχήμα 2.2: Χωρίς πληθωρισμό η recombination surface αποτελείται από $\sim 10^5$ αιτιακά ασύνδετες περιοχές οι οποίες έχουν διαφορές θερμοκρασίας μόνο της τάξης $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$.

χρόνο, όπως συμβαίνει και με το σωματιδιακό ορίζοντα (2.28). Συγκεκριμένα για ένα Σύμπαν που κυριαρχείται από ύλη (MD) ή ακτινοβολία (RD) έχουμε αντίστοιχα [12]

$$\chi_p \sim (\alpha H)^{-1} \propto \begin{cases} \alpha^{1/2}, & \text{MD} \\ \alpha, & \text{RD} \end{cases} \quad (2.29)$$

Δύο φωτόνια CMB που παρατηρούμε σήμερα στον ουρανό απέχουν απόσταση $d_{com}(t_0) < \chi_p(t_0)$. Ωστόσο, πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, την περίοδο της τελευταίας σκέδασης (last scattering) έπεται ότι $d_{com}(t_{ls}) > \chi_p(t_{ls})$, καθώς ο ορίζοντας ήταν πολύ μικρότερος. Συνεπώς αυτά τα φωτόνια προέρχονται από περιοχές που δε συνδέονται αιτιακά. Παρόλα αυτά με πολύ μεγάλη ακρίβεια έχουν σχεδόν την ίδια θερμοκρασία. Αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα του ορίζοντα. Μάλιστα ο όγκος που περιλαμβάνεται σήμερα εντός του ορίζοντα αποτελείτο από $\sim 10^5$ μη αιτιακά συνδεδεμένες περιοχές την περίοδο του last scattering. Για τον υπολογισμό αυτό παραπέμπουμε στο [8].

2.3.2 Πρόβλημα της χωρικά επίπεδης γεωμετρίας

Ας θεωρήσουμε την πρώτη εξίσωση Friedmann στη μορφή

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(\alpha H)^2} \quad (2.30)$$

Στη συμβατική κοσμολογία η συμμετακινούμενη ακτίνα Hubble $(\alpha H)^{-1}$ αυξάνεται με το χρόνο και επομένως, σύμφωνα με την (2.30), η ποσότητα $\Omega - 1$ θα αποκλίνει με την πάροδο του χρόνου. Η οριακή τιμή $\Omega = 1$ είναι επομένως ένα ασταθές σημείο ισορροπίας. Συνεπώς στην κοσμολογία χωρίς πληθωρισμό η σχεδόν επιπεδότητα που παρατηρείται σήμερα, $\Omega(\alpha_0) \sim 1$, απαιτεί μία εξαιρετικά λεπτή ρύθμιση (fine-tuning) του Ω κοντά στο 1 στο πρώιμο σύμπαν [12]. Πράγματι

$$\frac{|\Omega - 1|_{Pl}}{|\Omega - 1|_0} \sim \left(\frac{\alpha_{Pl}}{\alpha_0} \right)^2 \sim \left(\frac{T_0}{T_{Pl}} \right)^2 \quad (2.31)$$

όπου θεωρήσαμε ένα Σύμπαν που κυριαρχείται από ακτινοβολία (που ισχύει μέχρι την recombination) και ότι για τη θερμοκρασία T ισχύει $T \sim \alpha^{-1}$, καθώς για ένα Σύμπαν ακτινοβολίας είναι $\rho \propto \alpha^{-4}$ και $\rho \propto T^4$ (νόμος Stefan-Boltzmann). Επίσης θεωρώντας ότι $|\Omega - 1|_0 = \mathcal{O}(1)$ και χρησιμοποιώντας τις προσεγγιστικές τιμές $T_0 \sim 10^{-4}eV$ και $T_{Pl} \sim 10^{19}GeV$ για τις αντίστοιχες θερμοκρασίες, προκύπτει τελικά ότι [8]

$$|\Omega - 1|_{Pl} \sim \mathcal{O}(10^{-64}) \quad (2.32)$$

2.3.3 Πρόβλημα των μονοπόλων

Αν το Σύμπαν μπορούσε να προεκταθεί πίσω στο χρόνο σε υψηλές θερμοκρασίες (άμεση απόδειξη για την εικόνα του Big Bang έχουμε μόνο σε χαμηλές θερμοκρασίες $T < T_{BBN} \sim MeV$), είναι πιθανό ότι πέρασε από μια σειρά αλλαγών φάσης (phase transitions) κατά τη διάρκεια της εξέλιξής του. Υπάρχουν η ηλεκτρασθενής (electroweak) και η QCD αλλαγή φάσης, και πιθανόν και άλλες αλλαγές φάσης σε πολύ μεγαλύτερες κλίμακες, όπως οι grand unified theory (GUT) αλλαγές φάσης. Εξαιτίας του σπασίματος κάποιας συμμετρίας κατά την αλλαγή

φάσης, τοπολογικές ανωμαλίες— domain walls, κοσμικές χορδές, μονόπολα ή υφές (textures) — μπορεί να σχηματιστούν. Αν μία semi-simple ομάδα GUT σπάει στο Καθιερωμένο Μοντέλο (SM), είτε απευθείας είτε μέσω κάποιων ενδιάμεσων βημάτων, σχηματίζονται μονόπολα.

Τα μονόπολα είναι βαριά, σχεδόν σημειακά αντικείμενα, τα οποία συμπεριφέρονται ως ψυχρή ύλη ($\rho_{mp} \propto a^{-3}$). Αν παράγονται στο πρώιμο Σύμπαν (όπως προβλέπουν θεωρίες GUT), η ενεργειακή τους πυκνότητα θα μειώνεται πιο αργά από την αντίστοιχη της ακτινοβολίας και επομένως θα πρέπει να κυριαρχεί στην ενεργειακή πυκνότητα του Σύμπαντος. Ωστόσο μαγνητικά μονόπολα δεν έχουν παρατηρηθεί. [8]

Κεφάλαιο 3

Φυσική του Πληθωρισμού

3.1 Επίλυση των κοσμολογικών προβλημάτων

Η ιδέα ότι το πρώιμο Σύμπαν πέρασε από μια περίοδο επιταχυνόμενης διαστολής επιλύει όλα τα κοσμολογικά προβλήματα που αναλύσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Ο πληθωρισμός εξηγεί γιατί το παρατηρούμενο Σύμπαν είναι τόσο μεγάλο, επίπεδο και ομοιογενές (σε μεγάλες κλίμακες) .

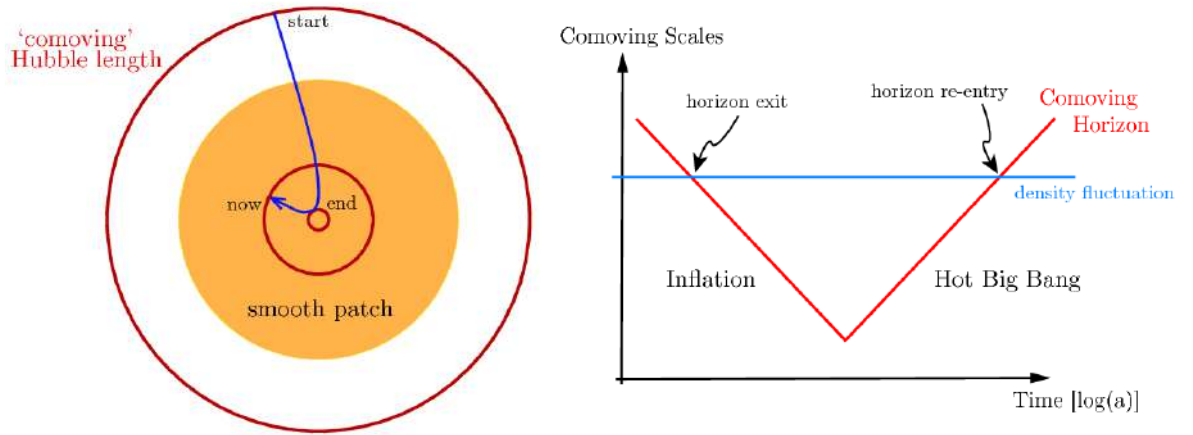
Ο πληθωρισμός είναι μία περίοδος επιταχυνόμενης διαστολής που ορίζεται από τις ισοδύναμες σχέσεις

$$\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \rho + 3p < 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\alpha H)^{-1} < 0 \quad (3.1)$$

Βλέπουμε ότι η επιταχυνόμενη διαστολή αντιστρέφει τη συμπεριφορά της συμμετακινούμενης ακτίνας Hubble, καθώς αυτή τώρα θα μειώνεται με το χρόνο αντί να αυξάνεται. Ας δούμε τώρα πώς ο πληθωρισμός εξαλείφει τα προβλήματα της καθιερωμένης κοσμολογίας. Ας υποθέσουμε ότι το Σύμπαν κατά τον πληθωρισμό κυριαρχείται από ένα ρευστό με $p \approx -\rho$. Τότε από την εξίσωση συνέχειας (2.9) έπεται ότι

$$\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho \approx \rho_I = \text{const}$$

δηλαδή το Σύμπαν είναι περίπου de-Sitter. Τέλος από την πρώτη εξί-



Σχήμα 3.1: Αριστερά: Εξέλιξη του συμμετακινούμενου ορίζοντα Hubble $\chi_H = (\alpha H)^{-1}$ σε ένα Σύμπαν με πληθωρισμό. Η ακτίνα Hubble ελαττώνεται κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού και αυξάνεται μετά από αυτόν. Δεξιά: Λύση στο πρόβλημα του ορίζοντα. Όλες οι κλίμακες μήκους που είναι σχετικές με τις σημερινές κοσμολογικές παρατηρήσεις ήταν μεγαλύτερες από την ακτίνα Hubble μέχρι $\alpha \sim 10^{-5}$. Όμως, σε αρκετά παλαιά περίοδο, αυτές οι κλίμακες ήταν μικρότερες από την ακτίνα Hubble και επομένως υπήρχε αιτιακή σύνδεση. Όμοια, οι κλίμακες κοσμολογικού ενδιαφέροντος ήρθαν και πάλι εντός του ορίζοντα Hubble στις μέρες μας.

σωση Friedmann παίρνουμε (για $k = 0$)

$$H^2 = \frac{\rho}{3} \Rightarrow H \equiv H_I = \sqrt{\frac{\rho_I}{3}} \approx \text{const}$$

και επομένως $\alpha \propto e^{H_I t}$. [8]

3.1.1 Πρόβλημα του ορίζοντα

Η αντιστροφή της συμπεριφοράς της συμμετακινούμενης ακτίνας Hubble κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού είναι ουσιαστικά αυτή που λύνει το πρόβλημα του ορίζοντα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1. Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι μεγάλες κλίμακες που εισέρχονται στο σημερινό Σύμπαν ήταν εντός του ορίζοντα Hubble πριν τον πληθωρισμό.

Επομένως η αιτιακή φυσική που κυριαρχούσε πριν τον πληθωρισμό οδήγησε στη χωρική ομοιογένεια και στην ομοιομορφία της θερμοκρασίας. Συνεπώς με μια περίοδο πληθωρισμού, η ομοιομορφία της ακτινοβολίας CMB δεν αποτελεί πια μυστήριο. [12]

Η οπτικοποίηση της επίλυσης του προβλήματος του ορίζοντα μπορεί επίσης να γίνει και μέσω του σύμμορφου χωροχρονικού διαγράμματος (conformal spacetime diagram). Όταν το Σύμπαν κυριαρχείται από ύλη ή ακτινοβολία, μπορεί εύκολα να βρεθεί ότι ο παράγοντας κλίμακας συναρτήσει του σύμμορφου χρόνου τ δίνεται από:

$$\alpha(\tau) \propto \begin{cases} \tau^2 \propto t^{2/3}, & \text{MD} \\ \tau \propto t^{1/2}, & \text{RD} \end{cases} \quad (3.2)$$

Αν το Σύμπαν κυριαρχούνταν πάντα από ύλη ή ακτινοβολία, θα υπήρχε η ανωμαλία Big Bang τη στιγμή $\tau_i = 0$

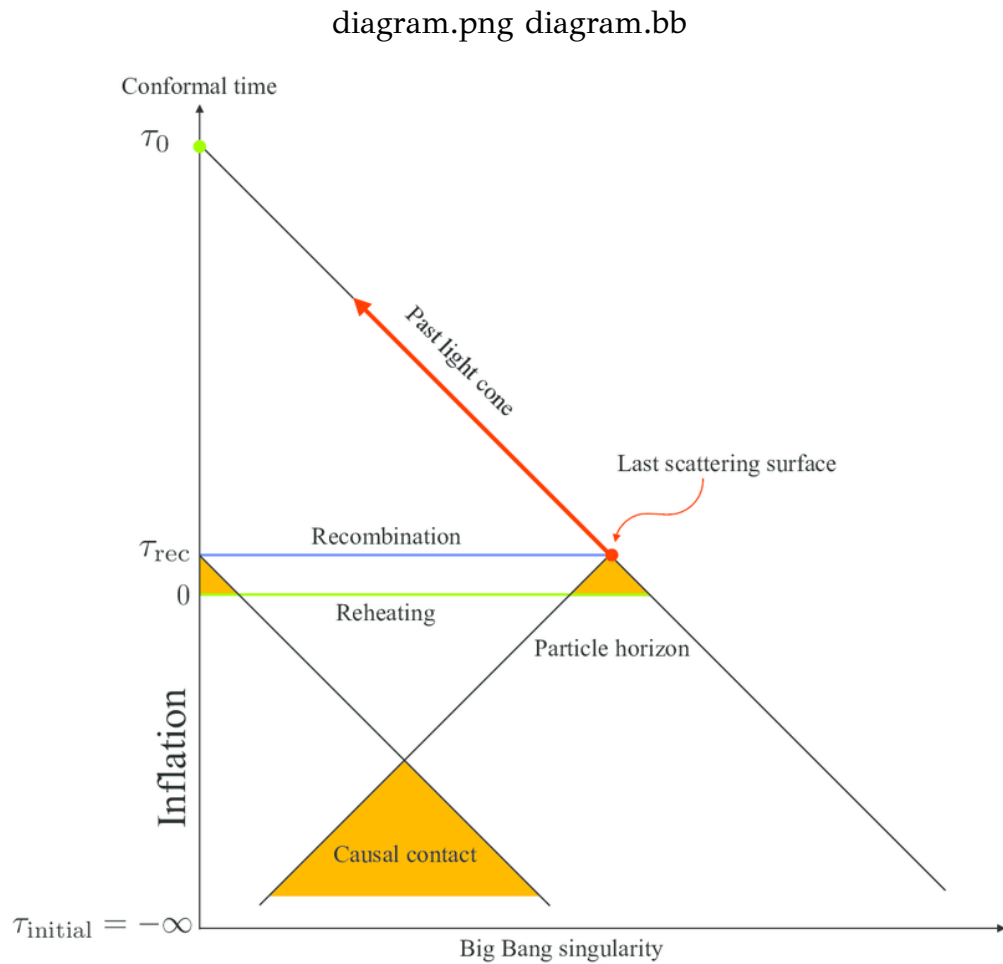
$$\alpha(\tau_i \equiv 0) = 0 \quad (3.3)$$

Στο σύμμορφο διάγραμμα που αντιστοιχεί στην καθιερωμένη κοσμολογία Big Bang, το πρόβλημα του ορίζοντα είναι φανερό. Κάθε χωροχρονικό σημείο στο διάγραμμα έχει έναν παρελθοντικό κώνο φωτός που ορίζει το αιτιακό του παρελθόν. Δύο σημεία σε μία επιφάνεια με $\tau = \text{constant}$ είναι σε αιτιακή σύνδεση αν οι παρελθοντικοί κώνοι φωτός τους τέμνονται τη στιγμή του Big Bang, $\tau_i = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η επιφάνεια τελευταίας σκέδασης (τ_{CMB}) αποτελούνταν από πολλές αιτιακά ασύνδετες περιοχές οι οποίες δε θα είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία. Η ομοιομορφία της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB) σε μεγάλες κλίμακες αποτελεί λοιπόν πρόβλημα.

Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, όπου $H \equiv H_I \approx \text{const}$, αποδεικνύεται ότι ο παράγοντας κλίμακας είναι

$$\alpha(\tau) = -\frac{1}{H_I \tau} \quad (3.4)$$

και η σημειακή ιδιομορφία, $\alpha = 0$ μετατοπίζεται στο $\tau \rightarrow -\infty$. Ο παράγοντας κλίμακας (3.4) γίνεται άπειρος τη στιγμή $\tau = 0$! Αυτό συμβαίνει



Σχήμα 3.2: Σύμμορφο διάγραμμα της πληθωριστικής κοσμολογίας. Ο πληθωρισμός επεκτείνει το σύμμορφο χρόνο σε αρνητικές τιμές! Τώρα δεν υπάρχει σημειακή ιδιομορφία στο $\tau = 0$ και οι κώνοι φωτός τέμνονται κάποια προγενέστερη στιγμή αν ο πληθωρισμός διαρκεί τουλάχιστον 60 e-folds.

