Εθνικο & Καποδιστριακο Πανεπιστημιο Αθηνων
Σχολη θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Διπλωματικη Εργασια Ειδικευσης στα Εφαρμοσμενα Μαθηματικα

Αριθμητική ολοκλήρωση με σημεία ρίζες πολυωνύμων του Chebyshev

Ανάργυρος Φραγκούλης

Δεκέμβριος 2016

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών Εφαρμοσμένα Μαθηματικά του Τμήματος Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.. Με την ολοκλήρωση αυτού του πονήματος, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω μια σειρά από ανθρώπους, οι οποίοι συνέβαλαν ποικιλοτρόπως στην υλοποίησή του. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κκ. Δουγαλή και Δρακόπουλο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή, καθώς και για όλα όσα με αφοσίωση μας δίδαξαν κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος. Επίσης, τον φίλο μου Δημοσθένη Χριστόπουλο, υποψήφιο διδάκτορα στο Πανεπιστήμιο του Leicester, για την, καθοριστικής σημασίας, βοήθειά του στο ξεκίνημα της συγγραφής της εργασίας σε ζητήματα που αφορούσαν στη γλώσσα σήμανσης LaTex. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συμφοιτητή μου Δημήτρη Μαυριδόπουλο για την αμέριστη στήριξη, καθώς και για τις εποικοδομητικές μας συζητήσεις. Ασφαλώς, δεν θα μπορούσα να παραλείψω τον αξιαγάπητο Γρηγόρη Κουνάδη, υποψήφιο διδάκτορα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, την ευγνωμοσύνη προς το πρόσωπο του οποίου, δυσκολεύομαι να περιγράψω με λέξεις. Τέλος, μα όχι λιγότερο, θα ήθελα ιδιαιτέρως να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας μου Καθηγητή κ. Σωτήριο Ε. Νοτάρη τόσο για την ευκαιρία που μου έδωσε να περιηγηθώ στον θαυμαστό κόσμο της αριθμητικής ολοκλήρωσης όσο και για το ότι στάθηκε πολύτιμος δάσκαλος και καθοδηγητής καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας.

Σύνοψη

Το θέμα της εργασίας, όπως δηλώνει και ο τίτλος της, είναι η αριθμητική ολοκλήρωση, δηλαδή, η προσέγγιση της τιμής ενός ορισμένου ολοκληρώματος με μια αριθμητική μέθοδο. Η αριθμητική ολοκλήρωση αποτελεί κλασσικό θέμα της αριθμητικής ανάλυσης και η χρησιμότητά της οφείλεται, βασικά, σε δυο λόγους: Αν f είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε, τότε μια παράγουσά της F μπορεί να προσδιορισθεί αναλυτικά μόνο σε λίγες περιπτώσεις, ενώ ακόμα κι όταν αυτό είναι εφικτό, ο υπολογισμός της F μπορεί να είναι ασύμφορος. Για την, κατά το δυνατόν, αρτιότερη παρουσίαση των εννοιών που μελετάμε, η εργασία διαρθρώνεται σε τέσσερα κεφάλαια, όπου:

1. Στο πρώτο κεφάλαιο, εισάγουμε την έννοια των ορθογωνίων πολυωνύμων σημειώνοντας τις βασικότερες ιδιότητές τους, όπως ο αναδρομικός τύπος τους, οι ιδιότητες των ριζών τους, η ταυτότητα Christoffel-Darboux και κατόπιν τα πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου και δευτέρου είδους.

2. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε βασικά στοιχεία αριθμητικής ολοκλήρωσης: Τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής, το βαθμό ακριβείας τους, τη σύγκλιση αυτών των τύπων για διάφορες κλάσεις συναρτήσεων, καθώς και το σφάλμα τους, μέσω μεθόδων χώρων Hilbert, για αναλυτικές συναρτήσεις.

3. Στο τρίτο κεφάλαιο, μελετάμε τέσσερις συγκεκριμένους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής: Τους λεγόμενους τύπους του Fejér πρώτου και δευτέρου είδους, τον τύπο του Basu και τον τύπο των Clenshaw-Curtis, εξετάζοντας για τον καθένα τα ζητήματα που αναλύσαμε στο τρίτο κεφάλαιο.

4. Στο τέταρτο κεφάλαιο, προχωρούμε σε κάποια αριθμητικά παραδείγματα. Συγκεκριμένα, υπολογίζουμε το σφάλμα των τύπων που μελετήσαμε στο τρίτο κεφάλαιο για μια σειρά από συναρτήσεις, προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης που παρουσιάζει μια ανωμαλία στο ένα άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης, ενώ τέλος βρίσκουμε φράγματα για το σφάλμα του τύπου του Fejér δευτέρου είδους για αναλυτικές συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 1

Ορθογώνια πολυώνυμα - πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου και δευτέρου είδους

1.1 Ορθογώνια πολυώνυμα

Η μέθοδος για να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο σύστημα πολυωνύμων είναι σχετικά απλή. Θεωρούμε αρχικά μια συνάρτηση βάρους w, μια συνάρτηση δηλαδή που είναι θετική στο πεπερασμένο διάστημα $[a, b]$, εκτός απο μεμονωμένα σημεία όπου μηδενίζεται, και για την οποία ισχύει $0 < \int_a^b w(t)dt < \infty$. Δεδομένου ότι τα μονώνυμα $1, t, t^2, \ldots \in C[a, b]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις στο $[a, b]$, μπορούμε να εφαρμόσουμε σ' αυτά ορθογωνοποίηση κατά Gram-Schmidt. Έτσι, προκύπτει ένα σύνολο πολυωνύμων $\pi_k(t)$, με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, για τα οποία ισχύουν τα εξής

- βαθμός $\pi_k = k, k = 0, 1, 2, \ldots.$
- $\langle \pi_k, \pi_l \rangle_w = \int\limits_a^b \pi_k(t)\pi_l(t)w(t)dt \begin{cases} = 0, & k \neq l, \\ > 0, & k = l, \end{cases}$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο για συναρτήσεις στη συνεχή του μορφή ως προς τη συνάρτηση βάρους w. Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται ένα μοναδικό σύνολο ορθογωνίων πολυωνύμων ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a, b]$.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα ορθογώνια πολυώνυμα είναι ιδιαίτερης σημασίας και έχουν πληθώρα εφαρμογών στην αριθμητική ανάλυση γενικά αλλά και στην αριθμητική ολοκλήρωση ειδικότερα. Η αξία τους οφείλεται σε μια σειρά από πολύ σημαντικές ιδιότητες που έχουν αυτά τα πολυώνυμα. Αναφέρουμε αρχικά μια απλή πρόταση και στη συνέχεια δίνουμε τον αναδρομικό τύπο που ικανοποιούν, ο οποίος έχει τόσο θεωρητική όσο και υπολογιστική αξία.

Πρόταση 1.1.1. *Τα ορθογώνια πολυώνυμα είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει

$$a_0\pi_0 + a_1\pi_1 + \ldots + a_k\pi_k = 0, \ a_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, 1, \ldots, k.$$

Τότε,

$$\langle a_0\pi_0 + a_1\pi_1 + \ldots + a_k\pi_k, \pi_i\rangle_w = \langle 0, \pi_i\rangle_w,\ i = 0, 1, \ldots, k,$$

και λόγω της γραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου και της ορθογωνιότητας,

$$a_i\langle \pi_i, \pi_i\rangle_w = 0 \Rightarrow a_i = 0,\ i = 0, 1, \ldots, k,$$

επομένως, τα $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$ είναι γραμμμικά ανεξάρτητα. $\square$

Θεώρημα 1.1.2. *Τα ορθογώνια πολυώνυμα π_k, με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a, b]$, ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο*

$$\begin{gathered}\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t),\ \ k = 0, 1, 2, \ldots,\\ \pi_{-1}(t) = 0,\ \ \pi_0(t) = 1,\end{gathered} \tag{1.1}$$

όπου

$$\alpha_k = \frac{\int\limits_a^b t(\pi_k(t))^2 w(t)dt}{\int\limits_a^b (\pi_k(t))^2 w(t)dt},\quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

$$\beta_k = \frac{\int\limits_a^b (\pi_k(t))^2 w(t)dt}{\int\limits_a^b (\pi_{k-1}(t))^2 w(t)dt},\quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

Απόδειξη. Το πολυώνυμο $\pi_{k+1} - t\pi_k$ είναι βαθμού $\leq k$ και τα πολυώνυμα $\pi_0, \pi_1, \ldots,$ π_k αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα, άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, το $\pi_{k+1} - t\pi_k$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$, στη μορφή

$$\pi_{k+1}(t) - t\pi_k(t) = -\alpha_k\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t) + \sum_{i=0}^{k-2}\gamma_i\pi_i(t). \tag{1.4}$$

Σχηματίζοντας το εσωτερικό γινόμενο με το π_k και στα δύο μέλη της (1.4),

$$\langle \pi_{k+1}, \pi_k\rangle_w - \langle t\pi_k, \pi_k\rangle_w = -\langle \alpha_k\pi_k, \pi_k\rangle_w - \langle \beta_k\pi_{k-1}, \pi_k\rangle_w + \sum_{i=0}^{k-2}\langle \gamma_i\pi_i, \pi_k\rangle_w,$$

και με βάση την ορθογωνιότητα και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου,

$$\langle t\pi_k, \pi_k\rangle_w = \langle \alpha_k\pi_k, \pi_k\rangle_w \Rightarrow \alpha_k\langle \pi_k, \pi_k\rangle_w = \langle t\pi_k, \pi_k\rangle_w$$

$$\Rightarrow \alpha_k = \frac{\langle t\pi_k, \pi_k\rangle_w}{\langle \pi_k, \pi_k\rangle_w},\ \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την (1.2). Τώρα, προκειμένου για τα β_k, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (1.4) με το π_{k-1},

$$-\langle t\pi_k, \pi_{k-1}\rangle_w = -\langle \beta_k\pi_{k-1}, \pi_{k-1}\rangle_w \Rightarrow \beta_k\langle \pi_{k-1}, \pi_{k-1}\rangle_w = \langle t\pi_k, \pi_{k-1}\rangle_w,$$

όπου

$$\langle t\pi_k, \pi_{k-1}\rangle_w = \int\limits_a^b t\pi_k(t)\pi_{k-1}(t)w(t)dt = \int\limits_a^b \pi_k(t)t\pi_{k-1}(t)w(t)dt = \langle \pi_k, t\pi_{k-1}\rangle_w.$$

Άρα,

$$\beta_k\langle \pi_{k-1}, \pi_{k-1}\rangle_w = \langle \pi_k, t\pi_{k-1}\rangle_w. \tag{1.5}$$

Όμως, το $t\pi_{k-1}$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού k και μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$,

$$t\pi_{k-1} = \pi_k + c_{k-1}\pi_{k-1} + \cdots + c_0\pi_0, \tag{1.6}$$

όπου $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Η (1.5), μέσω της (1.6), δίνει, λόγω ορθογωνιότητας,

$$\beta_k\langle \pi_{k-1}, \pi_{k-1}\rangle_w = \langle \pi_k, \pi_k\rangle_w,$$

σχέση ισοδύναμη με την (1.3). Τέλος, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (1.4) με κάθε ένα από τα π_i, $i = 0, 1, \ldots, k-2$, συμπεραίνουμε ότι $\gamma_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-2$, οπότε αποδεικνύεται η (1.1). □

Παρατηρούμε, μέσω της (1.3), ότι τα $\beta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Ακόμη, βλέπουμε ότι μέσω του αναδρομικού τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το πολυώνυμο π_k. Πράγματι, αφού $\pi_{-1}(t) = 0$ και $\pi_0(t) = 1$, υπολογίζοντας από την (1.2), με $k = 0$, το a_0 και εφαρμόζοντας κατόπιν την (1.1), με $k = 0$, βρίσκουμε το π_1. Στη συνέχεια, θέτοντας $k = 1$ διαδοχικά στις (1.2), (1.3) και (1.1) υπολογίζουμε τα a_1, β_1 και π_2, κ.ο.κ.

Η επόμενη ιδιότητα αφορά στις ρίζες ενός ορθογωνίου πολυωνύμου. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι:

Θεώρημα 1.1.3. *Οι ρίζες του ορθογωνίου πολυωνύμου π_k, με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a, b]$, είναι πραγματικές, διακριτές και περιέχονται στο (a, b).*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, το π_k είναι ορθογώνιο ως προς το μονώνυμο 1, συνεπώς $\int_a^b \pi_k(t)w(t)dt = 0$. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο (a, b) στο οποίο το π_k αλλάζει πρόσημο. Έστω $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l,\ l \leq k$, τα σημεία στα οποία το π_k αλλάζει πρόσημο. Ας υποθέσουμε ότι $l < k$. Τότε το γινόμενο $\pi_k(t)(t-\tau_1)(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_l)$ έχει σταθερό πρόσημο στο (a, b), οπότε,

$$\int\limits_a^b \pi_k(t)(t-\tau_1)(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_l)w(t)dt \neq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί $(t-\tau_1)(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_l) \in \mathbb{P}_l$, συνεπώς, λόγω ορθογωνιότητας, το προηγούμενο ολοκλήρωμα θα έπρεπε να είναι 0. Άρα $l = k$. □

Στην περίπτωση που η συνάρτηση βάρους w είναι άρτια και το διάστημα $[a, b]$ είναι συμμετρικό ως προς το 0, ισχύει το

Θεώρημα 1.1.4. *Αν για τη συνάρτηση βάρους w ισχύει $w(-t) = w(t)$ και το διάστημα $[a, b]$ είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, δηλαδή $a = -b$, τότε τα αντίστοιχα ορθογώνια πολυώνυμα π_k, με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, ικανοποιούν τη σχέση*

$$\pi_k(-t) = (-1)^k \pi_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.7}$$

Επιπλέον, για τους συντελεστές α_k στον αναδρομικό τύπο (1.1) ισχύει

$$\alpha_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.8}$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$p_k(t) = (-1)^k \pi_k(-t), \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

και για $k \neq l$,

$$\begin{aligned}\int_a^b p_k(t)p_l(t)w(t)dt &= \int_{-b}^b (-1)^k \pi_k(-t)(-1)^l \pi_l(-t)w(t)dt \\ &= (-1)^{k+l} \int_{-b}^b \pi_k(-t)\pi_l(-t)w(t)dt.\end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $-t = \tau$,

$$\begin{aligned}\int_a^b p_k(t)p_l(t)w(t)dt &= (-1)^{k+l} \int_b^{-b} \pi_k(\tau)\pi_l(\tau)w(-\tau)(-d\tau) \\ &= (-1)^{k+l} \int_{-b}^b \pi_k(\tau)\pi_l(\tau)w(\tau)d\tau = 0.\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι τα p_k είναι ορθογώνια ως προς τη συνάρτηση βάρους w. Επιπλέον τα p_k έχουν συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, συνεπώς, λόγω της μοναδικότητας του συστήματος ορθογωνίων πολυωνύμων ως προς μια συνάρτηση βάρους w, έπεται ότι

$$p_k(t) = \pi_k(t) \Leftrightarrow (-1)^k \pi_k(-t) = \pi_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την (1.7). Ουσιαστικά, η (1.7) λέει ότι όταν το k είναι άρτιο, τότε το π_k είναι άρτιο, δηλαδή είναι ένα πολυώνυμο ως προς t^2, ενώ όταν το k είναι περιττό, περιέχει μόνο περιττές δυνάμεις του t. Συνεπώς, η $t(\pi_k(t))^2$ είναι περιττή συνάρτηση, οπότε,

$$\int_{-b}^b t(\pi_k(t))^2 w(t)dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

και από την (1.2) προκύπτει ότι $\alpha_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. □

Τέλος, αναφέρουμε μια ιδιότητα των ορθογωνίων πολυωνύμων που θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στη συνέχεια και είναι γνωστή ως ταυτότητα Christoffel-Darboux.

Θεώρημα 1.1.5. *Τα ορθογώνια πολυώνυμα π_k, με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a,b]$, ικανοποιούν*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\pi_k(t)\pi_k(x)}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w} = \frac{1}{\langle \pi_n, \pi_n \rangle_w} \frac{\pi_{n+1}(t)\pi_n(x) - \pi_n(t)\pi_{n+1}(x)}{t-x}. \tag{1.9}$$

Απόδειξη. Από την (1.1), έχουμε

$$t\pi_k(t) = \pi_{k+1}(t) + \alpha_k \pi_k(t) + \beta_k \pi_{k-1}(t),$$

και πολλαπλασιάζοντας με $\pi_k(x)$,

$$t\pi_k(t)\pi_k(x) = \pi_{k+1}(t)\pi_k(x) + \alpha_k \pi_k(t)\pi_k(x) + \beta_k \pi_{k-1}(t)\pi_k(x).$$

Εναλλάσσοντας τώρα τα t και x,

$$x\pi_k(x)\pi_k(t) = \pi_{k+1}(x)\pi_k(t) + \alpha_k \pi_k(x)\pi_k(t) + \beta_k \pi_{k-1}(x)\pi_k(t),$$

και αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις,

$$\begin{aligned} (t-x)\pi_k(t)\pi_k(x) &= \pi_{k+1}(t)\pi_k(x) - \pi_{k+1}(x)\pi_k(t) \\ &\quad + \beta_k[\pi_{k-1}(t)\pi_k(x) - \pi_{k-1}(x)\pi_k(t)] \\ \Rightarrow (t-x)\pi_k(t)\pi_k(x) &= \pi_{k+1}(t)\pi_k(x) - \pi_k(t)\pi_{k+1}(x) \\ &\quad - \beta_k[\pi_k(t)\pi_{k-1}(x) - \pi_{k-1}(t)\pi_k(x)]. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα β_k, $k = 1, 2, \ldots$, από την (1.3),

$$\begin{aligned} (t-x)\pi_k(t)\pi_k(x) &= \pi_{k+1}(t)\pi_k(x) - \pi_k(t)\pi_{k+1}(x) \\ &\quad - \frac{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w}{\langle \pi_{k-1}, \pi_{k-1} \rangle_w}[\pi_k(t)\pi_{k-1}(x) - \pi_{k-1}(t)\pi_k(x)] \\ \Rightarrow \frac{(t-x)\pi_k(t)\pi_k(x)}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w} &= \frac{\pi_{k+1}(t)\pi_k(x) - \pi_k(t)\pi_{k+1}(x)}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w} \\ &\quad - \frac{\pi_k(t)\pi_{k-1}(x) - \pi_{k-1}(t)\pi_k(x)}{\langle \pi_{k-1}, \pi_{k-1} \rangle_w}. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τώρα από $k = 1$ μέχρι $k = n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-x)\pi_k(t)\pi_k(x)}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w} &= \frac{\pi_2(t)\pi_1(x) - \pi_1(t)\pi_2(x)}{\langle \pi_1, \pi_1 \rangle_w} - \frac{\pi_1(t)\pi_0(x) - \pi_0(t)\pi_1(x)}{\langle \pi_0, \pi_0 \rangle_w} \\ &\quad + \frac{\pi_3(t)\pi_2(x) - \pi_2(t)\pi_3(x)}{\langle \pi_2, \pi_2 \rangle_w} - \frac{\pi_2(t)\pi_1(x) - \pi_1(t)\pi_2(x)}{\langle \pi_1, \pi_1 \rangle_w} \\ &\quad + \ldots + \frac{\pi_{n+1}(t)\pi_n(x) - \pi_n(t)\pi_{n+1}(x)}{\langle \pi_n, \pi_n \rangle_w} \\ &\quad - \frac{\pi_n(t)\pi_{n-1}(x) - \pi_{n-1}(t)\pi_n(x)}{\langle \pi_{n-1}, \pi_{n-1} \rangle_w} \\ &= \frac{\pi_{n+1}(t)\pi_n(x) - \pi_n(t)\pi_{n+1}(x)}{\langle \pi_n, \pi_n \rangle_w} \\ &\quad - \frac{\pi_1(t)\pi_0(x) - \pi_0(t)\pi_1(x)}{\langle \pi_0, \pi_0 \rangle_w}. \end{aligned}$$

Όμως, από την (1.1), $\pi_0(x) = \pi_0(t) = 1$, $\pi_1(t) = t$ και $\pi_1(x) = x$, οπότε,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(t-x)\pi_k(t)\pi_k(x)}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w} = \frac{\pi_{n+1}(t)\pi_n(x) - \pi_n(t)\pi_{n+1}(x)}{\langle \pi_n, \pi_n \rangle_w} - \frac{t-x}{\langle \pi_0, \pi_0 \rangle_w}$$
$$\Rightarrow \frac{t-x}{\langle \pi_0, \pi_0 \rangle_w} + (t-x)\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi_k(t)\pi_k(x)}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w} = \frac{\pi_{n+1}(t)\pi_n(x) - \pi_n(t)\pi_{n+1}(x)}{\langle \pi_n, \pi_n \rangle_w}$$
$$\Rightarrow (t-x)\left[\frac{1}{\langle \pi_0, \pi_0 \rangle_w} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi_k(t)\pi_k(x)}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w}\right] = \frac{\pi_{n+1}(t)\pi_n(x) - \pi_n(t)\pi_{n+1}(x)}{\langle \pi_n, \pi_n \rangle_w}$$
$$\Rightarrow (t-x)\left[\frac{\pi_0(t)\pi_0(x)}{\langle \pi_0, \pi_0 \rangle_w} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi_k(t)\pi_k(x)}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w}\right] = \frac{\pi_{n+1}(t)\pi_n(x) - \pi_n(t)\pi_{n+1}(x)}{\langle \pi_n, \pi_n \rangle_w}$$
$$\Rightarrow (t-x)\sum_{k=0}^{n} \frac{\pi_k(t)\pi_k(x)}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle_w} = \frac{1}{\langle \pi_n, \pi_n \rangle_w}\left[\pi_{n+1}(t)\pi_n(x) - \pi_n(t)\pi_{n+1}(x)\right],$$

και διαιρώντας με το $t - x$ καταλήγουμε στην (1.9). □

1.2 Πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου και δευτέρου είδους

Ίσως το πλέον διαδεδομένο ορθογώνιο σύστημα πολυωνύμων είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα του Legendre. Αυτά προκύπτουν από ορθογωνοποίηση κατά Gram-Schmidt στα μονώνυμα $1, t, t^2, \ldots$, ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(t) = 1$ στο διάστημα $[-1, 1]$. Ωστόσο, εμείς θα ασχοληθούμε με δυο άλλα συστήματα ορθογωνίων πολυωνύμων, τα πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου και δευτέρου είδους. Πρέπει να σημειώσουμε πως υπάρχουν τέσσερα είδη πολυωνύμων του Chebyshev, η χρησιμότητα των οποίων στην Αριθμητική Ανάλυση είναι ιδιαίτερα σημαντική.

1.2.1 Πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου είδους

Τα πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου είδους προκύπτουν αν ορθογωνοποιήσουμε τα μονώνυμα $1, t, t^2, \ldots$, ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Όμως, μπορούν ισοδύναμα να οριστούν μέσω της τριγωνομετρικής σχέσης

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \ \ 0 \le \theta \le \pi. \tag{1.10}$$

Το $T_n(t)$ στην (1.10) ορίζεται για $-1 \le t \le 1$. Όμως, εφόσον πρόκειται για πολυώνυμο και γνωρίζουμε τους συντελεστές του, μπορεί να οριστεί για κάθε πραγματικό αριθμό. Σε αυτήν την τριγωνομετρική αναπαράσταση οφείλεται το πλήθος των σημαντικών αλλά και πολύ χρήσιμων ιδιοτήτων που έχουν τα ορθογώνια πολυώνυμα T_n.

Κατασκευάζουμε αρχικά τον αναδρομικό τύπο που πληρούν τα πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου είδους. Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες για το συνημίτονο του αθροίσματος και της διαφοράς δυο γωνιών δίνουν

$$\cos{(n \pm 1)\theta} = \cos n\theta \cos\theta \mp \sin n\theta \sin\theta,$$

οπότε,

$$\cos{(n+1)\theta} + \cos{(n-1)\theta} = 2\cos\theta \cos n\theta,$$

ή
$$\cos{(n+1)\theta} = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos{(n-1)\theta}.$$
Τώρα, μέσω της (1.10), και την αλλαγή μεταβλητής $t = \cos\theta$, καταλήγουμε στον ακόλουθο αναδρομικό τύπο

$$\begin{aligned} T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \\ T_0(t) = 1, \;\; T_1(t) = t. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Παρατηρούμε, μέσω της (1.11), ότι τα T_n έχουν συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου 2^{n-1}. Έτσι, τα ορθογώνια πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου είδους, με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, δίνονται από τη σχέση

$$\hat{T}_0(t) = 1, \quad \hat{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t), \;\; n = 1, 2, \dots. \tag{1.12}$$

Επίσης, η (1.11) με τη βοήθεια της (1.12), δίνει

$$2^n \hat{T}_{n+1}(t) = 2t2^{n-1}\hat{T}_n(t) - 2^{n-2}\hat{T}_{n-1}(t),$$

συνεπώς, ο αναδρομικός τύπος που πληρούν τα $\hat{T}_n$ είναι

$$\begin{aligned} \hat{T}_{n+1}(t) = t\hat{T}_n(t) - \frac{1}{4}\hat{T}_{n-1}(t), \;\; n = 2, 3, \dots, \\ \hat{T}_0(t) = 1, \;\; \hat{T}_1(t) = t, \;\; \hat{T}_2(t) = t^2 - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

όπου το $\hat{T}_2$ υπολογίστηκε εφαρμόζοντας την (1.12) με $n = 2$ και εισάγοντας σε αυτήν την (1.11) με $n = 1$. Έχοντας υπ' όψιν το γενικό αναδρομικό τύπο που πληρούν τα ορθογώνια πολυώνυμα με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, παρατηρούμε ότι οι συντελεστές α_k της σχέσης (1.1) στην περίπτωσή μας είναι 0, μιας και η συνάρτηση βάρους είναι άρτια και το διάστημα $(-1, 1)$ είναι συμμετρικό ως προς το 0.

Δείχνουμε τώρα την ορθογωνιότητα των T_n, βασιζόμενοι πάλι στην (1.10). Έχουμε

$$\langle T_n, T_m \rangle_w = \int_{-1}^{1} T_n(t)T_m(t)w(t)dt = \int_{-1}^{1} T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = \cos\theta$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt &= \int_{\pi}^{0} T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}(-\sin\theta)d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \left[\cos{(n+m)\theta} + \cos{(n-m)\theta}\right] d\theta \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin{(n+m)\theta}}{n+m} + \dfrac{\sin{(n-m)\theta}}{n-m}\right]_0^{\pi}, & n \neq m, \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin 2n\theta}{2n} + \theta\right]_0^{\pi}, & n = m > 0, \\ \left[\theta\right]_0^{\pi}, & n = m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\langle T_n, T_m\rangle_w = \int\limits_{-1}^{1} T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = m > 0, \\ \pi, & n = m = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Τώρα, η (1.13) σε συνδυασμό με την (1.12), δίνει

$$\langle \hat{T}_n, \hat{T}_m\rangle_w = \int\limits_{-1}^{1} \hat{T}_n(t)\hat{T}_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{\pi}{2^{2n-1}}, & n = m > 0, \\ \pi, & n = m = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Επίσης, βασικό πλεονέκτημα των T_n είναι η ακριβής γνώση των ριζών τους, μιας και ο υπολογισμός τους ανάγεται στην επίλυση μιας απλής τριγωνομετρικής εξίσωσης. Έτσι,

$$\begin{aligned} T_n(t) = 0 &\Rightarrow T_n(\cos\theta) = 0 \Rightarrow \cos n\theta = 0 \\ &\Rightarrow \cos n\theta = \cos{(2\nu-1)}\frac{\pi}{2}, \;\; \nu = 1, 2, \ldots, n \\ &\Rightarrow n\theta = (2\nu-1)\frac{\pi}{2}, \;\; \nu = 1, 2, \ldots, n \\ &\Rightarrow \theta = \theta_\nu^{(1)} = \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}, \;\; \nu = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Άρα, οι ρίζες του T_n δίνονται από τη σχέση

$$\tau_\nu^{(1)} = \cos\theta_\nu^{(1)}, \;\; \theta_\nu^{(1)} = \frac{2\nu-1}{2n}\pi, \;\; \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.15}$$

Ακόμη, έχει ενδιαφέρον να δούμε τη μορφή που παίρνει η ταυτότητα Christoffel-Darboux στην περίπτωση των T_n, για τα οποία ισχύει παρ' ότι δεν έχουν συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα. Από την (1.9), έχουμε

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \frac{\hat{T}_k(t)\hat{T}_k(x)}{\langle \hat{T}_k, \hat{T}_k\rangle_w} = \frac{1}{\langle \hat{T}_n, \hat{T}_n\rangle_w} \frac{\hat{T}_{n+1}(t)\hat{T}_n(x) - \hat{T}_n(t)\hat{T}_{n+1}(x)}{t-x} \\ \Rightarrow\; &\frac{1}{\langle \hat{T}_0, \hat{T}_0\rangle_w} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\hat{T}_k(t)\hat{T}_k(x)}{\langle \hat{T}_k, \hat{T}_k\rangle_w} = \frac{1}{\langle \hat{T}_n, \hat{T}_n\rangle_w} \frac{\hat{T}_{n+1}(t)\hat{T}_n(x) - \hat{T}_n(t)\hat{T}_{n+1}(x)}{t-x}, \end{aligned}$$

η οποία, μέσω των (1.14) και (1.12), γίνεται

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\dfrac{1}{2^{k-1}}T_k(t)\dfrac{1}{2^{k-1}}T_k(x)}{\dfrac{\pi}{2^{2k-1}}} \\ &\qquad = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2^{2n-1}}} \frac{\dfrac{1}{2^n}T_{n+1}(t)\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x) - \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(t)\dfrac{1}{2^n}T_{n+1}(x)}{t-x} \\ \Rightarrow\; &\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2^{2k-2}}\frac{2^{2k-1}}{\pi}\sum_{k=1}^{n} T_k(t)T_k(x) = \frac{2^{2n-1}}{\pi 2^{2n-1}} \frac{T_{n+1}(t)T_n(x) - T_n(t)T_{n+1}(x)}{t-x} \\ \Rightarrow\; &\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} T_k(t)T_k(x) = \frac{1}{\pi}\frac{T_{n+1}(t)T_n(x) - T_n(t)T_{n+1}(x)}{t-x}, \end{aligned}$$

επομένως, η ταυτότητα Christoffel-Darboux για τα T_n είναι

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} T_k(t)T_k(x) = \frac{T_{n+1}(t)T_n(x) - T_n(t)T_{n+1}(x)}{t - x}. \tag{1.16}$$

Τέλος, μπορούμε με απλούς υπολογισμούς να βρούμε την τιμή του $\int_{-1}^{1} T_n(t)dt$. Κάνοντας, όπως και προηγουμένως, την αλλαγή μεταβλητής $t = \cos\theta$,

$$\int_{-1}^{1} T_n(t)dt = \int_{\pi}^{0} T_n(\cos\theta)(-\sin\theta)d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos n\theta \sin\theta d\theta,$$

και χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες για το ημίτονο του αθροίσματος και της διαφοράς δυο γωνιών

$$\sin{(1 \pm n)\theta} = \sin\theta\cos n\theta \pm \cos\theta\sin n\theta, \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\pi} \cos n\theta \sin\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \left[\sin{(1+n)\theta} + \sin{(1-n)\theta}\right] d\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos{(1+n)\theta}}{1+n} - \frac{\cos{(1-n)\theta}}{1-n}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{2(1+n)}\left[\cos{(1+n)\pi} - 1\right] - \frac{1}{2(1-n)}\left[\cos{(1-n)\pi} - 1\right] \\
&= -\frac{1}{2(1+n)}(-\cos n\pi - 1) - \frac{1}{2(1-n)}(-\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{1}{2(1+n)}(\cos n\pi + 1) + \frac{1}{2(1-n)}(\cos n\pi + 1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right)(\cos n\pi + 1) \\
&= -\frac{1}{n^2-1}\left(\cos n\pi + 1\right) \\
&= -\frac{1}{n^2-1}\begin{cases} 1+1, & n \text{ άρτιος}, \\ -1+1, & n \text{ περιττός}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\int_{-1}^{1} T_n(t)dt = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ 0, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{1.18}$$

1.2.2 Πολυώνυμα του Chebyshev δευτέρου είδους

Τα πολυώνυμα αυτά προκύπτουν από ορθογωνοποίηση κατά Gram-Schmidt στα μονώνυμα $1, t, t^2, \ldots,$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$, στο διάστημα $(-1, 1)$. Ωστόσο, όπως και τα T_n, μπορούν να οριστούν μέσω μιας τριγωνομετρικής σχέσης. Δηλαδή:

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}, \;\; 0 \le \theta \le \pi. \tag{1.19}$$

Με τη βοήθεια της (1.19), θα κατασκεύασουμε τον αναδρομικό τύπο που πληρούν τα U_n. Κατ' αρχάς,

$$\sin{(n+2)\theta} = \sin{(n+1)\theta}\cos\theta + \cos{(n+1)\theta}\sin\theta,$$

και

$$\sin n\theta = \sin{(n+1)\theta}\cos\theta - \cos{(n+1)\theta}\sin\theta.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις και διαιρώντας με το $\sin\theta$,

$$\frac{\sin{(n+2)\theta}}{\sin\theta} + \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta\frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta},$$

η οποία, μέσω της (1.19), δίνει

$$U_{n+1}(\cos\theta) + U_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta U_n(\cos\theta).$$

Θέτοντας τώρα $\cos\theta = t$,

$$\begin{gathered} U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t), \;\; n = 1, 2, \ldots, \\ U_0(t) = 1, \;\; U_1(t) = 2t, \end{gathered} \tag{1.20}$$

όπου τα U_0, U_1 υπολογίστηκαν, μέσω της (1.19), ως εξής

$$U_0(\cos\theta) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1 \Rightarrow U_0(t) = 1,$$

και

$$U_1(\cos\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta \Rightarrow U_1(t) = 2t.$$

Παρατηρούμε ότι τα T_n και U_n ικανοποιούν τον ίδιο αναδρομικό τύπο, όμως οι διαφορετικές αρχικές συνθήκες παράγουν διαφορετικά ορθογώνια συστήματα πολυωνύμων.

