



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Φυσικής  
Τομέας Αστροφυσικής-Αστρονομίας-Μηχανικής

---

---

Η μελέτη της φύσης της σκοτεινής ενέργειας  
χρησιμοποιώντας εξωγαλαξιακές πηγές υψηλών  
ενεργειών

Αθηνά Πούρη

Διδακτορική Διατριβή

Αθήνα, Ιούλιος 2016

---

---





Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Φυσικής  
Τομέας Αστροφυσικής-Αστρονομίας-Μηχανικής

Η μελέτη της φύσης της σκοτεινής ενέργειας  
χρησιμοποιώντας εξωγαλαξιακές πηγές  
υψηλών ενεργειών

Αθηνά Πύρη

Τριμελής Επιτροπή

---

Δρ. Απόστολος Μαστιχιάδης, Καθηγητής ΕΚΠΑ (Κύριος Επιβλέπων)

Δρ. Σπύρος Βασιλάκος, Διευθυντής Ερευνών ΚΕΑΕΜ, Ακαδημία Αθηνών

Δρ. Εμμανουήλ Πλειώνης, Καθηγητής ΑΠΘ

---

Διατριβή για την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος Φυσικών Επιστημών

Αθήνα, Ιούλιος 2016

Η μελέτη της φύσης της σκοτεινής ενέργειας  
χρησιμοποιώντας εξωγαλαξιακές πηγές  
υψηλών ενεργειών

Τμήμα Φυσικής  
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Οι κάτωθι υπογεγραμμένοι βεβαιώνουν ότι έλαβαν γνώση και πιστοποιούν την επάρ-  
κεια της διατριβής με τίτλο: 'Η μελέτη της φύσης της σκοτεινής ενέργειας χρησιμο-  
ποιώντας εξωγαλαξιακές πηγές υψηλών ενεργειών' που συνέγραψε η Αθηνά Πούρη  
προκειμένου να της απονεμηθεί το Διδακτορικό Δίπλωμα Φυσικών Επιστημών.

Ημερομηνία: 2/9/2016

---

Μαστιχιάδης Απόστολος  
Καθηγητής ΕΚΠΑ

---

Σπανός Βασίλειος  
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ

---

Βασιλάκος Σπυρίδων  
Διευθυντής Ερευνών ΚΕΑΕΜ, Ακαδη-  
μία Αθηνών

---

Σταυρινός Παναγιώτης  
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ

---

Τετράδης Νικόλαος  
Καθηγητής ΕΚΠΑ

---

Πλειώνης Εμμανουήλ  
Καθηγητής ΑΠΘ

---

Καζαντζίδης Στυλιανός  
Επίκουρος Καθηγητής ΕΚΠΑ

## Ευχαριστίες

Η εκπόνηση και περαίωση μιας διδακτορικής διατριβής αποτελεί μια επίπονη αλλά συνάμα εποικοδομητική εμπειρία. Η παρούσα διατριβή αποτέλεσε τον καρπό προσωπικού αγώνα, αλλά ταυτόχρονα συνδρομής και υποστήριξης και άλλων ανθρώπων στους οποίους θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου αναγνώριση.

Οι αρχικές μου ευχαριστίες απευθύνονται στον επιβλέποντα καθηγητή μου Δρ. Σπύρο Βασιλάκο, Διευθυντή Ερευνών του Κέντρου Έρευνας Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο, που ανταποκρίνεται απολύτως στα επιστημονικά μου ενδιαφέροντα, καθώς και για την αμέριστη συμπαράστασή του καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, Δρ. Μανώλη Πλειώνη, καθηγητή ΑΠΘ, και Δρ. Απόστολο Μαστιχιάδη, καθηγητή ΕΚΠΑ, για την αποτελεσματική συνεργασία και συμβολή τους στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους ερευνητές του Κέντρου Έρευνας Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, ιδιαίτερα τον Δρ. Χρήστο Ευθυμιόπουλο για τις πολύτιμες συμβουλές του, την καθοδήγησή του και τη βοήθεια που μου προσέφερε αλλά και τον Δρ. Ιωάννη Κοντόπουλο χάρη στον οποίο μου δόθηκε η ευκαιρία να συμμετάσχω σε διεθνή συνέδρια στην Ελλάδα αλλά και στο εξωτερικό μέσω του προγράμματος *Αριστεία*. Ευχαριστώ θερμά όλους τους ερευνητές του ΚΕΑΕΜ της Ακαδημίας Αθηνών και ιδιαίτερα τον Καθηγητή και Ακαδημαϊκό Γεώργιο Κοντόπουλο για τη φιλοξενία, τη συνεργασία και τη συμπαράστασή τους. Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στον τεχνικό υπεύθυνο του ΚΕΑΕΜ Μανώλη Ζούλια για την πολύτιμη βοήθειά του στα τεχνικά προβλήματα που προέκυπταν καθώς και για τη συμπαράστασή του καθόλη τη διάρκεια της διατριβής.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για την ηθική υποστήριξη, για το ότι πίστευαν σε μένα και για το ότι με ενθάρρυναν σε κάθε στάδιο των σπουδών μου. Και φυσικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, το δάσκαλό μου και πατέρα μου, Σπύρο, για όλα όσα με έχει διδάξει και τη μητέρα μου, Κατερίνα, καθώς και οι δύο στήριζαν πάντα τις επιλογές μου και ήταν πάντα δίπλα στις ανησυχίες μου.

## Περίληψη

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών η συσσώρευση μεγάλου όγκου παρατηρησιακών δεδομένων έχει ανοίξει νέους ορίζοντες για την απάντηση θεμελιωδών ερωτημάτων της Κοσμολογίας. Δύο από αυτά, η επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος και η ισχύς της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ) σε κοσμολογικές κλίμακες, είναι δυνατόν να ελεγχθούν μελετώντας τις διαταραχές της ύλης οι οποίες εξαρτώνται τόσο από το κοσμολογικό υπόβαθρο όσο και από τη θεωρία βαρύτητας. Ειδικότερα ο έλεγχος της ΓΘΣ βασίζεται στο συνδυασμό των ακόλουθων παραμέτρων: του βαθμού σηματοποίησης και του ρυθμού παραγωγής των κοσμικών δομών μεγάλης κλίμακας (γαλαξιών, γαλαξιών με ενεργούς πυρήνες, σημανών γαλαξιών κ.τ.λ.).

Στην εργασία αυτή, αρχικά παρουσιάζεται στην εισαγωγή με συνοπτικό τρόπο το βασικό κοσμολογικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίχθηκε η διατριβή. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται οι βασικές κοσμολογικές εξισώσεις του Friedmann όπως αυτές εξάγονται από τη ΓΘΣ, υποθέτοντας την Κοσμολογική αρχή και την αδιαβατική συμπεριφορά του κοσμικού ρευστού. Ακολούθως συζητούνται στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας οι διαταραχές της ύλης οι οποίες και εν τέλει ευθύνονται για τη δημιουργία των δομών στο Σύμπαν. Για την καλύτερη μελέτη των διαταραχών στο πρότυπο της σκοτεινής ψυχρής ύλης, μεταφερόμαστε στο χώρο Fourier κατασκευάζοντας το φάσμα των διαταραχών της ύλης.

Στο κεφάλαιο (2) παρουσιάζουμε μια μορφή παραμετροποίησης της καταστατικής εξίσωσης που εφαρμόζεται για κάθε μοντέλο σκοτεινής ενέργειας, καθώς και για οποιοδήποτε εναλλακτικό μοντέλο βαρύτητας.

Στο κεφάλαιο (3) μελετώνται θεωρητικά οι διαταραχές της ύλης και συγκεκριμένα υπολογίζεται η εξέλιξη του παράγοντα αναλογίας (bias parameter) που συνδέει τις διαταραχές της φωτεινής ύλης με αυτές της σκοτεινής ύλης. Συνδυάζοντας βασικές εξισώσεις για την εξέλιξη των διαταραχών πυκνότητας παράγουμε μια διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει την κοσμική εξέλιξη του παράγοντα αναλογίας. Στη συνέχεια παρουσιάζονται νέες πρωτότυπες γενικές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης οι οποίες ισχύουν για όλα τα κοσμολογικά μοντέλα ανεξάρτητα από τη θεωρία βαρύτητας που υπακούουν (ΓΘΣ ή εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας). Ο παράγοντας σύνδεσης των διαταραχών είναι προαπαιτούμενος για την ορθή μελέτη των προβλημάτων της διατριβής, εξαιτίας του γεγονότος ότι σε παρατηρησιακό επίπεδο έχουμε πληροφορία για τις διαταραχές μόνο της φωτεινής ύλης.

Στο κεφάλαιο (4) γίνεται ποιοτική μελέτη πρόσφατων παρατηρησιακών δεδομένων της βιβλιογραφίας τα οποία αφορούν στον παρατηρησιακό προσδιορισμό ποσοτήτων σχετικών με τη σηματοποίηση των φωτεινών ερυθρών γαλαξιών, ενεργών γαλαξιακών πυρήνων και σμηνών γαλαξιών. Επίσης, μελετάται η κατανομή των πηγών ως προς την ερυθρομετάθεσή τους με τη βοήθεια των συναρτήσεων επιλογής και λαμπρότητας διαφορετικών εξωγαλαξιακών πηγών. Η ανάλυση αυτή δείχνει ότι οι κατανομές των εξωγαλαξιακών πηγών παρουσιάζουν μέγιστο σε διαφορετικές ερυθρομεταθέσεις (για τους ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες στο  $z = 1$ , για τους ερυθρούς φωτεινούς γαλαξίες στο  $z = 0.55$ ). Συμπληρωματικά, χρησιμοποιούνται και διαθέσιμα δεδομένα του ρυθμού αύξησης των κοσμικών δομών σε συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης τα οποία καλύπτουν σχεδόν το 90% της κοσμικής ηλικίας στο διάστημα ερυθρομεταθέσεων  $0 < z < 1.5$ .

Στο κεφάλαιο (5) και στο κεφάλαιο (6) γίνεται σύγκριση μεταξύ θεωρητικών προβλέψεων και παρατηρήσεων. Αυτή η σύγκριση βασίζεται σε προχωρημένες μεθόδους στατιστικής που έχουν ως στόχο τον υπολογισμό των βασικών κοσμολογικών παραμέτρων με μεγάλη ακρίβεια, επιτρέποντας τον έλεγχο της ΓΘΣ σε κοσμολογικές κλίμακες. Πρωτίστως θέτουμε αυστηρούς περιορισμούς σχετικά με το λεγόμενο 'δείκτη αύξησης' των δομών,  $\gamma$  (growth index), τόσο στο μοντέλο  $\Lambda$ CDM όσο και στο μοντέλο βαρύτητας Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) χρησιμοποιώντας διάφορες παραμετροποιήσεις που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία για τον δείκτη αύξησης των δομών  $\gamma(z)$  και χρησιμοποιώντας επίσης τα πιο πρόσφατα δεδομένα του ρυθμού αύξησης που προέρχονται από τις έρευνες 2dFGRS, SDSS-LRG, VIMOS-VLT και WiggleZ. Εφαρμόζοντας συνδυαστική στατιστική ανάλυση διαπιστώνουμε ότι η χρήση των συνδυασμένων δεδομένων αύξησης των δομών θέτει τους πιο αυστηρούς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, παίρνουμε ότι  $\gamma = 0.602 \pm 0.055$  για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM σε συμφωνία με τη θεωρητική πρόβλεψη  $\gamma \simeq 6/11$ , ενώ όσον αφορά στο DGP μοντέλο βαρύτητας, βρίσκουμε  $\gamma = 0.503 \pm 0.06$  το οποίο είναι χαμηλότερα, και σχεδόν  $3\sigma$  μακριά, από τη θεωρητικά προβλεπόμενη τιμή του DGP  $\gamma \simeq 11/16$ . Τέλος, με βάση την παραδοχή ότι ο δείκτης αύξησης  $\gamma$  μπορεί να παρουσιάζει εξάρτηση από το χρόνο, επιβεβαιώνουμε ότι τα συνδυασμένα δεδομένα για την αύξηση των δομών είναι μάλλον δυσμενή ως προς τη DGP βαρύτητα. Στηριζόμενοι στο προηγούμενο αποτέλεσμα, ότι δηλαδή τα δεδομένα ευνοούν τη  $\Lambda$ CDM κοσμολογία, η ανάλυση συνεχίζεται με σκοπό τον έλεγχο της ΓΘΣ σε κοσμολογικές κλίμακες. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της σηματοποίησης των φωτεινών ερυθρών γαλαξιών (LRGs) και τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης που παρέχονται από τις διάφορες έρευνες των γαλαξιών σε συνδυασμό με μια τυπική στατιστική διαδικασία ελαχιστοποίησης  $\chi^2$

μεταξύ των θεωρητικών προσδοκιών και των δεδομένων. Μέσω της μεθόδου αυτής βρίσκουμε την τιμή  $\gamma = 0.56 \pm 0.05$ , απόλυτα σύμφωνη με τις προσδοκίες του μοντέλου  $\Lambda$ CDM και  $\Omega_{m0} = 0.29 \pm 0.01$ , τιμή που είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τα τελευταία αποτελέσματα του Planck. Με το αποτέλεσμα αυτό, παρέχουμε σημαντικά αυστηρότερους περιορισμούς στον δείκτη αύξησης σε σχέση με προηγούμενες μελέτες, όπως υποδεικνύεται από το γεγονός ότι η αντίστοιχη αβεβαιότητα είναι μόνο  $\sim 0.09\gamma$ . Επίσης, επιτρέποντας το  $\gamma$  να μεταβάλλεται με την ερυθρομετάθεση, βρίσκουμε ότι η συνδυασμένη στατιστική ανάλυση μεταξύ των δεδομένων σηματοποίησης και των θεωρητικών προσδοκιών αίρει τον εκφυλισμό διαφόρων μοντέλων και έτσι καταλήγουμε σε αυστηρότερους περιορισμούς σε σχέση με άλλες πρόσφατες μελέτες στο ίδιο θέμα.

Τέλος, στο κεφάλαιο (7) συνοψίζουμε τα κυριότερα γενικά συμπεράσματα της διατριβής και προτείνουμε ορισμένες νέες ερευνητικές κατευθύνσεις μελέτης.



*Στον Μπάμπη*



# Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	iv
Περίληψη	v
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>5</b>
1.1 Εισαγωγή στην Κοσμολογία	6
1.1.1 Κοσμολογική Αρχή	6
1.1.2 Ερυθρομετάθεση και Νόμος του Hubble	7
1.1.3 Μετρική Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	11
1.1.4 Εξισώσεις Friedmann-Lemaître	13
1.1.4.1 Νευτώνεια Προσέγγιση	14
1.1.4.2 Σχετικιστική Προσέγγιση	17
1.1.5 Καταστατική Εξίσωση	18
1.1.5.1 Θετικές τιμές της παραμέτρου της Καταστατικής Εξίσωσης	19
1.1.5.2 Αρνητικές τιμές της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης	20
1.1.5.3 Σκοτεινή Ενέργεια	21
1.1.6 Σύμπαν με μία συνιστώσα και με πολλαπλές συνιστώσες του κοσμικού ρευστού	25
1.1.7 Μοντέλα Χρονοεξαρτώμενης Παραμέτρου της Καταστατικής Εξίσωσης	27
1.2 Η εξέλιξη των διαταραχών της ύλης	28
1.2.1 Εξισώσεις της Δυναμικής Ρευστών	29
1.2.2 Εξισώσεις Διαταραχών της Ρευστοδυναμικής	30
1.2.2.1 Εξίσωση συνέχειας	30
1.2.2.2 Εξίσωση Poisson	31
1.2.2.3 Εξίσωση Euler	31
1.2.3 Διαφορική Εξίσωση των διαταραχών της ύλης	32
1.2.3.1 Γραμμική Θεωρία Διαταραχών	32
1.2.3.2 Εναλλακτικά Μοντέλα Βαρύτητας	33
1.2.4 Λύση της διαφορικής εξίσωσης διαταραχών και ο Γραμμικός Παράγοντας Αύξησης	34
1.2.4.1 Λύση στο Σύμπαν Einstein-de Sitter	35

1.2.4.2	Λύση στο Σύμπαν de Sitter	36
1.2.4.3	Λύση στο μοντέλο $\Lambda$ CDM	36
1.2.4.4	Λύση για οποιοδήποτε μοντέλο Σκοτεινής Ενέργειας	38
1.2.5	Η εξέλιξη του παράγοντα αύξησης	39
1.2.5.1	Ασυμπτωτική Τιμή του δείκτη αύξησης στη ΓΘΣ	41
1.2.5.2	Συναρτησιακές μορφές του δείκτη αύξησης	42
1.3	Στατιστική της σηματοποίησης των γαλαξιών	43
1.3.1	Φάσμα των διαταραχών πυκνότητας	43
1.3.2	Συναρτήσεις Συσχετισμού	47
1.3.2.1	Χωρική Συνάρτηση Συσχετισμού δύο σημείων	48
1.3.2.2	Γωνιακή Συνάρτηση Συσχετισμού δύο σημείων	49
1.3.2.3	Συναρτήσεις Συσχετισμού $N$ Σημείων	50
1.3.3	Η Εξίσωση του Limber	50
1.3.4	Η Διακύμανση της Μάζας και το CDM Φάσμα Ισχύος $P(k)$	51
1.3.5	Μη Γραμμικές Διορθώσεις στο Φάσμα Ισχύος των Διαταραχών της ύλης	52
<b>2</b>	<b>Χρονοεξαρτώμενη Παράμετρος της Καταστατικής Εξίσωσης για μοντέλα Σκοτεινής Ενέργειας</b>	<b>55</b>
2.1	Παράμετρος της Καταστατικής Εξίσωσης για μοντέλα Σκοτεινής Ενέργειας η οποία εξαρτάται από τον παράγοντα κλίμακας	56
<b>3</b>	<b>Γενικευμένη εξέλιξη του γραμμικού bias</b>	<b>59</b>
3.1	Τα μοντέλα bias	61
3.2	Η εξέλιξη του γραμμικού bias	65
3.3	Λύση της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης του bias	68
3.4	Bias και μετρικές διαταραχές	72
3.5	Γραμμικό Μοντέλο bias για ένα χρονοεξαρτώμενο πληθυσμό ιχνηλατών	74
<b>4</b>	<b>Κοσμολογικά Δεδομένα</b>	<b>77</b>
4.1	Δεδομένα της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού των ενεργών γαλαξιακών πυρήνων ακτίνων $X$	78
4.2	Δεδομένα της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού των Φωτεινών Ερυθρών Γαλαξιών	82
4.3	Τα Δεδομένα του Ρυθμού Αύξησης	87
<b>5</b>	<b>Ο δείκτης αύξησης των διαταραχών της ύλης στο μοντέλο <math>\Lambda</math>CDM και στο μοντέλο DGP</b>	<b>91</b>
5.1	Προσαρμογή Μοντέλων στα δεδομένα	92
5.1.1	Σταθερός δείκτης αύξησης των δομών	93
5.1.1.1	$\Lambda$ CDM	94
5.1.1.2	DGP	96
5.1.2	Οι παραμετροποιήσεις $\Gamma_1$ έως $\Gamma_4$	96
<b>6</b>	<b>Συνδυασμένη ανάλυση των δεδομένων σηματοποίησης των κοσμικών δομών και του ρυθμού αύξησης</b>	<b>101</b>

---

6.1	Διαδικασία προσαρμογής των μοντέλων στα παρατηρησιακά δεδομένα	102
6.2	Παρατηρησιακοί Περιορισμοί	104
6.2.1	AGN	104
6.2.2	LRGs	105
6.2.3	Συνδυασμένη ανάλυση για τα LRGs	105
6.3	Περιορισμοί στο $\gamma(z)$	109
6.4	Ανάλυση με βάση τις σταθερές της ομάδας Planck	112
6.5	Σχολιασμός των αποτελεσμάτων	114
<b>7</b>	<b>Συμπεράσματα-Νέες Ερευνητικές Κατευθύνσεις</b>	<b>117</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>121</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η Κοσμολογία είναι η μελέτη του Σύμπαντος στο σύνολό του και προσπαθεί να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα που αφορούν στη γέννηση, εξέλιξη και δομή του. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, η συσσώρευση τεράστιων συνόλων δεδομένων, η οποία επιτυγχάνεται με τη βελτίωση των τεχνικών παρατήρησης, καθώς και η ανάπτυξη νέων φυσικών θεωριών, έχουν βοηθήσει τους επιστήμονες στο να βγάλουν ορισμένα ουσιώδη συμπεράσματα σχετικά με βασικά θέματα για την Κοσμολογία. Ένα από αυτά είναι η ύπαρξη νέων μορφών ύλης (σκοτεινή ύλη) και ενέργειας (σκοτεινή ενέργεια, dark energy, DE). Επίσης, πολύ σημαντική είναι η μελέτη της διαμόρφωσης της ύλης σε κοσμικές δομές που παρατηρούμε σήμερα όπως για παράδειγμα, οι γαλαξίες, τα σμήνη των γαλαξιών κ.λ.π. Η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η ύλη δεσμεύεται σε μεγάλα αντικείμενα είναι το κλειδί για τη μελέτη των δομών σε κοσμολογικές κλίμακες.

Το καθιερωμένο μοντέλο της Κοσμολογίας βασίζεται στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Αϊνστάιν (εφεξής ΓΘΣ) ως τη θεωρία που περιγράφει τη βαρύτητα σε όλες τις κλίμακες. Η ΓΘΣ έχει εξακριβωθεί ότι ισχύει με πολύ καλή ακρίβεια τόσο στο ηλιακό σύστημα όσο και στο τοπικό Σύμπαν, π.χ. συστήματα διπλών αστέρων νετρονίων στο γαλαξία μας, βαρυτικά κύματα κ.λ.π. Ωστόσο, παραμένει ανοικτό το ερώτημα κατά πόσο η ΓΘΣ μπορεί να περιγράψει με ακρίβεια τη βαρύτητα σε μεγάλες κλίμακες.

Η παρούσα διατριβή εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο της διερεύνησης του αν η ΓΘΣ είναι η ισχύουσα θεωρία βαρύτητας σε εξωγαλαξιακές κλίμακες στο πλαίσιο ενός κοσμολογικού μοντέλου του Σύμπαντος που απαρτίζεται από τη λεγόμενη 'ψυχρή σκοτεινή ύλη' και 'σκοτεινή ενέργεια' συμβατή με την κοσμολογική σταθερά

του Αϊνστάιν. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία με τον όρο Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM). Πιο συγκεκριμένα, οι προσπάθειές μας έχουν αφιερωθεί στη βελτίωση της ακρίβειας με την οποία προσδιορίζονται βασικές κοσμολογικές παράμετροι, και ειδικότερα η αδιάστατη παράμετρος της πυκνότητας της ύλης και ο δείκτης αύξησης των διαταραχών της ύλης. Όπως θα δούμε με λεπτομέρεια παρακάτω, η τιμή της τελευταίας παραμέτρου είναι ένας βασικός δείκτης της ισχύος της  $\Gamma\Theta\Sigma$  σε μεγάλες κλίμακες. Για το λόγο αυτό, έχουμε χρησιμοποιήσει τα πιο πρόσφατα και ακριβή δεδομένα των δομών μεγάλης κλίμακας προκειμένου να προσδιορίσουμε την τιμή του δείκτη αύξησης με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια. Επίσης, ένα σημαντικό μέρος της εργασίας αυτής έχει να κάνει με τη βελτίωση του μοντέλου που περιγράφει τη σύνδεση μεταξύ των διαταραχών της σκοτεινής ύλης με τις διαταραχές της φωτεινής ύλης, μοντέλο το οποίο χρησιμοποιήθηκε στην πορεία προκειμένου να εξαχθούν οι τιμές των παραπάνω παραμέτρων.

Στις επόμενες παραγράφους, παρουσιάζονται βασικές έννοιες της Κοσμολογίας, δίνοντας έμφαση στους ορισμούς εννοιών που χρησιμοποιούνται ειδικότερα στην παρούσα μελέτη. Παρουσιάζονται τα κύρια χαρακτηριστικά του βασικού κοσμολογικού μοντέλου ξεκινώντας με την Κοσμολογική Αρχή, τον ορισμό της ερυθρομετάθεσης και το νόμο του Hubble. Οι παραδοχές της ισοτροπίας και της ομοιογένειας οδηγούν στο σχηματισμό της μετρικής Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Στη συνέχεια εξάγουμε τις εξισώσεις Friedmann στο Νευτώνειο όριο, αλλά και στο πλαίσιο της  $\Gamma\Theta\Sigma$ . Η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης μαζί με τη μεγάλη σημασία της για την Κοσμολογία περιγράφονται ακολουθώντας. Έπειτα αναφερόμαστε στην περίπτωση ενός Σύμπαντος με μία συνιστώσα κοσμικού ρευστού, καθώς και στη ρεαλιστική περίπτωση ενός Σύμπαντος με πολλές συνιστώσες. Τέλος, ορισμένες από τις πιο κοινές παραμετροποιήσεις που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία για την παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης περιγράφονται στην τελευταία παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου.

## 1.1 Εισαγωγή στην Κοσμολογία

### 1.1.1 Κοσμολογική Αρχή

Το βασικό σημείο εκκίνησης στην Κοσμολογία είναι η υπόθεση της Κοσμολογικής Αρχής η οποία ορίζει ότι, σε αρκετά μεγάλες κλίμακες το Σύμπαν είναι ομογενές και



ισότροπο. Η ομοιογένεια και η ισοτροπία καθορίζουν τη μορφή της γεωμετρίας του χωροχρόνου. Προφανώς, η Κοσμολογική Αρχή δεν ικανοποιείται αν περιοριστούμε σε μια περιοχή μικρής κλίμακας. Για παράδειγμα, η κατανομή της ύλης στη γειτονιά του τοπικού σμήνους γαλαξιών δεν είναι ομοιογενής. Μόνο σε αποστάσεις μεγαλύτερες από 100 Mpc (1 Mpc είναι περίπου ο μέσος όρος απόστασης μεταξύ δύο γαλαξιών) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το Σύμπαν εμφανίζεται ως ομογενές και ισότροπο. Η ομοιογένεια και η ισοτροπία συνεπάγονται ότι η ύλη κατανέμεται με περίπου σταθερή πυκνότητα και δεν υπάρχει καμία προτιμώμενη κατεύθυνση ούτε κάποιο προνομιακό σημείο στο Σύμπαν.

Η θεώρηση της Κοσμολογικής Αρχής επιβεβαιώνεται και παρατηρησιακά. Όντως, μετρώντας τις διαταραχές της πυκνότητας της ύλης που περιέχονται σε μία σφαίρα ακτίνας  $8 h^{-1} Mpc$ <sup>1</sup> βρίσκουμε ότι η μέση τιμή είναι περίπου μονάδα. Ενώ σε μεγάλες αποστάσεις, από 100-200  $h^{-1} Mpc$  και πάνω ([1], [2], [3], [4] [5], [6], [7], [8], [9]) οι διαταραχές της πυκνότητας της ύλης έχουν πολύ μικρές τιμές και κατανομή που δεν εξαρτάται από την παρατηρούμενη θέση στο Σύμπαν. Επιπλέον, οι μετρήσεις των διαταραχών του Κοσμικού Μικροκυματικού Υποβάθρου (Cosmic Microwave Background, CMB) στις αρχές του Σύμπαντος, οι οποίες όπως θα δούμε παρακάτω συνδέονται με τις διαταραχές της πυκνότητας κατά τη λεγόμενη εποχή της αποδέσμευσης στο πρώιμο Σύμπαν, είναι πολύ μικρές (της τάξης των  $10^{-5}$ ). Τέλος, παρατηρήσεις του κοσμικού δευτερίου έχουν δείξει ότι το πρώιμο Σύμπαν είναι ομογενές. Η Κοσμολογική Αρχή είναι σημαντική διότι, όπως θα δούμε στην παράγραφο (1.1.4), με τη βοήθειά της μπορούμε να βρούμε λύσεις για τις εξισώσεις πεδίου του Αϊνστάιν που περιγράφουν την εξέλιξη του Σύμπαντος.

### 1.1.2 Ερυθρομετάθεση και Νόμος του Hubble

Οι πιο σημαντικές πληροφορίες που έχουμε για το Σύμπαν συνάγονται από το φως που λαμβάνουμε από μακρινά αντικείμενα. Υπάρχουν δύο τρόποι που μπορεί κάποιος να ερμηνεύσει το εκπεμπόμενο φως: ο κλασικός (επαλληλία ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων) και ο κβαντικός (κβάντα φωτονίων). Για να ερμηνευθούν σωστά οι παρατηρήσεις, πρέπει να λάβουμε υπόψη την αύξηση του μήκους κύματος του φωτός (ισοδύναμα τη μείωση της ενέργειας των φωτονίων), ως συνέπεια της διαστολής του Σύμπαντος.

<sup>1</sup>Όπου  $h$  είναι η αβεβαιότητα στον υπολογισμό της σταθεράς του Hubble  $H_0$  η οποία περιορίζεται στο διάστημα  $0.673 \leq h \leq 0.743$  με  $h = \frac{H_0}{100}$  (βλ. παράγραφο 1.1.2).

Η ερυθρομετάθεση (ή ερυθρομετατόπιση) είναι το φαινόμενο όπου οι φασματικές γραμμές ενός αντικειμένου (π.χ. γαλαξία, σμήνους γαλαξιών κ.λ.π.) εμφανίζονται μετατοπισμένες προς το ερυθρό, δηλαδή, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία φαίνεται να έχει λιγότερη ενέργεια και μεγαλύτερο μήκος κύματος. Η ερυθρομετάθεση  $z$  ορίζεται από τη σχέση:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$$

όπου  $\lambda_{obs}$  είναι το παρατηρούμενο μήκος κύματος ενός μακρινού αντικειμένου και  $\lambda_{em}$  είναι το αναμενόμενο μήκος κύματος το οποίο κάποιος μπορεί να μετρήσει σε ένα εργαστήριο. Όταν  $z > 0$  τότε έχουμε μετάθεση προς το ερυθρό, ενώ όταν  $z < 0$  έχουμε μετάθεση προς το ιώδες.

Η συντριπτική πλειοψηφία των γαλαξιών στο Σύμπαν παρουσιάζουν ερυθρομετάθεση, κάτι που σημαίνει ότι κινούνται μακριά όχι μόνο από το γήινο παρατηρητή αλλά και ο ένας από τον άλλον. Αυτή η συνεχής απομάκρυνση οφείλεται στη διαστολή του χώρου μεταξύ τους. Η σύνδεση της ερυθρομετατόπισης με την απομάκρυνση των γαλαξιών από τη Γη έγινε από τον κοσμολόγο Edwin Hubble το 1929. Το *διάγραμμα Hubble* δίνει τη γραμμική σχέση μεταξύ της ερυθρομετάθεσης  $z$  και της απόστασης  $r$  του παρατηρούμενου γαλαξία από τον παρατηρητή:

$$z = \frac{H_0}{c} r$$

όπου  $c$  η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Ο Hubble εξήγησε την ερυθρομετάθεση των γαλαξιών ως μια μετατόπιση Doppler λόγω της ακτινικής τους ταχύτητας, καθώς κινούνται μακριά από τη Γη. Για μικρές τιμές της ερυθρομετάθεσης  $z$  ισχύει η κλασική μη-σχετικιστική έκφραση Doppler:

$$z = \frac{\nu}{c}$$

όπου  $\nu$  η ταχύτητα του παρατηρούμενου γαλαξία. Τότε, ο νόμος του Hubble παίρνει τη μορφή:

$$\nu = H_0 r . \quad (1.1)$$

Ως εκ τούτου, ο Hubble έδειξε ότι η πλειοψηφία των γαλαξιών κινούνται μακριά από εμάς με ταχύτητα που είναι ανάλογη με την απόστασή τους από τον παρατηρητή. Παρά το γεγονός ότι εκείνη την εποχή δεν υπήρχαν θεωρητικά στοιχεία για τη διαστολή του

Σύμπαντος, οι παρατηρήσεις του Hubble έδωσαν την πρώτη ένδειξη για τη διαστολή του.

*H σταθερά του Hubble  $H_0$*

Η τιμή της σταθεράς του Hubble  $H_0$  δεν μπορεί να προβλεφθεί με θεωρητικά μέσα, αλλά μόνο από παρατηρήσεις. Εξαιτίας του ότι οι μετρήσεις των αποστάσεων υπόκεινται σε υψηλή αβεβαιότητα, είναι σύνηθες να παραμετροποιούμε τη σταθερά του Hubble με τη βοήθεια του αδιάστατου αριθμού  $h$ , δηλαδή:

$$H_0 \equiv 100h \text{ km/sec/Mpc} . \quad (1.2)$$

Οι πιο ακριβείς μετρήσεις του  $h$  μέχρι σήμερα οφείλονται σε μετρήσεις που αφορούν στους μεταβλητούς Κηφείδες και στους υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia (SNIa). Επιπλέον, συνδυαστικές μετρήσεις όπως μετρήσεις γαλαξιών HII με δεδομένα από γιγαντιαίες εξωγαλαξιακές περιοχές HII, καθώς και μετρήσεις του CMB με δεδομένα της συνάρτησης συσχετισμού από το δείγμα MASS Data Release 9 (DR9) του BOSS (Baryonic Oscillation Spectroscopic Survey) έχουν χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να περιοριστεί η τιμή του  $h$ . Αυτές οι τιμές είναι αντίστοιχα:

$$h = 0.738 \pm 0.024 \quad [10]$$

$$h = 0.743 \pm 0.021 \quad [11]$$

$$h = 0.743 \pm 0.029 \quad [12]$$

$$h = 0.696 \pm 0.012 \quad [13]$$

στο επίπεδο εμπιστοσύνης 68%. Η ομάδα που επεξεργάστηκε τα δεδομένα του δορυφόρου Planck [14] εξήγαγε επίσης υψηλής ακρίβειας τιμές για το  $h$  θεωρώντας το μοντέλο  $\Lambda$ CDM για διάφορες περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} h &= 0.673 \pm 0.012 \quad (\text{Planck} + \text{WP}) \\ h &= 0.673 \pm 0.012 \quad (\text{Planck} + \text{WP} + \text{highL}) \\ h &= 0.679 \pm 0.010 \quad (\text{Planck} + \text{WP} + \text{highL} + \text{lensing}) \\ h &= 0.678 \pm 0.077 \quad (\text{Planck} + \text{WP} + \text{highL} + \text{BAO}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

στο επίπεδο εμπιστοσύνης 68%. Με την ένδειξη *Planck* υπονοείται ότι τα αποτελέσματα προέρχονται από τα δεδομένα του φάσματος ισχύος των διαταραχών της θερμοκρασίας που προκύπτουν από την ανάλυση του CMB με βάση το φάσμα μελανού σώματος, με την ένδειξη *WP* υπονοείται ότι έχουν χρησιμοποιηθεί δεδομένα

πώλωσης χαμηλής πολυπολικής τάξης (*low multipole orders*) του WMAP, η ένδειξη *highL* αναφέρεται στα δεδομένα που προέρχονται από το τηλεσκόπιο South Pole Telescope σε συνδυασμό με αυτά του τηλεσκοπίου Atacama Cosmology Telescope, ενώ οι ενδείξεις *lensing* και *BAO* αναφέρονται σε δεδομένα που απορρέουν από τα φαινόμενα της βαρυτικής εστίασης και των βαρυονικών ακουστικών ταλαντώσεων αντίστοιχα (Baryonic Acoustic Oscillations, BAOs).

Μία άλλη εκτίμηση του  $h$  προέρχεται από τους Spergel et al. [15]:

$$h = 0.68 \pm 0.011 . \quad (1.4)$$

Σύμφωνα με τους Spergel et al. [15], οι βέλτιστες παράμετροι προσαρμογής που προέρχονται από την ομάδα του Planck ενδέχεται να έχουν επηρεαστεί από συστηματικά σφάλματα στις αστρονομικές μετρήσεις. Οι Spergel et al. ανέλυσαν εκ νέου τα δεδομένα του δορυφόρου Planck και διαπίστωσαν ότι υπήρχε μία τέτοια τάση σφαλμάτων στις συχνότητες  $217 \text{ GHz} \times 217 \text{ GHz}$  του ανιχνευτή του φάσματος που χρησιμοποιείται στην ανάλυση των δεδομένων του Planck. Έτσι, χρησιμοποίησαν μία διαδικασία καθαρισμού του χάρτη αυτού που βασίζεται σε ένα συνδυασμό δύο χαρτών διαφορετικών συχνοτήτων (353 και 545 GHz) έτσι ώστε να μειωθεί ο θόρυβος στους χάρτες των ενδιαμέσων συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται για την κοσμολογική συμπερασματολογία.

Στη δική μας μελέτη, λαμβάνουμε υπόψη την τιμή του  $h$  η οποία βασίζεται στην ανάλυση των Spergel et al. [15]. Παρόλα αυτά, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα και με την ανάλυση με βάση την τιμή του  $h$  που προέρχεται από την εργασία της ομάδας Planck [14]. Όπως θα δείξουμε, δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των δύο αυτών τιμών όσον αφορά στα αποτελέσματα που προκύπτουν.

Στην κβαντομηχανική τώρα περιγραφή, το μήκος κύματος των φωτονίων  $\lambda$  είναι αντιστρόφως ανάλογο με την ορμή των φωτονίων  $p$ ,  $\lambda = \frac{h}{p}$ , όπου  $h$  είναι η σταθερά του Planck. Η ορμή ενός φωτονίου εξελίσσεται αντιστρόφως ανάλογα με τον παράγοντα κλίμακας  $a(t)$  (για τον ορισμό του παράγοντα κλίμακας βλ. παράγραφο (1.1.3)), και έτσι το μήκος κύματος εξελίσσεται ανάλογα με τον παράγοντα κλίμακας. Το φως που εκπέμπεται τη χρονική στιγμή  $t_1$  με μήκος κύματος  $\lambda_1$  θα παρατηρηθεί τη χρονική στιγμή  $t_0$  με μήκος κύματος:

$$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \lambda_1 . \quad (1.5)$$

Αφού  $a(t_0) > a(t_1)$ , το μήκος κύματος του φωτός αυξάνεται,  $\lambda_0 > \lambda_1$ .

Από την εξίσωση (1.5) έχουμε ότι:

$$\frac{a(t_1)}{a(t_0)} = \frac{1 + z_0}{1 + z}.$$

Συνήθως κανονικοποιούμε τον παράγοντα κλίμακας  $a(t)$  ώστε σήμερα να έχει τιμή ίση με τη μονάδα, δηλαδή  $a(t_0) = 1$ , οπότε:

$$a = \frac{1}{1 + z}, \quad (1.6)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει  $a(t_1) \equiv a$  και  $z_0 = 0$ .

### 1.1.3 Μετρική Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Η δυναμική του διαστελλόμενου Σύμπαντος είναι ευκολότερα κατανοητή από την οπτική γωνία παρατηρητών που είναι σε κατάσταση ηρεμίας ως προς τη διαστολή Hubble. Τέτοιοι ονομάζονται συνκινούμενοι (comoving) παρατηρητές. Στη διαφορική γεωμετρία, η απόσταση  $ds$  μεταξύ δύο σημείων του χωροχρόνου  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  και  $(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$  ονομάζεται στοιχείο γραμμής. Η χωροχρονική μετρική παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη σχετικότητα καθώς συσχετίζει τις εξαρτώμενες από τον παρατηρητή συντεταγμένες  $x^\mu = (t, x^i)$  με το αναλλοίωτο στοιχείο γραμμής που ορίζεται ως:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

όπου  $g_{\mu\nu}$  είναι η μετρική, ο τανυστής που καθορίζει πως υπολογίζονται οι αποστάσεις στο θεωρούμενο χωροχρόνο. Θα υιοθετήσουμε τις συνκινούμενες συντεταγμένες και θα θέσουμε  $x^0 = ct$  όπου  $t$  είναι ο κοσμικός χρόνος ο οποίος ορίζεται έτσι ώστε για σταθερό  $t$ , το Σύμπαν να έχει παντού την ίδια πυκνότητα.

Η περίπτωση ενός ισότροπου και ομογενούς Σύμπαντος, δηλαδή ενός Σύμπαντος που υπακούει στην Κοσμολογική Αρχή, περιγράφεται από τη μετρική FLRW, η οποία σε σφαιρικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (1.7)$$

Η παράμετρος  $k$  ονομάζεται παράμετρος χωρικής καμπυλότητας του Σύμπαντος. Ανάλογα με την τιμή της, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$k \equiv \begin{cases} 0 & \text{Ευκλείδειος} & \text{επίπεδος χώρος} \\ 1 & \text{Σφαιρικός} & \text{θετικά καμπυλωμένος χώρος} \\ -1 & \text{Υπερβολοειδής} & \text{αρνητικά καμπυλωμένος χώρος} . \end{cases}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να εκφράσουμε τη μετρική FLRW είναι:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j$$

όπου η ποσότητα  $\gamma_{ij}$  ονομάζεται μετρικός τανυστής σε χωρικές υπερεπιφάνειες. Οι πρόσφατες παρατηρήσεις υποδεικνύουν ένα χωρικά επίπεδο Σύμπαν ( $k = 0$ ) (βλ. π.χ. [14], [16]) οπότε το στοιχείο μήκους γίνεται:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j$$

όπου  $\delta_{ij}$  είναι το δέλτα του Kronecker.

Στη μετρική FLRW, η σημασία του παράγοντα κλίμακας  $a(t)$  είναι η ακόλουθη: Μπορούμε να θεωρήσουμε το χώρο ως ένα συντεταγμένο δίκτυο που επεκτείνεται ομοιόμορφα με την αύξηση του χρόνου. Το συνκινούμενο διάνυσμα θέσης  $\vec{x}$  ενός σημείου του χώρου δίνεται από τις συνκινούμενες συντεταγμένες  $x^i \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$ , οι οποίες παραμένουν σταθερές καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται. Το διάνυσμα θέσης  $\vec{r}$  σε φυσικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} . \quad (1.8)$$

Η φυσική ταχύτητα ενός αντικειμένου δίνεται εν γένει από τη σχέση:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{x} \frac{da}{dt} + a\dot{\vec{x}} . \quad (1.9)$$

Ο όρος  $a\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{r}, t)$  είναι η ιδιοταχύτητα του αντικειμένου. Για ένα συνκινούμενο αντικείμενο, η ιδιοταχύτητα είναι ίση με το μηδέν, οπότε η εξίσωση (1.9) γίνεται  $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{x} \frac{da}{dt}$ .

Λόγω της (1.9), ο νόμος του Hubble, εξίσωση (1.1), παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.10)$$

ενώ η εξίσωση (1.9) μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = Ha(t)\vec{x} + a\dot{\vec{x}} \Rightarrow \vec{u}(\vec{r}, t) = H(t)\vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t). \quad (1.11)$$

Η τελευταία σχέση υποδηλώνει την ταχύτητα ενός στοιχείου του κοσμικού ρευστού.

Τέλος, η παράμετρος καμπυλότητας  $k$  είναι μια ελεύθερη παράμετρος στο μοντέλο FLRW και θεωρείται συνήθως ως σταθερά, η τιμή της οποίας προσδιορίζεται από παρατηρήσεις. Η ανάλυση των διαταραχών του CMB από το δορυφόρο WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [17] αλλά και η πρόσφατη ανάλυση από το δορυφόρο Planck [14] έχουν δείξει ότι ζούμε σε ένα χωρικά επίπεδο Σύμπαν ( $k \simeq 0$ ). Ως συνέπεια, υποθέτουμε παρακάτω  $k = 0$  για τους υπολογισμούς μας, αν και συνεχίζουμε να διερευνούμε την εξάρτηση διαφόρων ποσοτήτων από την καμπυλότητα  $k$ .

#### 1.1.4 Εξισώσεις Friedmann-Lemaître

Από την προηγούμενη ανάλυση, γίνεται φανερό ότι η περιγραφή της κοσμικής διαστολής ανάγεται από μαθηματική άποψη στον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης του παράγοντα κλίμακας  $a(t)$ . Βάση των εξισώσεων πεδίου της ΓΘΣ, η τελευταία εξαρτάται από το είδος του κοσμικού ρευστού, το οποίο καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο η βαρύτητα επιδρά στη διαστολή του Σύμπαντος. Οι διαφορικές εξισώσεις που καθορίζουν τη χρονική εξάρτηση του παράγοντα κλίμακας  $a(t)$  για διάφορα είδη κοσμικού ρευστού ονομάζονται εξισώσεις Friedmann-Lemaître. Αν και η παραγωγή των εξισώσεων αυτών γίνεται αυστηρά στο πλαίσιο της ΓΘΣ, θα εξετάσουμε πρώτα τη μορφή των εξισώσεων στο πλαίσιο της Νευτώνειας προσέγγισης του κοσμικού ρευστού, η οποία επιτρέπει να αποκτήσουμε μια άμεση εποπτική εικόνα που γενικεύεται κατόπιν στην ακριβή παραγωγή των ίδιων εξισώσεων στο πλαίσιο της ΓΘΣ.

### 1.1.4.1 Νευτώνεια Προσέγγιση

#### (α) Εξίσωση Friedmann

Έστω ομογενής σφαίρα μάζας  $M$ , ακτίνας  $R(t)$  και πυκνότητας  $\rho(t)$ , τότε  $M = \frac{4\pi}{3}\rho(t)R^3(t)$ . Θεωρώντας ότι η σφαίρα διαστέλλεται ισοτροπικά, αν τοποθετήσουμε σημειακή μάζα  $m$  στην επιφάνεια της σφαίρας, τότε η βαρυτική δύναμη μεταξύ αυτής και της σφαίρας είναι:  $F = -G\frac{mM}{R^2}$ , όπου  $G$  η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας. Η επιτάχυνση της σημειακής μάζας τότε είναι:  $\frac{d^2R}{dt^2} = -G\frac{M}{R^2}$ . Πολλαπλασιάζοντας με την ταχύτητα  $\frac{dR}{dt}$  και ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε:

$$\frac{dR}{dt} \frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{dR}{dt} G \frac{M}{R^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = G \frac{M}{R} + U$$

όπου  $U$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η σφαίρα διαστέλλεται ισοτροπικά, μπορούμε να θέσουμε  $R = a(t)r$ . Τότε:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = G \frac{M}{R} + U \Rightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{d(a(t)r)}{dt} \right]^2 = G \frac{M}{a(t)r} + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{a}(t)^2 = \frac{G}{a(t)r} \frac{4}{3} \pi a^3(t) r^3 \rho(t) + U .$$

Τέλος, αν πολλαπλασιάσουμε με την ποσότητα  $2/a^2(t)r^2$  παίρνουμε ότι:

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{2U}{r^2} \frac{1}{a^2}$$

ή

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2 \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.12)$$

όπου:

$$k = -\frac{2U}{r^2} .$$

Η σχέση (1.12) είναι η πρώτη των εξισώσεων Friedmann (στη Νευτώνεια προσέγγιση) η οποία είναι στην ουσία το ολοκλήρωμα της κίνησης το οποίο περιλαμβάνει τη χρονική παράγωγο του παράγοντα κλίμακας  $a(t)$ . Να τονιστεί ότι στη θεωρητική ανάλυση χρησιμοποιούμε τέτοιες μονάδες ώστε  $c = 1$ .

Η περίπτωση ενός χωρικά επίπεδου Σύμπαντος αντιστοιχεί στην τιμή  $k = 0$ , δηλαδή:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) .$$



Η ποσότητα:

$$\rho_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (1.13)$$

ονομάζεται κρίσιμη πυκνότητα και αντιστοιχεί στην πυκνότητα που θα πρέπει να έχει το Σύμπαν τη χρονική στιγμή  $t$  ώστε να είναι 'οριακά ανοικτό' (ή 'οριακά κλειστό') με βάση τις εξισώσεις Friedmann. Η τιμή της κρίσιμης πυκνότητας στο παρόν είναι:

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 2.78h^2 10^{11} M_\odot Mpc^{-3} .$$

### Αδιάστατη Παράμετρος Πυκνότητας

Στην Κοσμολογία είναι σύνηθες να χρησιμοποιούμε το λόγο της πυκνότητας του Σύμπαντος προς την κρίσιμη τιμή της πυκνότητας:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} . \quad (1.14)$$

Η παράμετρος  $\Omega(t)$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0, 1]$ . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.14), η εξίσωση Friedmann (1.12) μπορεί να γραφεί ως:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{8\pi G}{3} \frac{k}{a^2 H^2} .$$

Σημειώνουμε ότι τα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης δεν μπορούν να αλλάξουν πρόσημο κατά τη διάρκεια της εξέλιξης του Σύμπαντος.

### (β) Εξίσωση Συνέχειας

Από τον 1ο Νόμο της Θερμοδυναμικής, έχουμε εντός της σφαίρας ότι:  $dQ = dE + PdV$  όπου  $dQ$  η θερμότητα,  $dE$  η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας,  $dV$  η μεταβολή του όγκου και  $P$  η ολική πίεση του ρευστού.