επειδή έχουμε υποθέσει χώρο de Sitter με $H = \text{const.}$, που σημαίνει ότι ο πληθωρισμός θα εξακολουθήσει για πάντα με $\tau = 0$ να αντιστοιχεί στο απώτατο μέλλον, $t \rightarrow +\infty$. Στην πραγματικότητα ο πληθωρισμός τελειώνει σε κάποιο πεπερασμένο χρόνο, και η προσέγγιση (3.4) παρόλο που είναι έγκυρη αρχικά, δεν ισχύει κοντά στο τέλος του πληθωρισμού. Συνεπώς η επιφάνεια $\tau = 0$ δεν είναι το Big Bang, αλλά το τέλος του πληθωρισμού. Η αρχική ιδιομορφία έχει μεταφερθεί πολύ πίσω στο σύμμορφο χρόνο $\tau \ll 0$, και οι κώνοι φωτός μπορούν να επεκταθούν σε αρνητικά τ έτσι ώστε σημεία που δε θα συνδέονταν αιτιακά χωρίς τον πληθωρισμό, να βρίσκονται τώρα σε αιτιακή σύνδεση. Με άλλα λόγια, λόγω του πληθωρισμού, "υπήρχε περισσότερος σύμμορφος χρόνος πριν την recombination από ότι πιστεύαμε". Όλα αυτά φαίνονται στο σχήμα 3.2. [12]

3.1.2 Πρόβλημα της χωρικά επίπεδης γεωμετρίας

Από την εξίσωση Friedmann (2.30) παίρνουμε για την περίοδο του πληθωρισμού:

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_f}}{|\Omega - 1|_{t_i}} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_f}\right)^2 \sim e^{-2N} \quad (3.5)$$

όπου t_i, t_f οι χρονικές στιγμές που άρχισε και τελείωσε ο πληθωρισμός και $N \equiv H_I(t_f - t_i)$. Προκειμένου να μπορούμε να έχουμε οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες για το Σύμπαν, θα πρέπει $N \gtrsim 60 - 70$, καθώς από την (2.32) έπεται ότι $|\Omega - 1|_{t_f} \lesssim 10^{-60}$. Ο πληθωρισμός λοιπόν λύνει το πρόβλημα της χωρικά επίπεδης γεωμετρίας. [8]

3.1.3 Πρόβλημα των μονοπόλων

Αν ο πληθωρισμός λαμβάνει χώρα μετά τον σχηματισμό των μονοπόλων, η πυκνότητα των μονοπόλων πέφτει εντυπωσιακά κατά τον πληθωρισμό [8]:

$$n_{mp} \propto \frac{N_{mp}}{\alpha^3} \Rightarrow \frac{(n_{mp})_{t_f}}{(n_{mp})_{t_i}} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_f}\right)^3 \sim e^{-3N} \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

3.2 Πληθωρισμός από ένα βαθμωτό πεδίο

Τα πιο απλά πρότυπα του πληθωρισμού περιλαμβάνουν ένα βαθμωτό πεδίο ϕ , το inflaton. Η δυναμική ενός βαθμωτού πεδίου, που βρίσκεται σε ελάχιστη σύζευξη με τη βαρύτητα, καθορίζεται από τη δράση [12]

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + \mathcal{L}_\phi \right] = \mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}_\phi \quad (3.7)$$

με

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (3.8)$$

Ο ταυιστής ενέργειας-ορμής για το βαθμωτό πεδίο είναι

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi \quad (3.9)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για το πεδίο ϕ είναι

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \square \phi - V_{,\phi} = 0 \quad (3.10)$$

όπου

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) \quad (3.11)$$

Παραπάνω είναι $V_{,\phi} = \frac{dV}{d\phi}$.

Υποθέτοντας τώρα ότι η μετρική μας είναι η FRW (με $k = 0$), που αντιστοιχεί σε ένα Σύμπαν ομοιογενές και ισότροπο και επομένως θα πρέπει και για το πεδίο ϕ να ισχύει $\phi(t, \vec{x}) = \phi(t)$, ο ταυιστής ενέργειας-ορμής (3.9) παίρνει τη μορφή ενός τέλει ρευστού (2.6) με

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.12)$$

και

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.13)$$

Ο αντίστοιχος βαροτροπικός δείκτης w γράφεται

$$w \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V} \quad (3.14)$$

από όπου βλέπουμε ότι ένα βαθμωτό πεδίο μπορεί να οδηγήσει σε αρνητική πίεση ($w < 0$) και επιταχυνόμενη διαστολή ($w < -\frac{1}{3}$) αν ο δυναμικός όρος V υπερσχύει έναντι του κινητικού. [12]

Επίσης για χωρόχρονο FRW η εξίσωση (3.10) δίνει

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (3.15)$$

και η 1_η εξίσωση Friedmann γίνεται

$$H^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (3.16)$$

3.3 Προσέγγιση slow-roll

Η προσέγγιση slow-roll υποθέτει ότι: [8]

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (3.17)$$

και

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V_{,\phi}| \quad (3.18)$$

Η πρώτη προσέγγιση διασφαλίζει ότι το Σύμπαν είναι περίπου de-Sitter, και επομένως έχουμε περίπου εκθετική διαστολή, ενώ η δεύτερη προσέγγιση γίνεται έτσι ώστε η επιταχυνόμενη διαστολή να διαρκέσει αρκετό χρονικό διάστημα. Με τις παραπάνω προσεγγίσεις οι εξισώσεις (3.15) και (3.16) που διέπουν τη δυναμική του πληθωρισμού γίνονται

$$3H\dot{\phi} \approx -V_{,\phi} \quad (3.19)$$

και

$$H^2 \approx \frac{V}{3} \quad (3.20)$$

Είναι χρήσιμο να ορίσουμε και τις δυναμικές slow-roll παραμέτρους:

$$\epsilon_V \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \quad (3.21)$$

$$\eta_V \equiv \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \quad (3.22)$$

Αποδεικνύεται ότι οι συνθήκες slow-roll είναι ισοδύναμες με τις

$$\epsilon_V, |\eta_V| \ll 1 \quad (3.23)$$

Ο πληθωρισμός τελειώνει όταν οι συνθήκες slow-roll παραβιάζονται:

$$\epsilon_V \quad \text{ή} \quad |\eta_V| \sim 1 \quad (3.24)$$

Ο αριθμός των e-folds από τη χρονική στιγμή t μέχρι το τέλος του πληθωρισμού t_f ορίζεται ως

$$N(\phi) \equiv \ln \frac{\alpha_f}{\alpha} = \int_t^{t_f} H dt = \int_\phi^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_f}^\phi \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi \quad (3.25)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (3.19) και (3.20).

Μία κλίμακα μήκους λ βγαίνει από τον ορίζοντα όταν $\lambda \approx H^{-1}$. Σε κάθε κλίμακα μήκους αντιστοιχεί ένας συμμετακινούμενος κυματαριθμός $k = \frac{1}{\alpha\lambda}$. Αν θέλουμε τώρα να συσχετίσουμε ένα συμμετακινούμενο κυματαριθμό k_* σήμερα με την τιμή του inflaton ϕ_* τη στιγμή που αυτή η κλίμακα βγήκε από τον ορίζοντα Hubble, η σχέση (3.25) θα πρέπει να δίνει μία έκφραση που να προσδιορίζει πόσο το k_* είναι συρρικνωμένο σε σχέση με το μέγεθος του ορίζοντα μεταξύ του τέλους του πληθωρισμού και του χρόνου που αυτός ο τρόπος ξαναμπαίνει στον ορίζοντα. Αυτή η ποσότητα αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση [5]

$$\begin{aligned} N_* \approx & 71.21 - \ln\left(\frac{k_*}{\alpha_0 H_0}\right) + \frac{1}{4} \ln(V_{hor}) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{V_{hor}}{\rho_{end}}\right) + \\ & + \frac{1 + 3w_{int}}{12(1 + w_{int})} \ln\left(\frac{\rho_{th}}{\rho_{end}}\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

όπου ρ_{end} είναι η ενεργειακή πυκνότητα στο τέλος του πληθωρισμού, ρ_{th} είναι μια ενεργειακή κλίμακα μέχρι την οποία το Σύμπαν έχει θερμοποιηθεί, $\alpha_0 H_0$ είναι ο σημερινός συμμετακινούμενος ορίζοντας Hubble, V_{hor} είναι η δυναμική ενέργεια όταν η σημερινή κλίμακα του ορίζοντα άφησε τον ορίζοντα κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, και w_{int} είναι ο ενεργός βαροτροπικός δείκτης μεταξύ του τέλους του πληθωρισμού και της ενεργειακής κλίμακας που καθορίζεται από την ρ_{th} . Για την πρόβλεψη

των πρωτογενών φασμάτων ισχύος (primordial power spectra) στις παρατηρούμενες κλίμακες για ένα συγκεκριμένο πληθωριστικό δυναμικό, η αβεβαιότητα στην ιστορία της αναθέρμανσης (reheating) του Σύμπαντος μπορεί να ληφθεί υπόψη με το να επιτρέπουμε στο N_* να βρίσκεται σε ένα διάστημα τιμών.

Οι δύο πρώτοι όροι της (3.26) είναι ανεξάρτητοι μοντέλου, με τον δεύτερο όρο να είναι περίπου 5 για $k_* = 0.05 Mpc^{-1}$. Αν η θερμοποίηση (thermalization) συμβαίνει ακαριαία, ή το στάδιο του reheating είναι κοντά σε εποχή ακτινοβολίας, το μέγεθος του τελευταίου όρου στην (3.26) είναι $\lesssim 1$. Για τα πιο λογικά πληθωριστικά μοντέλα, ο τέταρτος όρος είναι $\mathcal{O}(1)$ και ο τρίτος ~ -10 . Τελικά για το N_* προκύπτει ότι $50 < N_* < 60$. [5]

3.4 Παραδείγματα μοντέλων Πληθωρισμού

Ας αναφέρουμε τώρα συνοπτικά κάποια πρότυπα πληθωρισμού που μπορούν να περιγραφούν από τις ακόλουθες παραμέτρους του πρωτογενούς φάσματος ισχύος: το βαθμωτό πλάτος A_s , τον φασματικό δείκτη n_s και την tensor-to-scalar ratio r , όλες ορισμένες στην κλίμακα pivot k_* .

Εκθετικό δυναμικό και power law πληθωρισμός Ο πληθωρισμός με ένα εκθετικό δυναμικό

$$V(\phi) = \Lambda^4 e^{-\lambda\phi} \quad (3.27)$$

ονομάζεται πληθωρισμός νόμου δύναμης (power law inflation) [14] επειδή η λύση για τον παράγοντα κλίμακας είναι $a(t) \propto t^{2/\lambda^2}$. Αυτό το πρότυπο είναι ημιτελές, καθώς ο πληθωρισμός δε θα τελείωνε χωρίς κάποιο πρόσθετο μηχανισμό να τον σταματήσει. Οι προβλέψεις ωστόσο αυτής της κλάσης προτύπων είναι εκτός των ορίων που προβλέπονται από τα πειράματα Planck. [5]

Δυναμικό τύπου Higgs Το δυναμικό σπασίματος συμμετρίας [15]

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^2 \right]^2 \quad (3.28)$$

οδηγεί σε προβλέψεις που είναι σε συμφωνία με τα δεδομένα Planck + WP + BAO για super-Planckian τιμές του μ , δηλαδή $\mu \gtrsim 13M_{Pl}$. [5]

Φυσικός Πληθωρισμός Ένα άλλο ενδιαφέρον πληθωριστικό πρότυπο είναι ο φυσικός πληθωρισμός [16, 17], όπου το δυναμικό παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$V(\phi) = V_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right] \quad (3.29)$$

όπου f είναι μία κλίμακα που καθορίζει την κλίση του δυναμικού. Ανάλογα με την τιμή του f , το μοντέλο ανήκει στην κατηγορία large-field πληθωρισμού ($f \gtrsim 1.5M_{Pl}$) ή small-field πληθωρισμού ($f \lesssim 1.5M_{Pl}$). Αυτό το πρότυπο συμφωνεί με τα δεδομένα Planck+WP για $f \gtrsim 5M_{Pl}$. [5]

Δυναμικό Starobinsky Ένα άλλο ευρέως διαδεδομένο δυναμικό που χρησιμοποιείται στον πληθωρισμό είναι το δυναμικό Starobinsky [4]

$$V(\phi) = \frac{1}{8k} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \right)^2 \quad (3.30)$$

το οποίο προκύπτει από μια τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας, η δράση της οποίας είναι

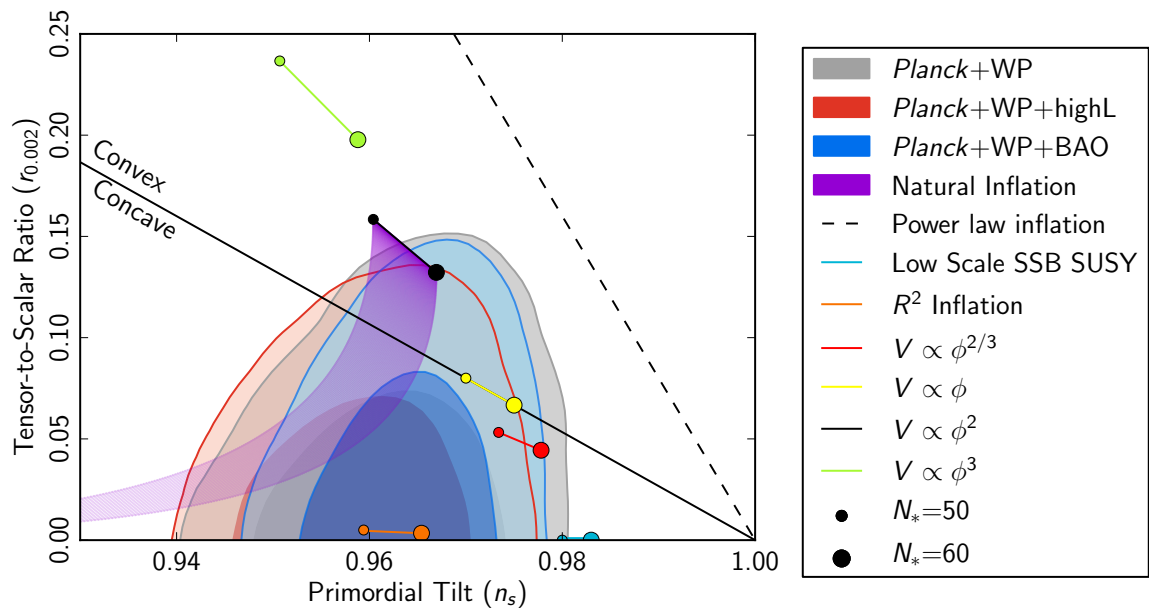
$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + \frac{k}{2} R^2 \right) \quad (3.31)$$

όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο.

Η σταθερά k γράφεται συνήθως ως $k = \frac{1}{6\mu^2}$, όπου η κλίμακα μάζας μ , που είναι ουσιαστικά η μάζα του inflaton ¹, μπορεί να προσδιοριστεί από το πλάτος των κβαντικών διακυμάνσεων A_s [18],

$$A_s = \frac{3\mu^2}{8\pi^2} \sinh^4 \left(\phi_* / \sqrt{6} \right) = 2.1 \times 10^{-9} \quad (3.32)$$

¹μπορούμε να δούμε ότι $V_{,\phi\phi}|_{\phi=0} = \mu^2$



Σχήμα 3.3: Περιθωριοποιημένες περιοχές που αντιστοιχούν σε 68% και 95% CL για τις παραμέτρους n_s και $r_{0.002}$ από τα δεδομένα του Planck σε συνδυασμό και με άλλα σύνολα δεδομένων συγκρινόμενες με τις θεωρητικές προβλέψεις επιλεγμένων πληθωριστικών μοντέλων.

όπου $\phi_* \approx 5.35$ αντιστοιχεί σε 55 e-folds του πληθωρισμού. Λύνοντας ως προς μ την (3.32), παίρνουμε $\mu = 1.2 \times 10^{-5} M_{Pl} \approx 3 \times 10^{13} GeV$.

Για αυτό το μοντέλο παίρνουμε για τον αριθμό των e-folds N_* :

$$N_*(\phi_*) \approx \int_{\phi_f}^{\phi_*} \frac{V}{V_{,\phi}} d\phi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{\phi_f}^{\phi_*} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} - 1 \right) d\phi = \frac{3}{4} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_*} - e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_f} \right) + \sqrt{\frac{3}{8}} (\phi_f - \phi_*) \quad (3.33)$$

και δεδομένου ότι $\phi_* \gg \phi_f$ και $\phi_f \approx 1$, μπορούμε να γράψουμε προσεγγιστικά

$$N_* \approx \frac{3}{4} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_*} \Rightarrow e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_*} \approx \frac{4}{3} N_* \quad (3.34)$$

Επιπλέον για τις παραμέτρους ϵ_V και η_V στην τιμή ρινोट του πεδίου ϕ_* παίρνουμε (από τις σχέσεις (3.21), (3.22)):

$$\epsilon_V(\phi_*) = \frac{4}{3} \frac{1}{\left(1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_*}\right)^2} \quad \text{και} \quad \eta_V(\phi_*) = \frac{4}{3} \frac{2 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_*}}{\left(1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_*}\right)^2} \quad (3.35)$$

Τέλος ο φασματικός δείκτης n_s και η tensor-to-scalar ratio r στην τιμή ρινोट του πεδίου ϕ_* μπορούν να υπολογιστούν προσεγγιστικά μέσω των παραμέτρων slow-roll από τις σχέσεις [5]

$$n_s \approx 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V, \quad r \approx 16\epsilon_V \quad (3.36)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.34) και (3.35) στις (3.36) παίρνουμε

$$n_s - 1 \approx \frac{-8(4N_* + 3)}{(4N_* - 3)^2} \quad \text{και} \quad r \approx \frac{192}{(4N_* - 3)^2} \quad (3.37)$$

Αυτό το μοντέλο προβλέπει $n_s = 0.963$ για $N_* = 55$ και είναι απόλυτα συνεπές με τους περιορισμούς του Planck [5].

Η τόσο καλή συμφωνία του μοντέλου Starobinsky με τα μέχρι στιγμής πειραματικά δεδομένα (δες σχήμα 3.3) μας ωθεί στην πιο λεπτομερή εξέτασή του στο επόμενο κεφάλαιο. Θα μελετήσουμε επίσης και άλλα τέτοιου είδους πρότυπα που προκύπτουν από τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας.

Κεφάλαιο 4

$f(R)$ -θεωρίες και Πληθωρισμός

4.1 Σύμμορφοι μετασχηματισμοί της μετρικής

Ένας σύμμορφος μετασχηματισμός (conformal ή Weyl transformation) της μετρικής μπορεί να οριστεί ως εξής [19]:

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x) = \lambda(x)\bar{g}_{\mu\nu}(x) \quad (4.1)$$

όπου $\lambda(x)$ είναι μία συνάρτηση συνεχής, πεπερασμένη και θετικά ορισμένη.