Επίσης, ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του U_n είναι 2^n. Συνεπώς, τα ορθογώνια πολυώνυμα του Chebyshev δευτέρου είδους, με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, ορίζονται από τη σχέση

$$\hat{U}_n(t) = \frac{1}{2^n}U_n(t), \;\; n = 0, 1, \ldots, \tag{1.21}$$

η οποία, σε συνδυασμό με την (1.20), δίνει

$$2^{n+1}\hat{U}_{n+1}(t) = 2t2^n\hat{U}_n(t) - 2^{n-1}\hat{U}_{n-1}(t).$$

Επομένως, ο αναδρομικός τύπος που πληρούν τα $\hat{U}_n$ είναι

$$\begin{gathered} \hat{U}_{n+1}(t) = t\hat{U}_n(t) - \frac{1}{4}\hat{U}_{n-1}(t), \;\; n = 1, 2, \ldots, \\ \hat{U}_0(t) = 1, \;\; \hat{U}_1(t) = t. \end{gathered}$$

Δείχνουμε τώρα την ορθογωνιότητα των U_n. Έχουμε

$$\langle U_n, U_m\rangle_w = \int_{-1}^{1} U_n(t)U_m(t)w(t)dt = \int_{-1}^{1} U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2}dt,$$

και εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $t = \cos\theta$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2}dt &= \int_{\pi}^{0} U_n(\cos\theta)U_m(\cos\theta)\sin\theta(-\sin\theta)d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin{(m+1)\theta}}{\sin\theta}\sin^2\theta d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \sin{(n+1)\theta}\sin{(m+1)\theta}d\theta.\end{aligned}$$

Από τις τριγωνομερικές ταυτότητες για το συνημίτονο του αθροίσματος και της διαφοράς δυο γωνιών, έχουμε

$$\cos{(n+m+2)\theta} = \cos{(n+1)\theta}\cos{(m+1)\theta} - \sin{(n+1)\theta}\sin{(m+1)\theta},$$

και

$$\begin{aligned}\cos{(n-m)\theta} &= \cos{[(n+1)-(m+1)]\theta} \\ &= \cos{(n+1)\theta}\cos{(m+1)\theta} + \sin{(n+1)\theta}\sin{(m+1)\theta},\end{aligned}$$

οπότε, αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις,

$$\sin{(n+1)\theta}\sin{(m+1)\theta} = \frac{1}{2}\left[\cos{(n-m)\theta} - \cos{(n+m+2)\theta}\right],$$

και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{\pi} \sin{(n+1)\theta}\sin{(m+1)\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left[\cos{(n-m)\theta} - \cos{(n+m+2)\theta}\right]d\theta \\ &= \begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin{(n-m)\theta}}{n-m} - \dfrac{\sin{(n+m+2)\theta}}{n+m+2}\right]_0^{\pi}, & n \neq m, \\ \dfrac{1}{2}\left[\theta - \dfrac{\sin 2(n+1)\theta}{2(n+1)}\right]_0^{\pi}, & n = m \geq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

Άρα, διαπιστώνουμε ότι

$$\langle U_n, U_m\rangle_w = \int_{-1}^{1} U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2}dt = \begin{cases}0, & n \neq m, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = m \geq 0.\end{cases} \tag{1.22}$$

Τώρα, η (1.22) σε συνδυασμό με την (1.21), δίνει

$$\langle \hat{U}_n, \hat{U}_m\rangle_w = \int_{-1}^{1} \hat{U}_n(t)\hat{U}_m(t)\sqrt{1-t^2}dt = \begin{cases}0, & n \neq m, \\ \dfrac{\pi}{2^{2n+1}}, & n = m \geq 0.\end{cases} \tag{1.23}$$

Ακολούθως, υπολογίζουμε τις ρίζες του U_n. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&U_n(t) = 0 \Rightarrow U_n(\cos\theta) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta} = 0 \Rightarrow \sin{(n+1)\theta} = 0 \\
&\Rightarrow \sin{(n+1)\theta} = \sin\nu\pi, \ \ \nu = 1, 2, \ldots, n \\
&\Rightarrow (n+1)\theta = \nu\pi, \ \ \nu = 1, 2, \ldots, n \\
&\Rightarrow \theta = \theta_\nu^{(2)} = \frac{\nu\pi}{n+1}, \ \ \nu = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned}$$

οπότε, οι ρίζες του U_n δίνονται από τη σχέση

$$\tau_\nu^{(2)} = \cos\theta_\nu^{(2)}, \ \ \theta_\nu^{(2)} = \frac{\nu\pi}{n+1}, \ \ \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.24}$$

Ακόμη, όπως για τα T_n, θα δούμε τη μορφή που παίρνει η ταυτότητα Christoffel-Darboux για τα U_n. Από την (1.9),

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\hat{U}_k(t)\hat{U}_k(x)}{\langle \hat{U}_k, \hat{U}_k \rangle_w} = \frac{1}{\langle \hat{U}_n, \hat{U}_n \rangle_w} \frac{\hat{U}_{n+1}(t)\hat{U}_n(x) - \hat{U}_n(t)\hat{U}_{n+1}(x)}{t-x},$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (1.21) και (1.23),

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{2^k}U_k(t)\frac{1}{2^k}U_k(x)}{\frac{\pi}{2^{2k+1}}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2^{2n+1}}} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}U_{n+1}(t)\frac{1}{2^n}U_n(x) - \frac{1}{2^n}U_n(t)\frac{1}{2^{n+1}}U_{n+1}(x)}{t-x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2^{2k}} \frac{2^{2k+1}}{\pi} \sum_{k=0}^{n} U_k(t)U_k(x) = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{U_{n+1}(t)U_n(x) - U_n(t)U_{n+1}(x)}{t-x} \\
&\Rightarrow 2\sum_{k=0}^{n} U_k(t)U_k(x) = \frac{U_{n+1}(t)U_n(x) - U_n(t)U_{n+1}(x)}{t-x}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Τέλος, υπολογίζουμε το $\int_{-1}^{1} U_n(t)dt$, κάνοντας, όπως και στην περίπτωση των T_n, την αλλαγή μεταβλητής $t = \cos\theta$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} U_n(t)dt &= \int_{\pi}^{0} U_n(\cos\theta)(-\sin\theta)d\theta = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta} \sin\theta d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi} \sin{(n+1)\theta} d\theta = \left[-\frac{\cos{(n+1)\theta}}{n+1}\right]_0^\pi \\
&= -\frac{1}{n+1}\left[\cos{(n+1)\pi} - 1\right] = -\frac{1}{n+1}\left(-\cos n\pi - 1\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(1 + \cos n\pi\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \begin{cases} 1+1, & n \text{ άρτιος}, \\ 1+(-1), & n \text{ περιττός} . \end{cases}
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\int_{-1}^{1} U_n(t)dt = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}, & n \text{ άρτιος}, \\ 0 & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{1.26}$$

1.3 Ολοκληρωτικές σχέσεις για τα ορθογώνια πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου και δευτέρου είδους

Ολοκληρώνουμε αυτή τη σύντομη μελέτη των ορθογωνίων πολυωνύμων του Chebyshev πρώτου και δευτέρου είδους, υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα $\int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{r \mp t} dt$ και $\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)\pi_n(t)}{r \mp t} dt$, $|r| > 1$, όπου το πολυώνυμο π_n είναι είτε το T_n ή το U_n. Η γνώση αυτών των ολοκληρωμάτων είναι από μόνη της σημαντική, επιπλέον όμως θα μας βοηθήσει να εξασφαλίσουμε φράγματα για τη νόρμα του συναρτησιακού του σφάλματος συγκεκριμένων τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Σημειώνουμε αρχικά δυο λήμματα που θα μας φανούν χρήσιμα στη συνέχεια. Το πρώτο δεν είναι παρά το Θεώρημα 1.1.4, το οποίο ισχύει για τα T_n και τα U_n μολονότι ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου τους δεν είναι μονάδα.

Λήμμα 1.3.1. *Ισχύει*

$$\text{(α) } T_n(t) = (-1)^n T_n(-t), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.27}$$

$$\text{(β) } U_n(t) = (-1)^n U_n(-t), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.28}$$

Απόδειξη. (α) Αν θέσουμε στην (1.10) όπου θ το $\pi + \theta$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&T_n(\cos(\pi+\theta)) = \cos(n(\pi+\theta)) \\
&\Rightarrow T_n(-\cos\theta) = \cos n\pi \cos n\theta - \sin n\pi \sin n\theta \\
&\Rightarrow T_n(-\cos\theta) = (-1)^n \cos n\theta \\
&\Rightarrow T_n(-\cos\theta) = (-1)^n T_n(\cos\theta),
\end{aligned}$$

και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\cos\theta = t$,

$$T_n(-t) = (-1)^n T_n(t),$$

σχέση ισοδύναμη με την (1.27).

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η (1.28). Θέτοντας τώρα στην (1.19) όπου θ το $\pi + \theta$,

$$\begin{aligned}
U_n(\cos(\pi+\theta)) &= \frac{\sin((n+1)(\pi+\theta))}{\sin(\pi+\theta)} \\
\Rightarrow U_n(-\cos\theta) &= \frac{\sin(n+1)\pi\cos(n+1)\theta + \cos(n+1)\pi\sin(n+1)\theta}{-\sin\theta} \\
&= \frac{-\cos n\pi \sin(n+1)\theta}{-\sin\theta} \\
&= \frac{(-1)^n \sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \\
&= (-1)^n U_n(\cos\theta),
\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας το $\cos\theta$ με t,

$$U_n(-t) = (-1)^n U_n(t),$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την (1.28). □

Λήμμα 1.3.2. *Έστω $U_{-1}(t) = 0$. Τότε*

$$T_n(t) = \frac{1}{2}\{U_n(t) - U_{n-2}(t)\},\ n = 1, 2, \dots. \tag{1.29}$$

Απόδειξη. Από την (1.17) και την (1.19), έχουμε

$$\begin{aligned} \sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta &= 2\cos n\theta \sin\theta \\ \Rightarrow \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} &= 2\cos n\theta \\ \Rightarrow U_n(\cos\theta) - U_{n-2}(\cos\theta) &= 2T_n(\cos\theta) \\ \Rightarrow U_n(t) - U_{n-2}(t) &= 2T_n(t), \end{aligned}$$

σχέση ισοδύναμη με τη ζητούμενη. □

Μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε τους τύπους, μέσω των οποίων, υπολογίζονται τα ολοκληρώματα που αναφέραμε προηγουμένως.

Πρόταση 1.3.3. *Έστω $r \in \mathbb{R}$ με $|r| > 1$.*
(α) *Έχουμε*

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r-t}dt = T_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1}, \tag{1.30}$$

και

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{r-t}dt = U_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1}. \tag{1.31}$$

(β) *Έχουμε*

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r+t}dt = T_n(-r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + 4\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(-r)}{2k-1}, \tag{1.32}$$

και

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{r+t}dt = U_n(-r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + 4\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(-r)}{2k-1}. \tag{1.33}$$

Με $[\cdot]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού, ενώ με το σύμβολο $\sum{}'$ εννοούμε ότι ο τελευταίος όρος του αθροίσματος υποδιπλασιάζεται όταν το n είναι περιττός.

Απόδειξη. (α) Θα ξεκινήσουμε με την (1.31), με τη βοήθεια της οποίας θα αποδείξουμε την (1.30). Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$, μέσω της (1.20), έχουμε

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_1(t)}{r-t}dt = \int_{-1}^{1} \frac{2t}{r-t}dt,$$

και προσθαφαιρώντας τον όρο $2r$ στον αριθμητή του ολοκληρώματος στο δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{U_1(t)}{r-t}dt &= \int_{-1}^{1} \frac{2t-2r+2r}{r-t}dt = \int_{-1}^{1} \frac{2r}{r-t}dt + \int_{-1}^{1} \frac{2t-2r}{r-t}dt \\
&= 2r\int_{-1}^{1} \frac{1}{r-t}dt - 2\int_{-1}^{1} dt = -2r\big[\ln(r-t)\big]_{-1}^{1} - 4 \\
&= -2r[\ln(r-1)-\ln(r+1)] - 4 \\
&= 2r[\ln(r+1)-\ln(r-1)] - 4 \\
&= 2r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4 \\
&= U_1(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4.
\end{aligned}$$

Έστω ότι η (1.31) ισχύει για $m = n-1$, δηλαδή,

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_{n-1}(t)}{r-t}dt = U_{n-1}(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{U_{n-2k}(r)}{2k-1}. \tag{1.34}$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι ισχύει για $m = n$, οπότε,

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{r-t}dt = U_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1}, \tag{1.35}$$

και θα δείξουμε ότι ισχύει για $m = n+1$. Διαιρώντας με $r-t$ την πρώτη σχέση της (1.20) και ολοκληρώνοντας,

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_{n+1}(t)}{r-t}dt = 2\int_{-1}^{1} \frac{tU_n(t)}{r-t}dt - \int_{-1}^{1} \frac{U_{n-1}(t)}{r-t}dt.$$

Τώρα, προσθαφαιρώντας τον όρο $rU_n(t)$ στον αριθμητή του πρώτου ολοκληρώματος στο δεξί μέλος της προηγούμενης σχέσης,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{U_{n+1}(t)}{r-t}dt &= 2\int_{-1}^{1} \frac{tU_n(t)-rU_n(t)+rU_n(t)}{r-t}dt - \int_{-1}^{1} \frac{U_{n-1}(t)}{r-t}dt \\
&= -2\int_{-1}^{1} U_n(t)dt + 2r\int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{r-t}dt - \int_{-1}^{1} \frac{U_{n-1}(t)}{r-t}dt.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει στην (1.26) το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (1.36), ενώ οι τιμές των άλλων δυο ολοκληρωμάτων είναι γνωστές από την υπόθεση της επαγωγής. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το n. Αν το n είναι άρτιος, τότε η (1.36), σε συνδυασμό με τις (1.26), (1.35) και (1.34), δίνει

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{U_{n+1}(t)}{r-t} dt \\
&= -\frac{4}{n+1} + 2r \left\{ U_n(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4 \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \right\} \\
&\quad - \left\{ U_{n-1}(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4 \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{U_{n-2k}(r)}{2k-1} \right\} \\
&= \{2rU_n(r) - U_{n-1}(r)\} \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -4 \left\{ 2r \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1} - \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{U_{n-2k}(r)}{2k-1} + \frac{1}{n+1} \right\} \\
&= \{2rU_n(r) - U_{n-1}(r)\} \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -4 \Bigg\{ 2r \bigg\{ U_{n-1}(r) + \frac{1}{3} U_{n-3}(r) + \frac{1}{5} U_{n-5}(r) + \ldots + \frac{1}{n-1} U_1(r) \bigg\} \\
&\qquad\qquad - \bigg\{ U_{n-2}(r) + \frac{1}{3} U_{n-4}(r) + \frac{1}{5} U_{n-6}(r) + \ldots + \frac{1}{n-1} U_0(r) \bigg\} + \frac{1}{n+1} \Bigg\} \\
&= \{2rU_n(r) - U_{n-1}(r)\} \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -4 \bigg\{ \{2rU_{n-1}(r) - U_{n-2}(r)\} + \frac{1}{3} \{2rU_{n-3}(r) - U_{n-4}(r)\} \\
&\qquad\qquad + \ldots + \frac{1}{n-1} \{2rU_1(r) - U_0(r)\} + \frac{1}{n+1} \bigg\},
\end{aligned}
$$

η οποία, μέσω της (1.20), γίνεται

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{U_{n+1}(t)}{r-t} dt &= U_{n+1}(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad - 4 \bigg\{ U_n(r) + \frac{1}{3} U_{n-2}(r) + \ldots + \frac{1}{n-1} U_2(r) + \frac{1}{n+1} U_0(r) \bigg\}.
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

Έστω τώρα ότι το n είναι περιττός. Εφαρμόζοντας ξανά τις (1.26), (1.35), και (1.34) στην (1.36), έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{U_{n+1}(t)}{r-t} dt \\
&= 2r \int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{r-t} dt - \int_{-1}^{1} \frac{U_{n-1}(t)}{r-t} dt \\
&= 2r \left\{ U_n(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4 \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \right\} \\
&\quad - \left\{ U_{n-1}(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4 \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{U_{n-2k}(r)}{2k-1} \right\} \\
&= \{2rU_n(r) - U_{n-1}(r)\} \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -4 \left\{ 2r \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1} - \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{U_{n-2k}(r)}{2k-1} \right\} \\
&= \{2rU_n(r) - U_{n-1}(r)\} \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -4 \Bigg\{ 2r \Big\{ U_{n-1}(r) + \frac{1}{3} U_{n-3}(r) + \frac{1}{5} U_{n-5}(r) + \ldots + \frac{1}{n} U_0(r) \Big\} \\
&\qquad\qquad - \Big\{ U_{n-2}(r) + \frac{1}{3} U_{n-4}(r) + \frac{1}{5} U_{n-6}(r) + \ldots + \frac{1}{n-2} U_1(r) \Big\} \Bigg\} \\
&= \{2rU_n(r) - U_{n-1}(r)\} \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -4 \Big\{ \{2rU_{n-1}(r) - U_{n-2}(r)\} + \frac{1}{3} \{2rU_{n-3}(r) - U_{n-4}(r)\} \\
&\qquad\qquad + \ldots + \frac{1}{n-2} \{2rU_2(r) - U_1(r)\} + \frac{1}{n} \{2rU_0(r) - U_{-1}(r)\} \Big\},
\end{aligned}$$

και, μέσω της (1.20),

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{U_{n+1}(t)}{r-t} dt &= U_{n+1}(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\qquad - 4 \Big\{ U_n(r) + \frac{1}{3} U_{n-2}(r) + \ldots + \frac{1}{n-2} U_3(r) + \frac{1}{n} U_1(r) \Big\}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Τώρα, η (1.37), μαζί με την (1.38), δίνει

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_{n+1}(t)}{r-t} dt = U_{n+1}(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4 \sum_{k=1}^{[(n+2)/2]} \frac{U_{n+1-2k+1}(r)}{2k-1},$$

σχέση που αποδεικνύει τον ισχυρισμό της επαγωγής, άρα και την (1.31).

Αποδεικνύουμε τώρα την (1.30). Διαιρώντας και τα δυο μέλη της (1.29) με τον όρο $r-t$ και ολοκληρώνοντας,

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r-t}dt = \frac{1}{2}\left\{\int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{r-t}dt - \int_{-1}^{1} \frac{U_{n-2}(t)}{r-t}dt\right\},$$

και με τη βοήθεια της (1.31), έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r-t}dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{U_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1}\right. \\
&\qquad \left. -U_{n-2}(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + 4\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{U_{n-2k-1}(r)}{2k-1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{U_n(r) - U_{n-2}(r)\}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -2\left\{\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1} - \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{U_{n-2k-1}(r)}{2k-1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{U_n(r) - U_{n-2}(r)\}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -2\left\{\left\{U_{n-1}(r) + \frac{U_{n-3}(r)}{3} + \frac{U_{n-5}(r)}{5} + \ldots + \left\{\begin{array}{ll} \frac{U_1(r)}{n-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ \frac{U_0(r)}{n}, & n \text{ περιττός} \end{array}\right\}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -\left\{U_{n-3}(r) + \frac{U_{n-5}(r)}{3} + \frac{U_{n-7}(r)}{5} + \ldots + \left\{\begin{array}{ll} \frac{U_1(r)}{n-3}, & n \text{ άρτιος}, \\ \frac{U_0(r)}{n-2}, & n \text{ περιττός} \end{array}\right\}\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{U_n(r) - U_{n-2}(r)\}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -4\left\{\frac{1}{2}\{U_{n-1}(r) - U_{n-3}(r)\} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\{U_{n-3}(r) - U_{n-5}(r)\}\right. \\
&\qquad \left. + \ldots + \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{n-3}\frac{1}{2}\{U_3(r) - U_1(r)\} + \frac{1}{n-1}\frac{1}{2}\{U_1(r) - U_{-1}(r)\}, & n \text{ άρτιος}, \\ \frac{1}{n-2}\frac{1}{2}\{U_2(r) - U_0(r)\} + \frac{1}{2}\frac{1}{n}U_0(r), & n \text{ περιττός} \end{array}\right\}\right.,
\end{aligned}$$

η οποία, μέσω της (1.29), δίνει

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r-t}dt = T_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\quad -4\left\{T_{n-1}(r) + \frac{1}{3}T_{n-3}(r) + \ldots + \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{n-3}T_3(r) + \frac{1}{n-1}T_1(r), & n \text{ άρτιος}, \\ \frac{1}{n-2}T_2(r) + \frac{1}{2}\frac{1}{n}, & n \text{ περιττός} \end{array}\right\}\right.,
\end{aligned}$$

σχέση ισοδύναμη με την (1.30).

(β) Προκειμένου για την (1.32), αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια της (1.30). Θέτοντας στην τελευταία όπου t το $-t$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(-t)}{r+t}dt = T_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1}.$$

Όμως, λόγω του (α) του Λήμματος 1.3.1, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{(-1)^n T_n(t)}{r+t}dt = T_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \\
\Rightarrow &\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r+t}dt = (-1)^n T_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4(-1)^n\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \\
\Rightarrow &\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r+t}dt = (-1)^n T_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&\qquad\qquad -4(-1)^{2k-1}\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{(-1)^{n-2k+1}T_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \\
\Rightarrow &\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r+t}dt = T_n(-r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + 4\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(-r)}{2k-1}.
\end{aligned}$$

Τέλος, η (1.33) αποδεικνύεται όπως ακριβώς και η (1.32). Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = -t$ στην (1.31) και λαμβάνοντας υπ' όψιν το (β) του Λήμματος 1.3.1 προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.3.4. *Έστω* $r \in \mathbb{R}$ *με* $|r| > 1$.

(α) *Έχουμε*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(t)}{r-t}dt &= (r^2-1)T_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4(r^2-1)\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \\
&\quad + \begin{cases} \dfrac{2r}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος,} \\ \dfrac{2}{n^2-4}, & n \text{ περιττός,} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.39}$$

και

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(t)}{r+t}dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(t)}{r-t}dt. \tag{1.40}$$

(β) *Έχουμε*

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)U_n(t)}{r-t}dt = (r^2-1)U_n(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4(r^2-1)\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1}$$
$$- \begin{cases} \dfrac{2r}{n+1}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{2(n+1)}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός}, \end{cases} \tag{1.41}$$

και

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)U_n(t)}{r+t}dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)U_n(t)}{r-t}dt. \tag{1.42}$$

Απόδειξη. (α) Προκειμένου για την (1.39), προσθαφαιρώντας τον όρο $r^2 T_n(t)$ στον αριθμητή του ολοκληρώματος στο αριστερό μέλος της,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(t)}{r-t}dt &= \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-r^2+r^2-1)T_n(t)}{r-t}dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-r^2)T_n(t)}{r-t}dt + \int_{-1}^{1} \frac{(r^2-1)T_n(t)}{r-t}dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{(r^2-1)T_n(t)}{r-t}dt - \int_{-1}^{1} (r+t)T_n(t)dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(t)}{r-t}dt = (r^2-1)\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r-t}dt - r\int_{-1}^{1} T_n(t)dt - \int_{-1}^{1} tT_n(t)dt. \tag{1.43}$$

Τώρα, γνωρίζουμε ήδη τα δυο πρώτα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (1.43), ενώ εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε και το τρίτο. Πράγματι, από τον αναδρομικό τύπο που πληρούν τα T_n (βλέπε (1.11),

$$tT_n(t) = \frac{1}{2}T_{n+1}(t) + \frac{1}{2}T_{n-1}(t),$$

και ολοκληρώνοντας,

$$\int_{-1}^{1} tT_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} T_{n+1}(t)dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} T_{n-1}(t)dt.$$

Ακόμη, μέσω της (1.18),

$$\int_{-1}^{1} T_{n+1}(t)dt = \begin{cases} -\dfrac{2}{(n+1)^2-1}, & n \text{ περιττός}, \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{2}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός}, \\ 0, & n \text{ άρτιος}, \end{cases}$$

και

$$\int_{-1}^{1} T_{n-1}(t)dt = \begin{cases} -\dfrac{2}{(n-1)^2-1}, & \text{n περιττός,} \\ 0, & \text{n άρτιος} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{2}{n(n-2)}, & \text{n περιττός,} \\ 0, & \text{n άρτιος,} \end{cases}$$

συνεπώς, το ολοκλήρωμα που ζητάμε είναι

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} tT_n(t)dt &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{2}{n(n+2)}\right] + \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{2}{n(n-2)}\right], & n \text{ περιττός,} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\dfrac{1}{n(n+2)} - \dfrac{1}{n(n-2)}, & n \text{ περιττός,} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2n}{n(n^2-4)}, & n \text{ περιττός,} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \\ \Rightarrow \int_{-1}^{1} tT_n(t)dt &= \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2-4}, & n \text{ περιττός,} \\ 0, & n \text{ άρτιος.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.44}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας τις (1.30), (1.18) και (1.44) στην (1.43), έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(t)}{r-t}dt = (r^2-1)&\left\{ T_n(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4 \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \right\} \\ &- \begin{cases} -\dfrac{2r}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος,} \\ -\dfrac{2}{n^2-4}, & n \text{ περιττός,} \end{cases} \end{aligned}$$

σχέση ισοδύναμη με την (1.39).

Για να δείξουμε την (1.40), θέτουμε στην (1.39), όπου t το $-t$, οπότε,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(-t)}{r+t}dt \\ &= (r^2-1)T_n(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4(r^2-1) \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \\ &\quad + \begin{cases} \dfrac{2r}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος,} \\ \dfrac{2}{n^2-4}, & n \text{ περιττός,} \end{cases} \end{aligned}$$

η οποία, λόγω του (α) του Λήμματος 1.3.1, γίνεται

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)(-1)^n T_n(t)}{r+t} dt$$

$$= (r^2-1)T_n(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4(r^2-1) \sideset{}{'}\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1}$$

$$+ \begin{cases} \dfrac{2r}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος,} \\ \dfrac{2}{n^2-4}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-1^n) \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(t)}{r+t} dt = \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(t)}{r-t} dt,$$

σχέση ισοδύναμη με την (1.40).

(β) Η απόδειξη της (1.41) είναι παρόμοια με αυτή της (1.39). Όπως και στην περίπτωση των T_n, ισχύει

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)U_n(t)}{r-t} dt = (r^2-1) \int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{r-t} dt - r \int_{-1}^{1} U_n(t) dt - \int_{-1}^{1} tU_n(t) dt. \quad (1.45)$$

Σχετικά με το τελευταίο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (1.45), μέσω της (1.20), έχουμε

$$\int_{-1}^{1} tU_n(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} U_{n+1}(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} U_{n-1}(t) dt.$$

Τώρα, με τη βοήθεια της (1.26),

$$\int_{-1}^{1} U_{n+1}(t) dt = \begin{cases} \dfrac{2}{n+2}, & n \text{ περιττός,} \\ 0, & n \text{ άρτιος,} \end{cases}$$

και

$$\int_{-1}^{1} U_{n-1}(t) dt = \begin{cases} \dfrac{2}{n}, & n \text{ περιττός,} \\ 0, & n \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

Άρα,

$$\int_{-1}^{1} tU_n(t) dt = \begin{cases} \dfrac{2(n+1)}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός,} \\ 0, & n \text{ άρτιος.} \end{cases} \quad (1.46)$$

Εισάγοντας τις (1.31), (1.26) και (1.46) στην (1.45) προκύπτει η (1.41).

Τέλος, για να δείξουμε την (1.42), θέτουμε στην (1.41) όπου t το $-t$ και χρησιμοποιώντας το (β) του Λήμματος 1.3.1 έπεται το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 2

Γενικά στοιχεία αριθμητικής ολοκλήρωσης

2.1 Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(t)dt$. Ένας φυσιολογικός τρόπος για να προσεγγίσουμε την τιμή του είναι να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του πολυωνύμου παρεμβολής της f. Αν $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ είναι n διακριτά σημεία, διατεταγμένα σε φθίνουσα σειρά στο ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$, τότε

$$f(t) = p_{n-1}(f;t) + r_n(f;t), \;\; t \in [-1, 1],$$

όπου $p_{n-1}(f;t)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f, βαθμού το πολύ $n-1$, το οποίο σε μορφή Lagrange γράφεται

$$p_{n-1}(f;t) \equiv p_{n-1}(f;\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n;t) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu) l_\nu(t),$$

όπου

$$l_\nu(t) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{n} \frac{t-\tau_k}{\tau_\nu - \tau_k}, \;\; \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

είναι το ν-οστό στοιχειώδες πολυώνυμο του Lagrange και $r_n(f;t)$ το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής, που δίνεται από τη σχέση

$$r_n(f;t) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{\nu=1}^{n} (t - \tau_\nu), \;\; a < \xi = \xi(t) < b,$$

υπό την προϋπόθεση ότι $f \in C^n[-1, 1]$. Άρα, για κάθε $t \in [-1, 1]$,

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu) l_\nu(t) + r_n(f;t),$$

και ολοκληρώνοντας,

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu) l_\nu(t)dt + \int_{-1}^{1} r_n(f;t)dt$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\int_{-1}^{1} l_\nu(t)dt \right) f(\tau_\nu) + \int_{-1}^{1} r_n(f;t)dt,$$

επομένως,

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu f(\tau_\nu) + R_n(f), \tag{2.1}$$

όπου $w_\nu = \int_{-1}^{1} l_\nu(t)dt$ και $R_n(f) = \int_{-1}^{1} r_n(f;t)dt$. Βέβαια, τα w_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, μπορούν να δοθούν σε μια πιο πρακτική μορφή. Αν $\pi_n(t) = \prod_{\nu=1}^{n}(t - \tau_\nu)$, τότε

$$l_\nu(t) = \frac{\pi_n(t)}{(t - \tau_\nu)\pi_n'(\tau_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

συνεπώς,

$$w_\nu = \frac{1}{\pi_n'(\tau_\nu)} \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{t - \tau_\nu} dt, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε έναν τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής ως προς τη συνάρτηση βάρους του Legendre $w(t) = 1$ στο διάστημα $[-1, 1]$. Τα $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ λέγονται κόμβοι ενώ τα w_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, είναι τα αντίστοιχα βάρη, τα οποία είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν στο σύνολο των κόμβων προσθέσουμε και τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης -1 και 1, τότε καταλήγουμε σε ένα διαφορετικό τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής, που είναι της μορφής

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = w_0^* f(1) + \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^* f(\tau_\nu) + w_{n+1}^* f(-1) + R_n^*(f). \tag{2.3}$$

Ο (2.3) λέγεται κλειστός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης, ενώ ο (2.1) ανοικτός.

Σκοπός μας είναι μια διεξοδική μελέτη των τύπων εκ παρεμβολής (2.1) και (2.3), με κόμβους τις ρίζες του T_n ή του U_n. Το εγχείρημα αυτό ξεκίνησε ο Fejér το 1933 (βλέπε [6]) και αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης τα χρόνια που ακολούθησαν. Ιδιαίτερης σημασίας είναι το γεγονός ότι τα βάρη στους εν λόγω τύπους μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά σε κλειστή μορφή. Έτσι, οι τύποι αυτοί έχουν ιδιαίτερη αξία οχι μόνο επειδή μπορούν να κατασκευαστούν εύκολα, αλλά επειδή ένα πλήθος ερωτημάτων θεωρητικού και πρακτικού χαρακτήρα μπορεί επίσης να απαντηθεί. Συγκεκριμένα, τα ζητήματα που θα μας απασχολήσουν είναι καταρχήν ο βαθμός ακριβείας των τύπων, οι αναλυτικοί τύποι για τα βάρη, η θετικότητα των βαρών, η σύγκλιση για συναρτήσεις οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann, η σύγκλιση για συναρτήσεις που παρουσιάζουν κάποια ανωμαλία είτε στο ένα είτε και στα δυο άκρα του διαστήματος, ενώ τέλος θα μελετήσουμε το σφάλμα των τύπων για αναλυτικές συναρτήσεις. Ας αποσαφηνίσουμε πρώτα τις έννοιες που αναφέραμε.

Όταν ζητάμε το βαθμό ακριβείας ενός τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης, εννοούμε το μέγιστο βαθμό των πολυωνύμων που ο τύπος αυτός ολοκληρώνει ακριβώς, δηλαδή, το μέγιστο βαθμό των πολυωνύμων για τα οποία το σφάλμα του τύπου είναι μηδέν. Τώρα, αναφορικά με τον τύπο (2.1), από τις συνθήκες της πολυωνυμικής παρεμβολής αλλά και από τον τύπο για το σφάλμα της, βλέπουμε ότι αν $f \in \mathbb{P}_{n-1}$, τότε $p_{n-1}(f;t) = f(t),\ t \in [-1,1]$, δηλαδή $r_n(f;t) = 0,\ t \in [-1,1]$, επομένως, $R_n(f) = 0$ για κάθε $f \in \mathbb{P}_{n-1}$. Συνεπώς, ο τύπος (2.1) ολοκληρώνει ακριβώς (με σφάλμα 0) όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq n-1$, δηλαδή, έχει βαθμό ακριβείας τουλάχιστον $n-1$. Με τον ίδιο συλλογισμό διαπιστώνουμε ότι ο τύπος (2.3) έχει βαθμό ακριβείας τουλάχιστον $n+1$. Γενικά, λέμε ότι ένας τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης έχει βαθμό ακριβείας, επακριβώς d, αν ολοκληρώνει ακριβώς όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq d$ και υπάρχει πολυώνυμο βαθμού $d+1$ για το οποίο το σφάλμα είναι διάφορο του μηδενός.