Υποθέτοντας ότι οι μεταβολές σε μεγάλες κλίμακες είναι αδιαβατικές ( $dQ = 0$ ), έχουμε:

$$dQ = dE + PdV \Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0 .$$

Επιπλέον όπως έχουμε ήδη δει:  $R = a(t)r$  και  $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3 a^3$  οπότε έχουμε:  $\dot{V} = 4\pi r^3 a^2 \dot{a} = 3V \frac{\dot{a}}{a}$ . Για την εσωτερική ενέργεια  $E(t)$  της σφαίρας έχουμε ότι:

$E(t) = V(t)\rho(t)$ . Αν παραγωγίσουμε την τελευταία σχέση με το χρόνο τότε:

$$\dot{E} = \dot{V}\rho + V\dot{\rho} = V \left( 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + V\dot{\rho} \right) \Rightarrow -P\dot{V} = V \left( 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + V\dot{\rho} \right) \Rightarrow -3P\frac{\dot{a}}{a} = \left( 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + V\dot{\rho} \right)$$

ή

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 . \quad (1.15)$$

Η εξίσωση (1.15) είναι η εξίσωση συνέχειας του ρευστού, και αποτελεί τη 2η των εξισώσεων Friedmann.

### (γ) Εξίσωση Επιτάχυνσης

Συνδυάζοντας την εξίσωση Friedmann (1.12) με την εξίσωση συνέχειας, (1.15), μπορούμε να εξαγάγουμε μία εξίσωση που περιγράφει πώς η διαστολή (ή η ενδεχόμενη συστολή) του Σύμπαντος εξελίσσεται στο χρόνο.

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (1.12) με την ποσότητα  $a^2$ , μετά την παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο, και θεωρώντας ότι η χωρική καμπυλότητα είναι μηδέν ( $k = 0$ ), τότε παίρνουμε:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - k \Rightarrow 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}(\rho 2a\dot{a} + a^2\dot{\rho}) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{\dot{\rho}a}{2\dot{a}}\right)$$

ή

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(2\rho + \dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}}\right) . \quad (1.16)$$

Η τελευταία σχέση είναι η εξίσωση επιτάχυνσης του ρευστού.

Αν επιθυμούμε η εξίσωση επιτάχυνσης να μην περιλαμβάνει την πρώτη παράγωγο του παράγοντα κλίμακας, μπορούμε να συνδυάσουμε τις εξισώσεις (1.15) και (1.16) οπότε έχουμε:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) . \quad (1.17)$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί γενίκευση του 2ου Νόμου του Νεύτωνα που συσχετίζει την επιτάχυνση με τις δυνάμεις (βαρύτητας και πίεσης) στο εσωτερικό της σφαίρας. Έχουμε πάντα  $\rho > 0$ , ενώ αναλόγως του είδους του κοσμικού ρευστού μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1.  $\rho + 3P > 0$ , οπότε έχουμε επιβράδυνση του Σύμπαντος ( $\ddot{a} < 0$ ),
2.  $\rho + 3P < 0$ , οπότε έχουμε επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος ( $\ddot{a} > 0$ ).

Συνοπάγεται ότι αν η συνολική πίεση  $P$  του κοσμικού ρευστού είναι θετική, τότε πάντα έχουμε επιβράδυνση της διαστολής ή συστολής του Σύμπαντος. Επίσης, είναι προφανές ότι η συνθήκη (2) είναι δυνατό να ικανοποιείται μόνο στην περίπτωση όπου η συνολική πίεση του ρευστού είναι αρνητική.

#### 1.1.4.2 Σχετικιστική Προσέγγιση

Στο πλαίσιο της ΓΘΣ, το Σύμπαν θεωρείται ομογενές και ισότροπο και περιγράφεται από τη μετρική FLRW, εξίσωση (1.7). Λαμβάνοντας υπόψη το συνκινούμενο σύστημα αναφοράς  $(r, \theta, \phi)$ , το κοσμικό ρευστό είναι σε κατάσταση ηρεμίας, έτσι ώστε το τεσσάρων διαστάσεων διάνυσμα της ταχύτητας να είναι:

$$u^0 = 1, \quad u^i = 0$$

το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ . Ο τανυστής ενέργειας-ορμής του κοσμικού ρευστού είναι:

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (\rho + P)u_\mu u_\nu. \quad (1.18)$$

Το κοσμικό ρευστό θεωρείται ιδανικό οπότε ο τανυστής ενέργειας-ορμής μπορεί να γραφεί ως:

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (\rho + P)g_{\mu 0}g_{\nu 0} \quad (1.19)$$

ή

$$T_{00} = \rho, \quad T_{0i} = T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = P g_{ij}.$$

Η μετρική (1.7) καταλήγει στον τανυστή Ricci με συνιστώσες:

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{0i} = R_{i0} = 0, \quad R_{ij} = -(2\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a})g_{ij}$$

και το βαθμωτό της καμπυλότητας Ricci:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right).$$

Αν εισάγουμε τις τελευταίες εξισώσεις στις εξισώσεις πεδίου του Αϊνστάιν:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.20)$$

τότε παίρνουμε τις εξισώσεις Friedmann-Lemaître οι οποίες ελέγχουν την εξέλιξη του κοσμικού παράγοντα κλίμακας  $a(t)$ :

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (1.21)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (1.22)$$

Παραγωγίζοντας την (1.21) ως προς το χρόνο  $t$  και απαλείφοντας τον όρο  $\ddot{a}$  μέσω της εξίσωσης (1.22), βρίσκουμε την εξίσωση της ενέργειας για ένα χωρικά επίπεδο Σύμπαν ( $k = 0$ ):

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad (1.23)$$

ή

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + P\frac{d}{dt}a^3 = 0. \quad (1.24)$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να εξαχθεί απευθείας και από την εξίσωση συνέχειας  $\nabla T^{\mu\nu} = 0$  και δεν αποτελεί ανεξάρτητη εξίσωση. Στην πραγματικότητα, αυτή είναι η επιβεβαίωση του 1ου Νόμου της Θερμοδυναμικής στην περίπτωση ενός αδιαβατικά διαστελλόμενου κοσμικού ρευστού:

$$\delta Q \equiv TdS = dE + PdV = 0.$$

### 1.1.5 Καταστατική Εξίσωση

Μέχρι στιγμής έχουμε εισαγάγει δύο ανεξάρτητες εξισώσεις που περιγράφουν τη διαστολή του Σύμπαντος: Την εξίσωση Friedmann (1.12) ή την (1.21), την εξίσωση συνέχειας (1.15) ή αντί αυτής την (1.23) και την εξίσωση της επιτάχυνσης (1.17) ή την (1.22). Ως εκ τούτου, έχουμε ένα σύστημα δύο ανεξάρτητων εξισώσεων με τρεις άγνωστες ποσότητες, τις  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  και  $P(t)$ . Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος χρειαζόμαστε ακόμα μια εξίσωση, π.χ. την καταστατική εξίσωση που δίνει τη σχέση μεταξύ της πίεσης  $P(t)$  και της πυκνότητας  $\rho(t)$ .

Σε γενικές γραμμές, οι καταστατικές εξισώσεις στη φύση μπορεί να είναι εξαιρετικά περίπλοκες. Ωστόσο, λόγω του γεγονότος ότι στην Κοσμολογία έχουμε να αντιμετωπίσουμε αραιά ρευστά, οι καταστατικές εξισώσεις μπορούν να αντιμετωπιστούν ως

βαροτροπικές, δηλαδή γραμμικές σχέσεις μεταξύ της πίεσης  $P$  και της πυκνότητας  $\rho$ :

$$P = w\rho \quad (1.25)$$

όπου  $w$  είναι μια αδιάστατη ποσότητα που ονομάζεται *παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης*. Η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης έχει διαφορετική τιμή για κάθε είδος κοσμικού ρευστού και με δεδομένο το γεγονός ότι τα συστατικά του Σύμπαντος δεν αλληλεπιδρούν το ένα με το άλλο, η συνολική πίεση  $P$  του κοσμικού ρευστού μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα της πίεσης των συνιστωσών του ρευστού:

$$P = \sum_i w_i \rho_i \quad (1.26)$$

όπου ο δείκτης  $i$  χαρακτηρίζει κάθε διαφορετική συνιστώσα του κοσμικού ρευστού. Ομοίως για την πυκνότητα του κοσμικού ρευστού έχουμε:

$$\rho = \sum_i \rho_i . \quad (1.27)$$

Οι δυνατές τιμές της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης  $w_i$  κάθε συστατικού και η σημασία τους για την κοσμική εξέλιξη αναλύονται με λεπτομέρεια παρακάτω.

#### 1.1.5.1 Θετικές τιμές της παραμέτρου της Καταστατικής Εξίσωσης

Ένα αστροφυσικό ρευστό σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας περιγράφεται από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών ρευστών<sup>2</sup>:

$$P_i = \frac{\rho_i k_B T}{\mu c^2} \quad (1.28)$$

όπου  $\mu$  είναι η μέση μάζα των σωματιδίων και  $k_B$  είναι η σταθερά του Boltzmann. Για τη θερμοκρασία  $T$ , είναι γνωστό επίσης ότι:

$$3k_B T = \mu u_\mu^2 , \quad (1.29)$$

<sup>2</sup>Ο παρανομαστής  $\mu c^2$  εισέρχεται στην (1.28) προκειμένου η πίεση και η πυκνότητα να εκφράζονται στο ίδιο σύστημα μονάδων όπως στις προηγούμενες παραγράφους.

όπου  $u_\mu$  είναι η μέση ταχύτητα των σωματιδίων. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.25), (1.28) και (1.29), η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης  $w_i$  ικανοποιεί τη σχέση  $w_i = \frac{u_\mu^2}{3c^2}$ .

Η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης  $w_i$  δεν μπορεί να πάρει αυθαίρετες τιμές. Όντως, λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της ταχύτητας του ήχου:

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} ,$$

έχουμε  $c_s^2 = c^2 w_i$  ή  $w_i = (\frac{c_s}{c})^2$ , οπότε οι τιμές της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης  $w_i$  περιορίζονται στο διάστημα:

$$w_i \leq 1 .$$

Για παράδειγμα, για την παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στην ψυχρή σκοτεινή ύλη,  $w_m$ , έχουμε  $u_\mu^2 \ll c^2$ , έτσι  $w_m = 0$  και ως εκ τούτου η πίεση που αντιστοιχεί στην ψυχρή σκοτεινή ύλη είναι  $P_m = 0$ . Για ένα ρευστό με σχετικιστικά ( $u_\mu \sim c$ ) χωρίς μάζα σωματίδια, όπως τα φωτόνια, η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης είναι  $w_r = \frac{1}{3}$  και ως εκ τούτου  $P_r = \frac{1}{3}\rho_r$ . Για οποιοδήποτε άλλο ρευστό για το οποίο τα σωματίδιά του έχουν ταχύτητες:  $0 \leq u_\mu^2 < c^2$ , παίρνουμε  $0 \leq w_i < \frac{1}{3}$ .

### 1.1.5.2 Αρνητικές τιμές της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης

Έστω υποθετικό κοσμικό ρευστό του οποίου η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης ικανοποιεί τη σχέση  $w_i < 0$ . Σε αυτή την περίπτωση, για συγκεκριμένες αρνητικές τιμές της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης  $w_i$ , μπορούμε να έχουμε επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος. Πράγματι, αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.25) στην (1.17) έχουμε ότι:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1 + 3w) .$$

Επιταχυνόμενη διαστολή (δηλαδή  $\ddot{a} > 0$ ), έχουμε εφόσον:

$$1 + 3w < 0 \Rightarrow w < -1/3 .$$

### 1.1.5.3 Σκοτεινή Ενέργεια

Σήμερα, εξαιρετικής ακριβείας παρατηρήσεις και η στατιστική ανάλυση των διαφόρων κοσμολογικών δεδομένων (SNIa, CMB, BAOs, Hubble Telescope κ.ά.), συγκλίνουν προς το συμπέρασμα ότι ζούμε σε ένα χωρικά επίπεδο Σύμπαν που αποτελείται από  $\sim 4\%$  βαρυονική ύλη,  $\sim 26\%$  σκοτεινή ύλη και  $\sim 70\%$  κάποιο είδος σκοτεινής ενέργειας η οποία είναι απαραίτητη προκειμένου να εξηγηθεί η επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος ([18], [19], [20], [16], [21], [14], [15]).

Στην ‘εποχή της ύλης’ θεωρούμε για την ύλη (βαρυονική ή σκοτεινή) το μοντέλο ‘σκόνης’ για το οποίο έχουμε  $P_m = w_m = 0$ . Τότε, το μόνο στοιχείο που συμβάλλει στη συνολική πίεση του κοσμικού ρευστού είναι αυτό της σκοτεινής ενέργειας, με παράμετρο καταστατικής εξίσωσης  $w = w_{DE}$ , πυκνότητα  $\rho_{DE}$  και πίεση  $P_{DE}$ . Η συνολική πίεση του κοσμικού ρευστού είναι:

$$P = P_m + P_{DE} = w_{DE}\rho_{DE} .$$

Ο προσδιορισμός της τιμής και της χρονικής συμπεριφοράς της παραμέτρου  $w_{DE}$  είναι ένα από τα πιο σημαντικά ανοικτά ερωτήματα για την Κοσμολογία, δεδομένου ότι περικλείει σημαντικές φυσικές πληροφορίες σχετικά με τη φύση της σκοτεινής ενέργειας και ως εκ τούτου, σχετικά με την κοσμική επιτάχυνση του Σύμπαντος. Παρά το γεγονός ότι οι περισσότερες παρατηρήσεις συγκλίνουν ως προς ένα κοινά αποδεκτό μοντέλο σχετικά με το ποια είναι τα συστατικά του Σύμπαντος, υπάρχουν διαφορετικές απόψεις σχετικά με τον πιθανό φυσικό μηχανισμό ή τη φύση της σκοτεινής ενέργειας που είναι υπεύθυνη για την κοσμική επιτάχυνση. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζουμε εν συντομία τα πιο ευρέως γνωστά μοντέλα που είναι υποψήφια για τη συνιστώσα της σκοτεινής ενέργειας του Σύμπαντος.

#### Κοσμολογική Σταθερά (Ενέργεια του Κενού)

Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι η περίπτωση όπου  $w = w_\Lambda = -1$ , κάτι το οποίο σημαίνει ότι  $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$  (μοντέλο της κοσμολογικής σταθεράς, *cosmological constant*). Η κοσμολογική σταθερά η οποία συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα  $\Lambda$  εισήχθη για πρώτη φορά από τον Άλμπερτ Αϊνστάιν στην προσπάθειά του να εξηγήσει την αντίληψη της εποχής του, ότι δηλαδή ζούμε σε ένα στατικό Σύμπαν. Πράγματι, σε ένα Σύμπαν που περιέχει μόνο ύλη με πυκνότητα  $\rho_m$ , το βαρυτικό δυναμικό θα είναι  $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_m$ . Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $\ddot{a} = -\nabla\Phi$ . Για ένα στατικό Σύμπαν θα έπρεπε να έχουμε ότι  $\ddot{a} = 0$ , κάτι που θα σήμαινε ότι  $\Phi = const$  και

συνεπώς  $\rho_m = 0$ . Έτσι, ο Αϊνστάιν εισήγαγε την κοσμολογική σταθερά ώστε να παραγάγει ένα μοντέλο στατικού Σύμπαντος κάτω από ασταθή ισορροπία με  $\rho_m \neq 0$ . Ωστόσο, η ιδέα αυτή εγκαταλείφθηκε, όταν βρέθηκε παρατηρησιακά η διαστολή του Σύμπαντος. Σήμερα, η ιδέα της κοσμολογικής σταθεράς μπορεί να θεωρηθεί είτε ως ένα επιπλέον ρευστό με πυκνότητα  $\rho_\Lambda$  ή ως μία τροποποίηση του νόμου της βαρύτητας χάρη στην οποία έχουμε επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος. Παρά το γεγονός ότι η κοσμολογική σταθερά είναι η απλούστερη υποψήφια για τη σκοτεινή ενέργεια και είναι συνεπής με τις τρέχουσες παρατηρήσεις (μπορεί να εξηγήσει έως κάποιο βαθμό την παρούσα κοσμική επιτάχυνση), συναντά μερικά σοβαρά θεωρητικά προβλήματα:

1. Το πρόβλημα της Κοσμολογικής Σταθεράς ή αλλιώς το πρόβλημα της 'λεπτομερούς ρύθμισης' (*fine tuning*)

Υπάρχει ασυμφωνία μεταξύ της παρατηρούμενης τωρινής τιμής της κοσμολογικής σταθεράς και της θεωρητικής τιμής που προβλέπεται από την Κβαντική Θεωρία Πεδίου (Quantum Field Theory, QFT). Στην QFT η παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς οφείλεται στις κβαντικές διαταραχές του κενού. Η τιμή αυτή είναι περίπου:  $\rho_\Lambda/8\pi G \approx 10^{71} GeV^4$  ενώ η παρατηρούμενη τιμή είναι  $\rho_\Lambda/8\pi G \approx 10^{-47} GeV^4$ . Αυτό κάνει μια διαφορά πάνω από 100 τάξεις μεγέθους.



## 2. Κοσμική Σύμπτωση

Είναι το ζήτημα του για ποιο λόγο τυχαίνει η πυκνότητα της ύλης και η πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους στη σημερινή εποχή, δεδομένου ότι η πυκνότητα της ύλης εξελίσσεται με το χρόνο, και είναι πολύ διαφορετική από την πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας τόσο στο παρελθόν όσο και στο μέλλον.

Προκειμένου να ξεπεραστούν τα προαναφερθέντα εμπόδια, έχουν προταθεί αρκετά μοντέλα έτσι ώστε να εξηγηθεί η επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος αλλάζοντας τη βασική παραδοχή ως προς το αίτιο της επιταχυνόμενης διαστολής. Τα μοντέλα αυτά κατατάσσονται κυρίως σε τρεις κατηγορίες: τα μοντέλα βαθμωτών πεδίων, που υποθέτουν μια επιπλέον συνιστώσα του κοσμικού ρευστού, τα τροποποιημένα μοντέλα βαρύτητας που μεταβάλλουν το νόμο της βαρύτητας, και τις θεωρίες που υποθέτουν ένα χωρόχρονο επιπλέον διαστάσεων, γνωστό ως *κόσμος βρανών* (braneworlds). Στα μοντέλα που προκύπτουν θα αναφερόμαστε στη συνέχεια ακολουθώντας την εξής ονοματολογία:

### Μοντέλα Βαθμωτών Πεδίων

#### 1. Πεμπτουσία

Η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης  $w$  έχει αρνητική τιμή με  $-1 < w < -\frac{1}{3}$  ([22], [23], [24]).

#### 2. *The ghost field of phantom*

Το μοντέλο *ghost field of phantom* [25] ( $w < -1$ ) προτάθηκε λόγω του ότι οι παρατηρήσεις δείχνουν μία ελαφριά προτίμηση σε αρνητικές τιμές μικρότερες του  $-1$  για την κοσμολογική σταθερά.

#### 3. *Quintom*

Τα μοντέλα *quintom* έχουν σταθερή τιμή για την κοσμολογική σταθερά  $w$  με  $w < -\frac{1}{3}$  [26].

#### 4. *k-essence*

Τα μοντέλα *k-essence* έχουν έναν μη κανονικό κινητικό όρο βαθμωτού πεδίου (βλ. για παράδειγμα [27], [28]).

5. Μοντέλα αερίου τύπου *Chaplygin*

Η καταστατική εξίσωση δεν έχει τη συνήθη μορφή, αλλά είναι της μορφής  $P = -\frac{A}{\rho^a}$ , όπου  $A$  είναι μία θετική σταθερά και  $0 \leq a \leq 1$  [29].

6. Χρονοεξαρτώμενο  $\Lambda$ 

Σε αυτό το μοντέλο, η κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$  είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου,  $\Lambda(t)$  ([30], [31]).

7. Μοντέλο *Chevallier-Polarski-Linder (CPL)*

Οι Chevallier, Polarski, Linder ([32], [33]) εισήγαγαν μία χρονοεξαρτώμενη παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης τέτοια ώστε:  $P_{DE} = w(a)\rho_{DE}$ . Συγκεκριμένα, η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης είναι ένα ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξεως γύρω από το σήμερα,  $a_0 = 1$ , οπότε  $w(a) = w_0 + w_1(1 - a)$  με τα  $w_0, w_1$  να είναι σταθερές. Το  $w_0$  είναι η τωρινή τιμή της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης και το  $w_1$  είναι η πρώτη παράγωγος του  $w$  ως προς τον παράγοντα κλίμακας  $a$ .

*Εναλλακτικά μοντέλα Βαρύτητας*

Προκειμένου να ερμηνευθεί η επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος, αντί της προθήκης κάποιας συνιστώσας του κοσμικού ρευστού, π.χ. ενός βαθμωτού πεδίου, στο δεξιό μέλος των εξισώσεων του Αϊνστάιν (εξισώσεις (1.20)), μπορούμε να θεωρήσουμε τροποποιήσεις στο αριστερό μέλος της ίδιας εξίσωσης, δηλαδή στο νόμο της βαρύτητας. Μια τέτοια τροποποίηση μπορεί να αποδοθεί σε μια χρονικά μεταβαλλόμενη ‘ενεργός σταθερά’  $G_{\text{eff}}$  της βαρύτητας, η οποία υποκαθιστά τη σταθερά του Νεύτωνα,  $G$ . Συγκεκριμένα, θέτουμε  $G_{\text{eff}} = GQ(a)$ , όπου  $Q(a)$  είναι μία χρονοεξαρτώμενη εξίσωση. Ως παράδειγμα, μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει τις  $f(R)$  θεωρίες οι οποίες είναι βαθμωτανυστικές θεωρίες που εμφανίζονται ως χαμηλής ενέργειας όρια των θεωριών των χορδών και άλλων εναλλακτικών θεωριών βαρύτητας.

*Μοντέλα Braneworld*

Ένα άλλο πιθανό σενάριο για την επιτάχυνση παρέχεται από τις θεωρίες με επιπλέον διαστάσεις γνωστές ως θεωρίες των κοσμικών βρανών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο τεσσάρων διαστάσεων χωροχρόνος μας, βράνη (brane), εμβαπτίζεται σε έναν υψηλότερων διαστάσεων χωροχρόνο. Σε αυτές τις υποθέσεις, όλα τα πεδία της ύλης

περιορίζονται στη βράνη ενώ η βαρύτητα είναι μια καθολική αλληλεπίδραση που διαδίδεται στο λεγόμενο χώρο *αντι-de Sitter*. Παραδείγματα τέτοιων μοντέλων έδωσαν οι Randall-Sundrum [34], και οι Dvali-Gabadadze-Porrati (μοντέλο DGP, [35]).

### 1.1.6 Σύμπαν με μία συνιστώσα και με πολλαπλές συνιστώσες του κοσμικού ρευστού

Η εξίσωση συνέχειας (1.15) ισχύει ξεχωριστά για κάθε συνιστώσα του Σύμπαντος. Υποθέτοντας ένα ρευστό με μία συνιστώσα και σταθερή παράμετρο καταστατικής εξίσωσης  $w$ , η εξίσωση συνέχειας δίνει:

$$\rho_i \propto a^{-3(1+w_i)} .$$

Για την ψυχρή σκοτεινή ύλη ( $w_m = 0$ ), τη σκοτεινή ενέργεια στην περίπτωση της κοσμολογικής σταθεράς ( $w_\Lambda = -1$ ) και για την ακτινοβολία ( $w_r = 1/3$ ) έχουμε τις αντίστοιχες πυκνότητες:

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}, \quad \rho_\Lambda = \text{const}, \quad \rho_r = \rho_{r0} a^{-4} \quad (1.30)$$

όπου  $\rho_{m0}$ ,  $\rho_{r0}$  είναι οι σημερινές τιμές της πυκνότητας της ύλης και της ακτινοβολίας αντίστοιχα. Για την πιο γενική περίπτωση μίας χρονοεξαρτώμενης παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης, δηλαδή  $w = w(a)$ , που αντιστοιχεί στη σκοτεινή ενέργεια, βρίσκουμε:

$$\rho_i(a) = \rho_{i0} \exp \left( -3 \int_0^a \frac{da}{a} [1 + w(a)] \right) .$$

όπου  $\rho_{i0}$  η σημερινή τιμή της πυκνότητας που αντιστοιχεί στη σκοτεινή ενέργεια. Η ιστορία της διαστολής του Σύμπαντος μπορεί να συναχθεί αναλυτικά αντικαθιστώντας την καταστατική εξίσωση και τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση Friedmann (1.12) και, στη συνέχεια, λύνοντας ως προς το συντελεστή κλίμακας  $a(t)$ .

Μπορούμε επίσης να εξαγάγουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις για την αδιάστατη παράμετρο πυκνότητας  $\Omega(a)$  σε συνάρτηση με τον παράγοντα κλίμακας για κάθε συνιστώσα του Σύμπαντος. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.13), (1.14) και (1.30) έχουμε ότι:

$$\Omega_m(a) = \frac{\Omega_{m0} a^{-3}}{E^2(a)} \quad (1.31)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1: Περίληψη των λύσεων της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης  $w$ , της πυκνότητας  $\rho(a)$ , του παράγοντα κλίμακας  $a(t)$  και της παραμέτρου Hubble  $H$  για ένα επίπεδο Σύμπαν μιας συνιστώσας.

	$w$	$\rho(a)$	$a(t)$	$H$
εποχή της ύλης	0	$a^{-3}$	$t^{2/3}$	$t^{-1} \propto a^{-3/2}$
εποχή της ακτινοβολίας	1/3	$a^{-4}$	$t^{1/2}$	$t^{-1} \propto a^{-2}$
σκοτεινή ενέργεια ( $\Lambda$ )	-1	$const$	$e^{Ht}$	$const$
σκοτεινή ύλη	$const \neq -1$	$a^{-3(1+w)}$	$t^{2/(3(1+w))}$	$t^{-1} \propto a^{-3(1+w)/2}$

$$\Omega_r(a) = \frac{\Omega_{r0}a^{-4}}{E^2(a)} \quad (1.32)$$

$$\Omega_\Lambda(a) = \frac{\Omega_\Lambda}{E^2(a)} \quad (1.33)$$

όπου:

$$E(a) \equiv \frac{H(a)}{H_0} \quad (1.34)$$

είναι η κανονικοποιημένη συνάρτηση Hubble και  $\Omega_{m0}$ ,  $\Omega_{r0}$ ,  $\Omega_\Lambda$  είναι οι σημερινές τιμές των αδιάστατων παραμέτρων πυκνότητας που αντιστοιχούν στην ύλη, στην ακτινοβολία και στη σκοτεινή ενέργεια (στην περίπτωση της κοσμολογικής σταθεράς) αντίστοιχα. Στον πίνακα (1.1) συνοψίζουμε τις λύσεις για την παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης  $w$ , την πυκνότητα  $\rho(a)$ , τον παράγοντα κλίμακας  $a(t)$  και την παράμετρο Hubble  $H$  για ένα επίπεδο Σύμπαν μιας συνιστώσας.

Στη γενική περίπτωση ενός μείγματος ρευστών που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, θα πρέπει κάποιος να λάβει υπόψη του τις εξισώσεις (1.26) και (1.27), δηλαδή ότι η συνολική πίεση  $P$  και η συνολική πυκνότητα  $\rho$  του κοσμικού ρευστού είναι τα αθροίσματα των επιμέρους συνιστωσών της πίεσης και της πυκνότητας αντίστοιχα. Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση Friedmann (εξίσωση (1.12)), γίνεται:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{H_0^2}{\rho_{c,0}}[\rho_{m0}a^{-3} + \rho_{r0}a^{-4} + \rho_{DE0}a^{-3(1+w)}] \quad (1.35)$$

ή

$$H^2 = H_0^2[\Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{DE0}a^{-3(1+w)}] = H_0^2E^2(a)$$

και τελικά:

$$H_0t = \int_0^a \frac{da}{(\Omega_{m0}a^{-1} + \Omega_{r0}a^{-2} + \Omega_{DE0}a^{-1-3w})^{1/2}} \quad (1.36)$$

όπου  $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{DE0} = 1$ , με  $\Omega_{DE0}$  τη σημερινή τιμή της αδιάστατης πυκνότητας που αντιστοιχεί στη σκοτεινή ενέργεια. Να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα (1.36) είναι

αρκετά περίπλοκο. Παρόμοιες δυσκολίες μπορεί κανείς να συναντήσει και στις άλλες εξισώσεις Friedmann. Ωστόσο, τόσο το τελευταίο ολοκλήρωμα όσο και οι εξισώσεις Friedmann μπορούν εύκολα να λυθούν αριθμητικά αν κάποιος γνωρίζει τις τιμές των  $\Omega_{m0}$ ,  $\Omega_{r0}$ ,  $\Omega_{DE0}$  και  $w$ , εάν εστιάσουμε τη μελέτη μας σε μια συγκεκριμένη εποχή. Για παράδειγμα, θεωρούμε με πολύ καλή ακρίβεια ότι στο μακρινό παρελθόν η κυρίαρχη συνιστώσα ήταν η ακτινοβολία, στη συνέχεια, ακολούθησε η εποχή της κυριαρχίας της ύλης κ.λ.π. Τα πρόσφατα δεδομένα δείχνουν ότι είμαστε στο στάδιο όπου η σκοτεινή ενέργεια επικρατεί έναντι όλων των υπολοίπων συνιστωσών με ποσοστό περίπου 69,2% [36], με τον πιο πιθανό υποψήφιο για την περιγραφή της, το μοντέλο της κοσμολογικής σταθεράς. Η σημερινή πυκνότητα της ύλης (βαρυονική και μη) είναι σε ποσοστό 30,8% ενώ η πυκνότητα της ακτινοβολίας είναι σχεδόν μηδενική, έτσι ώστε να μπορεί να αγνοηθεί [14].

### 1.1.7 Μοντέλα Χρονοεξαρτώμενης Παραμέτρου της Καταστατικής Εξίσωσης

Όπως είδαμε παραπάνω, μια καλή πρώτη προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε μία σταθερή παράμετρο καταστατικής εξίσωσης. Ωστόσο, λόγω της απουσίας μιας επαρκώς θεμελιωμένης θεωρίας σχετικά με τη φύση της σκοτεινής ενέργειας (δηλαδή αν πρόκειται για κοσμολογική σταθερά, βαθμωτό πεδίο που έχει μία χρονικά μεταβαλλόμενη παράμετρο καταστατικής εξίσωσης κ.λ.π.) έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία μερικές απλές παραμετροποιήσεις της παραμέτρου  $w$  ως μεταβλητής στο χρόνο. Μερικές από τις πιο γνωστές παραμετροποιήσεις περιγράφονται στις επόμενες παραγράφους:

1. Μία από τις πιο κοινές παραμετροποιήσεις που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία είναι η εξής (βλ. π.χ. [37]):

$$w(z) = w_0 + w_1 f(z)$$

όπου  $w_0$  και  $w_1$  είναι σταθερές και  $f(z)$  είναι μία συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης. Τέτοιου είδους μοντέλα συμπεριλαμβάνουν την περίπτωση της κοσμολογικής σταθεράς με  $w_0 = -1$  και  $w_1 = 0$  και την περίπτωση μίας σταθερής παραμέτρου καταστατικής εξίσωσης με  $w_0 = w$  και  $w_1 = 0$ . Ορισμένες απλές δυνατές μορφές για τη συνάρτηση  $f(z)$  είναι:

- (α')  $f(z) = 0$ , κάτι που σημαίνει ότι η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης είναι σταθερή.

- (β')  $f(z) = z$ , έτσι ώστε η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης να είναι μια γραμμική συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης. Η περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξεως της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης ([38], [39]) όπου  $w_0$  και  $w_1 = w'$  είναι η σημερινή τιμή και η πρώτη παράγωγος της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στη σκοτεινή ενέργεια αντίστοιχα. Το μοντέλο αυτό αντιμετώπισε μερικά σοβαρά προβλήματα. Συγκεκριμένα παρουσιάζει αποκλίνουσα συμπεριφορά σε μεγάλες ερυθρομεταθέσεις.
2. Το πρόβλημα της περίπτωσης 1β' ξεπεράστηκε από το μοντέλο Chevallier-Polarski-Linder (CPL), το οποίο είναι ένα ανάπτυγμα Taylor γύρω από τη σημερινή τιμή του παράγοντα κλίμακας ( $a_0 = 1$ ):  $f(z) = z/(1+z)$  (βλ. [40] και εκεί αναφορές, [32], [33], [41], [42]). Αυτό το μοντέλο συμπεριφέρεται καλά σε υψηλές ερυθρομετατοπίσεις και χρησιμεύει ως μια εξαιρετική προσέγγιση για τα βαθμωτά μοντέλα σκοτεινής ενέργειας αργής κύλισης (slow roll scalar field models).
  3. Λογαριθμικό ανάπτυγμα της ερυθρομετάθεσης  $z$  [43].
  4. Η επεκταμένη παραμετροποίηση CPL, στην οποία ο δείκτης της δύναμης του παρονομαστή στο μοντέλο CPL αλλάζει από 1 σε 2 [44].
  5. Παραμετροποιήσεις με παραπάνω από δύο παραμέτρους όπως είναι τα μοντέλα της *ιδιόμορφης προσέγγισης* (kink approach) ([45], [46], [47]).
  6. Παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης για μοντέλα σκοτεινής ενέργειας η οποία εξαρτάται από τον παράγοντα κλίμακας: Η περίπτωση αυτή αναλύεται διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2.

## 1.2 Η εξέλιξη των διαταραχών της ύλης

Ένας από τους κύριους στόχους της Κοσμολογίας είναι να εξηγήσει το σχηματισμό των δομών στο Σύμπαν όπως για παράδειγμα οι γαλαξίες, τα σμήνη και τα υπερσμήνη των γαλαξιών. Μέχρι στιγμής έχουμε αντιμετωπίσει το Σύμπαν ως απολύτως ομογενές. Ωστόσο, αυτό ισχύει μόνο σε αρκετά μεγάλες κλίμακες. Ανομοιογένειες της πυκνότητας της ύλης σε μικρές κλίμακες είναι αναγκαίες ώστε να δημιουργηθούν οι παρατηρούμενες δομές. Ειδικά, θεωρούμε ότι οι

διαταραχές πυκνότητας στο πρώιμο Σύμπαν είναι ο ‘σπόρος’ που οδήγησε στη δημιουργία των παρατηρούμενων δομών σήμερα.

Οι διαταραχές πυκνότητας της ύλης  $\delta$  ορίζονται από τη σχέση:

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho_m} = \frac{\rho(r, t) - \rho_m(t)}{\rho_m(t)} \quad (1.37)$$

όπου  $\rho(r, t)$  είναι η πυκνότητα μέσα στον όγκο όπου η διαταραχή λαμβάνει χώρα και  $\rho_m(t) = \rho_{m0}a^{-3}$  είναι η πυκνότητα της ομογενούς ύλης.

Αρχικές μικρές διακυμάνσεις στην πυκνότητα του κοσμικού ρευστού ( $\delta \ll 1$ ) είναι δυνατόν να ενισχυθούν μέσω της λεγόμενης βαρυτικής αστάθειας Jeans. Ο Jeans στις αρχές του 1900 έδειξε ότι ένα ομοιογενές και ισοτροπικό ρευστό είναι ασταθές σε μικρές διαταραχές στην πυκνότητά του. Ως αποτέλεσμα, οι ανομοιογένειες στην πυκνότητα αυξάνονται με το χρόνο, όταν η πίεση είναι μικρή σε σύγκριση με την δύναμη της βαρύτητας. Μικρές διαταραχές αυξάνουν αργά με την πάροδο του χρόνου, έως ότου γίνουν αρκετά ισχυρές για να διαχωριστούν από τη διαστολή του υποβάθρου και έτσι να καταρρεύσουν σε βαρυτικά συμπαγή συστήματα όπως είναι οι γαλαξίες και τα σμήνη των γαλαξιών.

Στις επόμενες παραγράφους δίνουμε τις πιο βασικές σχέσεις αναφορικά προς την εξέλιξη των διαταραχών πυκνότητας στο νεαρό Σύμπαν, κυρίως στο πλαίσιο της γραμμικής θεωρίας διαταραχών, που εφαρμόζεται εφόσον  $\delta \ll 1$ . Επίσης, δίνουμε μερικούς βασικούς ορισμούς που χρησιμεύουν στο χαρακτηρισμό των διαταραχών πυκνότητας και τους οποίους χρησιμοποιούμε στα επόμενα κεφάλαια.

### 1.2.1 Εξισώσεις της Δυναμικής Ρευστών

Έστω ένα μη σχετικιστικό ρευστό με πυκνότητα μάζας  $\rho(\vec{r}, t)$ , πίεση  $P \ll \rho$  και πεδίο ταχυτήτων  $u(\vec{r}, t)$  σε ένα βαρυτικό δυναμικό  $\Phi$  (στο Νευτώνειο όριο), όπου  $\vec{r}$  το διάνυσμα της θέσης ενός στοιχείου του ρευστού ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς και  $t$  ο χρόνος. Οι εξισώσεις της κίνησης που περιγράφουν το ρευστό είναι οι ακόλουθες βασικές εξισώσεις της ρευστοδυναμικής:

(α) Η *Εξίσωση Συνέχειας* η οποία περιγράφει τη διατήρηση της μάζας:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla_r[\rho(\vec{r}, t)\vec{u}(\vec{r}, t)] = 0. \quad (1.38)$$

(β') Η Εξίσωση *Euler* που εκφράζει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$\frac{du}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{r}, t) \nabla_r \vec{u}(\vec{r}, t) = -\nabla_r \Phi - \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)} \nabla_r P . \quad (1.39)$$

Ο όρος της πίεσης στην (1.39) μπορεί να παραλειφθεί κατά την εποχή της ύλης, βλ. παράγραφο (1.1.5.1).

(γ') Η Εξίσωση *Poisson*:

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho(\vec{r}, t) . \quad (1.40)$$

Παρουσία κοσμολογικής σταθεράς, η (1.40) παίρνει τη μορφή:

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho(\vec{r}, t) - \Lambda . \quad (1.41)$$

## 1.2.2 Εξισώσεις Διαταραχών της Ρευστοδυναμικής

### 1.2.2.1 Εξίσωση συνέχειας

Από τον ορισμό των διαταραχών πυκνότητας, εξίσωση (1.37), η πυκνότητα της ύλης γράφεται ως:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_m(t) [1 + \delta(\vec{r}, t)] . \quad (1.42)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (1.11), (1.42) στην εξίσωση συνέχειας, κρατώντας όρους μέχρι πρώτης τάξεως ως προς  $\delta$ , και λαμβάνοντας υπόψη ότι σε ένα διαστελλόμενο Σύμπαν έχουμε  $\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}(t)$  και  $\dot{\rho} = -3\rho H(t)$ , βρίσκουμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial \delta(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla_r \vec{v}(\vec{r}, t) + H(t) \vec{r} \nabla_r \delta(\vec{r}, t) = 0 . \quad (1.43)$$

Η εξίσωση (1.43) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στο συνκινούμενο σύστημα συντεταγμένων θέτοντας:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x \equiv \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r + H \vec{x} \nabla \quad (1.44)$$

και

$$\nabla_x \equiv \nabla = a \nabla_r . \quad (1.45)$$

Η (1.43) παίρνει τότε τη μορφή:

$$\frac{\partial \delta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla_x \vec{v}(\vec{x}, t) = 0 . \quad (1.46)$$



### 1.2.2.2 Εξίσωση Poisson

Προκειμένου να πάρουμε την εξίσωση Poisson για τις διαταραχές, ξαναγράφουμε την αριστερή πλευρά της εξίσωσης (1.40) σε σφαιρικές συντεταγμένες και χρησιμοποιούμε ταυτόχρονα τη σχέση (1.42):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G [\rho_m (1 + \delta(\vec{r}, t))] - \Lambda . \quad (1.47)$$

Επειτα από πράξεις, βρίσκουμε ότι:

$$\Phi = \left( \frac{4\pi G \rho_m}{3} + \frac{4\pi G \rho_m \delta}{3} - \frac{\Lambda}{3} \right) \frac{r^2}{2}$$

ή

$$\Phi = \varphi(\vec{x}, t) + \frac{2\pi G}{3} \rho_m a^2 x^2 - \frac{\Lambda}{6} a^2 x^2 . \quad (1.48)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η εξίσωση του δυναμικού στο συνκινούμενο σύστημα συντεταγμένων, με τη συνάρτηση  $\varphi(\vec{x}, t)$  να περικλείει όλες τις πληροφορίες σχετικά με το πεδίο διαταραχών.

Εισάγοντας την εξίσωση (1.48) στην εξίσωση (1.40) και κάνοντας τη μετάβαση από το σύστημα ηρεμίας στο συνκινούμενο σύστημα, έχουμε την εξίσωση Poisson για τις διαταραχές στο συνκινούμενο σύστημα:

$$\nabla_x^2 \varphi(\vec{x}, t) = 4\pi G \rho_m \delta a^2 . \quad (1.49)$$

### 1.2.2.3 Εξίσωση Euler

Προκειμένου να εξαγάγουμε την εξίσωση Euler για τις διαταραχές στο συνκινούμενο σύστημα, εισάγουμε την εξίσωση (1.11) στην εξίσωση (1.39) και επίσης χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (1.44) και (1.45). Χρησιμοποιώντας επίσης τη σχέση (1.11) και κρατώντας όρους πρώτης τάξεως ως προς  $\vec{v}$  και  $\delta$ , βρίσκουμε την εξίσωση:

$$\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\frac{1}{a} \nabla_x \varphi . \quad (1.50)$$

### 1.2.3 Διαφορική Εξίσωση των διαταραχών της ύλης

#### 1.2.3.1 Γραμμική Θεωρία Διαταραχών

Οι εξισώσεις (1.46), (1.49) και (1.50) είναι το σύνολο των εξισώσεων της υδροδυναμικής για τις διαταραχές που περιγράφουν την εξέλιξη της συνολικής ύλης στο Σύμπαν. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.46) και (1.50) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla_x \left[ -\frac{1}{a} \nabla_x \varphi - \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x \right] \frac{a}{\dot{a}} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{1}{a} \nabla_x \left[ \frac{1}{a} \nabla_x \varphi + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x \right] &= 0 \Rightarrow \\ H \frac{\partial \delta(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{1}{a} \nabla_x \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x &= \frac{1}{a^2} \nabla_x^2 \varphi . \end{aligned} \quad (1.51)$$

Επιπλέον:

$$\nabla_x \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_x \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \delta}{\partial t} a \right) = -\dot{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} ,$$

έτσι η εξίσωση (1.51) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\nabla_x^2 \varphi}{a^2} .$$

Τέλος, λόγω της (1.49), η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \rho_m \delta . \quad (1.52)$$

Η εξίσωση (1.52) είναι η διαφορική εξίσωση των διαταραχών της συνολικής ύλης με την προϋπόθεση ότι έχουμε ένα ιδανικό χωρίς πίεση ρευστό στο πλαίσιο της γραμμικής θεωρίας διαταραχών.

Μια άλλη χρήσιμη μορφή της εξίσωσης (1.52), μπορεί να ληφθεί αν αλλάξουμε τις μεταβλητές από το χρόνο  $t$  στον παράγοντα κλίμακας  $a(t)$ . Για το λόγο αυτό, πρέπει να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος των διαταραχών της ύλης σε σχέση με το χρόνο είναι αντίστοιχα:

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt} = Ha \frac{d\delta}{da} = Ha\delta' \quad (1.53)$$

και

$$\ddot{\delta} = \dot{a} \left( a\delta' \frac{dH}{da} + H\delta' + Ha\delta'' \right) . \quad (1.54)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (1.53), (1.54) στην εξίσωση (1.52), παίρνουμε:

$$\delta'' + \delta' \left( \frac{1}{H} \frac{dH}{da} + \frac{3}{a} \right) - \frac{4\pi G \rho_m \delta}{a^2} = 0. \quad (1.55)$$

Τώρα αν λάβουμε υπόψη μας τον ορισμό της κανονικοποιημένης εξίσωσης Hubble, εξίσωση (1.34), έχουμε:

$$\frac{d \ln E(a)}{da} = \frac{d \ln H(a)}{da}. \quad (1.56)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.12), (1.13), (1.31) και (1.34) για ένα επίπεδο Σύμπαν έχουμε ότι:

$$4\pi G \rho_m = \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_{m0} a^{-3}. \quad (1.57)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.56), (1.57) μαζί με την εξίσωση (1.55) βρίσκουμε τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης των διαταραχών της ύλης σε συνάρτηση με τον παράγοντα κλίμακας  $a(t)$ :

$$\delta'' + A(a)\delta' - B(a)\delta = 0, \quad (1.58)$$

όπου:

$$A(a) = \frac{d \ln E(a)}{da} + \frac{3}{a}$$

και

$$B(a) = \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m0}}{E^2(a) a^5}.$$

### 1.2.3.2 Εναλλακτικά Μοντέλα Βαρύτητας

Είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι η εξίσωση (1.58) έχει την ίδια μορφή όχι μόνο για κάθε μοντέλο σκοτεινής ενέργειας, αλλά και για εναλλακτικά μοντέλα βαρύτητας («Γεωμετρική Σκοτεινή Ενέργεια») (βλ. [48],[49], [50],[51], [52], [53], [54], [55]). Η μόνη διαφορά είναι ότι στα μοντέλα αυτά πρέπει να αντικαταστήσουμε τη σταθερά του Νεύτωνα  $G$  με την ενεργό παράμετρο του Νεύτωνα  $G_{\text{eff}}$  (βλ. παράγραφο (2.1) εξισώσεις (2.7)). Έπειτα από τα παραπάνω, η διαφορική εξίσωση των διαταραχών της ύλης σε εναλλακτικά μοντέλα βαρύτητας είναι η εξίσωση (1.58) με μόνη διαφορά ότι:

$$B(a) = \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m0} Q(a)}{E^2(a) a^5}.$$

Για κοσμολογικά μοντέλα που υπακούουν στη  $\Gamma\Theta\Sigma$  έχουμε ότι  $G = G_{\text{eff}}$  και  $Q(a) = 1$ , οπότε έχουμε ξανά την εξίσωση (1.58) η οποία είναι η συνήθης χρονικά εξελισσόμενη εξίσωση για τις διαταραχές της πυκνότητας της ύλης [56], ενώ στην περίπτωση των εναλλακτικών μοντέλων βαρύτητας ([48], [49], [51], [54], [55]) έχουμε ότι  $G_{\text{eff}} \neq G$  οπότε  $Q(a) \neq 1$ .

#### 1.2.4 Λύση της διαφορικής εξίσωσης διαταραχών και ο Γραμμικός Παράγοντας Αύξησης

Προκειμένου να λύσουμε την εξίσωση (1.52), θεωρούμε λύση της μορφής  $\delta(x, t) = \delta_0(x)D(t)$ , όπου  $D(t)$  μία συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από το χρόνο και ονομάζεται παράγοντας των διαταραχών πυκνότητας. Αν θέσουμε  $D(t_0) = 1$ , τότε  $\delta_0(x)$  είναι η τιμή του πεδίου διαταραχών πυκνότητας στο σημείο με συνκινούμενες συντεταγμένες  $x$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Αν θέσουμε λοιπόν την παραπάνω μορφή λύσης στην (1.52) έχουμε ότι:

$$\ddot{D} + 2H\dot{D} - 4\pi G\rho_m D = 0. \quad (1.59)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με εκείνα της παραγράφου (1.2.3.1) μπορούμε επίσης να γράψουμε την εξίσωση (1.59) ως συνάρτηση του παράγοντα κλίμακας  $a(t)$ :

$$D'' + D'\left(\frac{d\ln H}{da} + \frac{3}{a}\right) - \frac{4\pi G\rho_m D}{(aH)^2} = 0. \quad (1.60)$$

Λύσεις της εξίσωσης (1.60) έχουν δοθεί από τους [56] για τη  $\Lambda\text{CDM}$  κοσμολογία, ενώ αρκετές εργασίες έχουν επίσης εξαγάγει τη λύση  $D$  για μοντέλα σκοτεινής ενέργειας όπου  $w(z) = \text{σταθ}$ . (βλ. [57], [58], [59]), και για την κοσμολογία των βρανών [48]. Επίσης οι Linder & Cahn ([49], [51]) εξήγαγαν παρόμοιες εκφράσεις για τα ‘γεωμετρικά’ μοντέλα σκοτεινής ενέργειας στα οποία το βαθμωτό Ricci μεταβάλλεται με το χρόνο, καθώς και για τα μοντέλα με χρονικά μεταβαλλόμενη καταστατική εξίσωση, ενώ για το βαθμωτό ταυυστή και για τα  $f(R)$  μοντέλα η λύση παρέχεται από τους Gannouji et al. [55] και Tsujikawa et al. [54]. Στις επόμενες ενότητες, οι συναρτησιακές μορφές της λύσης  $D$  της εξίσωσης (1.60) παρουσιάζονται για τις εξής περιπτώσεις: για το Σύμπαν που αποτελείται από ένα μόνο συστατικό (αυτό της ύλης), για την περίπτωση της  $\Lambda$  κοσμολογίας (μοντέλο  $\Lambda\text{CDM}$ ), αλλά και για κάθε εναλλακτικό μοντέλο βαρύτητας, που είναι και η περίπτωση του ενδιαφέροντός μας.