Ο παραπάνω μετασχηματισμός της μετρικής έχει ως συνέπεια τον ακόλουθο μετασχηματισμό των συμβόλων Christoffel:

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} + \frac{1}{2\lambda} [\delta_{\alpha}^{\mu}\partial_{\beta}\lambda + \delta_{\beta}^{\mu}\partial_{\alpha}\lambda - \bar{g}_{\alpha\beta}\bar{g}^{\mu\nu}\partial_{\nu}\lambda] \quad (4.2)$$

Για να φτάσουμε στην παραπάνω σχέση, χρησιμοποιήσαμε τη σχέση που συνδέει τα σύμβολα Christoffel με το μετρικό τανυστή

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} (\partial_{\beta}g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\nu}g_{\alpha\beta})$$

και ότι ο μετασχηματισμός του ανταλλοίωτου μετρικού τανυστή είναι

$$\bar{g}^{\mu\nu}(x) \rightarrow g^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\lambda(x)}\bar{g}^{\mu\nu}(x)$$

Επίσης αντικαθιστώντας στον ορισμό του τανυστή Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}$$

τον μετασχηματισμό (4.2) παίρνουμε κάνοντας τις πράξεις τον ακόλουθο μετασχηματισμό για το $R_{\mu\nu}$:

$$\bar{R}_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{\lambda} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \lambda - \frac{1}{2\lambda} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\square} \lambda + \frac{3}{2\lambda^2} \bar{\nabla}_\mu \lambda \bar{\nabla}_\nu \lambda \quad (4.3)$$

όπου με $\bar{\nabla}_\mu$ συμβολίζουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο και $\bar{\square} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu$. Τέλος για το βαθμωτό του Ricci, που ορίζεται από τη σχέση

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

προκύπτει ο ακόλουθος μετασχηματισμός

$$\bar{R} \rightarrow R = \frac{1}{\lambda} \bar{R} - \frac{3}{\lambda^2} \bar{\square} \lambda + \frac{3}{2\lambda^3} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \lambda \bar{\nabla}_\nu \lambda \quad (4.4)$$

4.2 Συστήματα Jordan και Einstein

Η δράση μιας θεωρίας πεδίου που περιλαμβάνει τη βαρύτητα και ένα βαθμωτό πεδίο μπορεί να γραφεί στο σύστημα Jordan όπου το βαθμωτό πεδίο ή κάποια συνάρτηση αυτού πολλαπλασιάζει το βαθμωτό του Ricci, ή στο σύστημα Einstein όπου το βαθμωτό του Ricci αποσυμπλέκεται από το βαθμωτό πεδίο.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να μεταφερθούμε από το ένα σύστημα στο άλλο μέσω ενός κατάλληλου μετασχηματισμού Weyl. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη δράση (Jordan frame):

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} [\Omega(\psi) R - U(\psi)] \quad (4.5)$$

όπου ψ είναι ένα βαθμωτό πεδίο και $\Omega(\psi)$ μία συνάρτηση θετικά ορισμένη.

Κάνουμε τώρα ένα μετασχηματισμό Weyl $g_{\mu\nu} = \lambda(x) \bar{g}_{\mu\nu}$ και επιλέγοντας το λ έτσι ώστε $\lambda^2 \Omega = 1$ έχουμε

$$\sqrt{-g} = \lambda^2 \sqrt{-\bar{g}} = \frac{1}{4\Omega^2} \sqrt{-\bar{g}}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν την παραπάνω σχέση καθώς και την (4.4) στην (4.5) και κάνοντας τις απαιτούμενες παραγοντικές ολοκληρώσεις ώστε

να φύγουν οι επιφανειακοί όροι, η δράση παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{\bar{\partial}_\mu \Omega}{\Omega} \right)^2 - \frac{U(\psi)}{4\Omega^2(\psi)} \right] \quad (4.6)$$

Ο δεύτερος όρος της δράσης μοιάζει με κινητικό όρο. Για να το δούμε αυτό, κάνουμε το μετασχηματισμό

$$\Omega(\psi) = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \quad (4.7)$$

Η τελευταία σχέση, όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση $\Omega(\psi)$, μπορεί να λυθεί ως προς ψ . Στη γενική περίπτωση συμβολίζουμε αυτή τη λύση ως $\psi = \Sigma(\phi)$.

Έτσι η αρχική δράση παίρνει τελικά τη μορφή

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2} (\bar{\partial}_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (4.8)$$

όπου

$$V(\phi) = \frac{U(\Sigma(\phi))}{4e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}} \quad (4.9)$$

Η δράση γραμμένη στη μορφή (4.8) αντιστοιχεί στο σύστημα Einstein. Συνεπώς τα συστήματα Jordan και Einstein συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός μετασχηματισμού Weyl.

4.3 $f(R)$ θεωρίες

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια θεωρία βαρύτητας της οποίας η δράση έχει τη μορφή

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (4.10)$$

όπου $f(R)$ είναι μία συνάρτηση του βαθμωτού του Ricci.

Μπορούμε να δούμε ότι η παραπάνω θεωρία είναι ισοδύναμη με την

$$\mathcal{S}' = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\Phi) - \psi(\Phi - R)] \quad (4.11)$$

όπου εισαγάγαμε τα βαθμωτά ψ και Φ , καθώς από τις εξισώσεις κίνησης ως προς το πεδίο ψ της (4.11) παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \Phi = R$$

Επίσης από τις εξισώσεις κίνησης ως προς το πεδίο Φ παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow f'(\Phi) = \psi \quad (4.12)$$

Η διαφορική εξίσωση (4.12) υποθέτουμε ότι έχει λύση την

$$\Phi = \xi(\psi) \quad (4.13)$$

Αντικαθιστώντας την (4.13) στην (4.11) παίρνουμε

$$\mathcal{S}' = \int d^4x \sqrt{-g} [\psi R - (\psi \xi(\psi) - f(\xi(\psi)))] \quad (4.14)$$

Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής (4.5) (Jordan frame) με $\Omega(\psi) = \psi$ και $U(\psi) = \psi \xi(\psi) - f(\xi(\psi))$.

Μπορούμε τέλος να γράψουμε ισοδύναμα την παραπάνω δράση στο σύστημα Einstein αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις Ω και U στις γενικές σχέσεις (4.7), (4.8) και (4.9). Επομένως η \mathcal{S}' στο σύστημα Einstein γίνεται:

$$\mathcal{S}' = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2} (\bar{\partial}_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (4.15)$$

όπου

$$V(\phi) = \frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \xi \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \right) - f \left(\xi \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \right) \right)}{4e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}} \quad (4.16)$$

4.3.1 Μοντέλο Starobinsky

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f έχει την ειδική μορφή [4, 20]

$$f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2} R^2 \quad (4.17)$$

Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση (4.12) γίνεται

$$\frac{1}{2} + k\Phi = \psi \Rightarrow \Phi = \frac{1}{k} \left(\psi - \frac{1}{2} \right) \quad (4.18)$$

Αντικαθιστώντας την (4.18) στην (4.11), παίρνουμε για τη δράση:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\Phi}{2} + \frac{k}{2} \Phi^2 - \left(\frac{1}{2} + k\Phi \right) (\Phi - R) \right] = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\psi R - \frac{1}{2k} \left(\psi - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Από την τελευταία μορφή της δράσης βλέπουμε ότι είμαστε στο Jordan frame (ίδια μορφή με την (4.5)) με $\Omega(\psi) = \psi$ και $U(\psi) = \frac{1}{2k}(\psi - \frac{1}{2})^2$. Επομένως θα είναι και $\psi = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}$.

Μπορούμε επίσης να γράψουμε την προηγούμενη δράση στο Einstein frame αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες στις σχέσεις (4.8) και (4.9). Τελικά προκύπτει

$$\mathcal{S}' = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2} (\bar{\partial}_\mu \phi)^2 - \frac{1}{8k} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} \right)^2 \right] \quad (4.20)$$

Κάνοντας τέλος το μετασχηματισμό $\phi = \sigma + \ell$ με ℓ τέτοιο ώστε $e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\ell} = 2$, η \mathcal{S}' γίνεται

$$\mathcal{S}' = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2} (\bar{\partial}_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{8k} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma} \right)^2 \right] \quad (4.21)$$

Το δυναμικό

$$V(\sigma) = \frac{1}{8k} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma} \right)^2 \quad (4.22)$$

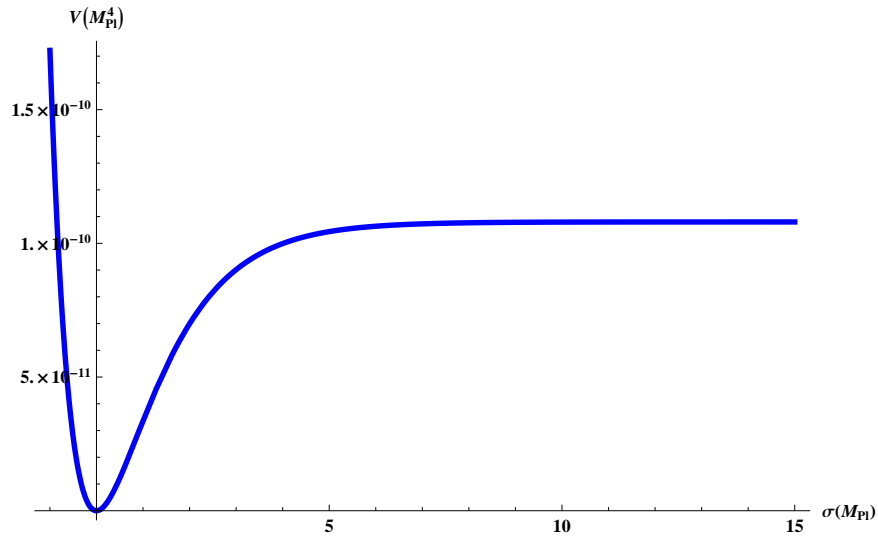
που εμφανίζεται παραπάνω είναι το δυναμικό Starobinsky, όπως είχαμε αναφέρει και στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η σταθερά k γράφεται συνήθως ως $k = \frac{1}{6\mu^2}$, όπου η κλίμακα μάζας μ μπορεί να προσδιοριστεί από το πλάτος των κβαντικών διακυμάνσεων A_s [18],

$$A_s = \frac{3\mu^2}{8\pi^2} \sinh^4 \left(\sigma_*/\sqrt{6} \right) = 2.1 \times 10^{-9} \quad (4.23)$$

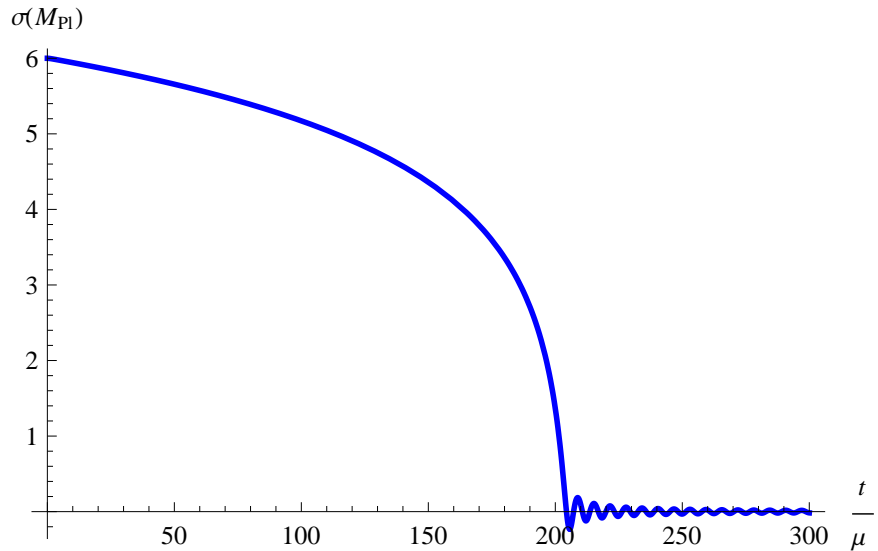
όπου $\sigma_* \approx 5.35$ αντιστοιχεί σε 55 efolds του πληθωρισμού. Λύνοντας ως προς μ την (4.23), παίρνουμε $\mu = 1.2 \times 10^{-5} M_{Pl} \approx 3 \times 10^{13} GeV$.

Στο σχήμα 4.1 απεικονίζουμε το δυναμικό (4.22) σαν συνάρτηση του πεδίου σ . Στην περιοχή $\sigma/M_{Pl} \gg 1$ το δυναμικό είναι σχεδόν σταθερό,

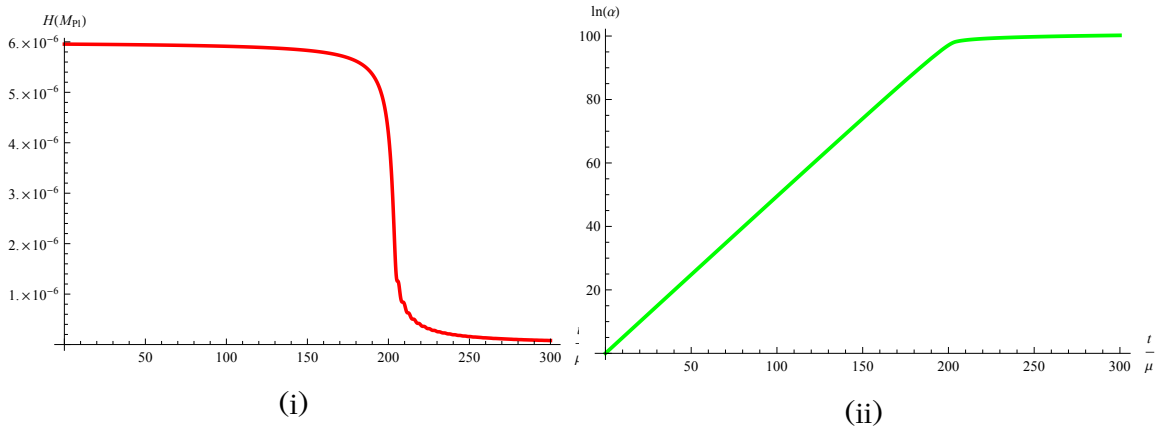


Σχήμα 4.1: Δυναμικό Starobinsky

πράγμα που οδηγεί σε πληθωρισμό slow-roll. Το δυναμικό στην περιοχή $\sigma/M_{Pl} \ll 1$ δίνεται από τη σχέση $V(\sigma) \approx \frac{1}{2}\mu^2\sigma^2$, οπότε το πεδίο ταλαντώνεται γύρω από την τιμή $\sigma = 0$ με απόσβεση. [3]

Σχήμα 4.2: Χρονική εξέλιξη του πεδίου $\sigma(t)$ στο μοντέλο Starobinsky

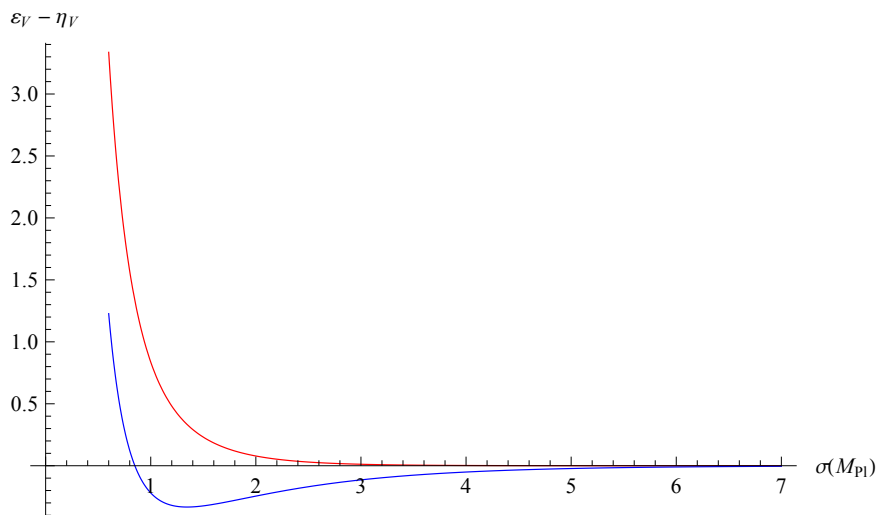
Στο σχήμα 4.2 φαίνεται η χρονική εξέλιξη του πεδίου $\sigma(t)$ και στο σχήμα 4.3 η χρονική εξέλιξη της παραμέτρου Hubble $H(t)$ και του κο-



Σχήμα 4.3: Χρονική εξέλιξη (i) της παραμέτρου Hubble $H(t)$ και (ii) του κοσμικού παράγοντα κλίμακας $a(t)$ στο μοντέλο Starobinsky

σμικού παράγοντα κλίμακας $a(t)$, που προέκυψαν από την αριθμητική απίλυση του συστήματος των εξισώσεων (3.15) και (3.16) για αρχικές συνθήκες $\sigma(0) = 6M_{Pl}$ και $\dot{\sigma}(0) = 0$.

Επίσης στο σχήμα 4.4 απεικονίζουμε τις παραμέτρους slow-roll ϵ_V και η_V που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο σαν συνάρτηση του πεδίου σ .