Ακόμη, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι αν γνωρίζει τα βάρη στον τύπο (2.1), τότε μπορεί να υπολογίσει τα βάρη στον τύπο (2.3). Αυτό φαίνεται στην

Πρόταση 2.1.1. *Τα βάρη του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής (2.3) δίνονται από τις σχέσεις*

$$w_\nu^* = w_\nu + \frac{\int_{-1}^{1} (t+\tau_\nu)\pi_n(t)dt}{(\tau_\nu^2 - 1)\pi_n'(\tau_\nu)}, \quad \nu = 1,2,\ldots,n, \tag{2.4}$$

$$w_0^* = \frac{\int_{-1}^{1} (1+t)\pi_n(t)dt}{2\pi_n(1)}, \quad w_{n+1}^* = \frac{\int_{-1}^{1} (1-t)\pi_n(t)dt}{2\pi_n(-1)}, \tag{2.5}$$

όπου $\pi_n(t) = \prod_{\nu=1}^{n}(t-\tau_\nu)$ *και* w_ν *είναι τα βάρη του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής (2.1).*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_\nu(t) = (t^2-1)\pi_n(t)/(t-\tau_\nu),\ \nu = 1,2,\ldots,n$, που είναι ενα πολυώνυμο βαθμού $n+1$, οπότε, ο τύπος (2.3) την ολοκληρώνει ακριβώς. Έτσι, θέτοντας $f = f_\nu$ στη (2.3),

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)\pi_n(t)}{t-\tau_\nu}dt = (\tau_\nu^2 - 1)\pi_n'(\tau_\nu)w_\nu^* \\
\Rightarrow w_\nu^* &= \frac{1}{(\tau_\nu^2-1)\pi_n'(\tau_\nu)} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)\pi_n(t)}{t-\tau_\nu}dt \\
&= \frac{1}{(\tau_\nu^2-1)\pi_n'(\tau_\nu)} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-\tau_\nu^2+\tau_\nu^2-1)\pi_n(t)}{t-\tau_\nu}dt \\
&= \frac{1}{(\tau_\nu^2-1)\pi_n'(\tau_\nu)} \left[\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-\tau_\nu^2)\pi_n(t)}{t-\tau_\nu}dt + \int_{-1}^{1} \frac{(\tau_\nu^2-1)\pi_n(t)}{t-\tau_\nu}dt \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(\tau_\nu^2 - 1)\pi_n'(\tau_\nu)} \left[\int_{-1}^{1} (t+\tau_\nu)\pi_n(t)dt + (\tau_\nu^2 - 1) \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{t-\tau_\nu} dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi_n'(\tau_\nu)} \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{t-\tau_\nu} dt + \frac{\int_{-1}^{1} (t+\tau_\nu)\pi_n(t)dt}{(\tau_\nu^2 - 1)\pi_n'(\tau_\nu)},$$

η οποία, μέσω της (2.2), δίνει

$$w_\nu^* = w_\nu + \frac{\int_{-1}^{1} (t+\tau_\nu)\pi_n(t)dt}{(\tau_\nu^2 - 1)\pi_n'(\tau_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Οι σχέσεις που δίνουν τα w_0^* και w_{n+1}^* αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο. Για το w_0^*, θέτοντας στον τύπο (2.3) τη συνάρτηση $f(t) = (t+1)\pi_n(t)$,

$$\int_{-1}^{1} (t+1)\pi_n(t)dt = w_0^* 2\pi_n(1) \Rightarrow w_0^* = \frac{\int_{-1}^{1} (1+t)\pi_n(t)dt}{2\pi_n(1)},$$

ενώ, για το w_{n+1}^*, θέτοντας $f(t) = (t-1)\pi_n(t)$,

$$\int_{-1}^{1} (t-1)\pi_n(t)dt = w_{n+1}^*(-2)\pi_n(-1) \Rightarrow w_{n+1}^* = \frac{\int_{-1}^{1} (1-t)\pi_n(t)}{2\pi_n(-1)}.$$

□

2.2 Σύγκλιση τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής

Σε αυτήν την ενότητα, θα μελετήσουμε τη σύγκλιση του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1), ο οποίος θα θεωρήσουμε αρχικά ότι δεν είναι κατ' ανάγκη εκ παρεμβολής αλλά ένας τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης με n σημεία και βαθμό ακριβείας d. Δεδομένης μιας κλάσης F συναρτήσεων f, θα προσδιορίσουμε τις συνθήκες που πρέπει να πληρούν οι κόμβοι τ_ν και τα βάρη w_ν, προκειμένου ο τύπος να συγκλίνει για κάθε $f \in F$. Ξεκινάμε με την κλάση των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$, παρουσιάζοντας ένα αποτέλεσμα των Pólya και Steklov (βλέπε [11, σελ. 264]). Έστω $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$, $Q_n(f) = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu f(\tau_\nu)$, $\tau_0 = 1$ και $\tau_{n+1} = -1$.

Θεώρημα 2.2.1. *Στον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1), έχουμε* $\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f)$ *για κάθε συνάρτηση* f *που είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[-1, 1]$ *αν*

1. *Ο τύπος συγκλίνει για κάθε πολυώνυμο, δηλαδή,*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f) \text{ για κάθε } f(t) = t^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

2. *Υπάρχει αριθμός $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu| \leq M, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Τα επόμενα δυο θεωρήματα είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 2.2.1.

Θεώρημα 2.2.2. *Στον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1), έχουμε* $\lim_{n\to\infty} Q_n(f)$ $= I(f)$ *για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$ αν*

1. $\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f)$ *για κάθε* $f(t) = t^k, \ k = 0, 1, 2, \ldots.$

2. *Τα βάρη* $w_\nu, \ n = 1, 2, \ldots,$ *είναι μη αρνητικά.*

Θεώρημα 2.2.3. *Αν ο τύπος (2.1) είναι εκ παρεμβολής, τότε συγκλίνει για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$ αν*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu| \leq M < \infty.$$

Τώρα, η σύγκλιση του τύπου (2.1) για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο διάστημα $[-1, 1]$ μπορεί να εξασφαλιστεί μέσω του ακόλουθου αποτελέσματος του Rabinowitz, το οποίο αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 2.2.1.

Θεώρημα 2.2.4 ([22, Λήμμα 1 με $w(t) = 1$])**.** *Στον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1), έχουμε* $\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f)$ *για κάθε συνάρτηση f που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$ αν*

1. $\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f)$ *για κάθε* $f(t) = t^k, \ k = 0, 1, 2, \ldots.$

2. $\lim_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{n} |w_\nu| = 2.$

Θεωρούμε τώρα την κλάση $M[-1, 1)$ των συναρτήσεων f που είναι συνεχείς στο ημι-ανοιχτό διάστημα $[-1, 1)$, μονότονες σε μια περιοχή του 1 και τέτοιες ώστε το $\lim_{x\to 1^-} \int_{-1}^{x} f(t)dt$ υπάρχει. Οι κλάσεις $M(-1, 1]$ και $M(-1, 1)$ ορίζονται με ανάλογο τρόπο, ενώ με M συμβολίζουμε την ένωση των τριών κλάσεων. Αν η συνάρτηση $f \in M$ είναι φραγμένη, τότε η $f \in C[-1, 1]$. Από τον ορισμό της M, το ολοκλήρωμα $I(f)$ υπάρχει σαν ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα. Αναφορικά με τη σύγκλιση του τύπου (2.1) για συναρτήσεις $f \in M$, οχι απαραίτητα φραγμένες, ισχύει το (βλέπε [21, σελ. 194])

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1) και μια συνάρτηση $f \in M[-1, 1)$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f),$$

αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες δυο συνθήκες:

1. $\lim_{n\to\infty} Q_n(g) = I(g) \ \forall \ g \ \in \ C[-1, 1].$

2. *Υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιες ώστε $|w_\nu| \leq c(\tau_{\nu-1} - \tau_\nu)$ για n αρκετά μεγάλο και για κάθε $\nu \geq 1$ τέτοιο ώστε $1 - \delta \leq \tau_\nu \leq 1$.*

Αν η $f \in M(-1, 1]$, το θεώρημα ισχύει αν η συνθήκη 2 αντικατασταθεί από τη

$2'$. *Υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιες ώστε $|w_{\nu-1}| \leq c(\tau_{\nu-1} - \tau_\nu)$ για n αρκετά μεγάλο και για κάθε $\nu \leq n + 1$ τέτοιο ώστε $-1 \leq \tau_{\nu-1} \leq -1 + \delta$.*

Προφανώς, οι συνθήκες 1, 2 και $2'$ εξασφαλίζουν τη σύγκλιση του τύπου (2.1) για κάθε συνάρτηση $f \in M$, ενώ, αν ο (2.1) είναι συμμετρικός, δηλαδή, αν

$$\tau_{n-\nu+1} = -\tau_\nu \text{ και } w_{n-\nu+1} = w_\nu, \ \ \nu = 1, \dots, n,$$

τότε οι συνθήκες 2 και $2'$ είναι ισοδύναμες.

Έχει αποδειχτεί ότι μια σειρά από γνωστούς τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης συγκλίνουν οχι μόνο για συνεχείς συναρτήσεις αλλά και για συναρτήσεις που παρουσιάζουν μονότονες ανωμαλίες στο ένα ή και στα δυο άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Αυτό που θα κάνουμε στη συνέχεια για να εξετάσουμε τη σύγκλιση διάφορων τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι να επαληθεύσουμε τις συνθήκες των προηγούμενων θεωρημάτων, ανάλογα με την κλάση των συναρτήσεων που μας ενδιαφέρει.

2.3 Το σφάλμα ενός τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης για αναλυτικές συναρτήσεις

Για να εκτιμήσουμε το σφάλμα ενός τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης, συνήθως χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Peano (βλέπε [4, σελ. 286]). Αν ο τύπος έχει βαθμό ακριβείας d και η $f \in C^{d+1}[-1,1]$, τότε ο όρος του σφάλματος γράφεται

$$R_n(f) = \int_{-1}^{1} K_d(t) f^{(d+1)}(t)dt, \tag{2.6}$$

όπου K_d είναι ο d-οστός πυρήνας Peano για το R_n. Από τη (2.6), έπεται

$$|R_n(f)| \le c_{d+1} \max_{-1 \le t \le 1} |f^{(d+1)}(t)|, \ \ c_{d+1} = \int_{-1}^{1} |K_d(t)|dt. \tag{2.7}$$

Βασικό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι απαιτεί την ύπαρξη μιας παραγώγου υψηλής τάξης της συνάρτησης που ολοκληρώνουμε, που δεν είναι συχνά διαθέσιμη. Ακόμα όμως κι όταν αυτή υπάρχει, το φράγμα του σφάλματος που προκύπτει δεν ισχύει για λιγότερο ομαλές συναρτήσεις. Επίσης, εκτιμήσεις όπως η (2.7) δε μας επιτρέπουν να συγκρίνουμε τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης που έχουν διαφορετικό βαθμό ακριβείας.

Είναι λογικό λοιπόν να επιδιώκουμε εκτιμήσεις για το σφάλμα που δεν περιέχουν κάποια παράγωγο της συνάρτησης που ολοκληρώνουμε. Αυτές μπορούν να προκύψουν, είτε μέσω ολοκλήρωσης σε κλειστή καμπύλη, είτε μέσω μεθόδων χώρων Hilbert. Οι τελευταίες εισήχθησαν από τον Davis το 1953 στο [3], ο οποίος θεώρησε το σφάλμα $R_n(f)$ σαν ένα γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό σε κατάλληλους χώρους Hilbert $\mathcal{H}$ αναλυτικών συναρτήσεων f. Κατ' αυτόν τον τρόπο, άμεσα προκύπτει

$$|R_n(f)| \le \|R_n\| \|f\| \ \ \forall \ f \in \mathcal{H}, \tag{2.8}$$

όπου $\|R_n\|$ είναι η νόρμα του συναρτησιακού του σφάλματος και $\|f\|$ είναι η νόρμα της f στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}$.

Αυτή η προσέγγιση έχει μια σειρά από πλεονεκτήματα. Κατ' αρχάς, είναι αρκετά ακριβής, μιας και η (2.8) ισχύει ως ισότητα για κάποιες $f \in \mathcal{H}$. Ακόμη, μπορούμε να διακρίνουμε την επίδραση του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης (εκφράζεται μέσω του

$\|R_n\|$) από αυτή της συνάρτησης στην οποία εφαρμόζεται (εκφράζεται μέσω του $\|f\|$) στον όρο του σφάλματος. Αυτό μας επιτρέπει να συγκρίνουμε σφάλματα διαφορετικών τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Είναι προφανές ότι η εκτίμηση (2.8) είναι πιο ακριβής όταν η νόρμα $\|R_n\|$ μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Η ιδέα αυτή ανήκει στον Hämmerlin και υλοποιήθηκε από τον ίδιο στο [10]. Προκειμένου να εκτιμήσει το σφάλμα στους τύπους του Gauss ως προς τη συνάρτηση βάρους του Legendre, όρισε ένα χώρο αναλυτικών συναρτήσεων με μια ημινόρμα. Στη συνέχεια, έδειξε ότι το R_n είναι ένα γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό στο χώρο αυτό και υπολόγισε τη νόρμα του.

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f στον τύπο (2.1) είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r > 1$. Τότε, η f μπορεί να γραφεί

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in C_r. \tag{2.9}$$

Ορίζουμε το χώρο αναλυτικών συναρτήσεων $(X_r, |\cdot|_r)$, όπου

$$X_r = \{f : f \text{ ολόμορφη στον } C_r \text{ με } |f|_r < \infty\},$$

και $|\cdot|_r$ η ημινόρμα

$$|f|_r = \sup\{|a_k| r^k : k \in \mathbb{N}_0 \text{ και } R_n(t^k) \neq 0\}. \tag{2.10}$$

Έστω $f \in C[-1,1]$. Λύνοντας τη (2.1) ως προς $R_n(f)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
R_n(f) &= \int_{-1}^{1} f(t)dt - \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu f(\tau_\nu) \\
\Rightarrow |R_n(f)| &\leq \left| \int_{-1}^{1} f(t)dt \right| + \left| \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu f(\tau_\nu) \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(t)|dt + \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu||f(\tau_\nu)| \\
&\leq \max_{-1\leq t\leq 1} |f(t)| \int_{-1}^{1} dt + \max_{-1\leq t\leq 1} |f(t)| \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu| \\
&= \left(2 + \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|\right) \max_{-1\leq t\leq 1} |f(t)| \\
&= \left(2 + \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|\right) \|f\|_\infty.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Άρα, το R_n είναι ένα γραμμικό και φραγμένο, συνεπώς και συνεχές, συναρτησιακό στον $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$, με $\|R_n\|_\infty \leq 2 + \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|$. Η συνέχεια του R_n και η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς στη (2.9) δίνουν

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R_n(t^k), \tag{2.12}$$

οπότε,

$$
\begin{aligned}
|R_n(f)| &\le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||R_n(t^k)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k}|a_k|r^k \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k}|f|_r = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k}\right]|f|_r. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Από τη (2.11), έχουμε $|R_n(t^k)| \le 2 + \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|$, επομένως, η σειρά στη (2.13) είναι συγκλίνουσα και το R_n είναι ένα γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό στον $(X_r, |\cdot|_r)$ με νόρμα $\|R_n\|$. Συνεπώς,

$$
|R_n(f)| \le \|R_n\||f|_r \ \ \forall\ f \in X_r, \qquad (2.14)
$$

όπου για τη νόρμα του R_n, λόγω της (2.13), έχουμε

$$
\|R_n\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k}. \qquad (2.15)
$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$
\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{sign}(R_n(t^k))\frac{z^k}{r^k}, \ \ z \in C_r,
$$

τότε προφανώς η $\phi \in X_r$ με $|\phi|_r = 1$. Επίσης, μέσω της (2.12),

$$
R_n(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sign}(R_n(t^k))R_n(t^k)}{r^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k},
$$

οπότε,

$$
|R_n(\phi)| = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k}\right]|\phi|_r,
$$

η οποία, σε συνδυασμό με τη (2.15), δίνει τελικά

$$
\|R_n\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k}. \qquad (2.16)
$$

Ο υπολογισμός της ημινόρμας $|f|_r$ απαιτεί τον υπολογισμό των συντελεστών α_k, $k \ge 0$ (βλέπε (2.10)), κάτι που δεν είναι πάντα εφικτό, οπότε συχνά η $|f|_r$ πρέπει να εκτιμηθεί. Αν η f ανήκει στο χώρο Hardy,

$$
H_2 = \left\{ f : f \text{ ολόμορφη στον } C_r \text{ και } \|f\|_{2,r} = \left(\int_{|z|=r} |f(z)|^2|dz| \right)^{1/2} < \infty \right\},
$$

τότε τα πολυώνυμα $p_k(z) = \dfrac{z^k}{r^k\sqrt{2\pi r}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο στον H_2, συνεπώς, από την ταυτότητα του Parseval, έχουμε

$$
\|f\|_{2,r} = \sqrt{2\pi r}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 r^{2k} \right)^{1/2}.
$$

Επίσης,

$$\left\{|\alpha_k|^2 r^{2k} \,:\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ και } R_n(t^k) \neq 0\right\} \subseteq \left\{|\alpha_k|^2 r^{2k} \,:\, k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

$$\Rightarrow \sup\left\{|\alpha_k|^2 r^{2k} \,:\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ και } R_n(t^k) \neq 0\right\} \leq \sup\left\{|\alpha_k|^2 r^{2k} \,:\, k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

$$\Rightarrow |f|_r^2 \leq \sup\left\{|\alpha_k|^2 r^{2k} \,:\, k \in \mathbb{N}_0\right\},$$

κι αφού

$$\sup\left\{|\alpha_k|^2 r^{2k} \,:\, k \in \mathbb{N}_0\right\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 r^{2k},$$

έπεται ότι

$$|f|_r^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 r^{2k}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi r}|f|_r \leq \sqrt{2\pi r}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 r^{2k}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow |f|_r \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\|f\|_{2,r}. \tag{2.17}$$

Τώρα, από τον ορισμό της νόρμας $\|\cdot\|_{2,r}$, έχουμε

$$\|f\|_{2,r}^2 = \int\limits_{|z|=r} |f(z)|^2|dz| \leq \left(\max_{|z|=r}|f(z)|\right)^2 \int\limits_{|z|=r} |dz| = \left(\max_{|z|=r}|f(z)|\right)^2 \cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow \|f\|_{2,r} \leq \sqrt{2\pi r}\max_{|z|=r}|f(z)|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\|f\|_{2,r} \leq \max_{|z|=r}|f(z)|,$$

η οποία, εισαγόμενη στη (2.17), δίνει

$$|f|_r \leq \max_{|z|=r}|f(z)|.$$

Αν και ο τύπος (2.16) είναι χρήσιμος για την εκτίμηση του $\|R_n\|$, δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ακριβή υπολογισμό του. Μια πρακτική αναπαράσταση για το $\|R_n\|$ μπορεί να προκύψει αν έχουμε κάποια πληροφορία για το πρόσημο του $R_n(t^k),\ k \geq 0$. Συγκεκριμένα, ισχύει:

Θεώρημα 2.3.1. *Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1). Έστω* $\pi_n(t) = \prod_{\nu=1}^{n}(t-\tau_\nu)$ *και* $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

(α) *Αν* $\epsilon R_n(t^k) \geq 0,\ k \geq 0$*, τότε*

$$\|R_n\| = r\left|\frac{1}{\pi_n(r)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\pi_n(t)}{r-t}dt\right|. \tag{2.18}$$

(β) *Αν* $\epsilon(-1)^k R_n(t^k) \geq 0,\ k \geq 0$*, τότε*

$$\|R_n\| = r\left|\frac{1}{\pi_n(-r)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\pi_n(t)}{r+t}dt\right|. \tag{2.19}$$

Απόδειξη. (α) Από τη (2.16), έχουμε

$$\begin{aligned}\|R_n\| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\epsilon||R_n(t^k)|}{|\epsilon|r^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\epsilon R_n(t^k)|}{|\epsilon|r^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\epsilon R_n(t^k)|}{r^k},\end{aligned}$$

κι αφού $\epsilon R_n(t^k) \geq 0,\ k \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|R_n\| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon R_n(t^k)}{r^k} = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon R_n(t^k)}{r^k} \right| \\ &= |\epsilon| \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} \right|.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του R_n,

$$\|R_n\| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} R_n\left(\left(\frac{t}{r}\right)^k\right) \right|,$$

και λόγω της συνέχειας του R_n στον $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$,

$$\begin{aligned}\|R_n\| &= \left| R_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^k\right) \right| = \left| R_n\left(\frac{1}{1-t/r}\right) \right| \\ &= \left| R_n\left(\frac{r}{r-t}\right) \right| = \left| rR_n\left(\frac{1}{r-t}\right) \right| \\ &= r\left| R_n\left(\frac{1}{r-t}\right) \right|. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Τώρα, ο (2.1) είναι τύπος εκ παρεμβολής, οπότε, αν p_{n-1} είναι το πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$ που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $1/(r-t)$ στα σημεία $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, τότε

$$\frac{1}{r-t} - p_{n-1}(t) = \frac{1-(r-t)p_{n-1}(t)}{r-t}. \qquad (2.21)$$

Καθώς το αριστερό μέλος της (2.21) μηδενίζεται στα σημεία παρεμβολής, τα τ_1, τ_2, $\ldots, \tau_n$ πρέπει να είναι οι ρίζες του αριθμητή του κλάσματος στο δεξί μέλος της, και απ' τη στιγμή που αυτό είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n,

$$1-(r-t)p_{n-1}(t) = c_n\pi_n(t). \qquad (2.22)$$

Αν στην τελευταία σχέση θέσουμε $t = r$, βρίσκουμε ότι

$$c_n = \frac{1}{\pi_n(r)},$$

οπότε, η (2.22) δίνει

$$1-(r-t)p_{n-1}(t) = \frac{1}{\pi_n(r)}\pi_n(t),$$

και εφαρμόζοντάς την στη (2.21), παίρνουμε

$$\frac{1}{r-t} - p_{n-1}(t) = \frac{1}{\pi_n(r)} \frac{\pi_n(t)}{r-t}. \tag{2.23}$$

Ολοκληρώνοντας τη (2.23), έχουμε τελικά

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{r-t} - p_{n-1}(t) \right) dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi_n(r)} \frac{\pi_n(t)}{r-t} dt$$

$$\Rightarrow R_n\left(\frac{1}{r-t}\right) = \frac{1}{\pi_n(r)} \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{r-t} dt,$$

η οποία, εισαγόμενη στη (2.20), δίνει τη (2.18).

(β) Η (2.19) αποδεικνύεται εντελώς παρόμοια με τη (2.18). Ξεκινώντας από τη (2.16) και χρησιμοποιώντας τώρα ότι $\epsilon(-1)^k R_n(t^k) \geq 0,\ k \geq 0$, αλλά και τη συνέχεια του R_n στον $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$,

$$\begin{aligned}
\|R_n\| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\epsilon(-1)^k R_n(t^k)|}{|\epsilon(-1)^k| r^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon(-1)^k R_n(t^k)}{r^k} \\
&= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon(-1)^k R_n(t^k)}{r^k} \right| = |\epsilon| \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k R_n(t^k)}{r^k} \right| \\
&= \left| R_n\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{r} \right)^k \right) \right| = \left| R_n\left(\frac{1}{1+t/r} \right) \right| \\
&= r \left| R_n\left(\frac{1}{r+t} \right) \right|. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Τώρα, συνεχίζοντας όπως στο (α) του θεωρήματος, έχουμε

$$\frac{1}{r+t} - p_{n-1}(t) = \frac{1-(r+t)p_{n-1}(t)}{r+t},$$

όπου, αυτή τη φορά, p_{n-1} είναι το πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$ που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $1/(r+t)$ στα σημεία $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, και, όπως και στο (α),

$$1-(r+t)p_{n-1}(t) = c_n \pi_n(t),$$

με

$$c_n = \frac{1}{\pi_n(-r)}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{r+t} - p_{n-1}(t) = \frac{1}{\pi_n(-r)} \frac{\pi_n(t)}{r+t},$$

και ολοκηρώνοντας, παίρνουμε

$$R_n\left(\frac{1}{r+t}\right) = \frac{1}{\pi_n(-r)} \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{r+t} dt,$$

η οποία, εισαγόμενη στη (2.24), δίνει τη (2.19). □

Το προηγούμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει μια χρήσιμη αναπαράσταση της νόρμας του R_n, στην περίπτωση που το πρόσημό του στα μονώνυμα t^k, $k \geq 0$, είτε είναι σταθερό, είτε ακολουθεί το πρόσημο του $(-1)^k$. Εύλογα προκύπτει το ερώτημα, πώς προχωράμε στην περίπτωση που το R_n δε συμπεριφέρεται κατ' αυτόν τον τρόπο. Θα δείξουμε ότι αν το $R_n(t^k)$ αλλάζει πρόσημο, μόνο μια φορά, σε κάποιο συγκεκριμένο $k = k_n$, τότε η $\|R_n\|$ μπορεί πάλι να εκτιμηθεί ικανοποιητικά μέσω της (2.16).

Θεώρημα 2.3.2. *Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1). Αν*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu| \leq M \tag{2.25}$$

και

$$R_n(t^k) \begin{cases} \geq 0, & 0 \leq k \leq k_n, \\ \leq 0, & k > k_n, \end{cases} \tag{2.26}$$

όπου $M > 0$ και $k_n = k_n^{(n)}$ είναι σταθερές, τότε

$$\begin{aligned} \|R_n\| \leq \frac{r}{\pi_n(r)} \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{r-t} dt + \frac{2M}{r^{k_n}(r-1)} \\ - 2r \left\{ \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2 \sum_{k=1}^{[k_n/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} \right\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Απόδειξη. Από τη (2.16), έχουμε

$$\|R_n\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k} = \sum_{k=0}^{k_n} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k} + \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k},$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη (2.26),

$$\begin{aligned} \|R_n\| &= \sum_{k=0}^{k_n} \frac{R_n(t^k)}{r^k} - \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} - \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} - \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} - 2 \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Τώρα, όσον αφορά στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (2.28), ακολουθώντας την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, βασιζόμενοι στη συνέχεια του R_n στον $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$, καταλήγουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} = \frac{r}{\pi_n(r)} \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{r-t} dt. \tag{2.29}$$

Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε το δεύτερο όρο, για τον οποίο, πάλι, λόγω της συνέχειας του R_n στον $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$, ισχύει

$$-2 \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} = -2R_n\left(\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^k\right). \tag{2.30}$$

Σχετικά με τη σειρά που εμφανίζεται στη (2.30), έχουμε

$$\sum_{k=k_n+1}^{\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^k-\sum_{k=0}^{k_n}\left(\frac{t}{r}\right)^k=\frac{1}{1-\dfrac{t}{r}}-\sum_{k=0}^{k_n}\left(\frac{t}{r}\right)^k$$
$$=\frac{r}{r-t}-\sum_{k=0}^{k_n}\left(\frac{t}{r}\right)^k,$$

όπου

$$\sum_{k=0}^{k_n}\left(\frac{t}{r}\right)^k=\frac{1-\left(\dfrac{t}{r}\right)^{k_n+1}}{1-\dfrac{t}{r}}=\frac{\dfrac{r^{k_n+1}-t^{k_n+1}}{r^{k_n+1}}}{\dfrac{r-t}{r}}=\frac{r^{k_n+1}-t^{k_n+1}}{r^{k_n}(r-t)},$$

επομένως,

$$\sum_{k=k_n+1}^{\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^k=\frac{r}{r-t}-\frac{r^{k_n+1}-t^{k_n+1}}{r^{k_n}(r-t)}=\frac{r^{k_n+1}-(r^{k_n+1}-t^{k_n+1})}{r^{k_n}(r-t)}$$
$$=\frac{t^{k_n+1}}{r^{k_n}(r-t)}. \tag{2.31}$$

Τώρα, η (2.30), μέσω της (2.31), γίνεται

$$-2\sum_{k=k_n+1}^{\infty}\frac{R_n(t^k)}{r^k}=-2R_n\left(\frac{t^{k_n+1}}{r^{k_n}(r-t)}\right)=-\frac{2}{r^{k_n}}R_n\left(\frac{t^{k_n+1}}{r-t}\right). \tag{2.32}$$

Θέτοντας $f(t)=\dfrac{t^{k_n+1}}{r-t}$ στον τύπο (2.1),

$$R_n\left(\frac{t^{k_n+1}}{r-t}\right)=\int_{-1}^{1}\frac{t^{k_n+1}}{r-t}dt-\sum_{\nu=1}^{n}w_\nu\frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu},$$

οπότε, η (2.32) παίρνει τη μορφή

$$-2\sum_{k=k_n+1}^{\infty}\frac{R_n(t^k)}{r^k}=\frac{2}{r^{k_n}}\left(\sum_{\nu=1}^{n}w_\nu\frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu}-\int_{-1}^{1}\frac{t^{k_n+1}}{r-t}dt\right). \tag{2.33}$$

Υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (2.33). Παρατηρούμε ότι το t^{k_n+1} μπορεί να γραφεί

$$t^{k_n+1}=(r-t)\Big(-t^{k_n}-rt^{k_n-1}-\ldots-r^{k_n}\Big)+r^{k_n+1},$$

συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{t^{k_n+1}}{r-t}dt &= \int_{-1}^{1} \frac{(r-t)\Big(-t^{k_n}-rt^{k_n-1}-\ldots-r^{k_n}\Big)+r^{k_n+1}}{r-t}dt \\
&= \int_{-1}^{1} \Big(-t^{k_n}-rt^{k_n-1}-\ldots-r^{k_n}\Big)dt + r^{k_n+1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{r-t}dt \\
&= -\int_{-1}^{1}\left(\sum_{k=0}^{k_n} r^{k_n-k}t^k\right)dt - r^{k_n+1}\Big[\ln(r-t)\Big]_{-1}^{1} \\
&= -\sum_{k=0}^{k_n} r^{k_n-k}\int_{-1}^{1} t^k dt - r^{k_n+1}[\ln(r-1)-\ln(r+1)] \\
&= -\sum_{k=0}^{k_n} r^{k_n-k}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^{1} + r^{k_n+1}[\ln(r+1)-\ln(r-1)] \\
&= -\sum_{k=0}^{k_n} r^{k_n-k}\frac{1}{k+1}\Big[1-(-1)^{k+1}\Big] + r^{k_n+1}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right).
\end{aligned}
$$

Τώρα,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{k_n}\frac{r^{k_n-k}}{k+1}\Big[1-(-1)^{k+1}\Big] &= \frac{r^{k_n}}{0+1}(1+1)+\frac{r^{k_n-1}}{1+1}(1-1)+\frac{r^{k_n-2}}{2+1}(1+1) \\
&\quad +\ldots+\frac{r^{k_n-k_n}}{k_n+1}\Big[1^{k_n+1}-(-1)^{k_n+1}\Big] \\
&= \sum_{k=0}^{[k_n/2]}\frac{2r^{k_n-2k}}{2k+1} = 2r^{k_n}\sum_{k=0}^{[k_n/2]}\frac{r^{-2k}}{2k+1},
\end{aligned}
$$

επομένως,

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{t^{k_n+1}}{r-t}dt &= -2r^{k_n}\sum_{k=0}^{[k_n/2]}\frac{r^{-2k}}{2k+1}+r^{k_n+1}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&= r^{k_n+1}\left\{-2r^{-1}\sum_{k=0}^{[k_n/2]}\frac{1}{(2k+1)r^{2k}}+\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right)\right\} \\
&= r^{k_n+1}\left\{\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right)-2\sum_{k=0}^{[k_n/2]}\frac{1}{(2k+1)r^{2k+1}}\right\},
\end{aligned}
$$

ισοδύναμα,

$$
\int_{-1}^{1}\frac{t^{k_n+1}}{r-t}dt = r^{k_n+1}\left\{\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right)-2\sum_{k=1}^{[k_n/2]+1}\frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}}\right\}. \tag{2.34}
$$

Σχετικά με το άθροισμα στη (2.33), ισχύει

$$\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} \le \left| \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} \right| \le \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu| \frac{\left|\tau_\nu^{k_n+1}\right|}{|r-\tau_\nu|},$$

κι αφού $|\tau_\nu| < 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, μέσω της (2.25), έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} \le \frac{M}{r-1}. \tag{2.35}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τη (2.35), μαζί με τη (2.34), στη (2.33), παίρνουμε

$$-2 \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{r^k} \le \frac{2M}{r^{k_n}(r-1)} - 2r \left\{ \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2 \sum_{k=1}^{[k_n/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} \right\}. \tag{2.36}$$

Τέλος, εισάγοντας τη (2.29) και τη (2.36) στη (2.28), έχουμε το ζητούμενο. □

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το ακόλουθο

Πόρισμα 2.3.3. (α) *Υποθέτουμε ότι ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1) έχει όλα τα βάρη μη αρνητικά και ικανοποιείται η συνθήκη (2.26). Τότε*

$$\begin{aligned} \|R_n\| \le{}& \frac{r}{\pi_n(r)} \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{r-t} dt + \frac{4}{r^{k_n}(r-1)} \\ & - 2r \left\{ \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2 \sum_{k=1}^{[k_n/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} \right\}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

(β) *Υποθέτουμε ότι ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1) είναι συμμετρικός, έχει όλα τα βάρη μη αρνητικά και ικανοποιείται η συνθήκη (2.26). Τότε*

$$\begin{aligned} \|R_n\| \le{}& \frac{r}{\pi_n(r)} \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)}{r-t} dt + \frac{4}{r^{k_n}(r^2-1)} \\ & - 2r \left\{ \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2 \sum_{k=1}^{[k_n/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} \right\}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Απόδειξη. (α) Αν όλα τα βάρη του τύπου (2.1) είναι μη αρνητικά, τότε

$$\sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu = \int_{-1}^{1} dt = 2,$$

οπότε, $M = 2$ (βλέπε (2.25)), το οποίο, μέσω της (2.27), αποδεικνύει τη (2.37).

