



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Φυσικής

*Μαγνητικοί πύργοι σε αστροφυσικούς  
δίσκους προσαύξησης*

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

**Γιουτζίν Ζουλέκου**

Επιβλέπων: Νεκτάριος Βλαχάκης  
Αναπληρωτής καθηγητής στο τμήμα φυσικής  
Τομέας αστροφυσικής, αστρονομίας και μηχανικής  
Αθήνα, Ιούνιος 2016

## Ευχαριστίες

Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα μου στην διπλωματική κύριο Νεκτάριο Βλαχάκη για την απεριόριστη βοήθεια και τις πολύωρες συζητήσεις μας αυτά τα δύο χρόνια καθώς και για την επιμονή και υπομονή του σε διάφορα θέματα που μας παρουσιάστηκαν κατά καιρούς. Χωρίς την βοήθεια του δεν θα ήταν δυνατή η εκπόνηση της διπλωματικής.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Δρ. Κώστα Σαπουντζή για τις πολύτιμες συμβουλές του σε διάφορα προβλήματα που μου παρουσιάστηκαν κυριώς με τις προσομοιώσεις στον κώδικα Pluto αλλά και τις εύστοχες παρατηρήσεις του που συνέβαλαν στην βελτίωση της εργασίας.

Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους παιδικούς μου φίλους Αλέξανδρο Ζέρβα, Παναγιώτη Κάλπενο και Δημοσθένη Γράφα που μπορεί να μην μπορούσαν να με βοηθήσουν επιστημονικά αλλά με στήριξαν ψυχολογικά αυτά τα δύο χρόνια. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους συμφοιτητές μου Στέλλα Μπουλά, Δημήτρη Κάντζα, Γεωργία Λουκαΐδου καθώς και όλους τους μεταπτυχιακούς συμφοιτητές μου για αυτά τα δύο ωραία χρόνια.

Φυσικά δεν θα μπορούσα να ξεχάσω να ευχαριστήσω και όλους τους καθηγητές του τομέα αστροφυσικής όπου με τις συμβουλές τους με βοήθησαν να γίνομαι συνεχώς καλύτερος φοιτητής ολά αυτά τα χρόνια στον τομέα, όπως και ένα μεγάλο ευχαριστώ πρέπει να πω στην γραμματέα του τομέα Σοφία Ζαρμπούτη όπου η βοήθεια της ήταν πολύτιμη σε διάφορα θέματα που μου παρουσιάστηκαν.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω και την οικογενειά μου για την συνέχη στήριξη όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου και με βοήθησαν να σπουδάσω αυτό που πάντα ηθέλα.

*Αθήνα, Ιούνιος 2016*

## Περίληψη

Ο σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη της δημιουργίας και επιτάχυνσης αστροφυσικών πίδακων πλάσματος. Ειδικότερα, μελετώνται οι μαγνητικοί πύργοι σε αστροφυσικούς δίσκους προσαύξησης, οι οποίοι δημιουργούνται όταν λόγω της διαφορικής περιστροφής στο δίσκο αυξάνεται το μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική πίεση εκτοξεύει το πλάσμα έξω από το δίσκο. Οι εκροές αυτές εστιάζονται μέσω της πίεσης από το περιβάλλον. Αυτού του είδους οι πίδακες έχουν προταθεί από τον Lynden-Bell και το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι περιέχουν αντίθετης πολικότητας μαγνητικά πεδία τα οποία συνδέονται με τον δίσκο.

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος χρησιμοποιείται η πλήρης μορφή του μοντέλου του Lynden-Bell όπου ο πίδακας θεωρείται ότι είναι μια αλληλουχία στατικών δομών και ότι μέσα στον πίδακα κυριαρχούν τα μαγνητικά πεδία, δηλαδή ισχύει η προσέγγιση της μηδενικής μαγνητικής δύναμης (force-free). Μέσα από την διατήρηση της ενέργειας και κάποιων προσεγγίσεων για τα μαγνητικά πεδία βρίσκεται πως αλλάζει με τον χρόνο το σχήμα του πίδακα. Επίσης παρουσιάζονται κάποιες αναλυτικές λύσεις που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης ορμής. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας με την βοήθεια του κώδικα PLUTO προσομοιώνονται μη σχετικιστικοί μαγνητικοί πύργοι για διάφορες τιμές του λόγου πυκνοτήτων πίδακα-περιβάλλοντος και της αρχικής ταχύτητας.

Λέξεις Κλειδιά: Lynden-Bell, Πίδακες, Force-Free, PLUTO, Dunces's Cap.

## Abstract

The purpose of this project is to study the driving and acceleration of astrophysical jets. We study in particular, magnetic towers in accretion disks, which are formed when from a differential rotating disk the magnetic pressure increases and as a result plasma is launched outside the disk. These outflows are collimated through the environmental pressure. Lynden-Bell studied this kind of jet whose main characteristic is the opposite polarity of the magnetic field. The project has two parts.

In the first part we use Lynden-Bell's model so we consider a sequence of static configurations adopting the force-free approximation. Using energy conservation and appropriate approximations on the magnetic fields we find how the shape of the jet changes with time. In the second part we use the PLUTO code to numerically simulate nonrelativistic magnetic towers for different values of the jet-environment density ratio and the initial velocity of the jet.

**Key words:** Lynden-Bell, Jets, Force-Free, PLUTO, Duncce's Cap.

# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	5
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>7</b>
1.1 Ιστορική ανασκόπηση . . . . .	7
1.2 Παρατηρήσεις πιδάκων . . . . .	12
1.2.1 Πίδακες από YSO . . . . .	12
1.2.2 Πίδακες από AGN . . . . .	13
1.3 Μοντέλα πιδάκων . . . . .	16
1.4 Επίλογος . . . . .	17
<b>2 Θεωρήματα μαγνητοστατικής</b>	<b>19</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	19
2.2 Θεωρήματα μαγνητοστατικής . . . . .	19
2.3 Πρόχειρες εκτιμήσεις για τα πεδία . . . . .	23
<b>3 Μοντέλο μηδενικής δύναμης (<i>Force – Free</i>)</b>	<b>27</b>
3.1 Εισαγωγή . . . . .	27
3.2 Βασικές εξισώσεις . . . . .	27
3.3 Λύση της <i>Grad – Shafranov</i> για $\kappa$ =σταθερό . . . . .	30
<b>4 Μοντέλο δίσκου που περιστρέφεται τοπικά σαν στερεό σώμα</b>	<b>32</b>
4.1 Εισαγωγή . . . . .	32
4.2 Περιστροφή δίσκου σαν στερεό σώμα . . . . .	32
4.3 Αποτελέσματα-Συμπεράσματα . . . . .	39
<b>5 Διαφορική περιστροφή δίσκου</b>	<b>42</b>
5.1 Εισαγωγή . . . . .	42
5.2 Διαφορική περιστροφή δίσκου . . . . .	42
5.3 Παραδείγματα . . . . .	48
5.3.1 Κεντρικό δίπολο . . . . .	48
5.3.2 Νόμος δύναμης . . . . .	50
5.4 Μαγνητικά πεδία μέσα στον πίδακα . . . . .	52
5.4.1 Σταθερή πίεση . . . . .	54
5.4.2 Πίεση που ελαττώνεται με το ύψος . . . . .	56
5.5 Δυναμική πίεση <i>RAM</i> . . . . .	56
<b>6 Αναλυτικές λύσεις της <i>Grad – Shafranov</i></b>	<b>59</b>
6.1 Εισαγωγή . . . . .	59
6.2 Λύση για $\beta = C_1 P$ . . . . .	59

6.3	Λύση για $\beta = C_1 P^{1/2}$	64
<b>7</b>	<b>Κώδικας <i>PLUTO</i></b>	<b>67</b>
7.1	Εισαγωγή	67
7.2	Παρουσίαση κώδικα	67
7.3	Εξισώσεις του <i>PLUTO</i>	71
7.3.1	HD module	71
7.3.2	MHD module	71
7.3.3	RHD module	72
7.3.4	RMHD module	73
<b>8</b>	<b>Προσομοίωση πρώτη για <math>\rho_j = 10, \rho_a = 0.1</math></b>	<b>74</b>
8.1	Εισαγωγή	74
8.2	Περιγραφή του προβλήματος	74
8.3	Αποτελέσματα	77
8.3.1	$v_z = 10^{-4}$	77
8.3.2	$v_z = 10^{-2}$	83
8.3.3	$v_z = 1$	86
<b>9</b>	<b>Προσομοίωση δεύτερη για <math>\rho_j = 0.1, \rho_a = 1</math></b>	<b>94</b>
9.1	Εισαγωγή	94
9.2	Αποτελέσματα	94
9.2.1	$v_z = 10^{-4}$	94
9.2.2	$v_z = 10^{-2}$	98
9.2.3	$v_z = 5$	101
<b>10</b>	<b>Προσομοίωση τρίτη για <math>\rho_j = 0.1, \rho_a = 0.1</math></b>	<b>107</b>
10.1	Εισαγωγή	107
10.2	Αποτελέσματα	107
10.2.1	$v_z = 10^{-4}$	107
10.2.2	$v_z = 10^{-2}$	113
10.2.3	$v_z = 5$	116
<b>11</b>	<b>Συμπεράσματα-Επίλογος</b>	<b>122</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>124</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

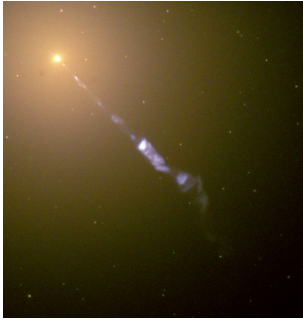
### 1.1 Ιστορική ανασκόπηση

Ένα από τα πιο μυστήρια και πιο γοητευτικά αντικείμενα στην σύγχρονη αστροφυσική είναι η δημιουργία των πιδάκων. Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι από περιστρεφόμενους δίσκους προσαύξεσης γύρω από νεαρά αστέρια, quasars και microquasars δημιουργούνται μεγάλοι και ευθυγραμμισμένοι πίδακες κάθετα στον άξονα του δίσκου. Αυτοί οι πίδακες παραμένουν ευθυγραμμισμένοι για αποστάσεις δεκαπλάσιες φορές περίπου την ακτίνα του δίσκου και είναι είτε σχετικιστικά όταν προέρχονται από μελανές οπές, αστέρες νετρονίων και ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες είτε μη σχετικιστικά όταν προέρχονται από νεαρά άστρα και φτάνουν ταχύτητες μόνο μέχρι 100-200 km/s. Από αυτά που είπαμε συνεπάγεται ότι η ταχύτητα των πιδάκων εξαρτάται άμεσα από την γωνιακή ταχύτητα του δίσκου προσαύξεσης κάτι που θα ασχοληθούμε αργότερα στην εργασία μας.

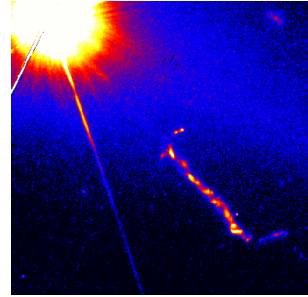
Θα ξεκινήσουμε με μια ιστορική ανασκόπηση στα βασικά γεγονότα και παρατηρήσεις που μας έφτασαν μέχρι την ανακάλυψη των πιδάκων. Η ιστορία ξεκινά πριν από 230 χρόνια περίπου το 1784 και στον John Michell που πρότεινε ότι αστέρια σαν τον ήλιο αν συμπυκνωθούν σε μια μικρή ακτίνα τότε δεν θα τα βλέπουμε διότι το φως δεν θα μπορούσε να ξεφύγει από το βαρυτικό πεδίο αυτόν των αστεριών. Παρολαυτά προέβλεψε ότι θα μπορούσαν να γίνουν αντιληπτά αυτά τα “μαύρα αστέρια” μέσω της βαρύτητας, παρατηρώντας πως κινούνται άλλα αστέρια γύρω από αυτά. Μια παρόμοια θεωρία είχε και ο Laplace την ίδια περίπου περίοδο.

Μια άλλη υπόθεση του Laplace είναι η υπόθεση των νεφελωμάτων όπου θεωρεί ότι το ηλιακό σύστημα δημιουργήθηκε από ένα καυτό περιστρεφόμενο σύννεφο αερίου όπου καταρρέοντας εκπέμπει περισσότερη ενέργεια και περιστρέφεται όλο και πιο γρήγορα έως ότου στο τέλος μένει ένας δίσκος στο επίπεδο του ισημερινού και πιστευε ότι εκεί πάνω στον δίσκο γεννιούνται οι πλανήτες. Από εδώ ξεκίνησε η ιστορία των δίσκων προσαύξεσης που χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα στην αστροφυσική.

Η πρώτη παρατήρηση ενός πίδακα από ενεργό γαλαξία έγινε το 1918 από τον Curtis[8] και προερχόταν από το κέντρο του γαλαξία M87. Οι πίδακες είναι μια ροή φορτισμένων σωματιδίων η οποία εκτείνεται σε τεράστιες αποστάσεις από την κεντρική περιοχή και ο μηχανισμός ακτινοβολίας του παρέμενε άγνωστος μέχρι το 1952 όπου ο Baade[1] απέδειξε ότι είναι πολωμένη ακτινοβολία σύγχροtron. Αργότερα και συγκεκριμένα το 1964 όταν παρατηρήθηκαν οι πρώτοι Quasars και συνέκριναν τον πίδακα του Quasars 3C273 με το πίδακα του γαλαξία M87, φτάσανε στο συμπέρασμα οι αστρονόμοι ότι οι Quasars δεν ήταν αστέρια όπως αρχικά πίστευαν αλλά ενεργοί γαλαξίες.



Σχήμα 1.1: Ο πίδακας από τον ενεργό γαλαξία M87



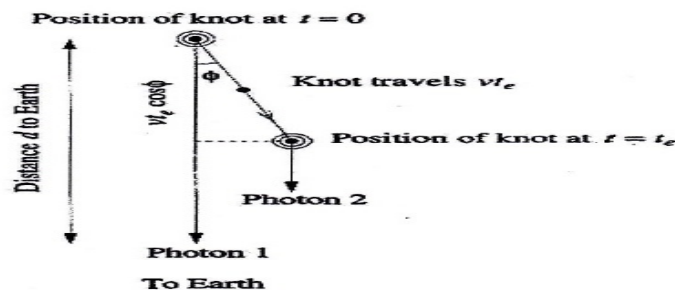
Σχήμα 1.2: Ο πίδακας από τον ενεργό γαλαξία 3C273

Υπήρξαν πολλές θεωρίες για την δημιουργία των ενεργών γαλαξιών και υπήρχαν και πολλοί που πίστευαν ότι χρειάζονται καινούργιοι φυσικοί νόμοι για να περιγράψουν τους Quasars όταν οι Hoyle, Burbidge, Sargent[12] δείξαν ότι η επιφανειακή λαμπρότητα μερικών ραδιογαλαξιών όπως του 3C120 ήταν πολύ υψηλή για να προερχόταν από ακτινοβολία σύγχροτον διότι ο αντίστροφος σκεδασμός Compton θα μετέτρεπε ένα μεγάλο μέρος της ακτινοβολίας σε ακτίνες X. Παρολαυτά το 1967 ο Rees[26] θεωρήσε ότι μια σχετικιστική διαστολή της εκπεμπόμενης περιοχής θα αύξανε την επιφανειακή του λαμπρότητα. Η υπόθεση του αυτή επιβεβαιώθηκε το 1971 με την ανακάλυψη της υπέρφωτης κίνησης στον πίδακα διάφορων ραδιογαλαξιών.

Η υπέρφωτη κίνηση οφείλεται στην αποπλάνηση του φωτός λόγω σχετικιστικών φαινομένων. Το φαινόμενο οφείλεται στο ότι μια άμορφη μάζα πλάσματος που εκπέμπει φως το οποίο είναι αρχικά σε απόσταση  $d$  από εμάς και απομακρύνεται από το κέντρο με ταχύτητα  $u = \beta c$  και έχοντας μια γωνία  $\varphi$  με την οπτική ακτίνα τότε τα φωτόνια που θα εκπέμψουν σε κάποια χρονική στιγμή δεν θα καλύψουν απόσταση  $d$  αλλά απόσταση  $d - ut \cos\varphi$ . Σαν αποτέλεσμα η φαινόμενη ταχύτητα εύκολα προκύπτει ότι είναι,

$$u_{app} = c \frac{\beta \cdot \sin\varphi}{1 - \beta \cdot \cos\varphi} \quad (1.1)$$

Όπως βλέπουμε από την σχέση αυτή η φαινόμενη ταχύτητα θα είναι μεγαλύτερη του ένα όταν ο παρανομαστής θα γίνει μικρός δηλαδή το  $\beta$  και το  $\cos\varphi$  να πλησιάζουν το ένα. Όλα αυτά που είπαμε φαίνονται καθαρά στην επόμενη εικόνα,



Σχήμα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση της υπέρφωτης κίνησης

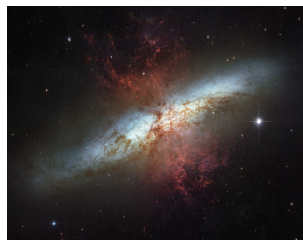
Οι Quasars όταν πρωτοπαρατηρήθηκαν νόμιζαν οι αστρονόμοι ότι πρόκειται για μεταβλητούς αστέρες διότι η λαμπρότητα τους μεταβαλλόταν συνεχώς. Αργότερα κατάλαβαν ότι πρόκειται για γαλαξίες και φτάσανε στο συμπέρασμα ότι εκπέμπουν τεράστια



ισχύ από μια μικρή περιοχή του γαλαξία. Η ενέργεια στους πίδακες των Quasars που ξεπερνά κατά πολύ την ισχύ που εκπέμπει ο ήλιος θα έπρεπε να προέρχεται από μια πολύ ενεργή κεντρική περιοχή για αυτό και υπέθεσαν οι αστροφυσικοί ότι στο κέντρο των γαλαξιών υπάρχει μια υπερμεγέθης μελανή οπή με μάζα της τάξεως των  $10^7 M_{\odot}$ . Τέτοιοι γαλαξίες είναι οι M81, M82 οι οποίοι φαίνονται παρακάτω.

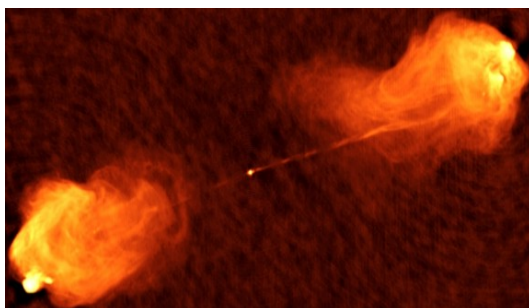


Σχήμα 1.4: Φωτογραφία του γαλαξία M81



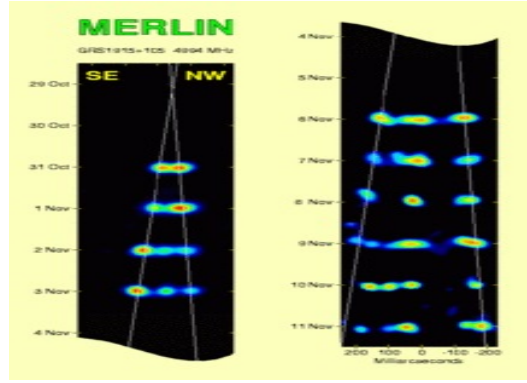
Σχήμα 1.5: Φωτογραφία του γαλαξία M82

Το 1974 τέλος ο Scheuer[29] και ανεξάρτητα οι Blandford and Rees[3] δείξαν ότι οι ραδιολοβοί των ραδιογαλαξιών και των Quasars θα έπρεπε να δέχονται συνέχεια ενέργεια η οποία θα προερχόταν από τους πίδακες που θα δημιουργόντουσαν από την κεντρική μελανή οπή και εκεί που θα συναντούσε ο πίδακας τον μεσοαστρικό χώρο θα δημιουργούνταν οι λοβοί. Δύο τέτοια παραδείγματα είναι ο Cygnus A και ο γαλαξίας NGC6391 όπου παρατηρούνται δύο πολύ εστιασμένοι στενοί πίδακες. Αργότερα κατάλαβαν οι αστρονόμοι ότι πίδακες θα προέρχονται και από νεαρά αστέρια που είναι γνωστά ως Herbig-Haro αλλά και από αστέρες νετρονίων και μαύρες τρύπες όπως θα πούμε στην συνέχεια.



Σχήμα 1.6: Οι δύο λοβοί του γαλαξία *Cygnus A*

Έκτος από τους Quasars ευθυγραμμισμένοι πίδακες πλάσματος δημιουργούνται και από άλλα αστροφυσικά αντικείμενα όπως τα microquasar. Το microquasar είναι ένα διπλό σύστημα μελανής οπής με ένα αστέρι και το ονόμασαν έτσι διότι είναι μια μικρογραφία των Quasars. Σε αυτά τα αντικείμενα παρατήρουμε το φαινόμενο της υπέρφωτης κίνησης που περιγράψαμε παραπάνω όπου τα νέφη πλάσματος φαίνονται να απομακρύνονται από εμάς με ταχύτητες μεγαλύτερες του φωτός. Χαρακτηριστικό παράδειγμα microquasar είναι το διπλό σύστημα GRS1915+105 που απέχει 35.000 έτη φωτός όπως φαίνεται παρακάτω. Οι παρατηρήσεις στα ραδιοκύματα μας δείχνουν ότι η φαινόμενη ταχύτητα απομάκρυνσης από την κεντρική μελανή οπή είναι 25 % μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός αλλά η θεωρητική μελέτη μας δείχνει ότι η πραγματική ταχύτητα του πλάσματος είναι μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός



Σχήμα 1.7: Το διπλό σύστημα *GRS1915 + 15*

οπότε δεν παραβιάζεται η αρχή της σχετικότητας που λέει ότι κανένα αντικείμενο δεν μπορεί να κινηθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός.