Σχήμα 4.4: Οι παράμετροι slow-roll ϵ_V (κόκκινη γραμμή) και η_V (πράσινη γραμμή) σαν συνάρτηση του πεδίου σ στο μοντέλο Starobinsky

Βλέπουμε ότι $\epsilon_V \sim 1$ για $\sigma \sim 1M_{Pl}$. Θεωρούμε λοιπόν ότι το τέλος του πληθωρισμού συμβαίνει για $\sigma_f \approx 1M_{Pl}$. Αυτή η τιμή συμβαδίζει και με αυτήν που θα βρίσκαμε βλέποντας από το διάγραμμα 4.3(ii) τη χρονική στιγμή που σταματάει η αύξηση του παράγοντα κλίμακας a και βρίσκοντας στη συνέχεια την τιμή του σ τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Τέλος ο φασματικός δείκτης n_s και ο λόγος r (tensor-to-scalar ratio) στην τιμή ρινοί του πεδίου σ_* μπορούν να υπολογιστούν προσεγγιστικά μέσω των παραμέτρων slow-roll από τις σχέσεις [5]

$$n_s \approx 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V, \quad r \approx 16\epsilon_V \quad (4.24)$$

Για την τιμή $\sigma_* = 5.35$ που αναφέραμε παραπάνω παίρνουμε $n_s \approx 0.965$ και $r \approx 0.004$. Αυτές οι τιμές των παραμέτρων συμβαδίζουν απόλυτα με τους περιορισμούς που προκύπτουν από τα πειράματα Planck για αυτές, οι οποίοι είναι οι ακόλουθοι: [21, 22]

$$n_s = 0.968 \pm 0.006, \quad r < 0.12 \quad (4.25)$$

4.3.2 Μία μοναδική ιδιότητα του μοντέλου Starobinsky

Βασικό χαρακτηριστικό του δυναμικού Starobinsky, που είναι σημαντικό παράγοντας για επιτυχή πληθωρισμό slow-roll, είναι η ασυμπτωτική σταθερότητα, δηλαδή $V(\phi) \rightarrow c$ για $\phi \rightarrow +\infty$, όπου c είναι μία σταθερά με $c \neq 0$. Ας δούμε τώρα αν μπορούμε να κατασκευάσουμε πολυωνυμική συνάρτηση $f(R)$ μεγαλύτερου βαθμού από 2, έτσι ώστε για το δυναμικό που προκύπτει στο σύστημα Einstein να ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

Έστω ότι η $f(R)$ έχει τη μορφή

$$f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2 + \dots + aR^n \quad (4.26)$$

Σε αυτήν την περίπτωση η σχέση (4.12) γίνεται

$$\frac{1}{2} + k\Phi + \dots + na\Phi^{n-1} = \psi \quad (4.27)$$

Από την (4.27) βλέπουμε ότι για μεγάλα ψ ισχύει

$$\psi \sim \Phi^{n-1} \Rightarrow \Phi = \xi(\psi) \sim \psi^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.28)$$

καθώς θα υπερισχύει ο μεγιστοβάθμιος όρος. Επομένως

$$\psi \xi(\psi) \sim \psi^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{και} \quad f(\xi(\psi)) \sim \xi^n \sim \psi^{\frac{n}{n-1}} \quad (4.29)$$

Άρα και για τη συνάρτηση $U(\psi)$ θα έχουμε

$$U(\psi) = \psi \xi(\psi) - f(\xi(\psi)) \sim \psi^{\frac{n}{n-1}} \quad (4.30)$$

και επομένως

$$\frac{U(\psi)}{4\psi^2} \sim \psi^{\frac{n}{n-1}-2} \quad (4.31)$$

Επίσης, όπως έχουμε δει παραπάνω, ισχύει ότι $\psi = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}$, οπότε όταν $\phi \rightarrow +\infty$, τότε και $\psi \rightarrow +\infty$. Συνεπώς για να συγκλίνει το δυναμικό σε κάποια τιμή μη μηδενική στο άπειρο, θα πρέπει $\frac{U(\psi)}{4\psi^2} \rightarrow c$ καθώς $\psi \rightarrow +\infty$. Από την (4.31) βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν

$$\frac{n}{n-1} - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$$

Συνεπώς η επιθυμητή μας ιδιότητα ισχύει μόνο για $n = 2$, που αντιστοιχεί στο μοντέλο Starobinsky.

Για κάθε $n > 2$, βλέπουμε από την (4.31) ότι $\frac{U(\psi)}{4\psi^2} \rightarrow 0$ για $\psi \rightarrow +\infty$ και επομένως το δυναμικό $V(\phi)$ θα τείνει στο 0 καθώς $\phi \rightarrow +\infty$. Συνεπώς δεν υπάρχει το απεριορίστο οροπέδιο (plateau), που μας επιτρέπει να έχουμε πληθωρισμό με μεγάλο εύρος αρχικών συνθηκών. Παρακάτω εξετάζουμε την περίπτωση $n = 3$.

4.3.3 Πρόσθετος όρος R^3 στο Μοντέλο Starobinsky

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου η συνάρτηση f έχει τη μορφή

$$f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2 + aR^3 \quad (4.32)$$

Η εξίσωση (4.12) επομένως γίνεται

$$\frac{1}{2} + k\Phi + 3a\Phi^2 = \psi \Rightarrow \Phi = \xi(\psi) = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 6a(2\psi - 1)}}{6a} \quad (4.33)$$

Αντικαθιστώντας την (4.33) στην (4.11) παίρνουμε

$$\mathcal{S}' = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{k}{2}\Phi^2 - 2a\Phi^3 + \psi R \right] = \int d^4x \sqrt{-g} [\psi R - U(\psi)] \quad (4.34)$$

όπου

$$U(\psi) = \pm \frac{\left(k \mp \sqrt{k^2 + 6a(-1 + 2\psi)} \right)^2 \left(\pm k + 2\sqrt{k^2 + 6a(-1 + 2\psi)} \right)}{216a^2} \quad (4.35)$$

Μπορούμε τέλος να γράψουμε την παραπάνω δράση στο σύστημα Einstein αντικαθιστώντας την (4.35) και την $\psi = e^{\sqrt{2/3}\phi}$ στις σχέσεις (4.7), (4.8) και (4.9). Έτσι η \mathcal{S}' γίνεται:

$$\mathcal{S}' = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2}(\bar{\partial}_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (4.36)$$

όπου

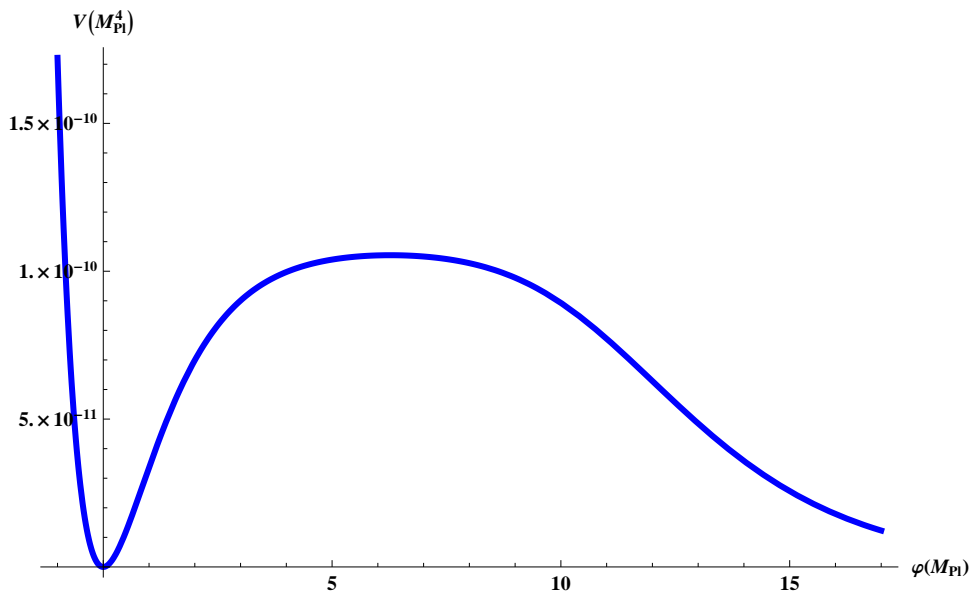
$$V(\phi) = \frac{\left(k \mp \sqrt{k^2 + 6a(-1 + 2e^{\sqrt{2/3}\phi})} \right)^2 \left(k \pm 2\sqrt{k^2 + 6a(-1 + 2e^{\sqrt{2/3}\phi})} \right)}{864a^2 e^{2\sqrt{2/3}\phi}} \quad (4.37)$$

Για τη σταθερά k θα θεωρήσουμε την ίδια τιμή που είχε στο μοντέλο Starobinsky ($k = \frac{1}{6\mu^2}$ με $\mu = 1.2 \times 10^{-5} M_{Pl}$). Επειδή θέλουμε το δυναμικό να είναι θετικά ορισμένο για μεγάλα ϕ , κρατάμε μόνο την πρώτη λύση. Για να διέρχεται τέλος το δυναμικό από την αρχή των αξόνων, κάνουμε το μετασχηματισμό $\phi \rightarrow \phi + \ell$ έτσι ώστε $e^{\sqrt{2/3}\ell} = \frac{1}{2}$. Επομένως θα έχουμε τελικά τη θεωρία (4.36) με

$$V(\phi) = \frac{\left(k - \sqrt{k^2 + 6a(-1 + e^{\sqrt{2/3}\phi})} \right)^2 \left(k + 2\sqrt{k^2 + 6a(-1 + e^{\sqrt{2/3}\phi})} \right)}{216a^2 e^{2\sqrt{2/3}\phi}} \quad (4.38)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι το a έχει διαστάσεις $[\frac{1}{m^4}]$ και επομένως $[a] = [k^2]$, δηλαδή ο συνδυασμός $\frac{a}{k^2}$ είναι αδιάστατος. Ας διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

i) $a > 0$: Σε αυτήν την περίπτωση το δυναμικό μπορεί να οριστεί για κάθε τιμή του ϕ εφόσον $k^2 > 6a$ (τότε η υπόρριζη ποσότητα που εμφανίζεται είναι πάντα θετική). Τώρα υπάρχει ένα τοπικό μέγιστο στο δυναμικό σε κάποια τιμή ϕ_{cr} , όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.5. Συνεπώς αν το πεδίο ξεκινήσει από μία τιμή $\phi > \phi_{cr}$ με μηδενική ταχύτητα, δε θα κυλήσει αργά προς την αρχή των αξόνων, αλλά προς τα δεξιά ωδεύοντας στο $+\infty$, και επομένως δεν μπορεί να γίνει επιτυχής τερματισμός του πληθωρισμού [6].



Σχήμα 4.5: Το δυναμικό (4.38) για $a = 10^{14}$. Βλέπουμε ότι $\phi_{cr} \approx 6.3$.

ii) $a < 0$: Σε αυτήν την περίπτωση το δυναμικό δεν μπορεί να οριστεί για οποιαδήποτε τιμή του ϕ . Μπορούμε να δούμε ότι για να είναι η υπόρριζη ποσότητα που εμφανίζεται στο δυναμικό θετική, θα πρέπει

$$\phi < \phi_{max} = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln\left(1 + \frac{k^2}{6|a|}\right) \quad (4.39)$$

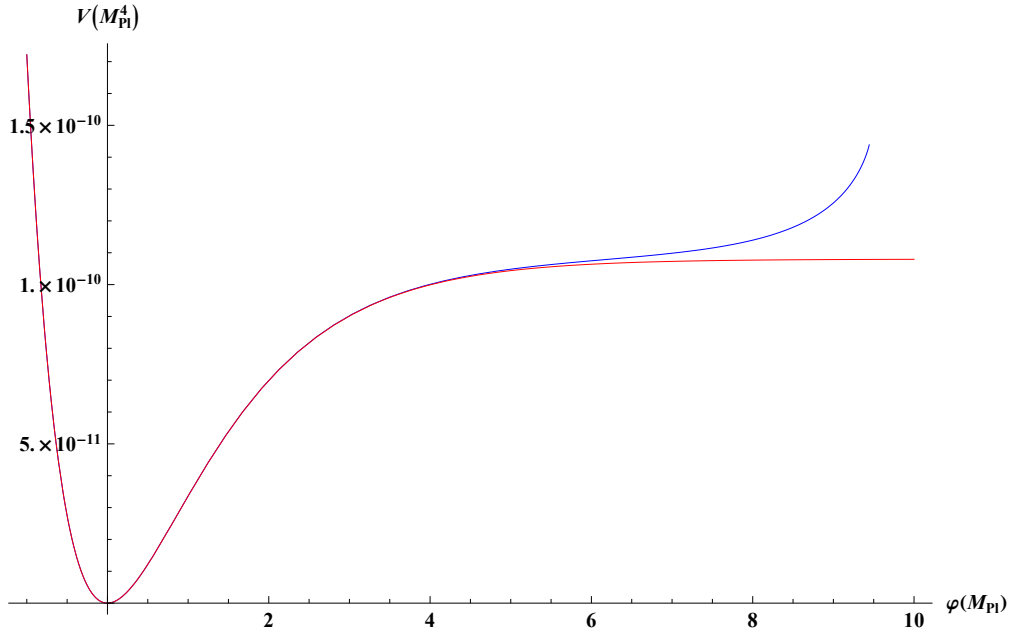
Η τιμή αποκοπής ϕ_{max} μικραίνει όταν ο λόγος $\frac{|a|}{k^2}$ αυξάνεται. Μπορούμε να βρούμε ότι για να υπάρχει το κατάλληλα μεγάλο πλατό που εγγυάται φυσικές αρχικές συνθήκες για επιτυχή πληθωρισμό, θα πρέπει να ισχύει

η συνθήκη $|a| \ll k^2$. Συγκεκριμένα η επίτευξη πληθωρισμού είναι δυνατή αν $\frac{|a|}{k^2} \lesssim 10^{-4}$.

Μάλιστα για $\frac{|a|}{k^2} \leq 10^{-6}$ τα αποτελέσματα για όλες τις παραμέτρους του πληθωρισμού είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά που προβλέπει το μοντέλο Starobinsky για φυσιολογικές αρχικές συνθήκες ($\phi(0) < 10M_{Pl}$). Αυτό συμβαίνει επειδή για σχετικά μικρές τιμές του ϕ το δυναμικό μας σχεδόν συμπίπτει με το δυναμικό Starobinsky. Άλλωστε μπορούμε να δούμε ότι για μικρά ϕ , το δυναμικό (4.38) γράφεται

$$V(\phi) \approx \frac{1}{8k} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}\right)^2 \left[1 + \frac{a}{k^2} \left(-1 + e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}\right)\right] \quad (4.40)$$

Η παραπάνω προσέγγιση ισχύει για όλο και μεγαλύτερες τιμές του ϕ όσο μικραίνουμε το a , ενώ για $\frac{|a|}{k^2} \rightarrow 0$ το δυναμικό μας γίνεται ακριβώς το δυναμικό Starobinsky.



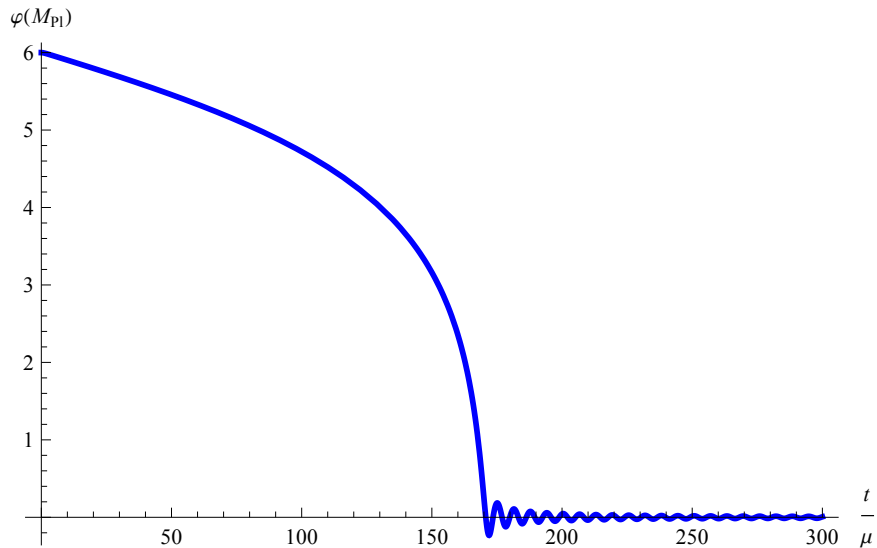
Σχήμα 4.6: Το δυναμικό (4.38) για $a = -10^{14}$ (μπλε γραμμή) σε σύγκριση με το δυναμικό Starobinsky (κόκκινη γραμμή). Η τιμή αποκοπής σε αυτήν την περίπτωση είναι $\phi_{max} \approx 9.44$.

Αντίθετα για $\frac{|a|}{k^2} \geq 10^{-3}$ δεν μπορούμε να έχουμε επιτυχή πληθωρισμό, καθώς δεν έχουμε τα απαιτούμενα e-folds που προβλέπονται από

τα δεδομένα.

Για να οπτικοποιήσουμε τα αποτελέσματα του R^3 -μοντέλου, ας εξετάσουμε αναλυτικότερα την περίπτωση όπου $a = -10^{14}$ που αντιστοιχεί σε $\frac{|a|}{k^2} \approx 10^{-4}$. Στο σχήμα 4.6 απεικονίζουμε το δυναμικό (4.38) σαν συνάρτηση του πεδίου ϕ .

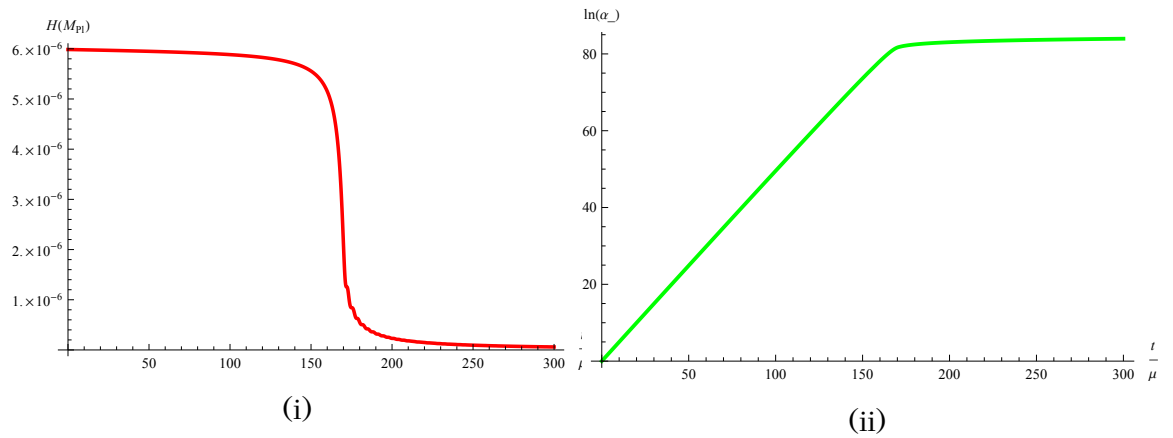
Στο σχήμα 4.7 φαίνεται η χρονική εξέλιξη του πεδίου $\phi(t)$ και στο σχήμα 4.8 η χρονική εξέλιξη της παραμέτρου Hubble $H(t)$ και του κοσμικού παράγοντα κλίμακας $\alpha(t)$, που προέκυψαν από την αριθμητική απίλυση του συστήματος των εξισώσεων (3.15) και (3.16) για αρχικές συνθήκες $\phi(0) = 6M_{Pl}$ και $\dot{\phi}(0) = 0$.