(β) Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.2. Αφού ο τύπος είναι συμμετρικός, ισχύει

$$\tau_{n-\nu+1} = -\tau_\nu, \;\; w_{n-\nu+1} = w_\nu, \;\; \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Δεδομένου ότι, αν το n είναι περιττός, $\tau_{(n+1)/2} = 0$, για το άθροισμα που εμφανίζεται στη (2.33) έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} = \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} + \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \frac{(-\tau_\nu)^{k_n+1}}{r+\tau_\nu}.$$

Επίσης, λόγω συμμετρίας, ο τύπος (2.1) ολοκληρώνει ακριβώς όλα τα περιττά πολυώνυμα, δηλαδή $R_n(t^{2l-1}) = 0,\ l \geq 1$. Άρα, το k_n στη (2.26) είναι άρτιος, και η τελευταία σχέση γράφεται

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} &= \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} - \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r+\tau_\nu} \\
&= \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \tau_\nu^{k_n+1} \left(\frac{1}{r-\tau_\nu} - \frac{1}{r+\tau_\nu} \right) \\
&= \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \tau_\nu^{k_n+1} \frac{r+\tau_\nu-(r-\tau_\nu)}{r^2-\tau_\nu^2} \\
&= 2 \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+2}}{r^2-\tau_\nu^2}.
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $|\tau_\nu| < 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε

$$2 \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+2}}{r^2-\tau_\nu^2} < 2 \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \frac{1}{r^2-1} = \frac{1}{r^2-1} 2 \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu,$$

οπότε,

$$\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} < \frac{1}{r^2-1} 2 \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu, \tag{2.39}$$

κι αφού

$$2 \sum_{\nu=1}^{[n/2]} w_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu = 2,$$

από τη (2.39),

$$\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} \leq \frac{2}{r^2-1}. \tag{2.40}$$

Αν το n είναι άρτιος, τότε καταλήγουμε πιο εύκολα στη (2.40). Σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n/2} w_\nu \frac{\tau_\nu^{k_n+1}}{r-\tau_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n/2} w_\nu \frac{(-\tau_\nu)^{k_n+1}}{r+\tau_\nu},$$

και ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό, παίρνουμε τη σχέση που αναφέραμε. Πλέον, συνεχίζουμε όπως στο Θεώρημα 2.3.2 και αντικαθιστώντας τη (2.35) με τη (2.40), οδηγούμαστε στη (2.37). □

Μια παρόμοια περίπτωση με αυτή του Θεωρήματος 2.3.2 παρουσιάζεται στο

Θεώρημα 2.3.4. *Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1), ο οποίος πληροί τη (2.25) και*

$$R_n(t^k)\begin{cases}\leq 0, & 0\leq k\leq k_n,\\ \geq 0, & k>k_n,\end{cases} \tag{2.41}$$

όπου $k_n = k_n^{(n)}$ *είναι μια σταθερά. Τότε*

$$\begin{aligned}\|R_n\| \leq 2r\left\{\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2\sum_{k=1}^{[k_n/2]+1}\frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}}\right\} + \frac{2M}{r^{k_n}(r-1)}\\ - \frac{r}{\pi_n(r)}\int_{-1}^{1}\frac{\pi_n(t)}{r-t}dt.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη της (2.42) ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης της (2.27). Από τη (2.16), μέσω της (2.41), έχουμε

$$\begin{aligned}\|R_n\| &= -\sum_{k=0}^{k_n}\frac{R_n(t^k)}{r^k} + \sum_{k=k_n+1}^{\infty}\frac{R_n(t^k)}{r^k}\\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_n(t^k)}{r^k} + 2\sum_{k=k_n+1}^{\infty}\frac{R_n(t^k)}{r^k}.\end{aligned}$$

Τώρα, συνεχίζοντας όπως ακριβώς στο Θεώρημα 2.3.2, καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Αντίστοιχα με το Πόρισμα 2.3.3, από το τελευταίο θεώρημα, έπεται το

Πόρισμα 2.3.5. (α) *Έστω ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1), ο οποίος έχει όλα τα βάρη μη αρνητικά και ικανοποιείται η συνθήκη (2.41). Τότε*

$$\begin{aligned}\|R_n\| \leq 2r\left\{\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2\sum_{k=1}^{[k_n/2]+1}\frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}}\right\}\\ + \frac{4}{r^{k_n}(r-1)} - \frac{r}{\pi_n(r)}\int_{-1}^{1}\frac{\pi_n(t)}{r-t}dt.\end{aligned} \tag{2.43}$$

(β) *Έστω ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1), ο οποίος είναι συμμετρικός, έχει όλα τα βάρη μη αρνητικά και ικανοποιείται η συνθήκη (2.41). Τότε*

$$\begin{aligned}\|R_n\| \leq 2r\left\{\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2\sum_{k=1}^{[k_n/2]+1}\frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}}\right\}\\ + \frac{4}{r^{k_n}(r^2-1)} - \frac{r}{\pi_n(r)}\int_{-1}^{1}\frac{\pi_n(t)}{r-t}dt.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του Πορίσματος 2.3.3. □

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική ολοκλήρωση με σημεία ρίζες πολυωνύμων του Chebyshev

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τους τύπους του Fejér πρώτου και δευτέρου είδους. Πρόκειται για τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής με κόμβους τις ρίζες του n-οστού πολυωνύμου του Chebyshev πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα. Η ονομασία τους οφείλεται στον Ούγγρο μαθηματικό Lipot Fejér, καθώς ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με το συγκεκριμένο θέμα. Θα μελετήσουμε αρχικά τους ανοιχτούς τύπους του Fejér και στη συνέχεια τους κλειστούς.

3.1 Τύπος του Fejér πρώτου είδους ή τύπος του Pólya

Είναι ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{(1)} f(\tau_\nu^{(1)}) + R_n^{(1)}(f), \tag{3.1}$$

όπου $\tau_\nu^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι ρίζες του n-οστού πολυωνύμου του Chebyshev πρώτου είδους T_n, και δίνονται από την (1.15).

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη του τύπου (3.1) υπολογίζοντας το βαθμό ακριβείας του. Εφόσον είναι τύπος εκ παρεμβολής με n σημεία, ολοκληρώνει ακριβώς (με σφάλμα 0) όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq n-1$. Όσο για το σφάλμα στα πολυώνυμα βαθμού n, θέτοντας στον (3.1) όπου f το T_n,

$$R_n^{(1)}(T_n) = \int_{-1}^{1} T_n(t)dt.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1.18), διαπιστώνουμε ότι αν το n είναι άρτιος, $R_n^{(1)}(T_n) \neq 0$, συνεπώς, ο τύπος (3.1) έχει βαθμό ακριβείας $d = n-1$ αν n άρτιος. Όμως, αν το n είναι περιττός, μέσω της (1.18), βλέπουμε ότι $R_n^{(1)}(T_n) = 0$, επομένως, πρέπει να υπολογίσουμε το σφάλμα του τύπου (3.1) για ένα πολυώνυμο βαθμού $n+1$, το tT_n. Θέτοντας σε αυτόν $f(t) = tT_n(t)$,

$$R_n^{(1)}(tT_n) = \int_{-1}^{1} tT_n(t)dt,$$

και με τη βοήθεια της (1.44) παίρνουμε ότι $R_n^{(1)}(tT_n) \neq 0$ αν n περιττός, οπότε, ο βαθμός ακριβείας του τύπου (3.1) σ' αυτήν την περίπτωση είναι $d = n$. Συμπερασματικά, ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης του Fejér πρώτου είδους (3.1) έχει βαθμό ακριβείας $d = n-1$ αν το n είναι άρτιος και $d = n$ αν το n είναι περιττός, δηλαδή, $d = 2[(n+1)/2] - 1$.

Ακολούθως, θα ασχοληθούμε με τα βάρη $w_\nu^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, του τύπου (3.1). Θα δείξουμε ότι μπορούν να δοθούν σε κλειστή μορφή καθώς επίσης και ότι είναι θετικά, ιδιότητα, που όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι ιδιαίτερα σημαντική. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στην

Πρόταση 3.1.1. (α) *Τα βάρη* $w_\nu^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, *στον τύπο του Fejér πρώτου είδους (3.1) δίνονται από τη σχέση*

$$w_\nu^{(1)} = \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

(β) *Τα βάρη* $w_\nu^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, *είναι θετικά. Συγκεκριμένα, ισχύει*

$$\frac{2}{n^2} < w_\nu^{(1)} < \frac{4}{n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Απόδειξη. (α) Αφού οι κόμβοι του τύπου (3.1) είναι οι ρίζες $\tau_\nu^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, του T_n, λόγω της (2.2),

$$w_\nu^{(1)} = \frac{1}{T_n'(\tau_\nu^{(1)})} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{t - \tau_\nu^{(1)}} dt, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Με τη βοήθεια της ταυτότητας Christoffel-Darboux για τα T_n θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση στο ολοκλήρωμα της (3.4). Θέτοντας στην (1.16) όπου x το $\tau_\nu^{(1)}$,

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} T_k(t)T_k(\tau_\nu^{(1)}) = \frac{T_{n+1}(t)T_n(\tau_\nu^{(1)}) - T_n(t)T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)})}{t - \tau_\nu^{(1)}},$$

κι αφού $T_n(\tau_\nu^{(1)}) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} T_k(t)T_k(\tau_\nu^{(1)}) = -\frac{T_n(t)T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)})}{t - \tau_\nu^{(1)}}. \tag{3.5}$$

Τώρα, $T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)}) \neq 0$. Πράγματι, έχοντας υπ' όψιν τις (1.10) και (1.15),

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)}) &= T_{n+1}(\cos\theta_\nu^{(1)}) = \cos{(n+1)\theta_\nu^{(1)}} \\
&= \cos n\theta_\nu^{(1)} \cos\theta_\nu^{(1)} - \sin n\theta_\nu^{(1)} \sin\theta_\nu^{(1)} \\
&= T_n(\cos\theta_\nu^{(1)}) \cos\theta_\nu^{(1)} - \sin\left(n\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right) \sin\theta_\nu^{(1)} \\
&= T_n(\tau_\nu^{(1)}) \cos\theta_\nu^{(1)} - \sin\frac{(2\nu-1)\pi}{2} \sin\theta_\nu^{(1)},
\end{aligned}$$

κι αφού $T_n(\tau_\nu^{(1)}) = 0$, $-\sin\frac{(2\nu-1)\pi}{2} = (-1)^\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε τελικά

$$T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)}) = (-1)^\nu \sin\theta_\nu^{(1)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Διαιρώντας λοιπόν και τα δυο μέλη της (3.5) με το $T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)})$,

$$\frac{T_n(t)}{t-\tau_\nu^{(1)}} = -\frac{1}{T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)})}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} T_k(t) T_k(\tau_\nu^{(1)})\right),$$

και εισάγοντας την τελευταία στην (3.4),

$$\begin{aligned}
w_\nu^{(1)} &= \frac{1}{T_n'(\tau_\nu^{(1)})} \int_{-1}^{1} -\frac{1}{T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)})}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} T_k(t) T_k(\tau_\nu^{(1)})\right) dt \\
&= -\frac{1}{T_n'(\tau_\nu^{(1)}) T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)})} \int_{-1}^{1} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} T_k(t) T_k(\tau_\nu^{(1)})\right) dt \\
&= -\frac{1}{T_n'(\tau_\nu^{(1)}) T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)})} \left(\int_{-1}^{1} dt + \int_{-1}^{1} 2\sum_{k=1}^{n-1} T_k(t) T_k(\tau_\nu^{(1)}) dt\right) \\
&= -\frac{1}{T_n'(\tau_\nu^{(1)}) T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)})} \left(2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} T_k(\tau_\nu^{(1)}) \int_{-1}^{1} T_k(t) dt\right) \\
&= -\frac{2}{T_n'(\tau_\nu^{(1)}) T_{n+1}(\tau_\nu^{(1)})} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} T_k(\tau_\nu^{(1)}) \int_{-1}^{1} T_k(t) dt\right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Μένει να υπολογίσουμε το $T_n'(\tau_\nu^{(1)})$. Έχουμε, μέσω των (1.10) και (1.15),

$$\begin{aligned}
& T_n(t) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \\
& \Rightarrow T_n'(t) = T_n'(\cos\theta) = (\cos n\theta)' \\
& \Rightarrow -\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n \sin n\theta \\
& \Rightarrow T_n'(\cos\theta) = \frac{n}{\sin\theta} \sin n\theta \\
& \Rightarrow T_n'(\tau_\nu^{(1)}) = T_n'(\cos\theta_\nu^{(1)}) = \frac{n}{\sin\theta_\nu^{(1)}} \sin n\theta_\nu^{(1)} \\
& \qquad = \frac{n}{\sin\theta_\nu^{(1)}} \sin\left(n\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right) \\
& \qquad = \frac{n}{\sin\theta_\nu^{(1)}} \sin\frac{(2\nu-1)\pi}{2},
\end{aligned}$$

συνεπώς,

$$T_n'(\tau_\nu^{(1)}) = \frac{(-1)^{\nu-1} n}{\sin \theta_\nu^{(1)}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας τις (3.8) και (3.6) στην (3.7),

$$\begin{aligned}
w_\nu^{(1)} &= -\frac{2}{\dfrac{(-1)^{\nu-1} n}{\sin \theta_\nu^{(1)}} (-1)^\nu \sin \theta_\nu^{(1)}} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} T_k(\tau_\nu^{(1)}) \int_{-1}^{1} T_k(t) dt \right) \\
&= -\frac{2}{(-1)^{2\nu-1} n} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} T_k(\cos \theta_\nu^{(1)}) \int_{-1}^{1} T_k(t) dt \right) \\
&= \frac{2}{n} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\theta_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_k(t) dt \right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Σχετικά με το άθροισμα στο δεξί μέλος της (3.9),

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} \cos k\theta_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_k(t) dt \\
&= \sum_{\substack{k=2 \\ \text{άρτιος}}}^{n-1} \cos k\theta_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_k(t) dt + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{περιττός}}}^{n-1} \cos k\theta_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_k(t) dt.
\end{aligned}$$

Όμως, $\int_{-1}^{1} T_k(t) dt = 0$ αν k περιττός (βλέπε (1.18)), άρα

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos k\theta_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_k(t) dt = \sum_{\substack{k=2 \\ \text{άρτιος}}}^{n-1} \cos k\theta_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_k(t) dt,$$

και θέτοντας $k = 2l$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos k\theta_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_k(t) dt = \sum_{l=1}^{[n/2]} \cos 2l\theta_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_{2l}(t) dt,$$

η οποία, μέσω της (1.18) και την αλλαγή μεταβλητής από l σε k, γίνεται

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos k\theta_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_k(t) dt = \sum_{k=1}^{[n/2]} \cos 2k\theta_\nu^{(1)} \left[-\frac{2}{(2k)^2 - 1} \right] = -2 \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2 - 1}. \tag{3.10}$$

Τέλος, εισάγοντας την (3.10) στην (3.9), προκύπτει η (3.2).

(β) Θα αποδείξουμε πρώτα το αριστερό μέρος της διπλής ανισότητας στην (3.3). Παρατηρούμε καταρχήν ότι

$$w_\nu^{(1)} = \frac{2}{n} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2 - 1} \right),$$

καθώς, αν το n είναι άρτιος, ο τελευταίος όρος του αθροίσματος στην (3.2) είναι μηδέν. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία σχέση και ότι $\cos 2k\theta_\nu^{(1)} < 1$,

$$w_\nu^{(1)} > \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{4k^2-1}\right).$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{(2k-1)(2+1)} = \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \left(\frac{\frac{1}{2}}{2k-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg\{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2\left[\frac{n-1}{2}\right]-1}\right) \\
&\qquad - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-1\right)+1} + \frac{1}{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\right)\Bigg\} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\right), \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

επομένως,

$$w_\nu^{(1)} > \frac{2}{n}\left[1 - 2\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\right)\right] = \frac{2}{n}\frac{1}{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1},$$

κι αφού

$$2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1 \le n,$$

καταλήγουμε ότι

$$w_\nu^{(1)} > \frac{2}{n}\frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}. \qquad (3.12)$$

Μένει να δείξουμε ότι $w_\nu^{(1)} < \dfrac{4}{n}$. Παίρνοντας την απόλυτη τιμή και στα δυο μέλη της (3.2), έχουμε, λόγω της θετικότητας των $w_\nu^{(1)}$ (βλέπε (3.12)),

$$\begin{aligned}
w_\nu^{(1)} &\le \frac{2}{n} + \frac{4}{n}\left|\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right| \le \frac{2}{n} + \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{|\cos 2k\theta_\nu^{(1)}|}{4k^2-1} \\
&< \frac{2}{n} + \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{4k^2-1}.
\end{aligned}$$

Αναφορικά με το άθροισμα στο δεξί μέλος της τελευταίας ανισότητας, προχωρώντας όπως στην (3.11),

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2[n/2]+1}\right), \qquad (3.13)$$

και η ανισότητα γίνεται

$$
\begin{aligned}
w_\nu^{(1)} &< \frac{2}{n} + \frac{4}{n}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2[n/2]+1}\right) = \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{2[n/2]+1}\right) \\
&< \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{4}{n}. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Η (3.12) σε συνδυασμό με την (3.14) δίνει την (3.3). $\square$

Η ακριβής γνώση των κόμβων και των βαρών του τύπου (3.1) μας βοηθά να αποδείξουμε ότι ο (3.1) είναι συμμετρικός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης, δηλαδή,

$$
\tau_{n-\nu+1}^{(1)} = -\tau_\nu^{(1)}, \;\; w_{n-\nu+1}^{(1)} = w_\nu^{(1)}, \;\; \nu = 1, 2, \ldots, n.
$$

Πράγματι, από την (1.15), έχουμε

$$
\begin{aligned}
\tau_{n-\nu+1}^{(1)} &= \cos\theta_{n-\nu+1}^{(1)} = \cos\frac{2(n-\nu+1)-1}{2n}\pi = \cos\frac{2n-2\nu+1}{2n}\pi \\
&= \cos\left(\pi - \frac{2\nu-1}{2n}\pi\right) = -\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi = -\cos\theta_\nu^{(1)} \\
&= -\tau_\nu^{(1)},
\end{aligned}
$$

και από την (3.2),

$$
w_{n-\nu+1}^{(1)} = \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{\cos 2k\theta_{n-\nu+1}^{(1)}}{4k^2-1}\right),
$$

η οποία, μέσω της (1.15), γράφεται

$$
\begin{aligned}
& w_{n-\nu+1}^{(1)} \\
&= \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{\cos 2k\frac{2(n-\nu+1)-1}{2n}\pi}{4k^2-1}\right) = \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{\cos 2k\frac{2n-2\nu+1}{2n}\pi}{4k^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{\cos\left(2k\pi - 2k\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)}{4k^2-1}\right) = \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{\cos 2k\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{4k^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right) = w_\nu^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Στρέφουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στη σύγκλιση του τύπου (3.1) για συναρτήσεις δυο συγκεκριμένων κλάσεων. Αρχικά θα εξετάσουμε τη σύγκλιση για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$, και στη συνέχεια για εκείνες που παρουσιάζουν κάποια ανωμαλία είτε στο ένα είτε και στα δυο άκρα του διαστήματος.

Αναφορικά με την κλάση των συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[-1, 1]$, η σύγκλιση εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 2.2.4, καθώς ικανοποιούνται και οι δυο συνθήκες του. Σχετικά με την πρώτη, ο τύπος (3.1) συγκλίνει για κάθε πολυώνυμο αφού είναι εκ παρεμβολής. Όσο για τη δεύτερη συνθήκη, εφόσον τα βάρη του είναι θετικά,

$$\sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu^{(1)}| = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{(1)} = \int_{-1}^{1} dt = 2,$$

συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu^{(1)}| = 2.$$

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση $f \in M$, όπου είναι η κλάση των συναρτήσεων που ορίσαμε στην ενότητα 2.2 (βλέπε σελ. 29). Καθώς ο τύπος (3.1) είναι συμμετρικός, για να δείξουμε τη σύγκλιση για κάθε $f \in M$ αρκεί να επαληθεύσουμε τις συνθήκες 1 και 2 του Θεωρήματος 2.2.5. Η πρώτη από αυτές ικανοποιείται μέσω του Θεωρήματος 2.2.3, μιας και ο τύπος (3.1) είναι εκ παρεμβολής και τα βάρη του είναι θετικά. Σχετικά με τη συνθήκη 2, θα δείξουμε ότι

$$0 < \frac{w_\nu^{(1)}}{\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)}} < \pi^2 + 4, \tag{3.15}$$

για κάθε $n \geq 3$, και για κάθε $\nu \geq 1$ τέτοιο ώστε $\tau_\nu^{(1)} \geq 0$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\nu \geq 2$. Έχουμε, από την (1.15)

$$\begin{aligned} \tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)} &= \cos\theta_{\nu-1}^{(1)} - \cos\theta_\nu^{(1)} = \cos\frac{2(\nu-1)-1}{2n}\pi - \cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi \\ &= \cos\frac{2(\nu-1)-1}{2n}\pi - \cos\frac{2(\nu-1)+1}{2n}\pi, \end{aligned}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τριγωνομετρικές ταυτότητες για το συνημίτονο της διαφοράς και του αθροίσματος δυο γωνιών,

$$\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)} = 2\sin\frac{2(\nu-1)\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n} = 2\sin\frac{(\nu-1)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας ότι $\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)} &\geq 2\frac{2}{\pi}\frac{(\nu-1)\pi}{n}\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2n} = \frac{4(\nu-1)}{n^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)}} &\leq \frac{n^2}{4(\nu-1)}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Επίσης, από την (3.2),

$$\begin{aligned} w_\nu^{(1)} &= \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right) \\ &= \frac{2}{n}\left\{1 - 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1} - \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right)\right\}, \end{aligned}$$

κι αφού (βλέπε [9, σχέση 1.444.7])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\theta}{4k^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi,$$

$$\begin{aligned} w_\nu^{(1)} &= \frac{2}{n}\left\{1 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin\theta_\nu^{(1)} - \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right)\right\} \\ &= \frac{2}{n}\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta_\nu^{(1)} + 2\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\sin\theta_\nu^{(1)} + \frac{4}{n}\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}. \end{aligned}$$

Όμως, $\sin\theta \le \theta$, $\theta \ge 0$, οπότε, παίρνοντας την απόλυτη τιμή και στα δυο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε, μέσω των (3.3) και (1.15),

$$\begin{aligned} w_\nu^{(1)} &\le \frac{\pi}{n}\theta_\nu^{(1)} + \frac{4}{n}\left|\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right| \\ &\le \frac{\pi}{n}\frac{(2\nu-1)\pi}{2n} + \frac{4}{n}\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \frac{\left|\cos 2k\theta_\nu^{(1)}\right|}{4k^2-1} \\ &< \frac{(2\nu-1)\pi^2}{2n^2} + \frac{4}{n}\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \\ &= \frac{(2\nu-1)\pi^2}{2n^2} + \frac{4}{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} - \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{4k^2-1}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Όσο για τη σειρά στο δεύτερο μέλος της (3.17), κάνοντας ό, τι ακριβώς στην (3.11),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

και εισάγοντάς την, μαζί με την (3.13), στην (3.17),

$$\begin{aligned} w_\nu^{(1)} &< \frac{(2\nu-1)\pi^2}{2n^2} + \frac{4}{n}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2[n/2]+1}\right)\right] \\ &= \frac{(2\nu-1)\pi^2}{2n^2} + \frac{4}{n}\frac{1}{2\big(2[n/2]+1\big)} \\ &= \frac{(2\nu-1)\pi^2}{2n^2} + \frac{2}{n}\frac{1}{\big(2[n/2]+1\big)}, \end{aligned}$$

κι αφού

$$2[n/2] + 1 \geq n,$$

$$w_\nu^{(1)} < \frac{(2\nu-1)\pi^2}{2n^2} + \frac{2}{n^2}. \tag{3.18}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την(3.16) με την (3.18),

$$\frac{w_\nu^{(1)}}{\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)}} < \frac{(2\nu-1)\pi^2}{2n^2}\frac{n^2}{4(\nu-1)} + \frac{2}{n^2}\frac{n^2}{4(\nu-1)}$$
$$= \frac{(2\nu-1)\pi^2}{8(\nu-1)} + \frac{1}{2(\nu-1)},$$

και καθώς $\nu \geq 2$,

$$\frac{w_\nu^{(1)}}{\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)}} \leq \frac{3}{8}\pi^2 + \frac{1}{2}. \tag{3.19}$$

Έστω τώρα $\nu = 1$. Από την (1.15), έχουμε

$$\tau_0^{(1)} - \tau_1^{(1)} = 1 - \cos\frac{\pi}{2n},$$

η οποία, μέσω της τριγωνομετρικής ταυτότητας για το συνημίτονο διπλάσιας γωνίας, γίνεται

$$\tau_0^{(1)} - \tau_1^{(1)} = 2\sin^2\frac{\pi}{4n},$$

και χρησιμοποιώντας, όπως προηγουμένως, ότι $\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$,

$$\tau_0^{(1)} - \tau_1^{(1)} \geq 2\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{16n^2} = \frac{1}{2n^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\tau_0^{(1)} - \tau_1^{(1)}} \leq 2n^2.$$

Ακόμη, η (3.18), για $\nu = 1$, δίνει

$$w_1^{(1)} < \frac{\pi^2}{2n^2} + \frac{2}{n^2},$$

και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις,

$$\frac{w_1^{(1)}}{\tau_0^{(1)} - \tau_1^{(1)}} < \pi^2 + 4. \tag{3.20}$$

Συνδυάζοντας τις (3.19) και (3.20) καταλήγουμε στην (3.15).

Θέλουμε τώρα να μελετήσουμε το σφάλμα του τύπου (3.1) για αναλυτικές συναρτήσεις $f \in X_r$, όπου X_r είναι ο χώρος των συναρτήσεων που ορίσαμε στην παράγραφο 2.3 (βλέπε σελ. 31). Θα εξετάσουμε πρώτα το πρόσημο του $R_n^{(1)}(t^k),\ k \geq 0$, προκειμένου να διαπιστώσουμε αν μπορούμε να βασιστούμε σε κάποιο από τα Θεωρήματα 2.3.1, 2.3.2 ή 2.3.4. Αυτό φαίνεται στο

Λήμμα 3.1.2. *Ο όρος του σφάλματος του τύπου του Fejér πρώτου είδους (3.1), όταν* $n \geq 2$, *ικανοποιεί*

$$R_n^{(1)}(t^k) \begin{cases} \leq 0, & 0 \leq k \leq k_n^{(1)}, \\ \geq 0, & k > k_n^{(1)}, \end{cases} \tag{3.21}$$

όπου $k_n^{(1)} > 2[(n+1)/2]$ *είναι μια σταθερά.*

Για $n = 1$, *ισχύει*

$$R_1^{(1)}(t^k) \geq 0, \ \ k \geq 0. \tag{3.22}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, δεδομένου του βαθμού ακριβείας του τύπου (3.1),

$$R_n^{(1)}(t^k) = 0, \ \ k = 0, 1, \ldots, \begin{cases} n-1, & n \text{ άρτιος}, \\ n, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Επίσης, ο τύπος (3.1) είναι συμμετρικός, οπότε,

$$R_n^{(1)}(t^{2l-1}) = 0, \ \ l \geq 1. \tag{3.24}$$

Ως εκ τούτου, το $R_n^{(1)}$ αλλάζει πρόσημο σε κάποιο άρτιο μονώνυμο. Εξετάζουμε λοιπόν το πρόσημο του $R_n^{(1)}(t^{2l})$ ελέγχοντας αρχικά το πρόσημο του σφάλματος στο πρώτο άρτιο μονώνυμο βαθμού μεγαλύτερου φυσικά από το βαθμό ακριβείας του τύπου (3.1). Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.23), διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το n.

Έστω $n(\text{άρτιος}) \geq 2$. Θα υπολογίσουμε το σφάλμα $R_n^{(1)}(t^n)$. Εφόσον πρόκειται για πολυώνυμο βαθμού ακριβώς n με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, το σφάλμα του τύπου (3.1) γι' αυτό το πολυώνυμο θα είναι ίσο με το σφάλμα για το πολυώνυμο $(1/2^{n-1})T_n(t)$. Άρα,

$$R_n^{(1)}(t^n) = R_n^{(1)}\left(\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}R_n^{(1)}(T_n(t)),$$

η οποία, λόγω της (3.1), γίνεται

$$R_n^{(1)}(t^n) = \frac{1}{2^{n-1}}\int_{-1}^{1} T_n(t)dt,$$

κι αφού $\int_{-1}^{1} T_n(t)dt = -\dfrac{2}{n^2-1}$ αν n άρτιος (βλέπε (1.18)),

$$R_n^{(1)}(t^n) = -\frac{1}{2^{n-2}(n^2-1)}. \tag{3.25}$$

Έστω τώρα $n(\text{περιττός}) \geq 3$. Λόγω της (3.23), θα εξετάσουμε το πρόσημο του $R_n^{(1)}$ στο μονώνυμο t^{n+1}. Έχουμε

$$R_n^{(1)}(t^{n+1}) = R_n^{(1)}\left(\frac{1}{2^{n-1}}tT_n(t)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}R_n^{(1)}(tT_n(t)) = \frac{1}{2^{n-1}}\int_{-1}^{1} tT_n(t)dt,$$

η οποία, μέσω της (1.44), δίνει

$$R_n^{(1)}(t^{n+1}) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(-\frac{2}{n^2-4}\right) = -\frac{1}{2^{n-2}(n^2-4)}. \tag{3.26}$$

Από τις (3.25) και (3.26) μαζί, έχουμε

$$R_n^{(1)}(t^{2[(n+1)/2]}) < 0, \quad n \geq 2. \tag{3.27}$$

Επιπλέον, θέτοντας $f(t) = t^{2l}$ στον τύπο (3.1),

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} t^{2l} dt &= \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{(1)} (\tau_\nu^{(1)})^{2l} + R_n^{(1)}(t^{2l}) \\
\Rightarrow R_n^{(1)}(t^{2l}) &= \left[\frac{t^{2l+1}}{2l+1}\right]_{-1}^{1} - \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{(1)} (\tau_\nu^{(1)})^{2l} \\
&= \frac{2}{2l+1} - \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{(1)} (\tau_\nu^{(1)})^{2l} \\
&= \frac{1}{2l+1} \left\{ 2 - \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{(1)} (2l+1) (\tau_\nu^{(1)})^{2l} \right\}.
\end{aligned}$$

Αφού $|\tau_\nu^{(1)}| < 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$\lim_{l \to \infty} (2l+1)(\tau_\nu^{(1)})^{2l} = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

οπότε,

$$R_n^{(1)}(t^{2l}) > 0, \quad l > k_n^{(1)}/2, \tag{3.28}$$

για κάποια σταθερά $k_n^{(1)} > 2[(n+1)/2]$. Τώρα, συνδυάζοντας τις (3.23), (3.24), (3.27) και (3.28), προκύπτει η (3.21).

Για $n = 1$, ο τύπος (3.1) γίνεται

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt = w_1^{(1)} f(\tau_1^{(1)}) + R_1^{(1)}(f).$$

Από την (3.2), έχουμε $w_1^{(1)} = 2$, και από την (1.15), $\tau_1^{(1)} = \cos\theta_1^{(1)} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, επομένως, ο τύπος (3.1), για $n = 1$, είναι ο τύπος του Gauss με ένα σημείο ως προς τη συνάρτηση βάρους του Legendre $w(t) = 1$ στο διάστημα $[-1, 1]$ (βλέπε [2, σελ.: 216, 268-269]),

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt = 2f(0) + R_1^{(1)}(f),$$

όπου το σφάλμα $R_1^{(1)}(f)$ δίνεται από τη σχέση

$$R_1^{(1)}(f) = \frac{1}{3} f''(\xi), \ -1 < \xi < 1.$$

Συνεπώς, αν $f(t) = t^{2l}$, τότε

$$R_1^{(1)}(t^{2l}) = \frac{1}{3} 2l(2l-1)\xi^{2l-2} = \frac{2}{3} l(2l-1)\xi^{2(l-1)} \geq 0, \quad l \geq 1,$$

η οποία, σε συνδυασμό με τις (3.23) και (3.24), δίνει την (3.22). □

Πλέον, είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε τις εκτιμήσεις για το $\|R_n^{(1)}\|$.