### 1.2.4.1 Λύση στο Σύμπαν Einstein-de Sitter

Από την εποχή της αποδέσμευσης ( $z \simeq 1000$ ) έως και την εποχή της ερυθρομετάθεσης  $z \simeq 6$ , το Σύμπαν συμπεριφέρεται προσεγγιστικά ως ένα μοντέλο σκόνης, με  $\Lambda \simeq 0$ . Ένα τέτοιο Σύμπαν ονομάζεται Einstein de Sitter (EdS), και αποτελεί μία καλή αρχική προσέγγιση για την ποιοτική κατανόηση της εξέλιξης των διαταραχών πυκνότητας μετά την αποδέσμευση. Στο EdS Σύμπαν, η παράμετρος του Hubble είναι:

$$H = \frac{2}{3t},$$

ενώ η πυκνότητα είναι:

$$\rho_m = \frac{1}{6\pi G t^2},$$

οπότε η εξίσωση (1.52) γίνεται:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} = \frac{2}{3t^2}\delta. \quad (1.61)$$

Θεωρώντας λύση της μορφής  $\delta = ct^a$ , η εξίσωση (1.61) γίνεται:

$$3a^2 + a - 2 = 0$$

από όπου βρίσκουμε  $a = -1$  ή  $a = 2/3$ , δηλαδή έχουμε τις λύσεις:

$$D(t) = t^{2/3} \equiv D_+(t),$$

και

$$D(t) = t^{-1} \equiv D_-(t)$$

όπου οι  $D_+(t)$ ,  $D_-(t)$  ονομάζονται αύξων και φθίνων τύπος του παράγοντα των διαταραχών πυκνότητας  $D(t)$  αντίστοιχα. Η γενική λύση της εξίσωσης δίνεται ως επαλληλία των δύο ειδικών λύσεων. Ωστόσο, ο φθίνων τύπος  $D_-$  σβήνει αρκετά σύντομα, αφήνοντας μόνο τον αύξοντα τύπο στη λύση,  $D_+$ , ο οποίος ονομάζεται αλλιώς και παράγοντας αύξησης των διαταραχών της ύλης. Ως εκ τούτου, η λύση της διαφορικής εξίσωσης των διαταραχών της ύλης σε ένα EdS Σύμπαν είναι:

$$\delta(x, t) = A(x)D_+(t),$$

όπου η εξίσωση  $A(x)$  μπορεί να προσδιορισθεί από τις αρχικές τιμές της εξίσωσης των διαταραχών  $\delta(x, t)$ . Για παράδειγμα, μπορούμε να γράψουμε  $A = \tilde{A}/t_0^{2/3}$  όπου  $t_0$  είναι η σημερινή χρονική στιγμή και  $\tilde{A}$  είναι μία συνάρτηση της συνκινούμενης θέσης, οπότε:

$$\delta(x, t) = \tilde{A}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

ή, θέτοντας  $t_0 = 1$

$$\delta(x, t) = \tilde{A}a(t) \Leftrightarrow \delta(x, t) = \tilde{A}D(z)$$

με

$$D(z) = \frac{D_+(t)}{D_+(t_0)} = \frac{1}{1+z}. \quad (1.62)$$

#### 1.2.4.2 Λύση στο Σύμπαν de Sitter

Σε ένα Σύμπαν de Sitter το οποίο αποτελείται μόνο από σκοτεινή ενέργεια που οφείλεται στην κοσμολογική σταθερά, η πυκνότητα της ύλης είναι ίση με μηδέν,  $\rho_m = 0$ , οπότε η εξίσωση (1.52) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0. \quad (1.63)$$

Επιπλέον, η συνάρτηση Hubble είναι μία σταθερά, δηλαδή  $H^2 = \frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}$ . Η εξίσωση (1.63) γίνεται τότε διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές με λύση:

$$\delta(x, t) = A(x) + B(x)e^{-2Ht}.$$

#### 1.2.4.3 Λύση στο μοντέλο $\Lambda$ CDM

Στο μοντέλο  $\Lambda$ CDM, μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η παράμετρος Hubble ως συνάρτηση του χρόνου,  $H(t)$ , ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (1.59). Όντως, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.10), (1.15) και (1.17) και θέτοντας  $\rho_\Lambda = \text{σταθ}$ , καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\ddot{H} + 2H\dot{H} - 4\pi G \rho_m H = 0, \quad (1.64)$$

που είναι ίδια με τη διαφορική εξίσωση (1.59). Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, η δεύτερη ανεξάρτητη λύση της (1.59) γράφεται ως:

$$D_+(t) = cD_-(t) \int \frac{dt}{D_-^2(t)} \exp[-2 \int D_-(t)dt] ,$$

με  $D_-(t) = H(t)$ . Θέτουμε:

$$\int D_-(t)dt = \int H(t)dt = \int \frac{\dot{a}}{a} dt = \int \frac{da}{a} = \ln a(t) ,$$

$$\exp[-2 \int D_-(t)dt] = \frac{1}{a^2(t)}$$

και

$$D_+(t) = cD_-(t) \int \frac{dt}{a^2 H^2(t)} = cD_-(t) \int \frac{da}{a^3 H^3(t)}$$

αφού  $\dot{a} = \frac{da}{dt} = aH$ . Κάνοντας την αλλαγή των μεταβλητών από τον παράγοντα κλίμακας  $a$  στην ερυθρομετάθεση  $z$  σύμφωνα με τη σχέση:  $da = -\frac{1}{(1+z)^2} dz$  και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.34) παίρνουμε:

$$D_+(t) = c_1 E(z) \int \frac{(1+z)dz}{E^3(z)} .$$

Προκειμένου να βρούμε το συντελεστή  $c_1$  πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι σε μεγάλες ερυθρομεταθέσεις (και μέχρι την αποδέσμευση) εισερχόμαστε στην εποχή της ύλης οπότε η συνάρτηση  $D_+(t)$  δίνεται προσεγγιστικά από την εξίσωση (1.62), ενώ η κανονικοποιημένη συνάρτηση Hubble γίνεται:

$$E^2(a) = \Omega_{m0} a^{-3} = \Omega_{m0} (1+z)^3 .$$

Μετά από τα παραπάνω, έχουμε ότι:

$$\frac{1}{1+z} = c_1 \Omega_{m0}^{1/2} (1+z)^{3/2} \int_z^\infty \frac{(1+z)dz}{\Omega_{m0}^{3/2} (1+z)^{9/2}} \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{5}{2} \Omega_{m0}$$

οπότε ο παράγοντας αύξησης στην περίπτωση του μοντέλου  $\Lambda$ CDM είναι:

$$D_+(z) = \frac{5}{2} \Omega_{m0} E(z) \int_z^\infty \frac{1+z}{E^3(z)} dz . \quad (1.65)$$

#### 1.2.4.4 Λύση για οποιοδήποτε μοντέλο Σκοτεινής Ενέργειας

Μια χρήσιμη παραμετροποίηση των γραμμικών διαταραχών της ύλης για τα μοντέλα σκοτεινής ενέργειας είναι μέσω του ‘ρυθμού αύξησης της σηματοποίησης’  $f(a)$ . Η συνάρτηση  $f(a)$  ορίζεται από τον τύπο:

$$f(a) = \frac{d \ln \delta}{d \ln a} = \frac{d \ln D}{d \ln a} \simeq \Omega_m^\gamma(a), \quad (1.66)$$

όπου ο δείκτης  $\gamma$  ονομάζεται δείκτης αύξησης των διαταραχών, όπως προτάθηκε από τους Wang και Steinhardt [58] (βλ. επίσης [49], [48], [51], [60] και [57]).

Από την εξίσωση (1.66) μπορούμε να εξαγάγουμε τον παράγοντα αύξησης για οποιοδήποτε μοντέλο σκοτεινής ενέργειας. Όντως:

$$\begin{aligned} \frac{a}{D} \frac{dD}{da} = \Omega_m^\gamma(a) &\Leftrightarrow \int_1^D \frac{dD}{da} = \int_1^a \frac{da}{a} \Omega_m^\gamma \Leftrightarrow \\ D(a) &= e^{\int_1^a \frac{da}{a} \Omega_m^\gamma(a)}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Ισοδύναμα:

$$D(a) = a e^{\int_0^a (dx/x) [\Omega_m^\gamma(x) - 1]}.$$

Επιπλέον, αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση (1.52) εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$\delta_m(a, \gamma) = a(z) \exp \left[ \int_{a_i}^{a(z)} \frac{dy}{y} (\Omega_m^\gamma(y) - 1) \right] \quad (1.68)$$

όπου  $a_i$  είναι τιμή του παράγοντα κλίμακας του Σύμπαντος κατά το χρονικό στιγμιότυπο πέραν του οποίου η συνιστώσα της ύλης υπερिशύει έναντι όλων των άλλων συνιστωσών του κοσμικού ρευστού ( $a_i \simeq 10^{-2}$ ). Οπότε ο γραμμικός παράγοντας αύξησης, κανονικοποιημένος στη μονάδα στο παρόν, είναι:

$$D(a) = \frac{\delta_m(a, \gamma)}{\delta_m(1, \gamma)} = \frac{a(z) \exp \left[ \int_{a_i}^{a(z)} \frac{dy}{y} (\Omega_m^\gamma(y) - 1) \right]}{\exp \left[ \int_{a_i}^1 \frac{dy}{y} (\Omega_m^\gamma(y) - 1) \right]}. \quad (1.69)$$

Ωστόσο, η παράμετρος  $\gamma$  μπορεί να μην είναι σταθερά αλλά να εξαρτάται από την ερυθρομετάθεση,  $\gamma \equiv \gamma(z)$  (βλ. επόμενη παράγραφο).



### 1.2.5 Η εξέλιξη του παράγοντα αύξησης

Αρκετά μοντέλα έχουν προταθεί για την παραμετροποίηση του δείκτη αύξησης  $\gamma$ . Σε γενικές γραμμές, μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση της ερυθρομετάπτωσης, δηλαδή  $\gamma = \gamma(z)$ , ενώ η χρονική του εξέλιξη αποδίδεται προσεγγιστικά από την ακόλουθη μαθηματική περιγραφή (βλ. επίσης [61]):

Ο ρυθμός αύξησης, εξίσωση (1.66), μπορεί επίσης να γραφεί ως:

$$f(a) = \frac{a}{D} \frac{dD}{da} . \quad (1.70)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (1.70) ως προς τον παράγοντα κλίμακας  $a(t)$  έχουμε ότι:

$$\frac{df}{da} = \frac{1}{D} \frac{dD}{da} - \frac{a}{D^2} \left(\frac{dD}{da}\right)^2 + \frac{a}{D} \frac{d^2D}{da^2} \Rightarrow \frac{d^2D}{da^2} = \frac{D}{a} \frac{df}{da} - \frac{1}{a} \frac{dD}{da} + \frac{1}{D} \left(\frac{dD}{da}\right)^2$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{d^2D}{da^2} = \frac{D}{a} \frac{df}{da} - \frac{D}{a^2} f + \frac{D}{a^2} f^2 . \quad (1.71)$$

Η εξίσωση (2.2) μπορεί να μετασχηματιστεί στην:

$$a \frac{d \ln E(a)}{da} = -\frac{3}{2} w(a) \left(1 - \Omega_m(a)\right) - \frac{3}{2} . \quad (1.72)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.60), (1.71) και (1.72) βρίσκουμε μετά από μερικές πράξεις ότι:

$$a \frac{df}{da} + f^2 + X(a)f = \frac{3}{2} \Omega_m(a) Q(a) , \quad (1.73)$$

όπου

$$X(a) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} w(a) \left(1 - \Omega_m(a)\right) . \quad (1.74)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση τελεστών:

$$\frac{d}{da} = -(1+z)^{-2} \frac{d}{dz} , \quad (1.75)$$

από τις εξισώσεις (1.31) και (1.66) βρίσκουμε:

$$\frac{d\Omega_m(a)}{da} = \frac{3}{a} w(a) \Omega_m(a) \left(1 - \Omega_m(a)\right) , \quad (1.76)$$

$$\frac{df}{dz} = \Omega_m^{\gamma(z)}(z) \left[ \gamma'(z) \ln \Omega_m(z) + \gamma(z) \frac{1}{\Omega_m} \frac{d\Omega_m(z)}{dz} \right]. \quad (1.77)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.75) για την αδιάστατη παράμετρο πυκνότητας της ύλης,  $\Omega_m$ , έχουμε ότι:

$$\frac{d\Omega_m(z)}{dz} = -a^2 \frac{d\Omega_m(z)}{da}. \quad (1.78)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.76), (1.77) και (1.78), μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\begin{aligned} \frac{df}{da} &= \Omega_m^{\gamma(z)}(z) \left[ \gamma'(z) \ln \Omega_m(z) + \gamma(z) \frac{1}{\Omega_m(z)} (-a^2) \frac{d\Omega_m(z)}{da} \right] \left(-\frac{1}{a^2}\right) \Rightarrow \\ \frac{df}{da} &= -\frac{1}{a^2} \Omega_m^{\gamma(z)}(z) \gamma'(z) \ln \Omega_m(z) + \gamma(z) \frac{d \ln \Omega_m(z)}{da} \Omega_m^{\gamma(z)}(z). \end{aligned}$$

Μετά από τα παραπάνω, η εξίσωση (1.73) παίρνει τη μορφή:

$$-(1+z)\gamma'(z) \ln \Omega_m(z) + \Omega_m^{\gamma(z)}(z) + 3w \left(1 - \Omega_m(z)\right) \left(\gamma(z) - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Omega_m^{1-\gamma(z)}(z) Q(z). \quad (1.79)$$

Η εξίσωση (1.79) είναι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη του δείκτη αύξησης  $\gamma(z)$  ως προς την ερυθρομετάθεση.

Θέτοντας την τιμή  $z = 0$  (παρόν) στην εξίσωση (1.79) έχουμε ότι:

$$-\gamma'_0 \ln \Omega_{m0} + \Omega_{m0}^{\gamma_0} + 3w_0(1 - \Omega_{m0})\left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Omega_{m0}^{1-\gamma_0} Q_0 \quad (1.80)$$

όπου  $\gamma_0 = \gamma(z = 0)$ ,  $Q_0 = Q(z = 0)$  και  $w_0 = w(z = 0)$ .

Είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε εδώ ότι τα τελευταία χρόνια έχουν υπάρξει πολλές θεωρητικές εικασίες σχετικά με τη συναρτησιακή μορφή του δείκτη αύξησης και διάφορα υποψήφια μοντέλα έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία. Στην εργασία μας [62] δίνουμε τη γενική ανάλυση για τη συναρτησιακή μορφή του δείκτη αύξησης  $\gamma(z)$  υιοθετώντας τη γενική γραφή:

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 y(z), \quad (1.81)$$

που μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξεως γύρω από κάποια κοσμολογική ποσότητα όπως για παράδειγμα  $a(z)$ ,  $z$  ή  $\Omega_m(z)$ . Είναι ενδιαφέρον ότι για συναρτήσεις  $y(z)$  που ικανοποιούν τη συνθήκη  $y(0) = 0$  (ή

$\gamma(0) = \gamma_0$ ), η παράμετρος  $\gamma_1$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$\gamma'(0) = \gamma_1 y'(0) .$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.80) παίρνουμε τότε:

$$\gamma_1 = \frac{\Omega_{m0}^{\gamma_0} + 3w_0(1 - \Omega_{m0})(\gamma_0 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}Q_0\Omega_{m0}^{1-\gamma_0}}{y'(0) \ln \Omega_{m0}} . \quad (1.82)$$

### 1.2.5.1 Ασυμπτωτική Τιμή του δείκτη αύξησης στη ΓΘΣ

Η δημιουργία των δομών πραγματοποιήθηκε στην εποχή της κυριαρχίας της ύλης. Κατά συνέπεια, είναι λογικό να σκεφτούμε ότι για να βρούμε την ασυμπτωτική τιμή του δείκτη αύξησης θα πρέπει να αναπτύξουμε το ρυθμό αύξησης  $f(a)$  γύρω από την τιμή  $(\Omega_m - 1)$  (βλ. [60] και εκεί παραπομπές). Αρχικά αναπτύσσουμε τη συνάρτηση  $f(a)$  κατά Taylor και κρατάμε όρους έως 1ης τάξεως, οπότε έχουμε:

$$\Omega_m^\gamma \simeq 1 + \gamma(\Omega_m - 1) .$$

Επίσης αναπτύσσοντας γύρω από το  $\Omega_m - 1$  τη συνάρτηση  $\Omega_m^{2\gamma}$ , έχουμε:

$$\Omega_m^{2\gamma} \simeq \left[1 + \gamma(\Omega_m - 1)\right]^2 \simeq 1 + 2\gamma(\Omega_m - 1) .$$

Τώρα λαμβάνοντας υπόψη ότι:  $df/da = \frac{df}{d\Omega_m} \frac{d\Omega_m}{da}$ , για τα μοντέλα που υπακούουν στη ΓΘΣ ( $Q = 1$ ) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.73), (1.76), καταλήγουμε στη σχέση:

$$3w\Omega_m(1-\Omega_m)\gamma\Omega_m^{\gamma-1} + 1 - 2\gamma(1-\Omega_m) + \left[1 + \gamma(\Omega_m - 1)\right] \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}w(1-\Omega_m)\right] = \frac{3}{2}\Omega_m .$$

Συνεχίζοντας με μερικούς ακόμα μαθηματικούς υπολογισμούς καταλήγουμε:

$$\gamma \simeq \frac{3(w-1)}{6w-5} , \quad (1.83)$$

όπου έχουμε παραλείψει όρους δευτέρας τάξεως, δηλαδή  $3w\gamma^2(\Omega_m - 1) \simeq 0$ . Για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM ( $w = -1$ ), παίρνουμε  $\gamma_\Lambda \simeq \frac{6}{11}$ .

### 1.2.5.2 Συναρτησιακές μορφές του δείκτη αύξησης

Στην εργασία [62], διερευνούμε την εξέλιξη των διαταραχών πυκνότητας της ύλης στο γραμμικό στάδιο, για διάφορες επιλογές συναρτησιακής μορφής του δείκτη αύξησης  $\gamma(z)$ , που ανάγονται στην επιλογή διαφορετικών τιμών των σταθερών  $\gamma_0, \gamma_1$ , καθώς και της συνάρτησης  $y(z)$  στη γενική εξίσωση (1.81). Παρακάτω παρουσιάζουμε τα πιο γνωστά μοντέλα που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία με τα οποία έχουμε ασχοληθεί στην παρούσα διατριβή:

- Μοντέλο  $\Gamma_0$ -Σταθερός Δείκτης Αύξησης: Θέτουμε  $\gamma_1 = 0$ , δηλαδή  $\gamma = \gamma_0$ .
- Μοντέλο  $\Gamma_1$ -Ανάπτυγμα γύρω από το  $z = 0$  (βλ. [55]): Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι  $y(z) = z$ . Ωστόσο, η τελευταία παραμετροποίηση ισχύει για σχετικά μικρές ερυθρομεταθέσεις  $0 \leq z \leq 0.5$ . Στη στατιστική ανάλυση που παρουσιάζεται παρακάτω, χρησιμοποιούμε ένα σταθερό δείκτη αύξησης, δηλαδή  $\gamma = \gamma_0 + 0.5\gamma_1$  για  $z > 0.5$ .
- Μοντέλο  $\Gamma_2$ -Παραμετροποίηση Παρεμβολής: Εξαιτίας του γεγονότος ότι το μοντέλο  $\Gamma_1$  ισχύει για μικρές ερυθρομεταθέσεις, εξετάζουμε το γενικότερο τύπο  $y(z) = ze^{-z}$  ο οποίος συνδέει με ομαλό τρόπο τις μικρές με τις μεγάλες ερυθρομεταθέσεις. Το τελευταίο μοντέλο για το  $y(z)$  μπορεί να ιδωθεί ως ένας συνδυασμός του μοντέλου  $\Gamma_1$  με αυτό της εργασίας [63]. Προφανώς για μεγάλες ερυθρομεταθέσεις  $z \gg 1$  έχουμε  $\gamma_\infty \simeq \gamma_0$ .
- Μοντέλο  $\Gamma_3$ -Ανάπτυγμα γύρω από το  $a = 1$  ([64], [65], [66], [67]): Εδώ χρησιμοποιούμε  $y(z) = 1 - a(z) = \frac{z}{1+z}$  κάτι το οποίο σημαίνει ότι για  $z \gg 1$  παίρνουμε  $\gamma_\infty \simeq \gamma_0 + \gamma_1$ .
- Μοντέλο  $\Gamma_4$ -Ανάπτυγμα γύρω από το  $\Omega_m = 1$  [58]: Εδώ παραμετροποιούμε τη συνάρτηση  $y(z)$  ως  $y(z) = 1 - \Omega_m(z)$ . Για τα μοντέλα σκοτεινής ενέργειας με σταθερή παράμετρο καταστατικής εξίσωσης  $w(z) \equiv w_0$ , τα  $\gamma_0, \gamma_1$  είναι συναρτήσεις μόνο της παραμέτρου  $w_0$ :

$$\gamma_0 = \frac{3(1 - w_0)}{5 - 6w_0}, \quad \gamma_1 = \frac{3}{125} \frac{(1 - w_0)(1 - 3w_0/2)}{(1 - 6w_0/5)^3}. \quad (1.84)$$

Για μεγάλες ερυθρομεταθέσεις  $\Omega_m(z) \simeq 1$  παίρνουμε  $\gamma_\infty \simeq \gamma_0$ .

Σημειώνουμε ότι το κοσμολογικό μοντέλο DGP προβλέπει  $(\gamma_0, \gamma_1) \simeq (\frac{11}{16}, \frac{7}{256})$  ([49], [51], [68]).

Μετά από τα παραπάνω, γίνεται φανερό ότι για τα μοντέλα  $\Gamma_{1-3}$  έχουμε ότι  $y(0) = 0$  και για την περίπτωση του κοσμολογικού μοντέλου  $\Lambda$ CDM με  $(\Omega_{m0}, \gamma_0) = (0.273, \frac{6}{11})$ , η εξίσωση (1.82) δίνει  $\gamma_1 \simeq -0.0478$ , ενώ για το μοντέλο  $\Gamma_4$  παίρνουμε ότι:  $\gamma_1 \simeq 0.01127$  (βλ. εξίσωση (1.84)). Επιπλέον, βασιζόμενοι στην DGP βαρύτητα με  $(\Omega_{m0}, \gamma_0) = (0.273, \frac{11}{16})$ , τα μοντέλα  $\Gamma_{1-3}$  δίνουν  $\gamma_1 \simeq 0.05$ .

## 1.3 Στατιστική της σμηνοποίησης των γαλαξιών

### 1.3.1 Φάσμα των διαταραχών πυκνότητας

Αν θεωρήσουμε το Σύμπαν ως ένα κοσμικό ρευστό, τότε η θέση και η ταχύτητα ενός στοιχείου του ρευστού που ορίζουν τη ροή Hubble δίνονται από τις σχέσεις: (1.8) και (1.11), ενώ η περιγραφή του διαστελλόμενου Σύμπαντος περιγράφεται από τις εξισώσεις Friedmann-Lemaitre. Αρχικά στο κοσμικό ρευστό συνυπάρχουν η ύλη και η ακτινοβολία με πυκνότητες  $\rho_m$  και  $\rho_r$  αντίστοιχα, λόγω όμως του ότι  $\rho_r \propto a^{-4}$  ενώ  $\rho_m \propto a^{-3}$ , η πυκνότητα της ακτινοβολίας φθίνει πιο γρήγορα από αυτή της ύλης. Συνεπώς, κάποια στιγμή οι δύο αυτές πυκνότητες θα γίνουν ίσες (σημείο ίσων πυκνοτήτων). Επίσης, λόγω του ότι η θερμοκρασία  $T$  του Σύμπαντος δίνεται από το Νόμο Steffan-Boltzmann, ισχύει ότι  $T^4 \propto \rho_r^{-4}$  άρα  $T \propto \rho_r^{-1}$ , δηλαδή το Σύμπαν καθώς διαστέλλεται ψύχεται οπότε τα ηλεκτρόνια χάνουν κινητική ενέργεια. Κάτω από ένα κατώφλι, τα ηλεκτρόνια γίνονται δέσμια των πυρήνων και έτσι σχηματίζονται ουδέτερα άτομα (H, He) (ανασύνδεση). Σε αυτήν τη περίοδο, η ακτινοβολία είναι πλέον ελεύθερη να διαχυθεί προς όλες τις κατευθύνσεις στο Σύμπαν, μιας και τα φωτόνια παύουν να σχεδάζονται ελλείψει αρκετά ενεργητικών ηλεκτρονίων, δημιουργώντας ένα υπόβαθρο ακτινοβολίας που παρατηρείται σήμερα ως το μικροκυματικό υπόβαθρο (CMB). Ταυτόχρονα, η πίεση της ακτινοβολίας μειώνεται απότομα κοντά στο μηδέν οπότε οι διαταραχές πυκνότητας της ύλης που προϋπήρχαν της αποδέσμευσης είναι πλέον ελεύθερες να εξελιχθούν υπό την επίδραση μόνο της βαρυτικής δύναμης η οποία θα οδηγήσει στη δημιουργία δομών στο Σύμπαν.

Έστω σταθερή χρονική στιγμή  $t$ , και  $\delta(\vec{r}, t)$  το πεδίο των διαταραχών πυκνότητας κατά το χρόνο  $t$  όπως ορίζεται από τη σχέση (1.37). Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι η μέση τιμή των διαταραχών πυκνότητας είναι μηδέν, δηλαδή:  $\frac{1}{V} \iiint \delta(\vec{r}) d^3\vec{r} = 0$ , όπου  $V$  ο όγκος του Σύμπαντος, κάτι που σημαίνει ότι σε

κάποιες περιοχές του Σύμπαντος η πυκνότητα είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή και σε άλλες ότι είναι μικρότερη. Σε αντίθεση με τη μηδενική μέση τιμή του πεδίου των διαταραχών πυκνότητας, η μέση τετραγωνική τιμή:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{V} \iiint \delta^2(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

είναι μη μηδενική, και καθορίζει ένα χαρακτηριστικό πλάτος των διαταραχών πυκνότητας στο χώρο. Η παράμετρος  $\sigma_0$  ονομάζεται φασματική ροπή μηδενικής τάξης του πεδίου των διαταραχών πυκνότητας.

Τώρα, η συνάρτηση  $\delta(\vec{r})$  αποδίδεται πλήρως από τη γνώση Fourier του μετασχηματισμού της:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{r}.$$

Η ποσότητα  $\tilde{\delta}(\vec{k})$  είναι εν γένει μιγαδική, δηλαδή γράφεται στη μορφή:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = c(\vec{k}) e^{i\phi(\vec{k})}$$

κάτι που συνεπάγεται ότι η συνάρτηση  $\delta(\vec{r})$  εξαρτάται τόσο από το μέτρο  $c(\vec{k})$  όσο και από τη φάση  $\phi(\vec{k})$  όλων των κυμάτων Fourier που συμβάλλουν στο σημείο  $\vec{r}$ . Παρόλα αυτά, η διασπορά  $\sigma_0$  εξαρτάται μόνο από το μέτρο  $c(\vec{k})$  και όχι από τη φάση  $\phi(\vec{k})$ , ως συνέπεια του θεωρήματος Parseval, δηλαδή:

$$\sigma_0^2 = 8\pi^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(\vec{k}) d^3(\vec{k}).$$

Η συνάρτηση  $P(\vec{k}) = c^2(\vec{k})$  ονομάζεται φάσμα ισχύος των διαταραχών πυκνότητας (power spectrum).

Αν τώρα θεωρήσουμε μία σφαίρα ακτίνας  $h$  και κέντρο το σημείο με διάνυσμα θέσης  $\vec{r}$ , τότε η μέση τιμή της διαταραχής πυκνότητας στη σφαίρα δίνεται από τη σχέση:

$$\mu(\vec{r}, h) = \frac{1}{V_u} \iiint \delta(\vec{r} + \vec{r}') d^3\vec{r}'.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της παραπάνω συνάρτησης  $f_\mu(\vec{k})$  υπολογίζεται από το μετασχηματισμό Fourier  $\tilde{\delta}(\vec{k})$  της συνάρτησης  $\delta(\vec{r})$ . Αν ορίσουμε τη

συνάρτηση βήματος:

$$W(\vec{r}, h) = \frac{1}{V_u} \begin{cases} 1 & |\vec{r}| \leq h \\ 0 & |\vec{r}| > h \end{cases}$$

τότε μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\mu(\vec{r}, h) = 8\pi^3 \iint_{\vec{k}} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} [\tilde{\delta}(\vec{k}) \iint_{V_u} \int d^3\vec{r}' W(\vec{r}', h) e^{i\vec{k}\vec{r}'}]$$

οπότε:

$$f_\mu(\vec{k}) = \tilde{\delta}(\vec{k}) 3 \frac{\sin(kh) - kh \cos(kh)}{k^3 h^3}$$

όπου έχει γίνει χρήση του ολοκληρώματος:

$$\iint_{V_u} \int d^3\vec{r}' W(\vec{r}', h) e^{i\vec{k}\vec{r}'} = 3 \frac{\sin(kh) - kh \cos(kh)}{k^3 h^3} = L(kh).$$

Συνεπώς το φάσμα ισχύος του  $f_\mu(\vec{k})$  γίνεται:

$$F_\mu(\vec{k}) = L^2(kh) P(\vec{k})$$

ενώ από το Θεώρημα Parseval, η μέση τετραγωνική τιμή της συνάρτησης  $\mu(r, \vec{h})$  δίνεται από τη σχέση:

$$\mu^2(h) = 8\pi^3 \iiint F_\mu(\vec{k}) d^3\vec{k} = 8\pi^3 \iiint L^2(kh) P(\vec{k}) d^3\vec{k}.$$

Η τελευταία σχέση είναι πολύ σημαντική καθώς αν γνωρίζουμε το φάσμα ισχύος  $P(\vec{k})$  τη στιγμή της αποδέσμευσης, τότε γνωρίζουμε και την ποσότητα  $\mu^2(h)$  η οποία αντιστοιχεί στο χαρακτηριστικό πλάτος των διαταραχών πυκνότητας σε έναν όγκο που αντιστοιχεί σε κλίμακα  $h$ , κάτι που προσδιορίζει την ιεραρχία με την οποία οι δομές δημιουργούνται στο Σύμπαν.

Ο προσδιορισμός του φάσματος των διαταραχών  $P(\vec{k})$  είναι από τα πιο βασικά προβλήματα στην Κοσμολογία. Θεωρώντας ότι το φάσμα ισχύος εξαρτάται μόνο από το μέτρο του  $\vec{k}$ , υιοθετούμε για το φάσμα σε κάποια εποχή μετά την αποδέσμευση τη μορφή:

$$P(k) = T(k) P_0(k)$$

όπου  $P_0(k)$  είναι το αρχικό φάσμα ισχύος των διαταραχών πολύ πριν από την αποδέσμευση. Για το αρχικό φάσμα  $P_0(k)$ , μία συνήθης μορφή που απαντάται

στη βιβλιογραφία είναι ένας νόμος δύναμης και συγκεκριμένα:

$$P_0(k) = Ak^n .$$

Ο δείκτης  $n = 1$  αντιστοιχεί στο φάσμα ισχύος Harrison-Zeldovich.

Η συνάρτηση  $T(k)$  ονομάζεται *συνάρτηση μεταφοράς* (*transfer function*) και εκφράζει την παραμόρφωση που υπέστη το φάσμα από την αρχική του μορφή έως τη χρονική στιγμή την οποία εξετάζουμε. Συνήθως, ως τέτοια στιγμή επιλέγουμε είτε το παρόν, είτε τη στιγμή της αποδέσμευσης. Παρακάτω, η κανονικοποίηση του φάσματος γίνεται με βάση το παρόν.

Η μορφή της συνάρτησης μεταφοράς εξαρτάται κυρίως από το είδος της σκοτεινής ύλης που υπάρχει στο Σύμπαν, και αποδίδει τη διαφορετική εξέλιξη που είχαν δομές διαφορετικής κλίμακας από την εποχή των ίσων πυκνοτήτων έως και τη στιγμή της αποδέσμευσης, ή μετά την αποδέσμευση.

Στην παρούσα μελέτη, δύο συναρτησιακές μορφές της Συνάρτησης Μεταφοράς έχουν χρησιμοποιηθεί, των Bardeen et al. [69] και των Eisenstein & Hu [70].

Η Συνάρτηση Μεταφοράς των [69] ορίζεται από τον τύπο:

$$T(k) = C_q \left[ 1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4 \right]^{-1/4}, \quad (1.85)$$

όπου  $C_q = \frac{\ln(1+2.34q)}{2.34q}$  και  $q \equiv \frac{k}{\Gamma}$ . Η παράμετρος  $\Gamma$  ονομάζεται *παράμετρος σχήματος* (shape parameter) και συνδέεται με τη σχετική αναλογία της βαρυονικής προς τη σκοτεινή ύλη στο Σύμπαν. Δίνεται σύμφωνα με τους [71], [72] από τη σχέση:

$$\Gamma = \Omega_{m0} \tilde{h} \exp(-\Omega_{b0} - \sqrt{2\tilde{h}} \Omega_{b0}/\Omega_{m0}), \quad (1.86)$$

όπου  $\Omega_{b0} = 0.022197\tilde{h}^{-2}$ ,  $\tilde{h} = 0.68$  και  $\Omega_{m0} = 0.302$ . Η τιμή του  $\Gamma$  μπορεί να εκτιμηθεί από τα δεδομένα του φάσματος διαταραχών της μικροκυματικής ακτινοβολίας.

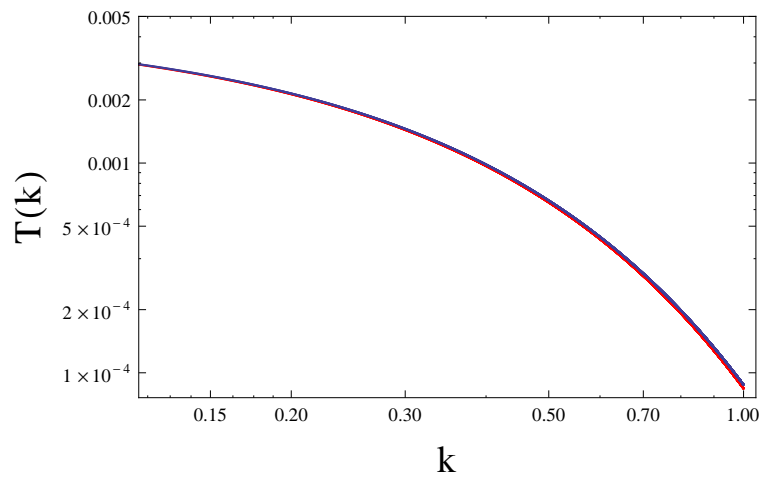
Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε τη Συνάρτηση Μεταφοράς των [70]:

$$T(k) = \frac{L_0}{L_0 + C_0 q^2}, \quad (1.87)$$



όπου  $L_0 = \ln(2e + 1.8q)$ ,  $e = 2.718$  και  $C_0 = 14.2 + \frac{731}{1+62.5q}$ . Σύμφωνα με τους Eisenstein et al. [70], το μοντέλο (1.87) είναι απλούστερο και πιο ακριβές από αυτό των Bardeen et al. [69], επειδή στη μέθοδο τους δεν υπάρχουν πολλές παράμετροι προσαρμογής ενώ οι συντελεστές 1.8 και 14.2 υπολογίζονται θεωρητικά.

Το σχήμα (1.1) απεικονίζει τις δύο συναρτήσεις μεταφοράς (1.85) και (1.87). Στην παρούσα ανάλυση τα δύο είδη των συναρτήσεων μεταφοράς χρησιμοποιούνται ως μια έμμεση σύγκριση. Όπως δείχνουμε στις επόμενες ενότητες, η χρήση τους δεν συνεπάγεται κάποια σημαντική διαφορά στα αποτελέσματά μας, όπως άλλωστε υποδεικνύεται και από τη γραφική παράσταση του σχήματος (1.1), στην οποία οι δύο καμπύλες δεν εμφανίζουν ουσιώδη διαφορά.



ΣΧΗΜΑ 1.1: Η συνάρτηση μεταφοράς των Bardeen et al. [69] (κόκκινη γραμμή) και η συνάρτηση μεταφοράς των Eisenstein & Hu [70] (μπλε γραμμή). Είναι σχεδόν ταυτόσημες.

### 1.3.2 Συναρτήσεις Συσχετισμού

Οι συναρτήσεις συσχετισμού είναι ο συνήθης τρόπος περιγραφής της σηματοποίησης των γαλαξιών και των σμηνών γαλαξιών στην Κοσμολογία. Η χρήση αυτών των συναρτήσεων προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Totsuji και Kihara (1969) [73]. Στη δεκαετία του 1970, ο Peebles και οι συνεργάτες του πραγματοποίησαν ένα πρόγραμμα για να εξαγάγουν εκτιμήσεις αυτών των συναρτήσεων από τον κατάλογο γαλαξιών του Lick και από άλλα σύνολα δεδομένων.

Οι συναρτήσεις συσχετισμού περιγράφουν τις ιδιότητες της σηματοποίησης ενός συνόλου σημείων που κατανέμονται στο χώρο. Σε γενικές γραμμές, μία συνάρτηση συσχετισμού είναι ένα μέτρο του πόσο πιθανότερο είναι να βρει κανείς ένα ζευγάρι σημείων σε ένα μικρό όγκο  $\delta V$  σε σχέση με τη μέση ομοιογενή κατανομή ενός διακριτού πλήθους σημείων στο συνολικό υπό εξέταση όγκο. Τα σημεία αυτά μπορεί να είναι πηγές όπως γαλαξίες ή κβάζαρς ή σμήνη γαλαξιών κ.λ.π. Ο χώρος μπορεί να είναι τρισδιάστατος, ωστόσο, χρήσιμα συμπεράσματα μπορεί κανείς επίσης να εξαγάγει από κατανομές δύο διαστάσεων. Στη βιβλιογραφία ορίζεται μια ποικιλία διαφορετικών συναρτήσεων συσχετισμού, οι πιο συνηθισμένες από τις οποίες περιγράφονται στις επόμενες ενότητες.

### 1.3.2.1 Χωρική Συνάρτηση Συσχετισμού δύο σημείων

Ο πιο συνηθισμένος ορισμός αφορά στη χωρική συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων (2 point Spatial Correlation Function, εφεξής 2pSCF) (Peebles 1980)  $\xi(r)$ , η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$\delta^2 P = n^2 [1 + \xi(r)] \delta V_1 \delta V_2, \quad (1.88)$$

όπου  $\delta^2 P$  είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα ζεύγος αντικειμένων στους απειροστούς όγκους  $\delta V_1$  και  $\delta V_2$ ,  $r$  η μεταξύ των δύο όγκων χωρική απόσταση και  $n$  η μέση αριθμητική πυκνότητα των πηγών. Η εξάρτηση της 2pSCF  $\xi(\vec{r})$  μόνο από το μέτρο της απόστασης μεταξύ των δύο όγκων και όχι από το σχετικό τους προσανατολισμό, είναι απόρροια της Κοσμολογικής Αρχής. Αν οι σημειακές πηγές είναι τυχαία κατανεμημένες στο χώρο, ή, ισοδύναμα, η πιθανότητα να βρεθεί άλλη πηγή στον όγκο  $\delta V_1$  είναι ανεξάρτητη από το να βρεθεί πηγή στον όγκο  $\delta V_2$  τότε έχουμε  $\xi(r) = 0$  και η εξίσωση (1.88) γίνεται:

$$\delta^2 P = n^2 \delta V_1 \delta V_2. \quad (1.89)$$

Αν  $\xi(r) > 0$  τότε έχουμε σηματοποίηση, ενώ αν  $-1 < \xi(\vec{r}) < 0$ , οι πηγές είναι ‘αντισυσχετισμένες’ (anti-correlated) και τείνουν να δημιουργούν κενά στην κλίμακα  $\vec{r}$ .

Οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι στο Σύμπαν, σε κλίμακες μεγαλύτερες των  $\sim 5Mpc$ , η 2pSCF των γαλαξιών προσεγγίζεται αρκετά καλά από ένα νόμο δύναμης της μορφής:

$$\xi(r) \simeq \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\epsilon}$$

με  $r_0 \simeq 5h^{-1}Mpc$  και  $\epsilon \simeq 1.8$  (βλ. π.χ. [74]). Το μήκος  $r_0$  ονομάζεται μήκος συσχετισμού της κατανομής των γαλαξιών και σηματοδοτεί τη χωρική κλίμακα στην οποία γίνεται η μετάβαση από τη γραμμική ( $\xi < 1$ ) στη μη γραμμική περιοχή ( $\xi > 1$ ). Ο δείκτης  $\epsilon$  περιγράφει ικανοποιητικά τη συνάρτηση  $\xi(r)$  στο διάστημα  $0.1h^{-1}Mpc \leq r \leq 10h^{-1}Mpc$  ([75], [76], [77], [78]). Σε μεγαλύτερες κλίμακες η συνάρτηση συσχετισμού τείνει ταχέως στο μηδέν και είναι δύσκολο να μετρηθεί πάνω από το στατιστικό θόρυβο.

### 1.3.2.2 Γωνιακή Συνάρτηση Συσχετισμού δύο σημείων

Με ένα παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τη γωνιακή συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων (2 point Angular Correlation Function, εφεξής 2pACF),  $w(\theta)$ , η οποία δίνει τη συνδυαστική πιθανότητα να βρεθεί ένα ζευγάρι πηγών στις απειροστές στερεές γωνίες  $\delta\Omega_1$  και  $\delta\Omega_2$  που χωρίζονται από μία γωνία  $\theta$  στην ουράνια σφαίρα:

$$\delta^2 P = n^2 [1 + w(\theta)] \delta\Omega_1 \delta\Omega_2, \quad (1.90)$$

όπου  $n$  είναι τώρα η μέση αριθμητική πυκνότητα των πηγών ανά στερεά γωνία στον ουρανό. Η εξίσωση (1.90) είναι ανάλογη με την εξίσωση (1.88). Η ανάλυση των δισδιάστατων καταλόγων των προβαλλόμενων θέσεων των γαλαξιών στον ουρανό (π.χ. Lick, APM και COSMOS) έχουν δείξει ότι πάνω από ένα κατάλληλο διάστημα γωνιών  $\theta$ , η 2pACF  $w(\theta)$  περιγράφεται καλά από ένα νόμο δύναμης:

$$w(\theta) = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{-\delta}$$

όπου  $\delta \simeq 0.7$  (βλ. π.χ. [79]) ενώ το  $\theta_0$  είναι σταθερά που εξαρτάται από τη χαρακτηριστική απόσταση των γαλαξιών στον κατάλογο και το γωνιακό διάστημα στο οποίο η τελευταία σχέση ισχύει. Πέρα από την περιοχή του νόμου δύναμης, η 2pACF 'σπάει' και πέφτει γρήγορα στο μηδέν.

### 1.3.2.3 Συναρτήσεις Συσχετισμού $N$ Σημείων

Ανάλογα με τα παραπάνω, ορίζονται οι συναρτήσεις συσχετισμού για παραπάνω από 2 σημεία ( $N > 2$ ). Η συνάρτηση συσχετισμού  $N$  σημείων ορίζεται ως η δεσμευμένη πιθανότητα να βρεθούν  $N$  πηγές στους  $N$  όγκους  $\delta V_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  που απέχουν μεταξύ τους αποστάσεις  $r_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  με  $i \neq j$  και υπολογίζεται γνωρίζοντας τη συνάρτηση συσχετισμού κατωτέρων τάξεων. Η χρήση των συναρτήσεων συσχετισμού  $N$  σημείων με  $N > 2$ , σε συνδυασμό με παρατηρησιακά δεδομένα είναι αρκετά περίπλοκη, ωστόσο, η χρήση της 2pSCF και της 2pACF μας δίνουν ήδη αρκετά καλά αποτελέσματα, όπως θα δούμε παρακάτω στα κεφάλαια 4, 5, 6.

### 1.3.3 Η Εξίσωση του Limber

Μία από τις πιο χρήσιμες πτυχές της θεωρίας των συναρτήσεων συσχετισμού αφορά στη σχέση μεταξύ της χωρικής και της γωνιακής συνάρτησης δύο σημείων (εξισώσεις (1.88) και (1.90) αντίστοιχα). Αυτή η σχέση είναι σχετικά απλή, έτσι μπορεί κανείς να εξαγάγει πληροφορίες για τη χωρική συνάρτηση (2pSCF) από τη γωνιακή συνάρτηση (2pACF) που είναι η πιο συχνά μετρήσιμη ποσότητα. Προκειμένου να εξαχθεί αυτή η σχέση, υποθέτουμε ότι το απόλυτο μέγεθος ενός γαλαξία είναι στατιστικά ανεξάρτητο από τη θέση του σε σχέση με άλλους γαλαξίες (υπόθεση *Limber*). Τότε, στην περίπτωση ενός χωρικά επίπεδου Σύμπαντος, η εξίσωση του Limber μπορεί να γραφεί ως:

$$w(\theta) = 2 \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty x^4 \phi^2(x) \xi(r, z) dx du}{\left( \int_0^\infty x^2 \phi(x) dx \right)^2} \quad (1.91)$$

όπου  $\phi(x)$  είναι η λεγόμενη *συνάρτηση επιλογής*, η οποία εκφράζει την πιθανότητα ανίχνευσης μιας πηγής σε απόσταση  $x$  από τον παρατηρητή σε συνκινούμενες συντεταγμένες. Η απόσταση  $x$  σχετίζεται με την ερυθρομετάθεση μέσω της σχέσης:

$$x(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \quad (1.92)$$

όπου  $E(z)$  είναι η κανονικοποιημένη συνάρτηση Hubble, εξίσωση (2.1). Η μεταβλητή  $r$  αντιστοιχεί στο φυσικό διαχωρισμό μεταξύ δύο πηγών με γωνιακό διαχωρισμό,  $\theta$ . Στην περίπτωση της προσέγγισης των μικρών γωνιών, ο

φυσικός διαχωρισμός είναι:

$$r \simeq a(z) (u^2 + x^2 \theta^2)^{1/2} \quad (1.93)$$

όπου  $u$  είναι η απόσταση των δύο πηγών σε συνκινούμενες συντεταγμένες κατά μήκος της γραμμής παρατήρησης.

Το πλήθος των πηγών σε μια έρευνα μέσα σε μια στερεά γωνία  $\Omega_s$  η οποία βρίσκεται στο εύρος των ερυθρομεταθέσεων ( $z, z + dz$ ) είναι:

$$\frac{dN}{dz} = \Omega_s x^2 \phi(x) \left(\frac{c}{H_0}\right) E^{-1}(z) . \quad (1.94)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.91), (1.92) και (1.94), βρίσκουμε:

$$w(\theta) = 2 \frac{H_0}{c} \int_0^\infty \left( \frac{1}{N} \frac{dN}{dz} \right)^2 E(z) dz \int_0^\infty \xi(r, z) du , \quad (1.95)$$

όπου  $(1/N) dN/dz$  είναι η κανονικοποιημένη κατανομή των ερυθρομεταθέσεων των υπό μελέτη πηγών. Η κατανομή αυτή παρέχεται από ένα τυχαίο υποδείγμα του πληθυσμού των πηγών των οποίων οι ερυθρομεταθέσεις (φασματοσκοπικές ή φωτομετρικές) είναι διαθέσιμες (βλ. κεφάλαιο 4). Είναι σημαντικό να προσέξει κανείς ότι η 2pSCF έχει εξάρτηση και από την ερυθρομετάθεση και αυτό για να έχει ισχύ και σε μεγάλες ερυθρομεταθέσεις.

### 1.3.4 Η Διακύμανση της Μάζας και το CDM Φάσμα Ισχύος $P(k)$

Έστω  $\langle M \rangle$  η μέση μάζα που βρίσκεται εντός σφαίρας ακτίνας  $R$  και όγκου  $V$ . Όπως είδαμε, η μέση τιμή των διαταραχών της ύλης σε όλο το στατιστικό σύνολο είναι ίση με μηδέν εξ' ορισμού, όμως η μέση τετραγωνική τιμή της,  $\sigma_M^2$ , είναι μη μηδενική και ίση με:

$$\sigma_M^2 = \langle \left(\frac{\delta_M}{M}\right)^2 \rangle$$

όπου ο μέσος όρος έχει υπολογιστεί για ένα σύνολο θεωρούμενων όγκων.