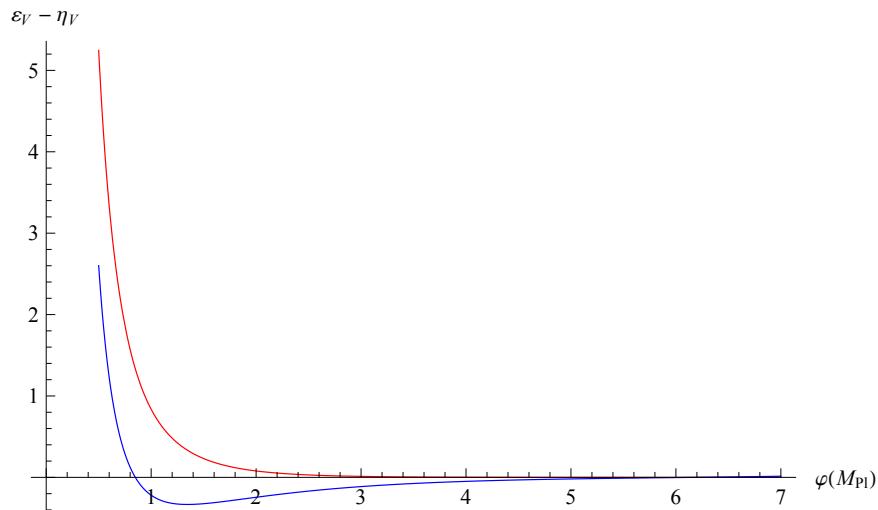
Σχήμα 4.7: Χρονική εξέλιξη του πεδίου $\sigma(t)$ στο μοντέλο $R/2 + k/2R^2 + aR^3$ για $a = -10^{14}$

Επίσης στο σχήμα 4.9 απεικονίζουμε τις παραμέτρους slow-roll ϵ_V και η_V που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο σαν συνάρτηση του πεδίου ϕ .

Βλέπουμε και πάλι ότι $\epsilon_V \sim 1$ για $\phi \sim 1M_{Pl}$. Θεωρούμε λοιπόν ότι το τέλος του πληθωρισμού συνβαίνει για $\phi \approx 1M_{Pl}$. Αυτή η τιμή συμβαδίζει και με αυτήν που θα βρίσκαμε βλέποντας από το διάγραμμα 4.8(ii) τη χρονική στιγμή που σταματάει η αύξηση του παράγοντα κλίμακας α



Σχήμα 4.8: Χρονική εξέλιξη (i) της παραμέτρου Hubble $H(t)$ και (ii) του κοσμικού παράγοντα κλίμακας $\alpha(t)$ στο μοντέλο $R/2 + k/2R^2 + aR^3$ για $a = -10^{14}$



Σχήμα 4.9: Οι παράμετροι slow-roll ϵ_V (κόκκινη γραμμή) και η_V (πράσινη γραμμή) σαν συνάρτηση του πεδίου ϕ στο μοντέλο $R/2 + k/2R^2 + aR^3$ για $a = -10^{14}$

και βρίσκοντας στη συνέχεια την τιμή του ϕ τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Με αριθμητική ολοκλήρωση βρίσκουμε ότι $N_* \approx 55$ για $\phi_* \approx 5.45$ αυτή τη φορά. Τέλος για το φασματικό δείκτη n_s και το λόγο r βρίσκουμε $n_s \approx 0.976$ και $r \approx 0.005$, που διαφέρουν πολύ λίγο από τις αντίστοιχες

τιμές του μοντέλου Starobinsky.

Να σημειώσουμε ωστόσο ότι οι παράμετροι k και a θα έπρεπε να προσδιοριστούν και εδώ μέσω του πλάτους A_s και να μην μπουν με το χέρι, το οποίο όμως είναι πολύ δύσκολο να γίνει. Πάντως με τις τιμές που επιλέγουμε έχουμε ουσιαστικά διαταραχή στο μοντέλο Starobinsky, οπότε προσεγγιστικά θα συμφωνούν και με την πειραματική τιμή του A_s .

Συμπεραίνουμε ότι μόνο όταν ο όρος aR^3 συμπεριφέρεται ως μία μικρή διαταραχή στο μοντέλο Starobinsky, εξακολουθούμε να έχουμε επιτυχή πληθωρισμό, ενώ όταν αυτός ο όρος γίνεται σημαντικός τα πράγματα χαλάνε. Συνεπώς στην πραγματικότητα δε βρήκαμε κάποια καινούρια $f(R)$ θεωρία που να οδηγεί σε επιτυχημένο πληθωρισμό. Αυτό μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε πληθωριστικά μοντέλα σε θεωρίες βαρύτητας υψηλότερης τάξης, το οποίο θα κάνουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 5

Higher-order θεωρίες βαρύτητας και multi-field πληθωρισμός

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι μία $f(R)$ θεωρία, η οποία είναι μία θεωρία βαρύτητας 4ης τάξης, είναι ισοδύναμη με μία θεωρία βαρύτητας Einstein-Hilbert που περιλαμβάνει και ένα βαθμωτό πεδίο. Αυτή η ισοδυναμία μπορεί να επεκταθεί σε υψηλότερης τάξης βαρυτικές θεωρίες, οι οποίες παράγονται από Λαγκρανζιανές που είναι συναρτήσεις όχι μόνο του R αλλά και του $\square R$ ή γενικότερα του $\square^n R$. Τέτοιοι όροι μπορούν επίσης να προκύψουν και από κβαντικές διορθώσεις στη γενική σχετικότητα.

Να προσέξουμε ότι Λαγκρανζιανές που διαφέρουν κατά μία ολική απόκλιση δίνουν τις ίδιες εξισώσεις πεδίου. Για παράδειγμα ένας όρος $\square^i R$ από μόνος του είναι μία ολική απόκλιση και μπορεί να αγνοηθεί, ενώ ένας όρος $\square^n R \square^m R$ μπορεί να ολοκληρωθεί κατά παράγοντες και να δώσει $R \square^{m+n} R$. Έτσι μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση $F(\square^i R)$ γραμμική στην παράγωγο υψηλότερης τάξης ($\square^n R$), και αυτός ο όρος να πολλαπλασιάζεται μόνο με μία συνάρτηση του βαθμωτού Ricci, $F_n(R)$. Οι εξισώσεις πεδίου αυτής θα περιέχουν παραγώγους $(2n+4)$ -τάξης του μετρικού τανυστή και επομένως η αντίστοιχη θεωρία βαρύτητας θα είναι $(2n+4)$ -τάξης. [23]

Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι η δράση μιας θεωρίας βαρύτητας

$(2n + 4)$ -τάξης που έχει τη γενική μορφή

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} F(R, \square R, \dots, \square^n R) \quad (5.1)$$

είναι ισοδύναμη με μία δράση Einstein-Hilbert που περιλαμβάνει $n + 1$ βαθμωτά πεδία [23].

Εμείς στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αναλυτικά με την περίπτωση $n = 1$, δηλαδή με θεωρίες βαρύτητας 6ης τάξης.

5.1 Θεωρίες $f(R) + R\square R$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μία θεωρία της μορφής

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + \gamma R\square R] \quad (5.2)$$

Η παραπάνω δράση είναι ισοδύναμη με την

$$\mathcal{S}' = \int d^4x \sqrt{-g} [f(J_1) + J_1 J_2 - \Lambda_0 (J_1 - R) - \Lambda_1 (J_2 - \gamma \square R)] \quad (5.3)$$

όπου εισαγάγαμε τα βαθμωτά πεδία J_1, J_2 και τους πολλαπλασιαστές Lagrange Λ_0, Λ_1 , καθώς από τις εξισώσεις κίνησης ως προς τα πεδία Λ_0 και Λ_1 παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Lambda_0} = 0 \Rightarrow J_1 = R$$

και

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Lambda_1} = 0 \Rightarrow J_2 = \gamma \square R$$

Επίσης από τις εξισώσεις κίνησης για τα πεδία J_1, J_2 παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial J_2} = 0 \Rightarrow J_1 - \Lambda_1 = 0 \Rightarrow J_1 = \Lambda_1 \quad (5.4)$$

και

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial J_1} = 0 \Rightarrow f'(J_1) + J_2 - \Lambda_0 = 0 \Rightarrow J_2 = \Lambda_0 - f'(\Lambda_1) \quad (5.5)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις σχέσεις (5.4) και (5.5), η δράση (5.3) γίνεται τελικά

$$S' = \int d^4x \sqrt{-g} [(\Lambda_0 + \gamma\Box\Lambda_1)R - (\Lambda_0\Lambda_1 - f(\Lambda_1))] \quad (5.6)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει

$$\Omega = \Lambda_0 + \gamma\Box\Lambda_1 > 0$$

Τότε κάνοντας έναν μετασχηματισμό Weyl της μετρικής $g_{\mu\nu} = \lambda(x)\bar{g}_{\mu\nu}$ και επιλέγοντας το λ έτσι ώστε $\lambda 2\Omega = 1$ όπως και στην ενότητα 4.2, η δράση (5.6) παίρνει τη μορφή

$$S' = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{\bar{\partial}_\mu \Omega}{\Omega} \right)^2 - \frac{\Lambda_0\Lambda_1 - f(\Lambda_1)}{4\Omega^2} \right] \quad (5.7)$$

Ορίζουμε τώρα δύο νέα πεδία ϕ και ψ ως ακολούθως:

$$\phi = \Lambda_1 \sqrt{|\gamma|} \quad (5.8)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \Omega = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(\Lambda_0 + \gamma\Box\Lambda_1) \Rightarrow \Lambda_0 = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} - \frac{\gamma}{\sqrt{|\gamma|}}\Box\phi \quad (5.9)$$

Επομένως η (5.7) γίνεται

$$S' = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2}(\bar{\partial}_\mu \psi)^2 + \frac{1}{4} \frac{\gamma}{|\gamma|} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \phi\Box\phi - \frac{e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi}}{4} \left[\frac{\phi}{\sqrt{|\gamma|}} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} - f\left(\frac{\phi}{\sqrt{|\gamma|}}\right) \right] \right] \quad (5.10)$$

Ας δούμε τώρα πώς εκφράζεται το $\Box\phi$ συναρτήσει του $\bar{\Box}\phi$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \Box\phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \frac{1}{\lambda^2 \sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu \left(\lambda^2 \sqrt{-\bar{g}} \frac{1}{\lambda} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \bar{\Box}\phi + \frac{1}{\lambda^2} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \lambda \partial_\nu \phi \end{aligned} \quad (5.11)$$

και επειδή $\lambda = \frac{1}{2\Omega}$ τελικά παίρνουμε

$$\Box\phi = 2\Omega \bar{\Box}\phi - 2\bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Omega \partial_\nu \phi \quad (5.12)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν το $\square\phi$ από την (5.12) στην δράση (5.10) και κάνοντας μια κατά παράγοντες ολοκλήρωση, προκύπτει τελικά (αγνοώντας τον επιφανειακό όρο) [6]

$$S' = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2}(\bar{\partial}_\mu\psi)^2 - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{|\gamma|} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} (\bar{\partial}_\mu\phi)^2 - U(\psi, \phi) \right] \quad (5.13)$$

όπου

$$U(\psi, \phi) = \frac{1}{4} \left[\frac{\phi}{\sqrt{|\gamma|}} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} - f \left(\frac{\phi}{\sqrt{|\gamma|}} \right) e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \right] \quad (5.14)$$

Επειδή από τις τελευταίες σχέσεις δεν μπορούμε να μελετήσουμε τι συμβαίνει για παράδειγμα όταν $\gamma \rightarrow 0$, ας ορίσουμε ένα νέο πεδίο Σ ως εξής:

$$\Sigma = \frac{\phi}{\sqrt{|\gamma|}} \Rightarrow \phi = \sqrt{|\gamma|}\Sigma \quad (5.15)$$

Τότε η δράση (5.13) γίνεται

$$S' = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2}(\bar{\partial}_\mu\psi)^2 - \frac{\gamma}{2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} (\bar{\partial}_\mu\Sigma)^2 - V(\psi, \Sigma) \right] \quad (5.16)$$

όπου

$$V(\psi, \Sigma) = \frac{1}{4} \left[\Sigma e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} - f(\Sigma) e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \right] \quad (5.17)$$

Το δυναμικό (5.17) που προέκυψε είναι συνάρτηση των πεδίων ψ και Σ και είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου γ . Η εξάρτηση της θεωρίας μας από το γ υπάρχει μόνο μέσω του κινητικού ορου του πεδίου Σ , όπως φαίνεται από την (5.16).

Να σημειώσουμε εδώ ότι αν απανφέραμε τις κανονικές διαστάσεις των πεδίων, θα διαπιστώναμε ότι ενώ το ψ έχει διαστάσεις μάζας $[m]$, οι διαστάσεις του Σ είναι $[m^2]$.

Ας γράψουμε τέλος τις εξισώσεις κίνησης που αντιστοιχούν στη δράση (5.16) για τα πεδία ψ και Σ , θεωρώντας τη μετρική FRW με μηδενική χωρική καμπυλότητα (όπως στην περίπτωση του ενός πεδίου). Παίρνουμε:

$$\frac{\delta S'}{\delta\psi} = 0 \Rightarrow \ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + \frac{\gamma}{\sqrt{6}} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \dot{\Sigma}^2 = -\frac{\partial V}{\partial\psi} \quad (5.18)$$

και

$$\frac{\delta S'}{\delta\Sigma} = 0 \Rightarrow \gamma \left(\ddot{\Sigma} + 3H\dot{\Sigma} - \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\psi}\dot{\Sigma} \right) = -e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \frac{\partial V}{\partial\Sigma} \quad (5.19)$$

5.1.1 Το όριο $\gamma \rightarrow 0$

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει όταν $\gamma \rightarrow 0$. Σε αυτό το όριο το πεδίο Σ δεν είναι δυναμικό (auxiliary) και η εξίσωση κίνησης για αυτό γίνεται

$$\frac{\delta \mathcal{S}'}{\delta \Sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \Sigma} = 0 \Rightarrow f'(\Sigma) = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \quad (5.20)$$

Δεδομένης της συνάρτησης f , η εξίσωση (5.20) μπορεί να λυθεί ως προς Σ . Ας συμβολίσουμε τη λύση αυτή ως $\Sigma = \xi(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi})$. Τότε η δράση (5.16) παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{S}' = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2}(\bar{\partial}_\mu \psi)^2 - V(\psi) \right] \quad (5.21)$$

όπου

$$V(\psi) = \frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \xi(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi}) - f(\xi(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi}))}{4e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi}} \quad (5.22)$$

Η παραπάνω μορφή της δράσης είναι ακριβώς ίδια με αυτήν που είχαμε βρει στο προηγούμενο κεφάλαιο όταν είχαμε μια $f(R)$ θεωρία, πράγμα που αναμέναμε, αφού παίρνοντας $\gamma = 0$ είναι σαν να σβήνουμε τον πρόσθετο όρο $R\Box R$. Έτσι, αν είχαμε για παράδειγμα $f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$, θα προέκυπτε από την τελευταία σχέση το δυναμικό Starobinsky για το πεδίο ψ , όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Είδαμε λοιπόν πως όταν έχουμε στη δράση ένα βοηθητικό πεδίο (auxiliary), μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει των υπολοίπων πεδίων, αφού η εξίσωση κίνησής του μπορεί να λυθεί άμεσα ως προς αυτό. Οπότε στην πραγματικότητα έχουμε ένα λιγότερο πεδίο. Γενικότερα όταν σε μια δράση πολλών πεδίων ο κινητικός όρος έχει τη γενική μορφή $K = \frac{1}{2}G_{IJ}\partial\phi^I\partial\phi^J$ με $\det(G_{IJ}) = 0$ και ο πίνακας G_{IJ} έχει n μηδενικές ιδιοτιμές, τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχουν n βοηθητικά πεδία και επομένως μπορούμε να ελαττώσουμε τους βαθμούς ελευθερίας κατά n .

5.1.2 Υπολογισμός φάσματος μαζών

Για να μελετήσουμε το φάσμα μαζών των σωματιδίων που συμμετέχουν στη θεωρία, αναπτύσσουμε τη δράση της θεωρίας γύρω από το

κενό αυτής, το οποίο αντιστοιχεί στο ελάχιστο του δυναμικού. Έστω (ψ_0, Σ_0) οι τιμές των πεδίων που αντιστοιχούν στο κενό που μελετάμε, δηλαδή ισχύει ότι

$$V_{,\psi}|_{(\psi_0, \Sigma_0)} = V_{,\Sigma}|_{(\psi_0, \Sigma_0)} = 0 \quad (5.23)$$

όπου $V_{,\psi} = \frac{\partial V(\psi, \Sigma)}{\partial \psi}$ και $V_{,\Sigma} = \frac{\partial V(\psi, \Sigma)}{\partial \Sigma}$.

Συνεπώς η δράση (5.16) γύρω από το κενό γράφεται

$$S' \approx \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{2} - \frac{1}{2}(\bar{\partial}_\mu \psi)^2 - \frac{\gamma}{2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0} (\bar{\partial}_\mu \Sigma)^2 - V(\psi, \Sigma) \right] \quad (5.24)$$

με

$$\begin{aligned} V(\psi, \Sigma) \approx & V(\psi_0, \Sigma_0) + \frac{1}{2} V_{,\psi\psi} (\psi - \psi_0)^2 + \frac{1}{2} V_{,\Sigma\Sigma} (\Sigma - \Sigma_0)^2 + \\ & + V_{,\psi\Sigma} (\psi - \psi_0) (\Sigma - \Sigma_0) \end{aligned} \quad (5.25)$$

όπου όλες οι δεύτερες παράγωγοι εννοείται ότι γίνονται στο σημείο (ψ_0, Σ_0) .