Άλλη μια κατηγορία αντικειμένων που δημιουργούν σχετικιστικούς πίδακες είναι οι αστέρες νετρονίων η pulsar. Οι αστέρες νετρονίων είναι ένα αστρικό πτώμα δηλαδή το κατάλοιπο ενός αστεριού μετά τον θάνατό του. Όπως ξέρουμε όταν σε ένα άστρο εξαντληθεί το υδρογόνο οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις σταματάνε. Τότε ο πυρήνας καταρρέει λόγω του βάρους και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της θερμοκρασίας στα  $10^8 K$ , θερμοκρασία ικανή ώστε να αρχίσει να καίγεται το ήλιο σε άνθρακα. Όμως αυτό προκαλεί μια απότομη διαστολή των εξωτερικών στρωμάτων το οποίο μετατρέπεται σε ερυθρό γίγαντα. Όταν τελειώσει και το ήλιο στα εξωτερικά στρώματα το άστρο θα συνεχίσει να καταρρέει, και επειδή εδώ μιλάμε για άστρα με μάζα μεγαλύτερη των  $10 M_{\odot}$ , λόγω αυτής της κατάρρευσης θα φτάσει την απαραίτητη θερμοκρασία για να αρχίσει να καίει άνθρακα σε πυρίτιο και αυτό θα συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε στον σίδηρο οπότε και τότε λόγω του ότι δεν μπορεί να το κάψει οδηγείται σε κατάρρευση του πυρήνα και αυτό δημιουργεί ένα κρουστικό κύμα που διαλύει το άστρο το οποίο λέγεται και supernova. Αν η μάζα του πυρήνα είναι μεγαλύτερη από  $3.4 M_{\odot}$  καταρρέει και τότε τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια συνενώνονται και μένουν μόνο νετρόνια και η πίεση αυτών των εκφυλισμένων νετρονίων είναι που σταθεροποιεί το αστέρι από την περεταίρω κατάρρευση. Σαν αποτέλεσμα έχουμε την γέννηση των αστέρων νετρονίων που έχουν μέγεθος μερικά χιλιόμετρα και τεράστια πυκνότητα. Λόγω της διατήρησης της στροφομής τα αστέρια αυτά περιστρέφονται τρομακτικά γρήγορα και αυτό φαίνεται αν κάνουμε μερικές πράξεις.

$$L_{init} = L_{fin} \Rightarrow I_{init}\omega_{init} = I_{fin}\omega_{fi} \quad (1.2)$$

Όμως η ροπή αδράνειας όπως ξέρουμε για σφαιρικά αντικείμενα είναι  $I = \frac{2}{5}MR^2$  οπότε τελικά η προηγούμενη σχέση θα γίνει εύκολα,

$$\frac{2}{5}MR_{init}^2\omega_{init} = \frac{2}{5}MR_{fin}^2\omega_{fin} \Rightarrow \omega_{fin} = \omega_{init}\left(\frac{R_{init}}{R_{fin}}\right)^2 \quad (1.3)$$

Όπως βλέπουμε από την προηγούμενη σχέση επειδή η τελική ακτίνα θα είναι πολύ μικρότερη από την αρχική ακτίνα του αστεριού η τελική γωνιακή ταχύτητα θα είναι πάρα πολύ μεγαλύτερη από την αρχική για αυτό και λέμε ότι περιστρέφονται πολύ γρήγορα.

Επίσης λόγω διατήρησης της μαγνητικής ροής αναπτύσσονται τεράστια μαγνητικά

πεδία της τάξης του  $10^{15}G$  όπως και μπορούμε να δείξουμε εύκολα παρακάτω.

$$\Phi_{init} = \Phi_{fin} \Rightarrow \int \int B_{init} d\vec{A} = \int \int B_{fin} d\vec{A} \quad (1.4)$$

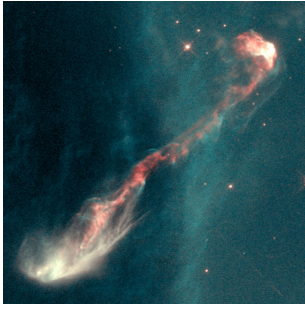
$$B_{init} 4\pi R_{init}^2 = B_{fin} 4\pi R_{fin}^2 \Rightarrow B_{fin} = B_{init} \left( \frac{R_{init}}{R_{fin}} \right)^2 \quad (1.5)$$

Όπως και πριν έτσι και εδώ επειδή η τελική ακτίνα είναι πολύ μικρότερη από την αρχική θα δημιουργηθούν τεράστια μαγνητικά πεδία. Τους αστέρες νετρονίων τους παρατήρησαν στα ραδιοκύματα για πρώτη φορά και επειδή εκπέμπανε την ακτινοβολία τους σε μια στενή δέσμη καθώς περιστρέφονταν, με συνέπεια εμείς να λαμβάνουμε ένα παράξενο περιοδικό σήμα λόγω της γρήγορης μεταβολής των ραδιοσημάτων, ονομάστηκαν και pulsating radio stars η pulsar. Το πιο γνωστό παράδειγμα pulsar είναι το υπολείμμα υπερκαινοφανούς στο νεφέλωμα του καρκίνου. Περιστρέφεται 30 φορές το δευτερόλεπτο και εκπέμπει ακτινοβολία όσο 100.000 ήλιοι σε όλα τα μήκη κύματος. Επίσης δύο εστιασμένοι πίδακες πλάσματος αναδύονται από τον κεντρικό pulsar.

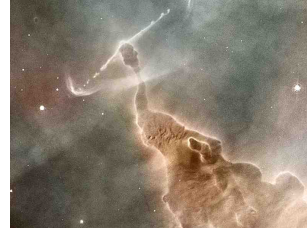


Σχήμα 1.8: Το υπολείμμα του νεφελώματος του καρκίνου

Τέλος μη σχετικιστικοί ευθυγραμμισμένοι πίδακες αναδύονται από τους δίσκους προσαύξεσης στους πρωταστέρες. Η γέννηση αστέρων συμβαίνει όταν ένα μοριακό νεφέλωμα εκατοντάδων ετών φωτός που περιέχει 90% υδρογόνο και 10% ήλιο και άλλα βαρύτερα στοιχεία καταρρέει λόγω της βαρύτητας του. Λόγω διατήρησης στροφορμής το νεφέλωμα περιστρέφεται όλο και πιο γρήγορα και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα στο τέλος να μένει ένας πεπλατυσμένος και επίπεδος δίσκος αερίου. Στο κέντρο του δίσκου βρίσκεται ο πρωταστέρας και έπειτα από πολλά χρόνια συνεχούς προσαύξεσης θα φτάσει κάποια στιγμή την κατάλληλη πυκνότητα και θερμοκρασία ώστε να ξεκινήσει τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Καθώς το άστρο προσπαθεί να διώξει το αέριο γύρω του και να αναδυθεί εκτοξεύει πλάσμα με την μορφή εξαιρετικά ευθυγραμμισμένων πιδάκων με μήκος αρκετές φορές μεγαλύτερη από την απόσταση Γης-Ήλιου. Οι πίδακες αυτοί είναι ροή φορτισμένων σωματιδίων τα οποία επιταχύνονται λόγω των μαγνητοπεριστροφικών δυνάμεων. Τέτοια παραδείγματα είναι τα Herbig-Haro αντικείμενα που βλέπουμε παρακάτω στα σχήματα 1.9 και 1.10.



Σχήμα 1.9: *Herbig – Haro* HH47

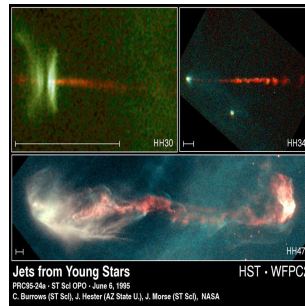


Σχήμα 1.10: Το νεφέλωμα της *carina*

## 1.2 Παρατηρήσεις πιδάκων

### 1.2.1 Πίδακες από YSO

Εμείς στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με δύο ειδών πιδάκων. Με πίδακες όπου η πυκνότητα τους είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του περιβάλλοντος όπως είναι οι πίδακες από νεαρά αστέρια γνωστά και ως Young Stellar Object (YSO) και με πίδακες όπου η πυκνότητα τους είναι μικρότερη από την πυκνότητα του περιβάλλοντος όπως είναι οι πίδακες από ενεργούς γαλαξίες. Όπως είπαμε οι πίδακες από νεαρά αστρά δημιουργούνται όταν στο κεντρό του δίσκου που βρίσκεται ο πρωταστέρρας συσσωρεύεται ύλη και για να μπορέσει το άστρο να διώξει το αέριο γύρω του και να αναδυθεί εκτοξεύει πλάσμα με την μορφή εξαιρετικά εστιασμένων πιδάκων και έχουν μήκος απο 0.01 μέχρι μερικά pc. Τα περισσότερα από αυτά εμφανίζουν κόμβους (knots) και έχουν ένα τερματικό ωστικό κύμα όπου ο πίδακας συγκρούεται με το περιβάλλον όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα,



Σχήμα 1.11: Μερικά παραδείγματα από νεαρά αστέρια

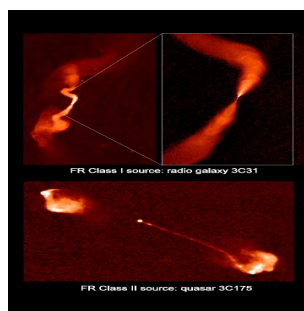
Όλα τα λαμπρά αντικείμενα εκπέμπουν ένα φάσμα κυρίως στο οπτικό και στο υπέρυθρο οπότε με την βοήθεια των φασμάτων μπορούμε να βρούμε την θερμοκρασία του πίδακα που δεν υπερβαίνει τα  $2 \times 10^4$  K με αποτέλεσμα η ταχύτητα του ήχου να είναι περίπου 10 km/s και άρα ο αριθμός Mach να είναι περίπου  $M_j = 20 - 40$ . Δηλαδή οι πίδακες αυτοί είναι εξαιρετικά υπερηχητικοί για αυτό και εμφανίζονται τα ωστικά κύματα. Με την συνεχή εξέλιξη των τηλεσκοπίων κατάφεραν οι αστροφυσικοί να παρατηρήσουν τα χαρακτηριστικά του πίδακα κοντά στο κεντρικό αντικείμενο με αποτέλεσμα να θεωρούν ότι ο λόγος των πυκνότητων πίδακα-περιβάλλοντος να είναι περίπου  $\rho_j/\rho_a = 1 - 20$ . Γενικά όλα τα Herbig-Haro αντικείμενα εμφανίζουν παρόμοια χαρακτηριστικά οπότε και ότι είπαμε παραπάνω ισχύουν γενικά για πίδακες από νεαρά αστέρια. Η μελέτη τέτοιων πιδάκων είναι ένα ανοιχτό θέμα στην αστροφυσική

και αποτελεί και θέμα της εργασίας αυτής όπως θα δούμε και παρακάτω όπου και θα προσπαθήσουμε να προσομοιώσουμε πίδακες αυτής της κατηγορίας.

### 1.2.2 Πίδακες από AGN

Οι πίδακες από ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες προέρχονται από ενεργούς γαλαξίες τύπου Seyfert, μακρίνοι Quasar αλλά και ραδιογαλαξίες και μπορούν να φτάσουν σε μήκος αρκετά εκατομμύρια parsec μέσα στον μεσοαστρικό χώρο οπότε και για αυτό τα θεωρούμε ένα από τα μεγαλύτερα αντικείμενα στο σύμπαν. Δυστυχώς σε αντίθεση με τους πίδακες από νεαρά αστέρια δεν μπορούμε άμεσα να παρατηρήσουμε τα χαρακτηριστικά των πιδάκων όπως την ταχύτητα, τον αριθμό Mach η τον λόγο των πυκνοτήτων αλλά οι ερευνητές βασίζονται σε θεωρητικά μοντέλα και προσπαθούν να τα ταιριάξουν με τις παρατηρήσεις. Η κυριότερη δυσκολία των αστροφυσικών είναι η έλλειψη γραμμών εκπομπής από το φάσμα των ενεργών γαλαξιών. Η εκπομπή είναι συνεχής και μη θερμική και καλύπτει ένα ευρύ πεδίο συχνοτήτων από τα ράδιο μέχρι τις ακτίνες X και οφείλεται όπως είπαμε και πιο πάνω σε ακτινοβολία σύγχροτρον και αντίστροφο σκεδασμό Compton. Αυτός είναι ο κυριότερος λόγος που έπειτα από μισό αιώνα παρατηρήσεων οι επιστήμονες δεν έχουν καταλήξει σε συμπεράσματα για την σύσταση των πιδάκων. Από την άλλη μεριά η παρουσία της ακτινοβολίας σύγχροτρον ενισχύει την απόψη των αστροφυσικών ότι οι πίδακες αποτελούνται από φορτισμένα σωματίδια και αποδεικνύει την ύπαρξη μαγνητικών πεδίων. Για τον λόγο αυτό πολλοί θεωρητικοί αστροφυσικοί χρησιμοποιούν τις εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής για να απαντήσουν στο ερώτημα για το πως δημιουργούνται και ευθυγραμμίζονται οι πίδακες.

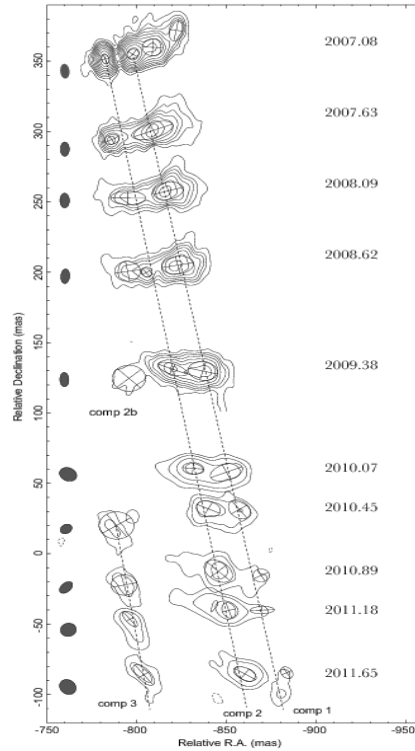
Δύο γνωστές κατηγορίες πιδάκων είναι οι πίδακες που προέρχονται από ραδιογαλαξίες με ασθενές γραμμές εκπομπής και λέγονται FRI και αυτοί που προέρχονται από ραδιογαλαξίες με ισχυρές γραμμές εκπομπής που λέγονται FRII. Η μορφολογία και δυναμικής τους είναι που τους αναγκάζει να αλληλεπιδράσουν με το περιβάλλον και να επιβραδυνθούν σε μη σχετικιστικές ταχύτητες αν και κάποιοι πίδακες τύπου FRII παραμένουν σχετικιστικοί για μεγαλύτερες αποστάσεις. Οι πίδακες φαίνονται παρακάτω,



Σχήμα 1.12: Στην εικόνα φαίνονται οι πίδακες από μια FRI πηγή από τον γαλαξία 3C31(πάνω εικόνα) και μια FRII πηγή από τον γαλαξία 3C175(κάτω εικόνα)

Όπως είπαμε και πιο πάνω ο πρώτος πίδακας που παρατηρήθηκε προέρχεται από τον γαλαξία M87. Έκτοτε ο πίδακας αυτός αποτελεί ένα εργαστήριο δοκιμών των νέων θεωριών και μοντέλων που προτείνουν οι επιστήμονες. Μια από αυτές τις υποθέσεις που θέλουμε να δούμε είναι αν η περιοχή HST-1, που εντοπίζεται στα 0.8 arcsec με κατεύθυνση προς τα κάτω του πίδακα όπου και παρατήρηουμε δομές με υπέρφωτη κίνηση και έχουμε μια μετάβαση από παραβολική σε κωνική μορφή του πίδακα, εμφανίζει

recollimation ωστικά κύματα. Για να εξετάσουν αυτήν την υπόθεση οι αστροφυσικοί παρατήρησαν τον γαλαξία M87 από τον Νοέμβριο του 2005 μέχρι τον Οκτώβριο του 2011 με το VLBA το οποίο είναι ένα σύστημα 10 ραδιοτηλεσκοπίων στην Αμερική όπως και το JVLΑ. Η παρατήρηση με το VLBA έγινε στα 2.2 και στα 5 GHz ενώ με το JVLΑ έγινε στα 15, 22 και 43 GHz. Οι ισουφείς από την περιοχή αυτήν φαίνονται παρακάτω.



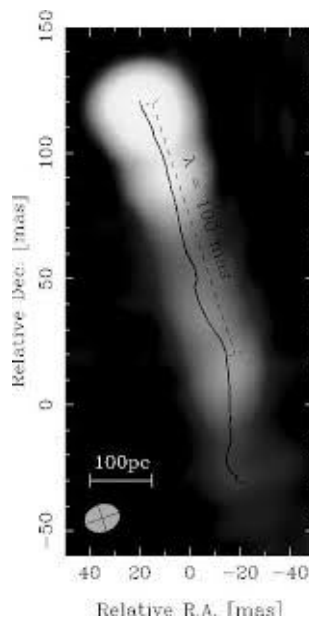
Σχήμα 1.13: Στην εικόνα φαίνονται τα contour στα 1.7 GHz από το 2007 μέχρι το 2009 και στα 5 GHz από το 2010 μέχρι το 2011. Επίσης φαίνονται οι μικρότερες δομές comp1, comp2, comp3 που εμφανίζουν υπέρφωτη κίνηση(Girolletti et al 2012[10])

Τα αποτελέσματα από αυτήν την λεπτομερή ανάλυση του VLBA στα 2.2 GHz έδειξαν ότι υπάρχει μια σαφή πτώση της πυκνότητας στην περιοχή HST-1 σε σχέση με άλλες εποχές και μια αύξηση της λαμπρότητας. Στα 5 GHz δεν υπήρξαν αποτελέσματα ενώ σε απόσταση  $913 \text{ mas}^1$  και  $933 \text{ mas}$  εντοπίστηκαν δύο υπέρφωτες περιοχές. Παρόμοια αποτελέσματα εμφανίζουν και οι παρατηρήσεις από το JVLΑ αν και περαιτέρω παρατήρηση του πίδακα στο μέλλον από τα ραδιοτηλεσκοπία Radioastron και LOFAR θα μας δώσει πιο σαφή αποτελέσματα για την περιοχή HST-1 που μέχρι τώρα αποτελεί τον καλύτερο υποψήφιο για recollimation ωστικά κύματα.

Μια άλλη σημαντική παρατήρηση που έχει γίνει σε εξωγαλαξιακούς πίδακες είναι η εμφάνιση Kelvin-Helmholtz ασταθειών αν και αυτό είναι εικασία καθώς οι παρατηρήσεις δεν επαρκούν. Ένα παράδειγμα τέτοιου πίδακα προέρχεται από τον Quasar S0836+710 που παρατηρήθηκε στα 1.6 και 5 GHz από τα ραδιοτηλεσκοπία VLBI όπου και διαπιστώθηκε η ύπαρξη ενός πίδακα με μήκος αρκετά kiloparsec. Η εικόνα του πίδακα φαίνεται παρακάτω. Στην αντιστοίχη εικόνα του πίδακα στα 5 GHz μετρηθήκαν κάποιες διαταραχές στον πίδακα με μήκος κύματος 100 mas και δύο μικρότερες με μήκος κύματος 4.6 και 7.7 mas. Οι διαταραχές αυτές θεωρήθηκαν ότι αντιστοιχούν σε

<sup>1</sup>1 mas είναι περίπου  $150R_s$  όπου  $R_s$  είναι η ακτίνα Schwarzschild της κεντρικής μελανής οπής.

ελικοειδή και παραβολικούς τρόπους ταλάντωσης και θέλανε να τα συγκρίνουν με τα θεωρητικά μοντέλα. Από τους χάρτες του VLBI υπολογίστηκε η ακτίνα του πίδακα και βρέθηκε περίπου  $R_j = 17 \text{ mas}$  και άρα το μήκος κύματος των διαταραχών είναι πλέον για τα  $100 \text{ mas}$   $\lambda_1 = 6R_j$  και για το  $7.7 \text{ mas}$   $\lambda_2 = 0.2R_j$ . Οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές υπολογίστηκαν  $\lambda_1 = 6.6R_j$  και  $\lambda_2 = 0.29R_j$  σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις και άρα οι διαταραχές αυτές όντως αντιστοιχούν σε αστάθειες Kelvin-Helmholtz. Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στην εργασία των Perucho and Lobanov[24]. Τέτοιες αστάθειες σε πίδακες παρατηρούνται γενικά στην αστροφυσική και όπως θα δείξουμε σε επόμενα κεφάλαια εμφανίζονται και στις προσομοιώσεις μας κάτι που δείχνει ότι η εμφάνισή τους είναι αναποφευκτική για τους αστροφυσικούς πίδακες.



Σχήμα 1.14: Στην εικόνα φαίνεται ο πίδακας στα 1.6 GHz (M. Perucho and A. P. Lobanov )

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο να πούμε ότι ένα μεγάλο ζήτημα που αφορά τους αστροφυσικούς είναι ο λόγος πυκνοτήτων αν και όπως είπαμε είναι αδύνατον να παρατηρηθεί άμεσα αλλά οι επιστήμονες βασίζονται σε θεωρητικά και αριθμητικά μοντέλα καθώς και από προσομοιώσεις και φτάσανε στο συμπέρασμα ότι οι πίδακες από ενεργούς γαλαξίες έχουν πολύ μικρότερη πυκνότητα από το περιβάλλον της τάξης του  $\eta = \frac{\rho_j}{\rho_a} = 10^{-5}$ .