Στο όριο  $V \rightarrow \infty$  και αν το πεδίο πυκνότητας είναι στατιστικά ομογενές και ισότροπο έτσι ώστε να μην υπάρχει εξάρτηση από τη κατεύθυνση του κυματαριθμού  $\vec{k}$  αλλά να υπάρχει εξάρτηση μόνο από τα μέτρα τους, τότε μπορεί να

δειχθεί ότι:

$$\sigma_M^2(R, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k, z) W^2(kR) k^2 dk, \quad (1.96)$$

όπου  $P(k, z) = P(k)D^2(z)$ .

Το CDM Φάσμα Ισχύος δίνεται από τη σχέση  $P(k) = P_0 k^n T^2(k)$ , όπου  $n \simeq 0.9671$ , τιμή η οποία είναι συνεπής με την επανεξέταση των δεδομένων του Planck από τους Spergel et al. [15]. Η μέση τετραγωνική απόκλιση (root mean square, rms) των διαταραχών του γραμμικού πεδίου πυκνότητας σε μία κλίμακα μάζας  $M = M_h$  ορίζεται ως:

$$\sigma(M_h, z) = \left[ \frac{D^2(z)}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) W^2(kR) dk \right]^{1/2}, \quad (1.97)$$

όπου  $R = (3M_h/4\pi\rho_0)^{1/3}$  με το  $\rho_0$  να είναι η μέση πυκνότητα μάζας του Σύμπαντος στο παρόν ( $\rho_0 = 2.78 \times 10^{11} \Omega_{m0} h^2 M_\odot \text{Mpc}^{-3}$ ). Για το σκοπό αυτό, η κανονικοποίηση του φάσματος ισχύος στο παρόν δίνεται από:

$$P_0 = 2\pi^2 \sigma_8^2 \left[ \int_0^\infty T^2(k) k^{n+2} W^2(kR_8) dk \right]^{-1}, \quad (1.98)$$

όπου  $\sigma_8 \equiv \sigma(M_h(R_8), 0)$  είναι οι rms διαταραχές της μάζας σε κλίμακα  $R_8 = 8h^{-1} \text{Mpc}$  και  $M_h(R_8) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R_8^3$ . Στη μελέτη μας, χρησιμοποιούμε δύο διαφορετικές εκτιμήσεις της παραμέτρου  $\sigma_8$  που αναφέρονται στη βιβλιογραφία και οι οποίες είναι:

$$\sigma_8 = \begin{cases} 0.818 \left( \frac{0.30}{\Omega_{m0}} \right)^{0.26}, & \text{Spergel et al. [15]} \\ 0.797 \left( \frac{0.30}{\Omega_{m0}} \right)^{0.26}, & \text{Hajian et al. [80].} \end{cases} \quad (1.99)$$

### 1.3.5 Μη Γραμμικές Διορθώσεις στο Φάσμα Ισχύος των Διαταραχών της ύλης

Οι τύποι που δόθηκαν στις προηγούμενες ενότητες για τη συνάρτηση συσχέτισμού  $\xi(r)$  συνδέονται με τη θεωρία εξέλιξης των διαταραχών πυκνότητας με την υπόθεση ότι οι τελευταίες είναι μικρές, δηλαδή βρίσκονται στο ‘γραμμικό’ στάδιο. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε και μη γραμμικές διορθώσεις, οι οποίες καθίστανται σημαντικές, ιδιαίτερα στη σημερινή εποχή και σε μικρές σχετικά κλίμακες  $r$ . Έστω  $r$  η θεωρούμενη κλίμακα,  $k = \frac{2\pi}{r}$  ο αντίστοιχος

κυματαριθμός και  $P(k)$  το φάσμα ισχύος. Θέτουμε:

$$n_{eff} = \frac{d \ln P}{d \ln k}. \quad (1.100)$$

Η σταθερά  $n_{eff}$  εκφράζει τον εκθέτη ενός τοπικού νόμου δύναμης  $P(k) \propto k^{n_{eff}}$  που προσαρμόζεται στην καμπύλη του φάσματος ισχύος στην επιλεγμένη κλίμακα  $r = 2\pi/k$ . Μη γραμμικές διορθώσεις στη θεωρητικά προβλεπόμενη συνάρτηση συσχετισμού μπορούν τώρα να εισαχθούν ως συνάρτηση του ‘ενεργού εκθέτη’  $n_{eff}$ .

Στην παρούσα μελέτη, κάνουμε χρήση των μη γραμμικών διορθώσεων που προτείνονται από τους [71], [81] για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM (βλ. επίσης [82], [83]). Η μη γραμμική συνάρτηση συσχετισμού στην κλίμακα  $r$  ορίζεται μέσω των τύπων:

$$\bar{\xi}_{NL}(r_{NL}) = f_{NL} \bar{\xi}_L(r_L),$$

όπου  $\xi_L$  είναι η γραμμική συνάρτηση συσχετισμού. Επίσης:

$$f_{NL}(x) = x \left[ \frac{1 + B\beta x + (Ax)^{a\beta}}{1 + \left( (Ax)^a g^3(\Omega_m) / (Vx^{1/2}) \right)^\beta} \right]^{1/\beta}$$

και

$$g(\Omega_m) = \frac{5}{2} \Omega_m [\Omega_m^{4/7} - \Omega_{DE} + (1 + \frac{1}{2} \Omega_m) (1 + \frac{\Omega_{DE}}{70})]^{-1}$$

$$A = 0.482 (1 + \frac{n_{eff}}{3})^{-0.947}$$

$$B = 0.226 (1 + \frac{n_{eff}}{3})^{-1.778}$$

$$a = 3.310 (1 + \frac{n_{eff}}{3})^{-0.244}$$

$$\beta = 0.862 (1 + \frac{n_{eff}}{3})^{-0.287}$$

$$V = 11.55 (1 + \frac{n_{eff}}{3})^{-0.423}.$$

Εναλλακτικά μοντέλα για τις μη γραμμικές διορθώσεις στο φάσμα ισχύος έχουν προταθεί από τους Smith et al. [82] (το λεγόμενο μοντέλο ‘halofit’) (βλ. επίσης [84]). Ωστόσο, από την ανάλυση των Smith et al. [82] προκύπτει ότι το συνολικό μη γραμμικό φάσμα ισχύος των Smith et al. είναι συνεπές με αυτό των Peacock & Dodds ([71], [81]) στην περιοχή του ενδιαφέροντός μας στην παρούσα μελέτη, δηλαδή για κλίμακες  $k < 1 h Mpc^{-1}$  (που αντιστοιχεί σε γωνιακούς διαχωρισμούς  $\theta > 140''$  για τιμές ερυθρομετάθεσης γύρω στο

$z_* = 0.55$ ), όπου τα δύο μοντέλα παρέχουν παρόμοια μη γραμμικά φάσματα ισχύος.



## Κεφάλαιο 2

# Χρονοεξαρτώμενη Παράμετρος της Καταστατικής Εξίσωσης για μοντέλα Σκοτεινής Ενέργειας

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο, παράγραφοι (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7), παρουσιάστηκε η θεωρία σχετικά με τις μορφές που μπορεί να πάρει η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης στα διάφορα κοσμολογικά μοντέλα. Μια πρώτη προσέγγιση είναι η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης να θεωρηθεί σταθερή, ωστόσο έχουν προταθεί από διάφορους συγγραφείς πολλές μορφές της ως συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης. Μολονότι λοιπόν διαπιστώνει κανείς ότι υπάρχουν αρκετές εκφράσεις της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης διαθέσιμες στη βιβλιογραφία, η πλειοψηφία αυτών χρησιμοποιεί εκ των προτέρων ένα δεδομένο κοσμολογικό μοντέλο. Το γεγονός αυτό θέτει περιορισμούς στην όποια μελέτη. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε μία νέα μορφή της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης θεωρώντας την χρονικά εξαρτώμενη αλλά ισχύουσα για οποιοδήποτε μοντέλο σκοτεινής ενέργειας συμπεριλαμβανόμενων και των θεωριών βαρύτητας εναλλακτικών προς τη ΓΘΣ.

## 2.1 Παράμετρος της Καταστατικής Εξίσωσης για μοντέλα Σκοτεινής Ενέργειας η οποία εξαρτάται από τον παράγοντα κλίμακας

Για ομογενείς και ισότροπες επίπεδες κοσμολογίες, με μη σχετικιστική ύλη και σκοτεινή ενέργεια με καταστατική εξίσωση,  $P_{DE} = w(a)\rho_{DE}$ , η 1η εξίσωση Friedmann, (1.12), μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{H^2(a)}{H_0^2} \equiv E^2(a) = \Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{DE0}e^{3\int_a^1 d\ln y[1+w(y)]} \quad (2.1)$$

όπου  $\Omega_{DE0} = 1 - \Omega_{m0}$ . Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Friedmann, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης μπορεί να γραφεί σε συνάρτηση με τους όρους  $E(a) = H(a)/H_0$  ([85], [38]):

$$H^2(a) = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{m0}a^{-3} + \rho_{DE0}e^{-3\int \frac{1+w(a)}{a} da}) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{3} \ln \frac{E^2(a) - \Omega_{m0}a^{-3}}{\Omega_{DE0}} = \int \frac{1+w(a)}{a} da .$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση έχουμε:

$$w(a) = \frac{-1 - \frac{2}{3}a \frac{d \ln E(a)}{da}}{1 - \frac{\Omega_{m0}a^{-3}}{E^2(a)}} . \quad (2.2)$$

Δεδομένου ότι η ακριβής φύση της σκοτεινής ενέργειας είναι άγνωστη, η παραπάνω έκφραση για την παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στη σκοτεινή ενέργεια συνοψίζει την άγνοιά μας, σχετικά με το φυσικό μηχανισμό που τροφοδοτεί την κοσμική επιτάχυνση, στη μορφή της συνάρτησης  $E(a)$ . Είναι ενδιαφέρον ότι η παραπάνω μέθοδος μπορεί να γενικευθεί στο πλαίσιο της εναλλακτικής βαρύτητας. Πράγματι, αντί να χρησιμοποιούμε την ακριβή ροή Hubble, μπορούμε να εξετάσουμε μια ισοδύναμη ροή Hubble μιμούμενοι την εξίσωση (2.1) μέσω μιας τροποποίησης της εξίσωσης Friedmann. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη παραμετροποίηση ([86], [49]):

$$E^2(a) = \frac{H^2(a)}{H_0^2} = \Omega_{m0}a^{-3} + \Delta H^2. \quad (2.3)$$

Οποιαδήποτε τροποποίηση της εξίσωσης Friedmann στη ΓΘΣ μπορεί τώρα να περιλαμβάνεται στον τελευταίο όρο της παραπάνω έκφρασης. Επιπλέον,

χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.2) και (2.3) μπορεί κανείς να αντλήσει την παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στη σκοτεινή ενέργεια (σε αυτήν την περίπτωση ονομάζεται επίσης και ‘ενεργή’ ή ‘γεωμετρική’ παράμετρος). Πράγματι, λογαριθμίζοντας την (2.3), έχουμε:

$$2 \ln E(a) = \ln(\Omega_{m0}a^{-3} + \Delta H^2) \Rightarrow \frac{2d \ln E(a)}{da} = \frac{-3\Omega_{m0}a^{-4} + \frac{d\Delta H^2}{da}}{\Omega_{m0}a^{-3} + \Delta H^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d \ln E(a)}{da} = \frac{\frac{-3}{2a}(E^2(a) - \Delta H^2) + \frac{1}{2} \frac{\Delta H^2}{a} \frac{d \ln \Delta H^2}{d \ln a}}{E^2(a)},$$

οπότε η (2.2) γίνεται:

$$w(a) = \frac{-E^2(a) - \frac{2}{3}a[-\frac{3}{2a}(E^2(a) - \Delta H^2) + \frac{1}{2} \frac{\Delta H^2}{a} \frac{d \ln \Delta H^2}{d \ln a}]}{E^2(a)[1 - \Omega_m(a)]} \Rightarrow$$

$$w(a) = \frac{-\Delta H^2 - \frac{\Delta H^2}{3} \frac{d \ln \Delta H^2}{d \ln a}}{E^2(a) \frac{\Delta H^2}{E^2(a)}} \Rightarrow$$

$$w(a) = -1 - \frac{1}{3} \frac{d \ln \Delta H^2}{d \ln a}. \quad (2.4)$$

Το ενδιαφέρον σημείο εδώ είναι ότι η εξίσωση (2.4) ισχύει επίσης για οποιοδήποτε μοντέλο εναλλακτικής βαρύτητας. Για παράδειγμα, στο πλαίσιο ενός επίπεδου κοσμολογικού μοντέλου DGP, η επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος μπορεί να εξηγηθεί από μια τροποποίηση της βαρυτικής αλληλεπίδρασης στην οποία η ίδια η βαρύτητα γίνεται αμελητέα σε πολύ μεγάλες αποστάσεις (κοντά στην κλίμακα Hubble) εξαιτίας του ότι η τεσσάρων διαστάσεων βράνη επιβιώνει σε μια πολλαπλότητα επιπλέον διαστάσεων (βλ. [87] και εκεί παραπομπές). Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτού του προτύπου είναι ότι η αντίστοιχη συναρτησιακή μορφή της εξίσωσης Hubble, όπως δίνεται από την εξίσωση (2.3), περιέχει μία μόνο ελεύθερη παράμετρο, την  $\Omega_{m0}$ . Η ποσότητα  $\Delta H^2$  στο πλαίσιο μιας επίπεδης FLRW δίνεται από:

$$\Delta H^2 = 2\Omega_{bw} + 2\sqrt{\Omega_{bw}}\sqrt{\Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{bw}}, \quad (2.5)$$

όπου  $\Omega_{bw} = (1 - \Omega_{m0})^2/4$ . Τώρα ξεκινώντας από την εξίσωση (2.5) έχουμε ότι:

$$\frac{d \ln \Delta H^2}{da} = \frac{-3\Omega_{m0}a^{-4}}{\sqrt{\Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{bw}}(2\sqrt{\Omega_{bw}} + 2\sqrt{\Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{bw}})}$$

ή

$$\frac{d \ln \Delta H^2}{d \ln a} = \frac{-3\Omega_{m0}a^{-3}}{2\sqrt{\Omega_{bw}}\sqrt{\Omega_{bw} + \Omega_{m0}a^{-3}} + 2\Omega_{bw} + 2\Omega_{m0}a^{-3}} = \frac{-3E^2(a)\Omega_m(a)}{E^2(a) + E^2(a)\Omega_m(a)}.$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2.4), μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι ο γεωμετρικός (ενεργός) παράγοντας της σκοτεινής ενέργειας μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$w(a) = -1 - \frac{1}{3} \frac{-3E^2(a)\Omega_m(a)}{E^2(a)(1 + \Omega_m(a))} \Rightarrow w(a) = -1 + \frac{\Omega_m(a)}{1 + \Omega_m(a)} \Rightarrow$$
$$w(a) = -\frac{1}{1 + \Omega_m(a)}. \quad (2.6)$$

Σε αυτό το μοντέλο, εξαιτίας της βαρύτητας, η ενεργή σταθερά του Νεύτωνα  $G_{\text{eff}}$  δεν έχει πια τη συνήθη μορφή  $G$  αλλά παίρνει την ακόλουθη μορφή [48]:

$$G_{\text{eff}}(a) = GQ(a), \quad \text{όπου} \quad Q(a) = \frac{2 + 4\Omega_m^2(a)}{3 + 3\Omega_m^2(a)}. \quad (2.7)$$

## Κεφάλαιο 3

# Γενικευμένη εξέλιξη του γραμμικού bias

Η κατανομή μάζας των λεγόμενων *ιχνηλατών* (tracers) (π.χ. γαλαξίες, σμήνη γαλαξιών κ.λ.π.) χρησιμοποιείται για να καθοριστεί η κατανομή της ύλης του Σύμπαντος κάνοντας την υπόθεση ότι όπου υπάρχει φωτεινή ύλη υπάρχει και σκοτεινή ύλη. Οι παρατηρήσεις συντείνουν στο ότι οι μεγάλης κλίμακας δομές της φωτεινής ύλης ιχνηλατούν την υποκείμενη κατανομή της σκοτεινής ύλης ([88], [69]). Το φαινόμενο αυτό θεωρείται ότι είναι στατιστικό στη φύση, δηλαδή θεωρούμε ότι ο σχηματισμός των γαλαξιών και των σμηνών γαλαξιών είναι πιο πιθανό να συμβεί σε σημεία που αντιστοιχούν σε υψηλές κορυφές ενός υποκείμενου, αρχικά Γκαουσιανού, τυχαίου πεδίου διαταραχών πυκνότητας που αφορά στη συνολική υποκείμενη ύλη, δηλαδή βαρυονική και σκοτεινή.

Προκειμένου να εκφράσουμε τη σχέση μεταξύ της κατανομής των ιχνηλατών και της υποκείμενης συνολικής ύλης, ορίζουμε το λεγόμενο *συντελεστή αναλογίας*<sup>1</sup> που συνδέει τις διαταραχές μεταξύ φωτεινής και σκοτεινής ύλης. Ο γραμμικός και ανεξάρτητος της κλίμακας συντελεστής αναλογίας,  $b$ , ορίζεται ως ο λόγος των διαταραχών της μάζας των ιχνηλατών  $\delta_{tr}$  ως προς τις διαταραχές της υποκείμενης μάζας  $\delta_m$ :

$$b = \frac{\delta_{tr}}{\delta_m}. \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup> Δεδομένου ότι δεν υπάρχει στην ελληνική βιβλιογραφία κοινά αποδεκτός όρος για τη μετάφραση του όρου *bias* στο πλαίσιο της Κοσμολογίας, στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στον όρο με τον αρχικό αγγλικό όρο.

Ο συντελεστής αναλογίας  $b(z)$  μπορεί τώρα να συνδυαστεί με τη χωρική συνάρτηση συσχετισμού (παράγραφος (1.3.2.1)). Συγκεκριμένα, η χωρική συνάρτηση συσχετισμού  $\xi(r, z)$  γράφεται ως:

$$\xi(r, z) = b^2(z)\xi_{DM}(r, z) \quad (3.2)$$

όπου  $\xi_{DM}(r, z)$  η χωρική συνάρτηση συσχετισμού της συνολικής μάζας για την οποία ισχύει:

$$\xi_{DM}(r, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk . \quad (3.3)$$

Το bias γενικά εξαρτάται από:

1. Την κλίμακα  $R$ , ή τον αντίστοιχο κυματαριθμό  $k \sim R^{-1}$ , εντός της οποίας εξετάζονται οι υπό μελέτη διαταραχές πυκνότητας. Στην παρούσα ανάλυση, η εξάρτηση από την κλίμακα παραλείπεται (βλ. ωστόσο παράγραφο (3.4)).
2. Την εποχή  $z$ , αφού οι διαταραχές της ύλης είναι χρονοεξαρτώμενες.
3. Το κοσμολογικό μοντέλο και τη βαρύτητα.
4. Τον τύπο του ιχνηλάτη.
5. Το ποσοστό της σκοτεινής ύλης του Σύμπαντος στην εποχή  $z$ .

Στο κεφάλαιο αυτό παρέχουμε ένα γενικό μοντέλο εξέλιξης του bias το οποίο έχει δημοσιευθεί στην εργασία [89]. Το μοντέλο αποτελεί επέκταση του προγενέστερου μοντέλου των Basilakos & Plionis ([90], [91]), το οποίο βασίζεται στη γραμμική θεωρία διαταραχών.

Η συνεισφορά του μοντέλου bias που προτείνουμε εδώ έγκειται στο ότι αυτό μπορεί να εφαρμοσθεί για όλα τα μοντέλα σκοτεινής ενέργειας που αναφέραμε στην εισαγωγή συμπεριλαμβανομένων των εναλλακτικών μοντέλων βαρύτητας. Η ύπαρξη γενικευμένων μοντέλων bias του παρόντος τύπου είναι ένα αναγκαίο βήμα και μπορεί να παράσχει ένα σημαντικό εργαλείο προκειμένου να τεθούν περιορισμοί στα προτεινόμενα στη βιβλιογραφία μοντέλα σκοτεινής ενέργειας, όπως επίσης και να διερευνηθούν πιθανές αποκλίσεις από τη  $\Gamma\Theta\Sigma$ . Επιπλέον, η εξέλιξη του bias με την ερυθρομετάθεση,  $b(z)$ , επιτρέπει να συσχετίσουμε τις παρατηρήσεις με μοντέλα του σχηματισμού των δομών. Σημειώνουμε εδώ ότι έχει δείχθει ότι η συνάρτηση αυτή είναι μία μονότονα αύξουσα συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης (π.χ. βλ. σχήμα (3.1)).

Οι βασικές θεωρήσεις του μοντέλου μας, είναι οι εξής:

1. Η μάζα των ιχνηλατών και η υποκείμενη μάζα μοιράζονται το ίδιο πεδίο ταχυτήτων και το ίδιο βαρυτικό πεδίο.
2. Το bias είναι γραμμικό στις κλίμακες του ενδιαφέροντός μας (το οποίο δεν αποκλείει να εξαρτάται από την κλίμακα σε μικρές, μη γραμμικές κλίμακες).
3. Κάθε άλω σκοτεινής ύλης φιλοξενεί έναν ιχνηλάτη. Η υπόθεση αυτή χρησιμοποιείται μόνο κατά τη σύγκριση του μοντέλου μας με τα αντίστοιχα παρατηρησιακά δεδομένα και όχι στην παραγωγή της συναρτησιακής του μορφής.

Σε αυτό το κεφάλαιο ξεκινάμε με την παράγραφο (3.1) όπου παρουσιάζουμε τα διαφορετικά μοντέλα bias που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία. Στην παράγραφο (3.2) εξαγάγουμε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του γραμμικού bias με την ερυθρομετάθεση [89]. Στην παράγραφο (3.3) παρουσιάζουμε τη λύση της παραπάνω εξίσωσης η οποία είναι η συναρτησιακή μορφή του γραμμικού bias που ισχύει για κάθε μοντέλο σκοτεινής ενέργειας. Στην παράγραφο (3.4) εξηγούμε τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες το γραμμικό bias μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητο από την κλίμακα  $k$  και τέλος, στην παράγραφο (3.5) παρουσιάζουμε ένα γενικό μοντέλο εξέλιξης του bias υποθέτοντας ένα χρονικά εξελισσόμενο πληθυσμό ιχνηλατών.

### 3.1 Τα μοντέλα bias

Υπάρχουν δύο βασικές οικογένειες αναλυτικών μοντέλων bias:

1. Η πρώτη οικογένεια ονομάζεται ‘μοντέλα bias γαλαξιακής συγχώνευσης’, οι βασικές προϋποθέσεις της οποίας είναι το σφαιρικό μοντέλο κατάρρευσης ([92], [93], [94], [95] [96], [97], [98]) και η συνάρτηση της μάζας της άλω που βασίζεται στο φορμαλισμό Press-Schechter (PS) [99]. Στα μοντέλα αυτά, η συνάρτηση μάζας των άλω ορίζεται ως  $n(M, t)dM$ , όπου  $n(M, t)$  ο αριθμός των άλω με μάζες στο διάστημα  $(M, M + dM)$  ανά συνκινούμενο όγκο. Η προσέγγιση προϋποθέτει επίσης ότι οι αρχικές διακυμάνσεις πυκνότητας είναι Γκαουσιανές και μικρές. Σε ένα γραμμικό πεδίο πυκνότητας  $\delta_R(x)$  θα υπάρχουν περιοχές υψηλής πυκνότητας τέτοιες ώστε  $\delta_R(x) > \delta_c$ , όπου  $\delta_c$  η κρίσιμη τιμή της διαταραχής για

να ξεκινήσει η κατάρρευση προς σχηματισμό δέσμιων αντικειμένων. Η συνάρτηση μάζας τότε μπορεί να υπολογιστεί με αρκετή ακρίβεια υπολογίζοντας τον μέσο αριθμό των περιοχών με  $\delta_R(x) > \delta_c$ . Πολλές μελέτες έχουν συγκρίνει τα εν λόγω μοντέλα με αριθμητικές προσομοιώσεις και πέρα από μια γενική συμφωνία των μοντέλων, κάποιες διαφορές έχουν βρεθεί στις λεπτομέρειες για τη συνάρτηση του bias της άλω. Οι διαφορές αυτές έχουν οδηγήσει σε τροποποιήσεις του αρχικού μοντέλου έτσι ώστε να περιλαμβάνει τις επιπτώσεις της ελλειψοειδούς κατάρρευσης [100] ή και στην προσαρμογή νέων παραμέτρων των μοντέλων ([101], [102]), ή ακόμα και σε νέες συναρτησιακές μορφές του bias ([103], [104], [105]).

Σε αυτή την οικογένεια, τα πιο συνηθισμένα μοντέλα bias που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία παρέχουν το bias των άλω ως συνάρτηση της παραμέτρου της κορυφής-ύψους (peak-height parameter),  $\nu$ , η οποία είναι η βασική ελεύθερη παράμετρος και μπορεί να προσδιορισθεί από τα δεδομένα. Ειδικότερα, το  $\nu$  δίνεται από τη σχέση:

$$\nu \equiv \frac{\delta_c(z)}{\sigma(M_h, z)},$$

όπου  $M_h$  είναι η μάζα της άλω και  $\sigma$  είναι η διακύμανση του πεδίου των διαταραχών της ύλης σε ερυθρομετάθεση  $z$  (βλ. εξίσωση (1.96)). Μερικά από τα πιο γνωστά μοντέλα bias αυτής της οικογένειας είναι:

- Το μοντέλο των Sheth, Mo και Tormen (SMT).

Οι Sheth, Mo και Tormen [100] υποστήριξαν την ιδέα μιας ελλειψοειδούς κατάρρευσης όπου τώρα η κρίσιμη διαταραχή της πυκνότητας  $\delta_c$  δεν εξαρτάται μόνο από τη ερυθρομετάθεση  $z$  (όπως συμβαίνει στη σφαιρική κατάρρευση) αλλά και από τη μάζα των δομών. Η τιμή για το  $\delta_c$  αυξάνεται για δομές μικρής μάζας, ενώ για τις δομές μεγάλης μάζας το  $\delta_c$  προσεγγίζει αυτό της σφαιρικής κατάρρευσης. Το μοντέλο bias των SMT [100], το οποίο ισχύει και για άλλα κοσμολογικά μοντέλα εκτός από το EdS (π.χ.  $\Lambda$ CDM, ανοικτό CDM με παράμετρο καμπυλότητας  $k < 0$ ), δίνεται από τη σχέση:

$$b(\nu) = 1 + \frac{1}{\sqrt{a}\delta_c(z)} [\sqrt{a}(a\nu^2) + \sqrt{ab}(a\nu^2)^{1-c} - f(\nu)],$$

όπου  $f(\nu) = \frac{(a\nu^2)^c}{(a\nu^2)^c} + b(1-c)(1-c/2)$ ,  $a = 0.707$ ,  $b = 0.5$  και  $c = 0.6$ .

- Το μοντέλο του Jing.

Ο Jing [101] χρησιμοποίησε υψηλής ανάλυσης προσομοιώσεις N-σωμάτων,



όπου η συνάρτηση μάζας που προκύπτει ακολουθεί τη διαδικασία PS. Το μοντέλο bias σε αυτή την περίπτωση είναι ανεξάρτητο από το σχήμα του πρωταρχικού φάσματος ισχύος, εξαρτάται όμως από τη μάζα της άλω  $M$ , δηλαδή  $b = b(M/M_*)$  με  $M_*$  τη χαρακτηριστική μη γραμμική μάζα για την οποία ισχύει  $\nu(M_*) = 1$ . Το μοντέλο bias του Jing, το οποίο προσαρμόζει τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων με ακρίβεια περίπου 5%, είναι:

$$b(\nu) = \left(\frac{0.5}{\nu^4} + 1\right)^{0.06-0.02n} \left(1 + \frac{\nu^2 - 1}{\delta_c}\right),$$

όπου  $\nu = (M/M_*)^{\nu+3/6}$  και  $n$  ο δείκτης του αρχικού φάσματος ισχύος, για το οποίο ισχύει  $n = \left(\frac{d \ln P(k)}{d \ln k}\right)_{k=2\pi/R}$ .

- *Το μοντέλο των Tinker et al.*

Οι Tinker et al. [104] υπολόγισαν τη συνάρτηση μάζας της άλω σκοτεινής ύλης χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις N-σωμάτων, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τη βαρύτητα. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της σφαιρικής κατάρρευσης προσδιόρισαν τις άλω της σκοτεινής ύλης. Οι άλω σκοτεινής ύλης προσδιορίζονται ως απομονωμένες ψηλές κορυφές του πεδίου πυκνότητας. Η πυκνότητά τους είναι  $\Delta$  φορές μεγαλύτερη από την πυκνότητα του υποβάθρου. Έτσι, η μάζα  $M_\Delta$  και η ακτίνα  $R_\Delta$  μίας άλω συνδέονται μέσω της σχέσης:  $M_\Delta = \frac{4}{3}\pi R_\Delta^3 \rho_m(z)$ , όπου  $\rho_m(z)$  είναι η μέση πυκνότητα του Σύμπαντος. Ο συντελεστής bias στο γραμμικό πεδίο πυκνότητας είναι ίσος με:

$$b(\nu) = 1 - A \frac{\nu^a}{\nu^a + \delta_c^a} + B\nu^b + C\nu^c, \quad (3.4)$$

όπου  $A = 1 + 0.24y \exp[-(\frac{4}{y})^4]$ ,  $a = 0.44y - 0.88$ ,  $C = 0.019 + 0.107y + 0.19 \exp[-(\frac{4}{y})^4]$ ,  $B = 0.183$ ,  $b = 1.5$ ,  $c = 2.4$ , όπου  $y = \log_{10}\Delta$ . Η εξίσωση (3.4) εξελίσσεται ως νόμος δύναμης για μεγάλες μάζες, ομαλοποιείται σε μικρές μάζες και τείνει ασυμπτωτικά στο  $b = 1$  για  $\nu = 0$  με την προϋπόθεση ότι  $a > 0$ .

- *Το μοντέλο των Ma et al.*

Οι Ma et al. [106] υπολόγισαν την εξίσωση του bias λαμβάνοντας υπόψη μια επέκταση του φορμαλισμού PS. Το μοντέλο αυτό εξαρτάται από το σχήμα του φίλτρου που χρησιμοποιείται για την εξομάλυνση του πεδίου

πυκνότητας. Το μοντέλο bias στην περίπτωση αυτή είναι:

$$b(\nu) = 1 + \frac{1}{\sqrt{a}\delta_e[1 - a\kappa + \frac{a\kappa}{2}e^{a\nu^2/2}\Gamma(0, \frac{a\nu^2}{2})]} [a\nu^2 - 1 + \frac{a\kappa}{2}(2 - e^{a\nu^2}\Gamma(0, \frac{a\nu^2}{2}))],$$

όπου  $\Gamma(0, \frac{a\nu^2}{2})$  είναι η μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση Γάμμα. Με τη βοήθεια προσομοιώσεων, οι Ma et al. κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι  $\kappa = 0.23$  και  $a = 0.818$ .

2. Η δεύτερη οικογένεια των μοντέλων bias έχει ως προϋπόθεση ένα συνεχές πεδίο διαταραχών της μάζας των ιχνηλατών και διαταραχές της φωτεινής ύλης οι οποίες είναι ανάλογες με εκείνες της υποκείμενης μάζας (σχέση (3.1)). Οι ιχνηλάτες δρουν ως δοκιμαστικά σωματίδια και χρησιμοποιούνται οι υδροδυναμικές εξισώσεις της κίνησης και της θεωρίας των γραμμικών διαταραχών προκειμένου να προσομοιωθεί η εξέλιξη του bias. Αυτή η οικογένεια μοντέλων μπορεί να διαιρεθεί σε δύο υπο-οικογένειες:

- Τα λεγόμενα μοντέλα ‘διατήρησης του bias’ (bias conserving models) τα οποία χρησιμοποιούν την εξίσωση συνέχειας και την παραδοχή ότι οι ιχνηλάτες και η υποκείμενη μάζα μοιράζονται το ίδιο πεδίο ταχυτήτων ([107], [108], [109], [110], [111], [112]). Τότε η εξέλιξη του bias δίνεται ως η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξεως και έτσι οι Tegmark & Peebles [110] εξήγαγαν:

$$b(z) = 1 + \frac{b_0 - 1}{D(z)},$$

όπου  $b_0$  είναι ο παράγοντας bias στο παρόν και  $D(z)$  είναι ο αύξων τύπος των διαταραχών πυκνότητας (βλ. ενότητα 1.2.4). Ωστόσο, σε αυτά τα μοντέλα bias υπάρχουν δύο βασικά προβλήματα: Το πρώτο είναι το γεγονός ότι αν για μία ομάδα ιχνηλατών η φωτεινή ύλη δεν ιχνηλατεί τη σκοτεινή ύλη στο παρόν, θα ήταν πάντα έτσι και στο παρελθόν (unbiased problem) και το δεύτερο είναι το πρόβλημα της χαμηλής ερυθρομετάθεσης (low redshift problem) δηλαδή ότι αυτό το μοντέλο bias ισχύει μόνο για μικρές ερυθρομεταθέσεις.

- Ένα μοντέλο το οποίο βασίζεται στη βασική εξίσωση για την εξέλιξη των διαταραχών της γραμμικής πυκνότητας, και στην παραδοχή ότι το bias είναι γραμμικό και ανεξάρτητο της κλίμακας. Οι παραπάνω παραδοχές χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή μιας διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης για το

bias (βλ. [90], [91] και [113]). Η προσεγγιστική λύση της τελευταίας ισχύει για τα κοσμολογικά μοντέλα τα οποία βρίσκονται στο πλαίσιο της ΓΘΣ με μία σταθερή με το χρόνο παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης (π.χ. μοντέλα πεμπτουσίας, μοντέλα phantom).

## 3.2 Η εξέλιξη του γραμμικού bias

Σε αυτήν την παράγραφο, παρουσιάζουμε το μοντέλο του bias που αναπτύσσεται στην [89], και που ισχύει για οποιοδήποτε μοντέλο σκοτεινής ενέργειας συμπεριλαμβανομένων των εναλλακτικών μοντέλων βαρύτητας ('Γεωμετρική Σκοτεινή Ενέργεια'). Μια πλήρης αναλυτική περιγραφή μπορεί να εισαχθεί θεωρώντας μία επέκταση της εξίσωσης Poisson σε συνδυασμό με την εξίσωση Euler και την εξίσωση συνέχειας. Η εξίσωση που διέπει την εξέλιξη των διακυμάνσεων της ύλης, για τα μοντέλα όπου η σκοτεινή ενέργεια δεν είναι συζευγμένη με άλλα είδη ύλης (βλ. [48], [50], [52], [53], [49], [51], [54], [55]), δίνεται από:

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{eff}}\rho_m\delta_m = 0. \quad (3.5)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι στην ουσία η εξίσωση (1.52), θέτοντας  $\delta = \delta_m$ , όπου  $\delta_m$  είναι οι διαταραχές που σχετίζονται με τη συνολική ύλη του κοσμικού ρευστού.

Αν υποθέσουμε ότι οι ιχνηλάτες και η υποκείμενη κατανομή της μάζας μοιράζονται το ίδιο πεδίο ταχύτητας, τότε μπορούμε να γράψουμε για τις διαταραχές της συνολικής ύλης ότι:

$$\dot{\delta}_m + \nabla u \simeq 0 \quad (3.6)$$

και για αυτές των ιχνηλατών:

$$\dot{\delta}_{tr} + \nabla u \simeq 0. \quad (3.7)$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε ότι:

$$\dot{\delta}_m - \dot{\delta}_{tr} = 0. \quad (3.8)$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (3.1) και χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3.8), τότε έχουμε:

$$\dot{\delta}_m(1 - b) = b\dot{\delta}_m. \quad (3.9)$$

Αν τώρα λάβουμε υπόψη το μετασχηματισμό:

$$y = b - 1 \quad (3.10)$$

και αντικαταστήσουμε την εξίσωση (3.10) στην εξίσωση (3.9), τότε έχουμε  $\frac{d}{dt}(y\delta) = 0$ . Παραγωγίζοντας την τελευταία ακόμα μία φορά, προκύπτει:

$$y\ddot{\delta}_m = -2\dot{y}\dot{\delta}_m - \dot{y}\delta_m. \quad (3.11)$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (1.52) με το  $y$  και μετά τη συνδυάσουμε με την εξίσωση (3.11) τότε παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση των διαταραχών της ύλης σε συνάρτηση με το  $y$ :

$$\ddot{y}\delta_m + 2(\dot{\delta}_m + H\delta_m)\dot{y} + 4\pi G_{\text{eff}}\rho_m\delta y = 0, \quad (3.12)$$

όπου έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει ότι  $y\dot{\delta}_m = -\dot{y}\delta_m$ . Αλλάζοντας μεταβλητές από το χρόνο  $t$  στον παράγοντα κλίμακας  $a$ , εξάγουμε την εξέλιξη της συνάρτησης  $y(a)$  η οποία έχει μία παρόμοια μορφή με αυτή της εξίσωσης (1.58):

$$\frac{d^2y}{da^2} + \left[ A(a) + \frac{2f(a)}{a} \right] \frac{dy}{da} + B(a)y = 0. \quad (3.13)$$

Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος για να καταλήξουμε στην εξίσωση (3.12) ξεκινώντας από τον ορισμό του γραμμικού bias (εξίσωση (3.1)). Παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς το χρόνο έχουμε:

$$\frac{\partial\delta_{tr}}{\partial t} = b\frac{\partial\delta_m}{\partial t} + \delta_m\frac{\partial b}{\partial t} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2\delta_{tr}}{\partial t^2} = b\frac{\partial^2\delta_m}{\partial t^2} + \delta_m\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} + 2\frac{\partial b}{\partial t}\frac{\partial\delta_m}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (3.5), γράφουμε την αντίστοιχη εξίσωση για τις διαταραχές των ιχνηλατών:

$$\ddot{\delta}_{tr} + 2H\dot{\delta}_{tr} - 4\pi G_{\text{eff}}\rho_m\delta_m = 0. \quad (3.16)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1.52) και (3.16) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.14) και (3.15) καταλήγουμε μετά από μερικές πράξεις στη διαφορική εξίσωση 2ης τάξης:

$$\delta_m\ddot{b} + 2\left(\frac{\partial\delta_m}{\partial t} + H(t)\delta_m\right)\dot{b} + (4\pi G\rho_m\delta_m)b = 4\pi G\rho_m\delta_m. \quad (3.17)$$

Όπως περιγράψαμε στην παράγραφο (1.2.4), οι διαταραχές της ύλης  $\delta_m$  θεωρούνται ότι είναι ανάλογες με τον αύξοντα τύπο του παράγοντα των διαταραχών πυκνότητας  $D_+(t)$ , δηλαδή  $\delta_m = A(x)D_+(t)$ . Θέτοντας  $D_+ \simeq D$ , έχουμε τότε:

$$\frac{\dot{\delta}_m}{\delta_m} = \frac{\dot{D}}{D}$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία στην εξίσωση (3.17), έχουμε:

$$\ddot{b} + 2\left(\frac{\dot{D}}{D} + H(t)\right)\dot{b} + 4\pi G\rho_m b = 4\pi G\rho_m. \quad (3.18)$$

Κάνοντας ξανά την αντικατάσταση  $y = b - 1$  καταλήγουμε τότε εκ νέου στην εξίσωση (3.12).

Στην εργασία των Basilakos & Plionis ([90], [91]), οι επιδράσεις της μη γραμμικής βαρύτητας και της υδροδυναμικής (π.χ. συγχώνευση κ.ά.) θεωρήθηκαν αμελητέες προκειμένου να εξαχθεί η εξέλιξη του γραμμικού bias (βλ. [108], [109], [110]). Έπειτα, χρησιμοποιώντας τη γραμμική θεωρία διαταραχών στο πλαίσιο της ΓΘΣ ( $Q(t) = 1$ ,  $G_{\text{eff}} = G$ ), εξήχθη η εξίσωση (3.12). Αυτή η εξίσωση περιγράφει την εξέλιξη του γραμμικού bias  $b$ , (αφού  $y = b - 1$ ), μεταξύ της συνολικής και της φωτεινής ύλης. Αφού και εδώ κάνουμε την ίδια υπόθεση, όπως και στον αρχικό φορμαλισμό, ότι οι ιχνηλάτες και η υποκείμενη κατανομή της μάζας μοιράζονται το ίδιο πεδίο ταχύτητας και έτσι και το ίδιο πεδίο βαρύτητας, η παραπάνω εξίσωση ισχύει επίσης για οποιαδήποτε κοσμολογικό μοντέλο<sup>2</sup> συμπεριλαμβανομένων αυτών των εναλλακτικών μοντέλων βαρύτητας.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι στην εργασία των Basilakos & Plionis ([90], [91]), έχει παρουσιαστεί μία προσεγγιστική λύση της εξίσωσης (3.12) χρησιμοποιώντας ότι  $f(z) \sim 1$  κάτι το οποίο ισχύει σε σχετικά μεγάλες ερυθρομεταθέσεις αλλά μόνο στο πλαίσιο της ΓΘΣ, δηλαδή  $Q(t) = 1$ , το οποίο όμως ισχύει για το μοντέλο της πεμπτουσίας (ή phantom). Εδώ ο στόχος μας είναι να εξαγάγουμε μία πλήρη αναλυτική λύση για όλες τις πιθανές κοσμολογίες της σκοτεινής ενέργειας που έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία, όπως η κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$  (κενό), οι χρονοεξαρτώμενες  $w(t)$  κοσμολογίες, η πεμπτουσία, το μοντέλο k-essence, το μοντέλο quartessence, τα διανυσματικά πεδία, τα μοντέλα phantom, τα μοντέλα εναλλακτικής βαρύτητας, το αέριο Chaplygin κ.ά. (βλ. [89]).

<sup>2</sup>Η τρέχουσα θεωρητική προσέγγιση δεν εξετάζει το ενδεχόμενο του να υπάρχουν αλληλεπιδράσεις στο κομμάτι της σκοτεινής ύλης. Επίσης κάποιες παρατηρήσεις πέραν της γραμμικής περιόχης μπορούν να βρεθούν στην εργασία των [114], [115] (και στις εκεί αναφορές).

### 3.3 Λύση της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης του bias

Ξεκινάμε αλλάζοντας μεταβλητές από το χρόνο  $t$  στον παράγοντα κλίμακας  $a$  στην εξίσωση (3.12). Για το λόγο αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$\dot{y} = H a y, \quad (3.19)$$

$$\ddot{y} = \dot{a} \left( a y' \frac{dH}{da} + H y' + H a y'' \right), \quad (3.20)$$

όπου  $y' = dy/da$  και  $y'' = d^2y/da^2$  και

$$\frac{\dot{\delta}_m}{\delta_m} = \frac{1}{D} \frac{dD}{da} \frac{da}{dt} = H a \frac{D'}{D} = H a \frac{d \ln D}{da}. \quad (3.21)$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (3.19), (3.20), (3.21) στην εξίσωση (3.12) και ταυτόχρονα διαιρούμε την εξίσωση (3.12) με το  $\dot{a}^2$  κάτι το οποίο μας δίνει:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{H} \frac{dH}{da} + \frac{y'}{a} + y'' + 2 \left( \frac{d \ln D}{da} + \frac{1}{a} y' \right) + \frac{4\pi G \rho_m y}{\dot{a}^2} &= 0 \Rightarrow \\ y'' + y' \left( \frac{d \ln H}{da} + 2 \frac{d \ln D}{da} + \frac{3}{a} \right) + \frac{4\pi G \rho_m y}{\dot{a}^2} &= 0. \end{aligned}$$

Έπειτα αν χρησιμοποιήσουμε:

$$f(a) = \frac{a}{D} \frac{dD}{da} = a \frac{d \ln D}{da} \Rightarrow \frac{d \ln D}{da} = \frac{f(a)}{a}$$

και

$$\frac{d \ln H}{da} = \frac{1}{H} \frac{dH}{da} = \frac{1}{H} H_0 \frac{dE(a)}{da} = \frac{1}{E(a)} \frac{dE(a)}{da} = \frac{d \ln E(a)}{da}$$

τότε:

$$\begin{aligned} y'' + y' \left( \frac{d \ln H(a)}{da} + 2 \frac{d \ln D(a)}{da} + \frac{3}{a} \right) + \frac{3}{2} \frac{H^2 \Omega_m(a)}{a^2 H^2} y &= 0 \Rightarrow \\ y'' + y' \left( \frac{d \ln E(a)}{da} + 2 \frac{f(a)}{a} + \frac{3}{a} \right) + \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m0}}{a^5 E^2(a)} y &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Προκειμένου να λύσουμε την εξίσωση (3.22), είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε την παραμετροποίηση:

$$y(a) = \frac{g(a)}{D(a)}. \quad (3.23)$$

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της εξίσωσης (3.23) ως προς τον παράγοντα κλίμακας  $a$  είναι αντίστοιχα:

$$y' = \frac{g'D - gD'}{D^2} \quad (3.24)$$

και

$$y'' = \frac{g''D^2 - gDD'' - 2g'DD' + 2gD'^2}{D^3} . \quad (3.25)$$

Τώρα αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (3.22) με τον παράγοντα αύξησης  $D$  και επίσης αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις (3.23)-(3.25) στην εξίσωση (3.22), βρίσκουμε:

$$g'' + g' \left( \frac{d \ln E(a)}{da} + \frac{3}{a} \right) + g \left( -\frac{D''}{D} + 2\frac{D'^2}{D^2} - \frac{D'}{D} \left( \frac{d \ln E(a)}{da} + 2\frac{D'}{D} + \frac{3}{a} \right) + \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m0}}{E^2(a)a^5} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$g'' + g' \left( \frac{d \ln E(a)}{da} + \frac{3}{a} \right) = 0 , \quad (3.26)$$

όπου έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει την εξίσωση (1.60).

Η εξίσωση (3.26) είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, η οποία είναι πιο εύκολο να λυθεί σε σχέση με την αρχική εξίσωση (3.12). Θέτοντας  $A(a) = \frac{d \ln E(a)}{da} + \frac{3}{a}$ , τότε μετά από κάποιους υπολογισμούς, έχουμε για την εξίσωση (3.26):

$$g'' + A(a)g' = 0 \Rightarrow \frac{d}{da} (g'e^{\int A(a)da}) = 0 \Rightarrow g'e^{\int A(a)da} = C_1 \Rightarrow$$

$$g(a) = C_1 \int e^{-\int A(a)da} da + C_2 . \quad (3.27)$$

Επιπλέον:

$$\int A(a)da = \ln E(a) + 3 \ln a$$

οπότε μπορούμε τελικά να έχουμε τη λύση της εξίσωσης (3.26):

$$g(a) = C_1 \int \frac{da}{E(a)a^3} + C_2 , \quad (3.28)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης. Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$b = y + 1 = g/D + 1 ,$$

η εξέλιξη του γραμμικού bias  $b(z)$  σε συνάρτηση με τον παράγοντα κλίμακας  $a(t)$  γίνεται:

$$b(a) = 1 + \frac{C_1}{D(a)} + \frac{C_2}{D(a)} \int_a^1 \frac{da}{a^3 E(a)}. \quad (3.29)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:  $a = (1+z)^{-1}$  και  $b_0 \equiv b(0)$  μπορούμε να εκφράσουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης  $C_1$  ως συνάρτηση των αρχικών συνθηκών. Για  $z = 0$  έχουμε  $a = 1$ :

$$b(z=0) = 1 + \frac{C_1}{D(z=0)} + \frac{C_2}{D(z=0)} \int_1^1 \frac{da}{a^3 E(a)} \Rightarrow b_0 = 1 + \frac{C_1}{D(z=0)}.$$

Επιπλέον, όπως έχουμε ήδη δείξει στην παράγραφο (1.2.4.4):

$$D(a) = a e^{\int_0^a (dx/x) [\Omega_m^*(x)-1]}$$

έτσι ώστε  $D(a=1) = 1$ , οπότε:

$$b_0 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = b_0 - 1.$$

Αντικαταθιστώντας την τελευταία σχέση στην εξίσωση (3.29), βρίσκουμε τη συναρτησιακή μορφή της εξέλιξης του γραμμικού bias ως συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης:

$$b(z) = 1 + \frac{b_0 - 1}{D(z)} + C_2 \frac{J(z)}{D(z)}, \quad (3.30)$$

όπου

$$J(z) = \int_0^z \frac{(1+z)dz}{E(z)}.$$

Αφού διαφορετικές μάζες άλω σχετίζονται με διαφορετικές τιμές του  $b_0$ , οι σταθερές ολοκλήρωσης  $C_1 = b_0 - 1$  και  $C_2$  θα πρέπει να είναι συναρτήσεις της μάζας των άλω  $M_h$  (βλ. [113]). Όντως, θεωρώντας ότι κάθε εξωγαλαξιακός ιχνηλάτης μάζας φιλοξενείται από μία άλω σκοτεινής ύλης δεδομένης μάζας, οι σταθερές  $b_0$  και  $C_2$  εξαρτώνται από τη μάζα της άλω όπως έχουν δείξει οι [116] χρησιμοποιώντας  $\Lambda$ CDM προσομοιώσεις N σωμάτων. Οι σταθερές αυτές είναι:

$$b_0(M_h) = 0.857 \left[ 1 + \left( C_m \frac{M_h}{10^{14} h^{-1} M_\odot} \right)^{0.55} \right] \quad (3.31)$$

$$C_2(M_h) = 1.105 \left( C_m \frac{M_h}{10^{14} h^{-1} M_\odot} \right)^{0.255}, \quad (3.32)$$



όπου  $C_m = \Omega_{m0}/0.27$ .