Επειδή θέλουμε σε αυτή τη διαδικασία και οι δύο κινητικοί όροι να είναι κανονικοί, ορίζουμε ένα νέο πεδίο $\hat{\Sigma}$ ως

$$\hat{\Sigma} = \sqrt{\gamma} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0} \Sigma = \lambda \Sigma \quad (5.26)$$

(Έχουμε υποθέσει ότι $\gamma > 0$, ώστε οι κινητικοί όροι να έχουν το ίδιο πρόσημο.)

Τότε στη δράση (5.24) ο δεύτερος κινητικός όρος γίνεται $\frac{1}{2}(\bar{\partial}_\mu \hat{\Sigma})^2$, ενώ το δυναμικό (5.25) γίνεται

$$\begin{aligned} V \approx & V(\psi_0, \Sigma_0) + \frac{1}{2} V_{,\psi\psi} (\psi - \psi_0)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{2} V_{,\Sigma\Sigma} (\hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}_0)^2 + \\ & + \frac{1}{\lambda} V_{,\psi\Sigma} (\psi - \psi_0) (\hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}_0) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί επίσης στη μορφή

$$V \approx V(\psi_0, \Sigma_0) + \begin{pmatrix} \psi - \psi_0 & \hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{,\psi\psi} & \frac{1}{\lambda} V_{,\psi\Sigma} \\ \frac{1}{\lambda} V_{,\psi\Sigma} & \frac{1}{\lambda^2} V_{,\Sigma\Sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi - \psi_0 \\ \hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}_0 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Ο πίνακας

$$M^2 = \begin{pmatrix} V_{,\psi\psi} & \frac{1}{\lambda} V_{,\psi\Sigma} \\ \frac{1}{\lambda} V_{,\psi\Sigma} & \frac{1}{\lambda^2} V_{,\Sigma\Sigma} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

καλείται πίνακας μαζών (mass matrix) και οι ιδιοτιμές του είναι τα τετράγωνα των μαζών δύο πεδίων που προκύπτουν από στροφή των $\psi - \psi_0, \hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}_0$. Για να περιγράψει η θεωρία μας δύο σωματίδια με θετικές μάζες, θα πρέπει ο παραπάνω πίνακας να έχει θετικές ιδιοτιμές ή ισοδύναμα να είναι θετικά ορισμένος. Τότε μόνο έχουμε άλλωστε πραγματικά ελάχιστο του δυναμικού. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει το ίχνος και η ορίζουσά του να είναι θετικά.

Ας υπολογίσουμε τώρα τον παραπάνω πίνακα για το δυναμικό

$$V(\psi, \Sigma) = \frac{1}{4} \left[\Sigma e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} - f(\Sigma) e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \right]$$

που έχουμε στη θεωρία που μελετάμε. Κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε για τις δεύτερες παραγώγους του δυναμικού στο σημείο (ψ_0, Σ_0) :

$$V_{,\psi\psi}|_{(\psi_0, \Sigma_0)} = -\frac{1}{3} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0} f(\Sigma_0)$$

$$V_{,\psi\Sigma}|_{(\psi_0, \Sigma_0)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0} f'(\Sigma_0)$$

και

$$V_{,\Sigma\Sigma}|_{(\psi_0, \Sigma_0)} = -\frac{1}{4} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0} f''(\Sigma_0)$$

Άρα ο mass matrix (5.29) γράφεται:

$$M^2 = e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} f(\Sigma_0) & \frac{1}{\lambda} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} f'(\Sigma_0) \\ \frac{1}{\lambda} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} f'(\Sigma_0) & -\frac{1}{4\lambda^2} f''(\Sigma_0) \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Για να είναι οι μάζες θετικές, θα πρέπει όπως είπαμε παραπάνω να ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M^2) > 0 &\Rightarrow -\frac{1}{3} f(\Sigma_0) - \frac{1}{4\lambda^2} f''(\Sigma_0) > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} f(\Sigma_0) + \frac{1}{4\lambda^2} f''(\Sigma_0) < 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

και

$$\begin{aligned} \det(M^2) > 0 &\Rightarrow \frac{1}{12} f(\Sigma_0) f''(\Sigma_0) - \frac{1}{24} (f'(\Sigma_0))^2 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2f(\Sigma_0) f''(\Sigma_0) > (f'(\Sigma_0))^2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.1.3 Η περίπτωση $f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$ και τα προβλήματα που υπάρχουν

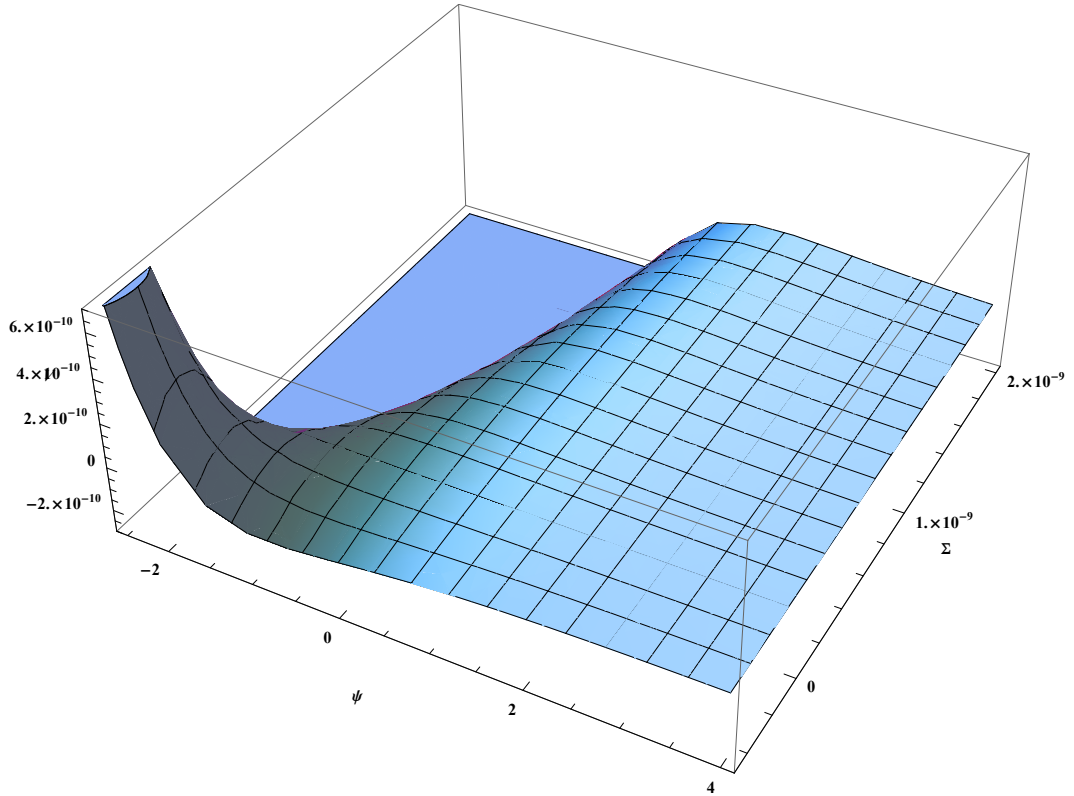
Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(R)$ είναι όπως στην περίπτωση του μοντέλου Starobinsky, δηλαδή

$$f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2 \quad (5.33)$$

Τότε το δυναμικό (5.17) γράφεται

$$V(\psi, \Sigma) = \frac{1}{4} \left[\Sigma e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} - \left(\frac{\Sigma}{2} + \frac{k}{2}\Sigma^2 \right) e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \right] \quad (5.34)$$

και απεικονίζεται στο σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Το δυναμικό (5.34) με την παράμετρο k να παίρνει την τιμή που είχε στο μοντέλο Starobinsky

Σε αυτήν την περίπτωση οι μερικές παράγωγοι του δυναμικού ως προς τα πεδία ψ και Σ μηδενίζονται για $\psi_0 = -\sqrt{3/2}\ln 2$, $\Sigma_0 = 0$.

Αυτές οι τιμές αντιστοιχούν σε ένα κενό Minkowski, καθώς $V(\psi_0, \Sigma_0) = 0$. Ωστόσο μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι συνθήκες (5.31) και (5.32) δεν ικανοποιούνται και επομένως ο πίνακας M^2 δεν είναι θετικά ορισμένος. Συγκεκριμένα βρίσκουμε ότι έχει μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή, που σημαίνει ότι στη θεωρία μας υπάρχει και ένα ghost-σωματίδιο [6]. Συνεπώς το κενό Minkowski είναι ασταθές και δεν αντιστοιχεί σε ελάχιστο του δυναμικού αλλά σε σαγματικό σημείο.

Επίσης το δυναμικό που προέκυψε δεν είναι φραγμένο από κάτω, καθώς πηγαίνει στο $-\infty$ όταν για παράδειγμα $\psi \rightarrow -\infty$ για δεδομένο Σ .

Όπως έχουμε ήδη πει, όταν $\gamma = 0$ έχουμε πληθωρισμό ακριβώς όπως στο μοντέλο Starobinsky, αρκεί οι αρχικές μας συνθήκες να σέβονται τη σχέση (5.20), η οποία στην παρούσα περίπτωση γίνεται

$$\Sigma = \frac{1}{k} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} - \frac{1}{2} \right) \quad (5.35)$$

Όταν $\gamma \neq 0$, πληθωρισμό θα έχουμε πιθανότατα για αρκετά fine-tuned αρχικές συνθήκες. Η αλήθεια είναι ότι δεν καταφέραμε να βρούμε ικανοποιητική αριθμητική λύση των εξισώσεων κίνησης (5.18) και (5.19) ακόμα και για πολύ μικρές τιμές του γ και παίρνοντας αρχικές συνθήκες πάνω στην τροχιά Starobinsky. Αυτό βέβαια μπορεί να οφείλεται και στο ότι οι εξισώσεις γίνονται αρκετά περίπλοκες και χρειάζεται πιθανόν πιο ενδελεχής αριθμητική ανάλυση.

5.1.4 Βελτιστοποίηση του δυναμικού

Ας προσπαθήσουμε τώρα να κατασκευάσουμε ένα δυναμικό που, σε αντίθεση με το προηγούμενο, να είναι φραγμένο από κάτω (bounded from below), όπως συνήθως επιθυμούμε να είναι τα πληθωριστικά δυναμικά. Για να μπορεί να γίνει αυτό, θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $f(\Sigma) \leq 0$ για κάθε Σ , γιατί, όπως βλέπουμε από τη σχέση (5.17), αν $f(\Sigma) > 0$ για κάποιο Σ , το δυναμικό θα έτεινε στο $-\infty$ για $\psi \rightarrow -\infty$.

Για ευκολία ας γράψουμε το δυναμικό (5.17) στη μορφή

$$V(X, \Sigma) = \frac{1}{4} (-X^2 f(\Sigma) + X\Sigma) \quad (5.36)$$

όπου

$$X = e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} > 0 \quad (5.37)$$

και $f(\Sigma) \leq 0$ για κάθε Σ . Μάλιστα για $\Sigma < 0$ θα πρέπει αναγκαστικά $f(\Sigma) < 0$, αφού αν για κάποιο $\Sigma < 0$ ήταν $f(\Sigma) = 0$, τότε το δυναμικό θα έτεινε στο $-\infty$ για $X \rightarrow +\infty$. Η f επομένως επιτρέπεται να έχει ρίζες μόνο στο διάστημα $\Sigma \geq 0$.

Για δεδομένο Σ βλέπουμε ότι το δυναμικό είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς X , οπότε θα ελαχιστοποιείται για

$$X_{min} = \frac{\Sigma}{2f(\Sigma)}$$

πράγμα που συμβαίνει όμως μόνο για $\Sigma < 0$ αφού εξ ορισμού είναι $X > 0$ ¹. Συνεπώς η ελάχιστη τιμή του δυναμικού ως προς X θα είναι

$$V|_{X_{min}}(\Sigma) = \frac{1}{16} \frac{\Sigma^2}{f(\Sigma)} < 0 \quad (5.38)$$

Θέλουμε επομένως να βρούμε μια συνάρτηση f , έτσι ώστε η συνάρτηση $V|_{X_{min}}(\Sigma)$ να παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για κάποιο $\Sigma < 0$. Προκειμένου να υπάρχει σύνδεση με το μοντέλο της προηγούμενης υποενότητας, θεωρούμε εντελώς γενικά ότι η f έχει τη μορφή

$$f(\Sigma) = \frac{\Sigma}{2} (1 + k\Sigma + \Phi(\Sigma)) \quad (5.39)$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη προσήμου που έχουμε υποθέσει για την f , από την (5.39) συμπεραίνουμε ότι για $\Sigma < 0$ θα πρέπει $1 + k\Sigma + \Phi(\Sigma) > 0$, ενώ για $\Sigma > 0$ θα πρέπει $1 + k\Sigma + \Phi(\Sigma) \leq 0$. Επομένως λόγω συνέχειας θα είναι αναγκαστικά

$$(1 + k\Sigma + \Phi(\Sigma))|_{\Sigma=0} = 0 \Rightarrow \Phi(0) = -1$$

Επίσης για $\Sigma < -\frac{1}{k}$ θα είναι $\Phi(\Sigma) > 0$. Οπότε για να είναι η $\Phi(\Sigma)$ συνεχής, θα πρέπει να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1/k, 0)$. Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι υπάρχει μόνο μία ρίζα, έστω η $-a$, δηλαδή

$$\Phi(-a) = 0$$

¹Για $\Sigma > 0$ το δυναμικό ελαχιστοποιείται για $X \rightarrow 0$ και τότε και $V \rightarrow 0$

Ας γράψουμε τώρα το ελάχιστο του δυναμικού ως προς X (5.38) στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} V|_{X_{min}}(\Sigma) &= \frac{1}{16} \frac{\Sigma^2}{f(\Sigma)} = \frac{2\Sigma^2}{16\Sigma(1+k\Sigma+\Phi(\Sigma))} = \\ &= \frac{\Sigma}{8(1+k\Sigma)(1+g(\Sigma))} \end{aligned} \quad (5.40)$$

όπου

$$g(\Sigma) = \frac{\Phi(\Sigma)}{1+k\Sigma} \quad (5.41)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για $\Sigma \rightarrow -\infty$, $g(\Sigma) \rightarrow -c$ με $c > 1$ ². Τότε $V|_{X_{min}}(\Sigma) \rightarrow -\frac{1}{8k(c-1)}$.

Επίσης από τις σχέσεις $\Phi(0) = -1$ και $\Phi(-a) = 0$ προκύπτουν επίσης και οι ακόλουθες σχέσεις για την g :

$$g(0) = -1 \quad , \quad g(-a) = 0$$

Τέλος η g θα έχει έναν απλό πόλο στο σημείο $\Sigma = -\frac{1}{k}$ και επομένως εκατέρωθεν αυτού θα αλλάζει πρόσημο. Αυτές είναι λοιπόν οι γενικές ιδιότητες που θα πρέπει να ικανοποιεί η συναρτηση g .

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συγκεκριμένη μορφή για τη συνάρτηση g , η οποία μπορεί να ικανοποιήσει τις ιδιότητες που προαναφέραμε. Έστω

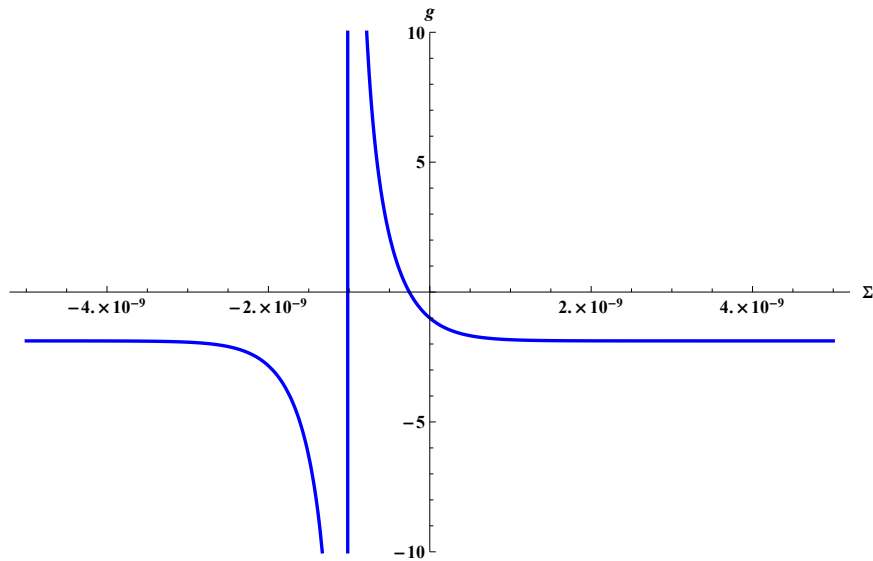
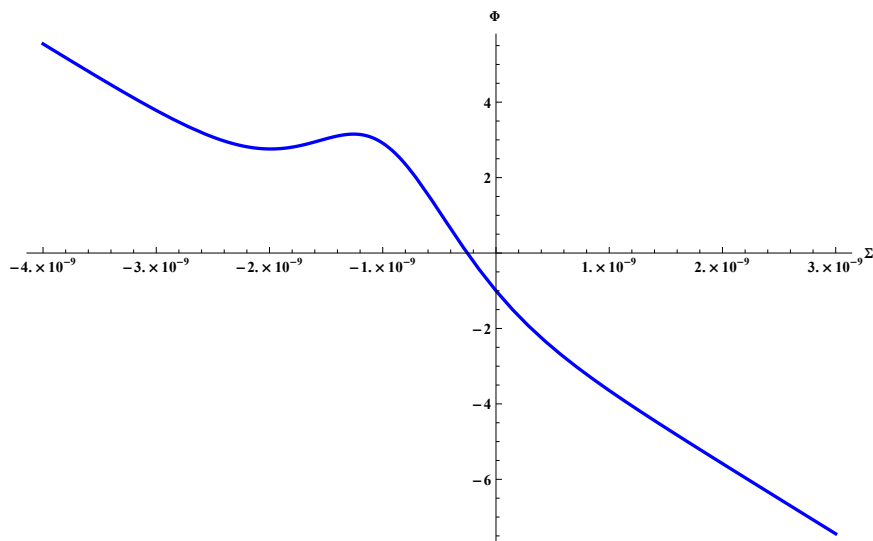
$$g(\Sigma) = \frac{A}{\sinh\left(\lambda\left(\Sigma + \frac{1}{k}\right)\right)} - (c+1) \quad (5.42)$$