Τέλος κάτι που δεν είπαμε είναι ότι και σε πίδακες από ενεργούς γαλαξίες έχουμε την εμφάνιση ωστικών κυμάτων δηλαδή η ροή είναι υπερηχητική ή μάλλον καλύτερα είναι superfast αν θεωρήσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο κυριαρχεί άρα και η ταχύτητα που θα έχουμε θα είναι η γρήγορη μαγνητοχητική. Σε αντίθεση με του πίδακες από ενεργούς γαλαξίες, τα ωστικά κύματα σε πίδακες από νεαρά αστέρια οδηγούν σε θερμική εκπομπή διότι θερμαίνουν το χαμηλής πυκνότητας περιβάλλον το οποίο με την σειρά του μαζί με τον πίδακα θα ακτινοβολήσουν θερμικά. Από την άλλη μεριά οι εξωγαλαξιακοί πίδακες διαδίδονται σε πιο πυκνό περιβάλλον με αποτέλεσμα τα ωστικά κύματα να θεωρούνται αδιαβατικά. Μέσα σε αυτά τα ωστικά κύματα θα επιταχυνθούν τα σωματίδια μέσω του μηχανισμού Fermi και αυτά τα επιταχυνόμενα σωματίδια θα αλληλεπιδράσουν με τα μαγνητικά πεδία και θα μας δώσουν την σύγχροτρον ακτινοβολία που παρατηρούμε. Όπως και τα YSO αντικείμενα έτσι και οι εξωγαλαξιακοί πίδακες είναι ένα ανοιχτό

θέμα στην αστροφυσική και θα προσπαθήσουμε και εμείς να προσομοιώσουμε τέτοιους πίδακες στην εργασία αυτή.

### 1.3 Μοντέλα πιδάκων

Όπως αναφέραμε και πιο πριν η δημιουργία και επιτάχυνση των πιδάκων που παρατηρούμε στο σύμπαν είναι ένα ανοιχτό θέμα ακόμα και έπειτα από έναν αιώνα ερευνών. Οι αστροφυσικοί σήμερα προσπαθούν να απαντήσουν στα ερωτήματα αυτά με δύο τρόπους. Ο ένας τρόπος είναι μέσω θεωρητικών μοντέλων και ο άλλος μέσω αριθμητικών υπολογισμών. Για τα θεωρητικά μοντέλα έχουν γραφτεί πολλές σημαντικές εργασίες οι οποίες συνοπτικά είναι:

1. Το άρθρο Tsinganos 1981[30] όπου περιγράφονται οι πρώτες αυτοομοίες λύσεις στις εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής.

2. Το άρθρο των Blandford R. D. and Payne D. G. 1982[4].

3. Το άρθρο των Contopoulos J., Lovelace R. V. E. 1992 όπου και σε αυτήν την εργασία παρουσιάζονται λύσεις των εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής.

4. Το άρθρο των Sauty C. and Tsinganos K. 1994[28].

5. Το μοντέλο του Lynden Bell το οποίο και θα αναλύσουμε λεπτομερώς στα επόμενα κεφάλαια όπου ο συγγραφέας προσπαθεί μέσω προσεγγίσεων να απαντήσει στο ερώτημα της δημιουργίας των πιδάκων.

6. Στο άρθρο των Vlahakis N. & Tsinganos K[32] περιγράφεται ένας συστηματικός και αναλυτικός τρόπος κατασκευής μαγνητοϋδροδυναμικών μοντέλων για πίδακες.

7. Επίσης στο άρθρο των Vlahakis N., Tsinganos K, Sauty K., Trussoni C.[33] περιγράφεται ένα αναλυτικό μοντέλο για μεσημβρίνα αυτόμοιες λύσεις.

8. Τέλος αναλυτικές λύσεις και γενική μελέτη των πιδάκων γίνεται και στην εργασία Tsinganos K., theory of MHD jets and outflows[37] όπως και στην Vlahakis N., Output from MHD models[34] όπου εδώ υπάρχει και μια εκτενή αναλύση και παρουσίαση λύσεων στο πλαίσιο της ακτινικής αυτοομοιότητας.

Αυτές είναι οι σημαντικότερες ημιαναλυτικές λύσεις που έχουν βρεθεί στον χώρο των αστροφυσικών πιδάκων όπου βέβαια υπάρχουν και άλλοι ερευνητές όπως οι Komissarov, Sarpountzis etc οι οποίοι έχουν κάνει εξαιρετικές δουλειές. Εκτός βέβαια από την θεωρητική μελέτη δουλειές έχουν γίνει και στον χώρο των προσομοιώσεων όπου κάποιες από τις σημαντικότερες εργασίες συνοπτικά είναι:

1. Στο άρθρο των Matsakos T., Tsinganos K. et al[19] χρησιμοποιώντας τον Pluto, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε και εμείς στην συνέχεια, γίνεται η μελέτη της ευστάθειας των αναλυτικών λύσεων που προκύπτουν από την λύση των εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής.

2. Στην εργασία των Mizuno et al[22] προκύπτουν έπειτα από προσομοιώσεις recollimation ωστικά κύματα όπως θα δούμε και στις δικές μας προσομοιώσεις στο κεφάλαιο 8. Όπως θυμόμαστε τέτοιες δομές πιστεύουν οι επιστήμονες ότι εμφανίζονται στον M87.

3. Τέλος, άλλη μια σημαντική εργασία αλλά για υδροδυναμικούς πίδακες είναι η εργασία των Bodo et al[5] όπου οι συγγραφείς μελετάνε μέσα από προσομοιώσεις την ανάπτυξη Kelvin-Helmholtz ασταθειών, μια ιδιότητα που πολύ πιθανόν να εμφανίζεται σε πολλούς πίδακες από ενεργούς γαλαξίες.

4. Στο άρθρο των Gracia J., Tsinganos K., Bogovalov S.[11] γίνεται μια προσπάθεια εφαρμογής των μοντέλων στον πίδακα του M87.



Όλες οι προηγούμενες εργασίες αναφέρονται σε διδιάστατες προσομοιώσεις και φυσικά παραλείψαμε αρκετά ονόματα ερευνητών που δουλεύουν πάνω σε προσομοιώσεις όπως Massaglia, Ferrari, Matsakos, Perucho, Aloy, Marti etc. Τα τελευταία χρόνια γίνεται τρομερή προσπάθεια να γίνουν 3D προσομοιώσεις των πιδάκων αλλά οι έρευνες είναι ακόμα σε πολύ αρχικό στάδιο.

## 1.4 Επίλογος

Κλείνοντας αυτήν την εισαγωγή, παρουσιάσαμε όλα τα είδη πιδάκων που παρατηρούνται στο σύμπαν και εξηγήσαμε συνοπτικά κάποιες παρατηρήσεις που έχουν γίνει σε συγκεκριμένους γαλαξίες όπως τον M87. Επίσης παραθέσαμε μια πληθώρα εργασιών που έχουν γίνει από τους κορυφαίους επιστήμονες του είδους για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται να μάθει περισσότερα πράγματα για το αντικείμενο.

Η εργασία αυτή χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, δηλαδή από το κεφάλαιο 2 μέχρι το κεφάλαιο 6 θα γίνει μια εκτενή ανάλυση του μοντέλου του Lynden Bell για τους μαγνητικούς πύργους. Πιο συγκεκριμένα στο κεφαλαίο 2 θα θεωρήσουμε ότι ο πίδακας είναι μια αλληλουχία στατικών δομών και ότι μέσα στον πίδακα κυριαρχούν τα μαγνητικά πεδία και το πλάσμα έχει αμελητέα συνεισφορά στην ορμή και ενέργεια οπότε αντί για τις εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής θα ισχύει η προσέγγιση της μηδενικής μαγνητικής δύναμης (force free). Μέσα από προσεγγίσεις και την βοήθεια κάποιων θεωρημάτων, που θα αποδείξουμε, θα παράξουμε μια πρώτη μορφή για το πως θα κινείται ο πίδακας μέσα στον μεσοατρικό χώρο. Στο κεφάλαιο 3 θα κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στην προσέγγιση force free και θα παράξουμε την εξίσωση transfield η οποία προκύπτει ουσιαστικά από την εξίσωση ορμής και θα μας χρειαστεί αργότερα. Στο κεφάλαιο 4 θα θεωρήσουμε ένα απλουστευμένο μοντέλο δίσκου προσαύξεσης το οποίο θα περιστρέφεται σαν στερεό σώμα και θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα μαγνητικά πεδία αλλά να βγάλουμε και τα πρώτα συμπεράσματα για την συμπεριφορά των πιδάκων. Στο κεφάλαιο 5 θα χρησιμοποιήσουμε την πλήρη μορφή του μοντέλου του Lynden Bell όπου θα θεωρήσουμε έναν δίσκο προσαύξεσης που περιστρέφεται διαφορικά<sup>2</sup>. Αν φανταστούμε τον δίσκο προσαύξεσης και μια μαγνητική γραμμή που βρίσκεται πάνω του, τότε επειδή το ένα “πόδι” της μαγνητικής γραμμής θα περιστρέφεται πιο γρήγορα από το άλλο λόγω της διαφορικής περιστροφής τότε η δυναμική γραμμή αυτή θα συστραφεί και θα δημιουργηθεί ένα  $B_\phi$  και λόγω αυτού θα έχουμε μια πίεση προς τα πάνω που θα αυξάνει συνεχώς με τον χρόνο ενώ και η συνολική γωνία περιστροφής αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο. Μέσα από την διατήρηση της ενέργειας και κάποιων προσεγγίσεων για τα μαγνητικά πεδία θα βρούμε μια σχέση  $Z(R)$  όπου θα μας δείχνει πως αλλάζει με τον χρόνο η τελευταία δυναμική γραμμή που περιβάλλει όλες τις άλλες. Τέλος θα εφαρμόσουμε την σχέση αυτή σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Θα κλείσουμε το πρώτο μέρος με το κεφάλαιο 6 όπου εκεί θα παρουσιάσουμε δύο αναλυτικές λύσεις που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης transfield σε κυλινδρικές συντεταγμένες και φυσικά στην μη σχετικιστική περιοχή. Η μία από τις δύο λύσεις είναι γνωστή σαν Duncce’s cap model και θα αποτελέσει την βάση για τις προσομοιώσεις.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας, δηλαδή από το κεφάλαιο 7 μέχρι το 10 θα παρουσιαστούν οι προσομοιώσεις που έγιναν με τον κώδικα Pluto. Πιο συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 7 θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στον κώδικα Pluto όπου θα εξηγήσουμε

<sup>2</sup>Διαφορική περιστροφή σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αλλάζει από ακτίνα σε ακτίνα.

το τρόπο λειτουργίας του. Στο κεφάλαιο 8 θα χρησιμοποιήσουμε τα μαγνητικά πεδία που προκύπτουν από το μοντέλο Duncce's cap και θα προσπαθήσουμε να είμαστε πιο κοντά σε αυτά που θεωρεί ο Lynden Bell, δηλαδή αμελητέα εσωτερική πίεση και η πίεση του μαγνητικού πεδίου στα άκρα να εξισοροποιεί την πίεση του αερίου έξω από τον πίδακα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα του πίδακα είναι πολύ μεγαλύτερη από την πυκνότητα του μεσοαστρικού χώρου και εκτελέσαμε τρεις διαφορετικές προσομοιώσεις αλλάζοντας κάθε φορά την αρχική ταχύτητα. Τέτοιοι πίδακες αντιστοιχούν σε πίδακες από νεαρά αστέρια. Στο κεφάλαιο 9 θεωρήσαμε πάλι το μοντέλο Duncce's cap αλλά οι πυκνότητες τώρα είναι αντεστραμμένες, δηλαδή η πυκνότητα του πίδακα είναι μικρότερη από του περιβάλλοντος περίπτωση που αντιστοιχεί σε πίδακες από ενεργούς γαλαξίες, φυσικά σε αυτήν είναι εργασία ειμάστε σε μη σχετικιστικές ταχύτητες. Και σε αυτο το κεφαλαίο εκτελέσαμε τρεις προσομοιώσεις με διαφορετική αρχική ταχύτητα. Τέλος το κεφαλαίο 10 θεωρήσαμε ότι οι πυκνότητες πίδακα-περιβάλλοντος ήταν ίδιες και εκτελέσαμε τον κώδικα και πάλι για τρεις διαφορετικές αρχικές ταχύτητες. Η εργασία κλένει στο κεφάλαιο 11 με τα συμπεράσματα και κάποιους μελλοντικούς στόχους.

## Κεφάλαιο 2

# Θεωρήματα μαγνητοστατικής

### 2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε και θα αποδείξουμε τα θεωρήματα της μαγνητοστατικής και χρησιμοποιώντας αυτά τα θεωρήματα μαζί με κάποιες προσεγγίσεις στα μαγνητικά πεδία θα βγάλουμε τα πρώτα συμπεράσματα για τους μαγνητικούς πύργους.

### 2.2 Θεωρήματα μαγνητοστατικής

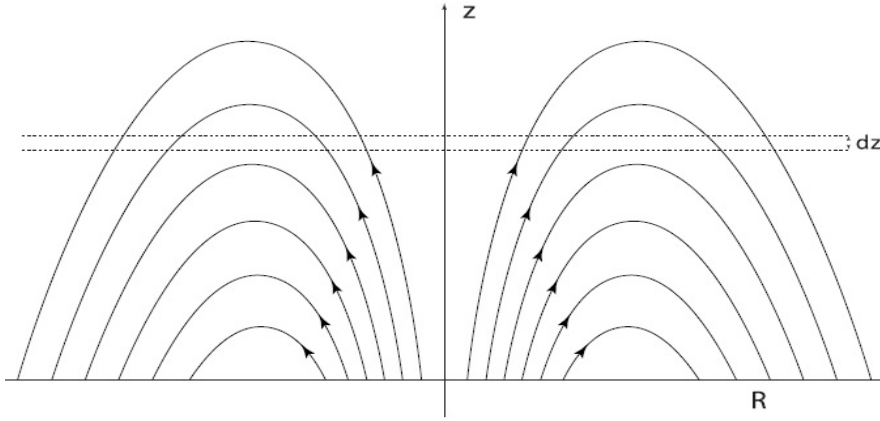
Θεωρούμε αρχικά ότι μέσα στον μαγνητικό πύργο ισχύει η προσέγγιση της μηδενικής δύναμης (force-free) και οι μαγνητικές γραμμές αναδύονται από το επίπεδο  $z = 0$  στον δίσκο στον οποίο θεωρούμε ότι το πλάσμα είναι παγωμένο, ανεβαίνουν μέχρι ένα ύψος και κατεβαίνουν πάλι στον δίσκο. Θεωρούμε επίσης ότι το μαγνητικό πεδίο περιορίζεται από την εξωτερική πίεση του μεσοαστρικού αερίου  $p(z)$  το οποίο γενικά εξαρτάται από το ύψος. Όπου υπάρχει πεδίο το πλάσμα έχει αμελητέα συνεισφορά εκτός από την επιφάνεια του όγκου  $V$  που καταλαμβάνει ο πύργος όπου εκεί η μαγνητική πίεση  $B^2/8\pi$  εξισορροπείται από την πίεση του μεσοαστρικού χώρου, για αυτό και παίρνουμε την προσέγγιση της force-free.

Η συνολική ενέργεια αυτού του συστήματος είναι,

$$W = W_x + W_y + W_z + W_p = \frac{1}{8\pi} \int (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) dV + \int p(z) A(z) dz \quad (2.1)$$

Όπου  $A(z)$  είναι η επιφάνεια σε ένα ύψος  $z$  και έχουμε διαλέξει καρτεσιανές συντεταγμένες για να βρούμε τα πεδία αλλά πολύ εύκολα μπορεί να γίνει και για κυλινδρικές. Τα προηγούμενα μπορούμε να τα σκεφτούμε με ένα μηχανικό ανάλογο. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα κουτί έχουμε αέριο με πίεση  $p(z)$  τότε αν αρχίσουμε να σπρώχνουμε ένα κυλινδρικό έμβολο μέσα στο αέριο η συνολική ενέργεια θα είναι η ενέργεια του εμβόλου συν την ενέργεια που δίνουμε στο αέριο για να υπερνικήσουμε την πίεση που είναι  $pV$ . Άρα στο δικό μας πρόβλημα την θέση του εμβόλου θα παίζει ο μαγνητικός πύργος που θα έχει κάποια μαγνητική ενέργεια και έτσι προκύπτει η προηγούμενη σχέση. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε τρία θεωρήματα (Lynden-Bell 2003[17]) που θα μας χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

**Θεώρημα 1:** Αν έχουμε μια μαγνητοστατική κατάσταση στο  $z = 0$  τότε σε οποιαδήποτε λωρίδα  $z = const$  θα ισχύει ότι  $W_x + W_y = W_z + (1 - s)W_p$



Σχήμα 2.1: Μια φέτα της μαγνητικής δομής. Φαίνεται το ύψος  $dz$  (Lynden-Bell 2001[16]).

### Απόδειξη:

Θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε ισορροπία άρα οποιαδήποτε μεταβολή στο  $z$  σε πρώτη τάξη θα είναι 0. Οπότε αν αρχικά ορίσουμε τα  $w_{x,y,z} = \frac{1}{8\pi} \int \int B_{x,y,z}^2 dx dy$ ,  $w_p = p(z)A(z)$ , όπως είναι προφανές το  $W_{x,y,z,p} = \int w_{x,y,z,p} dz$ . Αν τώρα κάνουμε μια διαστολή στην λωρίδα  $dz$  όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 από ένα ύψος  $z$  σε ένα  $z + dz$  οπότε θα καταλάβει το νέο χώρο από  $z$  μέχρι  $z + \mu dz$ . Η περιοχή κάτω από το  $z$  δεν αλλάζει ενώ η περιοχή πάνω από το  $z + dz$  αυξάνεται κατά  $(\mu - 1)dz$ . Επειδή η επιφάνεια  $A(z')$  που ήταν αρχικά στο  $z'$  πήγε στο  $z' + (\mu - 1)dz$  αυτό έχει ως συνέπεια η επιφάνεια τώρα στο  $z'$  να είναι  $A - (\mu - 1)dz \frac{dA}{dz'}$  οπότε η αλλαγή στο  $W_p$  λόγω τη διαστολής αυτής θα είναι,

$$W'_p = W_p + (\mu - 1)dz \int p(z') \left(-\frac{dA}{dz'}\right) dz' \quad (2.2)$$

$$\Delta W_p = (\mu - 1)dz \left[ p(z)A(z) + \int A(z') \left(\frac{dp}{dz'}\right) dz' \right] \quad (2.3)$$

Όπου στο πρώτο ολοκλήρωμα στην σχέση 2.2 κάναμε μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες και θεωρήσαμε ότι το  $A(z)$  μηδενίζεται σε μεγάλες αποστάσεις.

Επίσης επειδή θεωρήσαμε στην αρχή ότι το πλάσμα είναι παγωμένο άρα πρέπει να έχουμε διατήρηση της ροής καθώς αλλάζει το ύψος δηλαδή πρέπει η απόκλιση του  $B$  να μας δίνει ότι  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  άρα από αυτή την σχέση θα έχουμε ότι για να είναι η ροή παγωμένη θα πρέπει το μαγνητικό πεδίο να αλλάζει σαν,

$$B_x \rightarrow \frac{1}{\mu} B_x \quad (2.4)$$

$$B_y \rightarrow \frac{1}{\mu} B_y \quad (2.5)$$

$$B_z \rightarrow B_z \quad (2.6)$$

$$dz \rightarrow \mu dz \quad (2.7)$$

Όπως βλέπουμε και το  $B_x$  και το  $B_y$  πέφτουν καθώς αυξάνουμε το ύψος ενώ το  $B_z$  μένει αμετάβλητο με το ύψος. Άρα αν φτιάξουμε τις διαφορές  $\Delta W_x$ ,  $\Delta W_y$  και  $\Delta W_z$  θα έχουμε μετά από κάποιες πράξεις,

$$8\pi(W'_x - W_x) = 8\pi\Delta W_x = \frac{1}{\mu^2} \int \int B_x^2 dx dy \mu dz - \int \int B_x^2 dx dy dz = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \int \int B_x^2 dx dy dz \quad (2.8)$$

Ακριβώς ίδια σχέση ισχύει για το  $B_y$  ενώ για το  $B_z$  είναι λίγο διαφορετική όπως βλέπουμε παρακάτω

$$8\pi\Delta W_y = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \int \int B_y^2 dx dy dz \quad (2.9)$$

$$8\pi\Delta W_z = (\mu - 1) \int \int B_z^2 dx dy dz \quad (2.10)$$

Μαζεύοντας όλες τις διαφορές που υπολογίσαμε και διαιρώντας με τον όρο  $(\mu - 1)dz$  θα έχουμε ότι,

$$\frac{\Delta W}{(\mu - 1)dz} = -(w_x + w_y) + w_z + p(z)A(z) + \int A(z') \frac{dp}{dz'} dz' \quad (2.11)$$

Όπου τα μίκρα  $w_{x,y,z}$  είναι αυτά που ορίσαμε στην αρχή της παραγράφου. Επειδή είμαστε σε ισορροπία η προηγούμενη σχέση θα πρέπει να είναι 0 σε πρώτη τάξη δηλαδή θα ισχύει ότι,

$$-(w_x + w_y) + w_z + p(z)A(z) + \int A(z') \frac{dp}{dz'} dz' = 0 \quad (2.12)$$

άρα αν ολοκληρώσουμε και με  $z$  την προηγούμενη θα πάρουμε την σχέση,

$$-(W_x + W_y) + W_z + W_p + \int zA(z) \frac{dp}{dz} dz = 0 \quad (2.13)$$

Αν ορίσουμε σαν  $s = -\frac{dnp}{dlnz}$  τότε το τελευταίο ολοκλήρωμα θα γίνει  $-sW_p$  άρα τελικά καταλήξαμε στην σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε στην αρχή ότι δηλαδή,

$$W_x + W_y = W_z + (1 - s)W_p \quad (2.14)$$

**Θέωρημα 2:** Αν έχουμε μια μαγνητοστατική κατάσταση σε  $z = 0$  θα ισχύει ότι  $W_z = W_p + \frac{1}{2}W_o$  όπου το  $W_o = \frac{1}{4\pi} \int B_z B_R R dA$  είναι υπολογισμένο στο  $z = 0$ .