Θεώρημα 3.1.3. *Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης του Fejér πρώτου είδους (3.1). Για $n \geq 2$, έχουμε*

$$\begin{aligned} \|R_n^{(1)}\| \leq r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4r \sum_{k=1}^{[k_n^{(1)}/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} + \frac{4}{r^{k_n^{(1)}}(r^2-1)} \\ + \frac{4r}{T_n(r)} {\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Για $n = 1$,

$$\|R_1^{(1)}\| = r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2. \tag{3.30}$$

Απόδειξη. Είδαμε ότι ο τύπος (3.1) είναι ένας συμμετρικός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης, τα βάρη του είναι θετικά και για $n \geq 2$ το πρόσημο του $R_n^{(1)}(t^k)$, $k \geq 0$, φαίνεται στην (3.20). Άρα, από το Πόρισμα 2.3.5(β), έχουμε

$$\begin{aligned} \|R_n^{(1)}\| \leq 2r \left\{ \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2 \sum_{k=1}^{[k_n^{(1)}/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} \right\} + \frac{4}{r^{k_n^{(1)}}(r^2-1)} \\ - \frac{r}{T_n(r)} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{r-t} dt. \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος από την (1.30),

$$\begin{aligned} \|R_n^{(1)}\| \leq 2r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4r \sum_{k=1}^{[k_n^{(1)}/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} + \frac{4}{r^{k_n^{(1)}}(r^2-1)} \\ - \frac{r}{T_n(r)} \left\{ T_n(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4 {\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \right\}, \end{aligned}$$

σχέση ισοδύναμη με την (3.29)

Έστω $n = 1$. Λόγω της (3.22), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το (α) του Θεωρήματος 2.3.1 (με $\epsilon = 1$), συνεπώς,

$$\|R_1^{(1)}\| = \frac{r}{T_1(r)} \int_{-1}^{1} \frac{T_1(t)}{r-t} dt,$$

Τώρα, η (1.30), για $n = 1$, δίνει

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_1(t)}{r-t} dt = T_1(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4\frac{T_0(r)}{2},$$

οπότε,

$$\|R_1^{(1)}\| = r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{2rT_0(r)}{T_1(r)},$$

κι αφού, από την (1.11) $T_0(r) = 1$ και $T_1(r) = r$, αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση παίρνουμε την (3.30). □

3.2 Τύπος του Fejér δευτέρου είδους ή τύπος του Filippi

Είναι ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{(2)} f(\tau_\nu^{(2)}) + R_n^{(2)}(f), \tag{3.31}$$

όπου $\tau_\nu^{(2)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι ρίζες του n-οστού πολυωνύμου του Chebyshev δευτέρου είδους U_n, και δίνονται από την (1.24).

Όπως στην περίπτωση του τύπου του Pólya, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη του τύπου (3.31) με τον υπολογισμό του βαθμού ακριβείας του. Θα ακολουθήσουμε ακριβώς τον ίδιο συλλογισμό. Δεδομένου ότι ο (3.31) είναι τύπος εκ παρεμβολής με n σημεία, ολοκληρώνει με σφάλμα μηδέν όλα τα πολυώνυμα βαθμού (τουλάχιστον) μέχρι και $n-1$. Όσο για τα πολυώνυμα βαθμού n, θέτοντας στην (3.31) όπου f το U_n βλέπουμε, μέσω της (1.26), ότι $R_n^{(2)}(U_n) \neq 0$, n άρτιος, δηλαδή, ο τύπος (3.31) έχει βαθμό ακριβείας $d = n - 1$ αν n άρτιος. Όμως, αν το n είναι περιττός, η (3.31), σε συνδυασμό με την (1.26) δίνει ότι $R_n^{(2)}(U_n) = 0$. Έτσι, θέτουμε στον τύπο (3.31) όπου f ένα πολυώνυμο βαθμού $n+1$, το tU_n, και με τη βοήθεια της (1.46) έχουμε ότι $R_n^{(2)}(tU_n) \neq 0$, n περιττός, οπότε, ο βαθμός ακριβείας σε αυτήν την περίπτωση είναι $d = n$. Τελικά, διαπιστώνουμε ότι ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης του Fejér δευτέρου είδους (3.31) έχει βαθμό ακριβείας $d = n - 1$ αν το n είναι άρτιος και $d = n$ αν το n είναι περιττός, δηλαδή, $d = 2[(n+1)/2] - 1$.

Στην πρόταση που ακολουθεί εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στα βάρη $w_\nu^{(2)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, του τύπου (3.31). Αποδεικνύουμε τις σχέσεις από τις οποίες δίνονται, καθώς και ότι είναι θετικά.

Πρόταση 3.2.1. (α) *Τα βάρη $w_\nu^{(2)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, στον τύπο του Fejér δευτέρου είδους (3.31) δίνονται από τη σχέση*

$$w_\nu^{(2)} = \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1} - \frac{\cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu^{(2)}}{2[(n+1)/2]-1}\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.32}$$

ή, εναλλακτικά,

$$w_\nu^{(2)} = \frac{4\sin\theta_\nu^{(2)}}{n+1} \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{\sin(2k-1)\theta_\nu^{(2)}}{2k-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.33}$$

(β) *Τα βάρη $w_\nu^{(2)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, είναι θετικά. Μάλιστα, ισχύει*

$$0 < w_\nu^{(2)} < \frac{4\sigma\sin\theta_\nu^{(2)}}{n+1} < \frac{4\sigma}{n+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.34}$$

όπου

$$\sigma = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Απόδειξη. (α) Θα ξεκινήσουμε με την απόδειξη της (3.33), με τη βοήθεια της οποίας, θα αποδείξουμε την (3.32). Βασιζόμενοι στη (2.2),

$$w_\nu^{(2)} = \frac{1}{U_n'(\tau_\nu^{(2)})} \int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{t - \tau_\nu^{(2)}} dt, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.35}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα Christoffel-Darboux για τα U_n, προκειμένου να υπολογίσουμε το $\dfrac{U_n(t)}{t - \tau_\nu^{(2)}}$. Θέτοντας στην (1.25), όπου x το $\tau_\nu^{(2)}$,

$$2 \sum_{k=0}^{n} U_k(t) U_k(\tau_\nu^{(2)}) = \frac{U_{n+1}(t) U_n(\tau_\nu^{(2)}) - U_n(t) U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)})}{t - \tau_\nu^{(2)}},$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $U_n(\tau_\nu^{(2)}) = 0, \ \nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} U_k(t) U_k(\tau_\nu^{(2)}) = -\frac{U_n(t) U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)})}{t - \tau_\nu^{(2)}}. \tag{3.36}$$

Τώρα, $U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)}) \neq 0$. Πράγματι, λόγω των (1.19) και (1.24),

$$\begin{aligned}
U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)}) = U_{n+1}(\cos\theta_\nu^{(2)}) &= \frac{\sin{(n+2)\theta_\nu^{(2)}}}{\sin\theta_\nu^{(2)}} \\
&= \frac{\sin{(n+1)\theta_\nu^{(2)}} \cos\theta_\nu^{(2)} + \cos{(n+1)\theta_\nu^{(2)}} \sin\theta_\nu^{(2)}}{\sin\theta_\nu^{(2)}} \\
&= \frac{\cos\theta_\nu^{(2)}}{\sin\theta_\nu^{(2)}} \sin{(n+1)\theta_\nu^{(2)}} + \cos{(n+1)\theta_\nu^{(2)}} \\
&= \frac{\cos\theta_\nu^{(2)}}{\sin\theta_\nu^{(2)}} \sin\left[(n+1)\frac{\nu\pi}{n+1}\right] + \cos\left[(n+1)\frac{\nu\pi}{n+1}\right] \\
&= \frac{\cos\theta_\nu^{(2)}}{\sin\theta_\nu^{(2)}} \sin\nu\pi + \cos\nu\pi,
\end{aligned}$$

κι αφού $\sin\nu\pi = 0$, $\cos\nu\pi = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)}) = (-1)^\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.37}$$

Οπότε, διαιρώντας και τα δυο μέλη της (3.36) με το $U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)})$,

$$\frac{U_n(t)}{t - \tau_\nu^{(2)}} = -\frac{2}{U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)})} \sum_{k=0}^{n-1} U_k(t) U_k(\tau_\nu^{(2)}),$$

η οποία, εισαγόμενη στην (3.35) δίνει

$$\begin{aligned}
w_\nu^{(2)} &= \frac{1}{U_n'(\tau_\nu^{(2)})}\int_{-1}^{1} -\frac{2}{U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)})}\sum_{k=0}^{n-1} U_k(t)U_k(\tau_\nu^{(2)})dt \\
&= -\frac{2}{U_n'(\tau_\nu^{(2)})U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)})}\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{n-1} U_k(t)U_k(\tau_\nu^{(2)})dt \\
&= -\frac{2}{U_n'(\tau_\nu^{(2)})U_{n+1}(\tau_\nu^{(2)})}\sum_{k=0}^{n-1} U_k(\tau_\nu^{(2)})\int_{-1}^{1} U_k(t)dt. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Μένει να υπολογίσουμε το $U_n'(\tau_\nu^{(2)})$. Έχοντας υπ' όψιν τις (1.19) και (1.24),

$$\begin{aligned}
& U_n(t) = U_n(\cos\theta) = \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta} \\
& \Rightarrow U_n'(t) = U_n'(\cos\theta) = \left(\frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}\right)' \\
& \Rightarrow -\sin\theta U_n'(\cos\theta) = \frac{(n+1)\cos{(n+1)\theta}\sin\theta - \sin{(n+1)\theta}\cos\theta}{\sin^2\theta} \\
& \Rightarrow U_n'(\cos\theta) = \frac{\sin{(n+1)\theta}\cos\theta - (n+1)\cos{(n+1)\theta}\sin\theta}{\sin^3\theta} \\
& \Rightarrow U_n'(\tau_\nu^{(2)}) = U_n'(\cos\theta_\nu^{(2)}) \\
& \qquad = \frac{\sin{(n+1)\theta_\nu^{(2)}}\cos\theta_\nu^{(2)} - (n+1)\cos{(n+1)\theta_\nu^{(2)}}\sin\theta_\nu^{(2)}}{\sin^3\theta_\nu^{(2)}} \\
& \qquad = \frac{\sin\left[(n+1)\dfrac{\nu\pi}{n+1}\right]\cos\theta_\nu^{(2)} - (n+1)\cos\left[(n+1)\dfrac{\nu\pi}{n+1}\right]\sin\theta_\nu^{(2)}}{\sin^3\theta_\nu^{(2)}} \\
& \qquad = \frac{\sin\nu\pi\cos\theta_\nu^{(2)} - (n+1)\cos\nu\pi\sin\theta_\nu^{(2)}}{\sin^3\theta_\nu^{(2)}} \\
& \qquad = -\frac{(n+1)\cos\nu\pi\sin\theta_\nu^{(2)}}{\sin^3\theta_\nu^{(2)}} \\
& \qquad = -\cos\nu\pi\frac{n+1}{\sin^2\theta_\nu^{(2)}},
\end{aligned}$$

κι αφού $-\cos\nu\pi = (-1)^{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$U_n'(\tau_\nu^{(2)}) = (-1)^{\nu+1}\frac{n+1}{\sin^2\theta_\nu^{(2)}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.39)$$

Τώρα, εισάγοντας την (3.39) και την (3.37) στην (3.38),

$$
\begin{aligned}
w_\nu^{(2)} &= -\frac{2}{(-1)^{\nu+1}\dfrac{n+1}{\sin^2\theta_\nu^{(2)}}(-1)^\nu}\sum_{k=0}^{n-1}U_k(\tau_\nu^{(2)})\int_{-1}^{1}U_k(t)dt \\
&= -\frac{2\sin^2\theta_\nu^{(2)}}{(-1)^{2\nu+1}(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}U_k(\cos\theta_\nu^{(2)})\int_{-1}^{1}U_k(t)dt \\
&= \frac{2\sin^2\theta_\nu^{(2)}}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin{(k+1)\theta_\nu^{(2)}}}{\sin\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_k(t)dt \\
&= \frac{2\sin\theta_\nu^{(2)}}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sin{(k+1)\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_k(t)dt. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Όσον αφορά στο άθροισμα στο δεξί μέλος της (3.40),

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\sin{(k+1)\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_k(t)dt \\
&= \sum_{\substack{k=0\\ \text{άρτιος}}}^{n-1}\sin{(k+1)\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_k(t)dt + \sum_{\substack{k=1\\ \text{περιττός}}}^{n-1}\sin{(k+1)\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_k(t)dt.
\end{aligned}
$$

Όμως, $\int\limits_{-1}^{1}U_k(t)dt = 0$ αν k περιττός (βλέπε (1.26)), άρα

$$
\sum_{k=0}^{n-1}\sin{(k+1)\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_k(t)dt = \sum_{\substack{k=0\\ \text{άρτιος}}}^{n-1}\sin{(k+1)\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_k(t)dt,
$$

και θέτοντας $k = 2l$,

$$
\sum_{k=0}^{n-1}\sin{(k+1)\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_k(t)dt = \sum_{l=0}^{[(n-1)/2]}\sin{(2l+1)\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_{2l}(t)dt,
$$

η οποία, μέσω της (1.26) και την αλλαγή μεταβλητής από l σε k, γίνεται

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\sin{(k+1)\theta_\nu^{(2)}}\int_{-1}^{1}U_k(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\sin{(2k+1)\theta_\nu^{(2)}}\frac{2}{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\frac{\sin{(2k+1)\theta_\nu^{(2)}}}{2k+1} \\
&= 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]+1}\frac{\sin{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}}}{2k-1} = 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2+1]}\frac{\sin{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}}}{2k-1} \\
&= 2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}\frac{\sin{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}}}{2k-1}. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Τέλος, εισάγοντας την (3.41) στην (3.40), προκύπτει η (3.33).

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της (3.32). Από την (3.33), έχουμε

$$w_\nu^{(2)} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{2\sin{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}} \sin\theta_\nu^{(2)}}{2k-1}. \tag{3.42}$$

Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες για το συνημίτονο της διαφοράς και του αθροίσματος δυο γωνιών δίνουν

$$\begin{aligned} \cos 2(k-1)\theta_\nu^{(2)} &= \cos{[(2k-1)-1]\theta_\nu^{(2)}} \\ &= \cos{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}} \cos\theta_\nu^{(2)} + \sin{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}} \sin\theta_\nu^{(2)}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \cos 2k\theta_\nu^{(2)} &= \cos{[(2k-1)+1]\theta_\nu^{(2)}} \\ &= \cos{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}} \cos\theta_\nu^{(2)} - \sin{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}} \sin\theta_\nu^{(2)}, \end{aligned}$$

οπότε, αφαιρώντας κατά μέλη,

$$2\sin{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}} \sin\theta_\nu^{(2)} = \cos 2(k-1)\theta_\nu^{(2)} - \cos 2k\theta_\nu^{(2)},$$

και εισάγοντάς την στην (3.42),

$$\begin{aligned} w_\nu^{(2)} &= \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{\cos 2(k-1)\theta_\nu^{(2)} - \cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{2k-1} \\ &= \frac{2}{n+1} \left\{ \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{\cos 2(k-1)\theta_\nu^{(2)}}{2k-1} - \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{2k-1} \right\}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Όσον αφορά στο δεύτερο μέλος της (3.43),

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{\cos 2(k-1)\theta_\nu^{(2)}}{2k-1} - \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{2k-1} \\
&= \left\{ 1 + \frac{\cos 2\theta_\nu^{(2)}}{3} + \frac{\cos 4\theta_\nu^{(2)}}{5} + \ldots + \frac{\cos 2\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1\right)\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1} \right\} \\
&\quad - \left\{ \cos 2\theta_\nu^{(2)} + \frac{\cos 4\theta_\nu^{(2)}}{3} + \frac{\cos 6\theta_\nu^{(2)}}{5} + \ldots + \frac{\cos 2\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1\right)\theta_\nu^{(2)}}{2\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1\right) - 1} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1} \right\} \\
&= \left\{ 1 + \frac{\cos 2\theta_\nu^{(2)}}{3} + \frac{\cos 4\theta_\nu^{(2)}}{5} + \ldots + \frac{\cos 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right) - 1} \right\} \\
&\quad - \left\{ \cos 2\theta_\nu^{(2)} + \frac{\cos 4\theta_\nu^{(2)}}{3} + \frac{\cos 6\theta_\nu^{(2)}}{5} + \ldots + \frac{\cos 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2[\frac{n-1}{2}] - 1} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1} \right\} \\
&= 1 + \left\{ \frac{\cos 2\theta_\nu^{(2)}}{3} - \cos 2\theta_\nu^{(2)} \right\} + \left\{ \frac{\cos 4\theta_\nu^{(2)}}{5} - \frac{\cos 4\theta_\nu^{(2)}}{3} \right\} \\
&\quad + \cdots + \left\{ \frac{\cos 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1} - \frac{\cos 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n-1}{2}\right] - 1} \right\} - \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1} \\
&= 1 - 2\frac{\cos 2\theta_\nu^{(2)}}{3} - 2\frac{\cos 4\theta_\nu^{(2)}}{15} - \ldots - 2\frac{\cos 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{4\left[\frac{n-1}{2}\right]^2 - 1} - \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1} \\
&= 1 - 2\left\{ \frac{\cos 2\theta_\nu^{(2)}}{4-1} + \frac{\cos 4\theta_\nu^{(2)}}{4\cdot 2^2 - 1} + \ldots + \frac{\cos 2\left[\frac{n-1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{4\left[\frac{n-1}{2}\right]^2 - 1} \right\} - \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1} \\
&= 1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2 - 1} - \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1},
\end{aligned}
$$

η οποία, εισαγόμενη στην (3.43), δίνει την (3.32).

(β) Σημειώνουμε αρχικά ότι η θετικότητα των $w_\nu^{(2)}$ μπορεί να αποδειχτεί παρόμοια με των $w_\nu^{(1)}$. Ωστόσο, εμείς θα αναπτύξουμε την ιδέα του Gautschi στο [8, σελ.359] που οδηγεί στην (3.34), σχέση, που θα μας φανεί χρήσιμη στη συνέχεια. Έστω

$$
S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1} \quad \text{και} \quad s_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\theta}{k}.
$$

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
& s_{2n-1}(\theta) + s_{2n-1}(\pi - \theta) \\
&= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sin k\theta}{k} + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sin k(\pi - \theta)}{k} \\
&= \sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \\
&\quad + \sin(\pi - \theta) + \frac{\sin 2(\pi - \theta)}{2} + \frac{\sin 3(\pi - \theta)}{3} + \ldots + \frac{\sin[(2n-1)(\pi - \theta)]}{2n-1} \\
&= \sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \\
&\quad + \sin\theta + \frac{\sin(-2\theta)}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \\
&= \sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \\
&\quad + \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \\
&= 2\sin\theta + 2\frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots + 2\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \\
&= 2\left(\sin\theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1}\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1} \\
&= 2S_n(\theta),
\end{aligned}
$$

δηλαδή,

$$S_n(\theta) = \frac{1}{2}\left[s_{2n-1}(\theta) + s_{2n-1}(\pi - \theta)\right].$$

Όμως, (βλέπε [24])

$$0 < s_n(\theta) < \sigma, \ \ 0 < \theta < \pi,$$

η οποία, σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση δίνει

$$0 < S_n(\theta) < \sigma, \ \ 0 < \theta < \pi.$$

Επιστρέφοντας τώρα στην (3.33),

$$
\begin{aligned}
& 0 < \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{\sin{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}}}{2k-1} < \sigma \\
& \Rightarrow 0 < \frac{4\sin\theta_\nu^{(2)}}{n+1} \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{\sin{(2k-1)\theta_\nu^{(2)}}}{2k-1} < \frac{4\sigma\sin\theta_\nu^{(2)}}{n+1} \\
& \Rightarrow 0 < w_\nu^{*(2)} < \frac{4\sigma\sin\theta_\nu^{(2)}}{n+1} < \frac{4\sigma}{n+1}.
\end{aligned}
$$

□

Πλέον, μπορούμε να αποδείξουμε την ιδιότητα της συμμετρίας του τύπου (3.31), δηλαδή,

$$\tau_{n-\nu+1}^{(2)} = -\tau_\nu^{(2)}, \ \ w_{n-\nu+1}^{(2)} = w_\nu^{(2)}, \ \ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Από την (1.24), έχουμε

$$\tau_{n-\nu+1}^{(2)} = \cos\theta_{n-\nu+1}^{(2)} = \cos\frac{n-\nu+1}{n+1}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\nu\pi}{n+1}\right) = -\cos\frac{\nu\pi}{n+1}$$
$$= -\cos\theta_\nu^{(2)} = -\tau_\nu^{(2)},$$

και, από την (3.32),

$$w_{n-\nu+1}^{(2)} = \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_{n-\nu+1}^{(2)}}{4k^2-1} - \frac{\cos 2[(n+1)/2]\theta_{n-\nu+1}^{(2)}}{2[(n+1)/2]-1}\right),$$

η οποία, μέσω της (1.24), γράφεται

$$\begin{aligned}
&w_{n-\nu+1}^{(2)}\\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\frac{n-\nu+1}{n+1}\pi}{4k^2-1} - \frac{\cos 2[(n+1)/2]\frac{n-\nu+1}{n+1}\pi}{2[(n+1)/2]-1}\right)\\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k(\pi-\frac{\nu\pi}{n+1})}{4k^2-1} - \frac{\cos 2[(n+1)/2](\pi-\frac{\nu\pi}{n+1})}{2[(n+1)/2]-1}\right)\\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\frac{\nu\pi}{n+1}}{4k^2-1} - \frac{\cos\left\{2[(n+1)/2]\pi - 2[(n+1)/2]\frac{\nu\pi}{n+1}\right\}}{2[(n+1)/2]-1}\right)\\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\dfrac{\nu\pi}{n+1}}{4k^2-1} - \frac{\cos 2[(n+1)/2]\dfrac{\nu\pi}{n+1}}{2[(n+1)/2]-1}\right)\\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1} - \frac{\cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu^{(2)}}{2[(n+1)/2]-1}\right)\\
&= w_\nu^{(2)}.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη σύγκλιση του τύπου (3.31) για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$, αλλά και για συναρτήσεις που παρουσιάζουν κάποια ανωμαλία είτε στο ένα ή και στα δυο άκρα του διαστήματος.

Αναφορικά με τις συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[-1,1]$, ισχύει ό,τι ακριβώς και για τον τύπο (3.1). Η σύγκλιση εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 2.2.4, μιας και ο τύπος (3.31) είναι εκ παρεμβολής με όλα τα βάρη του θετικά.

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση που παρουσιάζει κάποια ανωμαλία σε ένα τουλάχιστον από τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης, θεωρούμε δηλαδή μια συνάρτηση $f \in M$ (βλέπε παράγραφο 2.2). Καθώς ο τύπος (3.31) είναι συμμετρικός, προκειμένου να εξασφαλίσουμε τη σύγκλιση για κάθε $f \in M$, αρκεί να αποδείξουμε ότι πληρούνται οι συνθήκες 1 και 2 του Θεωρήματος 2.2.5 Η πρώτη από αυτές ικανοποιείται μέσω του Θεωρήματος 2.2.3, ενώ για τη δεύτερη, θα δείξουμε ότι

$$0 < \frac{w_\nu^{(2)}}{\tau_{\nu-1}^{(2)} - \tau_\nu^{(2)}} < 2\sigma\pi, \tag{3.44}$$

για κάθε $n \geq 3$, και για κάθε $\nu \geq 1$ τέτοιο ώστε $\tau_\nu^{(2)} \geq 0$. Η σταθερά σ ορίστηκε στην (3.33). Έστω $\nu \geq 2$. Έχουμε, από την (1.24),

$$\begin{aligned}\tau_{\nu-1}^{(2)} - \tau_\nu^{(2)} &= \cos\theta_{\nu-1}^{(2)} - \cos\theta_\nu^{(2)} = \cos\frac{\nu-1}{n+1}\pi - \cos\frac{\nu}{n+1}\pi \\ &= \cos\left(\frac{2\nu-1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)}\right)\pi - \cos\left(\frac{2\nu-1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)}\right)\pi,\end{aligned}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν την τριγωνομετρική ταυτότητα για το συνημίτονο της διαφοράς και του αθροίσματος δυο γωνιών,

$$\tau_{\nu-1}^{(2)} - \tau_\nu^{(2)} = 2\sin\frac{(2\nu-1)\pi}{2(n+1)}\sin\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Καθώς $\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\tau_{\nu-1}^{(2)} - \tau_\nu^{(2)} &\geq 2\frac{2}{\pi}\frac{(2\nu-1)\pi}{2(n+1)}\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{2(2\nu-1)}{(n+1)^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\tau_{\nu-1}^{(2)} - \tau_\nu^{(2)}} &\leq \frac{(n+1)^2}{2(2\nu-1)}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Επίσης, είδαμε ότι (βλέπε (3.34))

$$0 < w_\nu^{(2)} < \frac{4\sigma\sin{\theta_\nu}^{(2)}}{n+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

και αφού $\sin\theta \leq \theta$, $\theta \geq 0$, μέσω της (1.24), έχουμε

$$w_\nu^{(2)} < \frac{4\sigma}{n+1}\frac{\nu\pi}{n+1} = \frac{4\sigma\nu}{(n+1)^2}\pi. \tag{3.46}$$

Πολλαπλασιάζοτας κατά μέλη τις (3.45) και (3.46),

$$\frac{w_\nu^{(2)}}{\tau_{\nu-1}^{(2)} - \tau_\nu^{(2)}} < \frac{2\sigma\nu}{2\nu-1}\pi,$$

και καθώς $\nu \geq 2$,

$$\frac{w_\nu^{(2)}}{\tau_{\nu-1}^{(2)} - \tau_\nu^{(2)}} < \frac{4\sigma\pi}{3}. \tag{3.47}$$

Έστω τώρα $\nu = 1$. Μέσω της (1.24), έχουμε

$$\tau_0^{(2)} - \tau_1^{(2)} = 1 - \cos\frac{\pi}{n+1},$$

η οποία, μέσω της τριγωνομετρικής ταυτότητας για το συνημίτονο διπλάσιας γωνίας, γίνεται

$$\tau_0^{(2)} - \tau_1^{(2)} = 2\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)},$$

και χρησιμοποιώντας ότι $\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\tau_0^{(2)} - \tau_1^{(2)} &\geq 2\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4(n+1)^2} = \frac{2}{(n+1)^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\tau_0^{(2)} - \tau_1^{(2)}} &\leq \frac{(n+1)^2}{2}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Ακόμη, η (3.34), για $\nu = 1$, δίνει

$$w_1^{(2)} < \frac{4\sigma \sin\theta_1^{(2)}}{n+1} = \frac{4\sigma}{n+1}\sin\frac{\pi}{n+1},$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\sin\theta \leq \theta$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$,

$$w_1^{(2)} < \frac{4\sigma}{n+1}\frac{\pi}{n+1} = \frac{4\sigma\pi}{(n+1)^2}. \tag{3.49}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την (3.48) με την (3.49),

$$\frac{w_1^{(2)}}{\tau_0^{(2)} - \tau_1^{(2)}} < \frac{4\sigma\pi}{(n+1)^2}\frac{(n+1)^2}{2} = 2\sigma\pi. \tag{3.50}$$

Από την (3.47) και την (3.50), προκύπτει η (3.44)

Στρέφουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στο σφάλμα του τύπου (3.31) για συναρτήσεις $f \in X_r$. Όπως κάναμε και προηγουμένως, θα μελετήσουμε πρώτα τη συμπεριφορά του $R_n^{(2)}$ στα μονώνυμα t^k, $k \geq 0$. Έτσι, έχουμε το

Λήμμα 3.2.2. *Ο όρος του σφάλματος του τύπου του Fejér δευτέρου είδους (3.31), ικανοποιεί*

$$R_n^{(2)}(t^k) \geq 0, \quad k \geq 0. \tag{3.51}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο ότι ο τύπος (3.31) είναι θετικά ορισμένος (βλέπε [15, σελ. 1224]). □

Πλέον, είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε την εκτίμηση για τη $\|R_n^{(2)}\|$.

Θεώρημα 3.2.3. *Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης του Fejér δευτέρου είδους (3.31). Έχουμε*

$$\|R_n^{(2)}\| = r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{4r}{U_n(r)} \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1}, \quad n \geq 1. \tag{3.52}$$

Απόδειξη. Λόγω της (3.51), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το (α) του Θεωρήματος 2.3.1 (με $\epsilon = 1$), οπότε,

$$\|R_n^{(2)}\| = \frac{r}{U_n(r)} \int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{r-t} dt.$$

Όμως, από την (1.31), έχουμε

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{r-t} dt = U_n(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4 \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1},$$

οπότε, συνδυάζοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε την (3.52). □

Συνεχίζουμε τώρα με τους κλειστούς τύπους του Fejér .

3.3 Τύπος του Basu

Είναι ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = w_0^{*(1)} f(1) + \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{*(1)} f(\tau_\nu^{(1)}) + w_{n+1}^{*(1)} f(-1) + R_n^{*(1)}(f), \qquad (3.53)$$

όπου $\tau_\nu^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι ρίζες του n-οστού πολυωνύμου του Chebyshev πρώτου είδους T_n, και δίνονται από την (1.15).

Όπως και στους προηγούμενους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης που μελετήσαμε, θα μας απασχολήσει αρχικά ο βαθμός ακριβείας του τύπου (3.53). Εφόσον είναι τύπος εκ παρεμβολής με $n+2$ σημεία, $R_n^{*(1)}(f) = 0$ για κάθε $f \in \mathbb{P}_{n+1}$. Επομένως, θα εξετάσουμε την τιμή του σφάλματος του τύπου (3.53) για ένα πολυώνυμο βαθμού $n+2$. Θέτοντας στην (3.53) $f(t) = (t^2-1)T_n(t)$,

$$R_n^{*(1)}\left((t^2-1)T_n(t)\right) = \int_{-1}^{1} (t^2-1)T_n(t)dt. \qquad (3.54)$$

Τώρα, μέσω του αναδρομικού τύπου των T_n (βλέπε (1.11)),

$$\begin{aligned} tT_n(t) &= \frac{1}{2}T_{n+1}(t) + \frac{1}{2}T_{n-1}(t) \\ \Rightarrow t^2T_n(t) &= \frac{1}{2}tT_{n+1}(t) + \frac{1}{2}tT_{n-1}(t), \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας ξανά την (1.11),

$$\begin{aligned} t^2T_n(t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}T_{n+2}(t) + \frac{1}{2}T_n(t)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}T_n(t) + \frac{1}{2}T_{n-2}(t)\right] \\ &= \frac{1}{4}T_{n+2}(t) + \frac{1}{2}T_n(t) + \frac{1}{4}T_{n-2}(t) \\ \Rightarrow (t^2-1)T_n(t) &= \frac{1}{4}T_{n+2}(t) - \frac{1}{2}T_n(t) + \frac{1}{4}T_{n-2}(t), \end{aligned} \qquad (3.55)$$

η οποία, εισαγόμενη στην (3.54), δίνει

$$\begin{aligned} R_n^{*(1)}\left((t^2-1)T_n(t)\right) &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{4}T_{n+2}(t) - \frac{1}{2}T_n(t) + \frac{1}{4}T_{n-2}(t)\right] dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} T_{n+2}(t)dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} T_n(t)dt + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} T_{n-2}(t)dt. \end{aligned} \qquad (3.56)$$

Από την (1.18), έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} T_{n+2}(t)dt &= \begin{cases} -\dfrac{2}{(n+2)^2-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2}{(n+1)(n+3)}, & n \text{ άρτιος}, \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases} \end{aligned} \qquad (3.57)$$

και

$$\int_{-1}^{1} T_{n-2}(t)dt = \begin{cases} -\dfrac{2}{(n-2)^2-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{(n-1)(n-3)}, & n \text{ άρτιος}, \\ 0, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.58}$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το n. Αν το n είναι άρτιος, η (3.56), σε συνδυασμό με τις (3.57), (1.18) και (3.58), δίνει

$$\begin{aligned}
R_n^{*(1)}\big((t^2-1)T_n(t)\big) &= \frac{1}{4}\left[-\frac{2}{(n+1)(n+3)}\right] - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n^2-1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[-\frac{2}{(n-1)(n-3)}\right] \\
&= -\frac{1}{2(n+1)(n+3)} + \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{2(n-1)(n-3)} \\
&= -\left[\frac{1}{2(n+1)(n+3)} - \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{2(n-1)(n-3)}\right] \\
&= -\frac{(n-3)(n-1) - 2(n-3)(n+3) + (n+1)(n+3)}{2(n-3)(n-1)(n+1)(n+3)} \\
&= -\frac{n^2-4n+3-2n^2+18+n^2+4n+3}{2(n^2-1)(n^2-9)} \\
&= -\frac{24}{2(n^2-1)(n^2-9)} = -\frac{12}{(n^2-1)(n^2-9)}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Βλέπουμε ότι $R_n^{*(1)}\big((t^2-1)T_n(t)\big) \neq 0$ αν n άρτιος, οπότε, ο τύπος (3.53) σε αυτήν την περίπτωση έχει βαθμό ακριβείας $d = n+1$. Όμως, αν το n είναι περιττός, από την (3.56), με τη βοήθεια των (3.57), (1.18) και (3.58), διαπιστώνουμε ότι $R_n^{*(1)}\big((t^2-1)T_n(t)\big) = 0$. Επομένως, θέτουμε στον τύπο (3.53) στη θέση της f ένα πολυώνυμο βαθμού $n+3$, το $t(t^2-1)T_n(t)$. Έτσι,

$$R_n^{*(1)}\big(t(t^2-1)T_n(t)\big) = \int_{-1}^{1} t(t^2-1)T_n(t)dt. \tag{3.60}$$

Πολλαπλασιάζοντας με t την (3.55),

$$t(t^2-1)T_n(t) = \frac{1}{4}tT_{n+2}(t) - \frac{1}{2}tT_n(t) + \frac{1}{4}tT_{n-2}(t),$$

η οποία, μέσω της (1.11), γράφεται

$$\begin{aligned}
t(t^2-1)T_n(t) &= \frac{1}{4}\frac{1}{2}[T_{n+3}(t) + T_{n+1}(t)] - \frac{1}{2}\frac{1}{2}[T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t)] \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{2}[T_{n-1}(t) + T_{n-3}(t)] \\
&= \frac{1}{8}T_{n+3}(t) - \frac{1}{8}T_{n+1}(t) - \frac{1}{8}T_{n-1}(t) + \frac{1}{8}T_{n-3}(t),
\end{aligned}$$

και εισάγοντάς την στην (3.60),

$$
\begin{aligned}
R_n^{*(1)}\left(t(t^2-1)T_n(t)\right) &= \int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{8}T_{n+3}(t)-\frac{1}{8}T_{n+1}(t)-\frac{1}{8}T_{n-1}(t)+\frac{1}{8}T_{n-3}(t)\right]dt\\
&= \frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{1}T_{n+3}(t)dt-\frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{1}T_{n+1}(t)dt-\frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{1}T_{n-1}(t)dt\\
&\quad +\frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{1}T_{n-3}(t)dt. \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

Σχετικά με τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται, εφόσον το n είναι περιττός, από την (1.18), έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{1}T_{n+3}(t)dt &= -\frac{2}{(n+3)^2-1} = -\frac{2}{(n+2)(n+4)},\\
\int\limits_{-1}^{1}T_{n+1}(t)dt &= -\frac{2}{(n+1)^2-1} = -\frac{2}{n(n+2)},\\
\int\limits_{-1}^{1}T_{n-1}(t)dt &= -\frac{2}{(n-1)^2-1} = -\frac{2}{n(n-2)},
\end{aligned}
$$

και

$$
\int\limits_{-1}^{1}T_{n-3}(t)dt = -\frac{2}{(n-3)^2-1} = -\frac{2}{(n-2)(n-4)},
$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην (3.61),

$$
\begin{aligned}
&R_n^{*(1)}\big(t(t^2-1)T_n(t)\big)\\
&=\frac{1}{8}\left[-\frac{2}{(n+2)(n+4)}\right]-\frac{1}{8}\left[-\frac{2}{n(n+2)}\right]-\frac{1}{8}\left[-\frac{2}{n(n-2)}\right]\\
&\quad+\frac{1}{8}\left[-\frac{2}{(n-2)(n-4)}\right]\\
&=-\frac{1}{4(n+2)(n+4)}+\frac{1}{4n(n+2)}+\frac{1}{4n(n-2)}-\frac{1}{4(n-2)(n-4)}\\
&=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n+2)(n+4)}-\frac{1}{n(n+2)}-\frac{1}{n(n-2)}+\frac{1}{(n-2)(n-4)}\right]\\
&=-\frac{1}{4}\left[\frac{n(n+2)-(n+2)(n+4)}{n(n+2)^2(n+4)}+\frac{n(n-2)-(n-2)(n-4)}{(n-4)(n-2)^2n}\right]\\
&=-\frac{1}{4}\left[\frac{-4n-8}{n(n+2)^2(n+4)}+\frac{4n-8}{(n-4)(n-2)^2n}\right]\\
&=-\frac{1}{4}\left[-\frac{4}{n(n+2)(n+4)}+\frac{4}{(n-4)(n-2)n}\right]\\
&=\frac{1}{n(n+2)(n+4)}-\frac{1}{(n-4)(n-2)n}\\
&=\frac{(n-2)(n-4)-(n+2)(n+4)}{n(n-2)(n+2)(n-4)(n+4)}\\
&=\frac{n^2-6n+8-(n^2+6n+8)}{n(n^2-4)(n^2-16)}\\
&=\frac{-12n}{n(n^2-4)(n^2-16)}=-\frac{12}{(n^2-4)(n^2-16)}.
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

Αφού $R_n^{*(1)}\big(t(t^2-1)T_n(t)\big)\neq 0$ αν n περιττός, ο βαθμός ακριβείας του τύπου (3.53) σ' αυτήν την περίπτωση είναι $d=n+2$. Συνοψίζοντας, ο τύπος του Basu (3.53) έχει βαθμό ακριβείας $d=n+1$ αν το n είναι άρτιος και $d=n+2$ αν το n είναι περιττός, δηλαδή, $d=2[(n+1)/2]+1$.