Οι παράμετροι που εμφανίζονται στην (5.42) δεν είναι όλες ανεξάρτητες, καθώς πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$g(0) = -1 \Rightarrow \frac{A}{\sinh\left(\frac{\lambda}{k}\right)} = c \quad (5.43)$$

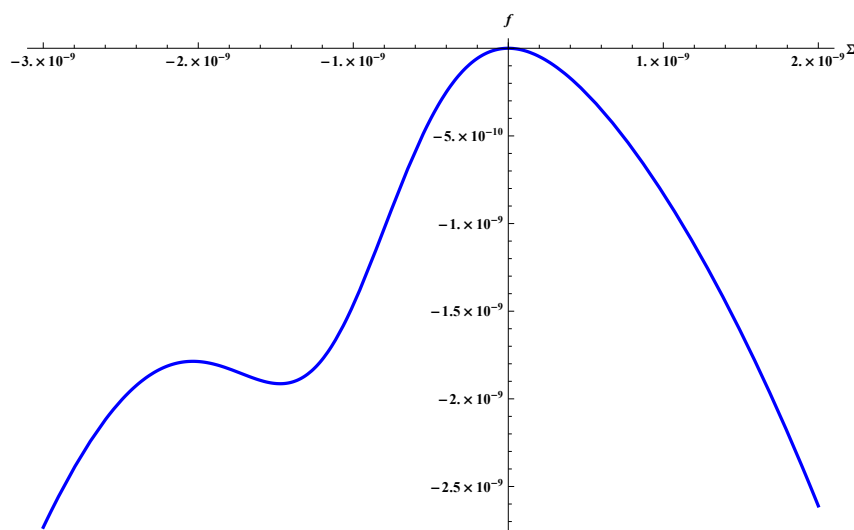
Τη σχέση $g(-a) = 0$ δε θα τη θεωρήσουμε σαν επιπλέον δεσμευτική συνθήκη, αφού για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων, θα μετακινείται απλώς η θέση της ρίζας $-a$.

²Να σημειώσουμε ότι δεν μπορεί να είναι $c \leq 1$ σύμφωνα με τις απαιτήσεις για τη $\Phi(\Sigma)$ που έχουμε ήδη αναφέρει

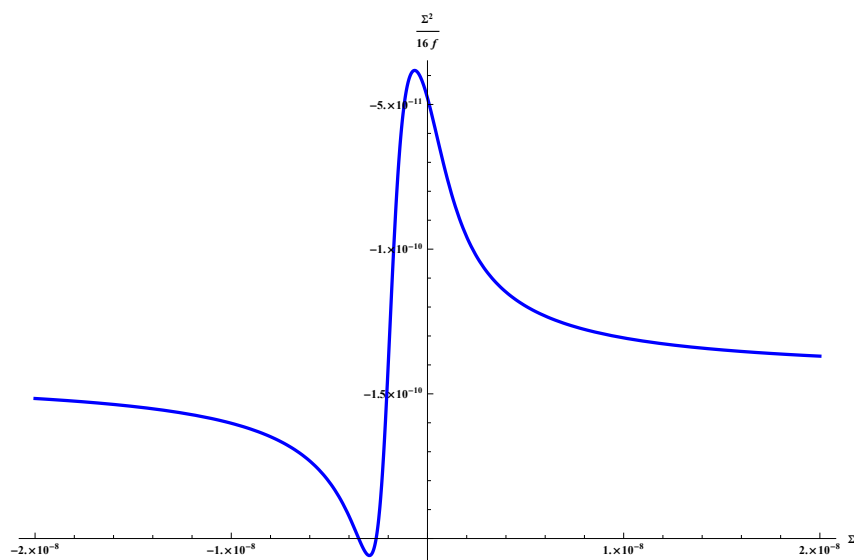
Σχήμα 5.2: Η συνάρτηση $g(\Sigma)$ για $\lambda = 3k$ και $c = 0.88$ Σχήμα 5.3: Η συνάρτηση $\Phi(\Sigma)$ για $\lambda = 3k$ και $c = 0.88$

Θεωρώντας και πάλι ότι η σταθερά k είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με αυτήν που είχε προκύψει για το μοντέλο Starobinsky ($k \sim 10^9$) και βάζοντας επίσης συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους λ , c και λύνοντας τέλος ως προς A την (5.43), παίρνουμε για την g το διάγραμμα που φαίνεται στο σχήμα 5.2. Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη g ικα-

νοποιεί όλες τις υποθέσεις που κάναμε προτύτερα. Επίσης στο σχήμα 5.3 απεικονίζεται η συνάρτηση $\Phi(\Sigma) = (1 + k\Sigma)g(\Sigma)$, ενώ στο σχήμα 5.4 η συνάρτηση $f(\Sigma)$ που προκύπτει τελικά από τη σχέση (5.39), η οποία είναι πράγματι αρνητικά ορισμένη.



Σχήμα 5.4: Η συνάρτηση $f(\Sigma)$ για $\lambda = 3k$ και $c = 0.88$

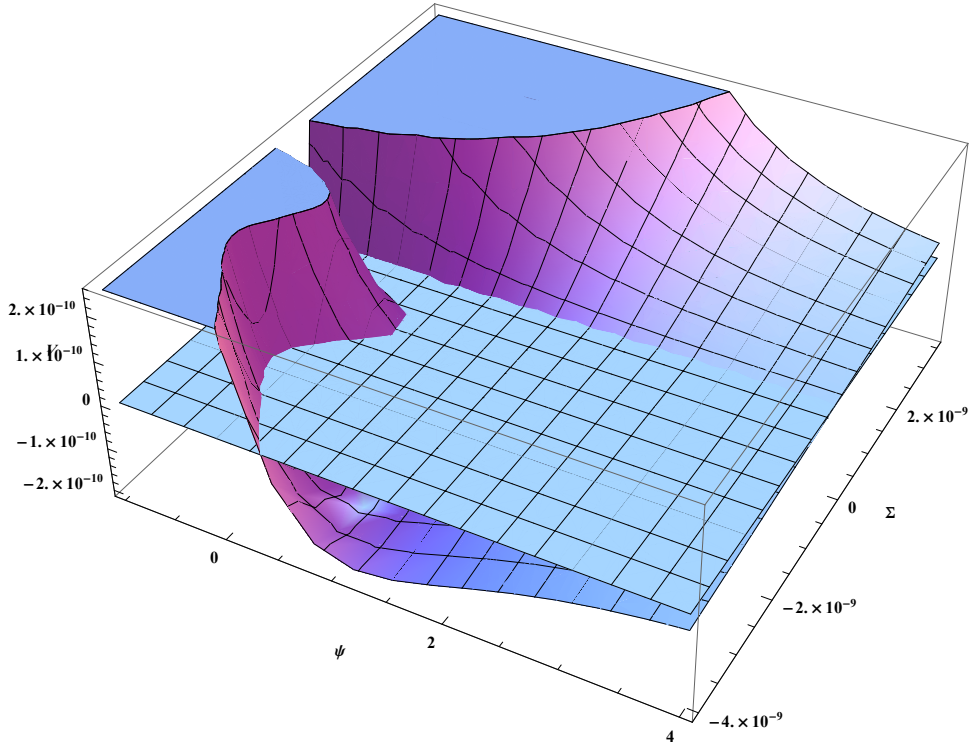


Σχήμα 5.5: Το ελάχιστο του δυναμικού ως προς X σαν συνάρτηση του Σ για $\lambda = 3k$ και $c = 0.88$

Στο σχήμα 5.5 φαίνεται το ελάχιστο του δυναμικού ως προς X σαν συνάρτηση του Σ , που δίνεται από τη σχέση (5.38). Από αυτό το διάγραμμα μπορούμε να βρούμε το ολικό ελάχιστο του δυναμικού καθώς και την τιμή Σ_{min} του πεδίου Σ για την οποία συμβαίνει αυτό. Τέλος από τη σχέση

$$X_{min} = e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{min}} = \frac{\Sigma_{min}}{2f(\Sigma_{min})} \Rightarrow \psi_{min} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{\Sigma_{min}}{2f(\Sigma_{min})} \right]$$

βρίσκουμε και την τιμή ψ_{min} του πεδίου ψ στην οποία αντιστοιχεί το ελάχιστο του δυναμικού.



Σχήμα 5.6: Το τροποποιημένο δυναμικό $V(\psi, \Sigma)$ που προέκυψε βάζοντας τη συνάρτηση f που κατασκευάσαμε προηγουμένως στη σχέση (5.17) ως προς το επίπεδο $V = 0$.

Με την τροποποιημένη συνάρτηση f που κατασκευάσαμε το δυναμικό (5.17), το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 5.6 θα έχει τώρα ολικό ελάχιστο. Συνεπώς το κενό της θεωρίας που αντιστοιχεί σε αυτό θα είναι πια ευσταθές και η θεωρία θα περιγράφει δύο σωμάτια με θετικές

μάζες. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα μάζας (5.30). οι οποίες προκύπτουν τώρα θετικές.

Βέβαια υπάρχει ακόμα ένα μειονέκτημα καθώς $V_{min} < 0$, που σημαίνει ότι το κενό της θεωρίας μας αντιστοιχεί σε έναν χώρο anti de-Sitter. Η αρνητικότητα του δυναμικού σε σχετικά μεγάλη περιοχή κοντά στο ελάχιστο ελαττώνει τις πιθανότητες υλοποίησης πληθωρισμού. Δυστυχώς μάλιστα δεν καταφέραμε να υλοποιήσουμε κάτι που να μοιάζει με πληθωρισμό, λύνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις (5.18), (5.19) για διαφορες αρχικές συνθήκες των πεδίων που αντιστοιχούν σε θετική τιμή του δυναμικού. Βέβαια πιθανότατα να είναι αναγκαία μια πιο ενδελεχής αριθμητική ανάλυση.

Για να εξαντλήσουμε λοιπόν τις πιθανότητες ύπαρξης πληθωρισμού, ως εξετάσουμε αν υπάρχει κάποια σημαντική περιοχή του δυναμικού όπου οι παράμετροι slow-roll είναι πολύ μικρότερες της μονάδας. Για να γίνει όμως αυτό, θα πρέπει να δούμε πώς ορίζονται αυτές οι παράμετροι όταν έχουμε περισσότερα του ενός πεδία.

5.2 Προσέγγιση slow-roll για multi-field πληθωρισμό

Η γενικότερη μορφή της δράσης στο σύστημα Einstein όταν έχουμε πολλά πεδία είναι [24]

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2} G_{IJ} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J - V(\phi^I) \right] \quad (5.44)$$

όπου G_{IJ} είναι η μετρική στο χώρο των πεδίων. Υποθέτοντας ότι έχουμε χωρόχρονο FRW μηδενικής χωρικής καμπυλότητας, οι εξισώσεις Einstein δίνουν τις εξισώσεις Friedmann, οι οποίες στην περίπτωσή μας γράφονται:

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} G_{IJ} \dot{\phi}^I \dot{\phi}^J + V(\phi^I) \right] \quad (5.45)$$

και

$$H^2 + \dot{H} = \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{1}{3} \left[G_{IJ} \dot{\phi}^I \dot{\phi}^J - V(\phi^I) \right] \quad (5.46)$$

Οι εξισώσεις κίνησης για τα πεδία ϕ^I γράφονται ως

$$\ddot{\phi}^I + \Gamma_{JK}^I \dot{\phi}^J \dot{\phi}^K + 3H\dot{\phi}^I = -G^{IJ}V_{,J} \quad (5.47)$$

όπου $V_{,J} = \frac{\partial V}{\partial \phi^J}$ και Γ_{JK}^I τα σύμβολα Christoffel που αντιστοιχούν στη μετρική G_{IJ} .

Στην προσέγγιση slow-roll, σε αντιστοιχία με την περίπτωση του ενός πεδίου, κάνουμε τις υποθέσεις:

$$G_{IJ}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J \ll V(\phi^I) \quad (5.48)$$

και

$$|\ddot{\phi}^I + \Gamma_{JK}^I \dot{\phi}^J \dot{\phi}^K| \ll |3H\dot{\phi}^I|, |G^{IJ}V_{,J}| \quad (5.49)$$

οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις

$$\epsilon_V, |\eta_V| \ll 1 \quad (5.50)$$

Οι παράμετροι slow-roll ορίζονται στη γενική περίπτωση των πολλών πεδίων ως εξής:

$$\epsilon_V = \frac{1}{2} \frac{G^{IJ}V_{,I}V_{,J}}{V^2} \quad (5.51)$$

και η_V είναι η μικρότερη από τις ιδιοτιμές του πίνακα N_J^I ο οποίος ορίζεται ως εξής [25]:

$$N_J^I \equiv \frac{G^{IK}\mathcal{D}_J V_{,K}}{V} \quad (5.52)$$

όπου $\mathcal{D}_J V_{,K} = V_{,KJ} - \Gamma_{KJ}^L V_{,L}$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος του $V_{,K}$.

5.2.1 Εφαρμογή στη δράση της προηγούμενης ενότητας

Στην περίπτωση της δράσης (5.16) έχουμε ότι

$$G_{\psi\psi} = 1, \quad G_{\Sigma\Sigma} = \gamma e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi}, \quad G_{\psi\Sigma} = G_{\Sigma\psi} = 0 \quad (5.53)$$

Συνεπώς για τους πίνακες G_{IJ} και G^{IJ} έχουμε

$$G_{IJ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \end{pmatrix}, \quad G^{IJ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Βάσει των παραπάνω προκύπτει ότι τα μόνα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι:

$$\Gamma_{\Sigma\Sigma}^{\psi} = \frac{\gamma}{\sqrt{6}} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\psi}, \quad \Gamma_{\psi\Sigma}^{\Sigma} = \Gamma_{\Sigma\psi}^{\Sigma} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad (5.55)$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.54) και (5.55), οι εξισώσεις κίνησης (5.47) δίνουν τις εξισώσεις (5.18) και (5.19) για τα πεδία ψ και Σ που είχαμε βρει στην προηγούμενη ενότητα, όπως αναμέναμε.

Αντίστοιχα η παράμετρος ϵ_V στην περίπτωση μας γράφεται

$$\epsilon_V = \frac{1}{2} \frac{(V_{,\psi})^2 + \frac{1}{\gamma} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} (V_{,\Sigma})^2}{V^2} \quad (5.56)$$

ενώ ο πίνακας N_J^I παίρνει τη μορφή

$$N_J^I = \begin{pmatrix} \frac{V_{,\psi\psi}}{V} & \frac{V_{,\psi\Sigma} + \frac{1}{\sqrt{6}}V_{,\Sigma}}{V} \\ \frac{1}{\gamma} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \frac{V_{,\psi\Sigma} + \frac{1}{\sqrt{6}}V_{,\Sigma}}{V} & \frac{1}{\gamma} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \frac{V_{,\Sigma\Sigma} - \frac{1}{\sqrt{6}}V_{,\psi}}{V} \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

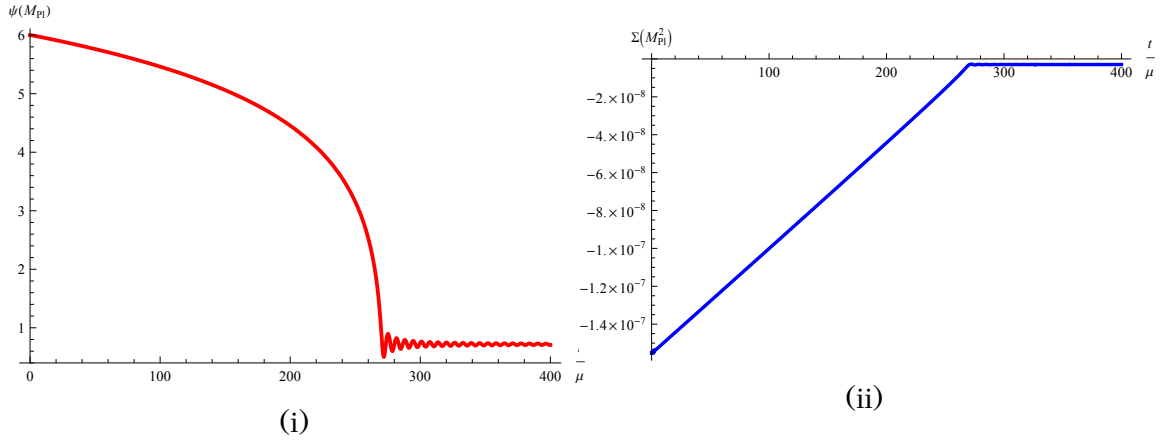
Παίρνοντας τη μικρότερη ιδιοτιμή αυτού, έχουμε την παράμετρο η_V .

Αν απεικονίσουμε τις παραμέτρους ϵ_V και η_V συναρτήσει των πεδίων ψ και Σ για το τροποποιημένο δυναμικό της προηγούμενης ενότητας, είναι μάλλον αδύνατον να εντοπίσουμε περιοχή όπου να ισχύει η σχέση (5.50), καθώς αυτές παίρνουν μεγάλες τιμές στο μεγαλύτερο εύρος των πεδίων.