Στην παράγραφο (3.5) αναλύουμε μία επέκταση του παραπάνω μοντέλου στο οποίο διερευνάται η περίπτωση πληθυσμών ιχνηλατών των οποίων οι άλω συγχωνεύονται.

Η συνεισφορά του δικού μας μοντέλου bias έγκειται στο ότι η δική μας λύση έχει πιο γενική μορφή από αυτή των συνήθων μοντέλων διατήρησης bias,  $b(z) = 1 + (b_0 - 1)/D(z)$ , αφού στην τελευταία παραλείπεται ένα τμήμα της πλήρους λύσης. Επιπλέον, η δική μας λύση δεν πάσχει από τα προβλήματα που αναφέρθηκαν στην παράγραφο (3.1) δηλαδή το ‘unbiased’ πρόβλημα και το πρόβλημα των χαμηλών ερυθρομεταθέσεων. Το βασικό, όμως, σημείο είναι ότι η εξάρτηση του δικού μας μοντέλου bias από τις διάφορες κοσμολογίες εισέρχεται μόνο μέσω της διαφορετικής συμπεριφοράς του παράγοντα αύξησης των διαταραχών  $D(a)$ . Περαιτέρω, ο τελευταίος επηρεάζεται από την παράμετρο  $\gamma$  (βλ. εξίσωση (1.67)), και από την κανονικοποιημένη ροή Hubble  $E(a) = H(a)/H_0$ .

Είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι η μέτρηση του δείκτη αύξησης  $\gamma$  θα μπορούσε να προσφέρει έναν αποτελεσματικό τρόπο για να γίνει διάκριση μεταξύ των εναλλακτικών μοντέλων βαρύτητας και των μοντέλων της σκοτεινής ενέργειας τα οποία υπακούουν στη ΓΘΣ. Πράγματι, έτσι όπως δείξαμε στην παράγραφο (1.2.5.1) για τα μοντέλα της σκοτεινής ενέργειας τα οποία υπακούουν στη ΓΘΣ, ο δείκτης αύξησης  $\gamma$  έχει ασυμπτωτική τιμή  $\gamma_{GR} \approx 6/11$  (βλ. [49], [51], [60]), ενώ στην περίπτωση του braneworld μοντέλου DGP [35] έχουμε ότι  $\gamma \approx 11/16$  (βλ. επίσης [49], [51]). Έχει προταθεί (βλ. [117]) ότι ένας αποτελεσματικός τρόπος για να προσδιοριστεί η παράμετρος  $\gamma$  είναι καθορίζοντας παρατηρησιακά τη γραμμική ανάπτυξη των διαταραχών η οποία εξαρτάται από την ερυθρομετάθεση. Στον υπολογισμό αυτό είναι προαπαιτούμενη η γνώση της εξέλιξης του γραμμικού bias, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Εναλλακτικά, άλλες μέθοδοι έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία, όπως οι παραμορφώσεις της παρατηρούμενης χωρικής κατανομής γαλαξιών μέσω της ερυθρομετάθεσης (redshift space distortions) και ο ρυθμός ανάπτυξης των σημένων γαλαξιών (βλ. για παράδειγμα [118], [119], [120] και εκεί παραπομπές). Οι παραπάνω μέθοδοι έχουν επίσης ως προϋπόθεση τη γνώση της εξέλιξης του γραμμικού και ανεξάρτητου της κλίμακας bias.

Όσον αφορά σε παρατηρησιακά δεδομένα για το bias, αυτά προκύπτουν εν γένει με την παραδοχή ενός συγκεκριμένου κοσμολογικού μοντέλου, αλλά είναι εύκολο να τα τροποποιήσουμε για άλλα μοντέλα με αυτοσυνεπή τρόπο. Τέτοια δεδομένα

είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία για την περίπτωση των οπτικών QSOs ([121], [122], [123]).

Για να απεικονιστεί η εξάρτηση του δικού μας μοντέλου bias από την ερυθρομετάθεση και το  $\gamma$ , συγκρίνουμε στο σχήμα (3.1) μερικά χωρικά επίπεδα κοσμολογικά μοντέλα για τα οποία θέτουμε  $\Omega_m = 0.27$ ,  $b_0 = 1.1$  και  $C_2 = 0.45$ . Συγκεκριμένα, θεωρούμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) CPL παραμετροποίηση ([32], [86]) με  $\gamma = 0.55$  (συμπαγής γραμμή),

(β) μοντέλο  $\Lambda$ CDM ( $\gamma = 0.55$ , διακεκομμένη γραμμή), και

(γ) μοντέλο DGP με  $\gamma = 0.68$  (διακεκομμένη με κουκκίδες γραμμή).

Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει την εξέλιξη bias του μοντέλου των Tegmark & Peebles [110], το οποίο περιγράφεται επίσης από το δικό μας bias μοντέλο στο όριο  $C_2 = 0$ . Στο κάτω γράφημα του σχήματος (3.1) δείχνουμε την ποσοστιαία διαφορά του μοντέλου bias στις περιπτώσεις (α) και (γ) σε σχέση με εκείνη του μοντέλου  $\Lambda$ CDM (β). Όπως μπορούμε να δούμε, η διαφορά είναι μικρή σε χαμηλές ερυθρομεταθέσεις.

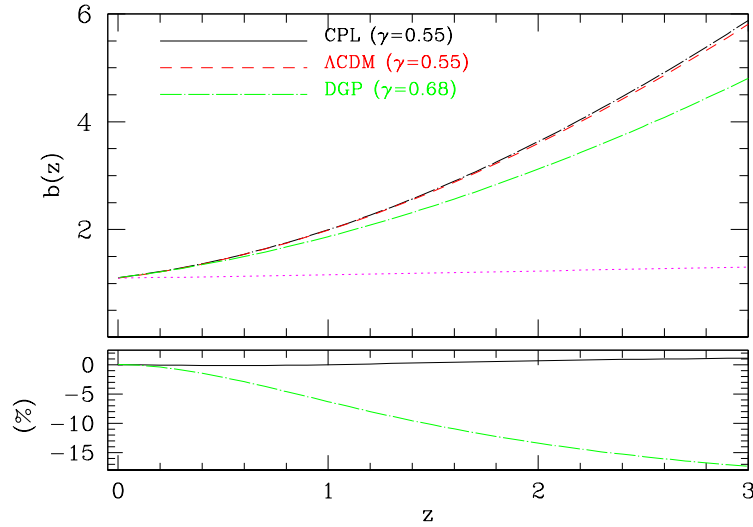
### 3.4 Bias και μετρικές διαταραχές

Στην ανάλυσή μας, έχουμε υποθέσει ότι το γραμμικό bias  $b$  είναι ανεξάρτητο της κλίμακας, δηλαδή ανεξάρτητο από το συνκινούμενο κυματαριθμό  $k$  του τύπου Fourier. Στην παράγραφο αυτή, η υπόθεση αυτή περιγράφεται συνοπτικά δίνοντας αρχικά τις πλήρεις εξισώσεις του εξαρτώμενου από την κλίμακα bias, όπως έχουν περιγραφεί από τους [116] και, στη συνέχεια, εξηγώντας πότε μια τέτοια απλούστευση είναι επιτρεπτή. Ας υποθέσουμε ότι ο συντελεστής bias εξαρτάται από την κλίμακα, δηλαδή:

$$b = b(z, k).$$

Μια τέτοια εξάρτηση μπορεί να ερμηνευθεί, π.χ., ως το αποτέλεσμα διακυμάνσεων στη μετρική FLRW. Οι εξισώσεις (1.52), (3.16) θα πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα αποκτώντας εξάρτηση από το  $k$ . Στο πλαίσιο αυτό, έστω η 'ενεργός βαρυτική συνάρτηση'  $G_{\text{eff}}$ :

$$G_{\text{eff}} = G_{\text{eff}}(a, k) = \frac{G}{1 + \xi_k(a, k)},$$



ΣΧΗΜΑ 3.1: Τα εξαρτώμενα από την ερυθρομετάθεση  $z$  μοντέλα bias για διαφορετικά επίπεδα κοσμολογικά μοντέλα (πάνω διάγραμμα) και η κλασματική τους διαφορά σε σχέση με το  $\Lambda$ CDM μοντέλο (κάτω διάγραμμα). Τα μοντέλα που φαίνονται είναι: το CPL (συμπαγής γραμμή) με  $w(a) = w_0 + w_1(1 - a)$  και  $\gamma = 0.55$ , το μοντέλο  $\Lambda$ CDM (διακεκομμένη γραμμή) και το DGP (διακεκομμένη με κουκκίδες γραμμή) με  $w(a) = -[1 + \Omega_m(a)]^{-1}$  και  $\gamma = 0.68$ . Ας σημειωθεί ότι χρησιμοποιούμε  $\Omega_m = 0.27$ ,  $(w_0, w_1) = (-0.93, -0.38)$  [19],  $b_0 = 1.1$  και  $C_2 = 0.45$ . Σχεδιάζουμε επίσης το μοντέλο bias για  $C_2 = 0$  το οποίο αντιστοιχεί σε αυτό των [110] (γραμμή με κουκκίδες).

όπου  $G$  η συνήθης βαρυτική σταθερά και

$$\xi_k(a, k) = \frac{3a^2 H^2(a)}{c^2 k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σταθερά  $G_{\text{eff}}$ , και υποθέτοντας, στο όριο ( $\frac{k^2}{a^2} \gg H^2$ ), ότι: (i) το bias  $b_0$  είναι ανεξάρτητο της κλίμακας, (ii) ίση επιτάχυνση μεταξύ ιχνηλάτων και συνολικής ύλης, και (iii) αμελητέο βαθμό συγχώνευσης των άλω, προκύπτει ότι η εξέλιξη του bias η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$b(z, k) = 1 + \frac{b_0 - 1}{D(z, k)} + C_2 \frac{J(z)}{D(z, k)}, \quad (3.33)$$

όπου  $D(z, k)$  ο παράγοντας αύξησης των διαταραχών που εξαρτάται από την ερυθρομετάθεση  $z$  και την κλίμακα  $k$ . Στην περίπτωση όπου οι ιχνηλάτες και η μάζα δεν μοιράζονται το ίδιο πεδίο ταχύτητας, ο παράγοντας bias παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$b(z, k) = 1 + \frac{b_0 - 1}{D(z, k)} + \frac{I(z, k)}{D(z, k)}, \quad (3.34)$$

όπου η συνάρτηση  $I(z, k)$  γενικεύει τη συνάρτηση  $J(z, k)$  της εξίσωσης (3.33). Οι εξισώσεις (3.33), (3.34) έχουν παρόμοια μορφή με αυτή του ανεξάρτητου από την κλίμακα bias, εξίσωση (3.30). Ο εξαρτώμενος από την κλίμακα ρυθμός ανάπτυξης της σηματοποίησης  $D(a, k)$  δίνεται από:

$$D(a, k) = \frac{\delta_m(a, k)}{\delta_m(1, k)} = \frac{\delta_m(z, k)}{\delta_m(0, k)},$$

όπου

$$\delta_m(a, k) = a \exp\left[\int_{a_i}^a \frac{da}{a} \left(\frac{\Omega_m^\gamma(a) - 1}{1 + \xi_k(a, k)}\right)\right].$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση  $I(z, k)$  δίνεται από:

$$I(z, k) = \int_0^z \frac{1+z}{E(z)} \frac{k^2}{\delta_m(0, k) H_0} \frac{C_2 H_0 \delta_m(a=1, k)}{a k^2} dz.$$

Στο σχήμα (1) της εργασίας [116] το εξαρτώμενο από την κλίμακα bias και το ανεξάρτητο από την κλίμακα bias συγκρίνονται σε κλίμακες σημών γαλαξιών,  $k \simeq 0.05 h Mpc^{-1}$ . Εκεί, μπορεί κανείς να δει ότι η ποσοστιαία διαφορά μεταξύ των δύο (στο κάτω διάγραμμα) είναι ασήμαντη, κάτι το οποίο σημαίνει ότι οι μετρικές διακυμάνσεις δεν επηρεάζουν την εξέλιξη του bias έως τις κλίμακες των σημών γαλαξιών. Κατά συνέπεια, η υπόθεση ότι ο γραμμικός συντελεστής bias  $b$  είναι ανεξάρτητος της κλίμακας, είναι μία αρκετά καλή προσέγγιση για τη δική μας μελέτη η οποία επικεντρώνεται σε δομές με κλίμακα μικρότερη των σημών γαλαξιών.

### 3.5 Γραμμικό Μοντέλο bias για ένα χρονοεξαρτώμενο πληθυσμό ιχνηλατών

Εξετάζουμε, τέλος, ένα γενικό γραμμικό μοντέλο εξέλιξης του bias που μπορεί να παραχθεί υποθέτοντας ότι ο πληθυσμός των ιχνηλατών της ύλης εξελίσσεται με το χρόνο σύμφωνα με το νόμο  $(1+z)^\nu$ :

Υποθέτουμε ό,τι και στην παράγραφο (3.2), με τη διαφορά ότι εδώ επιτρέπουμε αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ιχνηλατών της ύλης. Η θεώρηση αυτή εισάγει έναν χρονοεξαρτώμενο όρο  $\Psi(t)$  στις εξισώσεις (3.6) και (3.7), δηλαδή:

$$\dot{\delta}_m + \nabla u \simeq 0 \quad \text{και} \quad \dot{\delta}_{tr} + \nabla u + \Psi(t) \simeq 0, \quad (3.35)$$

από την οποία παίρνουμε ότι:

$$\dot{\delta}_m - \dot{\delta}_{tr} = \Psi . \quad (3.36)$$

Αν και δε διαθέτουμε μία θεμελιώδη θεωρία ώστε να μοντελοποιήσουμε το χρονο-εξαρτώμενο όρο  $\Psi(t)$ , υιοθετούμε την παραδοχή όπως προτείνεται στην [113], ότι αυτός εξαρτάται από την αριθμητική πυκνότητα των ιχνηλατών  $\bar{n}$ , την παράγωγο της  $\bar{n}$  ως προς το χρόνο αλλά και από τις διαταραχές πυκνότητας των ιχνηλατών  $\delta_{tr}$ :  $\Psi(t) \propto \Psi(\bar{n}, (1 + \delta_{tr})d \ln \bar{n}/dt)$  (βλ. εξίσωση (10) από [124] και παράρτημα από τους Basilakos et al. [113]). Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και στην παράγραφο (3.2), καταλήγουμε στην επόμενη έκφραση:

$$\ddot{y}\delta_m + 2(\dot{\delta}_m + H\delta_m)\dot{y} + 4\pi G_{\text{eff}}\rho_m\delta_m y = -2H\Psi - \dot{\Psi} , \quad (3.37)$$

η οποία είναι αντίστοιχη με την εξίσωση (3.12).

Μετασχηματίζοντας την εξίσωση (1.52) από τη μεταβλητή  $t$  στη μεταβλητή  $a$ , παίρνουμε:

$$\frac{d^2 y}{da^2} + \left[ A(a) + \frac{2f(a)}{a} \right] \frac{dy}{da} + B(a)y = F(a) , \quad (3.38)$$

όπου

$$F(a) = -\frac{2\Psi(a) + a(d\Psi/da)}{a^2 D(a)H(a)} . \quad (3.39)$$

Έπειτα, ακολουθώντας την ίδια πορεία όπως και στην παράγραφο (3.3), παίρνουμε ότι:

$$\frac{d^2 g}{da^2} + A(a)\frac{dg}{da} = F(a) . \quad (3.40)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (3.40) εξάγουμε τη γενική λύση του συντελεστή bias:

$$g(a) = C_1 + C_2 \int \frac{da}{a^3 E(a)} + \int \frac{da}{a^3 E(a)} \int F(\tilde{a})\tilde{a}^3 E(\tilde{a}) d\tilde{a} . \quad (3.41)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τις ίδιες αρχικές συνθήκες όπως στην παράγραφο (3.3), η εξέλιξη του bias στο χώρο των ερυθρομεταθέσεων παίρνει τη μορφή:

$$b(z) = 1 + \frac{b_0 - 1}{D(z)} + C_2 \frac{J(z)}{D(z)} + \frac{y_p(z)}{D(z)} , \quad (3.42)$$

όπου:

$$y_p(z) = \int_0^z \frac{(1+x)}{E(x)} dx \int_0^x \frac{F(u)E(u)}{(1+u)^5} du . \quad (3.43)$$

Αν η αλληλεπίδραση μεταξύ των ιχνηλατών είναι αμελητέα ( $\Psi \simeq 0$ ), η εξίσωση (3.42) καταλήγει στην (3.30).

Τώρα, η ακριβής γνώση της συναρτησιακής σχέσης  $\Psi(z)$  παρέχει την ακριβή εξέλιξη του bias ως προς την ερυθρομετάθεση. Όπως δείχνεται στο παράρτημα των Basilakos et al. [113], μια κατάλληλη προσέγγιση όσον αφορά στην εξέλιξη του όρου  $\Psi(z)$  είναι η:  $\Psi(z) = AH_0(1+z)^\nu$ , όπου  $\nu \sim 3$ . Σημειώστε ότι η σταθερά Hubble έχει διατηρηθεί για μαθηματική ευκολία. Εισάγοντας την τελευταία εξίσωση,  $a = (1+z)^{-1}$  και την  $d\Psi/da = -(1+z)^2 d\Psi/dz$  στον δεύτερο όρο της εξίσωσης (3.38) αντλούμε ότι:

$$F(z) = A(\nu - 2) \frac{(1+z)^{\nu+2}}{D(z)E(z)}, \quad (3.44)$$

όπου  $A$  θετική παράμετρος που καθορίζεται από παρατηρησιακά δεδομένα. Για  $\nu > 2$ , ο παράγοντας bias που προκύπτει είναι ισχυρότερος από ό,τι στην περίπτωση που δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις, ιδιαίτερα σε υψηλές ερυθρομεταθέσεις. Αυτό σημαίνει ότι, λόγω του φαινομένου της συγχώνευσης των άλω, οι άλω συγκεκριμένης μάζας αντιστοιχούν σε υψηλότερες κορυφές του υποκείμενου πεδίου πυκνότητας σε σχέση με άλω της ίδιας μάζας στην περίπτωση όπου δεν έχουμε αλληλεπιδράσεις. Από την άλλη πλευρά, η περίπτωση  $\nu < 2$  αντιστοιχεί στην καταστροφή των άλω μιας συγκεκριμένης μάζας, η οποία οδηγεί σε ένα χαμηλότερο συντελεστή bias σε σχέση με την περίπτωση όπου δεν είχαμε αλληλεπιδράσεις. Για την οριακή περίπτωση όπου  $\nu = 2$ , παίρνουμε  $y_p = 0$ , δηλαδή δεν έχουμε συνεισφορά του όρου αλληλεπίδρασης στο bias, όπως στην περίπτωση με  $\Psi = 0$ . Η τιμή  $\nu = 2$  μπορεί να ερμηνευθεί ως η περίπτωση κατά την οποία οι διαδικασίες καταστροφής και δημιουργίας είναι αντι-ισορροπημένες.

# Κεφάλαιο 4

## Κοσμολογικά Δεδομένα

Στο παρόν κεφάλαιο, αναλύουμε τρία διαφορετικά σύνολα δεδομένων, προκειμένου να εκτιμηθούν με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια ορισμένες κοσμολογικές παράμετροι, καθώς και ο δείκτης αύξησης των διαταραχών της ύλης  $\gamma$  (βλ. παραγράφους (1.2.4) και (1.2.5)). Αναφερόμαστε στα δεδομένα αυτά ως:

- (i) δεδομένα της συνάρτησης συσχετισμού των ενεργών γαλαξιακών πυρήνων (Active Galactic Nuclei, AGN, παράγραφος 4.1),
- (ii) δεδομένα της συνάρτησης συσχετισμού των φωτεινών ερυθρών γαλαξιών (Luminous Red Galaxies, LRGs, παράγραφος 4.2), και
- (iii) δεδομένα του ρυθμού αύξησης των διαταραχών πυκνότητας (Growth Rate Data, GRD, παράγραφος 4.3).

Παρά το γεγονός ότι η εξαγωγή αυτών καθεαυτών των παρατηρησιακών δεδομένων δεν αποτελεί αντικείμενο της δικής μας μελέτης, παρά μόνο η επεξεργασία, για λόγους πληρότητας παρουσιάζουμε συνοπτικά τα δεδομένα καθεμιάς από τις περιπτώσεις (i),(ii),(iii). Περαιτέρω, μέρος των αποτελεσμάτων της παρούσας μελέτης περιλαμβάνονται στις δημοσιεύσεις [62] και [89]. Τέλος, η ανάλυση των αποτελεσμάτων τόσο στο παρόν κεφάλαιο όσο και στα επόμενα κεφάλαια χρησιμοποιεί το μοντέλο bias που εισαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

## 4.1 Δεδομένα της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού των ενεργών γαλαξιακών πυρήνων ακτίνων $X$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη διάρκεια της ζωής ενός γαλαξία παρουσιάζει η φάση κατά την οποία υπάρχει ροή μάζας στην κεντρική μελανή οπή, έχουμε δηλαδή έναν AGN. Μετά από μερικά εκατομμύρια χρόνια, όταν η μελανή οπή έχει καταναλώσει το σύνολο των καυσίμων που βρίσκονται γύρω της, το αντικείμενο παρατηρείται ως συνήθης γαλαξίας και πάλι.

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα ενός AGN σε σχέση με έναν ανενεργό γαλαξία είναι ότι οι AGN είναι από τις φωτεινότερες πηγές που μπορεί να ανιχνευθούν σε κοσμολογικές αποστάσεις. Επιπλέον, ένα από τα πιο κοινά χαρακτηριστικά τους, η εκπομπή ακτίνων  $X$ , καθιστά τους AGN ικανούς ιχνηλάτες προκειμένου να μελετηθεί ο σχηματισμός των δομών και επομένως οι δομές μεγάλης κλίμακας του Σύμπαντος σε σχετικά υψηλές ερυθρομεταθέσεις ( $z \simeq 1 - 2$ ). Πιστεύεται ότι η κατανόηση τόσο της φυσικής όσο και της παρατηρούμενης σηματοποίησης των AGN θα μας δώσει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το περιβάλλον που τους φιλοξενεί, την υποκείμενη κατανομή της μάζας τους και την εξέλιξη των κοσμικών δομών. Όσον αφορά, ειδικότερα, στη σηματοποίηση των AGN, αρχικά υπήρχαν μόνο οπτικά επιλεγμένα φωτεινά δείγματα AGN, ενώ αργότερα χάρη στις αποστολές *Einstein* και *ROSAT*, καταγράφηκαν πολύ μεγαλύτερα δείγματα AGN ακτίνων  $X$ .

Στη βιβλιογραφία απαντώνται αρκετοί προσδιορισμοί της Γωνιακής Συνάρτησης Συσχετισμού (βλ. παράγραφο (1.3.2.2)) τόσο για τους οπτικούς AGN όσο και για τους AGN ακτίνων  $X$ . Στην παρούσα μελέτη, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση συσχετισμού των Ebrero et al. [125]. Αυτή βασίζεται στη μεγαλύτερη έρευνα πηγών ακτίνων  $X$  που έχει ποτέ χρησιμοποιηθεί για ανάλυση σηματοποίησης. Ο πληθυσμός των πηγών ακτίνων  $X$  βασίζεται σε 1.063 παρατηρήσεις με το τηλεσκόπιο XMM-Newton, σε υψηλά γαλαξιακά πλάτη και σε τρεις διαφορετικές ζώνες ενέργειας: στις μαλακές (0.5–2keV), στις σκληρές (2–10keV) και στις πολύ σκληρές (4.5–10keV) ακτίνες  $X$  στις οποίες ο κατάλογος της έρευνας περιλαμβάνει 31.288, 9.188 και 1.259 πηγές αντίστοιχα. Οι παρατηρήσεις αυτές πληρούν τα ακόλουθα κριτήρια:

- αποφεύγουν την επίδραση από ενδο-Γαλαξιακές πηγές, δεδομένου ότι οι παρατηρήσεις έχουν γίνει σε υψηλά γεωγραφικά Γαλαξιακά πλάτη,



- απορρέουν από σχετικά μεγάλο χρόνο έκθεσης (τουλάχιστον 5ks, ανά πεδίο παρατήρησης), και
- τα πεδία παρατήρησης είναι απαλλαγμένα από άλλου είδους φωτεινές ή/και εκτεταμένες πηγές ακτίνων  $X$ .

Στη δική μας παρακάτω μελέτη, αξιοποιούμε τα δεδομένα σηματοποίησης μόνο των πηγών που προέρχονται από παρατηρήσεις των μαλακών ακτίνων  $X$ . Σύμφωνα με τους Ebrero et al. [125], οι παρατηρούμενοι AGN σε αυτές τις ενέργειες τείνουν να εμφανίζουν μεγάλο βαθμό σηματοποίησης, ενώ οι παρατηρούμενοι AGN σε υψηλότερες ενέργειες δεν είναι αντιπροσωπευτικοί ως προς τη σηματοποίηση λόγω του μικρού στατιστικού τους αριθμού που κυμαίνεται από οριακά σημαντικός έως και μηδενικής στατιστικής σημαντικότητας.

Οι επιλεγμένες πηγές καλύπτουν μια περιοχή του ουρανού περίπου  $125.5\text{deg}^2$ , έχουν μια κατανομή ερυθρομεταθέσεων με μία μέση μετατόπιση προς το ερυθρό  $\bar{z} \simeq 1$ , και οι ροές εκπομπής τους είναι στο διάστημα  $f_x > 1.4 \cdot 10^{-15} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Ωστόσο, στη δική μας μελέτη θεωρούμε ένα διαφορετικό κατώφλι για το κατώτερο όριο ροής, συγκεκριμένα  $f_x > 3.4 \cdot 10^{-15} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , επειδή η ευαισθησία του τηλεσκοπίου XMM-Newton υποβαθμίζεται αισθητά από το κέντρο προς την άκρη του οπτικού πεδίου και κατά συνέπεια η θεωρούμενη ως ελάχιστη ροή διαφέρει από σημείο σε σημείο εντός της συνολικής περιοχής της έρευνας [126].

Η διαδικασία, τώρα, που ακολουθείται για την παραγωγή των παρατηρησιακών δεδομένων της συνάρτησης συσχετισμού  $w_{obs}(\theta)$  των επιλεγμένων AGN ακτίνων  $X$  είναι εν συντομία η εξής: Αρχικά, ένα τυχαίο δείγμα ίσου πληθυσμιακού αριθμού με το πραγματικό δημιουργείται έτσι ώστε να συγκριθεί με το πραγματικό δείγμα. Η διαδικασία παραγωγής του τυχαίου δείγματος λαμβάνει υπόψιν τόσο τα ποσοστά μετρήσεων ως συνάρτηση της απόστασης από τον οπτικό άξονα του τηλεσκοπίου, όσο και την ευαισθησία του οργάνου σε διάφορα σημεία του πεδίου παρατήρησης και περιγράφεται με λεπτομέρεια στην εργασία των [127]. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογιστεί η γωνιακή συνάρτηση συσχετισμού των AGN ακτίνων  $X$ . Για το λόγο αυτό, οι Ebrero et al. [125] χρησιμοποίησαν τον εκτιμητή των Landy & Szalay [128]:

$$w_{obs}(\theta) = \frac{DD(\theta) - 2DR(\theta) + RR(\theta)}{RR(\theta)}, \quad (4.1)$$

όπου  $DD(\theta)$ ,  $DR(\theta)$  και  $RR(\theta)$  είναι ο κανονικοποιημένος αριθμός των ζευγαριών AGN-AGN, AGN-τυχαίου σημείου και τυχαίου σημείου-τυχαίου σημείου αντίστοιχα,

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1: Τα δεδομένα της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού των επιλεγμένων AGN ακτίνων  $X$  οι οποίοι παρατηρούνται στην περιοχή των μαλακών ενεργειών (0.5 – 2keV) [125]. Τα  $\theta''$  και  $\delta\theta''$  συμβολίζουν τις τιμές των κεντρικών γωνιών (σε arcsec) και του εύρους κάθε διαστήματος τιμών των γωνιών  $\theta$  εντός του οποίου ομαδοποιούνται οι παρατηρήσεις για τον υπολογισμό των στατιστικών ποσοτήτων που υπεισέρχονται στην εξίσωση (4.1).

$\theta''$	$\delta\theta''$	$w(\theta)$	$\delta w(\theta)$
56.482	6.482	0.325	0.046
71.128	8.163	0.293	0.036
89.572	10.280	0.193	0.029
112.798	12.946	0.117	0.021
142.046	16.303	0.135	0.018
178.878	20.530	0.082	0.016
225.261	25.853	0.096	0.011
283.671	32.557	0.105	0.009
357.226	40.999	0.037	0.007
449.855	51.630	0.025	0.006

με γωνιακό διαχωρισμό των αντίστοιχων ζευγών σημείων ίσο με  $\theta$ . Τα ζευγάρια  $DD(\theta)$ ,  $DR(\theta)$  και  $RR(\theta)$  κανονικοποιούνται διαιρώντας τα με το συνολικό αριθμό των ζευγών στο δείγμα. Όσον αφορά στα σφάλματα των τιμών της  $w_{obs}(\theta)$  για διάφορες τιμές της γωνίας  $\theta$ , λόγω του ότι τα σφάλματα σε διαφορετικά γωνιακά διαστήματα δεν είναι ανεξάρτητα, για τον υπολογισμό των σφαλμάτων χρησιμοποιείται η τεχνική της μήτρας συνδιακύμανσης (βλ. π.χ. [129]).

Στον πίνακα (4.1) συνοψίζουμε τα δεδομένα της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού των AGN ακτίνων  $X$  όπως προκύπτουν από την εργασία των Ebrero et al. [125]. Τα δεδομένα αυτά θα τα συγκρίνουμε παρακάτω με τις προβλέψεις διάφορων θεωρητικών μοντέλων.

Προκειμένου να εκτιμηθεί η θεωρητική γωνιακή συνάρτηση συσχετισμού για δοσμένο θεωρούμενο κοσμολογικό μοντέλο, χρειάζεται να γνωρίζουμε την αριθμητική κατανομή των ερυθρομεταθέσεων των υπό μελέτη πηγών,  $dN/dz$ , η οποία μπορεί να εκτιμηθεί από ένα συγκεκριμένο μοντέλο συνάρτησης φωτεινότητας, όπως περιγράφουμε αμέσως μετά. Για το σκοπό αυτό, γράφουμε τη συνάρτηση επιλογής (βλ. εισαγωγή, παράγραφο (1.3.3)) ως:

$$\phi(x) = \int_{L_{min}(z)}^{\infty} \Phi(L_X, z) dL_X, \quad (4.2)$$

όπου  $\Phi(L_X, z)$  είναι η συνάρτηση φωτεινότητας (που ορίζεται ως ο αριθμός των πηγών ανά μονάδα όγκου σε ένα συγκεκριμένο διάστημα φωτεινότητας) των AGN

με  $L_X$  τη φωτεινότητα ενός αντικειμένου στις ακτίνες  $X$ .

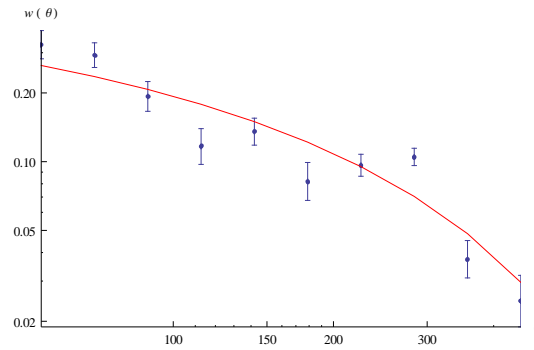
Η κανονικοποιημένη αριθμητική κατανομή των ερυθρομεταθέσεων  $N^{-1} \frac{dN}{dz}$  υπολογίζεται για το δείγμα των AGN που βρίσκονται στην περιοχή των μαλακών ακτίνων  $X$ , χρησιμοποιώντας το μοντέλο των Ebrero et al. [125] (βλ. σχήμα 4.2). Η συνάρτηση φωτεινότητας ακτίνων  $X$ , ( $X$ -ray luminosity function, XLF) των Ebrero et al. [130], δίνεται ως ένας διπλός νόμος δύναμης. Ειδικότερα, σε αυτό το μοντέλο η XLF εξελίσσεται όχι μόνο με την ερυθρομετατόπιση, αλλά και με τη φωτεινότητα (Luminosity-Dependent Density Evolution, LDDE). Ο διπλός νόμος δύναμης έχει τη μορφή:

$$\frac{d\Phi(L_X, z)}{d\log L_X} = A \left[ \left( \frac{L_X}{L_0} \right)^{\gamma_1} + \left( \frac{L_X}{L_0} \right)^{\gamma_2} \right]^{-1} \left( \frac{1+z}{1+z_c} \right)^p \quad (4.3)$$

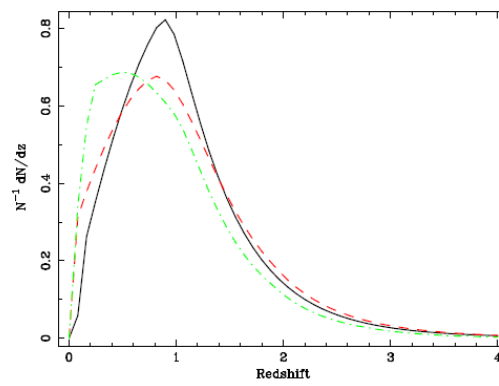
όπου  $A$  είναι ο παράγοντας κανονικοποίησης,  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  είναι οι δύο λογαριθμικές κλίσεις του νόμου και  $L_0$  η τιμή της φωτεινότητας στην οποία συμβαίνει η αλλαγή στην κλίση. Επίσης, το  $p$  ονομάζεται δείκτης εξέλιξης και σχετίζεται με το πόσο φωτεινό είναι το δείγμα,  $z_c$  είναι το κέντρο του κάθε διαστήματος στο εύρος ερυθρομεταθέσεων και τέλος το εύρος της φωτεινότητας ξεκινά από την τιμή  $\log L_X = 41,7$  έως τη μέγιστη τιμή φωτεινότητας στο δείγμα. Συνεπώς, αντικαθιστώντας τη σχέση (4.3) στη σχέση (4.2) και ολοκληρώνοντας την τελευταία, μπορούμε να πάρουμε τη συνάρτηση επιλογής  $\phi(x)$  για την περίπτωση των AGN ακτίνων  $X$ .

Μετά από τα παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε τη θεωρητική γωνιακή συνάρτηση συσχετισμού, σχέση (1.95), για την περίπτωση των επιλεγμένων AGN ακτίνων  $X$  για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM ( $w(y) = -1$ ) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.6), (2.1), (1.92), (1.93), (1.94), (3.2) και (3.3).

Τα δεδομένα της ACF των AGN μαζί με τα σφάλματά τους και η αντίστοιχη θεωρητική τους καμπύλη  $w_{th}(\theta)$  εμφανίζονται στο σχήμα (4.1). Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι η θεωρητική καμπύλη δεν προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα παρατηρησιακά δεδομένα κάτι που οφείλεται κατά κύριο λόγο στο γεγονός ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν μεγάλη διασπορά. Επομένως, θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε καταρχάς ότι τα συγκεκριμένα δεδομένα των AGN ακτίνων  $X$  δεν φαίνεται να είναι ένα ικανοποιητικό δείγμα για τη μελέτη της σηματοποίησης με απώτερο σκοπό την εξαγωγή κοσμολογικών παραμέτρων. Νέα δεδομένα μεγαλύτερης ακρίβειας είναι απαραίτητα προκειμένου να είναι εφικτός ο έλεγχος διαφόρων κοσμολογικών δεδομένων χρησιμοποιώντας AGN ακτίνων  $X$ .



ΣΧΗΜΑ 4.1: Τα δεδομένα της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού των AGN με τα αντίστοιχα σφάλματά τους μαζί με την αντίστοιχη θεωρητική τους καμπύλη.



ΣΧΗΜΑ 4.2: Η κανονικοποιημένη φωτομετρική κατανομή των ερυθρομεταθέσεων των AGN (4.2). Η μαύρη συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στους AGN των μαλακών ακτίνων X ( $0.5-2\text{keV}$ ), η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή στους AGN των σκληρών ακτίνων X ( $2-10\text{keV}$ ) και η πράσινη διακεκομμένη γραμμή στους AGN των πολύ σκληρών ακτίνων X ( $4.5-10\text{keV}$ ) ([125]).

## 4.2 Δεδομένα της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού των Φωτεινών Ερυθρών Γαλαξιών

Οι φωτεινοί ερυθροί γαλαξίες είναι γαλαξίες που έχουν επιλεγεί με το κριτήριο του χρώματος και του μεγέθους προκειμένου να εξαχθεί ένα δείγμα γαλαξιών οι οποίοι είναι σε μεγαλύτερη μέση απόσταση σε σύγκριση με τη μέση απόσταση των γαλαξιών της έρευνας Sloan Digital Sky Survey (SDSS).

Σε γενικές γραμμές, οι γαλαξίες της έρευνας SDSS παρουσιάζουν μεγάλες διαφοροποιήσεις ως προς τη λαμπρότητα και την κατανομή των φασματικών τους ενεργειών

(Spectral Energy Distribution, SED). Ωστόσο, η SED των LRGs εμφανίζει αξιόλογη ομοιομορφία, στο βαθμό που καθιστά εφικτό να συμπεράνουμε με καλή ακρίβεια την τιμή της ερυθρομετάθεσης για ένα γαλαξία LRG παρατηρώντας το χρώμα, και γενικότερα τη SED τους ([131], [132], [133], [134]). Λόγω των παραπάνω, είναι εφικτός ο προσδιορισμός καλών δειγμάτων LRGs προς χρήση σε κοσμολογικές μελέτες [135] συγκεκριμένα για τους εξής λόγους:

1. Τα LRGs παρατηρούνται σε σχετικά μεγάλες ερυθρομεταθέσεις ( $z \simeq 1$ ).
2. Εξαιτίας του υψηλού γραμμικού bias<sup>1</sup> που παρουσιάζουν, παρέχουν τη δυνατότητα να ανιχνευθούν πυκνότητες των BAOs στην κατανομή υποβάθρου της ύλης σε κλίμακες της τάξης των  $100h^{-1}Mpc$  [139].
3. Οι ομοιόμορφες SED τους μας δίνουν την ευκαιρία να επιλέξουμε ένα ομοιογενές δείγμα.
4. Η γωνιακή συνάρτηση συσχετισμού τους μπορεί να μετρηθεί από φωτομετρικά δείγματα [139].

Τα δεδομένα της συνάρτησης γωνιακού συσχετισμού των LRGs που χρησιμοποιούμε παρακάτω, έχουν επιλεγεί φωτομετρικά από την έρευνα SDSS, που αποτελείται από 1.562.800 αντικείμενα και παρέχει δεδομένα των LRGs σε τρεις διαφορετικές περιοχές ερυθρομετάθεσης:

- Η έρευνα SDSS-LRG, η οποία εκτείνεται έως  $z \simeq 0.5$  με μία μέση τιμή  $\bar{z} = 0.35$ .
- Οι έρευνες 2dF-SDSS LRG και QSO (2SLAQ) οι οποίες αφορούν γαλαξίες σε ενδιάμεσες έως σε υψηλές ερυθρομεταθέσεις ( $z > 0.4$  με μέση τιμή  $\bar{z} = 0.55$ ).
- Η έρευνα AAOmega LRG, η οποία αφορά φωτομετρικά επιλεγμένα LRGs έως  $z \simeq 1.0$ , με μέση τιμή  $\bar{z} = 0.7$ .

Τα γαλαξιακά δείγματα καλύπτουν  $\simeq 7.600deg^2$  του ουρανού, διερευνώντας ένα συνολικό όγκο  $\simeq 5.5h^{-3}Gpc^3$ . Σε μικρές και μεσαίες κλίμακες, οι συναρτήσεις συσχετισμού γενικά παρουσιάζουν σημαντικές αποκλίσεις από έναν απλό νόμο δύναμης, με ένα καλά ανιχνεύσιμο 'σπάσιμο' της λογαριθμικής κλίσης στην κλίμακα  $\sim 1h^{-1}Mpc$ .

<sup>1</sup>Η εξάρτηση της τιμής του γραμμικού bias από τη φωτεινότητα αναμένεται στο σενάριο της ιεραρχικής σηματοποίησης του Σύμπαντος [136], όπως έχουν δείξει παρατηρησιακά κάποιοι συγγραφείς (βλ. για παράδειγμα [137], [138]).

Ωστόσο, και στις μεγάλες κλίμακες φαίνεται να υπάρχει μια απόκλιση από ένα ενιαίο νόμο δύναμης [139].

Η δική μας μελέτη βασίζεται στο δεύτερο από τα παραπάνω δείγματα, δηλαδή τα δεδομένα της συνάρτησης συσχετισμού των 2SLAQ LRGs με μια μέση ερυθρομετάθεση  $\bar{z} \simeq 0.55$ . Ειδικότερα, έχουν χρησιμοποιηθεί τα δεδομένα της συνάρτησης συσχετισμού των 655.775 φωτομετρικά επιλεγμένων LRGs από τον κατάλογο SDSS DR5. Το δείγμα έχει συνταχθεί χρησιμοποιώντας τα ίδια κριτήρια επιλογής με τις έρευνες 2dF-SDSS LRG και Quasars, οι οποίες καλύπτουν το εύρος ερυθρομεταθέσεων:  $0.45 < z < 0.8$ . Ακολουθώντας την αρχική εργασία των [139], χρησιμοποιούμε τη γωνιακή συνάρτηση συσχετισμού έως και τη γωνιακή κλίμακα των  $\theta = 6000''$ , προκειμένου να αποφύγουμε τις επιπτώσεις των (BAOs).

Δεδομένου ότι στόχος είναι να θέσουμε παρατηρησιακούς περιορισμούς στο γραμμικό δείκτη αύξησης  $\gamma$ , αποκλείουμε επίσης μικρές γωνιακές κλίμακες ( $\theta < 140''$ ), οι οποίες αντιστοιχούν σε κλίμακες  $\leq 1 h^{-1} Mpc$  για τιμή της ερυθρομετάθεσης ίση με μία τιμή αναφοράς  $z_*$  (βλ. παρακάτω) που αντιστοιχεί στο χαρακτηριστικό βάθος του επιμέρους δείγματος που μελετάται. Ο αποκλεισμός αυτός γίνεται προκειμένου να μη συμπεριληφθούν στη μελέτη της συνάρτησης  $w(\theta)$  κλίμακες όπου αναμένονται ισχυρά μη γραμμικά φαινόμενα. Ωστόσο, κάνουμε ούτως ή άλλως χρήση μιας ήπιας μη γραμμικής διόρθωσης (βλ. παρακάτω και παράγραφο (1.3.5)).

Για την εξαγωγή των δεδομένων της συνάρτησης συσχετισμού, χρησιμοποιείται μια παρόμοια διαδικασία όπως αυτή που περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο για τους AGN ακτίνων  $X$ . Λεπτομέρειες δίνονται στην εργασία των [139]. Ειδικότερα, η γωνιακή συνάρτηση συσχετισμού των LRGs που υπολογίζεται στην [139] χρησιμοποιεί τον εκτιμητή ελάχιστης διακύμανσης των Landy & Szalay:

$$w(\theta) = 1 + \left(\frac{N_{RD}}{N}\right)^2 \frac{DD(\theta)}{RR(\theta)} - 2 \frac{N_{RD}}{N} \frac{DR(\theta)}{RR(\theta)},$$

όπου  $DD(\theta)$  είναι ο αριθμός των ζευγών LRG-LRG με γωνιακό διαχωρισμό εντός των διαστημάτων με γωνιακό κέντρο  $\theta$ , και αντίστοιχα  $DR(\theta)$  είναι ο αριθμός των ζευγών LRG-τυχαίου σημείου και  $RR(\theta)$  ο αριθμός των ζευγών τυχαίου-τυχαίου σημείου. Ο λόγος  $\frac{N_{RD}}{N}$  είναι ο συντελεστής κανονικοποίησης, όπου  $N_{RD}$  είναι ο συνολικός αριθμός των τυχαίων σημείων και  $N$  ο συνολικός αριθμός των LRGs. Σημειώνουμε ότι η μέθοδος εκτιμά τη συνάρτηση συσχετισμού  $w(\theta)$  καλύτερα εφόσον  $N_{RD} \gg N$  ( $N_{RD} \geq 10N$  στην [139]).

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2: Τα δεδομένα της συνάρτησης συσχετισμού των 2SLAQ LRGs από τους [139]. Στην τέταρτη στήλη χρησιμοποιούμε τα σφάλματα bootstrap που σημαίνει ότι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τις αβεβαιότητες των [139] με  $\sqrt{3}$ .

$\theta''$	$\delta\theta''$	$w(\theta)$	$\delta w(\theta)$
153.72	33.6	0.285	0.0061
230.64	18.6	0.199	0.0038
345.96	13.2	0.152	0.0026
518.94	10.26	0.113	0.0019
778.2	7.08	0.078	0.0018
1167.6	5.46	0.055	0.0012
1751.4	3.6	0.038	0.0011
2626.8	2.28	0.0226	0.0009
3600	1.68	0.0144	0.0008
4800	1.08	0.0086	0.00076
6000	0.84	0.0054	0.00067

Λόγω του γεγονότος ότι αβεβαιότητες στην αριθμητική πυκνότητα των LRGs οδηγούν σε σφάλματα του εκτιμητή Landy-Szalay, ειδικά σε μεγάλες κλίμακες όπου το πλάτος των διαταραχών είναι μικρό, στην [139] τα αποτελέσματα ελέγχονται περαιτέρω, συγκρίνοντάς τα με τις τιμές της  $w(\theta)$  που υπολογίζονται μέσω του εκτιμητή Hamilton:

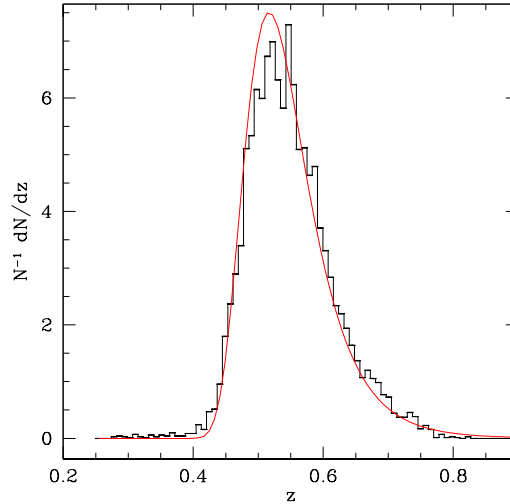
$$w(\theta) = \frac{DD(\theta)RR(\theta)}{(DR(\theta))^2} - 1.$$

Από τη σύγκριση αυτή δε διαπιστώθηκε σημαντική διαφορά ανάμεσα στους δύο εκτιμητές.

Στον πίνακα (4.2) παραθέτουμε τις ακριβείς αριθμητικές τιμές των δεδομένων της συνάρτησης συσχετισμού με τα αντίστοιχα σφάλματά τους που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση μας, έτσι όπως προκύπτουν από τα παραπάνω. Σημειώστε ότι χρησιμοποιούμε τα σφάλματα bootstrap που σημαίνει ότι στον πίνακα (4.2) πολλαπλασιάζουμε τις αβεβαιότητες των [139] με  $\sqrt{3}$ .