### Απόδειξη:

Για την απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος θα θεωρήσουμε ότι έχουμε ακτινική διαστολή πάνω στον δίσκο αλλά τώρα δεν μπορούμε να πούμε ότι η μεταβολή αυτή θα είναι σε πρώτης τάξης 0 αλλά θα πούμε ότι η μεταβολή του έργου θα αντιτίθενται στις επιφανειακές τάσεις στον δίσκο λόγω των μαγνητικών δυνάμεων. Οι μαγνητικές τάσεις δίνονται όπως είναι γνωστό από την παρακάτω σχέση,

$$-\frac{1}{4\pi} [B_R B_z \hat{R} + B_\phi B_z \hat{\phi} + \frac{1}{2}(B_R^2 - B_z^2 + B_\phi^2) \hat{z}] \quad (2.15)$$

Οπότε από την προηγούμενη σχέση βλέπουμε ότι το έργο πάνω στον δίσκο λόγω των τάσεων στην ακτινική κατεύθυνση θα είναι αν πάρουμε υπόψιν μόνο το ακτινικό κομμάτι  $W_o = \frac{1}{4\pi} \int B_z B_R R d\phi dR$  υπολογισμένο πάνω στον δίσκο.

Επίσης λόγω της ακτινικής μεταβολής και της παγωμένης ροής τα νέα πεδία και η νέα επιφάνεια θα έχουν γίνει αν θεωρήσουμε ότι  $R' = \mu R$ ,

$$A \rightarrow \mu^2 A \quad (2.16)$$

$$B_R \rightarrow \frac{1}{\mu} B_R \quad (2.17)$$

$$B_\phi \rightarrow \frac{1}{\mu} B_\phi \quad (2.18)$$

$$B_z \rightarrow \frac{1}{\mu^2} B_z \quad (2.19)$$

Άρα αν εργαστούμε όπως στην πρώτη απόδειξη οι μεταβολές στο έργο  $W_p$  και  $W_z$  θα είναι,

$$\Delta W_p = (\mu^2 - 1) \int p(z) A(z) dz \quad (2.20)$$

$$\Delta W_z = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) W_z \quad (2.21)$$

Όπως βλέπουμε το έργο των  $W_R, W_\phi$  δεν παίζουν ρόλο καθώς δεν μεταβάλλονται όταν έχουμε ακτινική μεταβολή. Άρα αν μαζέψουμε τους δύο παραπάνω όρους θα έχουμε τελικά ότι,

$$\Delta W = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) W_z + (\mu^2 - 1) W_p \quad (2.22)$$

Τώρα πλέον δεν θα είναι το  $\Delta W = 0$  όπως πριν αλλά θα αντικατασταθεί με την σχέση,

$$-\left[\frac{d\Delta W}{d\mu}\right]_{\mu=1} = W_o \quad (2.23)$$

Οπότε και θα καταλήξουμε στην τελική σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε ότι δηλαδή,

$$W_z = W_p + \frac{1}{2} W_o \quad (2.24)$$

**Θέωρημα 3:** Για  $z/R \gg 1$  και  $dB/dz \ll |B|/R$  τότε ισχύει από το δεύτερο θεώρημα ότι  $W_z = W_p$ .

### Απόδειξη:

Αντί να έχουμε ακτινική διαστολή σε όλα τα ύψη όπως στο δεύτερο θεώρημα έχουμε πάγωμα της ροής σε ένα ύψος  $z$  και ακτινική διαστολή για όλα τα ύψη πάνω από το συγκεκριμένο ύψος  $z$ . Αυτό έχει σαν συνέπεια οι μαγνητικές τάσεις στην επιφάνεια στο ύψος  $z$  να παίζουν τον ρόλο του καινούργιου  $W_o(z)$  οπότε όλες οι ποσότητες θα είναι συναρτήσει του ύψους και άρα το δεύτερο θεώρημα θα γενικευόταν σαν,

$$W_z(z) - W_p(z) = \frac{1}{2}W_o(z) = \frac{1}{8\pi} \int \int B_R B_z R^2 d\phi dR \quad (2.25)$$

Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση ως προς  $z$  και θεωρήσουμε ότι το  $\frac{d}{dz}(\frac{W_o(z)}{2})$  είναι μικρό σε σχέση με το  $W_z$  και  $B_R \ll B_z$  τότε προκύπτει ότι  $W_z = W_p$ . Το θεώρημα αυτό είναι τοπικό και ισχύει προσεγγιστικά μόνο όταν είμαστε μακριά από τον δίσκο και άρα δεν είναι τόσο ισχυρό όσο το δεύτερο θεώρημα.

## 2.3 Πρόχειρες εκτιμήσεις για τα πεδία

Σε αυτήν την παράγραφο θα θεωρήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες χωρίς κυλινδρική συμμετρία όμως καθώς δεν μας είναι αναγκαίο στην παρούσα φάση. Το πρώτο θεώρημα που αποδείξαμε ελέγε ότι,

$$W_R + W_\phi = W_z + (1 - s)W_p \quad (2.26)$$

Προσθέντωντας το  $W_z + W_p$  και χρησιμοποιώντας το θεώρημα δύο θα καταλήξουμε στην σχέση,

$$W = (4 - s)W_z + \frac{1}{2}(s - 2)W_o \quad (2.27)$$

Θα θεωρήσουμε ότι  $s < 4$  και ότι το έργο των τάσεων  $W_o$  μηδενίζεται πάνω από το  $z = 0$  άρα αν μετά απο κάποιες στροφές των μαγνητικών γραμμών αυτές θα έχουν ανέβει σε κάποιο ύψος οπότε η μεταβολή του έργου θα είναι,

$$\Delta W = (4 - s)\Delta W_z = (4 - s)\Delta W_p \quad (2.28)$$

Όπου  $W_o = 0$  αφού είμαστε πάνω από το  $z = 0$ . Συνεπώς τα  $W_z, W_p$  μπορούν να αυξηθούν χωρίς όριο όσο συνεχίζεται η συστροφή των δυναμικών γραμμών λόγω της περιστροφής του δίσκου. Άρα αφού τα  $W_z, W_p$  αυξάνονται μαζί τότε πρέπει σε κάθε περιστροφή να αυξάνεται και το ύψος ολόκληρης αυτής της μαγνητικής δομής. Στην συνέχεια αν θεωρήσουμε ότι το ύψος αυτών των δομών είναι μεγάλο θα πάρουμε τις μέσες τιμές των πεδίων για να βγάλουμε κάποια πρώτα συμπεράσματα. Οπότε ορίζοντας την μέση τιμή των πεδίων  $B_{x,y,z}$  να είναι,

$$\langle B_{x,y,z}^2 \rangle = \frac{\int \int B_{x,y,z}^2 dx dy}{A} \quad (2.29)$$

Όπου το ολοκλήρωμα είναι υπολογισμένο σε καρτεσιανές πλέον. Συνεπώς από το θεώρημα τρία αφού είμαστε σε ύψος  $z$  και αγνοήσουμε τις τάσεις θα έχουμε ότι,

$$\langle B_z^2 \rangle = 8\pi p(z) \quad (2.30)$$

Όπου η μέση τιμή είναι υπολογισμένη σε ύψος  $z$ . Όσο η δομή γίνεται όλο και πιο ψηλή το  $B_R$  γίνεται όλο και πιο μικρό σε σχέση με το  $B_\phi$  και το  $B_z$  οπότε μπορούμε να το αγνοήσουμε και άρα από το θεώρημα ένα θα έχουμε ότι,

$$w_\phi = w_z + w_p + \int A(z') \frac{dp}{dz'} dz' \quad (2.31)$$

Όπως βλέπουμε γράψαμε το θεώρημα ένα με τα μικρά  $w$  χωρίς αυτό να προκαλεί μεγάλη σύγχυση. Οπότε ξέρωντας ότι ισχύει και η σχέση  $W_z = W_p$  η προηγούμενη γίνεται,

$$w_\phi = w_p(2 - w_p^{-1} \int A(z')(-\frac{dp}{dz'})dz') \quad (2.32)$$

Αν ορίσουμε σαν  $\sigma(z) = w_p^{-1} \int A(z')(-\frac{dp}{dz'})dz'$  τότε η προηγούμενη θα γίνει,

$$w_\phi = w_z(2 - \sigma(z)) \quad (2.33)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέρη της προηγούμενης εξίσωσης με  $8\pi/A$  ώστε να πάρουμε τις μέσες τιμές των μαγνητικών πεδίων τότε θα καταλήξουμε στην παρακάτω ενδιαφέρουσα σχέση,

$$\langle B_\phi^2 \rangle = (2 - \sigma)\langle B_z^2 \rangle = (2 - \sigma)8\pi p(z) \quad (2.34)$$

Για σταθερή πίεση το  $\sigma = 0$  οπότε η προηγούμενη σχέση θα είναι όπως εύκολα φαίνεται,

$$\langle B_\phi^2 \rangle = 2\langle B_z^2 \rangle = 16\pi p(z) \quad (2.35)$$

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η συνολική πολοειδής ροή που εξέρχεται από τον δίσκο στο  $z = 0$  είναι  $F$ . Υποθέτουμε επίσης ότι επιστρέφει στον δίσκο σε μια μεγαλύτερη ακτίνα ώστε και τα δύο 'πόδια' των μαγνητικών γραμμών να βρίσκονται στο επίπεδο του δίσκου. Όπως είναι λογικό οι δυναμικές γραμμές φτάνουν ένα μέγιστο ύψος  $Z$  και όλη αυτή η μαγνητική δομή έχει ακτίνα  $R$ . Σε κάθε στροφή της πολοειδής ροής δημιουργείται και μια ίση τοροειδής ροή που πέρναει από την επιφάνεια  $RZ$  και όλος αυτός ο μαγνητικός πύργος έχει όγκο  $\pi R^2 Z$ , συνεπώς μετά από  $N$  στροφές του ένος «ποδιού» των μαγνητικών γραμμών σε σχέση με το άλλο, το τοροειδές μαγνητικό πεδίο  $B_\phi$  θα είναι,

$$B_\phi = \frac{NF}{RZ} \quad (2.36)$$

Αυτό μπορεί να γίνει πιο κατανοητό αν θυμηθούμε την γενική σχέση για την ροή που είναι  $P = NF = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$  οπότε αν θεωρήσουμε ότι σε ύψος  $Z$  έχουμε ορθογώνια επιφάνεια εμβαδού  $RZ$  από όπου περνάει η ροή και ότι το μαγνητικό πεδίο δεν εξαρτάται σε πρώτη τάξη ως προς  $z$  τότε από το προηγούμενο ολοκλήρωμα προκύπτει η σχέση 2.36. Οπότε πολύ εύκολα από την 2.36 μπορούμε να βρούμε το έργο του  $B_\phi$  να είναι,

$$8\pi W_\phi = \frac{N^2 F^2 \pi}{Z} \quad (2.37)$$

Αν θεωρήσουμε επίσης ότι η ροή  $F$  ανεβαίνει μέχρι ένα ύψος  $Z$  και μετά κατεβαίνει και θεωρήσουμε και ένα κύκλο ακτίνας  $R$  και εμβαδού  $\pi R^2$  τότε το πεδίο  $B_z$  προκύπτει πολύ εύκολα να είναι,

$$|B_z| = \frac{2F}{\pi R^2} \quad (2.38)$$

Το 2 στην προηγούμενη σχέση υπάρχει γιατί θεωρούμε το μαγνητικό πεδίο να ανεβαίνει μέχρι ένα ύψος και να κατεβαίνει οπότε πρέπει να το πάρουμε δύο φορές στους υπολογισμούς μας. Όπως και πριν εύκολα μπορούμε να βρούμε πλέον το έργο που θα είναι,

$$8\pi W_z = \frac{4F^2 Z}{\pi R^2} \quad (2.39)$$



Τέλος με την ίδια ακριβώς λογική μπορούμε να βρούμε και το πεδίο  $B_R$  αν θεωρήσουμε ότι η ροή περνάει μέσα από ένα κύλινδρο ακτίνας  $R/\sqrt{2}$  οπότε τελικά θα έχουμε,

$$B_R = \frac{F}{\sqrt{2}\pi RZ} \quad (2.40)$$

Όπως και πριν το έργο θα προκύψει εύκολα να είναι,

$$8\pi W_R = \frac{F^2}{2\pi Z} \quad (2.41)$$

Σε όλα τα προηγούμενα για να μην δημιουργηθεί κάποια σύγχυση ως προς τον τρόπο που υπολογίσαμε το έργο χρησιμοποιήσαμε την σχέση που είχαμε ορίσει στην αρχή του κεφαλαίου ότι  $8\pi W_{R,\phi,z} = \int \int B_{R,\phi,z}^2 dS$ .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι έχουμε σταθερή πίεση αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να γενικευτεί και για μη σταθερή πίεση. Συνεπώς το έργο της πίεσης θα είναι όπως εύκολα προκύπτει από το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης 2.1 ,

$$W_p = p\pi R^2 Z \quad (2.42)$$

Άρα τελικά αν μαζέψουμε όλους τους όρους για να βρούμε την συνολική ενέργεια θα προκύψει ότι,

$$W = \frac{F^2}{\pi} \left[ \frac{(N^2\pi^2 + \frac{1}{2})}{Z} + (4R^{-2} + 8\pi^3 p F^{-2} R^2) Z \right] \quad (2.43)$$

Παραγωγίζοντας ως προς  $R$  την προηγούμενη σχέση και θεωρώντας ότι είμαστε πάνω από τον δίσκο άρα δεν θα παίζουν ρόλο οι μαγνητικές τάσεις συνεπώς θα ισχύει ότι  $\frac{dW}{dR^2} = 0$  οπότε θα καταλήξουμε έπειτα και από κάποιες αλγεβρικές πράξεις στην σχέση,

$$\pi R^2 = F(2\pi p)^{-1/2} \quad (2.44)$$

Όπως βλέπουμε από την σχέση 2.44 η επιφάνεια καθορίζεται πλήρως από την ροή  $F$  και από την πίεση  $p$  του μεσοαστρικού χώρου. Παραγωγίζοντας και ως προς  $Z$  και απαιτώντας να είναι ελάχιστο θα έχουμε ότι,

$$Z = N\pi(R/\sqrt{8})(1 + \frac{1}{2}N^{-2}\pi^{-2})^{1/2} \quad (2.45)$$

Όπου αντικαταστήσαμε και την σχέση 2.44 οπότε και προέκυψε η προηγούμενη. Τώρα αν πούμε ότι  $N = (2\pi)^{-1}\Omega t$  όπου το  $\Omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα των «ποδιών» του σωλήνα ροής και αν θεωρήσουμε κιόλας ότι  $N \gg 1$  θα έχουμε ότι,

$$Z \simeq \frac{1}{4\sqrt{2}}\Omega R t \quad (2.46)$$

Όπως βλέπουμε το ύψος  $Z$  της μαγνητικής δομής θα αυξάνει σε κάθε στροφή με ταχύτητα  $\propto \Omega R$ . Ακόμα και με αυτές τις πρόχειρες εκτιμήσεις των πεδίων βλέπουμε ότι η ταχύτητα αυτών των μαγνητικών πύργων εξαρτάται άμεσα από την γωνιακή ταχύτητα του δίσκου και όπως θα δούμε στην συνέχεια ανάλογα με τον αν θεωρήσουμε τον δίσκο να περιστρέφεται σαν στερεό σώμα η διαφορά θα μας οδηγήσει σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και με ένα δεύτερο τρόπο. Αν πάμε να βρούμε τις μέσες τιμές στην σχέση 2.31 τότε θα έχουμε την γενική εξίσωση,

$$\langle B_R^2 \rangle + \langle B_\phi^2 \rangle = \langle B_z^2 \rangle + 8\pi(p(z) + [A(z)]^{-1} \int A(z') \frac{dp}{dz'} dz') \quad (2.47)$$

Αν θεωρήσουμε σταθερή πίεση  $p$  η προηγούμενη θα γίνει πολύ πιο απλή και θα έχει την μορφή,

$$\langle B_R^2 \rangle + \langle B_\phi^2 \rangle = \langle B_z^2 \rangle + 8\pi p \quad (2.48)$$

Όπου οι μέσες τιμές έχουν υπολογιστεί σε ένα σταθερό ύψος. Βάζοντας τα πεδία που υπολογίσαμε πιο πάνω θα έχουμε ότι,

$$\frac{F^2}{2\pi^2 R^2 Z^2} (1 + 2\pi^2 N^2) = \frac{4F^2}{\pi^2 R^4} + 8\pi p \quad (2.49)$$

Έστω ότι σε πρώτη φάση αγνοούμε την πίεση οπότε και η προηγούμενη σχέση θα γίνει,

$$\frac{Z^2}{R^2} = \frac{1}{8} (1 + 2\pi^2 N^2) \quad (2.50)$$

Για  $N \gg 1$  η προηγούμενη σχέση 2.50 όπως μπορούμε να δούμε γίνεται,

$$\frac{Z}{R} \rightarrow \frac{\pi}{2} N \quad (2.51)$$

Όπως φαίνεται η ευθυγράμμιση  $Z/R$  αυξάνει με κάθε στροφή αλλά επειδή δεν υπάρχει εξωτερική πίεση να συγκρατήσει τα πεδία το  $N$  δεν θα προλάβει να γίνει αρκετά μεγάλο πριν τα πεδία αποκολληθούν στο άπειρο συνεπώς χρειαζόμαστε πίεση ώστε τα πεδία να χρειάζονται άπειρη ενέργεια για να αποκολληθούν και αυτό να έχει σαν αποτέλεσμα το  $N$  να γίνει αρκετά μεγάλο ώστε να έχουμε την παρατηρούμενη ευθυγράμμιση που βλέπουμε στους αστροφυσικούς πίδακες. Για περισσότερες πληροφορίες για την περίπτωση μηδενικής πίεσης υπάρχουν στην εργασία των Lynden-Bell & Boily 1994[14].

Οπότε αν πάμε στην εξίσωση του θεωρήματος δύο σχέση 2.24 και βρούμε τις μέσες τιμές τότε θα καταλήξουμε στην σχέση,

$$\frac{4F^2}{\pi^2 R^4} = 8\pi p + 2\sqrt{2} \frac{F^2}{\pi R^2 Z^2} \quad (2.52)$$

Αν λύσουμε τις σχέσεις 2.49 και 2.52 ως προς  $p$  τότε θα καταλήξουμε στην σχέση,

$$\frac{Z^2}{R^2} = \frac{1}{16} (2\sqrt{2} + 1 + 2\pi^2 N^2) \quad (2.53)$$

Οπότε για μεγάλα  $N$  η προηγούμενη θα γίνει ασυμπτωτικά ,

$$\frac{Z}{R} \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{2}} N \quad (2.54)$$

Αν θυμηθούμε ότι το  $N = (2\pi)^{-1} \Omega t$  τότε όπως βλέπουμε θα προκύψει ακριβώς η ίδια σχέση 2.46 κάτι που το περιμέναμε αφού οι δύο τρόποι που εφαρμόσαμε είναι ισοδύναμοι και βασίζονται στις προσεγγιστικές σχέσεις των πεδίων.

## Κεφάλαιο 3

# Μοντέλο μηδενικής δύναμης (*Force – Free*)

### 3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα γράψουμε τις εξισώσεις της μηδενικής δύναμης μοντέλου, θα βρούμε πως προκύπτουν τα μαγνητικά πεδία και θα εξάγουμε την Grad-Shafranov εξίσωση. Τέλος θα λύσουμε την Grad-Shafranov υπό κάποιες προϋποθέσεις.