5.3 Uplifting του δυναμικού

Προκειμένου τώρα να απαλλαγούμε από το μειονέκτημα της αρνητικότητας του δυναμικού που κατασκευάσαμε στην υποενότητα 5.1.4, ας προσθέσουμε σε αυτό αυθαίρετα μία σταθερά, ώστε το ελάχιστό του να είναι 0. Στο όριο $\gamma \rightarrow 0$, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το ένα πεδίο γίνεται βοηθητικό και τότε τα πεδία ψ και Σ θα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$f'(\Sigma) = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\psi} \quad (5.58)$$

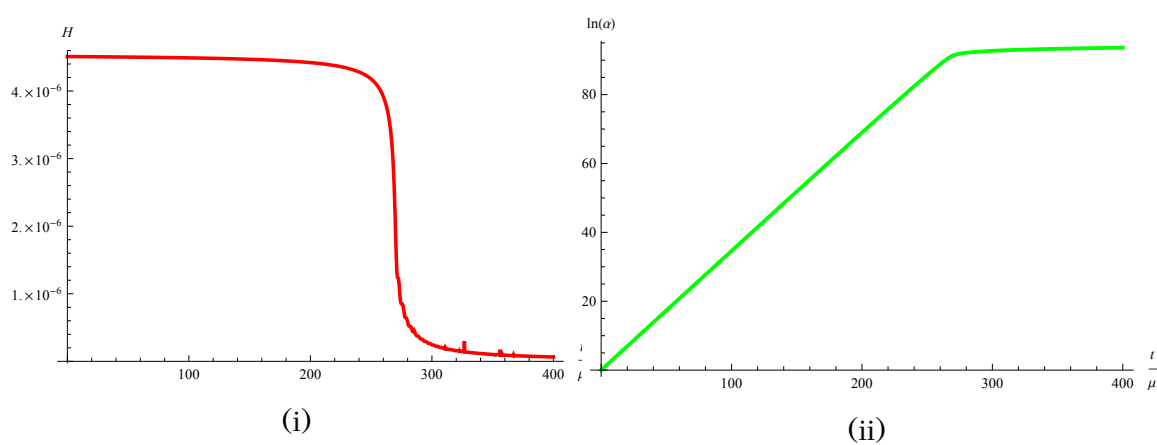

 Σχήμα 5.7: Χρονική εξέλιξη των πεδίων (i) ψ και (ii) Σ

Βέβαια στην περίπτωση μας η παραπάνω εξίσωση δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά ως προς Σ αλλά μόνο αριθμητικά.

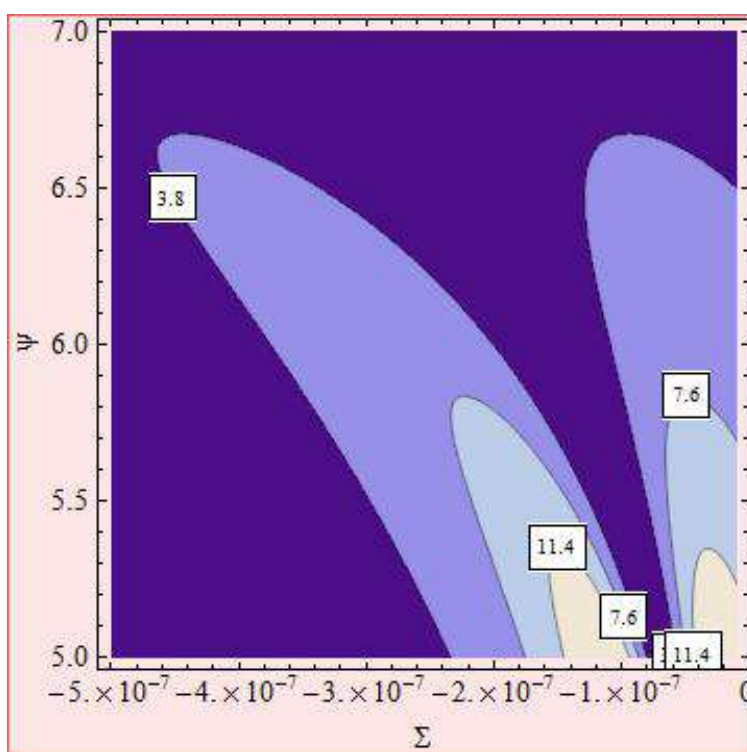
Επιλέγοντας λοιπόν αρχικές συνθήκες για τα πεδία που να ικανοποιούν την (5.58) και λύνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις κίνησης των πεδίων, μπορούμε να δούμε πως η επίτευξη πληθωρισμού είναι δυνατή. Μάλιστα και για μικρές τιμές του λόγου γ/k^2 , ο οποίος είναι αδιάστατος, μπορούμε να έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα αρκεί και πάλι οι αρχικές συνθήκες να ικανοποιούν την (5.58) ή να είναι εξαιρετικά κοντά στην τροχιά που ορίζεται από τη συγκεκριμένη σχέση.

Στο σχήμα 5.7 φαίνεται η χρονική εξέλιξη των πεδίων ψ και Σ για λόγους $\gamma/k^2 \sim 10^{-6}$ και κατάλληλες αρχικές συνθήκες που περιγράψαμε. Να αναφέρουμε ότι η τιμή 10^{-6} για το λόγο γ/k^2 είναι η μέγιστη τάξη μεγέθους αυτού για την οποία μπορέσαμε να πετύχουμε πληθωριστική λύση. Επίσης στο σχήμα 5.8 απεικονίζεται η χρονική εξέλιξη της παραμέτρου Hubble $H(t)$ και του κοσμικού παράγοντα κλίμακας $a(t)$.

Όσον αφορά στις παραμέτρους slow-roll, είναι δύσκολο να καθοριστεί γραφικά η περιοχή στο επίπεδο $\psi - \Sigma$ όπου αυτές είναι μικρότερες της μονάδας, καθώς στο μεγαλύτερο κομμάτι του επιπέδου παίρνουν εξαιρετικά υψηλές τιμές, όπως φαίνεται για παράδειγμα στο σχήμα 5.9 όπου απεικονίζουμε την παράμετρο ϵ_V σε κάποια περιοχή. Ωστόσο οι συνθήκες slow-roll ισχύουν εξαιρετικά κοντά στην τροχιά που καθο-

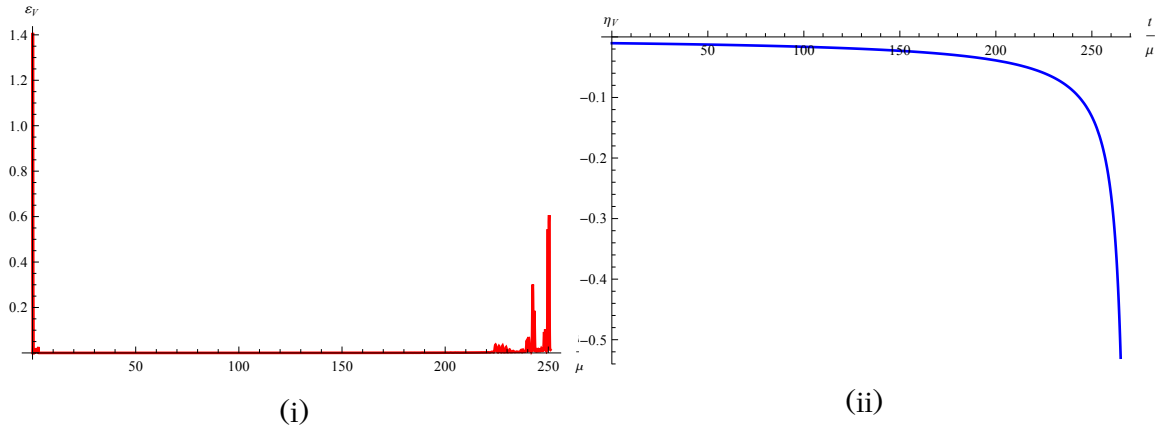


Σχήμα 5.8: Χρονική εξέλιξη (i) της παραμέτρου Hubble $H(t)$ και (ii) του κοσμικού παράγοντα κλίμακας $a(t)$



Σχήμα 5.9: Απεικόνιση της παραμέτρου ϵ_V διαιρεμένης με 1000 σαν συνάρτηση των πεδίων ψ και Σ

ρίζεται από τη σχέση (5.58). Αυτή όμως η περιοχή είναι υπερβολικά



Σχήμα 5.10: Χρονική εξέλιξη των παραμέτρων (i) ϵ_V και (ii) η_V

στενή ώστε να γίνει διακριτό ένα σημαντικό κομμάτι της σε ένα γραφικό σαν του σχήματος 5.9. Για να διαπιστώσουμε ότι πράγματι αυτό ισχύει, απεικονίζουμε τις παραμέτρους ϵ_V και η_V συναρτήσει του χρόνου θέτοντας σε αυτές τις αριθμητικές λύσεις των πεδίων που βρήκαμε παραπάνω.

Βλέπουμε λοιπόν ότι πράγματι οι παράμετροι slow-roll είναι αρκετά μικρότερες της μονάδας μέχρι τα πεδία να φτάσουν σχετικά κοντά στην τελική τους τιμή που αντιστοιχεί στο ελάχιστο του δυναμικού.

Φαίνεται λοιπόν από όλα τα προηγούμενα διαγράμματα ότι πετύχαμε ικανοποιητική πληθωριστική λύση. Βέβαια δεν μπορούμε να πούμε ότι έχουμε και ιδιαίτερα επιτυχές δυναμικό, αφού αν οι αρχικές συνθήκες για τα πεδία απομακρυνθούν λίγο από την τροχιά που καθορίζεται από την (5.58), το αποτέλεσμα είναι αποκαρδιωτικό. Επίσης η πρόσθεση μιας σταθεράς στο δυναμικό έγινε εντελώς αυθαίρετα και όχι με κάποιο συνεπή τρόπο, όπως για παράδειγμα με τροποποίηση της συνάρτησης f .

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Σε αυτήν την εργασία μελετήσαμε τη σύνδεση των τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας με τον κοσμολογικό πληθωρισμό. Με αφετηρία το μοντέλο Starobinsky που είναι ένα από τα πιο επιτυχημένα πληθωριστικά πρότυπα και αποτελεί ειδική περίπτωση μιας $f(R)$ -θεωρίας βαρύτητας ($f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$), είδαμε γενικά ότι από μια $f(R)$ -θεωρία μπορούμε να καταλήξουμε σε μία θεωρία Einstein-Hilbert με ένα βαθμωτό πεδίο σε δυναμικό. Είδαμε επίσης ότι αν προσθέτουμε έναν επιπλέον όρο aR^3 στην f που αντιστοιχεί στο μοντέλο Starobinsky, για να εξακολουθήσουμε να έχουμε επιτυχή πληθωρισμό, θα πρέπει ο πρόσθετος όρος να είναι μικρός σε σχέση με το υπόλοιπο κομμάτι, δηλαδή να έχουμε ουσιαστικά μια μικρή διαταραχή στο μοντέλο Starobinsky. Αυτό οφείλεται στη μοναδική ιδιότητα του δυναμικού Starobinsky να συγκλίνει σε μια σταθερή θετική τιμή καθώς το πεδίο τείνει στο άπειρο, δημιουργώντας έτσι μεγάλο οροπέδιο (plateau) που συντελεί στο να έχουμε πληθωρισμό slow-roll.

Στην αναζήτησή μας για καινούργια πληθωριστικά μοντέλα, συνεχίσαμε με τη μελέτη θεωριών βαρύτητας υψηλότερης τάξης, η δράση των οποίων περιέχει και παραγώγους του βαθμωτού Ricci R εστιάζοντας τη μελέτη μας στις θεωρίες $f(R) + \gamma R \square R$, οι οποίες οδηγούν σε θεωρίες Einstein-Hilbert που περιλαμβάνουν δύο βαθμωτά πεδία σε δυναμικό. Σε αυτήν την κατηγορία θεωριών, εξετάσαμε την περίπτωση

$f(R) = \frac{R}{2} + \frac{k}{2}R^2$ και διαπιστώσαμε ότι οδηγεί σε ένα δυναμικό που παρουσιάζει ορισμένα προβλήματα, όπως το ότι δεν έχει ελάχιστο και το ότι αν επιλέξουμε κενό Minkowski, αυτό θα είναι ασταθές και το ένα σωματίδιο που περιγράφει η θεωρία θα είναι ghost. Για να βελτιστοποιήσουμε το δυναμικό αυτό, προσθέσαμε μία κατάλληλη συνάρτηση στην f και καταφέραμε να πετύχουμε δυναμικό με ολικό ελάχιστο το οποίο αντιστοιχεί σε ευσταθές κενό. Δυστυχώς όμως το ελάχιστο αυτό προκύπτει αρνητικό (anti de-Sitter vacuum) και επομένως για να μπορέσουμε να έχουμε επιτυχή πληθωρισμό, θα πρέπει να βρεθεί μηχανισμός που κάνει το δυναμικό θετικό. Στα πλαίσια της θεώρησής μας δεν μπορούσαμε να βρούμε έναν τέτοιο αυστηρό μηχανισμό. Αυτό θα μπορούσε να γίνει, για παράδειγμα, με την ύπαρξη πρόσθετων πεδίων που ζεύγνυνται με τη βαρύτητα με σύμμορφο τρόπο έτσι ώστε η δράση τους να είναι αναλλοίωτη στους σύμμορφους μετασχηματισμούς που απαιτούνται για να περάσουμε στο σύστημα Einstein. Αν η ελάχιστη ενέργεια του συστήματος αυτών είναι θετική, αυτή προστίθεται στο υπο εξέταση δυναμικό και προκαλεί το ανέβασμα της ελάχιστης τιμής του. Είδαμε μόνο ότι αν προσθέσουμε αυθαίρετα μία σταθερά στο τελικό δυναμικό, μπορούμε να έχουμε πληθωριστική λύση με την προϋπόθεση οι αρχικές μας συνθήκες να είναι εξαιρετικά κοντά σε μία συγκεκριμένη τροχιά και να ισχύει $\gamma/k^2 \lesssim 10^{-6}$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να θεωρήσουμε άλλου τύπου βαρυτικές θεωρίες, από τις οποίες να μπορούμε να παράγουμε θετικά ορισμένα δυναμικά με συνεπή τρόπο. Αυτό μπορεί να γίνει για παράδειγμα στις θεωρίες υπερβαρύτητας τύπου no-scale που οδηγούν σε θετικά ορισμένα δυναμικά. Μάλιστα είναι δυνατή η περιγραφή μιας $R \square R$ θεωρίας στα πλαίσια αυτών των θεωριών [26].

Βιβλιογραφία

- [1] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [2] M. Iihoshi, *Mutated hybrid inflation in $f(R, \square R)$ -gravity*, JCAP **1102**, 022 (2011)
- [3] A. De Felice and S. Tsujikawa, *$f(R)$ theories*, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010)
- [4] A. A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett., B91, 99 (1980)
- [5] Planck Collaboration, P. Ade *et. al.*, "Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation", arXiv:1303.5082
- [6] Andrew L. Berkin and Kei-ichi Maeda, *Effects of R^3 and $R\square R$ terms on R^2 inflation*, Phys. Rev. B **245**, 0370-2693 (1990).
- [7] M. Skugoreva, A. Toporensky and P. Tretyakov, *Cosmological dynamics in six-order gravity*, Grav. Cosmol. **17**, 110 (2011)
- [8] Marieke Postma, *Notes on Inflation* NIKHEF, Science Park 105 1098 XG Amsterdam, The Netherlands.
- [9] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, Inc., (1972).
- [10] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Benjamin Cummings, (2003).

-
- [11] Planck Collaboration, R. Adam *et al.*, "Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results", 1502.01582.
- [12] Daniel Baumann, *TASI Lectures on Inflation* arXiv:0907.5424v2 [hep-th] (2012).
- [13] T.M. Davis and C.H. Lineweaver, *Expanding Confusion: Common Misconceptions of Cosmological Horizons and the Superluminal Expansion of the Universe*, Publications of the Astronomical Society of Australia, 2004, 21, 97-109.
- [14] F. Lucchin and S. Matarrese, *Power-law inflation*, Phys. Rev. D **32**, 1316 (1985)
- [15] K. A. Olive, *Inflation*, Physics Reports, 190, 307 (1990)
- [16] K. Freese, J. A. Frieman and A. V. Olinto, *Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons*, Phys. Rev. Lett. **65**, 3233 (1990)
- [17] F. C. Adams, J. R. Bond, K. Freese, J. A. Frieman and A. V. Olinto, *NATURAL INFLATION: PARTICLE PHYSICS MODELS, POWER LAW SPECTRA FOR LARGE-SCALE STRUCTURE, AND CONSTRAINTS FROM COBE*, Phys. Rev. D **47**, 426 (1993)
- [18] E. Dudas, T. Gherghetta, Y. Mambrini and K. A. Olive, *Inflation and High-Scale Supersymmetry with an EeV Gravitino*, Phys. Rev. D **96**, no. 11, 115032 (2017)
- [19] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge U.P., Cambridge, 1982).
- [20] A. A. Starobinsky, *The perturbation spectrum evolving from a nonsingular initially de Sitter cosmology and the microwave background anisotropy*, Sov. Astron. Lett. **9**, 302 (1983).
- [21] Planck Collaboration, P. A. R. Ade *et al.*, "Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation", Astron. Astrophys. **594**, A20 (2016)

-
- [22] J. C. Fabris, T. Miranda and O. F. Piattella, *Variations on the Starobinsky Inflationary Model*, J. Phys. Conf. Ser. **798**, no. 1, 012092 (2017).
- [23] D. Wands, *Extended gravity theories and the Einstein-Hilbert action*, Class. Quant. Grav. **11**, 269 (1994)
- [24] T. Mori, K. Kohri and J. White, *Multi-field effects in a simple extension of R^2 inflation*, JCAP **1710**, no. 10, 044 (2017)
- [25] I. S. Yang, *The Strong Multifield Slowroll Condition and Spiral Inflation*, Phys. Rev. D **85**, 123532 (2012)
- [26] G. A. Diamandis, B. C. Georgalas, K. Kaskavelis, A. B. Lahanas and G. Pavlopoulos, *Deforming the Starobinsky model in ghost-free higher derivative supergravities*, Phys. Rev. D **96**, no. 4, 044033 (2017)