Σχετικά με την κατανομή των ερυθρομεταθέσεων των LRGs, χρησιμοποιούμε ένα αναλυτικό μοντέλο προσαρμογής της κατανομής των φωτομετρικών τους ερυθρομεταθέσεων. Στην εργασία [140] βρίσκουμε ότι η κατανομή των ερυθρομεταθέσεων μπορεί να αποδοθεί από τον ακόλουθο εμπειρικό τύπο προσαρμογής:

$$\frac{dN}{dz} \propto \left(\frac{z}{z_*}\right)^{(a+2)} e^{-\left(\frac{z}{z_*}\right)^\beta} \quad (4.4)$$



ΣΧΗΜΑ 4.3: Η κανονικοποιημένη φωτομετρική κατανομή των ερυθρομεταθέσεων των 2SLAQ LRGs. Η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η αντίστοιχη θεωρητική καμπύλη σύμφωνα με τη σχέση (4.4).

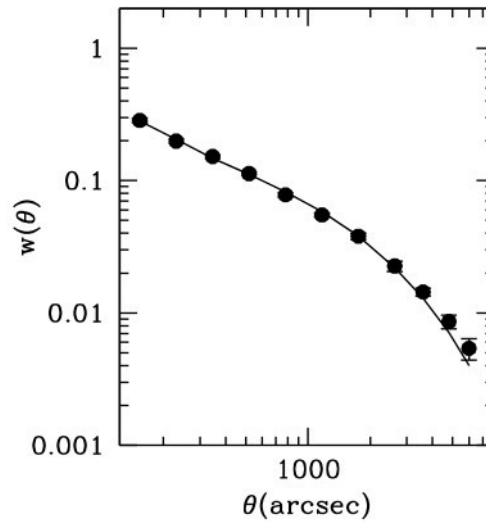
με παραμέτρους:

$$(a, \beta, z_*) = (-15.53, -8.03, 0.55). \quad (4.5)$$

Στο σχήμα (4.3), παρουσιάζονται η εκτιμώμενη κανονικοποιημένη κατανομή ως προς τις ερυθρομεταθέσεις ( $\frac{1}{N} \frac{dN}{dz}$ ) και η αντίστοιχη καμπύλη προσαρμογής που παρέχεται από την εξίσωση (4.4). Από το σχήμα επιβεβαιώνουμε ότι η κατανομή των LRGs είναι μία κατανομή με μέση τιμή κοντά στο  $\bar{z} = 0.55$ .

Επίσης, στο σχήμα (4.4) απεικονίζονται τα δεδομένα της 2pACF των LRGs μαζί με τα αντίστοιχα σφάλματά τους καθώς και η αντίστοιχη θεωρητική καμπύλη. Η θεωρητική καμπύλη έχει υπολογιστεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στους AGN (βλ. παράγραφο (4.1)), με τη μόνη διαφορά να υπεισέρχεται στη συναρτησιακή μορφή της αριθμητικής κατανομής των ερυθρομεταθέσεων  $dN/N$ . Για τα LRGs χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (4.4) και (4.5) [140]. Από αυτή τη γραφική παράσταση μπορούμε να συνάγουμε ότι η θεωρητική καμπύλη προσαρμόζεται με πάρα πολύ καλή ακρίβεια στα δεδομένα αφού η διασπορά τους είναι μικρή, γεγονός που μας κάνει να σκεφτόμαστε, καταρχάς, πως η χρήση των LRGs για μελέτες σηματοποίησης μπορεί να είναι αρκετά ικανοποιητική. Αν συγκρίνουμε μάλιστα το διάγραμμα (4.4) που αντιστοιχεί στα LRGs με το αντίστοιχο των AGN, σχήμα (4.1), τότε εύκολα μπορούμε να καταλάβουμε πως η χρήση των δεδομένων των LRGs έναντι των δεδομένων των AGN για μελέτες σηματοποίησης της ύλης, είναι περισσότερο υποσχόμενη.





ΣΧΗΜΑ 4.4: Τα δεδομένα της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού των LRGs με τα αντίστοιχα σφάλματά τους μαζί με την αντίστοιχη θεωρητική τους καμπύλη.

### 4.3 Τα Δεδομένα του Ρυθμού Αύξησης

Η τρίτη μέθοδος που χρησιμοποιούμε για τον έλεγχο των μοντέλων εξέλιξης των διαταραχών πυκνότητας βασίζεται σε παρατηρησιακά δεδομένα του ρυθμού αύξησης (παράγραφοι (1.2.4), (1.2.5)).

Τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης (GRD) που χρησιμοποιούμε εδώ βασίζονται στις γαλαξιακές έρευνες PSCz, 2dF, VVDS, SDSS, 6dF, 2MASS, BOSS και WiggleZ. Οι έρευνες αυτές προσδιορίζουν παρατηρησιακά τιμές για το γινόμενο του ρυθμού αύξησης των δομών  $f(z)$ , επί την εξαρτώμενη από την ερυθρομετάθεση μέση τετραγωνική τιμή (rms) των διαταραχών  $\sigma_8(z)$  (παράγραφος (1.3.4)). Οι τιμές αυτές παρέχονται ως συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης:

$$A = f(z)\sigma_8(z). \quad (4.6)$$

Ο παρατηρούμενος ρυθμός αύξησης των δομών ( $f_{obs} = \beta b$ ) προέρχεται από την παράμετρο στρέβλωσης της απόστασης των γαλαξιών  $\beta(z)$  που προκύπτει από τη μέτρηση της ερυθρομετάθεσης (redshift-space distortions) και το γραμμικό bias. Παρατηρησιακά, χρησιμοποιώντας τη χωρική συνάρτηση συσχετισμού μπορούμε να έχουμε την παράμετρο  $\beta(z)$  λόγω του ότι η βαρυτική έλξη της ύλης σε περιοχές

υψηλής πυκνότητας προκαλεί αλλαγές στις ιδιοταχύτητες των δομών οι οποίες αποκρίνονται από τη ροή Hubble, στοιχείο που είναι σημαντικό προκειμένου να μελετήσουμε την εξέλιξη των δομών. Όμως δεν μπορούμε να βασιστούμε αποκλειστικά στη μέτρηση της παραμέτρου  $f$ , καθώς η ποσότητα αυτή εξαρτάται από το κοσμολογικό μοντέλο. Από την άλλη, ο γραμμικός παράγοντας bias μπορεί να οριστεί ως ο λόγος των διαταραχών της ύλης των ιχνηλατών (π.χ. γαλαξίες, QSOs κ.τ.λ.) προς αυτές της συνολικής ύλης ομαλοποιημένος στα  $8h^{-1}Mpc$ :  $b(z) = \sigma_{8,tr}(z)/\sigma_8(z)$ , όπου το  $\sigma_{8,tr}(z)$  μετράται κατευθείαν από το δείγμα. Συνδυάζοντας τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει ότι  $f\sigma_8 = \beta\sigma_{8,tr}$ . Τώρα, ο εκτιμητής  $A = f\sigma_8$  είναι ένας σχεδόν ανεξάρτητος τρόπος έκφρασης της παρατηρούμενης ιστορίας της εξέλιξης των διαταραχών του Σύμπαντος (βλ. [141]).

Καθώς διαφορετικοί συγγραφείς έχουν υπολογίσει το  $f\sigma_8$  χρησιμοποιώντας διαφορετικές κοσμολογίες, παρακάτω μετατρέπουμε τις παρεχόμενες από διάφορες μελέτες τιμές, κάνοντας αναγωγή στο ίδιο κοσμολογικό υπόβαθρο, προκειμένου να είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα με συνέπεια.

Συγκεκριμένα, έστω ότι θέλουμε να ανάγουμε την τιμή των δεδομένων του ρυθμού αύξησης  $f\sigma_8$  από ένα δοθέν κοσμολογικό μοντέλο αναφοράς, συμβολιζόμενο ως (Ref), στην κοσμολογία υποβάθρου. Ο ορισμός των  $f(z) \simeq \Omega_m(z)^{\gamma(z)}$  και  $\sigma_8(z) = \sigma_8 D(\Omega_{m0}, z)$  (παράγραφος (1.2.4.4)) διορθώνεται με βάση τον τύπο:

$$C_f = \frac{f\sigma_{8,obs}}{f\sigma_{8,obs}^{Ref}} = \left[ \frac{\Omega_m(z)}{\Omega_m^{Ref}(z)} \right]^{\gamma(z)} \frac{\sigma_8 D(\Omega_{m0}, z)}{\sigma_8^{Ref} D(\Omega_{m0}^{Ref}, z)} \quad (4.7)$$

όπου ο δείκτης ‘obs’ αναφέρεται στις παρατηρούμενες τιμές στο μοντέλο αναφοράς, ή τις αναμενόμενες από τις παρατηρήσεις τιμές όπως θα είχαν διορθωθεί αν αυτή του μοντέλου (Ref) είχε χρησιμοποιήσει το μοντέλο της κοσμολογίας υποβάθρου. Να σημειωθεί ότι τα δεδομένα των  $f\sigma_{8,obs}^{Ref}$  και τα αντίστοιχα σφάλματά τους μπορούν να βρεθούν στον πίνακα 1 του [142].

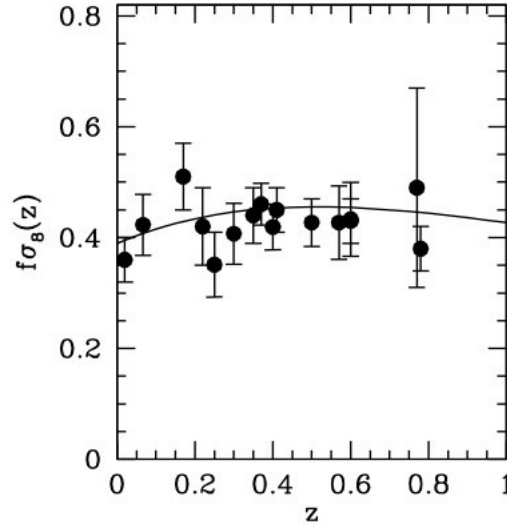
Στην παρούσα μελέτη, το συνολικό δείγμα που χρησιμοποιούμε περιέχει 16 σημεία. Στον πίνακα (4.3) παραθέτουμε τις ακριβείς αριθμητικές τιμές των σημείων του ρυθμού αύξησης με τα αντίστοιχα σφάλματά τους. Τα δεδομένα αυτά έχουν προκύψει από τις παρακάτω έρευνες:

- Ένας μέσος όρος των αποτελεσμάτων των Davis et al. [143] οι οποίοι ανέλυσαν 2.830 ιδιοταχύτητες για  $z < 0.033$  και σύγκριναν αυτές με τις προβλέψεις του πεδίου πυκνοτήτων των γαλαξιών που προέρχονται από το Two Micron All Sky

Survey Redshift Survey [144] και με το αποτέλεσμα που λαμβάνεται από τους Hudson & Turnbull [145] το οποίο βασίζεται στη σύγκριση σημείου με σημείο των προβλεπόμενων και παρατηρούμενων ιδιοταχυτήτων. Αυτό το δείγμα μας παρέχει 1 δεδομένο στον πίνακα (4.3).

- Τα αποτελέσματα από την έρευνα 6dFGS που βασίζονται σε 81.971 γαλαξίες οι οποίοι είναι κατανεμημένοι σε πάνω από  $17.000 \text{ deg}^2$ . Αυτό το δείγμα παρέχει επίσης 1 δεδομένο [146] στον πίνακα (4.3).
- Τα δεδομένα που βασίστηκαν στις έρευνες 2dF [147], SDSS-LRG [148] και VVDS [118] όπως συλλέχθηκαν από τους [141]. Το δείγμα αυτό μας παρέχει 3 σημεία στον πίνακα (4.3).
- Τα αποτελέσματα από την έρευνα SDSS (DR7) των [149] τα οποία βασίζονται σε φασματοσκοπικά δεδομένα από  $\sim 106.000$  LRGs στο διάστημα των ερυθρομεταθέσεων  $0.16 < z < 0.44$ . Το δείγμα αυτό μας παρέχει 2 σημεία στον πίνακα (4.3).
- Τα αποτελέσματα από την έρευνα WiggleZ των [150] τα οποία βασίζονται σε φασματοσκοπικά δεδομένα από  $\sim 152.000$  γαλαξίες στο SDSS-III BOSS  $0.1 < z < 0.9$ . Από τα παραπάνω έχουν εξαχθεί 4 δεδομένα στον πίνακα (4.3).
- Τα αποτελέσματα των μετρήσεων της ανισότροπης σηματοποίησης των μαζικών γαλαξιών από την έρευνα SDSS-III BOSS με βάση 264.283 γαλαξίες στο διάστημα των ερυθρομεταθέσεων  $0.43 < z < 0.7$ . Αυτό το δείγμα παρέχει 1 δεδομένο [151] στον πίνακα (4.3).
- Ο συνδυασμός των δεδομένων από τις έρευνες SDSS I, II and III στο διάστημα των ερυθρομεταθέσεων  $0.25 < z < 0.65$ . Από τις έρευνες αυτές παίρνουμε 4 δεδομένα [152] στον πίνακα (4.3).

Στο σχήμα (4.5) απεικονίζονται τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης καθώς και η θεωρητικά εκτιμώμενη συνάρτηση του ρυθμού αύξησης  $f(z)\sigma_8(z)$  (συνεχής γραμμή) με βάση το μοντέλο του καθιερωμένου κοσμολογικού υποβάθρου. Από το γράφημα αυτό παρατηρούμε ότι η θεωρητική καμπύλη που αφορά στο γινόμενο  $f\sigma_8$  προσαρμόζεται αρκετά καλά στα δεδομένα για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM.



ΣΧΗΜΑ 4.5: Σύγκριση των δεδομένων (κουκίδες) και της θεωρητικής εξέλιξης του ρυθμού αύξησης  $f(z)\sigma_8(z)$ . Προκειμένου να σχεδιάσουμε τη θεωρητική καμπύλη χρησιμοποιούμε  $(\Omega_{m0}, \gamma) = (0.29, 0.56)$  (για περισσότερες πληροφορίες βλ. παράγραφο (5.2)).

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3: Δεδομένα του ρυθμού αύξησης και οι αναφορές τους.

$\alpha/\alpha$	$z$	ρυθμός αύξησης ( $f\sigma_{8,obs}$ )	Αναφορές
1	0.02	$0.360 \pm 0.040$	[145]
2	0.067	$0.423 \pm 0.055$	[146]
3	0.17	$0.510 \pm 0.060$	[147], [141]
4	0.35	$0.440 \pm 0.050$	[141], [148]
5	0.77	$0.490 \pm 0.180$	[141], [118]
6	0.25	$0.351 \pm 0.058$	[149]
7	0.37	$0.460 \pm 0.038$	[149]
8	0.22	$0.420 \pm 0.070$	[150]
9	0.41	$0.450 \pm 0.040$	[150]
10	0.60	$0.430 \pm 0.040$	[150]
11	0.78	$0.380 \pm 0.040$	[150]
12	0.57	$0.427 \pm 0.066$	[151]
13	0.30	$0.407 \pm 0.055$	[152]
14	0.40	$0.419 \pm 0.041$	[152]
15	0.50	$0.427 \pm 0.043$	[152]
16	0.60	$0.433 \pm 0.067$	[152]

## Κεφάλαιο 5

# Ο δείκτης αύξησης των διαταραχών της ύλης στο μοντέλο $\Lambda$ CDM και στο μοντέλο DGP

Στο παρόν κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης των δομών που βασίζονται στις έρευνες 2dFGRS, SDSS-LRG, VIMOS-VLT Deep Survey (VVDS), WiggleZ για τα οποία ο συνδυασμός των παραμέτρων τους, δηλαδή του ρυθμού αύξησης των δομών,  $f(z)$  (βλ. παράγραφο 1.2.4.4), και των rms διακυμάνσεων του γραμμικού πεδίου πυκνότητας,  $\sigma_8(z)$  (βλ. παράγραφο 1.3.4), είναι διαθέσιμος ως συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τεχνικές ανάλυσης της θεωρίας πιθανοτήτων προκειμένου να συγκρίνουμε τα δεδομένα αύξησης των δομών που προκύπτουν από τις παραπάνω έρευνες, με παραμετροποιήσεις του δείκτη αύξησης των δομών ως προς την ερυθρομετάθεση όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, παράγραφος (1.2.5.2). Σκοπός είναι να θέσουμε περιορισμούς στην τιμή του δείκτη αύξησης των διαταραχών της ύλης  $\gamma$  ως συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης ελέγχοντας ταυτόχρονα ποιο από τα δύο συγκρινόμενα μοντέλα βαρύτητας, δηλαδή το μοντέλο  $\Lambda$ CDM και το μοντέλο DGP (βλ. εισαγωγή, παράγραφος 1.1.5) προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα των παρατηρήσεων. Επισημαίνουμε ότι η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για το μελλοντικό έλεγχο άλλων εναλλακτικών μοντέλων βαρύτητας.

Μέρος των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου περιλαμβάνονται στην εργασία [62].

## 5.1 Προσαρμογή Μοντέλων στα δεδομένα

Στην παράγραφο (1.2.5) είδαμε ότι οι βασικές ελεύθερες παράμετροι που υπεισέρχονται στη θεωρητική πρόβλεψη οποιουδήποτε κοσμολογικού μοντέλου για τον παράγοντα αύξησης είναι οι παράμετροι  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  και  $\Omega_{m0}$ . Έστω  $\mathbf{p}$  το διάνυσμα παραμέτρων που ορίζεται ως:  $\mathbf{p} \equiv (\gamma_0, \gamma_1, \Omega_{m0})$ . Έχοντας ως στόχο να εκτιμήσουμε ποσοτικά τις ελεύθερες παραμέτρους του διανύσματος  $\mathbf{p}$  με το ελάχιστο σφάλμα προσαρμογής, πραγματοποιούμε μία τυπική διαδικασία ελαχιστοποίησης  $\chi^2$  που αφορούν σε εννέα από τα δεδομένα του πίνακα (4.3), (γραμμές 3 έως 11). Η ποσότητα  $A_{obs} = f_{obs}(z)\sigma_{8,obs}(z)$ , όπως δίνεται στον πίνακα (4.3) συγκρίνεται με τις τιμές που προβλέπονται από διάφορα μοντέλα στις συγκεκριμένες ερυθρομεταθέσεις  $A(\mathbf{p}, z) = f(\mathbf{p}, z)\sigma_8(\mathbf{p}, z)$  με  $\sigma_8(\mathbf{p}, z) = \sigma_{8,0}D(\mathbf{p}, z)$  (βλ. σχέση (1.97) παράγραφος 1.3.4). Η συνάρτηση  $\chi^2$  ορίζεται ως:

$$\chi^2(z_i|\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{A_{obs}(z_i) - A(\mathbf{p}, z_i)}{\sigma_i} \right]^2, \quad (5.1)$$

όπου  $\sigma_i$  είναι η παρατηρησιακή αβεβαιότητα στην τιμή του  $A_{obs}$  (3η στήλη στον πίνακα (4.3)). Προκειμένου να χαρακτηρίσουμε την ποιότητα προσαρμογής που δίνει κάθε εξεταζόμενο μοντέλο, χρησιμοποιούμε το διορθωμένο Κριτήριο Πληροφορίας του Akaike για δείγματα μικρού μεγέθους ( $AIC_c$ , [153], [154]), το οποίο ορίζεται στην περίπτωση των Γκαουσιανών σφαλμάτων ως:

$$AIC_c = \chi_{min}^2 + 2k + \frac{2k(k-1)}{N-k-1}, \quad (5.2)$$

όπου  $k$  είναι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων και  $N$  το πλήθος τιμών του δείγματος. Μικρότερες τιμές του  $AIC_c$  υποδεικνύουν ότι το μοντέλο παρέχει καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα. Ωστόσο, μικρές διαφορές στην τιμή του  $AIC_c$  δεν είναι αναγκαστικά σημαντικές. Ως εκ τούτου, προκειμένου να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα δύο διαφορετικών μοντέλων, π.χ. των μοντέλων  $x$ ,  $y$ , στην αναπαραγωγή των δεδομένων, πρέπει να βρούμε τη διαφορά:

$$\Delta AIC_c = AIC_{c,y} - AIC_{c,x}. \quad (5.3)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1: Στατιστικά αποτελέσματα για τα συνδυαστικά δεδομένα προσαρμογής των παραμέτρων  $\gamma_0$  και  $\gamma_1$  μέσω δύο μοντέλων βαρύτητας ( $\Lambda$ CDM ή DGP), χρησιμοποιώντας παρατηρησιακά δεδομένα, τα στοιχεία (3) έως (11) του πίνακα (4.3) και τέσσερα διαφορετικά μοντέλα παραμετροποίησης του δείκτη  $\gamma$  (βλ. κείμενο).

Μοντέλο Διαστολής	Μοντέλο Παραμετροποίησης	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\chi^2_{min}/dof$	$AIC_c$
$\Lambda$ CDM	$\Gamma_0$	$0.602 \pm 0.055$	0	7.10/7	9.10
	$\Gamma_1$	$0.400^{+0.086}_{-0.080}$	$0.603 \pm 0.241$	5.74/6	10.41
	$\Gamma_2$	$0.311^{+0.085}_{-0.080}$	$1.221 \pm 0.343$	5.26/6	9.94
	$\Gamma_3$	$0.345^{+0.085}_{-0.080}$	$1.006 \pm 0.314$	5.06/6	9.74
DGP	$\Gamma_0$	$0.503 \pm 0.060$	0	5.32/7	7.32
	$\Gamma_1$	$0.441^{+0.094}_{-0.090}$	$0.164 \pm 0.221$	5.10/6	9.73
	$\Gamma_2$	$0.401^{+0.094}_{-0.090}$	$0.384 \pm 0.320$	5.00/6	9.66
	$\Gamma_3$	$0.412^{+0.093}_{-0.090}$	$0.321 \pm 0.290$	4.94/6	9.60

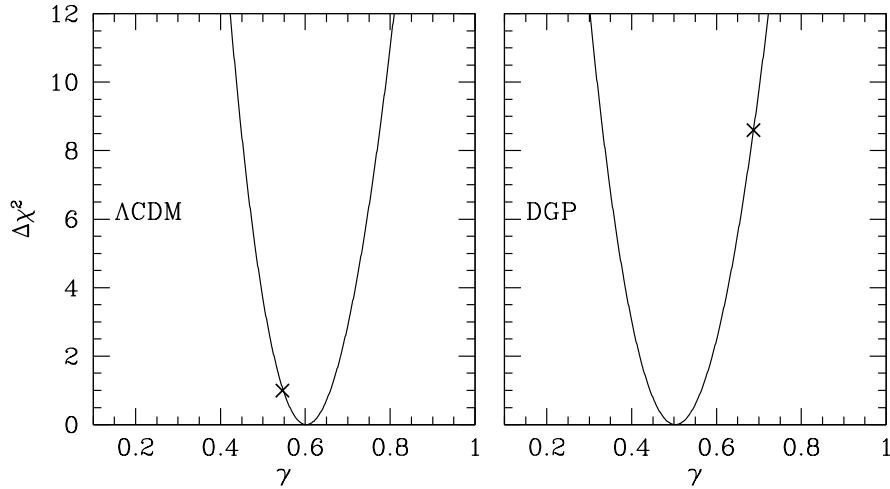
Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του  $|\Delta AIC_c|$ , τόσο υψηλότερη είναι η ένδειξη ενάντια στην πιθανότητα ισχύος του μοντέλου με την υψηλότερη τιμή  $AIC_c$  ανάμεσα στο ζεύγος. Συγκεκριμένα, αν  $|\Delta AIC_c| \gtrsim 2$  τότε η ένδειξη χαρακτηρίζεται ως ‘ισχυρή’, ενώ αν  $|\Delta AIC_c| \gtrsim 6$  η ένδειξη χαρακτηρίζεται ως ‘πολύ ισχυρή’. Αντίθετα αν  $AIC_c \lesssim 2$  τότε υπάρχει παρόμοια πιθανότητα ισχύος μεταξύ των δύο συγκρινόμενων μοντέλων.

Εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία προκειμένου να συγκρίνουμε μεταξύ τους τα μοντέλα  $\Lambda$ CDM και DGP υιοθετώντας διάφορες μορφές παραμετροποίησης του δείκτη αύξησης  $\gamma(z)$ , και ειδικότερα τις μορφές  $\Gamma_0$  έως  $\Gamma_3$  που αναφέρονται στην εισαγωγή, παράγραφος (1.2.5.2).

Ο πίνακας (5.1) συνοψίζει τα σχετικά αποτελέσματα. Γενικά, βρίσκουμε ότι τα αποτελέσματά μας είναι σε συμφωνία (στο επίπεδο αβεβαιότητας  $1\sigma$ ) με προηγούμενες μελέτες όπως αυτές των [155], [60], [68], [156], [63], [157]. Θα δώσουμε τώρα λεπτομερή στοιχεία για κάθε μία από τις προσαρμογές του πίνακα (5.1), επισημαίνοντας τα καινούρια στοιχεία που προκύπτουν από τη μελέτη αυτή.

### 5.1.1 Σταθερός δείκτης αύξησης των δομών

Αρχικά θεωρούμε την παραμετροποίηση  $\Gamma_0$  με ( $\gamma = \gamma_0$ ,  $\gamma_1 = 0$ , βλ. παράγραφο (1.2.5.2)). Το αντίστοιχο στατιστικό διάνυσμα γίνεται:  $\mathbf{p} \equiv (\gamma, 0, \Omega_{m0})$ . Θα περιορίσουμε την παρούσα ανάλυσή μας στην επιλογή  $(\Omega_{m0}, \sigma_{8,0}) = (0.273, 0.811)$ , όπως



ΣΧΗΜΑ 5.1: Αριστερό Διάγραμμα: Η διακύμανση  $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{min}^2$  γύρω από τη βέλτιστη τιμή προσαρμογής του δείκτη αύξησης  $\gamma$  για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM. Ο σταυρός αντιστοιχεί στο  $(\gamma_{\Lambda}, \Delta\chi_{1\sigma}^2) = (\frac{6}{11}, 1)$ . Δεξί Διάγραμμα: Τα στατιστικά αποτελέσματα στην περίπτωση του μοντέλου DGP. Ο σταυρός αντιστοιχεί στο  $(\gamma_{DGP}, \Delta\chi_{3\sigma}^2) = (\frac{11}{16}, 9)$ .

προκύπτει από την ανάλυση των παρατηρήσεων WMAP7 [19]<sup>1</sup>. Προκειμένου να βρούμε το μοντέλο βέλτιστης προσαρμογής θεωρούμε το σύνολο δοκιμαστικών τιμών της παραμέτρου  $\gamma_0$  στο διάστημα  $\gamma_0 \in [0.1, 1.3]$  με βήμα 0.001.

### 5.1.1.1 $\Lambda$ CDM

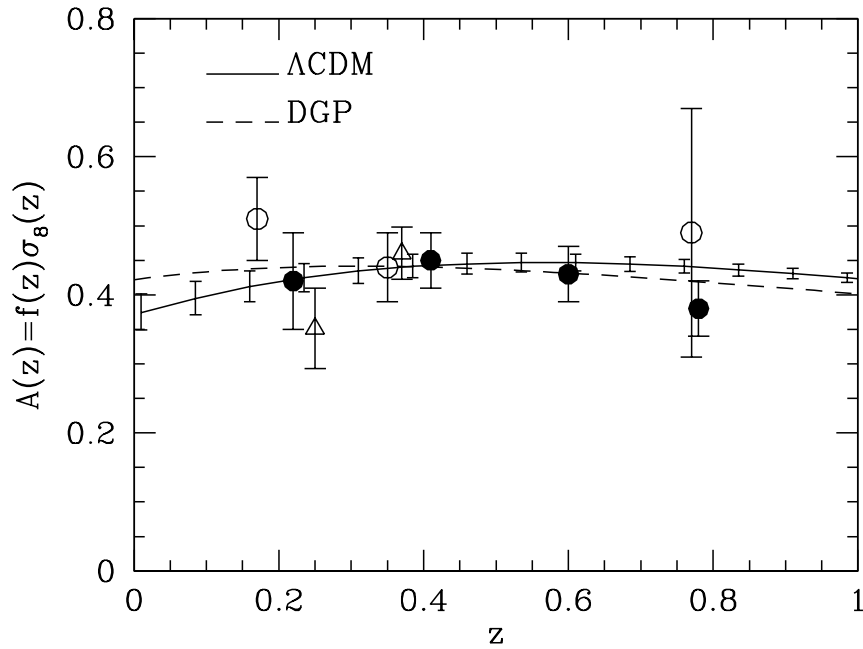
Στο αριστερό διάγραμμα του σχήματος (5.1) δείχνουμε τη διακύμανση του  $\Delta\chi^2 = \chi^2(\gamma) - \chi_{min}^2(\gamma)$  γύρω από την τιμή βέλτιστης προσαρμογής του  $\gamma$  για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM. Βρίσκουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας των δεδομένων του ρυθμού αύξησης των δομών έχει κορυφή την  $\gamma = 0.602 \pm 0.055$  με  $\chi_{min}^2 \simeq 7.1$  για 7 βαθμούς ελευθερίας<sup>2</sup>. Εναλλακτικά, σκεπτόμενοι τη θεωρητική τιμή του  $\gamma$  που αναφέρεται στο  $\Lambda$ CDM, δηλαδή  $\gamma (\equiv 6/11)$ , και ελαχιστοποιώντας σε σχέση με το  $\Omega_{m0}$ , βρίσκουμε  $\Omega_{m0} = 0.243 \pm 0.034$  (βλ. επίσης [60]) με  $\chi_{min}^2/dof \simeq 7.37/7$ .

Τα αποτελέσματά μας, όσον αφορά στο  $\gamma$ , είναι σε συμφωνία μέσα σε 1σ σφάλματα, σε σχέση με αυτά των [149] που βρήκαν  $\gamma = 0.584 \pm 0.112$ . Η βέλτιστη προσαρμοσμένη τιμή που προέρχεται από τη δική μας εργασία είναι λίγο μεγαλύτερη και σχεδόν

<sup>1</sup>Για το μοντέλο DGP, οι Gong [68] βρήκαν  $\Omega_{m0} = 0.278$ .

<sup>2</sup>Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.67) στην ανάλυση των πιθανοτήτων για τη συνήθη  $\Lambda$  Κοσμολογία, παίρνουμε  $\gamma = 0.595 \pm 0.071$  με  $\chi_{min}^2/dof \simeq 7.59/7$ . Σημειώνουμε ότι για το μοντέλο DGP χρησιμοποιούμε μόνο την εξίσωση (1.67).





ΣΧΗΜΑ 5.2: Σύγκριση της παρατηρούμενης και θεωρητικής εξέλιξης του ρυθμού αύξησης των δομών  $A(z) = f(z)\sigma_8(z)$ . Η συνεχής γραμμή και η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχούν στο  $\Lambda$ CDM μοντέλο ( $\gamma = 0.602$ ) και στο DGP ( $\gamma = 0.503$ ) μοντέλο διαστολής αντίστοιχα. Οι λεπτές γραμμές των μπαρών σφαλμάτων αντιστοιχούν στις αβεβαιότητες εντός του  $1\sigma$   $\gamma$  για τη  $\Lambda$  Κοσμολογία. Δε σχεδιάζουμε τις αβεβαιότητες  $1\sigma$  για το DGP μοντέλο προκειμένου να αποφύγουμε τη σύγχυση. Τα διαφορετικά σύνολα δεδομένων του ρυθμού αύξησης των δομών εκπροσωπούνται από διαφορετικά σύμβολα. Οι ανοικτοί κύκλοι αντιστοιχούν στον αριθμό των δεδομένων (3)-(5), τα λευκά τρίγωνα αντιστοιχούν στους αριθμούς των δεδομένων (6),(7) και οι μαύροι κύκλοι αντιστοιχούν στα δεδομένα με αριθμούς (8)-(11) του πίνακα (4.3).

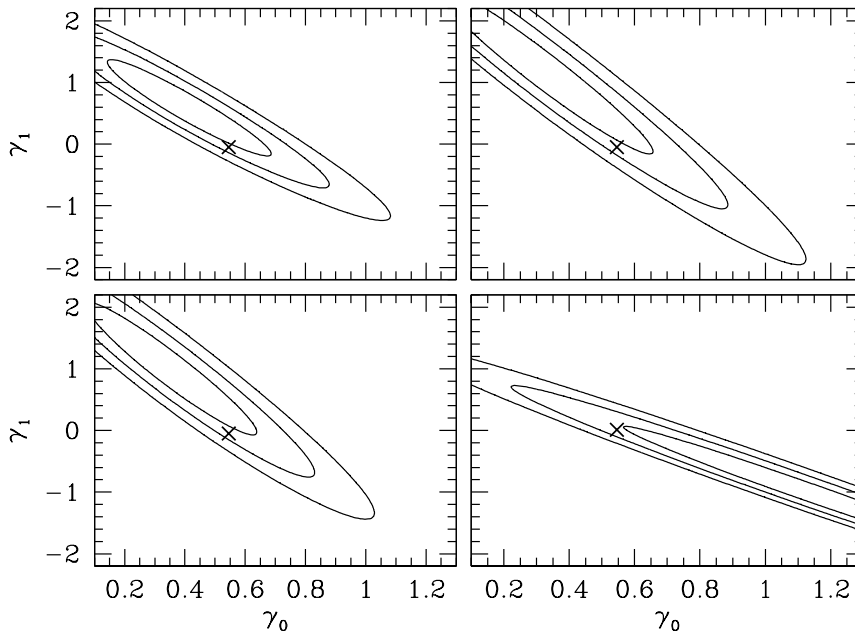
$1\sigma$  ( $\Delta\chi^2_{1\sigma} \simeq 1$ ) μακριά, από τη θεωρητικά προβλεπόμενη τιμή, δηλαδή  $\gamma_\Lambda \simeq 6/11$  (βλ. σταυρό στο αριστερό διάγραμμα του σχήματος (5.1)). Είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε εδώ ότι μια τέτοια μικρή διαφορά μεταξύ της θεωρητικής ( $\Lambda$ CDM) τιμής και της προσαρμοσμένης από παρατηρήσεις τιμής του  $\gamma$ , έχει επίσης βρεθεί από άλλους συγγραφείς. Για παράδειγμα, οι Di Porto et al. [155] βρήκαν  $\gamma = 0.60^{+0.40}_{-0.30}$ , ο Gong [68]  $\gamma = 0.64^{+0.17}_{-0.15}$ , ενώ οι Nesseris & Perivolaropoulos [60] βρήκαν  $\gamma = 0.67^{+0.20}_{-0.17}$ . Πρόσφατα, ο Basilakos [157] και οι Hudson & Turnbull [145] χρησιμοποιώντας μία παρόμοια ανάλυση βρήκαν  $\gamma = 0.613^{+0.088}_{-0.083}$  και  $\gamma = 0.619 \pm 0.054$  αντίστοιχα.

### 5.1.1.2 DGP

Σχετικά με το μοντέλο DGP (βλ. δεξιό διάγραμμα του σχήματος (5.1)), η τιμή βέλτιστης προσαρμογής της παραμέτρου είναι  $\gamma = 0.503 \pm 0.06$  με  $\chi^2_{min}/dof \simeq 5.32/7$ . Εναλλακτικά, αν θεωρήσουμε την τιμή  $\gamma = 11/16$  που προβλέπεται από το μοντέλο DGP, βρίσκουμε μία κάπως μεγάλη τιμή για τον αδιάστατο παράγοντα της πυκνότητας της ύλης για το παρόν,  $\Omega_{m0} = 0.380 \pm 0.042$  με  $\chi^2_{min}/dof \simeq 5.38/7$ . Επιπλέον, η τιμή του  $AIC_{C,DGP} (\simeq 7.32)$  είναι μικρότερη σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή για το  $\Lambda$ CDM η οποία υποδεικνύει ότι το μοντέλο DGP ( $\gamma_{DGP} = 0.503$ ) φαίνεται τώρα να προσαρμόζει κάπως καλύτερα τα δεδομένα αύξησης των δομών από το  $\Lambda$ CDM. Ωστόσο, η μικρή τιμή του  $|\Delta AIC_c|$  (δηλαδή,  $\sim 1.8$ ) υποδεικνύει ότι τα δύο συγκρινόμενα μοντέλα αντιπροσωπεύουν τα δεδομένα αύξησης των δομών σε ένα στατιστικά ισοδύναμο επίπεδο. Επίσης, από το δεξί διάγραμμα του σχήματος (5.1), είναι ξεκάθαρο ότι η παράμετρος  $\gamma$  βέλτιστης προσαρμογής είναι πολύ χαμηλότερα και σχεδόν  $3\sigma$  ( $\Delta\chi^2_{3\sigma} \simeq 9$ ) μακριά, από τη θεωρητική  $\gamma_{DGP} \simeq 11/16$  (βλ. σταυρό στο δεξί διάγραμμα του σχήματος (5.1)) το οποίο σημαίνει ότι τα δεδομένα αύξησης των δομών δεν επιβεβαιώνουν το μοντέλο DGP. Τονίζουμε εδώ ότι οι παραπάνω παρατηρησιακές τιμές είναι σε συμφωνία με προηγούμενες μελέτες που βασίζονται σε διαφορετικά είδη παρατηρησιακών δεδομένων. Όντως, ο Wei [158] βρήκε ότι  $\gamma = 0.438^{+0.126}_{-0.111}$ , ο Gong [68] και οι Dosset et al. [63] βρήκαν  $\gamma = 0.55^{+0.14}_{-0.13}$  και  $\gamma = 0.483^{+0.113}_{-0.088}$  αντίστοιχα. Στο σχήμα (5.2), σχεδιάζουμε τη μετρήσιμη τιμή του  $A_{obs}(z)$  με την προβλεπόμενη συνάρτηση του ρυθμού αύξησης των δομών,  $A(z) = f(z)\sigma_8(z)$  (βλ.  $\Lambda$ CDM-συνεχής γραμμή και DGP-διακεκομμένη γραμμή), για τα μοντέλα βέλτιστης προσαρμογής αντίστοιχα.

### 5.1.2 Οι παραμετροποιήσεις $\Gamma_1$ έως $\Gamma_4$

Έχοντας παρουσιάσει την πιο απλή μορφή παραμετροποίησης του δείκτη αύξησης με την ερυθρομετάθεση, δηλαδή  $\gamma(z)=\text{σταθ.}$ , μελετάμε τώρα τους παρατηρησιακούς περιορισμούς που προκύπτουν για την ισχύ και τις τιμές των παραμέτρων σε χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα  $\gamma(z)$ . Ακολουθώντας όσα εκτίθενται στην παράγραφο (1.2.5), από εδώ και στο εξής θέτουμε  $\mathbf{p} = (\gamma_0, \gamma_1, 0.273)$  στην εξίσωση (6.2). Στο σχήμα (5.3) (μοντέλο  $\Lambda$ CDM) και στο σχήμα (5.4) (μοντέλο DGP) παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της στατιστικής μας ανάλυσης για την παραμετροποίηση  $\Gamma_1$  (πάνω αριστερά διάγραμμα),  $\Gamma_2$  (πάνω δεξιά διάγραμμα),  $\Gamma_3$  (κάτω αριστερά διάγραμμα) και  $\Gamma_4$  (κάτω δεξιά διάγραμμα) στο επίπεδο  $(\gamma_0, \gamma_1)$  στο οποίο οι αντίστοιχες ισοϋψείς έχουν

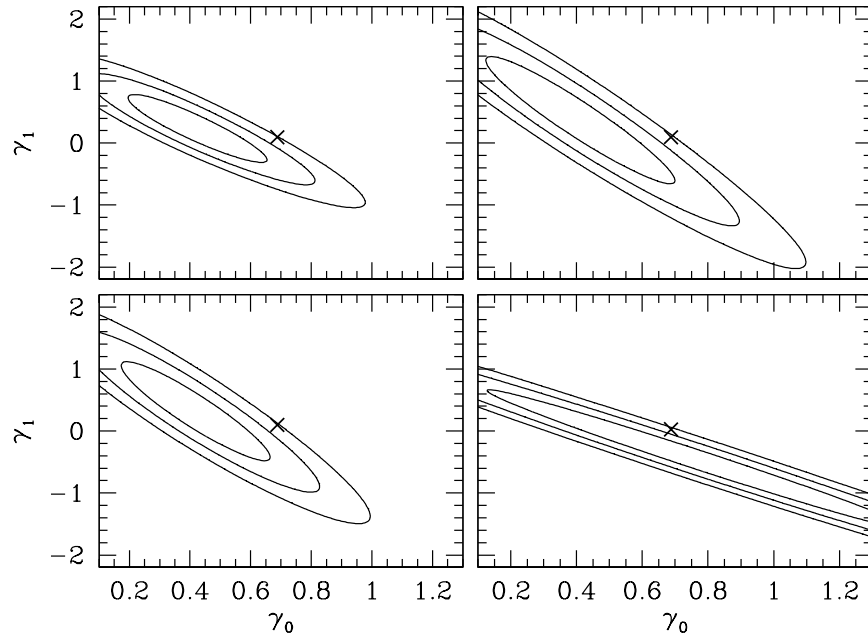


ΣΧΗΜΑ 5.3: Ισοϋψείς πιθανοτήτων (για  $\Delta\chi^2 = -2\ln\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\max}$  ίσο με 2.30, 6.18 και 11.83, που αντιστοιχούν σε  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  και  $3\sigma$  επίπεδα εμπιστοσύνης) στο επίπεδο  $(\gamma_0, \gamma_1)$ , για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM. Το πάνω αριστερά και πάνω δεξί διάγραμμα δείχνουν τα αποτελέσματα που βασίζονται στις παραμετροποιήσεις  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  αντίστοιχα. Στα κάτω αριστερά και κάτω δεξί διάγραμμα παρουσιάζουμε τις ισοϋψείς καμπύλες των παραμετροποιήσεων  $\Gamma_3$  και  $\Gamma_4$  αντίστοιχα. Οι σταυροί δείχνουν τις θεωρητικές  $\Lambda$ CDM τιμές για τα  $(\gamma_0, \gamma_1)$ , οι οποίες δίνονται στην παράγραφο (1.2.5).

σχεδιαστεί για τα επίπεδα εμπιστοσύνης  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  και  $3\sigma$ . Η διερεύνηση του παραμετρικού χώρου  $(\gamma_0, \gamma_1)$  γίνεται εδώ στα διαστήματα  $\gamma_0 \in [0.1, 1.3]$  και  $\gamma_1 \in [-2.2, 2.2]$  με βήματα του 0.001. Οι θεωρητικές τιμές  $(\gamma_0, \gamma_1)$  (βλ. παράγραφο (1.2.5)) στα μοντέλα  $\Lambda$ CDM και στο DGP υποδεικνύονται με τους σταυρούς.

Διαπιστώνουμε ότι οι προβλεπόμενες για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM βέλτιστες τιμές προσαρμογής των  $(\gamma_0, \gamma_1)$  παραμένουν κοντά στα όρια του  $1\sigma$  ( $\Delta\chi^2_{1\sigma} \simeq 2.30$ , βλ. σταυρούς στο σχήμα (5.3) για όλες τις εξεταζόμενες παραμετροποιήσεις  $\Gamma_1$  έως  $\Gamma_4$ ). Όσον αφορά στο μοντέλο DGP (σχήμα (5.4)) οι προβλεπόμενες τιμές  $(\gamma_0, \gamma_1)$  πλησιάζουν τα όρια του  $3\sigma$  ( $\Delta\chi^2_{3\sigma} \simeq 11.83$ , βλ. σταυρούς στο σχήμα (5.4)) των ισοϋψών  $\gamma_0 - \gamma_1$ . Αυτή είναι μια σαφής περαιτέρω ένδειξη ότι τα σημερινά παρατηρησιακά δεδομένα του ρυθμού αύξησης των δομών δεν ευνοούν το βαρυτικό μοντέλο DGP.

Παραθέτουμε τώρα εν συντομία τα κύρια στατιστικά αποτελέσματα για την κάθε παραμετροποίηση  $\Gamma_1$  έως  $\Gamma_4$  χωριστά:



ΣΧΗΜΑ 5.4: Οι isoύψείς καμπύλες πιθανοτήτων για το DGP μοντέλο διαστολής (για περισσότερες πληροφορίες βλ. λεζάντα του σχήματος (5.3)). Εδώ οι σταυροί αντιστοιχούν στις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές  $(\gamma_0, \gamma_1)$  όπως περιγράφονται στην παράγραφο (1.2.5).

1. Παραμετροποίηση  $\Gamma_1$ : Για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM, η συνάρτηση πιθανότητας έχει μέγιστο στο  $\gamma_0 = 0.40^{+0.086}_{-0.080}$  και  $\gamma_1 = 0.603 \pm 0.241$  με  $\chi^2_{min}/dof \simeq 5.74/6$ , ενώ στην περίπτωση της DGP βαρύτητας έχουμε ότι  $\gamma_0 = 0.441^{+0.094}_{-0.090}$  και  $\gamma_1 = 0.164 \pm 0.221$  με  $\chi^2_{min}/dof \simeq 5.10/6$ . Είναι ενδιαφέρον ότι η χρήση των συνδυασμένων δεδομένων του ρυθμού αύξησης των δομών παρέχει μία σημαντική βελτίωση στις τιμές  $(\gamma_0, \gamma_1)$  που προκύπτουν σε σχέση με προηγούμενες μελέτες ([155], [60], [68], [156], [63]). Η βελτίωση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι οι έρευνες *WiggleZ* και *SDSS-DR7* μετράνε το  $f(z)\sigma_8(z)$  με ακρίβεια ανάμεσα σε 8 – 17% ([149], [150]) σε κάθε διάστημα ερυθρομετάπτωσης σε αντίθεση με τα παλιά δεδομένα του ρυθμού αύξησης των δομών [141] για τα οποία η αντίστοιχη ακρίβεια έγκειται στο διάστημα 12–37%.
2. Παραμετροποιήσεις  $\Gamma_2$  και  $\Gamma_3$ : Βρίσκουμε ότι μέσα σε  $1\sigma$  σφάλματα μπορούμε να θέσουμε αυστηρά όρια στις ελεύθερες παραμέτρους. Συγκεκριμένα, οι τιμές βέλτιστης προσαρμογής είναι: (ι)  $\Lambda$ CDM: Για το  $\Gamma_2$  μοντέλο έχουμε  $\gamma_0 = 0.311^{+0.085}_{-0.080}$ ,  $\gamma_1 = 1.221 \pm 0.343$  ( $\chi^2_{min}/dof \simeq 5.26/6$ ) ενώ για το  $\Gamma_3$  έχουμε:  $\gamma_0 = 0.345^{+0.085}_{-0.080}$ ,  $\gamma_1 = 1.006 \pm 0.314$  ( $\chi^2_{min}/dof \simeq 5.06/6$ ) και (ii) DGP: στην περίπτωση του μοντέλου  $\Gamma_2$  παίρνουμε:  $\gamma_0 = 0.401^{+0.094}_{-0.090}$ ,  $\gamma_1 = 0.384 \pm$

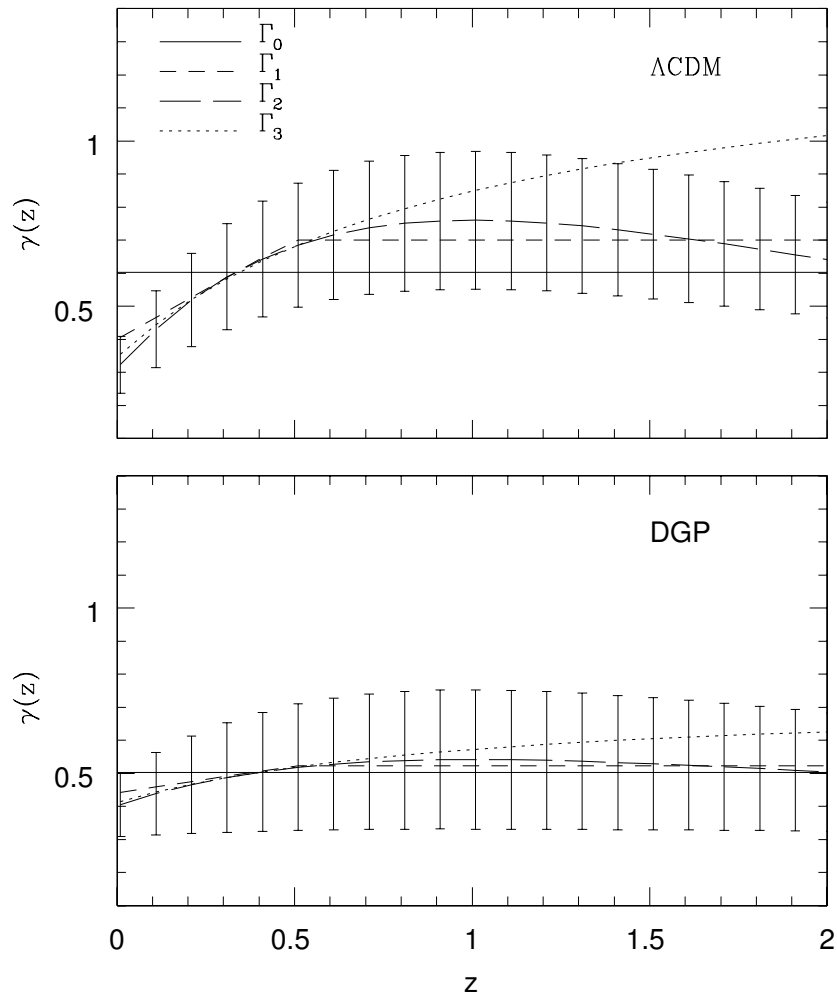
0.320 ( $\chi_{min}^2/dof \simeq 5.00/6$ ) και για το  $\Gamma_3$  μοντέλο:  $\gamma_0 = 0.412_{-0.090}^{+0.093}$ ,  $\gamma_1 = 0.321 \pm 0.290$ . Στην τελευταία περίπτωση η τιμή του  $\chi_{min}^2$  που προκύπτει είναι  $\simeq 4.94/6$ .