Συνεχίζουμε τη μελέτη του τύπου (3.53) αποδεικνύοντας τις σχέσεις που δίνουν τα βάρη $w_\nu^{*(1)},\ \nu=0,1,\ldots,n+1$, εξετάζοντας παράλληλα το πρόσημό τους. Έτσι, έχουμε την

Πρόταση 3.3.1. (α) *Τα βάρη* $w_\nu^{*(1)}$, $\nu=0,1,\ldots,n+1$, *στον τύπο του Basu (3.53) δίνονται από τις σχέσεις*

$$
w_\nu^{*(1)}=\begin{cases}\dfrac{2}{n}\left\{1-2\displaystyle\sum_{k=1}^{n/2}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}+\frac{(-1)^{\nu-1}\cot\theta_\nu^{(1)}}{n^2-1}\right\}, & n \text{ άρτιος},\\[2ex] \dfrac{2}{n}\left\{1-2\displaystyle\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}+\frac{(-1)^{\nu-1}\csc\theta_\nu^{(1)}}{n^2-4}\right\}, & n \text{ περιττός},\end{cases}
$$
$$\nu=1,2,\ldots,n, \tag{3.63}$$

και

$$w_0^{*(1)} = w_{n+1}^{*(1)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ -\dfrac{1}{n^2-4}, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.64}$$

(β) *Τα βάρη* $w_\nu^{*(1)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n+1$, *στον τύπο του Basu (3.53) είναι όλα θετικά εκτός από τα* $w_0^{*(1)}$, $w_{n+1}^{*(1)}$ *όταν* $n \geq 2$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη των προηγούμενων σχέσεων θα βασιστούμε στην Πρόταση 2.1.1. Έτσι, για την (3.63), μέσω της (2.4), έχουμε

$$w_\nu^{*(1)} = w_\nu^{(1)} + \frac{\int_{-1}^{1} (t + \tau_\nu^{(1)}) T_n(t) dt}{\left[\left(\tau_\nu^{(1)}\right)^2 - 1\right] T_n'(\tau_\nu^{(1)})}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.65}$$

όπου $w_\nu^{(1)}$ είναι τα βάρη του τύπου του Fejér πρώτου είδους (3.1). Ας υπολογίσουμε πρώτα το δεύτερο όρο στο δεξί μέλος της (3.65). Είναι

$$\frac{\int_{-1}^{1} (t + \tau_\nu^{(1)}) T_n(t) dt}{\left[\left(\tau_\nu^{(1)}\right)^2 - 1\right] T_n'(\tau_\nu^{(1)})} = \frac{\int_{-1}^{1} t T_n(t) dt + \tau_\nu^{(1)} \int_{-1}^{1} T_n(t) dt}{-\left[1 - \left(\tau_\nu^{(1)}\right)^2\right] T_n'(\tau_\nu^{(1)})},$$

και εισάγοντας τις (1.44), (1.15), (1.18) και (3.8),

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{-1}^{1} (t + \tau_\nu^{(1)}) T_n(t) dt}{\left[\left(\tau_\nu^{(1)}\right)^2 - 1\right] T_n'(\tau_\nu^{(1)})} &= \begin{cases} \dfrac{\cos\theta_\nu^{(1)} \left(-\dfrac{2}{n^2-1}\right)}{-\sin^2\theta_\nu^{(1)} \dfrac{(-1)^{\nu-1} n}{\sin\theta_\nu^{(1)}}}, & n \text{ άρτιος}, \\[4ex] \dfrac{-\dfrac{2}{n^2-4}}{-\sin^2\theta_\nu^{(1)} \dfrac{(-1)^{\nu-1} n}{\sin\theta_\nu^{(1)}}}, & n \text{ περιττός} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\dfrac{2\cos\theta_\nu^{(1)}}{n^2-1}}{(-1)^{\nu-1} n \sin\theta_\nu^{(1)}}, & n \text{ άρτιος}, \\[4ex] \dfrac{\dfrac{2}{n^2-4}}{(-1)^{\nu-1} n \sin\theta_\nu^{(1)}}, & n \text{ περιττός} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2\cos\theta_\nu^{(1)}}{(-1)^{\nu-1} n (n^2-1) \sin\theta_\nu^{(1)}}, & n \text{ άρτιος}, \\[4ex] \dfrac{2}{(-1)^{\nu-1} n (n^2-4) \sin\theta_\nu^{(1)}}, & n \text{ περιττός} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{2}{n}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{n^2-1}\cot\theta_\nu^{(1)}, & n \text{ άρτιος}, \\ \\ \dfrac{2}{n}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{n^2-4}\csc\theta_\nu^{(1)}, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.66}
$$

Εφαρμόζοντας τώρα την (3.2) και την (3.66) στην (3.65),

$$
\begin{aligned}
w_\nu^{*(1)} &= \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right) + \begin{cases} \dfrac{2}{n}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{n^2-1}\cot\theta_\nu^{(1)}, & n \text{ άρτιος}, \\ \\ \dfrac{2}{n}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{n^2-4}\csc\theta_\nu^{(1)}, & n \text{ περιττός} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{n}\left(1 - 2\sum\limits_{k=1}^{n/2}\dfrac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right) + \dfrac{2}{n}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{n^2-1}\cot\theta_\nu^{(1)}, & n \text{ άρτιος}, \\ \\ \dfrac{2}{n}\left(1 - 2\sum\limits_{k=1}^{(n-1)/2}\dfrac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}\right) + \dfrac{2}{n}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{n^2-4}\csc\theta_\nu^{(1)}, & n \text{ περιττός} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{n}\left\{1 - 2\sum\limits_{k=1}^{n/2}\dfrac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1} + \dfrac{(-1)^{\nu-1}\cot\theta_\nu^{(1)}}{n^2-1}\right\}, & n \text{ άρτιος}, \\ \\ \dfrac{2}{n}\left\{1 - 2\sum\limits_{k=1}^{(n-1)/2}\dfrac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1} + \dfrac{(-1)^{\nu-1}\csc\theta_\nu^{(1)}}{n^2-4}\right\}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της (3.64). Για το $w_0^{*(1)}$, λόγω της (2.5), έχουμε

$$
w_0^{*(1)} = \frac{\int\limits_{-1}^{1}(1+t)T_n(t)dt}{2T_n(1)},
$$

κι αφού

$$
T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos n0 = \cos 0 = 1,
$$

$$
w_0^{*(1)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)T_n(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}T_n(t)dt + \int_{-1}^{1}tT_n(t)dt\right),
$$

η οποία, με τη βοήθεια των (1.18) και (1.44), δίνει

$$
w_0^{*(1)} = \frac{1}{2}\begin{cases} -\dfrac{2}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ -\dfrac{2}{n^2-4}, & n \text{ περιττός} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ -\dfrac{1}{n^2-4}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}
$$

Αντίστοιχα, για το $w_{n+1}^{*(1)}$, πάλι από τη (2.5), έχουμε

$$
w_{n+1}^{*(1)} = \frac{\int\limits_{-1}^{1}(1-t)T_n(t)dt}{2T_n(-1)},
$$

κι από την (1.27),

$$T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n,$$

άρα,

$$w_{n+1}^{*(1)} = \frac{1}{2(-1)^n}\int_{-1}^{1}(1-t)T_n(t)dt = \frac{1}{2(-1)^n}\left(\int_{-1}^{1}T_n(t)dt - \int_{-1}^{1}tT_n(t)dt\right),$$

η οποία, μέσω των (1.18) και (1.44), γίνεται

$$w_{n+1}^{*(1)} = \frac{1}{2(-1)^n}\begin{cases} -\dfrac{2}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος},\\ \dfrac{2}{n^2-4}, & n \text{ περιττός}\end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(-1)^n(n^2-1)}, & n \text{ άρτιος},\\ \dfrac{1}{(-1)^n(n^2-4)}, & n \text{ περιττός}\end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος},\\ -\dfrac{1}{n^2-4}, & n \text{ περιττός}.\end{cases}$$

(β) Κατ' αρχάς, είναι προφανές ότι $w_0^{*(1)}, w_{n+1}^{*(1)} < 0$ για $n \geq 2$. Για τη θετικότητα των υπόλοιπων βαρών θα βασιστούμε στη συμμετρία του τύπου (3.53), την οποία θα αποδείξουμε στη συνέχεια. Εφόσον τα βάρη που αντιστοιχούν σε συμμετρικούς κόμβους ως προς το μηδέν είναι ίσα, αρκεί να δείξουμε τη θετικότητα των βαρών που αντιστοιχούν στους θετικούς κόμβους $\tau_\nu^{(1)} = \cos\theta_\nu^{(1)}$, $0 \leq \theta_\nu^{(1)} < \frac{\pi}{2}$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το ν. Αν το ν είναι περιττός, βλέπουμε, μέσω της (3.63) και της θετικότητας των $w_\nu^{(1)}$ (βλέπε (3.3)), ότι τα $w_\nu^{*(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ είναι θετικά. Έστω ότι το ν είναι άρτιος και το n είναι άρτιος, επομένως, η (3.63) δίνει

$$w_\nu^{*(1)} = \frac{2}{n}\left\{1 - 2\sum_{k=1}^{n/2}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1} - \frac{\cot\theta_\nu^{(1)}}{n^2-1}\right\}$$

Όμως,

$$\cot\theta_\nu^{(1)} = \frac{\cos\theta_\nu^{(1)}}{\sin\theta_\nu^{(1)}} < \frac{1}{\sin\theta_\nu^{(1)}},$$

κι αφού

$$\sin\theta_\nu^{(1)} \geq \frac{2\theta_\nu^{(1)}}{\pi},$$

με τη βοήθεια της (1.15),

$$\cot\theta_\nu^{(1)} \leq \frac{\pi}{2\theta_\nu^{(1)}} = \frac{\pi}{2\dfrac{(2\nu-1)\pi}{2n}} = \frac{n}{2\nu-1} \leq \frac{n}{3}, \quad \nu \text{ άρτιος}.$$

Άρα,

$$w_\nu^{*(1)} > \frac{2}{n}\left\{1 - 2\sum_{k=1}^{n/2}\frac{1}{4k^2-1} - \frac{n}{3(n^2-1)}\right\}. \tag{3.67}$$

Σχετικά με το άθροισμα που εμφανίζεται, σκεπτόμενοι όπως στην (3.11),

$$\sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\frac{n}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{2(n+1)}, \tag{3.68}$$

συνεπώς, η (3.67) γράφεται

$$\begin{aligned} w_\nu^{*(1)} &> \frac{2}{n}\left\{1 - 2\frac{n}{2(n+1)} - \frac{n}{3(n^2-1)}\right\} = \frac{2}{n}\left\{\frac{1}{n+1} - \frac{n}{3(n^2-1)}\right\} \\ &= \frac{2}{n}\frac{3(n-1)-n}{3(n^2-1)} = \frac{2(2n-3)}{3n(n^2-1)} > 0, \ \ n \geq 2. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το ν είναι άρτιος και το n είναι περιττός, άρα, η (3.63) γίνεται

$$w_\nu^{*(1)} = \frac{2}{n}\left\{1 - 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1} - \frac{\csc\theta_\nu^{(1)}}{n^2-4}\right\}.$$

Έχουμε

$$\csc\theta_\nu^{(1)} = \frac{1}{\sin\theta_\nu^{(1)}},$$

και, όπως και προηγουμένως, διαπιστώνουμε ότι

$$\csc\theta_\nu^{(1)} \leq \frac{n}{3},$$

ενώ, για το άθροισμα έχουμε, αντίστοιχα με την (3.68),

$$\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\frac{n-1}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{2n}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} w_\nu^{*(1)} &> \frac{2}{n}\left\{1 - 2\frac{n-1}{2n} - \frac{n}{3(n^2-4)}\right\} = \frac{2}{n}\left\{\frac{}{n} - \frac{n}{3(n^2-4)}\right\} \\ &= \frac{2}{n}\frac{3(n^2-4)-n^2}{3n(n^2-4)} = \frac{2}{n}\frac{2n^2-12}{3n(n^2-4)} = \frac{4(n^2-6)}{3n^2(n^2-4)} > 0, \ \ n \geq 3. \end{aligned}$$

□

Ακολούθως, θα αποδείξουμε ότι ο (3.53) είναι συμμετρικός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης, δηλαδή,

$$\tau_{n-\nu+1}^{*(1)} = -\tau_\nu^{*(1)}, \ \ w_{n-\nu+1}^{*(1)} = w_\nu^{*(1)}, \ \ \nu = 0, 1, \ldots, n+1,$$

όπου $\tau_0^{*(1)} = 1$, $\tau_{n+1}^{*(1)} = -1$ και $\tau_\nu^{*(1)} = \tau_\nu^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Είναι προφανές ότι $\tau_{n+1}^{*(1)} = -\tau_0^{*(1)}$, ενώ η συμμετρία των κόμβων $\tau_\nu^{*(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, αποδείχτηκε κατά τη μελέτη του τύπου του Pólya (3.1). Επίσης, εφόσον από την (3.64) έχουμε

$w_{n+1}^{*(1)} = w_0^{*(1)}$, μένει να δείξουμε ότι $w_{n-\nu+1}^{*(1)} = w_\nu^{*(1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Συνεπώς,

$$w_{n-\nu+1}^{*(1)} = \begin{cases} \dfrac{2}{n}\left\{1 - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} \dfrac{\cos 2k\theta_{n-\nu+1}^{(1)}}{4k^2-1} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(-1)^{n-\nu}\cot\theta_{n-\nu+1}^{(1)}}{n^2-1}\right\}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{2}{n}\left\{1 - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \dfrac{\cos 2k\theta_{n-\nu+1}^{(1)}}{4k^2-1} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(-1)^{n-\nu}\csc\theta_{n-\nu+1}^{(1)}}{n^2-4}\right\}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1.15),

$$\begin{aligned} w_{n-\nu+1}^{*(1)} &= \begin{cases} \dfrac{2}{n}\left\{1 - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} \dfrac{\cos 2k\frac{2(n-\nu+1)-1}{2n}\pi}{4k^2-1} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(-1)^{n-\nu}\cot\frac{2(n-\nu+1)-1}{2n}\pi}{n^2-1}\right\}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{2}{n}\left\{1 - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \dfrac{\cos 2k\frac{2(n-\nu+1)-1}{2n}\pi}{4k^2-1} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(-1)^{n-\nu}\csc\frac{2(n-\nu+1)-1}{2n}\pi}{n^2-4}\right\}, & n \text{ περιττός} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{2}{n}\left\{1 - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} \dfrac{\cos 2k\frac{2n-2\nu+1}{2n}\pi}{4k^2-1} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(-1)^{n-\nu}\cot\frac{2n-2\nu+1}{2n}\pi}{n^2-1}\right\}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{2}{n}\left\{1 - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \dfrac{\cos 2k\frac{2n-2\nu+1}{2n}\pi}{4k^2-1} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(-1)^{n-\nu}\csc\frac{2n-2\nu+1}{2n}\pi}{n^2-4}\right\}, & n \text{ περιττός} \end{cases} \end{aligned}$$

$$
=\begin{cases}
\dfrac{2}{n}\left\{1-2\sum_{k=1}^{n/2}\dfrac{\cos\left(2k\pi-2k\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)}{4k^2-1}\right.\\
\qquad\left.+\dfrac{(-1)^{n-\nu}\cot\left(\pi-\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)}{n^2-1}\right\}, & n \text{ άρτιος},\\
\dfrac{2}{n}\left\{1-2\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\dfrac{\cos\left(2k\pi-2k\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)}{4k^2-1}\right.\\
\qquad\left.+\dfrac{(-1)^{n-\nu}\csc\left(\pi-\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)}{n^2-4}\right\}, & n \text{ περιττός}
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
\dfrac{2}{n}\left\{1-2\sum_{k=1}^{n/2}\dfrac{\cos 2k\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{4k^2-1}\right.\\
\qquad\left.+\dfrac{-(-1)^{n-\nu}\cot\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{n^2-1}\right\}, & n \text{ άρτιος},\\
\dfrac{2}{n}\left\{1-2\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\dfrac{\cos 2k\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{4k^2-1}\right.\\
\qquad\left.+\dfrac{(-1)^{n-\nu}\csc\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{n^2-4}\right\}, & n \text{ περιττός}
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
\dfrac{2}{n}\left\{1-2\sum_{k=1}^{n/2}\dfrac{\cos 2k\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{4k^2-1}\right.\\
\qquad\left.+\dfrac{(-1)^{-(\nu-1)}\cot\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{n^2-1}\right\}, & n \text{ άρτιος},\\
\dfrac{2}{n}\left\{1-2\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\dfrac{\cos 2k\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{4k^2-1}\right.\\
\qquad\left.+\dfrac{(-1)^{-(\nu-1)}\csc\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{n^2-4}\right\}, & n \text{ περιττός}
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
\dfrac{2}{n}\left\{1-2\sum_{k=1}^{n/2}\dfrac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}+\dfrac{(-1)^{\nu-1}\cot\theta_\nu^{(1)}}{n^2-1}\right\}, & n \text{ άρτιος},\\
\dfrac{2}{n}\left\{1-2\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\dfrac{\cos 2k\theta_\nu^{(1)}}{4k^2-1}+\dfrac{(-1)^{\nu-1}\csc\theta_\nu^{(1)}}{n^2-4}\right\}, & n \text{ περιττός}
\end{cases}
$$

$$
=w_\nu^{*(1)}.
$$

Αναφορικά με τη σύγκλιση του τύπου (3.53) για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$, σημειώνουμε καταρχήν ότι συγκλίνει για κάθε πολυώνυμο αφού είναι τύπος εκ παρεμβολής. Ακόμη, παρατηρούμε ότι δεν είναι όλα τα βάρη του θετικά, ωστόσο, για $n\geq 2$, μέσω των (3.63) και (3.64),

έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n+1}\left|w_\nu^{*(1)}\right| &= \left|w_0^{*(1)}\right| + \sum_{\nu=1}^{n}\left|w_\nu^{*(1)}\right| + \left|w_{n+1}^{*(1)}\right| = -w_0^{*(1)} + \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{*(1)} - w_{n+1}^{*(1)} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{*(1)} - 2w_0^{*(1)} = \sum_{\nu=0}^{n+1} w_\nu^{*(1)} - w_0^{*(1)} - w_{n+1}^{*(1)} - 2w_0^{*(1)} \\
&= \int_{-1}^{1} dt - 4w_0^{*(1)} = 2 - 4w_0^{*(1)} = 2 - 4\begin{cases} -\dfrac{1}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ -\dfrac{1}{n^2-4}, & n \text{ περιττός} \end{cases} \\
&= 2 + \begin{cases} \dfrac{4}{n^2-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{4}{n^2-4}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι

$$\sum_{\nu=0}^{n+1}\left|w_\nu^{*(1)}\right| \to 2, \;\; n \to \infty,$$

επομένως, λόγω του Θεωρήματος 2.2.4, ο τύπος (3.53) συγκλίνει για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[-1, 1]$.

Θα μελετήσουμε τώρα το σφάλμα του τύπου (3.53) για αναλυτικές συναρτήσεις $f \in X_r$. Όπως κάναμε μέχρι τώρα σε αντίστοιχες περιπτώσεις, θα εξετάσουμε πρώτα το πρόσημο του $R_n^{*(1)}$ στα μονώνυμα t^k, $k \geq 0$.

Λήμμα 3.3.2. *Ο όρος του σφάλματος του τύπου του Basu (3.53), όταν $n \geq 4$, ικανοποιεί*

$$R_n^{*(1)}(t^k) \begin{cases} \leq 0, & 0 \leq k \leq k_n^{*(1)}, \\ \geq 0, & k > k_n^{*(1)}, \end{cases} \tag{3.69}$$

όπου $k_n^{*(1)} > 2[(n+1)/2] + 2$ είναι μια σταθερά.

Για $n = 1, 2$ ή 3, ισχύει

$$R_1^{*(1)}(t^k) \leq 0, \;\; k \geq 0, \tag{3.70}$$

$$R_2^{*(1)}(t^k) \geq 0, \;\; k \geq 0, \tag{3.71}$$

$$R_3^{*(1)}(t^k) \geq 0, \;\; k \geq 0. \tag{3.72}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, δεδομένου του βαθμού ακριβείας του τύπου (3.53),

$$R_n^{*(1)}(t^k) = 0, \;\; k = 0, 1, \ldots, \begin{cases} n+1, & n \text{ άρτιος}, \\ n+2, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.73}$$

Επιπλέον, ο τύπος (3.53) είναι συμμετρικός, οπότε,

$$R_n^{*(1)}(t^{2l-1}) = 0, \;\; l \geq 1. \tag{3.74}$$

Ως εκ τούτου, το $R_n^{*(1)}$ αλλάζει πρόσημο σε κάποιο άρτιο μονώνυμο. Εξετάζουμε λοιπόν το πρόσημο του $R_n^{*(1)}(t^{2l})$, ξεκινώντας με το σφάλμα του τύπου (3.53) στο πρώτο άρτιο μονώνυμο με βαθμό μεγαλύτερο από το βαθμό ακριβείας του. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.73), διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το n. Έστω n(άρτιος) ≥ 4, οπότε υπολογίζουμε πρώτα το $R_n^{*(1)}(t^{n+2})$. Εφόσον πρόκειται για πολυώνυμο βαθμού ακριβώς $n+2$ με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, το σφάλμα του τύπου (3.53) γι' αυτό το πολυώνυμο θα είναι ίσο με το σφάλμα του τύπου για τη συνάρτηση $(1/2^{n-1})(t^2-1)T_n(t)$. Άρα,

$$R_n^{*(1)}(t^{n+2}) = R_n^{*(1)}\left(\frac{1}{2^{n-1}}(t^2-1)T_n(t)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}R_n^{*(1)}((t^2-1)T_n(t)),$$

και με τη βοήθεια της (3.59)

$$R_n^{*(1)}(t^{n+2}) = \frac{1}{2^{n-1}}\left[-\frac{12}{(n^2-1)(n^2-9)}\right] = -\frac{3}{2^{n-3}(n^2-1)(n^2-9)}. \tag{3.75}$$

Έστω τώρα n(περιττός) ≥ 5. Θα υπολογίσουμε με τον ίδιο τρόπο το $R_n^{*(1)}(t^{n+3})$.

$$R_n^{*(1)}(t^{n+3}) = R_n^{*(1)}\left(t(t^2-1)\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}R_n^{*(1)}\left(t(t^2-1)T_n(t)\right),$$

η οποία, μέσω της (3.62), δίνει

$$R_n^{*(1)}(t^{n+3}) = \frac{1}{2^{n-1}}\left[-\frac{12}{(n^2-4)(n^2-16)}\right] = -\frac{3}{2^{n-3}(n^2-4)(n^2-16)}. \tag{3.76}$$

Από τις (3.75) και (3.76), παίρνουμε

$$R_n^{*(1)}(t^{2[(n+1)/2]+2}) < 0, \;\; n \geq 4. \tag{3.77}$$

Επίσης, θέτοντας $f(t) = t^{2l}$ στον τύπο (3.53),

$$\int_{-1}^{1} t^{2l}dt = w_0^{*(1)} + \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{*(1)}(\tau_\nu^{(1)})^{2l} + w_{n+1}^{*(1)} + R_n^{*(1)}(t^{2l})$$

$$\Rightarrow R_n^{*(1)}(t^{2l}) = \frac{2}{2l+1} - w_0^{*(1)} - \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{*(1)}(\tau_\nu^{(1)})^{2l} - w_{n+1}^{*(1)}.$$

Αφού $w_0^{*(1)} = w_{n+1}^{*(1)} < 0$ ανεξάρτητα του l, και $|\tau_\nu^{(1)}| < 1, \; \nu = 1, 2, \ldots, n$, διαπιστώνουμε ότι η τιμή του $\sum\limits_{\nu=1}^{n} w_\nu^{*(1)}(\tau_\nu^{(1)})^{2l}$ μειώνεται καθώς το l αυξάνεται, συνεπώς,

$$R_n^{*(1)}(t^{2l}) > 0, \;\; l > k_n^{*(1)}/2, \tag{3.78}$$

για κάποια σταθερά $k_n^{*(1)} > 2[(n+1)/2] + 2$. Τέλος, συνδυάζοντας την (3.78) με τις (3.73), (3.74) και (3.77), παίρνουμε την (3.69).

Για $n = 1$, ο τύπος (3.53) γίνεται

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = w_0^{*(1)}f(1) + w_1^{*(1)}f(\tau_1^{(1)}) + w_2^{*(1)}f(-1) + R_1^{*(1)}(f). \tag{3.79}$$

Από την (1.15), έχουμε

$$\tau_1^{(1)} = \cos\theta_1^{(1)} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

ενώ, από τις (3.63) και (3.64),

$$w_1^{*(1)} = 2\left\{1 + \frac{(-1)^0 \csc\theta_1^{(1)}}{1^2 - 4}\right\} = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3},\;\; w_0^{*(1)} = w_2^{*(1)} = \frac{1}{3},$$

και αντικαθιστώντας στην (3.78),

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{3}f(1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(-1) + R_1^{*(1)}(f).$$

Βλέπουμε ότι για $n = 1$ ο τύπος (3.53) είναι ο (απλός) τύπος του Simpson, του οποίου το σφάλμα δίνεται από τη σχέση (βλέπε [2, σελ. 252-253])

$$R_1^{*(1)}(f) = -\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi),\;\; -1 < \xi < 1.$$

Έτσι, αν $f(t) = t^{2l}$, αφού

$$f^{(4)}(t) = 4l(l-1)(2l-1)(2l-3)t^{2(l-2)},$$

$$R_1^{*(1)}(t^{2l}) = -\frac{2}{45}l(l-1)(2l-1)(2l-3)\xi^{2(l-2)} < 0,\;\; l \geq 2,$$

η οποία, σε συνδυασμό με τις (3.73) και (3.74), δίνει την (3.70).

Για $n = 2$, ο τύπος (3.53) γίνεται

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(t)dt &= w_0^{*(1)}f(1) + \sum_{\nu=1}^{2} w_\nu^{*(1)}f(\tau_\nu^{(1)}) + w_3^{*(1)}f(-1) + R_2^{*(1)}(f)\\ &= w_0^{*(1)}f(1) + w_1^{*(1)}f(\tau_1^{(1)}) + w_2^{*(1)}f(\tau_2^{(1)}) + w_3^{*(1)}f(-1) + R_2^{*(1)}(f).\end{aligned}$$

Τώρα, από την (3.64), έχουμε

$$w_0^{*(1)} = w_3^{*(1)} = -\frac{1}{3},$$

ενώ, από τις (1.15) και (3.63),

$$\tau_1^{(1)} = \cos\theta_1^{(1)} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_1^{*(1)} = 1 - 2\frac{\cos 2\theta_1^{(1)}}{4-1} + \frac{(-1)^0 \cot\theta_1^{(1)}}{4-1} = 1 - \frac{2}{3}\cos 2\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\cot\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

και, λόγω συμμετρίας,

$$\tau_2^{(1)} = -\tau_1^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\;\; w_2^{*(1)} = w_1^{*(1)} = \frac{4}{3}.$$

Τελικά, για $n = 2$, ο τύπος (3.53) είναι

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = -\frac{1}{3}f(1) + \frac{4}{3}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{4}{3}f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{3}f(-1) + R_2^{*(1)}(f),$$

και θέτοντας σε αυτόν $f(t)=t^{2l}$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} t^{2l}dt &= -\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2l}+\frac{4}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2l}-\frac{1}{3}+R_2^{*(1)}(t^{2l})\\
\Rightarrow R_2^{*(1)}(t^{2l}) &= \frac{2}{2l+1}+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\frac{1}{2^l}-\frac{4}{3}\frac{1}{2^l}=\frac{2}{2l+1}+\frac{2}{3}-\frac{8}{3}\frac{1}{2^l}\\
&= \frac{2}{2l+1}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{4}{2^l}\right)\\
&= 2\left\{\frac{1}{2l+1}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{l-2}}\right)\right\}>0,\;\; l\geq 2.
\end{aligned}$$

η οποία, σε συνδυασμό με τις (3.73) και (3.74), δίνει την (3.71).