### 3.2 Βασικές εξισώσεις

Για να λύσουμε πλήρως το πρόβλημα με τους αστροφυσικούς πίδακες χρειαζόμαστε τις πλήρεις εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής αλλά εμείς εδώ υποθέτουμε ότι μέσα στον μαγνητικό πύργο το μαγνητικό πεδίο είναι κυρίαρχο σε σχέση με τις άλλες δυνάμεις αδράνειας οπότε και θα τις αγνοήσουμε. Όπως έχουμε ξαναγράψει όπου υπάρχει πεδίο δεν υπάρχει αέριο και όπου υπάρχει αέριο δεν υπάρχει πεδίο. Αν γράψουμε την πλήρη εξίσωση της ορμής στην *MHD* περίπτωση θα έχουμε ότι,

$$\gamma\rho\frac{d}{dt}(\xi\gamma\vec{V}) = -\vec{\nabla}P + \frac{J^0}{c}\vec{E} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} \quad (3.1)$$

Θεωρώντας ότι στο *force free* όριο δεν θα έχουμε τους όρους αδράνειας δηλαδή θεωρούμε ότι μέσα στον μαγνητικό πύργο δεν έχουμε αέριο με συνέπεια να μηδενίζεται ο όρος με την ταχύτητα του ρευστού καθώς και η κλίση της πίεσης και επειδή είμαστε σε μη σχετικιστικές ταχύτητες δεν θα υπάρχει και ο όρος του ηλεκτρικού πεδίου καθώς θα είναι αμελητέος σε σχέση με το μαγνητικό πεδίο. Συνεπώς από την προηγούμενη σχέση θα καταλήξουμε στην εξίσωση ορμής στο *force free*,

$$\vec{J} \times \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

Από την σχέση 3.2 βλέπουμε ότι το  $\vec{J}$  είναι παράλληλο στο  $\vec{B}$  οπότε η 3.2 μπορεί να λυθεί και να μας δώσει,

$$\vec{J} = \tilde{\alpha}\vec{B} \quad (3.3)$$

Όπου το  $\tilde{\alpha}$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση της θέσης. Τώρα επειδή η απόκλιση του  $B$  είναι 0 το ίδιο θα είναι και για το  $J$  οπότε και προκύπτει ότι,

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\alpha} = 0 \quad (3.4)$$

Το οποίο μας λέει ότι το  $\tilde{\alpha}$  είναι σταθερά πάνω στις δυναμικές γραμμές και αργότερα θα προκύψει ότι θα είναι η παράγωγος του ρεύματος που θα περνάει από οποιαδήποτε διατομή. Θεωρούμε ένα αξισυμμετρικό σύστημα σε κυλινδρικές συντεταγμένες και ορίζουμε την συνάρτηση ροής  $P(R, z)$  που μας δίνει την ροή μέσα από μια κυκλική διατομή ακτίνας  $R$  σε ύψος  $z$ . Η γενική σχέση της ροής είναι όπως ξέρουμε,

$$P = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.5)$$

Το  $\vec{S} = \pi R^2 \hat{z} \rightarrow d\vec{S} = 2\pi R dR \hat{z}$  συνεπώς το εσωτερικό γινόμενο στο ολοκλήρωμα θα είναι  $\vec{B} \cdot d\vec{S} = (B_z \hat{z}) \cdot (2\pi R dR \hat{z}) = B_z 2\pi R dR$  άρα αν αντικαταστήσουμε την σχέση αυτή στην προηγούμενη θα καταλήξουμε στην σχέση,

$$P = \int B_z 2\pi R dR \quad (3.6)$$

Από την προηγούμενη σχέση φαίνεται πολύ καθαρά ότι η  $z$  συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου θα είναι,

$$B_z = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial P}{\partial R} \quad (3.7)$$

Για το ακτινικό μαγνητικό πεδίο  $B_R$  θα έχουμε ότι η ακτινική επιφάνεια ενός κυλίνδρου θα είναι  $\vec{S} = 2\pi R z \hat{R} \rightarrow d\vec{S} = 2\pi R dz \hat{R}$ . Άρα το εσωτερικό γινόμενο στην σχέση της ροής θα είναι  $\vec{B} \cdot d\vec{S} = (-B_R \hat{R}) \cdot (2\pi R dz \hat{R}) = -B_R 2\pi R dz$  οπότε αν το αντικαταστήσουμε στην σχέση της ροής θα έχουμε ότι,

$$P = - \int B_R 2\pi R dz \quad (3.8)$$

Από την προηγούμενη σχέση φαίνεται πολύ καθαρά ότι το μαγνητικό πεδίο στον άξονα  $R$  θα είναι,

$$B_R = - \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.9)$$

Το τοροειδές μαγνητικό πεδίο προκύπτει από τον νόμο *Ampere* αν θεωρήσουμε μια κυκλική διατομή δηλαδή,

$$\beta(P) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (3.10)$$

το  $\beta(P)$  θα είναι το ρεύμα που πέρνα από μια διατομή και επειδή το στοιχειώδες μήκος σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα είναι  $d\vec{l} = R d\phi \hat{\phi}$  άρα  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = (B_\phi \hat{\phi}) \cdot (R d\phi \hat{\phi}) = B_\phi R d\phi$  οπότε προκύπτει ότι το  $B_\phi$  θα είναι αν ολοκληρώσουμε στην προηγούμενη σχέση το  $\phi$  από 0 έως  $2\pi$  δηλαδή,

$$\beta(P) = \int_0^{2\pi} B_\phi R d\phi \quad (3.11)$$

$$B_\phi = \frac{1}{2\pi R} \beta(P) \quad (3.12)$$

Αν μαζέψουμε τις σχέσεις 3.7,3.9,3.12 τότε μπορούμε να γράψουμε σε πιο συμπτυγμένη μορφή το μαγνητικό πεδίο δηλαδή θα είναι,

$$\vec{B} = \vec{\nabla}P \times \vec{\nabla}(\phi/2\pi) + \beta(P)\vec{\nabla}(\phi/2\pi) \quad (3.13)$$

Στην συνέχεια ξέρουμε ότι ο νόμος του *Ampere* σε διαφορική μορφή γράφεται σαν,

$$4\pi\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (3.14)$$

Αν στην προηγούμενη σχέση αντικαταστήσουμε την 3.13 για το μαγνητικό πεδίο και θυμηθούμε την διανυσματική ταυτότητα  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$  θα έχουμε ότι,

$$4\pi\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = [\vec{\nabla}(\frac{\phi}{2\pi}) \cdot \vec{\nabla}]\vec{\nabla}P - (\vec{\nabla}P \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{\phi}{2\pi}) - \vec{\nabla}(\frac{\phi}{2\pi})\vec{\nabla}^2P + \vec{\nabla}(\beta(P)) \times \vec{\nabla}(\frac{\phi}{2\pi}) \quad (3.15)$$

$$4\pi\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = -[R\frac{\partial}{\partial R}(\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial R}) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}]\vec{\nabla}(\frac{\phi}{2\pi}) + \vec{\nabla}(\beta(P)) \times \vec{\nabla}(\frac{\phi}{2\pi}) \quad (3.16)$$

Αν θυμηθούμε ότι στην *force free* ισχύει η σχέση 3.3 δηλαδή  $\vec{J} = \tilde{\alpha}\vec{B}$  και την συνδυάσουμε με την προηγούμενη σχέση τότε προκύπτουν δύο σχέσεις ,

$$\vec{\nabla}\beta = 4\pi\tilde{\alpha}\vec{\nabla}P \quad (3.17)$$

και

$$R\frac{\partial}{\partial R}(\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial R}) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -4\pi\tilde{\alpha}\beta \quad (3.18)$$

Από την 3.17 φαίνεται ότι το  $\tilde{\alpha}$  θα είναι συνάρτηση του P και πιο συγκεκριμένα θα ισχύει ότι,

$$\frac{d\beta}{dP} = \beta'(P) = 4\pi\tilde{\alpha} \quad (3.19)$$

Λύνοντας την προηγούμενη ως προς  $\tilde{\alpha}$  και εισάγοντας την στην 3.18 θα φτάσουμε στην Grad-Shafranov εξίσωση που θέλαμε,

$$R\frac{\partial}{\partial R}(\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial R}) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -\beta'\beta \quad (3.20)$$

Αυτή η εξίσωση πρέπει να λυθεί αλλά η επιφάνεια  $S$  που δίνεται από την ακτίνα  $R = R_m(z)$  είναι άγνωστη και εκεί πρέπει να ισχύει η ισορροπία των πιέσεων  $B^2 = 8\pi p(z)$ . Η εξίσωση αυτή είναι μη γραμμική οπότε αυτό δυσκολεύει κατά πολύ τα πράγματα καθώς δεν υπάρχει σίγουρη λύση για μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις αλλά πρέπει να βρούμε συγκεκριμένη περιοχή που θα λύνεται. Επίσης η συνάρτηση  $\beta(P)$  είναι άγνωστη και πρέπει να προκύψει από την λύση οπότε πρέπει να διαλέξουμε έτσι το  $\beta(P)$  ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση και να ισχύουν οι συνθήκες στα άκρα του πύργου που είναι  $P(0, z) = P(R_m, z) = 0$ . Ένα πλεονέκτημα που έχουμε με αυτήν την εξίσωση σε σχέση με την αντίστοιχη στην σχετικιστική *MHD* είναι ότι στην

μαγνητοϋδροδυναμική περίπτωση έχουμε τρία κρίσιμα σημεία στα οποία απειρίζονται οι παράγωγοι. Τα σημεία αυτά είναι το σημείο *Alfven*, το γρήγορο μαγνητοχηητικό σημείο και το αργό μαγνητοχηητικό σημείο. Για να περάσει η λύση από αυτά τα σημεία πρέπει να διαλέξουμε κατάλληλα τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες ώστε να μην απειρίζονται οι παράγωγοι. Αντιθέτως στην σχετικιστική *force free* έχουμε μόνο ένα κρίσιμο σημείο το οποίο λέγεται επιφάνεια φωτός οπότε είναι πολύ πιο απλό. Στην δικιά μας μη σχετικιστική περίπτωση δεν έχουμε κανένα κρίσιμο σημείο διότι ο κώνος φωτός είναι στο άπειρο. Επίσης στην δικιά μας περίπτωση η εξίσωση είναι χρονοανεξάρτητη οπότε η εξάρτηση από τον χρόνο θα δίνεται μόνο μέσω της αλλαγής των συνοριακών συνθηκών με τον χρόνο δηλαδή μέσω της διαφορικής περιστροφής του δίσκου ο πύργος θα μεγαλώνει συνεχώς και αυτό θα αλλάζει τις συνοριακές συνθήκες, αυτός είναι και ο λόγος που θεωρούμε στο μοντέλο αυτό ότι ο μαγνητικός πύργος είναι μια αλληλουχία στατικών δομών. Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί με αρκετούς τρόπους, έναν απλό τρόπο θα τον δούμε στην επόμενη παράγραφο. Ο πιο διαδεδομένος όμως τρόπος είναι το  $r$  self similar μοντέλο όπου θεωρούμε ότι η ροή γράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες σαν  $P = r^{-l} f(\theta)$ , βεβαία υπάρχουν και άλλοι τρόποι να λυθεί όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 6.

### 3.3 Λύση της *Grad – Shafranov* για $\kappa = \text{σταθερό}$

Στην παράγραφο αυτή θα θεωρήσουμε κυλινδρικά πεδία δηλαδή  $B_R = 0$ . Από την σχέση 3.13 βλέπουμε ότι  $\vec{B} \cdot \nabla P = 0$  αυτό σημαίνει ότι η  $P$  είναι σταθερά πάνω στις γραμμές ροής. Οι γραμμές ροής προκύπτουν από την συνθήκη  $ds \parallel \vec{B}$  το οποίο δίνει,

$$\frac{Rd\phi}{B_\phi} = \frac{dz}{B_z} \quad (3.21)$$

Η αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις για τα πεδία που έχουμε βρει η προηγούμενη θα γίνει,

$$\frac{Rd\phi}{\beta(P)} = \frac{dz}{\partial P / \partial R} \quad (3.22)$$

Οπότε αν ορίσουμε την κλίση,

$$\kappa(R, z) = \frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{R} \frac{B_\phi}{B_z} \quad (3.23)$$

Αυτό το  $\kappa$  πιο συγκεκριμένα συνδέεται με το βήμα της έλικας. Αν η δυναμική γραμμή τυλίγεται ελικοειδώς γύρω από τον άξονα τότε όταν θα έχει τυλιχτεί κατά  $2\pi$  θα έχει ανέβει ύψος  $h$  άρα για τυχαίο ύψος  $dz$  θα έχει στραφεί κατά  $d\phi$  άρα θα έχουμε ότι  $dz = \frac{h}{2\pi} d\phi \rightarrow \kappa = \frac{2\pi}{h} = \frac{d\phi}{dz}$ . Από την προηγούμενη και από τον ορισμό των πεδίων θα έχουμε τις παρακάτω σχέσεις,

$$\beta = \kappa R \frac{\partial P}{\partial R} \quad (3.24)$$

και

$$B_\phi = \kappa R B_z \quad (3.25)$$

Συνεπώς πλέον είναι πολύ εύκολο να βρούμε την παράγωγο του  $\beta(P)$  το οποίο σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα είναι,

$$\frac{d\beta}{dP} = \beta' = (d\beta/dR)/(dP/dR) \quad (3.26)$$

Συνεπώς θα έχουμε ότι,

$$-\beta\beta' = -\kappa R \frac{d}{dR} \left( \kappa R \frac{dP}{dR} \right) \quad (3.27)$$

Οπότε από την εξίσωση Grad-Shafranov σχέση 3.20 αν θεωρήσουμε ότι η ροή δεν θα εξαρτάται από το  $z$  θα έχουμε ότι,

$$R \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{R} \frac{dP}{dR} \right) = -\kappa R \frac{d}{dR} \left( \kappa R \frac{dP}{dR} \right) \quad (3.28)$$

Αν θεωρήσουμε επίσης ότι και η  $\kappa = \text{σταθερό}$  η προηγούμενη θα πάρει μια πιο απλή μορφή,

$$\frac{1}{R} \frac{dP}{dR} + \kappa^2 R \frac{dP}{dR} = 2\pi C \quad (3.29)$$

Αυτή λύνεται εύκολα ως προς  $\frac{dP}{dR}$  και καταλήγουμε στην σχέση,

$$\frac{dP}{dR} = \frac{2\pi RC}{1 + \kappa^2 R^2} \quad (3.30)$$

Αν θυμηθούμε τις σχέσεις 3.7 και την 3.25 τότε τα πεδία  $B_z$  και  $B_\phi$  θα έχουν την μορφή,

$$B_z = \frac{C}{1 + \kappa^2 R^2} \quad (3.31)$$

$$B_\phi = \frac{\kappa RC}{1 + \kappa^2 R^2} \quad (3.32)$$

Τελικά το συνολικό πεδίο θα είναι,

$$B^2 = B_z^2 + B_\phi^2 = \frac{C^2}{1 + \kappa^2 R^2} \quad (3.33)$$

Τέλος λύνοντας την 3.30 θα βρούμε ότι η ροή θα είναι,

$$P = P_o + \frac{\pi C}{\kappa^2} \ln(1 + \kappa^2 R^2) \quad (3.34)$$

Με αυτές τις εξισώσεις θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο. Αυτή ήταν η παρουσίαση μιας απλής λύσης θεωρώντας ότι η κλίση  $\kappa$  είναι σταθερή και ο πίδακας κυλινδρικός. Αυτό θα μας χρειαστεί στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα παρουσιάσουμε το μοντέλο του Lynden-Bell για δίσκο που περιστρέφεται σαν στερεό σώμα και θα δούμε σε ποια συμπεράσματα θα καταλήξουμε.

# Κεφάλαιο 4

## Μοντέλο δίσκου που περιστρέφεται τοπικά σαν στερεό σώμα

### 4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το μοντέλο του Lynden-Bell για την δημιουργία των μαγνητικών πύργων από ένα δίσκο προσαύξησης που περιστρέφεται τοπικά σαν στερεό σώμα.

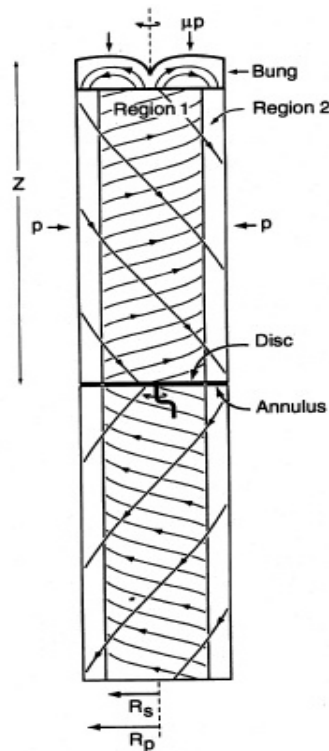
### 4.2 Περιστροφή δίσκου σαν στερεό σώμα

Στην φύση οι δίσκοι προσαύξησης περιστρέφονται διαφορεικά δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα αλλάζει από ακτίνα σε ακτίνα όμως σε αυτό το απλουστευμένο μοντέλο που θα παρουσιάσουμε στο κεφαλαίο αυτό θα υποθέσουμε ότι ο δίσκος περιστρέφεται σαν στερεό σώμα. Μια ακόμα υπόθεση που κάνουμε είναι ότι δεν χρειαζόμαστε μια συνεχή περιστροφή αλλά μια αλληλουχία στατικών δομών όπου ο δίσκος θα έχει περιστραφεί λίγο κάθε φορά. Όπως προείπαμε αυτό το απλό μοντέλο δεν δίνει μια ακριβή μορφή της πραγματικότητας αλλά δείχνει με ένα γλαφυρό τρόπο τον μηχανισμό δημιουργίας των πίδακων από δίσκους προσαύξησης.

Θεωρούμε αρχικά ότι το μαγνητικό πεδίο ανεβαίνει από το κεντρικό δίσκο και κατεβαίνει ξανά στον δίσκο αφού έχει περιελιχθεί γύρω από τον άξονα όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Θα μελετήσουμε μόνο την περιοχή  $z \geq 0$  διότι η περιοχή  $z \leq 0$  είναι ίδια λόγω συμμετρίας. Ο πίδακας όπως βλέπουμε στην εικόνα αποτελείται από έναν εσωτερικό πίδακα και έναν εξωτερικό. Μέσα στον πίδακα θεωρούμε ότι δεν έχουμε ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου και επίσης ισχύει παντού η προσέγγιση της force-free. Οι δυναμικές γραμμές περιελίσσονται γύρω από τον άξονα μέχρι να φτάσουν στο ύψος  $Z$  και εκεί αντιστρέφονται με αποτέλεσμα να αρχίσουν να κατεβαίνουν μέχρι που φτάνουν ξανά στην βάση του δίσκου. Επίσης λόγω ασυνέχειας του μαγνητικού πεδίου μεταξύ του εσωτερικού πίδακα και του εξωτερικού εμφανίζεται ένα φύλλο ρεύματος στην ακτίνα  $R = R_s$ , όπως επίσης ένα φύλλο ρεύματος εμφανίζεται στην εξωτερική ακτίνα  $R = R_p$  όπου σε αυτήν την ακτίνα η εξωτερική πίεση του μεσοαστρικού χώρου εξισορροπεί την μαγνητική πίεση. Στην εργασία του Lynden-Bell *Magnetic collimation by accretion discs of quasars and stars* 1996[15] θεωρεί ότι η ροπή πάνω στην



κορυφή του πίδακα είναι 0 οπότε η ενέργεια και η στροφορμή μένουν στο σύστημα και δεν φεύγουν όπως θα περιμέναμε. Οπότε για να το κάνουμε πιο ρεαλιστικό θα θεωρήσουμε εδώ ότι η ροπή δεν είναι 0 και για να γίνει αυτό το αξιωματικό μαγνητικό πεδίο  $B_\phi$  θα πρέπει να αλλάζει πρόσημο από την περιοχή 1 στην περιοχή 2. Τέλος αφού το πεδίο είναι κυλινδρικό υποθέτουμε ότι η σταθερά  $\kappa$  που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι ανεξάρτητη από το  $z$  και η συνολική γωνία που έχει στραφεί το πεδίο λόγω της περιέλιξης του μέχρι το ύψος  $Z$  είναι  $\Delta\varphi = \kappa Z$ . Όμως ο δίσκος περιστρέφεται σαν στερεό σώμα οπότε πρέπει το  $\kappa$  να είναι ανεξάρτητο και από το  $R$  στην περιοχή 1 αλλά το ίδιο ισχύει και για την περιοχή 2 χωρίς αυτό να σημαίνει πως το  $\kappa$  είναι το ίδιο στις δύο αυτές περιοχές.



Σχήμα 4.1: Στην εικόνα φαίνεται ο περιστρεφόμενος δίσκος καθώς και η κορυφή του πίδακα. Στην περιοχή 1 οι δυναμικές γραμμές ανεβαίνουν και κατεβαίνουν από την περιοχή 2. Η εξωτερική πίεση  $p$  συγκρατεί το πεδίο και όλη αυτή η δομή μετά από πολλές στροφές γίνεται ευθυγραμμισμένη (Lynden-Bell 1995[15]).

### Περιοχή 1:

Η περιοχή 1 είναι από  $0 \leq R \leq R_s$  και έχει σταθερά  $\kappa = \kappa_1$  και ότι  $C_1 = B_o$  το οποίο είναι το μαγνητικό πεδίο στον άξονα άρα από τις σχέσεις για τα μαγνητικά πεδία του κεφαλαίου 3 δηλαδή σχέσεις 3.31 και 3.32 θα έχουμε ότι,

$$B_z = \frac{B_o}{1 + \kappa_1^2 R^2} \quad (4.1)$$

$$B_\phi = \frac{\kappa_1 R B_o}{1 + \kappa_1^2 R^2} \quad (4.2)$$

$$B^2 = \frac{B_o^2}{1 + \kappa_1^2 R^2} \quad (4.3)$$

Η ροή φαίνεται πολύ καθαρά από την σχέση 3.34 δηλαδή θα είναι,

$$P = \frac{\pi B_o}{\kappa_1^2} \ln(1 + \kappa_1^2 R^2) \quad (4.4)$$

Όπου θεωρήσαμε ότι η ροή στον άξονα είναι 0 για αυτό και θέσαμε το  $P_o = 0$  με αποτέλεσμα να έχει αυτήν την μορφή. Επίσης θεωρούμε ότι στην ακτίνα  $R = R_s$  η ροή  $P$  θα φτάσει την μέγιστη τιμή της που την λέμε  $F$ . Ορίζοντας  $x_1 = \kappa_1 R_s$  τότε η προηγούμενη θα γίνει,

$$F = \frac{\pi B_o}{\kappa_1^2} \ln(1 + x_1^2) \quad (4.5)$$

Και το μαγνητικό πεδίο στην συγκεκριμένη ακτίνα θα είναι όπως εύκολα φαίνεται,

$$B_s^2 = \frac{B_o^2}{1 + x_1^2} \quad (4.6)$$

Όπως είπαμε και πριν στην ακτίνα αυτή λόγω ασυνέχειας του μαγνητικού πεδίου θα δημιουργηθεί ένα φύλλο ρεύματος που χωρίζει το πεδίο που ανεβαίνει από αυτό που κατεβαίνει.