3. Παραμετροποίηση  $\Gamma_4$ : Σε αυτήν την περίπτωση το  $\gamma_0$  είναι έντονα εκφυλισμένο με το  $\gamma_1$  (βλ. κάτω διαγράμματα στα σχήματα: (5.3), (5.4)). Όντως, μπορούμε να παρέχουμε τις ακόλουθες  $\gamma_1 - \gamma_0$  σχέσεις:

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1.134(\pm 0.005) - 1.879(\pm 0.006)\gamma_0 & \Lambda\text{CDM} \\ 0.887(\pm 0.005) - 1.749(\pm 0.006)\gamma_0 & \text{DGP} . \end{cases} \quad (5.4)$$

Τέλος, συγκρίνουμε μεταξύ τους τις διαφορετικές παραμετροποιήσεις στα δύο κοσμολογικά μοντέλα ( $\Lambda$ CDM και DGP) υπολογίζοντας την παράμετρο  $\Delta\text{AIC}_c$ , εξίσωση (5.3), που χαρακτηρίζει τη σχετική διαφορά στην ποιότητα της προσαρμογής για κάθε επιλεγμένο ζεύγος μοντέλων. Ο υπολογισμός μας δείχνει ότι όλες οι συναρτησιακές μορφές του  $\gamma(z)$  οι οποίες διερευνώνται στη μελέτη αυτή είναι στατιστικά ισοδύναμες στο να αντιπροσωπεύσουν τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης των δομών, αφού προκύπτουν τιμές  $|\Delta\text{AIC}_c| < 2$  για κάθε δυνατό ζεύγος παραμετροποίησης μεταξύ του συνόλου  $\Gamma_0$  έως  $\Gamma_4$ . Στο σχήμα (5.5) παρουσιάζουμε την εξέλιξη του δείκτη αύξησης των δομών για διάφορες παραμετροποιήσεις. Για την περίπτωση της  $\Lambda$ -Κοσμολογίας (άνω πίνακας του σχήματος (5.5)) η σχετική διαφορά του δείκτη αύξησης των δομών των διαφόρων μοντέλων βέλτιστης προσαρμογής  $\gamma(z)$ , δείχνει ότι οι παραμετροποιήσεις  $\Gamma_1$ - $\Gamma_3$  δίνουν μια πολύ παρόμοια εξάρτηση από την ερυθρομετάθεση  $z$  για  $z \leq 0.5$ , ενώ η παραμετροποίηση  $\Gamma_3$  παρουσιάζει πολύ μεγάλες αποκλίσεις για  $z > 0.5$ . Με βάση το μοντέλο βαρύτητας DGP (κάτω σειρά του σχήματος (5.5)) παρατηρούμε ότι οι παραμετροποιήσεις  $\Gamma_{1-2}$  οδηγούν σε παρόμοια πρόβλεψη για την εξέλιξη του δείκτη αύξησης των δομών. Η παραμετροποίηση  $\Gamma_3$  παρουσιάζει μεγάλες αποκλίσεις σε μεγάλες ερυθρομεταθέσεις  $z \geq 1.5$ . Ωστόσο, τα μεγάλα σφάλματα του  $\gamma(z)$  που εμφανίζονται στο σχήμα (5.5) οφείλονται στη μεγάλη αβεβαιότητα της παραμέτρου προσαρμογής  $\gamma_1$ . Το γεγονός αυτό αποτελεί ένδειξη για το ότι είναι απαραίτητο να έχουμε περισσότερα και πιο ακριβή δεδομένα, προκειμένου να γίνει διάκριση μεταξύ των διαφορετικών συναρτησιακών μορφών του  $\gamma(z)$ .

Ορμώμενοι από τα προαναφερθέντα αποτελέσματα, στη συνέχεια της εργασίας περιοριζόμαστε στο πλαίσιο της  $\Gamma\Theta\Sigma$  την οποία και υποθέτουμε ως τη θεωρία που



ΣΧΗΜΑ 5.5: *Επάνω διάγραμμα:* Η εξέλιξη του δείκτη αύξησης των δομών για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM. Οι γραμμές αντιστοιχούν στο  $\Gamma_0$  (συνεχόμενη γραμμή),  $\Gamma_1$  (ελαφρώς διακεκομμένη γραμμή),  $\Gamma_2$  (διακεκομμένη γραμμή) και  $\Gamma_3$  (εστιγμένη γραμμή). Οι ράβδοι σφαλμάτων αντιστοιχούν στο επίπεδο αβεβαιότητας  $1\sigma$  για την παραμετροποίηση  $\Gamma_2$ . *Κάτω Διάγραμμα:* Η εξέλιξη του δείκτη αύξησης των δομών για το DGP κοσμολογικό μοντέλο.

περιγράφει καλύτερα τη βαρύτητα σε κοσμολογικές κλίμακες. Έτσι, στο επόμενο κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να θέσουμε περιορισμούς στα μοντέλα προσαρμογής του δείκτη αύξησης των δομών  $\gamma(z)$  χρησιμοποιώντας πιο λεπτομερή δεδομένα, καθώς και χρησιμοποιώντας το πλεονέκτημα της συνδυαστικής στατιστικής για τα δεδομένα τόσο του ρυθμού αύξησης (παρόν κεφάλαιο), όσο και της σηματοποίησης μεγάλων δομών (κεφάλαιο 3). Με τον τρόπο αυτό επικεντρώνουμε την προσοχή μας στον καλύτερο δυνατό καθορισμό των κοσμολογικών παραμέτρων στο πλαίσιο, πλέον, του καθιερωμένου Κοσμολογικού Προτύπου.

## Κεφάλαιο 6

# Συνδυασμένη ανάλυση των δεδομένων σηματοποίησης των κοσμικών δομών και του ρυθμού αύξησης

Στο παρόν κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τα δεδομένα σηματοποίησης των AGN και LRGs και τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης των διαταραχών της ύλης (κεφάλαιο 4) προκειμένου να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους βέλτιστης προσαρμογής για διάφορα μοντέλα του δείκτη αύξησης  $\gamma(z)$ . Στο παρόν κεφάλαιο, ωστόσο, υιοθετούμε το καθιερωμένο μοντέλο  $\Lambda$ CDM σε όλους τους υπολογισμούς στους οποίους υπεισέρχεται η διαστολή του υποβάθρου. Πραγματοποιούμε μια τυπική  $\chi^2$  στατιστική μέθοδο ελαχιστοποίησης των σφαλμάτων μεταξύ θεωρητικών προβλέψεων και δεδομένων, καθώς και μεθόδους συνδυασμένης ανάλυσης πιθανοτήτων. Από την ανάλυση αυτή, σε μοντέλα σταθερού δείκτη αύξησης βρίσκουμε  $\gamma = 0.56 \pm 0.05$  (συνεπές με το μοντέλο  $\Lambda$ CDM) και  $\Omega_{m0} = 0.29 \pm 0.01$ , αποτέλεσμα το οποίο είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τις πλέον πρόσφατες αναλύσεις των παρατηρήσεων του δορυφόρου Planck. Η ανάλυσή μας, παρέχει σημαντικά πιο αυστηρούς περιορισμούς στην τιμή του δείκτη αύξησης σε σύγκριση με προηγούμενες μελέτες όπως υποδεικνύεται από το γεγονός ότι η αντίστοιχη αβεβαιότητα είναι μόλις  $\sim 0.09\gamma$ . Τέλος, επιτρέποντας το  $\gamma$  να εξελίσσεται με την ερυθρομετάθεση με δύο τρόπους:

- (i) ανάπτυγμα Taylor γύρω από το  $z = 0$ , και
- (ii) ανάπτυγμα Taylor γύρω από τον παράγοντα κλίμακας,

διαπιστώνουμε ότι η συνδυασμένη στατιστική ανάλυση μεταξύ των δεδομένων της σηματοποίησης και των δεδομένων του ρυθμού αύξησης αίρει τον εκφυλισμό μεταξύ διαφορετικών μοντέλων και οδηγεί σε αυστηρότερους περιορισμούς ως προς τα συμβατά με τις παρατηρήσεις μοντέλα του δείκτη αύξησης  $\gamma$  σε σχέση με άλλες πρόσφατες μελέτες. Μέρος των αποτελεσμάτων μας περιέχονται στην εργασία [140].

## 6.1 Διαδικασία προσαρμογής των μοντέλων στα παρατηρησιακά δεδομένα

Για την προσαρμογή των μοντέλων στα δεδομένα των παρατηρήσεων, χρησιμοποιούμε μία στατιστική διαδικασία ελαχιστοποίησης  $\chi^2$ , τόσο για τα δεδομένα της συνάρτησης συσχετισμού των AGN και των LRGs (παράγραφοι 4.1 και 4.2 αντίστοιχα), όσο και για τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης (παράγραφος 4.3). Η διαδικασία ορίζεται συγκεκριμένα ως εξής:

(1) Για τα δεδομένα της κοσμολογικής σηματοποίησης AGN και LRGs, ορίζουμε τις ποσότητες:

$$\chi_j^2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \sum_{i=1}^{N_j} \frac{[w_{\text{th}}(\theta_i^{(j)}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - w_{\text{obs}_j}(\theta_i^{(j)})]^2}{(\sigma_i^{(j)})^2}, \quad (6.1)$$

όπου  $w_{\text{th}}$  είναι η αναμενόμενη θεωρητική 2pACF η οποία δίνεται από την εξίσωση (1.95),  $w_{\text{obs}_j}$  είναι τα παρατηρησιακά δεδομένα των AGN ή των LRGs (πίνακες (4.1) και (4.2) αντίστοιχα),  $j = 1$  για τα δεδομένα των AGN και  $j = 2$  για τα δεδομένα των LRGs,  $N_j$  είναι ο συνολικός αριθμός των δεδομένων της συνάρτησης συσχετισμού ( $N_1 = 10$  για τα AGN και  $N_2 = 11$  για τα LRGs) και  $\sigma_i$  είναι η αβεβαιότητα  $1\sigma$  της παρατηρούμενης γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_i^2 = 3[\delta\theta^2 + \delta w(\theta)^2],$$

όπου  $\delta\theta$  και  $\delta w(\theta)$  είναι το σφάλμα στη μέτρηση της γωνίας  $\theta$  και το σφάλμα στην παρατηρούμενη 2pACF  $w(\theta)$  αντίστοιχα.

(2) Για τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης έχουμε ότι:

$$\chi_{\text{gr}}^2(\mathbf{p}_1) = \sum_{i=1}^{16} \left[ \frac{C_f(z_i, \mathbf{p}_1) f \sigma_{8, \text{obs}}^{\text{Ref}}(z_i) - f \sigma_8(z_i, \mathbf{p}_1)}{C_f(z_i, \mathbf{p}_1) \sigma_i^{\text{Ref}}} \right]^2, \quad (6.2)$$



όπου  $\sigma_i^{\text{Ref}}$  είναι η παρατηρούμενη  $1\sigma$  αβεβαιότητα, ενώ η παράμετρος  $C_f$  δίνεται από την εξίσωση (4.7), και ο θεωρητικός ρυθμός αύξησης ορίζεται από τη σχέση:

$$f\sigma_8(z, \mathbf{p}_1) = \sigma_8 D(z) \Omega_m(z)^{\gamma(z)}. \quad (6.3)$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  περιλαμβάνουν τις ελεύθερες παραμέτρους που εμπλέκονται στην εξαγωγή των θεωρητικών προσδοκιών σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις. Το διάνυσμα  $\mathbf{p}_1$  περιέχει εκείνες τις ελεύθερες παραμέτρους που σχετίζονται με τη διαστολή και τη βαρύτητα. Για την περίπτωση σταθερού  $\gamma$ , ορίζονται ως:  $\mathbf{p}_1 = (\Omega_{m0}, \gamma, \sigma_8)$ , ενώ για την περίπτωση του χρονοεξαρτώμενου  $\gamma$ , ως:  $\mathbf{p}_1 = (\Omega_{m0}, \gamma_0, \gamma_1, \sigma_8)$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{p}_2 = (M_h, n_{eff})$  σχετίζεται με το περιβάλλον της άλω σκοτεινής ύλης μέσα στην οποία οι εξωγαλαξιακοί ιχνηλάτες μάζας (όπως π.χ. οι AGN ή τα LRGs) ζουν (βλ. εισαγωγή, παραγράφους (1.3.4) και (1.3.5)).

Δεδομένου ότι η πιθανότητα του  $\chi^2$  ορίζεται ως:

$$\mathcal{L} \propto \exp(-\chi^2/2),$$

η συνδυασμένη πιθανότητα για τα δύο διαφορετικά είδη των κοσμολογικών ανιχνευτών είναι:

$$\mathcal{L}_t(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathcal{L}_j(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \times \mathcal{L}_{\text{gr}}(\mathbf{p}_1), \quad (6.4)$$

που είναι ισοδύναμη με τον ορισμό ενός ‘συνολικού’  $\chi^2$ :

$$\chi_t^2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \chi_j^2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \chi_{\text{gr}}^2(\mathbf{p}_1). \quad (6.5)$$

Με βάση τα παραπάνω, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματά μας για κάθε ελεύθερη παράμετρο που εισέρχεται στα δύο διανύσματα  $\mathbf{p}_{1,2}$ . Σημειώνουμε ότι η αβεβαιότητα της κάθε παραμέτρου θα πρέπει να υπολογίζεται μετά την οριοθέτηση της μιας παραμέτρου πάνω στην άλλη, ενώ η αβεβαιότητα παρέχεται στην περιοχή  $\Delta\chi^2 (\leq 1\sigma)$ . Ένας τέτοιος ορισμός όμως, μπορεί να κρύψει την έκταση ενός πιθανού εκφυλισμού μεταξύ των παραμέτρων. Ως εκ τούτου, είναι σημαντικό να απεικονίσουμε γραφικά το χώρο των λύσεων, όπως υποδεικνύεται στα σχετικά διαγράμματα των ισοϋψών που παραθέτουμε παρακάτω, προκειμένου να ελέγχουμε γραφικά την ύπαρξη τέτοιων εκφυλισμών.

Ως ένα επιπλέον έλεγχο συνέπειας χρησιμοποιήσαμε το αντίστροφο της μήτρας Fisher (μήτρα συνδιακύμανσης) αλλά βρήκαμε παρόμοιες αβεβαιότητες με αυτές που παρέχονται με την παραπάνω μέθοδο, πιθανότατα λόγω του γεγονότος ότι τα 1, 2 και

3  $\sigma$  ισοϋψή διαστήματα λύσεων είναι συμμετρικά και οι άξονες συμμετρίας είναι περίπου παράλληλοι προς τα διανύσματα  $\mathbf{p}_{1,2}$ . Αφού τα σφάλματα της προσέγγισης της μήτρας Fisher είναι συμμετρικά εξ' ορισμού, έχουμε αποφασίσει να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη μέθοδο.

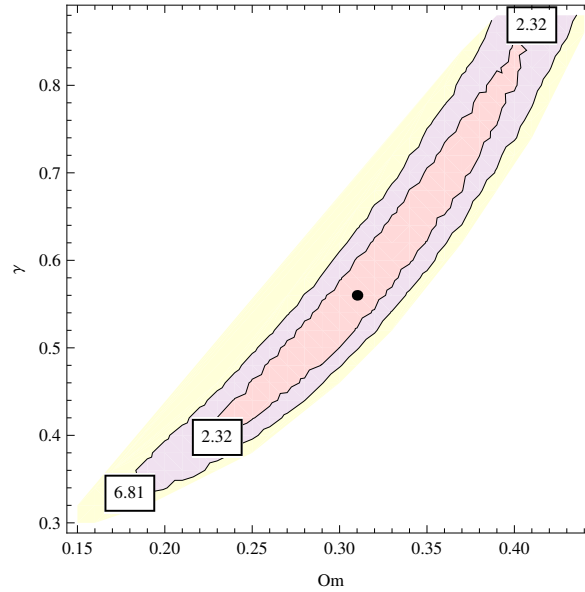
## 6.2 Παρατηρησιακοί Περιορισμοί

Στην ανάλυση που ακολουθεί, δεδομένου του μοντέλου  $\Lambda$ CDM, η παράμετρος  $\sigma_8$  προσδιορίζεται από την εξίσωση (1.99), οπότε το διάνυσμα  $\mathbf{p}_1$  περιέχει μόνο δύο ανεξάρτητες παραμέτρους, δηλαδή  $\mathbf{p}_1 = (\Omega_{m0}, \gamma)$ . Έτσι, υπάρχουν συνολικά τέσσερις ελεύθερες παράμετροι. Για τον έλεγχο των παραμέτρων βέλτιστης προσαρμογής, οι διάφορες παράμετροι ελέγχονται στα εξής διαστήματα: η αδιάστατη παράμετρος της πυκνότητας της ύλης  $\Omega_{m0} \in [0.1, 0.5]$  με βήμα 0.01, ο δείκτης αύξησης των δομών  $\gamma \in [0.1, 1.0]$  με βήμα 0.01, η μάζα της άλω σκοτεινής ύλης  $M_h/10^{13}h^{-1}M_\odot \in [1, 2.5]$  με βήμα 0.1 και η κλίση του φάσματος ισχύος  $n_{eff} \in [-0.5, 1.0]$  με βήμα 0.1.

### 6.2.1 AGN

Αρχικά, χρησιμοποιούμε μία διαδικασία ελαχιστοποίησης  $\chi^2$  ώστε να συγκρίνουμε την παρατηρούμενη γωνιακή συνάρτηση συσχετισμού των XMM πηγών μαλακών ακτίνων X με τη θεωρητική πρόβλεψη της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.1). Από τη διαδικασία αυτή περιορίζουμε τα διανύσματα  $\mathbf{p}_1$  και  $\mathbf{p}_2$  τα οποία περιέχουν τις κοσμολογικές παραμέτρους τις τιμές των οποίων θέλουμε να προσδιορίσουμε. Οι τιμές που προκύπτουν είναι:  $\Omega_{m0} = 0.31_{-0.8}^{+0.9}$  και  $\gamma = 0.56_{-0.16}^{+0.30}$ , ενώ  $M_h = (0.3 \pm 0.2) \times 10^{13}h^{-1}M_\odot$  και  $n_{eff} = 0.1 \pm 0.1$ .

Το σχήμα (6.1) δείχνει τις ισοϋψείς καμπύλες της πιθανότητας  $\mathcal{L}$  στο παρατηρούμενο επίπεδο  $\Omega_{m0} - \gamma$ , όπου μπορεί εύκολα να φανεί ότι η τιμή του  $\gamma$  είναι εκφυλισμένη, εντός της  $1\sigma$  αβεβαιότητας, σε σχέση με το  $\Omega_{m0}$ . Συμπεραίνουμε ότι ο δείκτης αύξησης  $\gamma$  δεν μπορεί να περιοριστεί καλά από τα δεδομένα της γωνιακής συνάρτησης συσχετισμού των AGN.



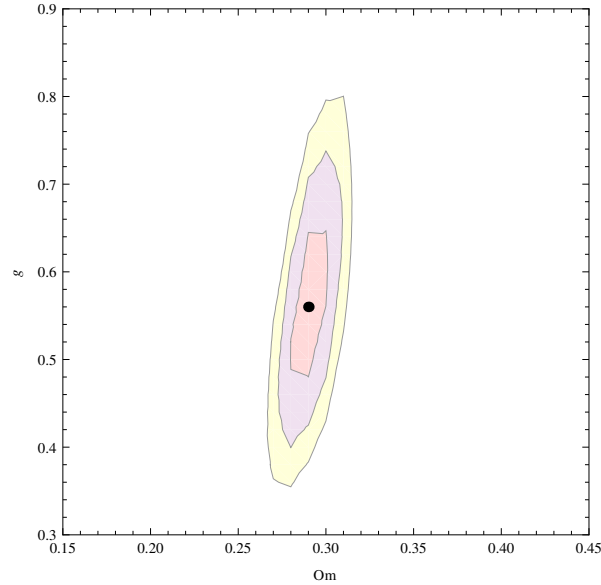
ΣΧΗΜΑ 6.1: Οι ισοϋψείς καμπύλες  $\Omega_{m0} - \gamma$  για την περίπτωση των AGN.

### 6.2.2 LRGs

Το σχήμα (6.2) δείχνει το διάγραμμα των ισοϋψών  $\Omega_{m0} - \gamma$  για την περίπτωση των LRGs ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως προκειμένου να περιορίσουμε τα διανύσματα  $\mathbf{p}_1$  και  $\mathbf{p}_2$ . Οι προκύπτουσες βέλτιστες τιμές προσαρμογής των παραμέτρων είναι:  $\Omega_{m0} = 0.29 \pm 0.1$  και  $\gamma = 0.56 \pm 0.4$ , ενώ  $M_h = (1.9 \pm 0.1) \times 10^{13} h^{-1} M_\odot$  και  $n_{eff} = 0.1 \pm 0.2$ . Παρατηρούμε ότι, τώρα, και οι δύο παράμετροι  $\Omega_{m0}$  και  $\gamma$  μπορούν να περιοριστούν μέσα στο διάστημα αβεβαιότητας  $1\sigma$  σε μια περιοχή μικρότερη των αντίστοιχα διερευνόμενων παραμετρικών διαστημάτων, κάτι που δείχνει ότι το δείγμα των LRGs είναι χρήσιμο για την εκτίμηση και των δύο κοσμολογικών παραμέτρων.

### 6.2.3 Συνδυασμένη ανάλυση για τα LRGs

Στον πίνακα (6.1) παρουσιάζουμε τις τιμές που προκύπτουν από τη συνδυασμένη ανάλυση για δύο διαφορετικές εκφράσεις του φάσματος ισχύος, και συγκεκριμένα για τις εκφράσεις που προκύπτουν από την επιλογή της συνάρτησης μεταφοράς των Hajian et al. [80] και των Spergel et al. [15], αντίστοιχα (βλ. εξίσωση (1.99)), καθώς επίσης και για τις δύο διαφορετικές περιπτώσεις των συναρτήσεων μεταφοράς που έχουν χρησιμοποιηθεί.

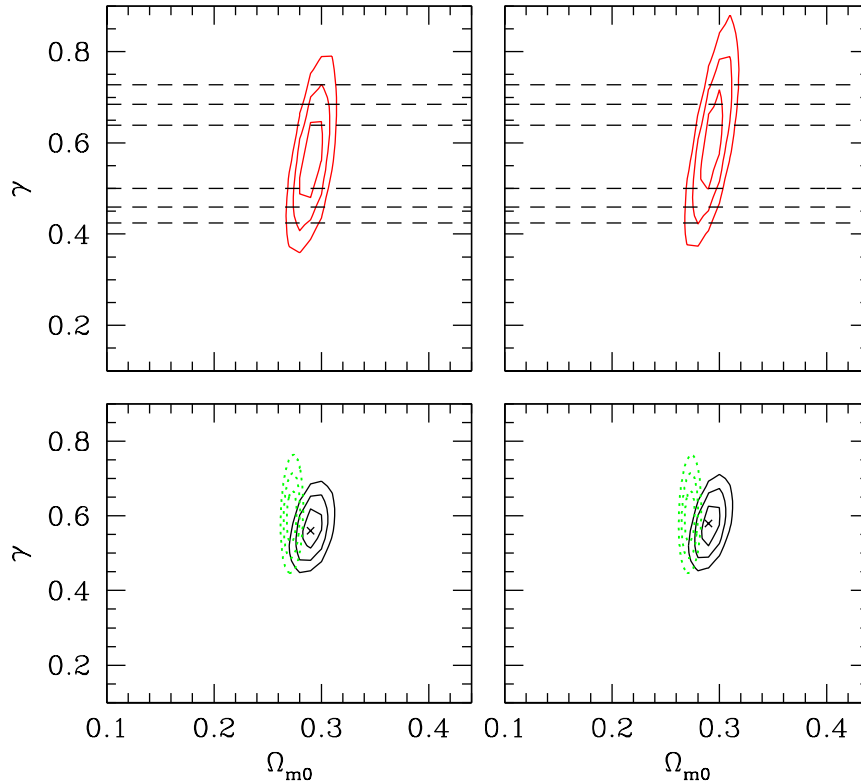


ΣΧΗΜΑ 6.2: Οι isoϋψείς καμπύλες  $\Omega_{m0} - \gamma$  για την περίπτωση των LRGs.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1: Αποτελέσματα στο χώρο των λύσεων ( $\Omega_{m0}, \gamma, M_h, n_{eff}$ ) για την περίπτωση διαφορετικών συναρτήσεων μεταφοράς  $T(k)$  και  $\sigma_8$ .

$T(k)$	$\Omega_{m0}$	$\gamma$	$M_h/10^{13}M_\odot$	$n_{eff}$	$\chi_{t,\min}^2/df$
$\sigma_8 = 0.797 (0.30/\Omega_{m0})^{0.26}$ [80]					
Eisenstein & Hu [70]	$0.29 \pm 0.01$	$0.56 \pm 0.05$	$1.90 \pm 0.10$	$0.10 \pm 0.20$	16.36/23
Bardeen et al. [69]	$0.29 \pm 0.01$	$0.56 \pm 0.10$	$1.80 \pm 0.30$	$-0.10_{-0.10}^{+0.30}$	16.56/23
$\sigma_8 = 0.818 (0.30/\Omega_{m0})^{0.26}$ [15]					
Eisenstein & Hu [70]	$0.29_{-0.02}^{+0.03}$	$0.58_{-0.06}^{+0.02}$	$1.70 \pm 0.20$	$0.30 \pm 0.20$	15.90/23
Bardeen et al. [69]	$0.29_{-0.03}^{+0.02}$	$0.56 \pm 0.10$	$1.60 \pm 0.4$	$0.0_{-0.20}^{+0.10}$	16.13/23

Ένα πρώτο γενικό αποτέλεσμα είναι ότι οι δύο συναρτήσεις μεταφοράς που χρησιμοποιούνται οδηγούν σε πολύ παρόμοια αποτελέσματα μέσα σε αβεβαιότητα  $1\sigma$ . Ως εκ τούτου, για την ανάλυση που ακολουθεί, χρησιμοποιείται η συνάρτηση μεταφοράς των Eisenstein & Hu [70]. Δεύτερον, το  $\chi_{t,\min}^2$  για την περίπτωση της κανονικοποίησης των Spergel et al. [15] έχει μία μειωμένη τιμή  $\sim 15.90/23$  σε σχέση με το αντίστοιχο  $\chi_{t,\min}^2/df$  για την περίπτωση των Hajian et al. [80]  $\chi_{t,\min}^2/df \sim 16.36/23$ . Στο σχήμα (6.3) έχουν σχεδιαστεί οι isoϋψείς καμπύλες των διαστημάτων εμπιστοσύνης  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  και  $3\sigma$  στο επίπεδο  $(\Omega_{m0}, \gamma)$  και για τις δύο διαφορετικές περιπτώσεις κανονικοποίησης του φάσματος ισχύος  $\sigma_8$  ([15]: δεξί διάγραμμα και [80]: αριστερό διάγραμμα). Τα αποτελέσματα αυτά βασίζονται στη συνάρτηση μεταφοράς



ΣΧΗΜΑ 6.3: Οι ισοϋψείς των πιθανοτήτων  $\Delta\chi^2 = \chi_t^2 - \chi_{t,\min}^2$  (με τιμές 2.32, 6.18 και 11.83, στα επίπεδα εμπιστοσύνης  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  και  $3\sigma$  αντίστοιχα), στο επίπεδο των λύσεων  $(\Omega_{m0}, \gamma)$  χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση μεταφοράς των Eisenstein & Hu [70] και το μοντέλο bias των [116], [89]. *Αριστερά Διαγράμματα:* Οι ισοϋψείς των πιθανοτήτων που αντιστοιχούν στην κανονικοποίηση του φάσματος ισχύος των Hajian et al. [80]. *Δεξιά Διαγράμματα:* Τα διαγράμματα εδώ αντιστοιχούν στο  $\sigma_8$  το οποίο προέρχεται από την ανάλυση των Spergel et al. [15]. Οι τιμές βέλτιστης προσαρμογής παρουσιάζονται με σταυρούς. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση μεταφοράς των Bardeen et al. [69] βρίσκουμε σχεδόν τα ίδια σφάλματα μέσα σε αβεβαιότητα  $1\sigma$ . Στην άνω σειρά παρουσιάζονται οι ισοϋψείς των πιθανοτήτων που αντιστοιχούν στα LRGs (συνεχόμενες κόκκινες γραμμές) και στα δεδομένα του ρυθμού αύξησης (διακεκομμένες μαύρες γραμμές). Τα κάτω διαγράμματα δείχνουν τα στατιστικά αποτελέσματα που έχουν προκύψει από τη συνδυασμένη ανάλυση. Τέλος, οι πράσινες διακεκομμένες καμπύλες αντιστοιχούν στις ισοϋψείς που προκύπτουν από τη συνδυασμένη ανάλυση των SNIa/BAOs/CMB<sub>shift</sub>/ $f\sigma_8$  όπως προκύπτουν από την ανάλυση των [159].

των [70].

Η άνω σειρά του σχήματος (6.3) απεικονίζει τις ισοϋψείς των πιθανοτήτων για τα μεμονωμένα σύνολα δεδομένων, δηλαδή για τα LRGs (συνεχές κόκκινο περίγραμμα) και για τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης (διακεκομμένο μαύρο περίγραμμα), ενώ στα κατώτερα διαγράμματα του σχήματος (6.3) παρουσιάζονται οι αντίστοιχες ισοϋψείς της συνδυασμένης ανάλυσης. Μπορούμε να δούμε από το σχήμα (6.3) (άνωτερα διαγράμματα) ότι τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης θέτουν αυστηρούς περιορισμούς στο  $\gamma$ , ωστόσο η τιμή του  $\Omega_{m0}$  δεν μπορεί να περιοριστεί χρησιμοποιώντας μόνο τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης και έτσι όλες οι τιμές στο διάστημα  $0.1 \leq \Omega_{m0} \leq 0.5$  είναι αποδεκτές εντός της  $1\sigma$  αβεβαιότητας. Σε αντίθεση, η τιμή του  $\Omega_{m0}$  είναι καλά καθορισμένη χρησιμοποιώντας τη στατιστική ανάλυση των LRGs.

Όπως μπορεί να δει κανείς επίσης από τον πίνακα (6.1), η τιμή της αδιάστατης παραμέτρου πυκνότητας της ύλης στο παρόν είναι  $\Omega_{m0} = 0.29 \pm 0.01$ , τιμή η οποία είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων του δορυφόρου Planck [15], ενώ η προκύπτουσα τιμή του  $\gamma = 0.56 \pm 0.05$  συμπίπτει με τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή από το μοντέλο  $\Lambda$ CDM. Ο πολύ καλός καθορισμός τιμών που προκύπτει από τη συνδυασμένη ανάλυση σχετίζεται με το γεγονός ότι οι μεμονωμένες ισοϋψείς (άνωτερα διαγράμματα του σχήματος (6.3)) είναι ελλειψοειδείς με μεγάλο άξονα περίπου κατακόρυφο. Θέτοντας  $\Omega_{m0} = 0.29$  στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1.99) παίρνουμε ότι  $\sigma_8 \simeq 0.804$ , ενώ για το διάνυσμα  $\mathbf{p}_2$  βρίσκουμε:  $\mathbf{p}_2 = ((1.90 \pm 0.2) \times 10^{13} h^{-1} M_\odot, 0.10 \pm 0.20)$ . Είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε επίσης ότι η τιμή που έχει προκύψει για τη μάζα της άλω σκοτεινής ύλης είναι συνεπής με αυτή που προκύπτει από τους Sawangwit et al. [139], δηλαδή  $M_h = (2.1 \pm 0.1) \times 10^{13} h^{-1} M_\odot$ . Εναλλακτικά, θεωρώντας την τιμή της παραμέτρου  $\Omega_{m0}$  που προκύπτει από την ανάλυση των δεδομένων του δορυφόρου Planck [15], δηλαδή  $\Omega_{m0} = 0.30$ , και ελαχιστοποιώντας ως προς το  $\gamma$  και  $\mathbf{p}_2 = (M_h, n_{eff})$  βρίσκουμε ότι  $\gamma = 0.56 \pm 0.05$  και  $\mathbf{p}_2 = ((2.0 \pm 0.10) \times 10^{13} h^{-1} M_\odot, 0.30 \pm 0.20)$  με  $\chi_{t,\min}^2/df \sim 16.52/24$ .

Συγκριτικά με άλλες σχετικά πρόσφατες μελέτες, οι τιμές βέλτιστης προσαρμογής του  $\gamma$  που προκύπτουν στην παρούσα μελέτη, είναι σε συμφωνία, μέσα σε  $1\sigma$  αβεβαιότητα, με αυτές των [159] (βλ. επίσης [142]) που βρήκαν ότι  $\gamma = 0.597 \pm 0.046$ , χρησιμοποιώντας μια συνδυασμένη στατιστική ανάλυση της διαστολής και των δεδομένων του ρυθμού αύξησης (SNIa/BAOs/CMB<sub>shift</sub>/ $f\sigma_8$ ). Ωστόσο, η τιμή που προκύπτει για το  $\Omega_{m0}$  αυτής της μελέτης είναι κάπως μεγαλύτερη (μέσα σε  $\sim 1.8\sigma$

αβεβαιότητα), από την προκύπτουσα τιμή των [159],  $\Omega_{m0} = 0.272 \pm 0.003^1$ . Το σχήμα (6.3) δείχνει τις ισοϋψείς που προκύπτουν από τη συνδυασμένη ανάλυση στο επίπεδο λύσεων  $(\Omega_{m0}, \gamma)$  των [159] (πράσινες διακεκομμένες γραμμές). Είναι προφανές ότι η συνδυασμένη ανάλυση των δεδομένων του ρυθμού αύξησης με τα δεδομένα σηματοποίησης των LRGs παρέχει ισχυρούς περιορισμούς στο δείκτη αύξησης των δομών,  $\gamma$ , κάτι που σημαίνει ότι αυτή η μέθοδος λειτουργεί εξίσου καλά με αυτήν της συνδυασμένης ανάλυσης των SNIa/BAOs/CMB<sub>shift</sub>/ $f\sigma_8$ .

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τη μεγάλη προσπάθεια των τελευταίων ετών στο προσδιορισμό της τιμής των  $\Omega_{m0}$  και  $\gamma$  που προκύπτουν από τη συνδυασμένη ανάλυση, αλλά και τη σχετική ισχύ και την ακρίβεια των διαφόρων μεθόδων, παρουσιάζουμε μια περίληψη των αντίστοιχων τιμών που μπορεί κανείς να βρει στη βιβλιογραφία, στον πίνακα (6.2). Συνάγουμε το συμπέρασμα ότι τα τρέχοντα δεδομένα ευνοούν, μέσα σε 1σ αβεβαιότητα, τη θεωρητικά προβλεπόμενη τιμή του  $\gamma_{\Lambda}^{(th)} \simeq 6/11$ . Δεύτερον, η ποιότητα και η ποσότητα των κοσμολογικών και δυναμικών δεδομένων, καθώς και οι μεθοδολογίες έχουν βελτιωθεί πολύ τα τελευταία χρόνια. Για παράδειγμα, από την πρώτη μέτρηση των [159], τα σφάλματα του δείκτη αύξησης έχουν μειωθεί κατά μία τάξη μεγέθους σε σχέση με την καλύτερα προσαρμοσμένη τιμή της τρέχουσας εργασίας. Είναι επίσης σημαντικό να σημειωθεί ότι χρησιμοποιώντας συνδυασμένα μόνο δύο βασικές ιδιότητες των δομών μεγάλης κλίμακας (γωνιακή συνάρτηση συσχέτισμού των 2SLAQ LRGs και τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης) έχουμε καταφέρει να μειώσουμε σημαντικά την αβεβαιότητα στη μέτρηση του δείκτη αύξησης, δηλαδή  $\sigma_{\gamma}/\gamma \sim 9\%$  και κατά συνέπεια να παραγάγουμε έναν από τους πλέον αξιόπιστους υφιστάμενους στη βιβλιογραφία προσδιορισμούς για την τιμή του  $\gamma$ .

### 6.3 Περιορισμοί στο $\gamma(z)$

Στην ενότητα αυτή ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως και στην προηγούμενη παράγραφο προκειμένου να βρούμε τις παραμέτρους βέλτιστης προσαρμογής  $(\gamma_0, \gamma_1)$  σε μοντέλα μεταβλητού στο χρόνο  $\gamma$ , σύμφωνα με δύο από τις παραμετροποιήσεις που παρουσιάσαμε στην παράγραφο (1.2.5.2), και συγκεκριμένα τις παραμετροποιήσεις  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$ .

Το διάνυσμα  $\mathbf{p}_1$  έχει τώρα τη μορφή:  $\mathbf{p}_1 = (0.30, \gamma_0, \gamma_1, \sigma_8)$ , ενώ η συνολική ανάλυση πιθανοτήτων γίνεται τώρα με βάση ένα σταθερό διάνυσμα  $\mathbf{p}_2$ , όπως προκύπτει από την

<sup>1</sup>Οι Nesseris et al. [159] θεώρησαν  $\sigma_8 = 0.80$ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2: Τα αποτελέσματα του δείκτη αύξησης όπως εμφανίζονται στη βιβλιογραφία για το  $\Lambda$ CDM κοσμολογικό μοντέλο. Η τελευταία γραμμή αντιστοιχεί στο δικό μας αποτέλεσμα. Παρόμοιο αποτέλεσμα με αυτό των [142] μπορεί επίσης να βρεθεί στην εργασία των [159].

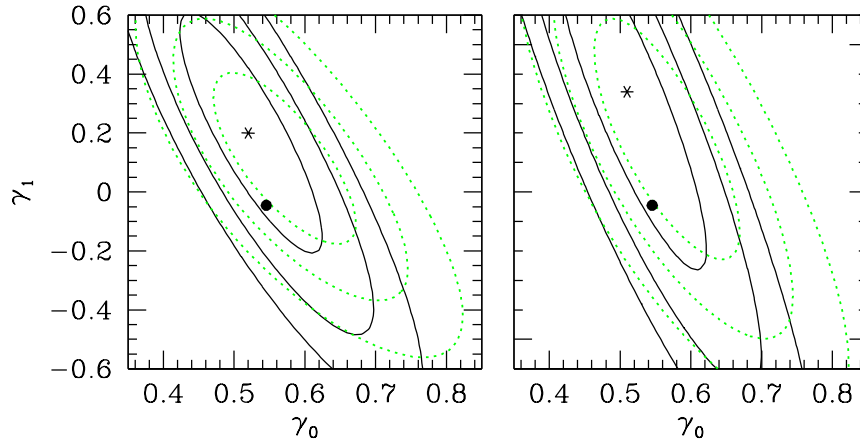
Δεδομένα που έχουν χρησιμοποιηθεί	$\Omega_{m0}$	$\gamma$	Αναφορές
γαλαξιακά δεδομένα από τον κατάλογο 2dFGRS	$0.30 \pm 0.02$	$0.60^{+0.40}_{-0.30}$	[155]
old $f(z)$ growth data	0.30	$0.674^{+0.195}_{-0.169}$	[60]
old $f(z)$ growth data	$0.273 \pm 0.015$	$0.64^{+0.17}_{-0.15}$	[68]
X-ray cluster luminosity function+ $f_{gas}$	$0.214^{+0.036}_{-0.041}$	$0.42^{+0.20}_{-0.16}$	[119]
WMAP+SNIa+MCMC	0.25	$0.584 \pm 0.112$	[149]
old and new $f(z)$ growth data	$0.273 \pm 0.011$	$0.586^{+0.079}_{-0.074}$	[157]
$f\sigma_8$ growth data	$0.259 \pm 0.045$	$0.619 \pm 0.054$	[145]
$f\sigma_8$ growth data	0.273	$0.602 \pm 0.055$	[62]
old+new $f(z)$ growth data	0.273	$0.58 \pm 0.04$	[160]
$f\sigma_8$ growth data+(SNIa, BAOs, CMB <sub>shift</sub> )	$0.272 \pm 0.003$	$0.597 \pm 0.046$	[142], [159]
CMASS DR9+ other $f\sigma_8$	$0.308 \pm 0.022$	$0.64 \pm 0.05$	[161]
cl+CMB+gal+SNIa+BAO	$0.284 \pm 0.012$	$0.618 \pm 0.062$	[162]
Lensing + $f\sigma_8$ growth data	$0.256 \pm 0.023$	$0.52 \pm 0.09$	[163]
CMB+clustering of BOSS	$0.30 \pm 0.01$	$0.69 \pm 0.15$	[164]
$f\sigma_8$ growth data+(SNIa, BAOs, CMB <sub>CAMB</sub> )	$0.298^{+0.027}_{-0.023}$	$0.675^{+0.18}_{-0.16}$	[165]
<b>Clustering of LRGs+ growth data</b>	<b><math>0.29 \pm 0.01</math></b>	<b><math>0.56 \pm 0.05</math></b>	<b>Η δική μας μελέτη</b>

ανάλυση των LRGs, δηλαδή  $(M_h, n_{eff}) = (2.0 \times 10^{13} h^{-1} M_\odot, 0.30)$ . Δειγματίζουμε το  $\gamma_0 \in [0.35, 0.85]$  με βήματα των 0.01 και  $\gamma_1 \in [-0.6, 0.6]$  με βήμα 0.01. Τέλος, όπως και στην εργασία των [159] αρχικά χρησιμοποιούμε ένα σταθερό  $\sigma_8$ , δηλαδή  $\sigma_8 = 0.797$ .

Στο σχήμα (6.4) σχεδιάζουμε τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσής μας στο επίπεδο  $(\gamma_0, \gamma_1)$  για την περίπτωση της συνάρτησης μεταφοράς των Eisenstein & Hu [70], αφού έχουμε διαπιστώσει ότι έχουμε παρόμοια περιγράμματα χρησιμοποιώντας όποια από τις δύο συναρτήσεις μεταφοράς. Το αριστερό διάγραμμα δείχνει τα αποτελέσματα με βάση την παραμετροποίηση  $\Gamma_1$  ενώ στο δεξί διάγραμμα με βάση την παραμετροποίηση  $\Gamma_2$ . Οι ισοψείς μας καμπύλες είναι σε συμφωνία με αυτές των [159] (βλ. πράσινες διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα (6.4)) κάτι το οποίο σημαίνει πρακτικά ότι η ανάλυσή μας παράγει παρόμοια αποτελέσματα με εκείνα των SNIa/BAOs/CMB<sub>shift</sub>/ $f\sigma_8$ .

Οι θεωρητικές  $\Lambda$ CDM τιμές  $(\gamma_0^{(th)}, \gamma_1^{(th)})$  υποδεικνύονται από τις γεμάτες κουκίδες, ενώ τα αστεράκια αντιστοιχούν στις τιμές βέλτιστης προσαρμογής οι οποίες είναι:





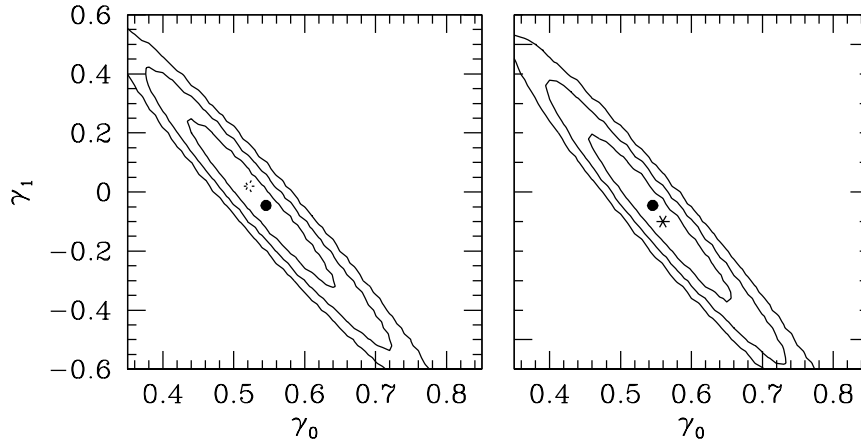
ΣΧΗΜΑ 6.4: Συνδυασμένη ανάλυση που βασίζεται στη γωνιακή συνάρτηση συσχέτισμού  $w(\theta)$  των 2SLAQ (LRGs) και στο  $f\sigma_8$  η οποία δίνει τις αντίστοιχες ισούψείς (συνεχόμενες γραμμές) στο επίπεδο  $(\gamma_0, \gamma_1)$  (χρησιμοποιώντας  $\Omega_{m0} = 0.30$  και  $\sigma_8 = 0.797$ ). Το αριστερό και το δεξί διάγραμμα δείχνουν τα αποτελέσματα τα οποία βασίζονται στην παραμετροποίηση  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  αντίστοιχα. Οι αστερίσκοι αντιστοιχούν στις τιμές βέλτιστης προσαρμογής των παραμέτρων. Δείχνουμε επίσης τις θεωρητικές τιμές  $(\gamma_0^{(th)}, \gamma_1^{(th)})$  (γεμάτες κουκκίδες) για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM οι οποίες δίνονται στην παράγραφο (1.2.5.2). Οι πράσινες διακεκομμένες καμπύλες αντιστοιχούν στη συνδυασμένη ανάλυση των SNIa/BAOs/CMB<sub>shift</sub>/ $f\sigma_8$  όπως δίνεται από τους [159].

- Για την παραμετροποίηση  $\Gamma_1$  έχουμε:  $\chi_{t,\min}^2/df = 16.0/25$ ,  $\gamma_0 = 0.52 \pm 0.08$ ,  $\gamma_1 = 0.20 \pm 0.32$ .
- Για τη  $\Gamma_2$  παραμετροποίηση ομοίως παίρνουμε:  $\chi_{t,\min}^2/df = 15.87/25$ ,  $\gamma_0 = 0.51 \pm 0.08$ ,  $\gamma_1 = 0.34_{-0.46}^{+0.26}$ .

Προφανώς, δεν μπορούμε να θέσουμε αυστηρούς περιορισμούς στην τιμή της παραμέτρου  $\gamma_1$  από αυτή την ανάλυση όπως γίνεται και στην αντίστοιχη περίπτωση για τα SNIa/BAOs/CMB<sub>shift</sub>/ $f\sigma_8$  στην ανάλυση των [159]. Αυτό το αποτέλεσμα εν μέρει οφείλεται στην επιλογή σταθερού  $\sigma_8$ . Ως εκ τούτου, έχουμε προσπαθήσει να μετριάσουμε το πρόβλημα αυτό με το να συμπεριλάβουμε το  $\sigma_8$  μέσα στις παραμέτρους που εξαρτώνται από το  $\gamma$ . Ακολουθώντας τη διαδικασία της κανονικοποίησης των [166], θέτουμε:

$$\sigma_{8,\gamma} = \sigma_8 \frac{\delta_m(1, \gamma_0, \gamma_1)}{\delta_m(1, \gamma_0^{(th)}, \gamma_1^{(th)})}, \quad (6.6)$$

όπου  $\sigma_8 = 0.797$ , ενώ το  $\delta_m(a, \gamma)$  δίνεται από την εξίσωση (1.68). Επαναλαμβάνουμε τη στατιστική μας ανάλυση χρησιμοποιώντας το  $\sigma_{8,\gamma}$  και έτσι βρίσκουμε ότι:



ΣΧΗΜΑ 6.5: Οι ισοϋψείς πιθανοτήτων στο επίπεδο  $(\gamma_0, \gamma_1)$  (βλ. το επεξηγηματικό κείμενο στο σχήμα (6.4) για τους ορισμούς). Εδώ η κανονικοποίηση του φάσματος ισχύος δίνεται από την εξίσωση (6.6).

- Για την παραμετροποίηση  $\Gamma_1$ :  $\gamma_0 = 0.52 \pm 0.04$ ,  $\gamma_1 = 0.02 \pm 0.11$  με  $\chi_{t,\min}^2/df = 17.5/25$ .
- Για την παραμετροποίηση  $\Gamma_2$ :  $\gamma_0 = 0.56 \pm 0.03$ ,  $\gamma_1 = -0.10 \pm 0.11$  με  $\chi_{t,\min}^2/df \simeq 17.3/25$ .