Για $n=3$, ο τύπος (3.53) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(t)dt &= w_0^{*(1)}f(1)+\sum_{\nu=1}^{3}w_\nu^{*(1)}f(\tau_\nu^{(1)})+w_4^{*(1)}f(-1)+R_3^{*(1)}(f)\\
&= w_0^{*(1)}f(1)+w_1^{*(1)}f(\tau_1^{(1)})+w_2^{*(1)}f(\tau_2^{(1)})+w_3^{*(1)}f(\tau_3^{(1)})\\
&\quad + w_4^{*(1)}f(-1)+R_3^{*(1)}(f). \qquad (3.80)
\end{aligned}$$

Από την (3.64), έχουμε

$$w_0^{*(1)}=w_4^{*(1)}=-\frac{1}{5},$$

και με τη βοήθεια των (1.15) και (3.62), θα υπολογίσουμε τους κόμβους $\tau_1^{(1)}$, $\tau_2^{(1)}$, $\tau_3^{(1)}$ και τα αντίστοιχα βάρη $w_1^{*(1)}$, $w_2^{*(1)}$ και $w_3^{*(1)}$. Έχουμε

$$\tau_1^{(1)}=\cos\theta_1^{(1)}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{aligned}
w_1^{*(1)} &= \frac{2}{3}\left(1-2\frac{\cos 2\theta_1^{(1)}}{4-1}+\frac{(-1)^0\csc\theta_1^{(1)}}{3^2-4}\right)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\cos 2\frac{\pi}{6}+\frac{1}{5}\csc\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{5}2\right)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{3}\frac{16}{15}\\
&= \frac{32}{45},
\end{aligned}$$

και

$$\tau_2^{(1)}=\cos\theta_2^{(1)}=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\begin{aligned}
w_2^{*(1)} &= \frac{2}{3}\left\{1-2\frac{\cos 2\theta_2^{(1)}}{4-1}+\frac{(-1)\csc\theta_2^{(1)}}{9-4}\right\}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\cos 2\frac{3\pi}{6}-\frac{1}{5}\csc\frac{3\pi}{6}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{3}\frac{22}{15}\\
&= \frac{44}{45},
\end{aligned}$$

ενώ, λόγω συμμετρίας,

$$\tau_3^{(1)} = -\tau_1^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; w_3^{*(1)} = w_1^{*(1)} = \frac{32}{45}.$$

Αντικαθιστώντας τα προηγούμενα στην (3.80), βλέπουμε ότι για $n = 3$ ο τύπος (3.53) είναι

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = -\frac{1}{5}f(1) + \frac{32}{45}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{44}{45}f(0) + \frac{32}{45}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{5}f(-1) + R_3^{*(1)}(f),$$

και θέτοντας σε αυτόν $f(t) = t^{2l}$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} t^{2l}dt &= -\frac{1}{5} + \frac{32}{45}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2l} + \frac{32}{45}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2l} - \frac{1}{5} + R_3^{*(1)}(t^{2l}) \\
\Rightarrow R_3^{*(1)}(t^{2l}) &= \frac{2}{2l+1} + \frac{2}{5} - \frac{32}{45}\left(\frac{3}{4}\right)^{l} - \frac{32}{45}\left(\frac{3}{4}\right)^{l} \\
&= \frac{2}{2l+1} + \frac{2}{5} - \frac{64}{45}\left(\frac{3}{4}\right)^{l} = \frac{2}{2l+1} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\frac{2^5}{3^2}\left(\frac{3}{4}\right)^{l} \\
&= \frac{2}{2l+1} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}2\frac{4^2}{3^2}\frac{3^l}{4^l} = \frac{2}{2l+1} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}2\left(\frac{3}{4}\right)^{l-2} \\
&= \frac{2}{2l+1} + \frac{2}{5}\left[1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^{l-2}\right] \\
&= 2\left\{\frac{1}{2l+1} + \frac{1}{5}\left[1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^{l-2}\right]\right\} > 0, \;\; l \geq 3,
\end{aligned}$$

η οποία, σε συνδυασμό με τις (3.73) και (3.74), δίνει την (3.72). □

Μπορούμε τώρα να εκτιμήσουμε τη $\|R_n^{*(1)}\|$.

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης του Basu (3.53). Για $n \geq 4$, έχουμε*

$$\begin{aligned}
\|R_n^{*(1)}\| \leq r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) &- 4r \sum_{k=1}^{[k_n^{*(1)}/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} + \frac{4}{r^{k_n^{*(1)}}(r^2-1)} \\
&+ \frac{4r}{T_n(r)} \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \\
&- \begin{cases} \dfrac{2r^2}{(n^2-1)(r^2-1)T_n(r)}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{2r}{(n^2-4)(r^2-1)T_n(r)}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Για $n = 1$,

$$\|R_1^{*(1)}\| = \frac{2(3r^2-2)}{3(r^2-1)} - r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right), \tag{3.82}$$

για $n = 2$,

$$\|R_2^{*(1)}\| = r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{2r^2(6r^2-7)}{3(r^2-1)(2r^2-1)}, \tag{3.83}$$

και, για $n = 3$,

$$\|R_3^{*(1)}\| = r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{2r(60r^4-85r^2+22)}{15(r^2-1)(4r^3-3r)}. \tag{3.84}$$

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας την (3.80). Για $n \geq 4$, αν και τα βάρη $w_0^{*(1)}$ και $w_{n+1}^{*(1)}$ είναι αρνητικά, μια μικρή τροποποίηση στο Πόρισμα 2.3.5(β), σε συνδυασμό με την (3.69), δίνει

$$\|R_n^{*(1)}\| \leq 2r \left\{ \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2 \sum_{k=1}^{[k_n^{*(1)}/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} \right\}$$
$$+ \frac{4}{r^{k_n^{*(1)}}(r^2-1)} - \frac{r}{(r^2-1)T_n(r)} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_n(t)}{r-t} dt,$$

και αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της ανισότητας από την (1.39),

$$\|R_n^{*(1)}\| \leq 2r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4r \sum_{k=1}^{[k_n^{*(1)}/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} + \frac{4}{r^{k_n^{*(1)}}(r^2-1)}$$
$$-r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + \frac{4r}{T_n(r)} {\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}}' \frac{T_{n-2k+1}(r)}{2k-1}$$
$$- \begin{cases} \dfrac{2r^2}{(n^2-1)(r^2-1)T_n(r)}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{2r}{(n^2-4)(r^2-1)T_n(r)}, & n \text{ περιττός}, \end{cases}$$

σχέση ισοδύναμη με την (3.81).

Τώρα, αν $n = 1$, λόγω της (3.70), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το (α) του Θεωρήματος 2.3.1 (με $\epsilon = -1$), μέσω του οποίου,

$$\|R_1^{*(1)}\| = -\frac{r}{(r^2-1)T_1(r)} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_1(t)}{r-t} dt.$$

Όμως, από την (1.39),

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_1(t)}{r-t} dt = (r^2-1)T_1(r) \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4(r^2-1)\frac{T_0(r)}{2} - \frac{2}{3},$$

οπότε,

$$\|R_1^{*(1)}\| = -r \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + \frac{2rT_0(r)}{T_1(r)} + \frac{2r}{3(r^2-1)T_1(r)},$$

η οποία, μέσω της (1.11), γίνεται

$$\begin{aligned}
\|R_1^{*(1)}\| &= -r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + \frac{2r}{r} + \frac{2r}{3(r^2-1)r} = 2 + \frac{2}{3(r^2-1)} - r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&= \frac{6(r^2-1)+2}{3(r^2-1)} - r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) = \frac{6r^2-4}{3(r^2-1)} - r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\
&= \frac{2(3r^2-2)}{3(r^2-1)} - r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right).
\end{aligned}$$

Για $n = 2$, λόγω της (3.71), βασιζόμαστε στη (2.18), οπότε,

$$\|R_2^{*(1)}\| = \frac{r}{(r^2-1)T_2(r)} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_2(t)}{r-t}dt.$$

Όμως, από την (1.39),

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_2(t)}{r-t}dt = (r^2-1)T_2(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4(r^2-1)T_1(r) + \frac{2r}{3},$$

και εισάγοντάς την στην προηγούμενη σχέση,

$$\|R_2^{*(1)}\| = r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{4rT_1(r)}{T_2(r)} + \frac{2r^2}{3(r^2-1)T_2(r)},$$

η οποία, μέσω της (1.11), γίνεται

$$\begin{aligned}
\|R_2^{*(1)}\| &= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{4r^2}{2r^2-1} + \frac{2r^2}{3(r^2-1)(2r^2-1)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{4r^2 3(r^2-1) - 2r^2}{3(r^2-1)(2r^2-1)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{2r^2[6(r^2-1)-1]}{3(r^2-1)(2r^2-1)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{2r^2(6r^2-7)}{3(r^2-1)(2r^2-1)}.
\end{aligned}$$

Τέλος, θεωρούμε την περίπτωση $n = 3$. Εφόσον ισχύει η (3.71), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το (α) του Θεωρήματος 2.3.1 (με $\epsilon = 1$), σύμφωνα με το οποίο,

$$\|R_3^{*(1)}\| = \frac{r}{(r^2-1)T_3(r)} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_3(t)}{r-t}dt.$$

Για το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος, μέσω της (1.39), έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)T_3(t)}{r-t}dt &= (r^2-1)T_3(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4(r^2-1)\sideset{}{'}\sum_{k=1}^{2} \frac{T_{4-2k}(r)}{2k-1} + \frac{2}{5} \\
&= (r^2-1)T_3(r)\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 4(r^2-1)\left[T_2(r) + \frac{1}{2}\frac{T_0(r)}{3}\right] \\
&\quad + \frac{2}{5},
\end{aligned}$$

συνεπώς,

$$\|R_3^{*(1)}\| = r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{4r}{T_3(r)}\left[T_2(r) + \frac{T_0(r)}{6}\right] + \frac{2r}{5(r^2-1)T_3(r)}. \qquad (3.85)$$

Τώρα, από την (1.11),

$$T_2(r) = 2rT_1(r) - T_0(r) = 2r^2 - 1,$$
$$T_3(r) = 2rT_2(r) - T_1(r) = 2r(2r^2-1) - r = 4r^3 - 3r,$$

οι οποίες, εισαγόμενες στην (3.84), δίνουν

$$\begin{aligned}
\|R_3^{*(1)}\| &= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{4r}{4r^3-3r}\left(2r^2 - 1 + \frac{1}{6}\right) + \frac{2r}{5(r^2-1)(4r^3-3r)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{4r}{4r^3-3r}\,\frac{12r^2-5}{6} + \frac{2r}{5(r^2-1)(4r^3-3r)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{2r(12r^2-5)}{3(4r^3-3r)} + \frac{2r}{5(r^2-1)(4r^3-3r)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{2r(12r^2-5)5(r^2-1) - 2r3}{3(r^2-1)5(4r^3-3r)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{10r(12r^2-5)(r^2-1) - 6r}{15(r^2-1)(4r^3-3r)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{10r(12r^4-17r^2+5) - 6r}{15(r^2-1)(4r^3-3r)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{120r^5-170r^3+50r-6r}{15(r^2-1)(4r^3-3r)} \\
&= r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{2r(60r^4-85r^2+22)}{15(r^2-1)(4r^3-3r)}.
\end{aligned}$$

□

3.4 Τύπος των Clenshaw-Curtis

Είναι ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = w_0^{*(2)} f(1) + \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{*(2)} f(\tau_\nu^{(2)}) + w_{n+1}^{*(2)} f(-1) + R_n^{*(2)}(f), \qquad (3.86)$$

όπου $\tau_\nu^{(2)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι ρίζες του n-οστού πολυωνύμου του Chebyshev δευτέρου είδους U_n, και δίνονται από την (1.24).

Αναφορικά με το βαθμό ακριβείας του τύπου (3.86), παρατηρούμε καταρχήν ότι $R_n^{*(2)}(f) = 0$ για κάθε $f \in \mathbb{P}_{n+1}$, μιας και είναι τύπος εκ παρεμβολής με $n+2$ σημεία. Έτσι, υπολογίζουμε το σφάλμα του τύπου για ένα πολυώνυμο βαθμού $n+2$. Θέτοντας $f(t) = (t^2-1)U_n(t)$ στην (3.86),

$$R_n^{*(2)}\left((t^2-1)U_n(t)\right) = \int_{-1}^{1} (t^2-1)U_n(t)dt. \qquad (3.87)$$

Από τον αναδρομικό τύπο που πληρούν τα U_n (βλέπε (1.20)),

$$\begin{aligned} tU_n(t) &= \frac{1}{2}U_{n+1}(t) + \frac{1}{2}U_{n-1}(t) \\ \Rightarrow t^2U_n(t) &= \frac{1}{2}tU_{n+1}(t) + \frac{1}{2}tU_{n-1}(t), \end{aligned}$$

η οποία, χρησιμοποιώντας ξανά την (1.20), γίνεται

$$\begin{aligned} t^2U_n(t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}U_{n+2}(t) + \frac{1}{2}U_n(t)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}U_n(t) + \frac{1}{2}U_{n-2}(t)\right] \\ &= \frac{1}{4}U_{n+2}(t) + \frac{1}{2}U_n(t) + \frac{1}{4}U_{n-2}(t) \\ \Rightarrow (t^2-1)U_n(t) &= \frac{1}{4}U_{n+2}(t) - \frac{1}{2}U_n(t) + \frac{1}{4}U_{n-2}(t), \end{aligned} \tag{3.88}$$

Εισάγοντας την (3.88) στην (3.87),

$$\begin{aligned} R_n^{*(2)}\left((t^2-1)U_n(t)\right) &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{4}U_{n+2}(t) - \frac{1}{2}U_n(t) + \frac{1}{4}U_{n-2}(t)\right]dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}U_{n+2}(t)dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}U_n(t)dt + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}U_{n-2}(t)dt. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Σχετικά με τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται, λόγω της (1.26),

$$\int_{-1}^{1}U_{n+2}(t)dt = \begin{cases} \dfrac{2}{n+3}, & n \text{ άρτιος}, \\ 0, & n \text{ περιττός}, \end{cases} \tag{3.90}$$

και

$$\int_{-1}^{1}U_{n-2}(t)dt = \begin{cases} \dfrac{2}{n-1}, & n \text{ άρτιος}, \\ 0, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.91}$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το n. Αν το n είναι άρτιος, η (3.89), με τη βοήθεια των (3.90), (1.26) και (3.91), δίνει

$$\begin{aligned} &R_n^{*(2)}\left((t^2-1)U_n(t)\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{2}{n+3} - \frac{1}{2}\frac{2}{n+1} + \frac{1}{4}\frac{2}{n-1} = \frac{1}{2(n+3)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n-1)} \\ &= \frac{(n-1)(n+1) - 2(n-1)(n+3) + (n+1)(n+3)}{2(n-1)(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{n^2 - 1 - 2(n^2+2n-3) + n^2 + 4n + 3}{2(n-1)(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 2 - 2n^2 - 4n + 6}{2(n-1)(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{8}{2(n-1)(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{4}{(n-1)(n+1)(n+3)}. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Βλέπουμε ότι $R_n^{*(2)}\left((t^2-1)U_n(t)\right) \neq 0$ αν n άρτιος, οπότε, ο τύπος (3.86) έχει βαθμό ακριβείας $d = n+1$ αν n άρτιος. Όμως, αν το n είναι περιττός, από την (3.89), σε συνδυασμό με τις (3.90), (1.26) και (3.91), διαπιστώνουμε ότι $R_n^{*(2)}\left((t^2-1)U_n(t)\right) = 0$. Επομένως, θέτουμε στον τύπο (3.86) στη θέση της f ένα πολυώνυμο βαθμού $n+3$, το $t(t^2-1)U_n(t)$. Έτσι,

$$R_n^{*(2)}\left(t(t^2-1)U_n(t)\right) = \int_{-1}^{1} t(t^2-1)U_n(t)dt. \tag{3.93}$$

Πολλαπλασιάζοντας με t την (3.88),

$$t(t^2-1)U_n(t) = \frac{1}{4}tU_{n+2}(t) - \frac{1}{2}tU_n(t) + \frac{1}{4}tU_{n-2}(t),$$

η οποία, μέσω της (1.20), γράφεται

$$\begin{aligned} t(t^2-1)U_n(t) &= \frac{1}{4}\frac{1}{2}[U_{n+3}(t) + U_{n+1}(t)] - \frac{1}{2}\frac{1}{2}[U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)] \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{2}[U_{n-1}(t) + U_{n-3}(t)] \\ &= \frac{1}{8}U_{n+3}(t) - \frac{1}{8}U_{n+1}(t) - \frac{1}{8}U_{n-1}(t) + \frac{1}{8}U_{n-3}(t), \end{aligned}$$

και εισάγοντας την τελευταία σχέση στην (3.93),

$$\begin{aligned} R_n^{*(2)}\left(t(t^2-1)U_n(t)\right) &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{8}U_{n+3}(t) - \frac{1}{8}U_{n+1}(t) - \frac{1}{8}U_{n-1}(t) + \frac{1}{8}U_{n-3}(t)\right]dt \\ &= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}U_{n+3}(t)dt - \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}U_{n+1}(t)dt - \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}U_{n-1}(t)dt \\ &\quad + \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}U_{n-3}(t)dt. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Όσο για τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (3.94), εφόσον το n είναι περιττός, έχουμε, από την (1.26),

$$\int_{-1}^{1}U_{n+3}(t)dt = \frac{2}{n+4}, \quad \int_{-1}^{1}U_{n+1}(t)dt = \frac{2}{n+2},$$
$$\int_{-1}^{1}U_{n-1}(t)dt = \frac{2}{n}, \quad \int_{-1}^{1}U_{n-3}(t)dt = \frac{2}{n-2},$$

και αντικαθιστώντας στην (3.94),

$$
\begin{aligned}
&R_n^{*(2)}\left(t(t^2-1)U_n(t)\right)\\
&=\frac{1}{8}\frac{2}{n+4}-\frac{1}{8}\frac{2}{n+2}-\frac{1}{8}\frac{2}{n}+\frac{1}{8}\frac{2}{n-2}=\frac{1}{4(n+4)}-\frac{1}{4(n+2)}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4(n-2)}\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{-2}{(n+4)(n+2)}-\frac{-2}{n(n-2)}\right]\\
&=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{(n-2)n}-\frac{2}{(n+2)(n+4)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-2)n}-\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right]\\
&=\frac{1}{2}\frac{(n+2)(n+4)-(n-2)n}{(n-2)n(n+2)(n+4)}=\frac{1}{2}\frac{n^2+6n+8-n^2+2n}{(n-2)n(n+2)(n+4)}\\
&=\frac{1}{2}\frac{8n+8}{(n-2)n(n+2)(n+4)}=\frac{4(n+1)}{(n-2)n(n+2)(n+4)}. \qquad (3.95)
\end{aligned}
$$

Αφού $R_n^{*(2)}\left(t(t^2-1)U_n(t)\right)\neq 0$ αν n περιττός, ο βαθμός ακριβείας του τύπου (3.86) σ' αυτήν την περίπτωση είναι $d=n+2$. Συνοψίζοντας, ο τύπος των Clenshaw-Curtis (3.86) έχει βαθμό ακριβείας $d=n+1$ αν το n είναι άρτιος και $d=n+2$ αν το n είναι περιττός, δηλαδή, $d=2[(n+1)/2]+1$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις σχέσεις που δίνουν τα βάρη του τύπου (3.86) και δείχνουμε ότι είναι θετικά. Έτσι, έχουμε την

Πρόταση 3.4.1. (α) *Τα βάρη* $w_\nu^{*(2)},\ \nu=0,1,\ldots,n+1,$ *στον τύπο των Clenshaw-Curtis (3.86) δίνονται από τις σχέσεις*

$$
w_\nu^{*(2)}=\frac{2}{n+1}\left(1-2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right),\quad \nu=1,2,\ldots,n, \qquad (3.96)
$$

και

$$
w_0^{*(2)}=w_{n+1}^{*(2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(n+1)^2}, & n \text{ άρτιος},\\[2mm] \dfrac{1}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός}.\end{cases} \qquad (3.97)
$$

(β) *Τα βάρη* $w_\nu^{*(2)},\ \nu=0,1,\ldots,n+1,$ *στον τύπο (3.86) είναι θετικά.*

Απόδειξη. (α) Ξεκινάμε με την απόδειξη της (3.96). Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.1.1, έχουμε, λόγω της (2.4),

$$
w_\nu^{*(2)}=w_\nu^{(2)}+\frac{\int\limits_{-1}^{1}(t+\tau_\nu^{(2)})U_n(t)dt}{\left[\left(\tau_\nu^{(2)}\right)^2-1\right]U_n'(\tau_\nu^{(2)})},\quad \nu=1,2,\ldots,n, \qquad (3.98)
$$

όπου $w_\nu^{(2)}$, $\nu=1,2,\ldots,n$, είναι τα βάρη του τύπου του Filippi (3.31). Σχετικά με το κλάσμα στο δεύτερο μέλος της (3.98),

$$
\frac{\int\limits_{-1}^{1}(t+\tau_\nu^{(2)})U_n(t)dt}{\left[\left(\tau_\nu^{(2)}\right)^2-1\right]U_n'(\tau_\nu^{(2)})}=\frac{\int\limits_{-1}^{1}tU_n(t)dt+\tau_\nu^{(2)}\int\limits_{-1}^{1}U_n(t)dt}{-\left[1-\left(\tau_\nu^{(2)}\right)^2\right]U_n'(\tau_\nu^{(2)})},
$$

στην οποία, εφαρμόζοντας τις (1.46), (1.24), (1.26) και (3.39), παίρνουμε

$$\frac{\int\limits_{-1}^{1}(t+\tau_\nu^{(2)})U_n(t)dt}{\left[\left(\tau_\nu^{(2)}\right)^2-1\right]U_n'(\tau_\nu^{(2)})} = \begin{cases} \dfrac{\cos\theta_\nu^{(2)}\dfrac{2}{n+1}}{-\left(1-\cos^2\theta_\nu^{(2)}\right)\dfrac{(-1)^{\nu+1}(n+1)}{\sin^2\theta_\nu^{(2)}}}, & n \text{ άρτιος}, \\[2em] \dfrac{\dfrac{2(n+1)}{n(n+2)}}{-\left(1-\cos^2\theta_\nu^{(2)}\right)\dfrac{(-1)^{\nu+1}(n+1)}{\sin^2\theta_\nu^{(2)}}}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\dfrac{2\cos\theta_\nu^{(2)}}{n+1}}{(-1)^{\nu+2}(n+1)}, & n \text{ άρτιος}, \\[2em] \dfrac{\dfrac{2(n+1)}{n(n+2)}}{(-1)^{\nu+2}(n+1)}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2(-1)^\nu\cos\theta_\nu^{(2)}}{(n+1)^2}, & n \text{ άρτιος}, \\[1em] \dfrac{2(-1)^\nu}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.99}$$

Εισάγοντας τις (3.32) και (3.99) στην (3.98),

$$w_\nu^{*(2)} = \frac{2}{n+1}\left(1-2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}-\frac{\cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu^{(2)}}{2[(n+1)/2]-1}\right) + \begin{cases} \dfrac{2(-1)^\nu\cos\theta_\nu^{(2)}}{(n+1)^2}, & n \text{ άρτιος}, \\[1em] \dfrac{2(-1)^\nu}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.100}$$

Τώρα, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$\cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu^{(2)} = \begin{cases} (-1)^\nu\cos\theta_\nu^{(2)}, & n \text{ άρτιος}, \\ (-1)^\nu, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.101}$$

Πράγματι, αν το n είναι άρτιος, έχοντας υπ' όψιν την τριγωνομετρική ταυτότητα για το συνημίτονο του αθροίσματος δυο γωνιών, και την (1.24),

$$\begin{aligned} \cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu^{(2)} &= \cos n\theta_\nu^{(2)} \\ &= \cos(n+1)\theta_\nu^{(2)}\cos\theta_\nu^{(2)} + \sin(n+1)\theta_\nu^{(2)}\sin\theta_\nu^{(2)} \\ &= \cos(n+1)\frac{\nu\pi}{n+1}\cos\theta_\nu^{(2)} + \sin(n+1)\frac{\nu\pi}{n+1}\sin\theta_\nu^{(2)} \\ &= \cos\nu\pi\cos\theta_\nu^{(2)} = (-1)^\nu\cos\theta_\nu^{(2)}, \end{aligned}$$

ενώ, αν το n είναι περιττός,

$$\begin{aligned}\cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu^{(2)} &= \cos 2\frac{n+1}{2}\theta_\nu^{(2)} = \cos(n+1)\theta_\nu^{(2)} = \cos(n+1)\frac{\nu\pi}{n+1} \\ &= \cos\nu\pi = (-1)^\nu.\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν το n είναι άρτιος, η (3.100), σε συνδυασμό με την (3.101), δίνει

$$\begin{aligned}
&w_\nu^{*(2)} \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1} - \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}\right) + \frac{2\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{(n+1)^2} \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1} - \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} + \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{n+1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1} - \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} + \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right. \\
&\qquad\left. - \frac{\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]+1\right)\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)} - \left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{4\left[\frac{n+1}{2}\right]^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1} - \frac{2\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{4\left[\frac{n+1}{2}\right]^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left\{1 - 2\left(\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1} + \frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{4\left[\frac{n+1}{2}\right]^2-1}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right). \qquad (3.102)
\end{aligned}$$

Έστω τώρα ότι το n είναι περιττός. Η (3.100), μέσω της (3.101), γίνεται

$$
\begin{aligned}
&w_\nu^{*(2)} \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1-2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}-\frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}\right)+\frac{2\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{n(n+2)} \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1-2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}+\frac{(n+1)\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{n(n+2)}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1-2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}+\frac{\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1+1\right)\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1+2\right)}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1-2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}+\frac{2\left[\frac{n+1}{2}\right]\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{4\left[\frac{n+1}{2}\right]^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1-2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]+1\right)\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}-2\left[\frac{n+1}{2}\right]\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{4\left[\frac{n+1}{2}\right]^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1-2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}-\frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{4\left[\frac{n+1}{2}\right]^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left\{1-2\left(\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}+\frac{1}{2}\frac{\cos 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\theta_\nu^{(2)}}{4\left[\frac{n+1}{2}\right]^2-1}\right)\right\}. \qquad (3.103)
\end{aligned}
$$

Τέλος, η (3.102) μαζί με την (3.103) δίνει την (3.96). Συνεχίζουμε με την απόδειξη των σχέσεων που δίνουν τα $w_0^{*(2)}$, $w_{n+1}^{*(2)}$. Λόγω της (2.5),

$$w_0^{*(2)}=\frac{\int_{-1}^{1}(1+t)U_n(t)dt}{2U_n(1)}.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια του U_n,

$$U_n(1)=U_n(\cos 0)=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

και από τον κανόνα του l' Hospital,

$$U_n(1)=\lim_{\theta\to 0}\frac{(n+1)\cos(n+1)\theta}{\cos\theta}=n+1.$$

Συνεπώς,

$$w_0^{*(2)} = \frac{1}{2(n+1)} \left(\int_{-1}^{1} U_n(t)dt + \int_{-1}^{1} tU_n(t)dt \right),$$

η οποία, μέσω της (1.26) και της (1.46), γίνεται

$$w_0^{*(2)} = \frac{1}{2(n+1)} \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{2(n+1)}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)^2}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{1}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Αντίστοιχα, για το $w_{n+1}^{*(2)}$ έχουμε, μέσω της (2.5),

$$w_{n+1}^{*(2)} = \frac{\int_{-1}^{1} (1-t)U_n(t)dt}{2U_n(-1)},$$

κι αφού, από την (1.28),

$$U_n(-1) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n (n+1),$$

$$\begin{aligned} w_{n+1}^{*(2)} &= \frac{1}{2(-1)^n(n+1)} \int_{-1}^{1} (1-t)U_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2(-1)^n(n+1)} \left(\int_{-1}^{1} U_n(t)dt - \int_{-1}^{1} tU_n(t)dt \right) \end{aligned}$$

η οποία, με τη βοήθεια των (1.26) και (1.46), δίνει

$$\begin{aligned} w_{n+1}^{*(2)} &= \frac{1}{2(-1)^n(n+1)} \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}, & n \text{ άρτιος}, \\ -\dfrac{2(n+1)}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{(-1)^n(n+1)^2}, & n \text{ άρτιος}, \\ -\dfrac{1}{(-1)^n n(n+2)}, & n \text{ περιττός} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)^2}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{1}{n(n+2)}, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \end{aligned}$$

(β) Όσον αφορά στη θετικότητα των βαρών, είναι προφανές ότι $w_0^{*(2)} = w_{n+1}^{*(2)} > 0$. Αναφορικά με τα $w_\nu^{*(2)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το n. Αν το

n είναι άρτιος, τότε η (3.96), με τη βοήθεια της (3.68), δίνει

$$\begin{aligned} w_\nu^{*(2)} &= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{n/2} \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right) \\ &> \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{4k^2-1}\right) = \frac{2}{n+1}\left[1 - 2\frac{n}{2(n+1)}\right] \\ &= \frac{2}{n+1}\frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Αν το n είναι περιττός, πάλι, μέσω της (3.96),

$$w_\nu^{*(2)} = \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{(n+1)/2}{}' \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right) > \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{(n+1)/2}{}' \frac{1}{4k^2-1}\right).$$

Τώρα, ακολουθώντας το συλλογισμό της (3.11),

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{(n+1)/2}{}' \frac{1}{4k^2-1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{(n+1)/2}{}' \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{(n+1)/2}{}' \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{(n+1)/2}{}' \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2\left(\frac{n+1}{2}-1\right)-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\frac{n+1}{2}-1}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2\left(\frac{n+1}{2}-1\right)+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\frac{n+1}{2}+1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+2)}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2n-1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}\right] \\ &= \frac{1}{4}\frac{(2n-1)(n+2)-n}{n(n+2)} = \frac{1}{4}\frac{2n^2+2n-2}{n(n+2)} = \frac{n^2+n-1}{2n(n+2)}, \end{aligned}$$

επομένως,

$$\begin{aligned} w_\nu^{*(2)} &> \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\frac{n^2+n-1}{2n(n+2)}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{n^2+n-1}{n(n+2)}\right) \\ &= \frac{2}{n+1}\frac{n(n+2)-(n^2+n-1)}{n(n+2)} = \frac{2}{n+1}\frac{n+1}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}. \end{aligned}$$

$\square$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο τύπος (3.86) είναι συμμετρικός, δηλαδή,

$$\tau_{n-\nu+1}^{*(2)} = -\tau_\nu^{*(2)}, \;\; w_{n-\nu+1}^{*(2)} = w_\nu^{*(2)}, \;\; \nu = 0, 1, \ldots, n+1,$$

όπου, $\tau_0^{*(2)} = 1$, $\tau_{n+1}^{*(2)} = -1$, και $\tau_\nu^{*(2)} = \tau_\nu^{(2)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Είναι προφανές ότι $\tau_{n+1}^{*(2)} = -\tau_0^{*(2)}$, ενώ η συμμετρία των κόμβων που είναι εσωτερικά σημεία του διαστήματος $[-1, 1]$ αποδείχτηκε κατά τη μελέτη του τύπου του Filippi (3.31) (βλέπε σελ. 59). Επίσης, από την (3.96), έχουμε ότι $w_{n+1}^{*(2)} = w_0^{*(2)}$, οπότε, μένει να δείξουμε ότι $w_{n-\nu+1}^{*(2)} = w_\nu^{*(2)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Έχουμε λοιπόν

$$w_{n-\nu+1}^{*(2)} = \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{\cos 2k\theta_{n-\nu+1}^{(2)}}{4k^2-1}\right),$$

η οποία, μέσω της (1.24), γίνεται

$$\begin{aligned}
w_{n-\nu+1}^{*(2)} &= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{\cos 2k\frac{n-\nu+1}{n+1}\pi}{4k^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{\cos 2k\left(\pi - \frac{\nu}{n+1}\pi\right)}{4k^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{\cos\left(2k\pi - 2k\frac{\nu}{n+1}\pi\right)}{4k^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{\cos 2k\frac{\nu}{n+1}\pi}{4k^2-1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}{}' \frac{\cos 2k\theta_\nu^{(2)}}{4k^2-1}\right) = w_\nu^{*(2)}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ο τύπος (3.86) συγκλίνει για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$. Πράγματι, εφόσον ο (3.86) είναι τύπος εκ παρεμβολής συγκλίνει για κάθε πολυώνυμο, ενώ η θετικότητα των βαρών του δίνει

$$\sum_{\nu=0}^{n+1}\left|w_\nu^{*(2)}\right| = \sum_{\nu=0}^{n+1} w_\nu^{*(2)} = \int_{-1}^{1} dt = 2,$$

οπότε,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n+1}\left|w_\nu^{*(2)}\right| = 2.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ικανοποιούνται και οι δυο συνθήκες του Θεωρήματος 2.2.4, μέσω του οποίου εξασφαλίζεται η σύγκλιση.

Ακολούθως, θα μελετήσουμε το σφάλμα του τύπου (3.86) για συναρτήσεις $f \in X_r$. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε μια εκτίμηση για τη $\|R_n^{*(2)}\|$, θα εξετάσουμε πρώτα το πρόσημο του $R_n^{*(2)}(t^k)$, $k \geq 0$.