## Περιοχή 2:

Στην περιοχή 2  $R_s \leq R \leq R_p$  οι σχέσεις για το μαγνητικό πεδίο θα είναι παρόμοιες με την περιοχή 1 με την διαφορά ότι τώρα θέλουμε το πεδίο  $B_z$  να αλλάζει πρόσημο από την μια περιοχή στην άλλη αλλά και το πεδίο  $B_\phi$  να αλλάζει πρόσημο ώστε να μην διατηρείται η στροφορμή οπότε και θεωρούμε ότι η σταθερά  $\kappa_2$  θα είναι θετική στην περιοχή 2. Συγκεκριμένα θα έχουμε ότι,

$$B_z = \frac{C_2}{1 + \kappa_2^2 R^2} \quad (4.7)$$

$$B_\phi = \frac{\kappa_2 R C_2}{1 + \kappa_2^2 R^2} \quad (4.8)$$

$$B^2 = \frac{C_2^2}{1 + \kappa_2^2 R^2} \quad (4.9)$$

Η σταθερά  $C_2$  θα αποδείξουμε πιο κάτω ότι είναι αρνητική. Η ροή όπως και πριν θα είναι της μορφής,

$$P = F + \frac{\pi C_2}{\kappa_2^2} \ln \frac{(1 + \kappa_2^2 R^2)}{(1 + \kappa_2^2 R_s^2)} \quad (4.10)$$

Αν ορίσουμε τις σταθερές  $x_2 = \kappa_2 R_s, x_p = \kappa_2 R_p$  και πούμε ότι η ροή να είναι μηδέν στην εξωτερική ακτίνα  $R = R_p$  τότε λύνοντας ως προς  $C_2$  την προηγούμενη σχέση θα έχουμε ότι,

$$C_2 \ln \frac{(1 + x_p^2)}{(1 + x_2^2)} = -\frac{\kappa_2^2 F}{\pi} = -\frac{x_2^2}{x_1^2} B_o \ln(1 + x_1^2) \quad (4.11)$$

Όπου στην τελευταία ισότητα αντικαταστήσαμε την  $F$  με την σχέση 4.5. Όπως βλέπουμε από την προηγούμενη σχέση η σταθερά  $C_2$  θα είναι αρνητική.

Στην συνέχεια θα χρειαστούμε μια σχέση για το πως συνδέονται οι σταθερές  $C_2$  και  $B_o$  οπότε αν πάρουμε την ισορροπία των μαγνητικών πιέσεων στην ακτίνα  $R = R_s$  δηλαδή θα ισχύει ότι,

$$\frac{B_{region1}^2}{8\pi} = \frac{B_{region2}^2}{8\pi} \rightarrow \quad (4.12)$$

$$\frac{B_o^2}{1+x_1^2} = \frac{C_2^2}{1+x_2^2} \rightarrow \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} = \frac{|C_2|/B_o}{\sqrt{1+x_2^2}} \quad (4.14)$$

Τέλος αν πάρουμε την ισορροπία των πιέσεων στην εξωτερική ακτίνα  $R = R_p$  θα έχουμε ότι,

$$\frac{B_{region2}^2}{8\pi} = p \rightarrow \quad (4.15)$$

$$\frac{C_2^2}{1+x_p^2} = 8\pi p \quad (4.16)$$

Αντικαθιστώντας την ποσότητα  $|C_2|/B_o$  από την σχέση 4.14 στην 4.11 θα πάρουμε την πρώτη από τις δύο αλγεβρικές εξισώσεις που θα χρειαστούμε για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τα  $x_1, x_2, x_p$ . Οπότε μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις θα καταλήξουμε στην,

$$\ln(1+x_p^2) = \ln(1+x_2^2) + \frac{x_2^2 \sqrt{1+x_1^2}}{x_1^2 \sqrt{1+x_2^2}} \ln(1+x_1^2) \quad (4.17)$$

Η δεύτερη αλγεβρική σχέση θα παραχθεί από την σχέση για τις κάθετες δυνάμεις στην κορυφή του πίδακα. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε ότι,

$$\int_0^{R_p^2} (B_\phi^2 - B_z^2) \frac{1}{8} dR^2 = \pi R_p^2 \mu p \quad (4.18)$$

Όπου το  $\mu$  είναι μια σταθερά που θα περιγράψουμε αργότερα αλλά για τώρα να πούμε ότι για  $\mu=1$  είναι η μαγνητοστατική περίπτωση όπου ο πίδακας κινείται με μηδενική ταχύτητα αλλά για άλλες δυναμικές καταστάσεις όπου το  $\dot{Z} > 0$  θα υπάρχει μια έξτρα δύναμη στην κορυφή του πίδακα λόγω της εισχώρησης του στον μεσοαστρικό χώρο οπότε και το  $\mu$  θα είναι διάφορο του ένα.

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση τα πεδία που βρήκαμε πιο πάνω και χωρίσουμε το ολοκλήρωμα σε περιοχές θα έχουμε ότι,

$$\frac{B_o^2}{x_1^2} \int_0^{x_1^2} \frac{x^2 - 1}{(1+x^2)^2} dx^2 + \frac{C_2^2}{x_2^2} \int_{x_2^2}^{x_p^2} \frac{x^2 - 1}{(1+x^2)^2} dx^2 = 8\pi \frac{x_p^2}{x_2^2} \mu p \quad (4.19)$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε σε βιβλία μαθηματικών με πίνακες ολοκληρωμάτων ότι θα ισχύει,

$$\int_0^x \frac{x^2 - 1}{(1+x^2)^2} dx^2 = \ln(1+x^2) - \frac{2x^2}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} [L(x) - 1] \quad (4.20)$$

Όπου η συνάρτηση  $L(x)$  ορίζεται από την σχέση,

$$L(x) = \left[ \frac{(1+x^2)}{x^2} \right] \ln(1+x^2) - 1 \quad (4.21)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 4.14 και 4.12 στην εξίσωση 4.19 και χρησιμοποιώντας και την 4.20 θα έχουμε μετά από κάποιες απλές πράξεις ότι,

$$L(x_1) - L(x_2) = \frac{1+x_2^2}{x_2^2} \frac{x_p^2}{1+x_p^2} [1 + \mu - L(x_p)] \quad (4.22)$$

Η σχέση 4.22 που μόλις αποδείξαμε μαζί με την σχέση 4.17 είναι το σετ των δύο αλγεβρικών εξισώσεων που πρέπει να λύσουμε και να προσδιορίσουμε τους αγνώστους του προβλήματος. Επειδή οι αλγεβρικές αυτές εξισώσεις είναι περίπλοκες και πεπλεγμένες δεν μπορούμε να τις λύσουμε αναλυτικά παρά μόνο αριθμητικά. Όπως βλέπουμε έχουμε δύο σχέσεις και τέσσερις αγνώστους οπότε για να λυθεί πλήρως θα θεωρήσουμε ότι οι μεταβλητές  $x_p, \mu$  θα είναι ελεύθερες παράμετροι οπότε με βάση αυτήν την ελευθερία μπορούμε να προσδιορίσουμε τις μεταβλητές  $x_1, x_2$ . Αυτό που θα κάνουμε στην επόμενη παράγραφο είναι ότι για κάθε ζευγάρι  $x_p, \mu$  θα προσδιορίσουμε τα  $x_1, x_2$  και θα δούμε τι αποτελέσματα θα πάρουμε. Τέλος επειδή δεν το έχουμε εξηγήσει μέχρι τώρα αν για παράδειγμα πούμε ότι  $\mu=1$  και  $x_p = 1.014$  τότε προκύπτει ότι  $x_1 = 5.496$  και  $x_2 = 0.734$ . Αυτοί οι αριθμοί μας δείχνουν πόσο έχει στραφεί το πεδίο σε κάθε περιοχή δηλαδή αν για μια μεταβολή του ύψους  $\Delta z = R_s$  η δυναμική γραμμή θα έχει στραφεί στην ακτίνα  $R_s$  κατά  $\Delta\phi=5.496 \text{ rad}$  ή  $315^\circ$  στην περιοχή 1 επειδή από τον ορισμό το  $x_1 = \kappa_1 R_s = \frac{\Delta\phi}{R_s} R_s \rightarrow \Delta\phi = x_1$  ενώ στην περιοχή 2 θα έχει στραφεί στην ακτίνα  $R_p$  καθώς κατεβαίνει μόνο κατά  $\Delta\phi=0.734 \text{ rad}$  ή  $42^\circ$

Ένα ενδιαφέρον σημείο είναι να δούμε πως αλλάζει η μαγνητική πίεση από το κέντρο του δίσκου και προς τα έξω καθώς απομακρυνόμαστε. Οπότε αν γράψουμε την μαγνητική πίεση στις διάφορες περιοχές του πίδακα θα έχουμε ότι είναι,

$$\frac{B^2}{8\pi} = \begin{cases} \frac{B_o^2}{8\pi(1+\kappa^2 R^2)} = \frac{B_o^2}{8\pi(1+x_1^2 R^2/R_s^2)}, R \leq R_s \\ \frac{B_o^2(1+x_2^2)}{8\pi(1+x_1^2)(1+x_2^2 R^2/R_s^2)}, R_p \geq R \geq R_s \\ \frac{B_o^2}{8\pi} \frac{1+x_2^2}{1+x_1^2} \frac{1}{1+x_p^2} = p, R = R_p \end{cases} \quad (4.23)$$

Βάζοντας τις τιμές των  $x_1, x_2, x_p$  που βρήκαμε στο παράδειγμα πιο πάνω θα βρούμε ότι η μαγνητική πίεση πάνω στον άξονα θα είναι,

$$\frac{B_o^2}{8\pi} = 41.1p \quad (4.24)$$

Όπως βλέπουμε είναι 40 φορές μεγαλύτερη η μαγνητική πίεση στον άξονα από την εξωτερική πίεση ενώ στην ακτίνα  $R_s$  θα είναι,

$$\frac{B_s^2}{8\pi} = 1.32p \quad (4.25)$$

Δηλαδή στην εσωτερική ακτίνα η μαγνητική πίεση είναι μόλις λίγο μεγαλύτερη από την εξωτερική. Έτσι φαίνεται καθαρά πως πέφτει η μαγνητική πίεση από τον άξονα που είναι τεράστια στην τιμή της μεσοαστρικής πίεσης στην εξωτερική ακτίνα  $R_p$ .

Άλλη μια ενδιαφέρουσα ποσότητα είναι το μέγιστο ύψος  $Z$  που φτάνει ο πίδακας και πως αυτός συνδέεται με την γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  του δίσκου. Από τον ορισμό του

$\kappa$  που όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3 είναι  $\kappa = \frac{2\pi}{h} = \frac{\Phi}{Z}$  άρα εύκολα φαίνεται ότι η γωνία θα είναι,

$$\Phi = 2\pi \frac{Z}{h} \quad (4.26)$$

Το  $h$  θα είναι το ύψος που θα ανέβει η δυναμική γραμμή όταν θα έχει τυλιχτεί κατά  $2\pi$  άρα ο λόγος  $Z/h$  θα μας δώσει τον αριθμό  $n$  που έχει τυλιχτεί η δυναμική γραμμή δηλαδή,

$$\Phi = 2\pi n = (\kappa_1 + \kappa_2)Z \quad (4.27)$$

Οπότε το ύψος  $Z$  εξαρτάται από την γωνία  $\Phi$  οπότε η προηγούμενη θα γίνει,

$$Z = \frac{\Phi}{x_1 + x_2} R_s = \frac{2\pi n x_2}{(x_1 + x_2) x_p} R_p \quad (4.28)$$

Βάζοντας τις τιμές των  $x_1, x_2, x_p$  που βρήκαμε πιο πάνω θα έχουμε ότι,

$$Z = 0.73nR_p \quad (4.29)$$

Συνεπώς για παράδειγμα μετά από 200 στροφές η εστίαση θα είναι  $Z/(2R_p) = 73$  όμως η εστίαση δίνεται από την σχέση ,

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{Z}{2R_p} = 73 \quad (4.30)$$

Οπότε το ημίανοιγμα του πίδακα θα είναι περίπου  $\theta \simeq 0.7^\circ$  δηλαδή λιγότερη από μια μοίρα συνεπώς ο πίδακας αυτός είναι εξαιρετικά εστιασμένος.

Αν πούμε ότι ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\Phi} = \Omega$  τότε από την σχέση 4.28 αν την παραγωγίσουμε ως προς χρόνο θα έχουμε ότι η ταχύτητα του πίδακα θα είναι,

$$\dot{Z} = \frac{1}{x_1 + x_2} \Omega R_s \quad (4.31)$$

Άρα και η ταχύτητα του πίδακα συνδέεται με την περιστροφή του δίσκου. Η σχέση αυτή δείχνει ότι έχουμε κάποιο πρόβλημα διότι εμείς θεωρήσαμε ότι  $\mu=1$  οπότε θα έπρεπε η ταχύτητα να είναι μηδενική αλλά εδώ βλέπουμε ότι αυτό δεν γίνεται που σημαίνει ότι η μαγνητοστατική κατάσταση δεν υφίστανται στην φύση άρα πρέπει να βρούμε άλλες μεταβλητές  $x_1, x_2$ . Πριν προχωρήσουμε να πούμε δύο λόγια για την σταθερά  $\mu$ . Η σταθερά αυτή προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος *Bernoulli*,

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const. \quad (4.32)$$

Αν υποθέσουμε ότι στον μεσοαστρικό χώρο η πίεση είναι της μορφής  $p = k\rho^\gamma$  τότε το ολοκλήρωμα στην προηγούμενη σχέση θα γίνει πολύ απλά,

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{k\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \quad (4.33)$$

Άρα και το συνολικό ολοκλήρωμα *Bernoulli* θα είναι,

$$\frac{k\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = const. \quad (4.34)$$

Στο σύστημα αναφοράς του κεφαλιού του πίδακα η ταχύτητα θα είναι μηδέν ενώ η πίεση θα είναι  $p_s$  οπότε από το θεώρημα *Bernoulli* θα έχουμε ότι,

$$\frac{k\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} + \frac{\dot{Z}^2}{2} = \frac{k\gamma}{\gamma-1}\rho_s^{\gamma-1} \quad (4.35)$$

Αν διαιρέσουμε με τον πρώτο όρο όλους τους όρους και λύσουμε και την σχέση  $p = k\rho^\gamma$  ως προς την πυκνότητα και το αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη θα έχουμε ότι,

$$\left(\frac{p_s}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\dot{Z}^2}{k\gamma\rho^{\gamma-1}} \quad (4.36)$$

Στον παρανομαστή του τελευταίου όρου αν το αναλύσουμε θα έχουμε  $k\gamma\rho^{\gamma-1} = k\rho^\gamma \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}$  αυτός όμως είναι ο ορισμός της ταχύτητας του ήχου σε ένα ρευστό δηλαδή  $c_o^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$  άρα τελικά θα έχουμε ότι η σταθερά  $\mu$  είναι ο λόγος των πιέσεων  $p_s/p$  δηλαδή,

$$\mu = \frac{p_s}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\dot{Z}^2}{c_o^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.37)$$

Όπως είπαμε και πριν για  $\mu=1$  η ταχύτητα δεν είναι μηδέν και δεν μπορεί να γίνει μηδέν για κανένα ζευγάρι  $x_1, x_2$  με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να μοντελοποιήσουμε μια μαγνητοστατική κατάσταση οπότε και θεωρούμε ότι υπάρχει ταχύτητα και το  $\mu$  είναι διάφορο του ένα δηλαδή αυτό μας δείχνει ότι δεν μπορούμε να θεωρούμε τον πίδακα σαν μια αλληλουχία στατικών δομών αλλά ένα δυναμικό σύστημα. Ένα δεύτερο πρόβλημα είναι ότι δεν λάβαμε υπόψιν το πως βγαίνουν οι γραμμές από τον δίσκο καθώς αυτήν την περιοχή δεν την μοντελοποιήσαμε συνεπώς αν το παίρναμε υπόψιν η γωνιακή ταχύτητα που θα αισθανόταν στην βάση του ο πίδακας θα ήταν διαφορετική από ακτίνα σε ακτίνα δηλαδή αυτό μας λέει ότι η υπόθεση του δίσκου προσαύξησης που περιστρέφεται σαν στερεό σώμα δεν είναι τελείως σωστή αλλά θα πρέπει να υποθέσουμε διαφορική περιστροφή.

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο θα προσπαθήσουμε να δούμε ποιοτικά το πως συμπεριφέρεται η ταχύτητα και οι μεταβλητές  $\mu, x_1, x_2, x_p$  και για να το κάνουμε αυτό θέλουμε να αλλάξουμε την ακτίνα  $R_s$  σε ποσότητες που μελετάμε στο πρόβλημα όπως η ροή  $F$  και η πίεση  $p$ . Η ακτίνα που μπορούμε να ορίσουμε με αυτές τις δύο ποσότητες είναι η  $R_F = \left(\frac{F}{\pi}\right)^{1/2}(8\pi p)^{-1/4}$  και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 4.5 , 4.14 , 4.16 θα καταλήξουμε στην σχέση για την ταχύτητα,

$$\dot{Z} = \frac{1}{x_1 + x_2} \Omega R_s = \Omega R_F \chi(x_1) \quad (4.38)$$

Όπου η συνάρτηση  $\chi(x_1)$  είναι,

$$\chi(x_1) = \frac{x_1}{(x_1 + x_2)[\ln(1 + x_1^2)]^{1/2}} \left[ \frac{1 + x_2^2}{(1 + x_p^2)(1 + x_1^2)} \right]^{1/4} \quad (4.39)$$

Αν ορίσουμε την αδιάστατη ποσότητα  $\omega = \frac{\Omega R_F}{c_o}$  που είναι η αδιάστατη γωνιακή ταχύτητα της μαγνητικής ροής που ανεβαίνει σε σχέση με αυτήν που κατεβαίνει δηλαδή είναι ο διαφορικός ρυθμός περιστροφής του δίσκου προσαύξησης. Οπότε από την σχέση 4.38 θα έχουμε αν διαιρέσουμε με  $c_o$  ότι  $\dot{Z}/c_o = \omega \chi(x_1)$  και αντικαθιστώντας αυτό στην σχέση 4.37 του  $\mu$  και λύνοντας ως προς  $\omega$  μετά από κάποιες πράξεις θα έχουμε ότι,

$$\omega = \frac{\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \sqrt{\mu^{1-1/\gamma} - 1}}{\chi(x_1)} \quad (4.40)$$

Ενώ η σχέση για την ταχύτητα θα είναι πολύ απλά,

$$\dot{Z} = c_o \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \sqrt{\mu^{1-1/\gamma} - 1} \quad (4.41)$$

Στην επόμενη παράγραφο για διαφορές τιμές του  $\mu$  και του  $x_p$  που είναι οι ελεύθερες παράμετροι του προβλήματος μας θα βρούμε τα  $x_1, x_2$  καθώς και τα  $\dot{Z}, \omega$  και θα φτιάξουμε κάποια ποιοτικά διαγράμματα για να δούμε πως μεταβάλλονται όλες οι ποσότητες συναρτήσει του  $x_1$ .

### 4.3 Αποτελέσματα-Συμπεράσματα

Στην παράγραφο αυτή για διάφορες τιμές του  $\mu$  θα υπολογίσουμε τις τιμές των  $x_1, x_2$  οι οποίες υπολογίζονται αριθμητικά από τις δυο αλγεβρικές εξισώσεις που γράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο δηλαδή,

$$\ln(1 + x_p^2) = \ln(1 + x_2^2) + \frac{x_2^2 \sqrt{1 + x_1^2}}{x_1^2 \sqrt{1 + x_2^2}} \ln(1 + x_1^2)$$

και,

$$L(x_1) - L(x_2) = \frac{1 + x_2^2}{x_2^2} \frac{x_p^2}{1 + x_p^2} [1 + \mu - L(x_p)]$$

Όπως έχουμε πει, σε αυτό το πρόβλημα έχουμε δύο ελεύθερες παραμέτρους, το  $\mu$  και το  $x_p$  και διαλέγοντας τιμές για αυτές τις δύο μεταβλητές υπολογίζουμε τις  $x_1, x_2$ . Επίσης εμείς θέλουμε να βρούμε και την ταχύτητα για διάφορες τιμές του  $\mu$  καθώς όμως και τον διαφορικό ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$  οι οποίες υπολογίζονται από τις σχέσεις,

$$\dot{Z} = c_o \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \sqrt{\mu^{1-1/\gamma} - 1}$$

και,

$$\omega = \frac{\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \sqrt{\mu^{1-1/\gamma} - 1}}{\chi(x_1)}$$

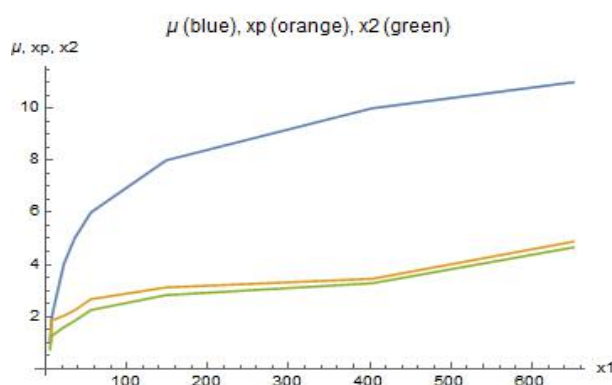
Οι συναρτήσεις  $L(x)$  και  $\chi(x_1)$  δίνονται στην προηγούμενη παράγραφο σχέσεις 4.21 και 4.39. Τα αποτελέσματα μας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Το μόνο που μένει τώρα είναι να δούμε πως μεταβάλλονται ποιοτικά οι μεταβλητές  $\mu, x_2, x_p$  συναρτήσει του  $x_1$  το οποίο φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.

Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα το  $\mu$  για μικρές τιμές του  $x_1$  είναι σχετικά μικρό αλλά καθώς το  $x_1$  αυξάνει σε μεγάλες τιμές το  $\mu$  μεταβάλλεται πολύ γρήγορα μέχρι που φτάνει στην τιμή 11 όπου και φαίνεται ότι σταθεροποιείται. Όπως θυμόμαστε, το  $x_1$  είναι η γωνία που έχει περιστραφεί το μαγνητικό πεδίο και όπως βλέπουμε όσο πιο μεγάλο είναι τόσο πιο μεγάλο γίνεται το  $\mu$ , δηλαδή τόσο πιο πολύ αυξάνει η ταχύτητα του πίδακα όπως είναι αναμενόμενο. Οι άλλες δύο μεταβλητές  $x_2, x_p$  σταθεροποιούνται γύρω από το 2 σχετικά γρήγορα και δεν επηρεάζονται από την μεταβολή του  $x_1$ . Στην

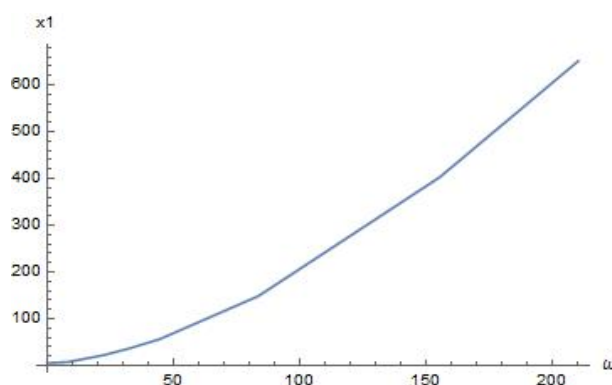
$\mu$	$x_1$	$x_2$	$x_p$	$\dot{Z}/c_o$	$\omega$
1	5.436	0.749	1.04	0	0
2	7.698	1.264	1.85	1.091	8.181
4	22.267	1.587	2.03	1.599	22.129
5	35.687	1.832	2.24	1.743	31.740
6	55.875	2.254	2.67	1.857	44.120
8	148.679	2.824	3.12	2.031	83.477
10	402.895	3.279	3.450	2.163	155.198
11	651.050	4.654	4.880	2.219	209.962

Πίνακας 4.1: Υπολογισμένες τιμές των  $x_1, x_2, \dot{Z}/c_o, \omega$  για διάφορες τιμές της σταθεράς  $\mu$



Σχήμα 4.2: Οι μεταβλητές  $\mu, x_2, x_p$  συναρτήσει του  $x_1$

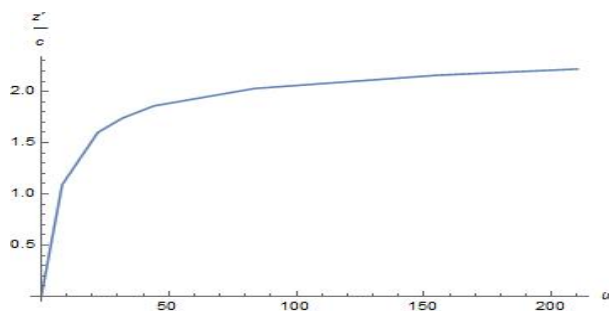
συνέχεια θα δούμε το διάγραμμα της ταχύτητας με το  $\omega$  και το διάγραμμα του  $x_1$  με το  $\omega$ .



Σχήμα 4.3: Η μεταβολή του  $x_1$  συναρτήσει του  $\omega$

Όπως βλέπουμε από το πρώτο διάγραμμα καθώς αυξάνει το  $\omega$  το  $x_1$  αυξάνει στην αρχή αργά και μετά μεταβάλλεται πολύ πιο γρήγορα μέχρι σε μεγάλες τιμές. Αν θυμηθούμε από την προηγούμενη παράγραφο τον ορισμό του  $\omega$  που μας δείχνει την διαφορική περιστροφή του δίσκου τότε αυτό το διάγραμμα μας λέει ότι όσο πιο διαφορικά περιστρέφεται ο δίσκος τόσο πιο πολύ θα περιστραφούν οι δυναμικές γραμμές και ο μαγνητικός πύργος θα γίνεται όλο και πιο ψηλός. Από το δεύτερο διάγραμμα πιο κατώ βλέπουμε ότι παρόλο που το  $\omega$  μεταβάλλεται πολύ η ταχύτητα του πύργου φτάνει μέχρι





Σχήμα 4.4: Η μεταβολή του  $\dot{Z}/c_0$  συναρτήσει του  $\omega$

σε μια τιμή περίπου 2, οπότε αυτό μας λέει ότι η ταχύτητα του πίδακα θα είναι εν τέλει περίπου 2 φορές την ταχύτητα του ήχου και δεν θα αυξάνει άλλο.

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, είναι σαφές από τα προηγούμενα διαγράμματα ότι για να περιστραφούν πολύ οι δυναμικές γραμμές και να έχουμε ψηλούς πύργους πρέπει πρώτον η σταθερά  $\mu$  να είναι αρκετά μεγάλη δηλαδή δεν μπορούμε να πούμε ότι ο πίδακας είναι μια αλληλουχία στατικών δομών αλλά ένα εξελισσόμενο δυναμικό σύστημα. Δεύτερον, πρέπει ο δίσκος να περιστρέφεται διαφορετικά και όχι σαν στερεό σώμα όπως υποθέσαμε στην αρχή και αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα τελικά η ταχύτητα του πίδακα να γίνει  $\dot{Z} \simeq 2c_0$ . Στο επόμενο κεφάλαιο θα μοντελοποιήσουμε τον πίδακα με έναν διαφορικό δίσκο προσαύξησης και θα δούμε σε ποια συμπεράσματα θα καταλήξουμε.

# Κεφάλαιο 5

## Διαφορική περιστροφή δίσκου

### 5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε ότι ο δίσκος περιστρέφεται διαφορικά δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα του αλλάζει με συνεχή τρόπο από ακτίνα σε ακτίνα και θα δούμε πως θα αυξάνει το ύψος αυτής της δομής σαν αποτέλεσμα αυτής της διαφορικής περιστροφής. Μέσα στον πίδακα ισχύει η προσέγγιση της *force-free* όπως το περιγράψαμε στο κεφάλαιο 3. Τέλος θα εφαρμόσουμε αυτό το μοντέλο για συγκεκριμένα παραδείγματα.

### 5.2 Διαφορική περιστροφή δίσκου

Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι έχουμε έναν σωλήνα ροής που ανεβαίνει από μια ακτίνα  $R_i$  από τον δίσκο προσαύξησης και επιστρέφει σε αυτόν σε μια μεγαλύτερη ακτίνα  $R_o$ . Επειδή έχουμε διαφορική περιστροφή το  $\Omega_i > \Omega_o$  οπότε και ορίζουμε την σχέση  $\Omega(P) = \Omega_i - \Omega_o$ . Επειδή οι δυναμικές γραμμές θα αρχίσουν να περιελίσσονται γύρω από τον άξονα μετά από κάποιο χρόνο  $t$  θα έχουν περιστραφεί κατά γωνία  $\Phi(P) = \Omega(P)t$  για τις δυναμικές γραμμές που έχουν ροή  $P$  και θα έχουν ανέβει σε ένα μέγιστο ύψος  $Z(P)$  και έπειτα θα ξανακατέβουν στον δίσκο προσαύξησης στην ακτίνα  $R_o$ . Όταν μια πολοειδής ροή  $dP$  κάνει μια στροφή κατά  $2\pi$  γύρω από τον άξονα θα έχει δημιουργηθεί μια τοροειδής ροή  $dF$  άρα αν οι γραμμές στραφούν κατά γωνία  $\Phi(P)$  και ανέβουν μέχρι ένα μέγιστο ύψος  $Z(P)$  τότε η τοροειδής ροή ανά ύψος θα είναι,

$$\frac{\Phi(P)}{2\pi Z(P)} \quad (5.1)$$

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι καθώς ο πύργος θα αυξάνει σε ύψος η ροή θα μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα αδιάστατο προφίλ της μορφής,

$$P = P_m(z)f(\lambda) \quad (5.2)$$

Όπου ο όρος  $P_m(z)$  είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ροή σε ένα ύψος ενώ το  $Z(P_m(z)) = z$  και τέλος το  $\lambda = R^2/R_m^2$  όπου  $R_m(z)$  είναι η ακτίνα αυτής της δομής σε ένα ύψος  $z$ . Από αυτόν τον ορισμό η μέγιστη τιμή του  $f$  είναι 1 και αυτό γίνεται μόνο όταν η ροή  $P$  γίνει όσο η μέγιστη ροή και επίσης η ροή γίνεται 0 στον άξονα και στην μέγιστη ακτίνα  $R_m$  άρα και η συνάρτηση  $f(\lambda)$  γίνεται 0 για  $\lambda=0$  και για  $\lambda=1$ .

Από την σχέση για τις γραμμές που βγάλαμε στο κεφάλαιο 3 βλέπουμε ότι για το πως θα αλλάζει η γωνία με το ύψος θα ισχύει η σχέση,

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\beta(P)}{R\partial P/\partial R} \quad (5.3)$$

Με την βοήθεια του αδιάστατου προφίλ που περιγράψαμε πιο πάνω εύκολα βλέπουμε ότι ο παρανομαστής θα γίνει,

$$R\frac{\partial P}{\partial R} = P_m(z)2\lambda f'(\lambda) = \frac{2P}{(d\ln\lambda/d\ln f)} \quad (5.4)$$

Άρα αν συνδυάσουμε τις δύο προηγούμενες σχέσεις καταλήγουμε τελικά ότι,

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{2}P^{-1}\beta(P)\left(\frac{d\ln\lambda}{d\ln f}\right) \quad (5.5)$$

Άρα όπως βλέπουμε όταν θα έχουμε μια μεταβολή του ύψους  $dz$  η γωνία που θα έχουν περιστραφεί οι δυναμικές γραμμές θα έχει δύο συμβολές. Η μια θα είναι καθώς θα ανεβαίνει στην ακτίνα  $R_i$  και η άλλη στην ακτίνα  $R_o$  καθώς θα κατεβαίνει δηλαδή θα είναι τελικά,

$$d\Phi = \frac{1}{2}P^{-1}\beta(P)\left[\frac{d\ln(\lambda_i/\lambda_o)}{d\ln f}\right]dz \quad (5.6)$$

Όπου και το  $\lambda_i$  και το  $\lambda_o$  αντιστοιχούν στην ίδια ροή  $P$  και στο ίδιο ύψος  $z$ . Όλη αυτή η ανάλυση θα μας βοηθήσει στην επόμενη παράγραφο.

Στην συνέχεια θα βρούμε πως μπορούμε να γράψουμε τις μέσες τιμές των πεδίων ώστε στο τέλος να βρούμε το συνολικό έργο που δαπανάται για να δημιουργηθεί αυτός ο πύργος. Άρα σε ένα τυχαίο ύψος  $z$  το αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο θα είναι,

$$R_m B_{\phi}(z) = \int_0^{R_m} B_{\phi} dR \quad (5.7)$$

Η σχέση 5.1 μας δίνει την τοροειδής ροή  $dF$  ανά ύψος  $Z(P)$  που θα δημιουργηθεί από την περιστροφή μιας πολοειδής ροής  $dP$  άρα η συνολική τοροειδής ροή ανά ύψος θα είναι,

$$\frac{F}{Z} = \int_0^{P_m} \frac{\Phi(P)}{2\pi Z(P)} dP \quad (5.8)$$

Όμως αν θυμηθούμε και την γενική σχέση για την ροή που είναι,

$$F = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.9)$$

Τότε αν θεωρήσουμε μια ορθογώνια διατομή εμβαδού  $RZ$  βλέπουμε ότι  $dS = ZdR$  άρα τελικά η συνολική τοροειδής ροή ανά ύψος θα είναι σε αυτήν την περίπτωση,

$$\frac{F}{Z} = \int_0^{R_m} B_{\phi} dR \quad (5.10)$$

Εξισώνοντας τις 5.10 και 5.8 και χρησιμοποιώντας την σχέση για την μέση τιμή 5.7 καταλήγουμε στην σχέση,

$$R_m B_{\phi}(z) = \int_0^{R_m} B_{\phi} dR = \int_0^{P_m} \frac{\Phi(P)}{2\pi Z(P)} dP \quad (5.11)$$

Όπου  $P$  όπως έχουμε πει είναι η ροή της γραμμής που φτάνει στο μέγιστο ύψος  $Z(P)$  αλλά όμως μόνο όσες γραμμές έχουν ροή  $P \geq P_m$  θα φτάσουν μέχρι το μέγιστο ύψος αυτό ενώ η περιοχή που καταλαμβάνει το πεδίο στο  $Z(P)$  έχει ακτίνα  $R_m$ . Αυτή δεν είναι η ακτίνα όπου η δυναμική γραμμή φτάνει στο ύψος  $Z$ .

Στην συνέχεια αυτό που θα κάνουμε είναι να ορίσουμε κάποιες αδιάστατες ποσότητες  $J, I$  ώστε να συσχετίσουμε τις μέσες τιμές των πεδίων με τις μέσες τιμές των τετραγώνων των πεδίων δηλαδή θα έχουμε,

$$J^2 = \frac{\langle B_\phi^2 \rangle}{(\bar{B}_\phi)^2} \quad (5.12)$$

Αν θυμηθούμε ότι το αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο γράφεται σαν  $B_\phi = \frac{\beta}{2\pi R}$  και επίσης η μέση τιμή του τετραγώνου του  $B_\phi$  θα είναι,

$$\langle B_\phi^2 \rangle = \int \frac{\beta^2}{2\pi R} dR \quad (5.13)$$

Η αλλαγή μεταβλητής από τα  $R$  στα  $\lambda$  είναι προφανής αν θυμηθούμε ότι  $R = R_m \sqrt{\lambda} \rightarrow dR = \frac{R_m}{2\sqrt{\lambda}} d\lambda$  συνεπώς μετά από κάποιες πράξεις θα έχουμε ότι,

$$\langle B_\phi^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int \beta^2 \lambda^{-1} d\lambda \quad (5.14)$$

Ομοίως η μέση τιμή του  $B_\phi$  θα είναι αν κάνουμε και την αλλαγή μεταβλητής,

$$\bar{B}_\phi = \frac{1}{4\pi R_m} \int \beta \lambda^{-1} d\lambda \quad (5.15)$$

Άρα τελικά η ποσότητα  $J$  θα είναι όπως εύκολα φαίνεται πλέον,

$$J^2 = 4 \frac{\int \beta^2 \lambda^{-1} d\lambda}{[\int \beta \lambda^{-1} d\lambda]^2} \quad (5.16)$$

Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να βρούμε και το  $I$  το οποίο ορίζεται όπως μπορούμε να καταλάβουμε σαν,

$$I^2 = \frac{\langle B_z^2 \rangle}{(\bar{B}_z)^2} \quad (5.17)$$

Η μέση τιμή του  $B_z$  θα είναι όπως μπορούμε να δούμε,

$$|\bar{B}_z| = A^{-1} \int 2\pi R |B_z| dR = \frac{2P_m}{A} \quad (5.18)$$

Οπότε ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν αν θυμηθούμε ότι  $B_z = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial P}{\partial R}$  και χρησιμοποιήσουμε την σχέση 5.2 θα καταλήξουμε στην σχέση για το  $I$ ,

$$I^2 = \frac{1}{4} \int \left( \frac{df}{d\lambda} \right)^2 d\lambda \quad (5.19)$$

Αν το προφίλ  $f$  εξαρτάται από το ύψος τότε και το  $I^2$  και το  $J^2$  θα εξαρτώνται γενικά από το ύψος. Αλλά αν θεωρήσουμε ψήλους πύργους που δημιουργούνται από συνεχή περιστροφή των δυναμικών γραμμών περιμένουμε το προφίλ  $f$  να έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Άρα τα  $I$  και  $J$  δεν θα αλλάζουν πολύ οπότε είναι σωστό να τις θεωρούμε αδιάστατες σταθερές. Αν θυμηθούμε από το κεφάλαιο 2 την σχέση για την ισορροπία

των πιέσεων  $\langle B_z^2 \rangle = 8\pi p(z)$  και την συνδυάσουμε με την σχέση για την σταθερά  $I^2$  τότε θα καταλήξουμε στην σχέση,

$$\frac{P_m}{\pi R_m^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle B_z^2 \rangle^{1/2}}{I} = \frac{(2\pi p)^{1/2}}{I} \quad (5.20)$$

Όπου όπως έχουμε πει η επιφάνεια που καταλαμβάνει το πεδίο σε ύψος  $Z$  εξαρτάται από την εξωτερική πίεση και από την ροή. Όλες οι ποσότητες μπορεί να εξαρτώνται από το  $z$ . Από την σχέση 5.12 για το  $J^2$  που έχουμε γράψει πιο πάνω θα έχουμε ότι,

$$\langle B_\phi^2 \rangle = J^2 \left[ \int_0^{P_m} (2\pi)^{-1} \frac{\Phi(P)}{Z(P)} dP \right]^2 R_m^{-2} \quad (5.21)$$

Το  $\langle B_z^2 \rangle$  δίνεται από την σχέση 5.20 ενώ το  $\langle B_R^2 \rangle$  είναι αμελητέο οπότε το αγνοούμε. Αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους για το έργο που έχουμε γράψει στο κεφάλαιο 2 σχέση 2.1 με  $8\pi/A$  ώστε να εμφανιστούν οι μέσες τιμές και μαζέψουμε όλους τους όρους στην τελική σχέση θα έχουμε ότι,

$$8\pi\bar{W} = A \langle B_z^2 \rangle + A \langle B_\phi^2 \rangle + 8\pi p(z)A \quad (5.22)$$

Όπου το  $A$  είναι η επιφάνεια μιας κυκλικής διατομής του πίδακα σε ένα ύψος  $z$ . Ενώ το έργο της πίεσης θα είναι  $W_p = p(z)A$  όπως θυμόμαστε από το κεφάλαιο 2. Άρα πιο αναλυτικά θα έχουμε ότι,

$$A \langle B_z^2 \rangle = AI^2 (\bar{B}_z)^2 = A \frac{I^2 4P_m^2}{A^2} = I^2 4\pi^{-1} P_m^2 R_m^{-2} \quad (5.23)$$

$$A \langle B_\phi^2 \rangle = AJ^2 (\bar{B}_\phi)^2 = \pi J^2 \left[ \int_0^{P_m} (2\pi)^{-1} \frac{\Phi}{Z} dP \right]^2 \quad (5.24)$$

$$8\pi p(z)A = 8\pi^2 p(z)R_m^2 \quad (5.25)$$

Άρα τελικά αν τους μαζέψουμε όλους τους όρους στην σχέση για το έργο θα έχουμε ότι,

$$8\pi\bar{W} = \int \{ I^2 4\pi^{-1} P_m^2 R_m^{-2} + 8\pi^2 p(z)R_m^2 + \pi J^2 \left[ \int_0^{P_m} (2\pi)^{-1} \frac{\Phi}{Z} dP \right]^2 \} dz \quad (5.26)$$

Όπου τα  $P_m$  και  $R_m$  είναι συναρτήσεις του  $z$  ως προς το οποίο θα γίνει η διαταραχή ενώ τα  $p(z)$  και  $\Phi(P)$  είναι δοσμένες γνωστές συναρτήσεις. Τέλος τα  $I$ ,  $J$  είναι γνωστές σταθερές.