Είναι προφανές ότι οι προβλεπόμενες από το μοντέλο  $\Lambda$ CDM τιμές των  $(\gamma_0^{(th)}, \gamma_1^{(th)})$  των δύο παραμετροποιήσεων είναι κοντά στις τιμές βέλτιστης προσαρμογής της ανάλυσής μας (βλ. γεμάτα σημεία στο σχήμα (6.5)). Τέλος, συγκρίνοντας τις ισοϋψείς του σχήματος (6.5) με άλλα διαθέσιμα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας, (πίνακας (6.4)), διαπιστώνουμε ότι πράγματι έχουμε καταφέρει να μειώσουμε σημαντικά την περιοχή των  $\gamma_0 - \gamma_1$  ισοϋψών, αυξάνοντας κατά  $\sim 30\%$  τη σημαντικότητα του αποτελέσματος σε σχέση με εκείνη της ανάλυσης που βασίζεται σε σταθερό  $\sigma_8$  (σχήμα (6.4)).

## 6.4 Ανάλυση με βάση τις σταθερές της ομάδας Planck

Στην παρούσα παράγραφο, αναφέρουμε με συντομία τα αποτελέσματα που προκύπτουν επαναλαμβάνοντας την ανάλυσή μας, αλλά χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους που

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3: Βιβλιογραφικές τιμές των  $(\gamma_0, \gamma_1)$ . Τα αποτελέσματα που αναγράφονται σε χαράκτες με έμφαση αντιστοιχούν στη δική μας ανάλυση.

Μοντέλο Παραμετροποίησης	$\gamma_0$	$\gamma_1$	Αναφορά
$\Gamma_1 : \gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z$	$0.77 \pm 0.29$	$-0.38 \pm 0.85$	[60]
	0.774	-0.556	[156]
	$0.49^{+0.12}_{-0.11}$	$0.305^{+0.345}_{-0.318}$	[157]
	$0.48 \pm 0.07$	$0.32 \pm 0.20$	[160]
	$0.40^{+0.086}_{-0.080}$	$0.603 \pm 0.241$	[62]
	$0.567 \pm 0.066$	$0.116 \pm 0.19$	[159], [142]
	<b><math>0.520 \pm 0.04</math></b>	<b><math>0.02 \pm 0.11</math></b>	<b>Η δική μας μελέτη</b>
$\Gamma_2 : \gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z / (1 + z)$	$0.92^{+1.56}_{-1.26}$	$-1.49^{+6.86}_{-6.08}$	[63]
	$0.461^{+0.12}_{-0.11}$	$0.513^{+0.448}_{-0.414}$	[157]
	$0.46 \pm 0.09$	$0.55 \pm 0.36$	[160]
	$0.345^{+0.085}_{-0.080}$	$1.006 \pm 0.314$	[62]
	$0.561 \pm 0.068$	$0.183 \pm 0.26$	[159], [142]
		<b><math>0.560 \pm 0.03</math></b>	<b><math>-0.10 \pm 0.11</math></b>

προέρχονται από την ανάλυση της ομάδας Planck [14], δηλαδή

$$(\Omega_{b0}, \tilde{h}, n, \sigma_8) = (0.02207\tilde{h}^{-2}, 0.674, 0.9616, \sigma_8)$$

με  $\sigma_8 = 0.87(0.27/\Omega_{m0})^{0.3}$ . Δεδομένου ότι έχουμε βρει πως τα αποτελέσματά μας παραμένουν σχεδόν ανεπηρέαστα από τη χρήση όποιας εκ των δύο διαφορετικών μορφών των συναρτήσεων μεταφοράς  $T(k)$ , χρησιμοποιούμε εδώ τη μορφή που προτείνεται από τους [70]. Εν συντομία βρίσκουμε ότι:

- η συνολική συνάρτηση πιθανότητας έχει μέγιστο στο  $(\Omega_{m0}, \gamma) = (0.29^{+0.02}_{-0.03}, 0.56^{+0.02}_{-0.06})$  με  $\chi^2_{t,\min}/df \simeq 15/23$ . Το αντίστοιχο διάνυσμα είναι ίσο με:  $\mathbf{p}_2 = (1.40 \pm 0.1 \times 10^{13} h^{-1} M_\odot, 0.4 \pm 0.20)$ . Εάν θέσουμε  $\Omega_{m0} = 0.315$  τότε βρίσκουμε  $\gamma = 0.58^{+0.02}_{-0.10}$ ,  $\mathbf{p}_2 = (1.60 \pm 0.1 \times 10^{13} h^{-1} M_\odot, 0.8 \pm 0.10)$  με  $\chi^2_{t,\min}/df \simeq 17.1/24$ . Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την τελευταία τιμή για το  $\Omega_{m0}$  και  $\mathbf{p}_2$  έχουμε:
- στην περίπτωση της παραμετροποίησης  $\Gamma_1$ :  $\chi^2_{t,\min}/df = 18/25$ ,  $\gamma_0 = 0.55 \pm 0.04$ ,  $\gamma_1 = -0.06 \pm 0.12$ .
- στην περίπτωση της παραμετροποίησης  $\Gamma_2$ :  $\chi^2_{t,\min}/df = 17.8/25$ ,  $\gamma_0 = 0.55 \pm 0.04$ ,  $\gamma_1 = -0.08 \pm 0.12$ . Σημειώνουμε ότι και για τις δύο  $\gamma(z)$  παραμετροποιήσεις, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (6.6) ως προς τη μεταβλητή  $\sigma_{8,\gamma}$ .

## 6.5 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων

Στη σημερινή εποχή των λεπτομερών κοσμολογικών μελετών που αποσκοπούν στον έλεγχο της εγκυρότητας της ΓΘΣ σε εξωγαλαξιακές κλίμακες, είναι πολύ σημαντικό να ελαχιστοποιούμε το πλήθος των μεταβλητών των οποίων ο προσδιορισμός απαιτείται για την επιτυχή ολοκλήρωση μιας τέτοιας προσπάθειας. Μια τέτοια μεταβλητή είναι ο δείκτης αύξησης των δομών  $\gamma$ . Η μέτρησή του σε επίπεδο ακρίβειας  $\sim 1\%$  έχει προταθεί ως ένα απαραίτητο βήμα για τον έλεγχο πιθανών παρεκαλίσεων από τη ΓΘΣ σε κοσμολογικές κλίμακες [167]. Ως εκ τούτου, είναι καίριας σημασίας να έχουμε ανεξάρτητους προσδιορισμούς του  $\gamma$ , επειδή αυτό θα βοηθήσει να ελέγξουμε συστηματικά σφάλματα που ενδεχομένως συνοδεύουν μεμονωμένες μεθόδους ή μεμονωμένες επιλογές του είδους του ιχνηλάτη τον οποίο χρησιμοποιούμε προκειμένου να προσδιορίσουμε παρατηρησιακά το ρυθμό αύξησης των διαταραχών της ύλης.

Στο παρόν κεφάλαιο, αλλά και στη μελέτη μας γενικότερα, χρησιμοποιήσαμε τις βασικές ιδιότητες των δομών μεγάλης κλίμακας όπως η ομαδοποίηση των 2SLAQ ερυθρών φωτεινών γαλαξιών μαζί με το ρυθμό αύξησης των δομών που παρέχονται από τις διάφορες γαλαξιακές έρευνες προκειμένου να περιορίσουμε την τιμή του δείκτη αύξησης των δομών,  $\gamma$ , στην περίπτωση όπου αυτό θεωρείται σταθερό αλλά και για δύο μοντέλα χρονοεξαρτώμενου δείκτη αύξησης  $\gamma(z)$ . Τα αποτελέσματα των δύο αναλύσεων χρησιμοποιούνται σε μια συνδυαστική διαδικασία πιθανοτήτων η οποία βοηθά στη μείωση των αβεβαιοτήτων των παραμέτρων. Οι περιορισμοί που προκύπτουν για την περίπτωση του σταθερού δείκτη αύξησης είναι:  $(\Omega_{m0}, \gamma) = (0.29 \pm 0.01, 0.56 \pm 0.05)$  οι οποίοι είναι οι ισχυρότεροι (εξ όσον γνωρίζουμε) περιορισμοί που έχουν δοθεί έως σήμερα στη βιβλιογραφία. Επίσης, επιβεβαιώνουμε ότι τα αποτελέσματα της ανάλυσής μας είναι εύρωστα έναντι της επιλογής διαφόρων συναρτήσεων μεταφοράς του φάσματος ισχύος, καθώς και έναντι της επιλογής τιμών για τις μεταβλητές που προκύπτουν από τα δεδομένα της ομάδας Planck που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία [14], [15]. Τέλος, θεωρώντας ένα χρονοεξαρτώμενο δείκτη αύξησης:  $\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 X(z)$ , με  $X(z) = z$  ή  $X(z) = z/(1+z)$  βρίσκουμε:  $(\gamma_0, \gamma_1) = (0.52 \pm 0.04, 0.02 \pm 0.11)$  (μοντέλο  $\Gamma_1$ ) και  $(\gamma_0, \gamma_1) = (0.56 \pm 0.03, -0.10 \pm 0.11)$  (μοντέλο  $\Gamma_2$ ). Εν ολίγοις βρίσκουμε, όπως σε όλες τις παρόμοιες μελέτες, ότι οι παράμετροι  $\gamma_1$  και  $\gamma_0$  είναι εκφυλισμένες. Ωστόσο, με βάση τη συνδυασμένη ανάλυση έχουμε καταφέρει να θέσουμε αυστηρότερους περιορισμούς στην παράμετρο  $\gamma_0$ . Παρά το γεγονός ότι έχουμε μειώσει σημαντικά την

αβεβαιότητα στον υπολογισμό της παραμέτρου  $\gamma_1$  σε σχέση με προηγούμενες μελέτες, τα αντίστοιχα σφάλματα παραμένουν αρκετά μεγάλα. Μελλοντικά, δυναμικά δεδομένα αναμένεται να βελτιώσουν ακόμη περισσότερο τους σχετικούς περιορισμούς (ειδικά στο  $\gamma_1$ ) και επομένως να καταστήσουν τελικά αποτελεσματικό τον έλεγχο της ισχύος της ΓΘΣ στις κοσμολογικές κλίμακες.



## Κεφάλαιο 7

# Συμπεράσματα-Νέες Ερευνητικές Κατευθύνσεις

Στην παρούσα διατριβή ελέγξαμε μοντέλα της επιταχυνόμενης διαστολής του Σύμπαντος καθώς και την ισχύ της ΓΘΣ σε κοσμολογικές κλίμακες, χρησιμοποιώντας τα πιο πρόσφατα δεδομένα δομών μεγάλης κλίμακας αλλά και δεδομένα του ρυθμού αύξησης των διαταραχών πυκνότητας της ύλης. Συγκεκριμένα, μελετήσαμε παρατηρησιακά δεδομένα που αφορούν στη χρονική εξέλιξη των διαταραχών της ύλης, και τα οποία συνδέονται με θεωρητικά μοντέλα που εξαρτώνται τόσο από το κοσμολογικό υπόβαθρο όσο και από τη θεωρία βαρύτητας. Ο έλεγχος της ΓΘΣ βασίζεται στο συνδυασμό των εξής παραμέτρων: του βαθμού σμηνοποίησης και του ρυθμού παραγωγής των κοσμικών δομών μεγάλης κλίμακας (γαλαξιών, γαλαξιών με ενεργούς πυρήνες, σμηνών γαλαξιών κ.τ.λ.). Ο προσδιορισμός αυτών των παραμέτρων είναι προδήλως σημαντικός καθώς όπως έχει αποδειχθεί αυτές εξαρτώνται άμεσα από τη θεωρία βαρύτητας που διέπει το Σύμπαν.

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο αναπτύξαμε τις βασικές κοσμολογικές έννοιες επάνω στις οποίες βασίζεται η διατριβή.

Στο κεφάλαιο (2) παρουσιάσαμε μία μορφή της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης η οποία αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε μοντέλο σκοτεινής ενέργειας αλλά και σε οποιοδήποτε εναλλακτικό μοντέλο βαρύτητας.

Στο κεφάλαιο (3) υπολογίσαμε την εξέλιξη του 'παράγοντα αναλογίας' (bias parameter) που συνδέει τις διαταραχές της φωτεινής ύλης με αυτές της σκοτεινής ύλης χρησιμοποιώντας τις βασικές εξισώσεις της κοσμικής δυναμικής. Στο κεφάλαιο

αυτό παρουσιάσαμε για πρώτη φορά αναλυτικές λύσεις για τη χρονική εξέλιξη του παράγοντα αναλογίας οι οποίες ισχύουν για όλα τα κοσμολογικά μοντέλα ανεξάρτητα από τη θεωρία βαρύτητας. Η γνώση της χρονικής εξέλιξης του παράγοντα αναλογίας είναι προαπαιτούμενη για την ορθή επεξεργασία των προβλημάτων της παρούσας διατριβής, εξαιτίας του γεγονότος ότι σε παρατηρησιακό επίπεδο παρατηρούμε μόνο τις διαφορές εκφάνσεις της φωτεινής ύλης, ενώ τα συμπεράσματά μας πρέπει να ανάγονται τελικά στη συμπεριφορά της ύλης συνολικά (βαρυονική και σκοτεινή).

Στο κεφάλαιο (4) παρουσιάσαμε με συνοπτικό τρόπο τα δεδομένα σηματοποίησης των ενεργών γαλαξιακών πυρήνων και των φωτεινών ερυθρών γαλαξιών που χρησιμοποιήσαμε στη μελέτη μας. Τα δεδομένα αυτά βασίζονται στους καταλόγους επισκόπησης SDSS και XMM-Newton. Συμπληρωματικά χρησιμοποιήσαμε διαθέσιμα δεδομένα του ρυθμού αύξησης των κοσμικών δομών, τα οποία βασίζονται στις έρευνες 2dfGS, 6dfGS, BOSS, CMASS και WiggleZ, ως συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης.

Στο κεφάλαιο (5) συγκρίναμε θεωρητικές προβλέψεις με τα δεδομένα του ρυθμού αύξησης χρησιμοποιώντας προχωρημένες μεθόδους στατιστικής προκειμένου να υπολογίσουμε το δείκτη αύξησης των δομών επιτρέποντας τον έλεγχο της ΓΘΣ σε κοσμολογικές κλίμακες. Η ανάλυση έδειξε ότι το κοσμολογικό μοντέλο εναλλακτικής βαρύτητας που βασίζεται στη θεωρία βρανών (branes) αποτυγχάνει να αναπαράγει τον παρατηρούμενο ρυθμό παραγωγής των κοσμικών δομών. Αντίθετα το μοντέλο της  $\Lambda$ -κοσμολογίας σε συνδυασμό με τη ΓΘΣ περιγράφει πολύ καλά τις παρατηρήσεις, αποτέλεσμα που βρίσκεται σε συμφωνία με άλλες ανεξάρτητες μελέτες της βιβλιογραφίας που αξιοποιούν παρατηρησιακά δεδομένα από πολύ διαφορετικές πηγές.

Στο κεφάλαιο (6) χρησιμοποιήσαμε μεθόδους συνδυασμένης στατιστικής ανάλυσης στα δεδομένα του κεφαλαίου (4) προκειμένου να μελετήσουμε την ποιοτική συμπεριφορά των αποτελεσμάτων ελέγχοντας τις διαφορετικές κανονικοποιήσεις του φάσματος των διαταραχών της σκοτεινής ύλης και τις διαφορετικές συναρτησιακές σχέσεις του φάσματος των διαταραχών που υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Με τον τρόπο αυτό δείξαμε ότι οι παραγόμενες τιμές των κοσμολογικών παραμέτρων παρουσιάζουν μια σταθερότητα η οποία έχει να κάνει με τη φύση της βαρύτητας και όχι με τον τρόπο που γίνεται η παραμετροποίηση των διαταραχών της σκοτεινής ύλης. Επίσης στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάσαμε αποτελέσματα για το δείκτη αύξησης των δομών που συνδέονται με τον έλεγχο της ΓΘΣ με δραστικά μικρότερα σφάλματα σε σχέση με προηγούμενες μελέτες. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση ενός σταθερού δείκτη αύξησης των δομών, βρήκαμε ότι  $\gamma = 0.56 \pm 0.05$ . Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ κοντά στη θεωρητικά προβλεπόμενη τιμή για το μοντέλο  $\Lambda$ CDM ( $\gamma = 6/11$ ), το



οποίο σημαίνει ότι η ανάλυσή μας ευνοεί τη ΓΘΣ ως το μοντέλο που περιγράφει καλύτερα τη βαρύτητα σε κοσμολογικές αποστάσεις. Για την περίπτωση ενός χρονικά εξελισσόμενου δείκτη αύξησης βρήκαμε για την παραμετροποίηση  $\Gamma_1$  ότι  $\gamma_0 = 0.52 \pm 0.04$  και  $\gamma_1 = 0.02 \pm 0.11$ , ενώ για την παραμετροποίηση  $\Gamma_2$  βρήκαμε ότι  $\gamma_0 = 0.56 \pm 0.03$  και  $\gamma_1 = -0.10 \pm 0.11$ . Παρόλο που η παράμετρος  $\gamma_0$  μπορεί να προσδιορισθεί με αρκετά καλή ακρίβεια, η παράμετρος ( $\gamma_1$ ) παραμένει εκφυλισμένη και δεν μπορούμε να εξάγουμε ένα ασφαλές συμπέρασμα, ωστόσο βάση της δικής μας μελέτης καταφέραμε να μειώσουμε δραστικά τα σφάλματα σε σχέση με άλλες αντίστοιχες έρευνες.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μελέτη μας, δείχνουν γενικά μία ιδιαίτερη εύνοια ως προς το κοσμολογικό μοντέλο  $\Lambda$ CDM σε συνδυασμό με τη ΓΘΣ ως ένα ενιαίο μοντέλο βαρύτητας. Ωστόσο, θα ήταν χρήσιμο να ενισχυθεί η εικόνα αυτή μέσω της συνδυασμένης ανάλυσης νέων ή και ήδη υπάρχοντων δεδομένων σηματοποίησης αλλά και δεδομένα του ρυθμού αύξησης με μικρότερα σφάλματα. Στο μέλλον, νέες έρευνες όπως π.χ. το *Euclid* ή το *SKA* (Square Kilometre Array) αναμένεται να δώσουν δεδομένα υψηλής ακρίβειας προκειμένου να τεθούν νέοι και πιο ακριβείς περιορισμοί στις κοσμολογικές παραμέτρους. Μέχρι τότε, ένας τρόπος προκειμένου να γίνει αυτό εφικτό, είναι η πρόβλεψη των περιορισμών που οι μελλοντικές παρατηρήσεις μπορούν να βάλουν στην τιμή του δείκτη αύξησης  $\gamma$ . Συγκεκριμένα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες χαρακτηριστικές θεωρήσεις για τις παραμέτρους τέτοιου είδους μελλοντικών ερευνών προκειμένου να εκτιμηθούν οι επιπτώσεις της παραδοχής ελεύθερων παραμέτρων στη διαδικασία υπολογισμού του δείκτη αύξησης. Περαιτέρω, οι προβλέψεις αυτές μπορούν να συγκριθούν με ήδη υπάρχοντα αποτελέσματα.

Τελικά, το κοσμολογικό μοντέλο  $\Lambda$ CDM μαζί με το μοντέλο βαρύτητας της ΓΘΣ, είναι εξαιρετικά ισχυρά και τα περισσότερα από τα διαθέσιμα κοσμολογικά δεδομένα αποδοκιμάζουν οποιαδήποτε απόκλιση από αυτή την περιγραφή του Σύμπαντος. Παρ'όλα αυτά, εξακολουθούν να υπάρχουν κάποιες ενστάσεις. Δεν είναι ακόμα απόλυτα σαφές αν αυτές είναι συνέπεια συστηματικών σφαλμάτων στη συλλογή των δεδομένων, σε ελλείψεις ή κατά προσέγγιση υπολογισμούς, ή ακόμα αγνοούμε αστροφυσικά φαινόμενα στις αναλύσεις των παρατηρήσεων οπότε τότε απλώς υπαινίσσεται ότι υπάρχει κάποια νέα φυσική.



# Βιβλιογραφία

- [1] R. Scaramella, G. Vettolani and G. Zamorani. *The distribution of clusters of galaxies within 300 Mpc/h and the crossover to an isotropic and homogeneous universe.* *Astrophys. J.*, 376:L1–L4, Jul 1991 .
- [2] M. Plionis and R. Valdarnini. *Evidence for large-scale structure on scales about 300/h MPC.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 249:46–61, Mar 1991 .
- [3] E. Branchini and M. Plionis. *Reconstructing Positions and Peculiar Velocities of Galaxy Clusters within 25,000 Kilometers per Second: The Cluster Real Space Dipole.* *Astrophys. J.*, 460:569, Apr 1996 .
- [4] M. Plionis and V. Kolokotronis. *The X-Ray Cluster Dipole.* *Astrophys. J.*, 500:1–7, Jun 1998 .
- [5] S. Basilakos and M. Plionis. *Large-Scale Coherent Dipole Anisotropy?* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 299:637–642, Sep 1998 .
- [6] I. Schmoldt et al. *Likelihood analysis of the Local Group acceleration.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 304:893–905, Apr 1999 .
- [7] M. Plionis, S. Basilakos, M. Rowan-Robinson, S. J. Maddox, S. J. Oliver, O. Keeble and W. Saunders. *Galaxy and cluster biasing from Local Group dynamics.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 313:8–12, Mar 2000 .
- [8] D. D. Kocevski, C. R. Mullis and H. Ebeling. *The Dipole Anisotropy of the First All-Sky X-Ray Cluster Sample.* *Astrophys. J.*, 608:721–730, Jun 2004 .
- [9] D. D. Kocevski and H. Ebeling. *On the Origin of the Local Group’s Peculiar Velocity.* *Astrophys. J.*, 645:1043–1053, Jul 2006 .
- [10] A. G. Riess et al. *A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3.* *Astrophys. J.*, 730:119, Apr 2011 .

- [11] W. Freedman et al. *The Carnegie RR Lyrae Program. Spitzer Proposal*, 730: 90002, Sep 2012 .
- [12] R. Chávez, E. Terlevich, R. Terlevich, M. Plionis, F. Bresolin, S. Basilakos and J. Melnick. *Determining the Hubble constant using giant extragalactic H II regions and H II galaxies. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 425:L56–L60, Sep 2012 .
- [13] A. G. Sánchez et al. *The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological implications of the large-scale two-point correlation function. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 425:415–437, Sep 2012 .
- [14] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday et al. *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. Astronomy and Astrophysics*, 571:A16, Nov 2014 .
- [15] D. N. Spergel, R. Flauger and R. Hložek. *Planck data reconsidered. Phys. Rev. D.*, 91:023518, Jan 2015 .
- [16] G. Hinshaw et al. *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. Astrophys. J. Sup.*, 208:19, Oct 2013 .
- [17] E. Komatsu et al. *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological Interpretation. Astrophys. J. Sup.*, 180:330–376, Feb 2009 .
- [18] M. Hicken, W. M. Wood-Vasey, S. Blondin, P. Challis, S. Jha, P. L. Kelly, A. Rest and R. P. Kirshner. *Improved Dark Energy Constraints from ~100 New CfA Supernova Type Ia Light Curves. Astrophys. J.*, 700:1097–1140, Aug 2009 .
- [19] E. Komatsu et al. *Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. Astrophys. J. Sup.*, 192:18, Feb 2011 .
- [20] C. Blake et al. *The WiggleZ Dark Energy Survey: measuring the cosmic expansion history using the Alcock-Paczynski test and distant supernovae. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 418:1725–1735, Dec 2011 .

- [21] O. Farooq, D. Mania and B. Ratra. *Hubble Parameter Measurement Constraints on Dark Energy*. *Astrophys. J.*, 764:138, Feb 2013 .
- [22] R. D. Peccei, J. Solà and C. Wetterich. *Adjusting the cosmological constant dynamically: Cosmons and a new force weaker than gravity*. *Phys. Lett. B.*, 195:183–190, Sep 1987 .
- [23] C. Wetterich. *Cosmology and the fate of dilatation symmetry*. *Nucl. Phys. B.*, 302:668–696, Jun 1988 .
- [24] B. Ratra and P. J. E. Peebles. *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*. *Phys. Rev. D.*, 37:3406–3427, Jun 1988 .
- [25] R. R. Caldwell. *A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state*. *Phys. Lett. B.*, 545:23–29, Oct 2002 .
- [26] B. Feng, X. Wang and X. Zhang. *Dark energy constraints from the cosmic age and supernova*. *Phys. Lett. B.*, 607:35–41, Feb 2005 .
- [27] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov and P. J. Steinhardt. *Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration*. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4438, Nov 2000 .
- [28] T. Chiba, T. Okabe and M. Yamaguchi. *Kinetically driven quintessence*. *Phys. Rev. D.*, 62:023511, Jul 2000 .
- [29] A. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier. *An alternative to quintessence*. *Phys. Lett. B.*, 511:265–268, Jul 2001 .
- [30] M. Özer and M. O. Taha. *A model of the universe free of cosmological problems*. *Nucl. Phys. B.*, 287:776–796.
- [31] J. Solà and H. Štefančić. *Effective equation of state for dark energy: Mimicking quintessence and phantom energy through a variable  $\Lambda$* . *Phys. Lett. B.*, 624:147–157, Sep 2005 .
- [32] M. Chevallier and D. Polarski. *Accelerating Universes with Scaling Dark Matter*. *Int. J. Mod. Phys. D*, 2001, 10:213–223.
- [33] E. V. Linder. *Exploring the Expansion History of the Universe*. *Phys. Rev. Lett.*, 90:091301, Mar 2003 .

- [34] Randall, L. and Sundrum, R. *An Alternative to Compactification. Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693.
- [35] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati. *4D gravity on a brane in 5D Minkowski space. Phys. Lett. B*, 485:208–214, Jul 2000 .
- [36] Planck Collaboration, P. A. R. Ade et al. *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. ArXiv e-prints*, 2015.
- [37] Linder, E. V. *Mapping the Dark Energy Equation of State. ArXiv e-prints*, 2003.
- [38] D. Huterer and M. S. Turner. *Probing dark energy: Methods and strategies. Phys. Rev. D.*, 64:123527, Dec 2001 .
- [39] J. Weller and A. Albrecht. *Future supernovae observations as a probe of dark energy. Phys. Rev. D.*, 65:103512, May 2002 .
- [40] P. J. Peebles and B. Ratra. *The cosmological constant and dark energy. Reviews of Modern Physics*, 75:559–606, Apr 2003 .
- [41] D. A. Dicus and W. W. Repko. *Constraints on the dark energy equation of state from recent supernova data. Phys. Rev. D.*, 70:083527, Oct 2004 .
- [42] Y. Wang and P. Mukherjee. *Robust Dark Energy Constraints from Supernovae, Galaxy Clustering, and 3 yr Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations. Astrophys. J.*, 650:1–6, Oct 2006 .
- [43] B. F. Gerke and G. Efstathiou. *Probing quintessence: reconstruction and parameter estimation from supernovae. Mon. Not. Roy. Soc.*, 335:33–43, Sep 2002 .
- [44] H. K. Jassal, J. S. Bagla and T. Padmanabhan. *WMAP constraints on low redshift evolution of dark energy. Mon. Not. Roy. Soc.*, 356:L11–L16, Jan 2005 .
- [45] B. A. Bassett, M. Kunz, D. Parkinson and C. Ungarelli. *Condensate cosmology: Dark energy from dark matter. Phys. Rev. D.*, 68:043504, Aug 2003 .
- [46] P. S. Corasaniti and E. J. Copeland. *Particle-theory and field-theory models of the early Universe, Background radiations. Phys. Rev. D.*, 67:063521, Mar 2003 .

- [47] P. S. Corasaniti, M. Kunz, D. Parkinson, E. J. Copeland and B. A. Bassett. *Foundations of observing dark energy dynamics with the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*. *Phys. Rev. D.*, 70:083006, Oct 2004 .
- [48] A. Lue, R. Scoccimarro and G. D. Starkman. *Probing Newton's constant on vast scales: Dvali-Gabadadze-Porrati gravity, cosmic acceleration, and large scale structure*. *Phys. Rev. D.*, 69:124015, Jun 2004 .
- [49] E. V. Linder. *Probing gravitation, dark energy, and acceleration*. *Phys. Rev. D.*, 70:023511, Jul 2004 .
- [50] E. V. Linder. *Cosmic growth history and expansion history*. *Phys. Rev. D.*, 72:043529, Aug 2005 .
- [51] E. V. Linder and R. N. Cahn. *Parameterized beyond-Einstein growth*. *Astroparticle Physics*, 28:481–488, Dec 2007 .
- [52] H. F. Stabenau and B. Jain. *N-body simulations of alternative gravity models*. *Phys. Rev. D.*, 74:084007, Oct 2006 .
- [53] J.-P. Uzan. *The acceleration of the universe and the physics behind it*. *ArXiv Astrophysics e-prints*, May 2006 .
- [54] S. Tsujikawa, K. Uddin and R. Tavakol. *Density perturbations in  $f(R)$  gravity theories in metric and Palatini formalisms*. *Phys. Rev. D.*, 77:043007, Feb 2008 .
- [55] R. Gannouji, B. Moraes and D. Polarski. *The growth of matter perturbations in  $f(R)$  models*. *JCAP*, 2:34, Feb 2009 .
- [56] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology, 1993*. .
- [57] V. Silveira and I. Waga. *Decaying  $\Lambda$  cosmologies and power spectrum*. *Phys. Rev. D.*, 50:4890–4894.
- [58] L. Wang and P. J. Steinhardt. *Cluster Abundance Constraints for Cosmological Models with a Time-varying, Spatially Inhomogeneous Energy Component with Negative Pressure*. *Astrophys. J.*, 508:483–490, Dec 1998 .
- [59] S. Basilakos. *Cluster Formation Rate in Models with Dark Energy*. *Astrophys. J.*, 590:636–640, Jun 2003 .

- [60] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos. *Testing  $\Lambda$ CDM with the growth function  $\delta(a)$ : Current constraints.* *Phys. Rev. D.*, 77:023504, Jan 2008 .
- [61] D. Polarski and R. Gannouji. *On the growth of linear perturbations.* *Phys. Lett. B.*, 660:439–443, Mar 2008 .
- [62] S. Basilakos and A. Pouri. *The growth index of matter perturbations and modified gravity.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 423:3761–3767, Jul 2012 .
- [63] J. Dossett, M. Ishak, J. Moldenhauer, Y. Gong and A. Wang. *Constraints on growth index parameters from current and future observations.* *JCAP*, 4: 22, Apr 2010 .
- [64] P. Wu, H. Yu and X. Fu. *A parametrization for the growth index of linear matter perturbations.* *JCAP*, 6:19, Jun 2009 .
- [65] M. Ishak and J. Dossett. *Contiguous redshift parameterizations of the growth index.* *Phys. Rev. D.*, 80:043004, Aug 2009 .
- [66] A. Bueno Belloso, J. García-Bellido and D. Sapone. *A parametrization of the growth index of matter perturbations in various Dark Energy models and observational prospects using a Euclid-like survey.* *JCAP*, 10:10, Oct 2011 .
- [67] C. di Porto, L. Amendola and E. Branchini. *Growth factor and galaxy bias from future redshift surveys: a study on parametrizations.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 419:985–997, Jan 2012 .
- [68] Y. Gong. *Growth factor parametrization and modified gravity.* *Phys. Rev. D.*, 78:123010, Dec 2008 .
- [69] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser and A. S. Szalay. *The statistics of peaks of Gaussian random fields.* *Astrophys. J.*, 304:15–61, May 1986 .
- [70] D. J. Eisenstein and W. Hu. *Baryonic Features in the Matter Transfer Function.* *Astrophys. J.*, 496:605–614, Mar 1998 .
- [71] J. A. Peacock and S. J. Dodds. *Reconstructing the Linear Power Spectrum of Cosmological Mass Fluctuations.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 267:1020, Apr 1994 .
- [72] N. Sugiyama. *Cosmic Background Anisotropies in Cold Dark Matter Cosmology.* *Astrophys. J. Sup.*, 100:281, Oct 1995 .



- [73] H. Totsuji and T. Kihara. *The Correlation Function for the Distribution of Galaxies. Publications of the Astronomical Society of Japan*, 21:221.
- [74] P. J. E. Peebles. *The large-scale structure of the universe, 1980*. .
- [75] N. P. Ross et al. *The 2dF-SDSS LRG and QSO Survey: the LRG 2-point correlation function and redshift-space distortions. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 381:573–588, Oct 2007 .
- [76] M. Krumpel, T. Miyaji and A. L. Coil. *The Spatial Clustering of ROSAT All-Sky Survey AGNs. I. The Cross-correlation Function with SDSS Luminous Red Galaxies. Astrophys. J.*, 713:558–572, Apr 2010 .
- [77] G. Ivashchenko, V. I. Zhdanov and A. V. Tugay. *Correlation function of quasars in real and redshift space from the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 409:1691–1704, Dec 2010 .
- [78] A. Akylas, I. Georgantopoulos and M. Plionis. *The angular correlation function of the ROSAT All-Sky Survey Bright Source Catalogue. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 318:1036–1040, Nov 2000 .
- [79] Connolly, A. J. et al. *The Angular Correlation Function of Galaxies from Early Sloan Digital Sky Survey Data. Astrophys. J.*, 579:42–47.
- [80] A. Hajian, N. Battaglia, D. N. Spergel, J. R. Bond, C. Pfrommer and J. L. Sievers. *Measuring the thermal Sunyaev-Zel'dovich effect through the cross correlation of Planck and WMAP maps with ROSAT galaxy cluster catalogs. JCAP*, 11:64, Nov 2013 .
- [81] J. A. Peacock and S. J. Dodds. *Non-linear evolution of cosmological power spectra. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 280:L19–L26, Jun 1996 .
- [82] R. E. Smith et al. *Stable clustering, the halo model and non-linear cosmological power spectra. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 341:1311–1332, Jun 2003 .
- [83] L. M. Widrow, P. J. Elahi, R. J. Thacker, M. Richardson and E. Scannapieco. *Power spectrum for the small-scale Universe. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 397:1275–1285, Aug 2009 .

- [84] R. Takahashi, M. Sato, T. Nishimichi, A. Taruya and M. Oguri. *Revising the Halofit Model for the Nonlinear Matter Power Spectrum*. *Astrophys. J.*, 761:152, Dec 2012 .
- [85] T. D. Saini, S. Raychaudhury, V. Sahni and A. A. Starobinsky. *Reconstructing the Cosmic Equation of State from Supernova Distances*. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1162, Aug 2000 .
- [86] E. V. Linder and A. Jenkins. *Cosmic structure growth and dark energy*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 346:573–583, Dec 2003 .
- [87] C. Deffayet, G. Dvali and G. Gabadadze. *Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions*. *Phys. Rev. D.*, 65:044023, Feb 2002 .
- [88] N. Kaiser. *On the spatial correlations of Abell clusters*. *Astrophys. J. Lett.*, 284:L9–L12, Sep 1984 .
- [89] S. Basilakos, M. Plionis and A. Pouri. *Generalized evolution of linear bias: A tool to test gravity*. *Phys. Rev. D.*, 83:123525, Jun 2011 .
- [90] S. Basilakos and M. Plionis. *Cosmological Evolution of Linear Bias*. *Astrophys. J.*, 550:522–527, Apr 2001 .
- [91] S. Basilakos and M. Plionis. *Galaxy Bias in Quintessence Cosmological Models*. *Astrophys. J. Lett.*, 593:L61–L64, Aug 2003 .
- [92] S. Cole and N. Kaiser. *Biased clustering in the cold dark matter cosmogony*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 237:1127–1146, Apr 1989 .
- [93] H. J. Mo and S. D. M. White. *An analytic model for the spatial clustering of dark matter haloes*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 282:347–361, Sep 1996 .
- [94] S. Matarrese, P. Coles, F. Lucchin and L. Moscardini. *Redshift evolution of clustering*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 286:115–132, Mar 1997 .
- [95] L. Moscardini, P. Coles, F. Lucchin and S. Matarrese. *Modelling galaxy clustering at high redshift*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 299:95–110, Aug 1998 .
- [96] R. K. Sheth and G. Tormen. *Large-scale bias and the peak background split*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 308:119–126, Sep 1999 .

- [97] P. Valageas. *Mass functions and bias of dark matter halos. Astronomy and Astrophysics*, 508:93–106, Dec 2009 .
- [98] P. Valageas. *Large-scale bias of dark matter halos. Astronomy and Astrophysics*, 525:A98, Jan 2011 .
- [99] W. H. Press and P. Schechter. *Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. Astrophys. J.*, 187:425–438, Feb 1974 .
- [100] R. K. Sheth, H. J. Mo and G. Tormen. *Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 323:1–12, May 2001 .
- [101] Y. P. Jing. *Accurate Fitting Formula for the Two-Point Correlation Function of Dark Matter Halos. Astrophys. J. Lett.*, 503:L9–L13, Aug 1998 .
- [102] J. L. Tinker, D. H. Weinberg, Z. Zheng and I. Zehavi. *On the Mass-to-Light Ratio of Large-Scale Structure. Astrophys. J.*, 631:41–58, Sep 2005 .
- [103] U. Seljak and M. S. Warren. *Large-scale bias and stochasticity of haloes and dark matter. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 355:129–136, Nov 2004 .
- [104] J. L. Tinker, B. E. Robertson, A. V. Kravtsov, A. Klypin, M. S. Warren, G. Yepes and S. Gottlöber. *The Large-scale Bias of Dark Matter Halos: Numerical Calibration and Model Tests. Astrophys. J.*, 724:878–886, Dec 2010 .
- [105] A. Pillepich, C. Porciani and O. Hahn. *Halo mass function and scale-dependent bias from N-body simulations with non-Gaussian initial conditions. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 402:191–206, Feb 2010 .
- [106] C.-P. Ma, M. Maggiore, A. Riotto and J. Zhang. *The bias and mass function of dark matter haloes in non-Markovian extension of the excursion set theory. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 411:2644–2652, Mar 2011 .
- [107] A. Nusser and M. Davis. *On the prediction of velocity fields from redshift space galaxy samples. Astrophys. J. Lett.*, 421:L1–L4, Jan 1994 .
- [108] J. N. Fry. *The Evolution of Bias. Astrophys. J. Lett.*, 461:L65, Apr 1996 .
- [109] P. Catelan, F. Lucchin, S. Matarrese and C. Porciani. *The bias field of dark matter haloes. Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 297:692–712, Jul 1998 .

- [110] M. Tegmark and P. J. E. Peebles. *The Time Evolution of Bias*. *Astrophys. J. Lett.*, 500:L79–L82, Jun 1998 .
- [111] L. Hui and K. P. Parfrey. *Evolution of galaxy bias, generalized*. *Phys. Rev. D.*, 77:043527, Feb 2008 .
- [112] B. M. Schaefer, M. Douspis and N. Aghanim. *Implications of bias evolution on measurements of the integrated Sachs-Wolfe effect: errors and biases in parameter estimation*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 397:925–932, Aug 2009 .
- [113] S. Basilakos, M. Plionis and C. Ragone-Figueroa. *The Halo Mass-Bias Redshift Evolution in the  $\Lambda$ CDM Cosmology*. *Astrophys. J.*, 678:627–634, May 2008 .
- [114] P. McDonald and A. Roy. *Clustering of dark matter tracers: generalizing bias for the coming era of precision LSS*. *JCAP*, 8:020, Aug 2009 .
- [115] D. S. Reed, R. Bower, C. S. Frenk, A. Jenkins and T. Theuns. *The clustering of the first galaxy haloes*. *Mon. Not. Roy. Soc.*, 394:624–632, Apr 2009 .
- [116] S. Basilakos, J. B. Dent, S. Dutta, L. Perivolaropoulos and M. Plionis. *Testing general relativity using the evolution of linear bias*. *Phys. Rev. D.*, 85:123501, Jun 2012 .
- [117] A. Vikhlinin et al. *X-ray Cluster Cosmology*. 2010.
- [118] L. Guzzo et al. *A test of the nature of cosmic acceleration using galaxy redshift distortions*. *Nature*, 451:541–544, Jan 2008 .
- [119] D. Rapetti, S. W. Allen, A. Mantz and H. Ebeling. *The observed growth of massive galaxy clusters - III. Testing general relativity on cosmological scales*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 406:1796–1804, Aug 2010 .
- [120] E. V. Linder. *Redshift distortions as a probe of gravity*. *Astroparticle Physics*, 29:336–339, Jun 2008 .
- [121] S. M. Croom et al. *The 2dF QSO Redshift Survey - XIV. Structure and evolution from the two-point correlation function*. *Mon. Not. Roy. Soc.*, 356:415–438, Jan 2005 .
- [122] Y. Shen et al. *Quasar Clustering from SDSS DR5: Dependences on Physical Properties*. *Astrophys. J.*, 697:1656–1673, Jun 2009 .

- [123] N. P. Ross et al. *Clustering of Low-redshift ( $z \leq 2.2$ ) Quasars from the Sloan Digital Sky Survey*. *Astrophys. J.*, 697:1634–1655, Jun 2009 .
- [124] P. Simon. *Time evolution of the stochastic linear bias of interacting galaxies on linear scales*. *Astronomy and Astrophysics*, 430:827–842, Feb 2005 .
- [125] J. Ebrero, S. Mateos, G. C. Stewart, F. J. Carrera and M. G. Watson. *High-precision multi-band measurements of the angular clustering of X-ray sources*. *Astronomy and Astrophysics*, 500:749–762, Jun 2009 .
- [126] S. Basilakos, M. Plionis, A. Georgakakis and I. Georgantopoulos. *The XMM-Newton/2dF Survey - VI. Clustering and bias of the soft X-ray point sources*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 356:183–191, Jan 2005 .
- [127] S. Mateos et al. *High precision X-ray log N - log S distributions: implications for the obscured AGN population*. *Astronomy and Astrophysics*, 492:51–69.
- [128] S. D. Landy and A. S. Szalay. *Bias and variance of angular correlation functions*. *Astrophys. J.*, 412:64–71, Jul 1993 .
- [129] T. Miyaji et al. *The XMM-Newton Wide-Field Survey in the COSMOS Field. V. Angular Clustering of the X-Ray Point Sources*. *Astrophys. J. S.*, 172:396–405, Sep 2007 .
- [130] J. Ebrero et al. *The XMM-Newton serendipitous survey. VI. The X-ray luminosity function*. *Astronomy and Astrophysics*, 493:55–69, Jan 2009 .
- [131] W. A. Baum. *Photoelectric Magnitudes and Red-Shifts, 1962*.
- [132] D. C. Koo. *Optical multicolors - A poor person's Z machine for galaxies*. *Astronomical Journal*, 90:418–440, Mar 1985 .
- [133] E. D. Loh and E. J. Spillar. *Photometric redshifts of galaxies*. *Astrophys. J.*, 303:154–161, Apr 1986 .
- [134] A. J. Connolly, I. Csabai, A. S. Szalay, D. C. Koo, R. G. Kron and J. A. Munn. *Slicing Through Multicolor Space: Galaxy Redshifts from Broadband Photometry*. *Astronomical Journal*, 110:2655, Dec 1995 .
- [135] D. J. Eisenstein et al. *Spectroscopic Target Selection for the Sloan Digital Sky Survey: The Luminous Red Galaxy Sample*. *Astronomical Journal*, 122:2267–2280, Nov 2001 .

- [136] A. J. Benson, C. S. Frenk, C. M. Baugh, S. Cole and C. G. Lacey. *The clustering evolution of the galaxy distribution*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 327:1041–1056, Nov 2001 .
- [137] P. Norberg et al. *The 2dF Galaxy Redshift Survey: the dependence of galaxy clustering on luminosity and spectral type*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 332:827–838, Jun 2002 .
- [138] I. Zehavi et al. *The Luminosity and Color Dependence of the Galaxy Correlation Function*. *Astrophys. J.*, 630:1–27, Sep 2005 .
- [139] U. Sawangwit, T. Shanks, F. B. Abdalla, R. D. Cannon, S. M. Croom, A. C. Edge, N. P. Ross and D. A. Wake. *Angular correlation function of 1.5 million luminous red galaxies: clustering evolution and a search for baryon acoustic oscillations*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 416:3033–3056, Oct 2011 .
- [140] A. Pouri, S. Basilakos and M. Plionis. *Precision growth index using the clustering of cosmic structures and growth data*. *JCAP*, 8:042, Aug 2014 .
- [141] Y.-S. Song and W. J. Percival. *Reconstructing the history of structure formation using redshift distortions*. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 10:4, Oct 2009 .
- [142] S. Basilakos, S. Nesseris and L. Perivolaropoulos. *Observational constraints on viable  $f(R)$  parametrizations with geometrical and dynamical probes*. *Phys. Rev. D.*, 87:123529, Jun 2013 .
- [143] M. Davis, A. Nusser, K. L. Masters, C. Springob, J. P. Huchra and G. Lemson. *Local gravity versus local velocity: solutions for  $\beta$  and non-linear bias*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 413:2906–2922.
- [144] J. P. Huchra et al. *The 2MASS Redshift Survey-Description and Data Release*. *Astrophys. J. S.*, 199:26.
- [145] M. J. Hudson and S. J. Turnbull. *The Growth Rate of Cosmic Structure from Peculiar Velocities at Low and High Redshifts*. *Astrophys. J. Lett.*, 751:L30, Jun 2012 .
- [146] F. Beutler et al. *The 6dF Galaxy Survey:  $z \approx 0$  measurements of the growth rate and  $\sigma_8$* . *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 423:3430–3444, Jul 2012 .

- [147] W. J. Percival et al. *The 2dF Galaxy Redshift Survey: spherical harmonics analysis of fluctuations in the final catalogue*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 353:1201–1218, Oct 2004 .
- [148] M. Tegmark et al. *Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies*. *Phys. Rev. D.*, 74:123507, Dec 2006 .
- [149] L. Samushia, W. J. Percival and A. Raccanelli. *Interpreting large-scale redshift-space distortion measurements*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 420: 2102–2119, Mar 2012 .
- [150] C. Blake et al. *The WiggleZ Dark Energy Survey: the growth rate of cosmic structure since redshift  $z=0.9$* . *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 415:2876–2891, Aug 2011 .
- [151] B. A. Reid et al. *The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measurements of the growth of structure and expansion rate at  $z = 0.57$  from anisotropic clustering*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 426:2719–2737, Nov 2012 .
- [152] R. Tojeiro et al. *The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measuring structure growth using passive galaxies*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 424:2339–2344, Aug 2012 .
- [153] H. Akaike. *A New Look at the Statistical Model Identification*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19:716–723.
- [154] N. Sugiura. *Further analysis of the data by Akaike's information criterion and the finite corrections*. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, A7:13–26, 1978.
- [155] C. di Porto and L. Amendola. *Observational constraints on the linear fluctuation growth rate*. *Phys. Rev. D.*, 77:083508, Apr 2008 .
- [156] X. Fu, P. Wu and H. Yu. *The growth of linear perturbations in the DGP model*. *Phys. Lett. B*, 677:12–15, Jun 2009 .
- [157] S. Basilakos. *The  $\Lambda$ CDM Growth Rate of Structure Revisited*. *Intern. Journal of Modern Physics D*, 21:50064, Jul 2012 .
- [158] H. Wei. *Growth index of DGP model and current growth rate data*. *Phys. Lett. B*, 664:1–6.

- [159] S. Nesseris, S. Basilakos, E. N. Saridakis and L. Perivolaropoulos. *Viable  $f(T)$  models are practically indistinguishable from  $\Lambda$ CDM*. *Phys. Rev. D.*, 88:103010, Nov 2013 .
- [160] S. Lee. *arXiv: 1205.6304*, 2012.
- [161] L. Samushia et al. *The clustering of galaxies in the SDSS-III DR9 Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: testing deviations from  $\Lambda$  and general relativity using anisotropic clustering of galaxies*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 429:1514–1528, Feb 2013 .
- [162] D. Rapetti, C. Blake, S. W. Allen, A. Mantz, D. Parkinson and F. Beutler. *A combined measurement of cosmic growth and expansion from clusters of galaxies, the CMB and galaxy clustering*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 432: 973–985, Jun 2013 .
- [163] F. Simpson et al. *CFHTLenS: testing the laws of gravity with tomographic weak lensing and redshift-space distortions*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 429:2249–2263, Mar 2013 .
- [164] A. G. Sánchez et al. *The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological implications of the full shape of the clustering wedges in the data release 10 and 11 galaxy samples*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 440:2692–2713, May 2014 .
- [165] L. Xu. *Growth index after the Planck results*. *Phys. Rev. D.*, 88:084032, Oct 2013 .
- [166] S. Basilakos, M. Plionis and J. A. S. Lima. *Confronting dark energy models using galaxy cluster number counts*. *Phys. Rev. D.*, 82:083517, Oct 2010 .
- [167] R. Bean. *WFIRST dark energy observations in the context of Euclid and LSST*. *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, 223:341.05, Jan 2014 .