Λήμμα 3.4.2. *Ο όρος του σφάλματος του τύπου των Clenshaw-Curtis (3.86), όταν $n \geq 2$, ικανοποιεί*

$$R_n^{*(2)}(t^k)\begin{cases} \geq 0, & 0 \leq k \leq k_n^{*(2)}, \\ \leq 0, & k > k_n^{*(2)}, \end{cases} \tag{3.104}$$

όπου $k_n^{*(2)} > 2[(n+1)/2]+2$ *είναι μια σταθερά.*

Για $n = 1$*, ισχύει*

$$R_1^{*(2)}(t^k) \le 0, \;\; k \ge 0. \tag{3.105}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, δεδομένου του βαθμού ακρίβειας του τύπου (3.86) ισχύει

$$R_n^{*(2)}(t^k) = 0, \;\; k = 0,1,\ldots, \begin{cases} n+1, & n \text{ άρτιος}, \\ n+2, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \tag{3.106}$$

Επιπλέον, ο τύπος (3.85) είναι συμμετρικός, άρα

$$R_n^{*(2)}(t^{2l-1}) = 0, \;\; l \ge 1. \tag{3.107}$$

Ως εκ τούτου, το $R_n^{*(2)}$ αλλάζει πρόσημο σε κάποιο μονώνυμο άρτιου βαθμού. Συνεπώς, εξετάζουμε το πρόσημο του $R_n^{*(2)}(t^{n+2})$, $n(\text{άρτιος}) \ge 2$. Εφόσον πρόκειται για πολυώνυμο βαθμού ακριβώς $n+2$ με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα, το σφάλμα του τύπου (3.86) γι' αυτό το πολυώνυμο θα είναι ίσο με το σφάλμα για τη συνάρτηση $(1/2^n)(t^2-1)U_n(t)$. Άρα,

$$R_n^{*(2)}(t^{n+2}) = R_n^{*(2)}\left(\frac{1}{2^n}(t^2-1)U_n(t)\right) = \frac{1}{2^n}R_n^{*(2)}((t^2-1)U_n(t)),$$

η οποία, μέσω της (3.92), δίνει

$$R_n^{*(2)}(t^{n+2}) = \frac{1}{2^{n-2}(n-1)(n+1)(n+3)}, \;\; n(\text{άρτιος}) \ge 2. \tag{3.108}$$

Έστω τώρα ότι $n(\text{περιττός}) \ge 3$. Θα υπολογίσουμε με τον ίδιο τρόπο το $R_n^{*(2)}(t^{n+3})$. Έχουμε

$$R_n^{*(2)}(t^{n+3}) = R_n^{*(2)}\left(t(t^2-1)\frac{1}{2^n}U_n(t)\right) = \frac{1}{2^n}R_n^{*(2)}\left(t(t^2-1)U_n(t)\right),$$

και, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.95),

$$R_n^{*(2)}(t^{n+3}) = \frac{n+1}{2^{n-2}(n-2)n(n+2)(n+4)}, \;\; n(\text{περιττός}) \ge 3. \tag{3.109}$$

Η (3.108), μαζί με την (3.109), δίνει

$$R_n^{*(2)}(t^{2[(n+1)/2]+2}) > 0, \;\; n \ge 2. \tag{3.110}$$

Τώρα, θέτοντας $f(t) = t^{2l}$ στον τύπο (3.86),

$$\int_{-1}^{1} t^{2l}dt = w_0^{*(2)} + \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{*(2)}(\tau_\nu^{(2)})^{2l} + w_{n+1}^{*(2)} + R_n^{*(2)}(t^{2l})$$

$$\Rightarrow R_n^{*(2)}(t^{2l}) = \frac{2}{2l+1} - w_0^{*(2)} - \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{*(2)}(\tau_\nu^{(2)})^{2l} - w_{n+1}^{*(2)}.$$

Παρατηρούμε ότι το $\frac{2}{2l+1}$ μειώνεται καθώς το l αυξάνεται, κι αφού τα $w_0^{*(2)} = w_{n+1}^{*(2)} > 0$ είναι ανεξάρτητα του l,

$$R_n^{*(2)}(t^{2l}) < 0, \;\; l > k_n^{*(2)}/2, \tag{3.111}$$

για κάποια σταθερά $k_n^{*(2)} > 2[(n+1)/2]+2$. Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (3.106), (3.107), (3.110) και (3.111), παίρνουμε την (3.104).

Για $n = 1$, ο τύπος (3.86) γίνεται

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = w_0^{*(2)} f(1) + w_1 f(\tau_1^{(2)}) + w_2 f(-1) + R_1^{*(2)}(f). \tag{3.112}$$

Από την (1.24), έχουμε

$$\tau_1^{(2)} = \cos\theta_1^{(2)} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

ενώ, από τις (3.96) και (3.97),

$$w_1^{*(2)} = 1 - 2\frac{1}{2}\frac{\cos 2\theta_1^{(2)}}{3} = 1 - \frac{1}{3}\cos 2\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \;\; w_0^{*(1)} = w_2^{*(1)} = \frac{1}{3},$$

και αντικαθιστώντας στην (3.112),

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{3}f(1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(-1) + R_1^{*(1)}(f).$$

Βλέπουμε ότι για $n = 1$ ο τύπος (3.86) είναι ο (απλός) τύπος του Simpson, του οποίου το σφάλμα μελετήθηκε στο Λήμμα 3.3.2 για την απόδειξη της (3.70). $\square$

Με βάση το προηγούμενο λήμμα, μπορούμε να παρουσιάσουμε τις εκτιμήσεις για τη νόρμα του $R_n^{*(2)}$.

Θεώρημα 3.4.3. *Έστω ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης των Clenshaw-Curtis (3.85). Για $n \geq 2$, έχουμε*

$$\begin{aligned} \|R_n^{*(2)}\| \leq 4r & \sum_{k=1}^{[k_n^{*(2)}/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}} + \frac{4}{r^{k_n^{*(2)}}(r^2-1)} - r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) \\ & - \frac{4r}{U_n(r)} \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1} \\ & - \begin{cases} \dfrac{2r^2}{(n+1)(r^2-1)U_n(r)}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{2(n+1)r}{n(n+2)(r^2-1)U_n(r)}, & n \text{ περιττός}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.113}$$

Αν $n = 1$,

$$\|R_1^{*(2)}\| = \frac{2(3r^2-2)}{3(r^2-1)} - r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right). \tag{3.114}$$

Απόδειξη. Εφόσον ο τύπος (3.86) είναι συμμετρικός, έχει όλα τα βάρη θετικά και το σφάλμα του $R_n^{*(2)}$ πληροί την (3.104) όταν $n \geq 2$, από το (β) του Πορίσματος 2.3.3,

έχουμε

$$\|R_n^{*(2)}\| \leq \frac{r}{(r^2-1)U_n(r)} \int_{-1}^{1} \frac{(t^2-1)U_n(t)}{r-t}dt + \frac{4}{r^{k_n^{*(2)}}(r^2-1)}$$
$$- 2r\left\{\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - 2\sum_{k=1}^{[k_n^{*(2)}/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}}\right\},$$

και αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος από την (1.41),

$$\|R_n^{*(2)}\| \leq \frac{4}{r^{k_n^{*(2)}}(r^2-1)} - 2r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + 4r\sum_{k=1}^{[k_n^{*(2)}/2]+1} \frac{1}{(2k-1)r^{2k-1}}$$
$$+r\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right) - \frac{4r}{U_n(r)}\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{U_{n-2k+1}(r)}{2k-1}$$
$$-\begin{cases} \dfrac{2r^2}{(n+1)(r^2-1)U_n(r)}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{2(n+1)r}{n(n+2)(r^2-1)U_n(r)}, & n \text{ περιττός}, \end{cases}$$

σχέση ισοδύναμη με την (3.113).

Τώρα, αφού, για $n = 1$, ο τύπος (3.86) είναι ο τύπος του Simpson, η εκτίμηση για τη $\|R_1^{*(2)}\|$ έχει αποδειχτεί στην (3.82). □

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικά Παραδείγματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προχωρήσουμε σε κάποιους υπολογισμούς προκειμένου να διαπιστώσουμε την πρακτικά αξία των τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας το προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab, θα υπολογίσουμε καταρχήν το σφάλμα των τύπων (3.1), (3.31), (3.53) και (3.86) για μια σειρά από συναρτήσεις. Στη συνέχεια, θα προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης που παρουσιάζει μια μονότονη ανωμαλία σε ένα από τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης, ενώ τέλος θα βρούμε φράγματα για το σφάλμα του τύπου (3.31) όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε είναι αναλυτική. Οι υπολογισμοί έγιναν σε έναν υπολογιστή με επεξεργαστή Intel i5 και διπλή ακρίβεια (ακρίβεια μηχανής 2.22×10^{-16}). Όταν κάποια τιμή είναι κοντά στην ακρίβεια μηχανής σημειώνουμε "α.μ." αντί για την τιμή αυτή.

Παράδειγμα 1. Θα προσεγγίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ με τη βοήθεια των τύπων (3.1), (3.31), (3.53) και (3.86) όταν η $f(t)$ είναι καθεμιά από τις συναρτήσεις t^{20}, e^t, e^{-t^2}, $1/(1+16t^2)$, e^{-1/t^2}, $|t|^3$ ή $|t+0.5|^{1/2}$. Η πρώτη συνάρτηση είναι ένα μονώνυμο, η δεύτερη και η τρίτη είναι αναλυτικές σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, η τέταρτη είναι αναλυτική σε μια περιοχή του διαστήματος $[-1,1]$, η πέμπτη είναι C^∞, η έκτη είναι C^2, ενώ η τελευταία είναι συνεχής. Όλες οι προηγούμενες χρησιμοποιούνται στην [20] από τον Trefethen προκειμένου να συγκρίνει τον τύπο των Clenshaw-Curtis με τον τύπο του Gauss με n σημεία (βλέπε [2, σελ. 269]),

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^L f(\tau_\nu^L) + R_n^L(f), \tag{4.1}$$

όπου τ_ν^L είναι οι ρίζες του πολυωνύμου του Legendre βαθμού n. Ακολουθώντας το παράδειγμά του, θα προσθέσουμε τον (4.1) στους τύπους που αναφέραμε προηγουμένως. Για κάθε συνάρτηση κατασκευάζουμε έναν πίνακα όπου δίνεται το σφάλμα καθενός από τους τύπους (3.1), (3.31), (3.53), (3.86) ή (4.1) καθώς το πλήθος των κόμβων αυξάνεται. (Οι αριθμοί μέσα στις παρενθέσεις δηλώνουν δυνάμεις του δέκα.)

Πίνακας 4.1: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} t^{20} dt$

n	Τύπος (3.1)	Τύπος (3.31)	Τύπος (3.53)	Τύπος (3.86)	Τύπος (4.1)
5	2.779(-2)	6.020(-2)	2.227(-2)	9.491(-3)	2.918(-2)
10	1.240(-3)	3.657(-3)	1.647(-4)	1.281(-4)	2.925(-6)
15	7.377(-6)	4.565(-5)	9.286(-8)	1.722(-7)	α.μ.
20	9.560(-9)	9.083(-8)	α.μ.	α.μ.	α.μ.
40	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.2: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} e^{t} dt$

n	Τύπος (3.1)	Τύπος (3.31)	Τύπος (3.53)	Τύπος (3.86)	Τύπος (4.1)
5	8.705(-6)	1.544(-5)	9.999(-8)	2.059(-8)	8.248(-10)
10	1.117(-11)	5.015(-11)	α.μ.	α.μ.	α.μ.
15	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.
20	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.
40	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.3: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} e^{-t^2} dt$

n	Τύπος (3.1)	Τύπος (3.31)	Τύπος (3.53)	Τύπος (3.86)	Τύπος (4.1)
5	4.515(-4)	1.100(-3)	1.234(-4)	1.302(-5)	1.566(-5)
10	1.835(-7)	8.668(-7)	1.849(-9)	2.283(-9)	5.040(-13)
15	8.116(-12)	5.796(-11)	2.465(-14)	4.951(-14)	α.μ.
20	α.μ.	1.501(-14)	α.μ.	α.μ.	α.μ.
40	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.4: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+16t^2} dt$

n	Τύπος (3.1)	Τύπος (3.31)	Τύπος (3.53)	Τύπος (3.86)	Τύπος (4.1)
5	1.331(-1)	1.227(-1)	1.473(-1)	8.302(-2)	1.092(-1)
10	1.124(-2)	5.336(-3)	1.104(-2)	6.779(-3)	8.596(-3)
15	1.040(-3)	5.813(-4)	9.354(-4)	5.801(-4)	7.294(-4)
20	7.479(-5)	1.117(-4)	7.897(-5)	4.784(-5)	6.143(-5)
40	3.402(-9)	2.342(-7)	3.991(-9)	2.158(-9)	3.091(-9)
80	9.282(-14)	5.900(-12)	α.μ.	α.μ.	α.μ.
160	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.5: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} e^{-1/t^2} dt$

n	Τύπος (3.1)	Τύπος (3.31)	Τύπος (3.53)	Τύπος (3.86)	Τύπος (4.1)
5	8.911(-3)	5.208(-4)	5.745(-3)	6.490(-3)	7.519(-3)
10	5.267(-4)	1.976(-4)	5.259(-4)	1.131(-4)	2.949(-4)
15	2.361(-5)	2.556(-5)	2.477(-5)	6.712(-6)	6.002(-6)
20	1.322(-6)	5.135(-6)	1.765(-6)	1.435(-6)	1.683(-7)
40	5.034(-9)	2.791(-8)	5.932(-9)	3.824(-9)	4.935(-9)
80	3.417(-14)	8.741(-12)	6.775(-14)	7.869(-14)	7.769(-14)
160	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.6: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} |t|^3 dt$

n	Τύπος (3.1)	Τύπος (3.31)	Τύπος (3.53)	Τύπος (3.86)	Τύπος (4.1)
5	2.117(-3)	4.145(-3)	3.365(-3)	1.343(-3)	2.060(-3)
10	1.560(-4)	6.088(-5)	1.495(-4)	1.019(-4)	1.220(-4)
15	3.410(-5)	9.909(-6)	3.272(-5)	2.535(-5)	2.863(-5)
20	8.948(-6)	8.132(-6)	8.999(-6)	7.388(-6)	8.134(-6)
40	5.563(-7)	5.172(-7)	5.567(-7)	5.043(-7)	5.295(-7)
100	1.421(-8)	1.3720(-8)	1.421(-8)	1.366(-8)	1.393(-8)
200	8.879(-10)	8.713(-10)	8.880(-10)	8.704(-10)	8.791(-10)
500	2.273(-11)	2.255(-11)	2.273(-11)	2.255(-11)	2.264(-11)

Πίνακας 4.7: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} |t+0.5|^{1/2} dt$

n	Τύπος (3.1)	Τύπος (3.31)	Τύπος (3.53)	Τύπος (3.86)	Τύπος (4.1)
5	8.115(-3)	1.000(-1)	2.522(-3)	1.295(-1)	4.461(-2)
10	5.058(-3)	1.048(-2)	4.903(-3)	1.014(-2)	4.836(-3)
15	9.436(-3)	5.950(-3)	4.931(-3)	6.454(-4)	8.494(-3)
20	1.062(-3)	2.002(-2)	1.083(-3)	1.939(-2)	6.308(-3)
40	4.960(-4)	1.497(-3)	4.945(-4)	1.476(-3)	7.218(-4)
100	1.194(-4)	3.882(-4)	1.193(-4)	3.857(-4)	1.888(-4)
200	4.015(-5)	6.569(-4)	4.016(-5)	6.548(-4)	2.079(-4)
500	1.026(-5)	1.666(-4)	1.026(-5)	1.664(-4)	5.274(-5)

Για το μονώνυμο $f(t) = t^{20}$, ο τύπος του Gauss είναι πολύ πιο αποτελεσματικός από τους τύπους των Pólya, Filippi, Basu και Clenshaw-Curtis: Τουλάχιστον διπλάσια αποτελεσματικός για $n = 15$ και λιγότερο για $n = 10$. Για $n \geq 20$, οι τύποι των Basu, Clenshaw-Curtis και Gauss είναι απολύτως ακριβείς. Για τις συναρτήσεις $f(t) = e^t$ και $f(t) = e^{-t^2}$ που είναι αναλυτικές σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, ο τύπος του Gauss είναι πάλι πιο αποτελεσματικός από τους τύπους των Basu και Clenshaw-Curtis, αλλά όχι στον ίδιο βαθμό όπως για το μονώνυμο $f(t) = t^{20}$. Για τη συνάρτηση $f(t) = 1/(1 + 16t^2)$ που είναι αναλυτική σε μία περιοχή του $[-1, 1]$ (παρουσιάζει πόλους στα σημεία $\pm i/4$), τη συνάρτηση $f(t) = e^{-1/t^2}$ η οποία είναι C^∞, τη συνάρτηση $f(t) = |t|^3$ που είναι C^2 και τη συνάρτηση $f(t) = |t + 0.5|^{1/2}$ η οποία είναι απλά συνεχής, ο τύπος του Gauss είναι περίπου το ίδιο αποτελεσματικός με τους τύπους των Pólya, Filippi, Basu και Clenshaw-Curtis. Η μελέτη και εξήγηση του φαινομένου έχει γίνει μετά από λεπτομερειακή και αρκετά τεχνική ανάλυση από τον Trefethen στην [20]. Επιπλέον, η τάξη ακρίβειας του σφάλματος μειώνεται για τις συναρτήσεις $f(t) = 1/(1+16t^2)$, e^{-1/t^2}, $|t|^3$ και $|t+0.5|^{1/2}$. Τέλος, οι μικρές διαφορές του σφάλματος, που παρουσιάζονται για τύπους με τον ίδιο βαθμό ακριβείας, οφείλονται στην κατανομή των κόμβων του κάθε τύπου στο διάστημα $[-1, 1]$ και στη μορφή που έχει η κάθε μία από τις συναρτήσεις που εξετάζουμε. Συνεπώς, ο βαθμός αποτελεσματικότητας των τύπων των Pólya, Filippi, Basu και Clenshaw-Curtis αλλά και του τύπου του Gauss μειώνεται για συναρτήσεις με περιορισμένη ομαλότητα.

Παράδειγμα 2. Θα προσεγγίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 t^a \ln(e/t)dt = \frac{a+2}{(a+1)^2}, \quad a > -1, \tag{4.2}$$

με τη βοήθεια των τύπων του Fejér πρώτου και δευτέρου είδους. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε παρουσιάζει μια μονότονη ανωμαλία στο 0. Επίσης, το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι το $[-1, 1]$, οπότε, οι τύποι που αναφέραμε πρέπει να μετασχηματιστούν κατάλληλα. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = 2x - 1$,

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)dt,$$

επομένως, ο τύπος του Pólya (3.1) στο διάστημα $[0, 1]$ γίνεται

$$\int_0^1 f(x)dx \doteq \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(1)} f(x_\nu^{(1)}), \quad x_\nu^{(1)} = \frac{1}{2}(1+\tau_\nu^{(1)}), \tag{4.3}$$

ενώ, ο τύπος του Filippi (3.31) παίρνει τη μορφή

$$\int_0^1 f(x)dx \doteq \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(2)} f(x_\nu^{(2)}), \quad x_\nu^{(2)} = \frac{1}{2}(1+\tau_\nu^{(2)}), \tag{4.4}$$

όπου τα $w_\nu^{(1)}$, $\tau_\nu^{(1)}$, $w_\nu^{(2)}$, $\tau_\nu^{(2)}$ ορίστηκαν στις (3.2), (1.15), (3.32) ή εναλλακτικά (3.33) και (1.24) αντίστοιχα. Τους τύπους (4.3) και (4.4) θα τους συγκρίνουμε με τον τύπο του Gauss ως προς τη συνάρτηση βάρους του Chebyshev τόσο του πρώτου όσο και του δευτέρου είδους (βλέπε [4, σελ. 111]),

$$\int_0^1 f(x)dx \doteq \frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^n [x_\nu^{(1)}(1-x_\nu^{(1)})]^{1/2} f(x_\nu^{(1)}), \quad x_\nu^{(1)} = \frac{1}{2}(1+\tau_\nu^{(1)}), \tag{4.5}$$

και

$$\int_0^1 f(x)dx \doteq \frac{\pi}{n+1}\sum_{\nu=1}^n [x_\nu^{(2)}(1-x_\nu^{(2)})]^{1/2} f(x_\nu^{(2)}), \quad x_\nu^{(2)} = \frac{1}{2}(1+\tau_\nu^{(2)}). \tag{4.6}$$

Τα σφάλματα για τις διάφορες τιμές των a και n (το πλήθος των σημείων), σε τάξεις του 10^{-6}, φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 4.8: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (4.2)

a	n	Τύπος (4.3)	Τύπος (4.4)	Τύπος (4.5)	Τύπος (4.6)
-1/2	32	161984	425817	67854	512813
	64	88483	241027	33975	293023
	128	47980	134126	17000	164315
	256	25858	73726	8503	90897
	512	13863	40152	4252	49768
	1024	7398	21708	2126	27030
0	32	55	1115	2131	4555
	64	14	287	602	1306
	128	3.4	73	168	365
	256	0.86	18	46	101
	512	0.21	5	13	27
	1024	0.054	1.15	3	7
1/2	32	12	64	212	391
	64	1.8	9.8	52	99
	128	0.26	1.4	13	25
	256	0.037	0.2	3	6
	512	0.0052	0.03	0.8	1.6
	1024	0.00071	0.004	0.2	0.4
1	32	0.24	0.87	200	377
	64	0.015	0.058	50	97
	128	0.00093	0.0037	13	25

Παρατηρώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα στον πίνακα 4.8, συμπεραίνουμε ότι οι τύποι (4.3) και (4.4) είναι πιο ακριβείς σχεδόν για όλες τις τιμές του a. Μάλιστα, ο (4.3) υπερτερεί του (4.4). Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση που $a = -\frac{1}{2}$, κατά την οποία ο τύπος (4.5) δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα. Επίσης, όταν $a < 0$, όλοι οι τύποι συγκλίνουν πολύ αργά πιθανώς λόγω της διπλής ανωμαλίας που παρουσιάζει στο 0 η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε. Ωστόσο, η σύγκλιση επιτυγχάνεται πιο γρήγορα καθώς το a αυξάνεται από το 0 στο 1. Γι'αυτές τις τιμές του a όλοι οι τύποι, αλλά πρωτίστως ο (4.3), είναι ιδιαιτέρως αποτελεσματικοί.

Παράδειγμα 3. Σ' αυτό το παράδειγμα θα θεωρήσουμε κάποιες αναλυτικές συναρτήσεις, των οποίων το ολοκλήρωμα θα προσεγγίσουμε με τον τύπο του Fillippi (3.31). Είδαμε ότι αν ολοκληρώνουμε μια συνάρτηση $f \in X_r$, (όπως αυτός ορίστηκε στη σελ.30) τότε οδηγούμαστε σε μια εκτίμηση του σφάλματος του τύπου (3.31) που εξαρτάται από την ημινόρμα $|f|_r$ (βλέπε (2.14)). Ωστόσο, δεδομένου ότι (βλέπε σελ. 32)

$$|f|_r \leq \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

έχουμε

$$|R_n^{(2)}(f)| \leq \|R_n^{(2)}\| \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

και θεωρώντας το δεξί μέλος της ανισότητας ως συνάρτηση του r, το φράγμα μπορεί να βελτιστοποιηθεί

$$|R_n^{(2)}(f)| \leq \inf_{1<r\leq R} \left(\|R_n^{(2)}\| \max_{|z|=r} |f(z)| \right).$$

Για τις συναρτήσεις που ακολουθούν, θα βασιστούμε στην τελευταία εκτίμηση. Ας ξεκινήσουμε με το

$$\int_{-1}^{1} e^{\omega t} dt = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{\omega}, \;\; \omega > 0. \tag{4.7}$$

Η συνάρτηση $f(z) = e^{\omega z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k z^k}{k!}$ είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$, οπότε, $f \in X_\infty$ (βλέπε [15, σελ. 1228]). Εφόσον

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = e^{\omega r},$$

παίρνουμε

$$|R_n^{(2)}(f)| \leq \inf_{1<r<\infty} \left(\|R_n^{(2)}\| e^{\omega r} \right). \tag{4.8}$$

Τα αποτελέσματά μας συγκεντρώνονται στον πίνακα που ακολουθεί. (Οι αριθμοί μέσα στις παρενθέσεις δηλώνουν δυνάμεις του δέκα). Η τιμή του r για την οποία επιτυγχάνεται το infimum στο φράγμα (4.8) βρίσκεται στη στήλη με τίτλο $r_{\beta\varepsilon\lambda}$, η οποία είναι τοποθετημένη ακριβώς πριν από τη στήλη με το αντίστοιχο φράγμα.

Πίνακας 4.9: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (4.7) με τον τύπο (3.31).

ω	n	$r_{\beta\varepsilon\lambda}$	Φράγμα (4.8)	Σφάλμα
0.5	5	12.057	1.469(-6)	2.347(-7)
	10	13.549	1.943(-13)	α.μ.
1.0	5	6.114	9.810(-5)	1.544(-5)
	10	10.519	3.451(-10)	5.015(-11)
2.0	5	3.220	7.424(-3)	1.103(-3)
	10	5.110	4.558(-7)	5.529(-8)
	15	4.089	7.911(-13)	α.μ.
4.0	5	1.889	8.818(-1)	1.084(-1)
	10	2.743	6.785(-4)	7.568(-5)
	15	3.880	2.444(-9)	9.936(-10)
	20	2.619	7.884(-12)	α.μ.
8.0	5	1.329	4.111(+2)	3.266(+1)
	10	1.668	2.668(0)	2.309(-1)
	15	2.261	1.534(-3)	1.292(-4)
	20	2.679	4.406(-7)	9.407(-8)

Με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου πίνακα, παρατηρούμε ότι το φράγμα (4.8) είναι πολύ κοντά στην τιμή του σφάλματος του τύπου (3.31). Μάλιστα, τα αποτελέσματα παραμένουν ικανοποιητικά ακόμα και για μεγάλες τιμές του ω, οπότε δεν φαίνεται να επηρεάζονται από αυτό.

Συνεχίζουμε με το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos t}{t^2+\omega^2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[1+\frac{\omega^2}{2!}+\ldots+\frac{\omega^{2k}}{(2k)!}\right]\frac{1}{(2k+1)\omega^{2k+2}},\ \ \omega > 1. \quad (4.9)$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+\omega^2}$ είναι ολόμορφη στον C_ω, οπότε $f \in X_\omega$. Όπως κάναμε και στο πρηγούμενο παράδειγμα, θα προσεγγίσουμε την ημινόρμα $|f|_r$ της συνάρτησης f με το $\max_{|z|=r}|f(z)|$. Δεδομένου ότι (βλέπε [13, σελ. 379])

$$\max_{|z|=r}|f(z)| = \frac{\cosh r}{\omega^2 - r^2},\ \ 1 < r < \omega,$$

η εκτίμηση για το σφάλμα του τύπου (3.31) παίρνει τη μορφή

$$|R_n^{(2)}(f)| \le \inf_{1<r<\omega}\left(\|R_n^{(2)}\|\frac{\cosh r}{\omega^2-r^2}\right). \quad (4.10)$$

Τα φράγματα που προκύπτουν από την (4.10) μαζί με το σφάλμα του τύπου (3.31) για το ολοκλήρωμα (4.9) παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 4.10: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (4.9) με τον τύπο (3.31).

ω	n	$r_{\beta\varepsilon\lambda}$	Φράγμα (4.10)	Σφάλμα
2.0	5	1.742	2.630(-3)	9.860(-5)
	10	1.837	6.319(-6)	7.737(-8)
	15	1.894	4.759(-9)	1.961(-11)
	20	1.916	1.256(-11)	α.μ.
3.0	5	2.482	1.400(-4)	1.292(-5)
	10	2.694	6.058(-8)	2.375(-9)
	15	2.815	3.486(-12)	α.μ.
4.0	5	3.158	2.627(-5)	3.624(-6)
	10	3.530	3.740(-9)	2.364(-10)

Και στο παράδειγμα αυτό, βλέπουμε ότι το φράγμα (4.10) είναι κοντά στην τιμή του σφάλματος του τύπου (3.31). Μάλιστα, καθώς το ω αυξάνεται, τα φράγματα βελτιώνονται ακόμα και για μικρές τιμές του n, το οποίο, προφανώς, οφείλεται στη βελτίωση της τιμής του $\max_{|z|=r}|f(z)|$.

Έστω τώρα το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{a^2+t^2}dt = 2 - 2a\arctan(1/a),\ \ a > 1. \quad (4.11)$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2}{a^2+z^2}$ είναι ολόμορφη στον $C_a = \{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$, οπότε, η $f \in X_a$ (βλέπε [19]), με

$$\max_{|z|=r}|f(z)| = \frac{r^2}{a^2-r^2},\ \ 1 < r < a,$$

επομένως,

$$|R_n^{(2)}(f)| \leq \inf_{1<r<a} \left(\|R_n^{(2)}\| \frac{r^2}{a^2 - r^2} \right). \tag{4.12}$$

Τα φράγματα που προκύπτουν από την (4.12) μαζί με το σφάλμα του τύπου (3.31) για το ολοκλήρωμα (4.11) παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 4.11: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (4.11) με τον τύπο (3.31).

a	n	$r_{\beta\varepsilon\lambda}$	Φράγμα (4.12)	Σφάλμα
2.0	5	1.731	2.710(-3)	1.051(-4)
	10	1.834	6.624(-6)	8.226(-8)
	15	1.893	5.023(-9)	2.085(-11)
	20	1.913	1.330(-11)	α.μ.
4.0	5	3.318	2.156(-5)	2.306(-6)
	10	3.601	2.686(-9)	1.387(-10)
8.0	5	6.558	2.897(-7)	3.958(-8)
	10	7.152	2.147(-12)	1.572(-13)

Και σε αυτό το παράδειγμα, το φράγμα (4.12) δίνει πολύ ικανοποιητικές τιμές, αφού σε καμία περίπτωση δεν υπερβαίνει την τιμή του σφάλματος του τύπου (3.31) περισσότερο από δυο τάξεις μεγέθους.

Τελειώνουμε το Παράδειγμα 3 με το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} e^{-\omega t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \Phi(\sqrt{\omega}), \quad \omega > 0, \tag{4.13}$$

όπου $\Phi(t)$ είναι το λεγόμενο ολοκλήρωμα πιθανότητας, το οποίο ορίζεται μέσω της δυναμοσειράς

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)k!}.$$

Η συνάρτηση $f(z) = e^{-\omega z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \omega^k z^{2k}}{k!}$ είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$, οπότε, $f \in X_\infty$ (βλέπε [13, σελ. 378]), κι αφού

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = e^{\omega r^2},$$

$$|R_n^{(2)}(f)| \leq \inf_{1<r<\infty} \left(\|R_n^{(2)}\| e^{\omega r^2} \right). \tag{4.14}$$

Τα φράγματα που προκύπτουν από την (4.14) μαζί με το σφάλμα του τύπου (3.31) για το ολοκλήρωμα (4.13) παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 4.12: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (4.13) με τον τύπο (3.31).

ω	n	$r_{\beta\epsilon\lambda}$	Φράγμα (4.14)	Σφάλμα
0.5	5	2.591	1.416(-3)	1.732(-4)
	10	3.265	3.662(-7)	3.530(-8)
	15	3.940	1.042(-12)	2.893(-13)
1.0	5	1.932	1.627(-2)	1.100(-3)
	10	2.382	1.636(-5)	8.668(-7)
	15	2.924	1.120(-8)	5.796(-11)
	20	2.619	2.119(-13)	α.μ.
2.0	5	1.502	2.742(-1)	5.600(-2)
	10	1.786	1.034(-3)	1.657(-5)
	15	2.143	5.541(-7)	9.182(-9)
	20	2.619	2.020(-10)	9.210(-12)
	25	1.991	6.170(-13)	α.μ.
4.0	5	1.238	10.226(0)	2.098(-2)
	10	1.407	1.359(-1)	2.007(-4)
	15	1.619	4.784(-4)	9.381(-7)
	20	1.767	2.291(-6)	3.533(-9)
	25	1.881	6.263(-10)	3.594(-12)
	30	1.677	1.699(-11)	α.μ.

Βλεπουμε ότι για μικρές τιμές του ω τα φράγματα (4.14) είναι αρκετά ικανοποιητικά. Αντίθετα, τα φράγματα χειροτερεύουν καθώς το ω αυξάνει. Αυτό οφείλεται, βασικά, στην τιμή του $\max_{|z|=r}|f(z)|$, που μεγαλώνει καθώς μεγαλώνει το ω. Επίσης, όσο πιο κοντά είναι το $r_{\beta\epsilon\lambda}$ στο 1, τόσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του $\|R_n^{(2)}\|$.

Βιβλιογραφία

[1] Σ.Ε. Νοτάρης, *Σημειώσεις στη Θεωρία Προσέγγισης,* Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α, 2001.

[2] Β.Α. Δουγαλής και Γ.Δ. Ακρίβης, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2009.

[3] P.J. Davis, *Errors of numerical approximation for analytic functions,* J. Rational Mech. Anal. 2, 303-313, 1953.

[4] P.J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration,* Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, 1984.

[5] H.V. Smith, *Numerical Methods of Integration,* Chartwell-Bratt, 1993.

[6] L. Fejér, *Mechanische quadraturen mit positiven cotesschen zahlen*, Math. Z. 37, 287-309, 1933.

[7] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation,* Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, 2004.

[8] W. Gautschi, *Numerical quadrature in the presence of a singularity,* SIAM J. Numer. Anal. 4, 357-362, 1967.

[9] I.S. Grashteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products,* Academic Press, San Diego, 4th ed., 1980.

[10] G. Hämmerlin, *Fehlerabschatzung bei numerischer Integration nach Gauss,* in Methoden und Verfahren der mathematischen Physik 6, 153-163, 1972.

[11] V.I. Krylov and A.H. Stroud, *Approximate Calculation of Integrals,* Dover Publications, 2006.

[12] J.C. Mason and D.C. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, CRC Press, 2002.

[13] S.E. Notaris, *Error bounds for Gauss-Kronrod quadrature formulae of analytic functions,* Numer. Math. 64, 371-380, 1993.

[14] S.E. Notaris, *Interpolatory quadrature formulae with Chebyshev abscissae,* J. Comput. Appl. Math. 133, 507-517, 2001.

[15] S.E. Notaris, *Integral formulas for Chebyshev polynomials and the error term of interpolatory quadrature formulae for analytic functions,* Math. Comp. 75, 1217-1231, 2006.

[16] S.E. Notaris, *The error norm of quadrature formulae,* Numer. Algorithms 60, 555-578, 2012.

[17] S.E. Notaris, *Product integration rules for Chebyshev weight functions with Chebyshev abscissae,* J. Comput. Appl. Math. 257, 180-194, 2014.

[18] S.E. Notaris, *The error norm of Clenshaw-Curtis and related quadrature formulae,* J. Numer. Math. 56, 705-728, 2016.

[19] S.E. Notaris, *On a corrected Fejér quadrature formula of the second kind,* Numer. Math. 133, 279-302, 2016.

[20] L.N. Trefethen, *Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis?* SIAM Rev. 50, 67-87, 2008.

[21] P. Rabinowitz, *Gaussian integration in the presence of a singularity,* SIAM J. Numer. Anal. 4, 191-201, 1967.

[22] P. Rabinowitz, *On the convergence of closed interpolatory integration rules based on the zeros of Gegenbauer polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 17, 43-46, 1987.

[23] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Colloquium publications 23, 4th Ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1975.

[24] D. Jackson, *Über eine trigonometrische summe*, Rend. Circ. Mat. Palermo 32, 287-309, 1911.