Αν απαιτήσουμε το  $W$  να είναι ελάχιστο όταν αλλάζουμε το  $R_m$  τότε όπως εύκολα μπορεί ναδειχθεί οι δύο πρώτοι όροι είναι ίσοι και προκύπτει η σχέση 5.20 για την ισορροπία των πιέσεων. Αν αντικαταστήσουμε την σχέση αυτή δηλαδή  $\pi R_m^2 = (2\pi p)^{-1/2} P_m I$  στους δύο πρώτους όρους θα γίνουν,

$$\int 4I \sqrt{8\pi p(z)} P_m dz \quad (5.27)$$

Αν αλλάξουμε και την μεταβλητή από το  $z$  στο  $P_m$  δηλαδή θα έχουμε ότι  $dz = -\frac{dZ}{dP_m} dP_m$  με αποτέλεσμα το προηγούμενο ολοκλήρωμα να γίνει όπως εύκολα φαίνεται,

$$\int_0^F 4I\sqrt{8\pi p(z)}\left(-\frac{dZ}{dP_m}\right)P_m dP_m \quad (5.28)$$

Αν ορίσουμε και την συνάρτηση  $\Pi(Z) = \int 4I\sqrt{8\pi p(z)}dZ \rightarrow \frac{d\Pi}{dZ} = 4I\sqrt{8\pi p(z)}$  τότε το προηγούμενο ολοκλήρωμα θα γίνει,

$$\int_0^Z \frac{d\Pi}{dZ} P_m dz \quad (5.29)$$

Αν κάνουμε και μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες όπου το  $\Pi$  είναι 0 στα άκρα και κάνουμε και την αλλαγή μεταβλητής θα καταλήξουμε στην σχέση για τους δύο πρώτους όρους να είναι,

$$\int_0^F \Pi dP_m \quad (5.30)$$

Για τον τρίτο όρο έχουμε ότι είναι της μορφής,

$$\frac{1}{4\pi} J^2 \int \left[ \int_0^{P_m} \frac{\Phi}{Z} dP \right]^2 dz = \frac{1}{4\pi} J^2 \int_0^F \left[ \int_0^{P_m} \frac{\Phi}{Z} dP \right]^2 \left(-\frac{dZ}{dP_m}\right) dP_m \quad (5.31)$$

Κάνοντας μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες και ξέροντας ότι  $Z(F)$  στα άκρα θα είναι 0 και επίσης θα ισχύει ότι,

$$\frac{d}{dP_m} \left[ \int_0^{P_m} \frac{\Phi}{Z} dP \right]^2 = 2 \left[ \int_0^{P_m} \frac{\Phi}{Z} dP \right] \frac{d}{dP_m} \left( \int_0^{P_m} \frac{\Phi}{Z} dP \right) = 2 \left[ \int_0^{P_m} \frac{\Phi}{Z} dP \right] \frac{\Phi(P_m)}{Z} \quad (5.32)$$

με την βοήθεια της προηγούμενης σχέσης η σχέση 5.31 τελικά θα γίνει,

$$\frac{1}{4\pi} J^2 \int \left[ \int_0^{P_m} \frac{\Phi}{Z} dP \right]^2 dz = \frac{J^2}{2\pi} \int_0^F \Phi(P_m) \int_0^{P_m} \left(\frac{\Phi}{Z}\right) dP dP_m \quad (5.33)$$

Αν αλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας την σχέση  $\int_0^F \int_0^{P_m} (\dots) dP dP_m = \int_0^F \int_{P_m}^F (\dots) dP_m dP$  τότε η 5.33 θα γίνει,

$$\frac{J^2}{2\pi} \int_0^F \left(\frac{\Phi}{Z}\right) \int_{P_m}^F \Phi(P_m) dP_m dP \quad (5.34)$$

Τέλος αλλάζουμε τις βουβές μεταβλητές  $P_m$  και  $P$  μεταξύ τους και ορίζοντας την μεταβλητή  $\zeta = Z^{-1}$  ο τρίτος όρος θα γίνει τελικά,

$$\frac{J^2}{2\pi} \int_0^F \Phi(P_m) \zeta \int_{P_m}^F \Phi dP dP_m \quad (5.35)$$

Συνεπώς μετά από όλη αυτήν την ανάλυση μπορούμε να γράψουμε το συνολικό έργο που θα είναι,

$$8\pi\bar{W} = \int_0^F \Pi dP_m + \frac{J^2}{2\pi} \int_0^F \Phi(P_m) \zeta \int_{P_m}^F \Phi dP dP_m \quad (5.36)$$

Όπου η συνάρτηση  $\Pi(Z)$  μπορεί να θεωρηθεί και σαν συνάρτηση του  $\zeta$  χωρίς βλάβη της γενικότητας. Στην συνέχεια θα διαταράξουμε την προηγούμενη σχέση ως προς  $\zeta$  και απαιτούμε το έργο  $\bar{W}$  να είναι ελάχιστο αφού θέλουμε την ισορροπία. Όπως

βλέπουμε ο δεύτερος όρος είναι γραμμικός ως προς  $\zeta$  ενώ επειδή  $\zeta = 1/Z$  άρα αν το παραγωγίσουμε θα έχουμε  $d\zeta = -1/Z^2 dZ \rightarrow dZ = -Z^2 d\zeta$  άρα θα έχουμε ότι  $\delta\Pi/\delta\zeta = -4IZ^2\sqrt{8\pi p(z)}$  και μετά τις παραγωγίσεις θα καταλήξουμε στην σχέση,

$$4IZ^2\sqrt{8\pi p(z)} = \frac{J^2}{2\pi}\Phi(P_m)\int_{P_m}^F\Phi dP \quad (5.37)$$

Αν συνεχίσουμε κάποιες αλγεβρικές πράξεις θα δούμε ότι η συνάρτηση  $Z$  δίνεται από την σχέση,

$$Z[p(Z)]^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{J}{4\pi}\right]I^{-\frac{1}{2}}[\Omega(P_m)\int_{P_m}^F\Omega(P)dP]^{1/2}t \quad (5.38)$$

Όπου θεωρήσαμε ότι ισχύει η σχέση  $\Phi = \Omega t$  και ορίζουμε την συνάρτηση  $\bar{\Omega}(P_m)$  να είναι,

$$\bar{\Omega}(P_m) = [\Omega(P_m)P_m^{-1}\int_{P_m}^F\Omega(P)dP]^{1/2} \quad (5.39)$$

Τότε θα καταλήξουμε στην πιο συμπαγή μορφή της σχέσης 5.38,

$$Z[p(Z)]^{\frac{1}{4}} = C_1 P_m^{\frac{1}{2}}\bar{\Omega}(P_m)t \quad (5.40)$$

Όπου η σταθερά  $C_1$  όπως μπορούμε να καταλάβουμε θα είναι,

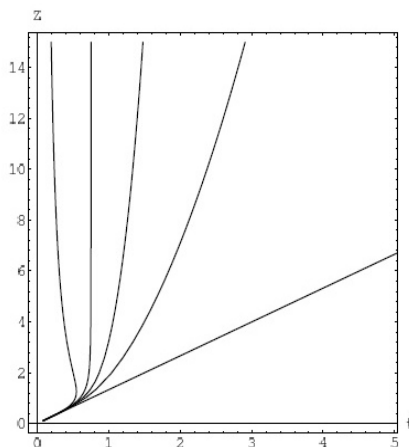
$$C_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{J}{4\pi}\right]I^{-\frac{1}{2}} \quad (5.41)$$

Η σχέση 5.40 μας δίνει πως αλλάζει το ύψος  $Z$  με τον χρόνο  $t$ . Φυσικά για να κάνουμε την πλήρη μελέτη πρέπει να υπολογίσουμε και τις σταθερές  $J, I$  αλλά αυτές παίζουν ρόλο μόνο στο χρονικό κομμάτι. Αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση 5.20 και την λύσουμε ως προς  $P_m$  και το αντικαταστήσουμε στην σχέση 5.40 τότε θα καταλήξουμε στην τελική σχέση,

$$Z = \frac{J}{4I}R_m\bar{\Omega}t \quad (5.42)$$

Αυτή είναι μια πολύ απλή σχέση που συνδέει το μέγιστο ύψος του πίδακα με την ακτίνα του και όπως φαίνεται το ύψος αυξάνει με σταθερή ταχύτητα. Το μόνο που μένει να προσέξουμε είναι ότι το  $Z$  δεν εξαρτάται γραμμικά με την ακτίνα όπως πολύ πιθανόν να φαίνεται σε πρώτη ματιά από την παραπάνω σχέση αλλά υπάρχει εξάρτηση από την ακτίνα και μέσα στην συνάρτηση  $\bar{\Omega}(P_m)$ . Επίσης το ύψος του πίδακα θα αυξάνει ακόμα και όταν η πίεση θα μειώνεται με το ύψος αρκεί να μην πέφτει πολύ γρήγορα ώστε η σχέση 5.40 να είναι λογική. Πιο συγκεκριμένα επειδή το  $P_m^{1/2}$  πέφτει καθώς αυξάνει το ύψος για τον λόγο ότι όλο και ελαττώνονται οι δυναμικές γραμμές ενώ το  $\bar{\Omega}$  αυξάνει με το ύψος άρα το γινόμενο  $P_m^{1/2}\bar{\Omega}$  αυξάνει με το ύψος. Για να έχει νόημα η εξίσωση 5.40 πρέπει και το αριστερό μέρος να αυξάνει με το ύψος και αυτό γίνεται μέχρι που η πίεση θα γίνει  $Z^{-4}$  οπότε και από εκεί και πέρα δεν θα έχουν νόημα οι λύσεις καθώς θα γυρίζουν πίσω στον χρόνο. Κάποιες περιπτώσεις φαίνονται στην παρακάτω εικόνα 5.1 όπου όπως βλέπουμε για σταθερή πίεση η ταχύτητα είναι σταθερή ενώ όταν η πίεση αρχίσει να πέφτει έχουμε επιτάχυνση. Για  $n = 2$  έχει μια σταθερή επιτάχυνση όπως και για  $n = 3$  ενώ για  $n = 4$  θα έχουμε άπειρη ταχύτητα για πεπερασμένο χρόνο αν υποθέσουμε ότι θα συνεχίσει να ισχύει η 5.40. Τέλος για  $n = 6$  έχουμε άπειρες

ταχύτητες και οι λύσεις γυρνάνε πίσω στον χρόνο κάτι που δεν είναι καθόλου λογικό. Τα αποτελέσματα θα διορθωνόντουσαν αν είχαμε υποθέσει την πίεση  $Ram$  και την αδράνεια στην κορυφή του πίδακα που θα είχε σαν αποτέλεσμα ο πίδακας να επιβραδυνθεί και να σταματήσει και αυτό θα δημιουργήσει εν τέλει τα *hot-spot* που βλέπουμε στις παρατηρήσεις.



Σχήμα 5.1: Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται η μεταβολή του ύψους με τον χρόνο. Για  $n = 0$  έχουμε σταθερή πίεση και σταθερή ταχύτητα. Για  $n = 2, n = 3$  έχουμε επιτάχυνση ενώ για  $n = 4, n = 6$  έχουμε άπειρες ταχύτητες και οι λύσεις δεν έχουν νόημα πλέον (Lynden-Bell 2006[18]).

## 5.3 Παραδείγματα

### 5.3.1 Κεντρικό δίπολο

Σε αυτό το πρώτο παράδειγμα θα θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα κεντρικό σώμα με ακτίνα  $R_s$  το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega_s$  και επίσης το θεωρούμε σαν δίπολο οπότε και το μαγνητικό πεδίο σε ακτίνα  $R$  θα είναι  $B_z = D/R^3$ . Αν θεωρήσουμε ότι ο δίσκος προσάυξης περιστρέφεται κεπλεριανά τότε η γωνιακή ταχύτητα θα είναι,

$$\Omega_d = \left(\frac{GM_s}{R^3}\right)^{1/2} \quad (5.43)$$

Πριν αρχίσει η περιστροφή των δυναμικών γραμμών η ροή θα είναι όπως ξέρουμε  $P = \frac{2\pi D}{r} \sin^2\theta$  άρα η ροή πάνω στον δίσκο δηλαδή για  $\theta = \pi/2$  θα είναι,

$$P = \frac{2\pi D}{r} \quad (5.44)$$

Τώρα υποθέτουμε ότι  $\Omega_s < \Omega_d$  άρα θα υπάρχει ένα σημείο στον δίσκο όπου θα έχουμε την ίδια γωνιακή ταχύτητα και αυτή η ακτίνα θα είναι,

$$R_c = \left(\frac{GM_s}{\Omega_s^2}\right)^{1/3} \quad (5.45)$$

Ενώ η ροή σε αυτήν την ακτίνα θα είναι,

$$P_c = \frac{2\pi D}{R_c} \quad (5.46)$$



Άρα τελικά για  $P < P_c$  θα έχουμε μια διαφορετική περιστροφή του δίσκου με  $\Omega_s - \Omega_d$  αρνητικό ενώ για  $P > P_c$  θα έχουμε  $\Omega_s - \Omega_d$  θετικό. Ο υπολογισμός αυτής της διαφοράς είναι απλός,

$$\Omega(P) = \Omega_s - \Omega_d = \Omega_s - (GM_s)^{1/2} \left(\frac{P}{2\pi D}\right)^{3/2} \quad (5.47)$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε και τις σχέσεις 5.45 και 5.46 τότε η προηγούμενη θα έχει μια πιο απλή μορφή,

$$\Omega(P) = \Omega_s \left(1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)^{3/2}\right) \quad (5.48)$$

Για να σχεδιάσουμε την μορφή του πίδακα θα χρειαστούμε την σχέση 5.42 που γράψαμε πιο πάνω δηλαδή,

$$Z = \frac{J}{4I} R_m \bar{\Omega} t \quad (5.49)$$

Όπως φαίνεται από την προηγούμενη σχέση το ύψος δεν εξαρτάται γραμμικά από την ακτίνα αλλά υπάρχει και ένας ακόμα όρος το  $\bar{\Omega}$  που θα υπολογίσουμε αμέσως παρακάτω το οποίο και αυτό έχει εξάρτηση από την ακτίνα. Πιο συγκεκριμένα με την βοήθεια της σχέσης 5.48 θα έχουμε ότι,

$$\bar{\Omega}(P_m) = [\Omega(P_m) P_m^{-1} \int_{P_m}^F \Omega(P) dP]^{1/2} \rightarrow \quad (5.50)$$

$$= [P_m^{-1} \Omega_s \left(1 - \left(\frac{P_m}{F}\right)^{3/2}\right) \Omega_s \int_{P_m}^F \left(1 - \left(\frac{P}{F}\right)^{3/2}\right) dP]^{1/2} \quad (5.51)$$

Όπου θέσαμε αυθαίρετα ότι  $P_c = F$  οπότε τώρα αν κάνουμε το ολοκλήρωμα και θέσουμε  $y = P_m/F$  τότε τελικά θα καταλήξουμε στην σχέση,

$$\bar{\Omega} = \left\{ \Omega_s^2 \left[ y^{-1} (1 - y^{3/2}) \left(1 - y - \frac{2}{5} (1 - y^{5/2})\right) \right] \right\}^{1/2} \quad (5.52)$$

Οπότε τώρα αν γράψουμε την ακτίνα  $R_m$  συναρτήσει της ροής  $P_m$  θα καταλήξουμε στην τελική σχέση που ψάχνουμε,

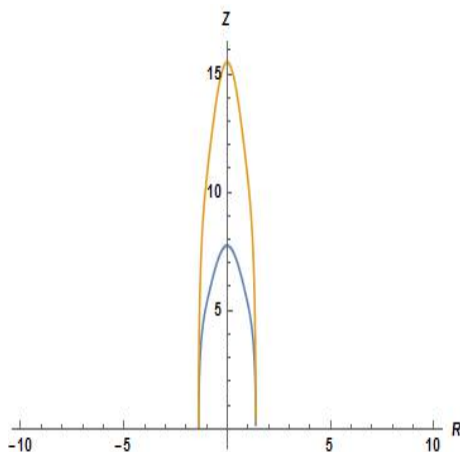
$$Z = C_1^* \sqrt{y} \left\{ \left[ y^{-1} (1 - y^{3/2}) \left(1 - y - \frac{2}{5} (1 - y^{5/2})\right) \right] \right\}^{1/2} t \quad (5.53)$$

Όπου το  $C_1^*$  θα είναι όπως είναι εύκολο να φανταστεί κανείς,

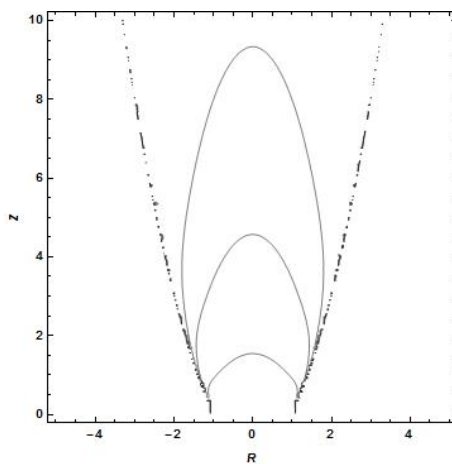
$$C_1^* = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4} \left[\frac{J}{4\pi}\right] I^{-1/2} F^{1/2} \Omega_s}{p(z)^{1/4}} \quad (5.54)$$

Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι έχουμε σταθερή πίεση οπότε το  $C_1^*$  θα είναι σταθερό πλέον άρα με βάση την προηγούμενη σχέση μπορούμε να σχεδιάσουμε τον πίδακα για δύο διαδοχικούς χρόνους όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα 5.2. Όπως βλέπουμε για μεγαλύτερους χρόνους η δομή αυτή αυξάνει σε μεγαλύτερα ύψη με σταθερή ταχύτητα βέβαια. Αυτό που απεικονίζεται στο διάγραμμα είναι η περιβάλλουσα όλων των δυναμικών γραμμών δηλαδή είναι ουσιαστικά η τελευταία δυναμική γραμμή και μέσα της βρίσκονται όλες οι άλλες δυναμικές γραμμές. Το διάγραμμα αυτό έχει γίνει για δύο διαδοχικούς χρόνους  $t_1 = 1$  και  $t_2 = 2$  το οποίο θα πρέπει να κανονικοποιηθεί ανάλογα με την περίπτωση που μελετάμε δηλαδή αλλιώς θα αλλάζει αυτή η δομή γύρω

από μια μελανή οπή και αλλιώς γύρω από έναν αστέρα νετρονίων. Τα αποτελέσματα αλλάζουν αν βάλουμε μια μη σταθερή πίεση και αυτό διότι το  $C_1^*$  δεν είναι πλέον σταθερό, οπότε αν θεωρήσουμε μια πίεση που πέφτει με το ύψος σαν  $(1+z)^{-2}$  τότε βλέπουμε παρακάτω στο σχήμα 5.3 πως αλλάζει η δομή για χρόνους  $t_1 = 2.5, t_2 = 5$  και  $t_3 = 7.5$  όπως βλέπουμε τώρα ο πίδακας είναι πιο 'παχύς' σε μικρότερα ύψη και στενεύει σε πιο μεγάλα, βεβαία η ευθυγράμμιση  $Z/R$  θα παραμένει περίπου το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις διότι όπως θυμόμαστε δίνεται από την σχέση 5.42 και όπως βλέπουμε δεν εξαρτάται από την πίεση άρα δεν θα αλλάζει σημαντικά.



Σχήμα 5.2: Στο σχήμα φαίνεται πως αυξάνει η μαγνητική δομή με τον χρόνο για σταθερή πίεση



Σχήμα 5.3: Στο σχήμα φαίνεται πως αυξάνει η μαγνητική δομή με τον χρόνο για πίεση που πέφτει σαν  $(1+z)^{-2}$

### 5.3.2 Νόμος δύναμης

Σε αυτό το δεύτερο παράδειγμα θα θεωρήσουμε μια διαφορική περιστροφή που θα δίνεται από ένα νόμο δύναμης. Πιο συγκεκριμένα το  $\Omega(P)$  πρέπει να είναι 0 όταν  $P = F$  και να πέφτει καθώς το  $P$  αυξάνει από το 0 μέχρι το  $F$ . Άρα το πιο απλό μοντέλο νόμου δύναμης που μπορούμε να εισάγουμε και να έχει τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι,

$$\Omega(P) = \Omega_o P_o^\gamma [(P_o + P)^{-\gamma} - (P_o + F)^{-\gamma}] \quad (5.55)$$

Όπου σε αυτό το μοντέλο θα πούμε ότι  $\gamma=1.5$  και επίσης θα θεωρήσουμε ότι  $P_o \ll F$  άρα ο δεύτερος όρος είναι αμελητέος και μπορούμε να τον αγνοήσουμε σε πρώτη φάση. Για να σχεδιάσουμε την μαγνητική δομή θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση 5.38 οπότε χρειάζεται να υπολογίσουμε την συνάρτηση  $\Omega$  το οποίο όπως θυμόμαστε είναι η σχέση 5.39 άρα η ολοκλήρωση γίνεται αμέσως και έχουμε ότι,

$$[\Omega(P_m) \int_{P_m}^F \Omega(P) dP]^{1/2} = \frac{\Omega_o P_o^\gamma}{(\gamma - 1)^{1/2}} \varpi^{-\gamma/2} [\varpi^{-(\gamma-1)} - (P_o + F)^{-(\gamma-1)}]^{1/2} \quad (5.56)$$

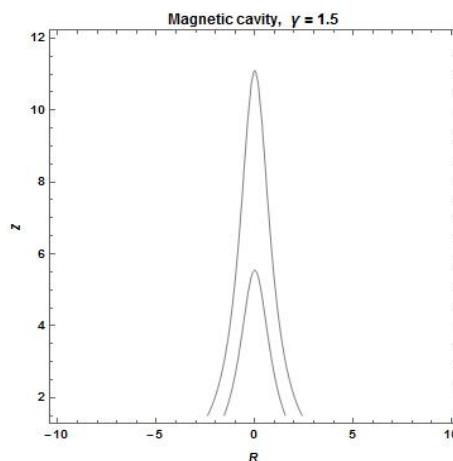
Όπου το  $\varpi = P_o + P_m$  οπότε αν αγνοήσουμε τον δεύτερο όρο στην προηγούμενη σχέση και την εισάγουμε στην σχέση 5.38 θα έχουμε τελικά ότι,

$$Z = \frac{C_1 \Omega_o P_o^\gamma}{(\gamma - 1)^{1/2} p^{1/4}(z)} \varpi^{-(\gamma-1/2)} t \quad (5.57)$$

Όπου η σταθερά  $C_1$  δίνεται από την σχέση 5.41 και αν ορίσουμε σαν  $C_2$  το κλάσμα στην προηγούμενη σχέση θα έχουμε ότι,

$$Z = C_2 \varpi^{-(\gamma-1/2)} t \quad (5.58)$$

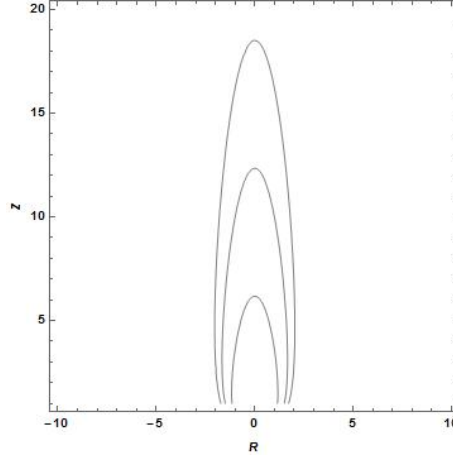
Από αυτήν την σχέση θα σχεδιάσουμε την μαγνητική δομή και θα δούμε πως αυτή αλλάζει με το χρόνο. Για αρχή θα υποθέσουμε ότι έχουμε σταθερή πίεση και  $\gamma=1.5$ . Επίσης υποθέτουμε ότι  $P_o = 0.9$  μια τυπική τιμή που διαλέγουμε αυθαίρετα. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα για δύο τυπικούς χρόνους.



Σχήμα 5.4: Στο σχήμα φαίνεται πως αυξάνει η μαγνητική δομή με τον χρόνο για σταθερή πίεση στην περίπτωση του νόμου δύναμης.

Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα η μαγνητική αυτή δομή καθώς περνάει ο χρόνος αυξάνει το ύψος με σταθερή ταχύτητα όπως και στην περίπτωση του κεντρικού διπόλου. Εδώ έχει σχεδιαστεί για χρόνους  $t_1 = 5$  και  $t_2 = 10$  τα οποία όπως έχουμε πει θα είναι κατάλληλα κανονικοποιημένα. Για άλλες τιμές του  $\gamma$  το σχήμα της δομής δεν αλλάζει πολύ οπότε και δεν έχει σχεδιαστεί εδώ. Στην συνέχεια όπως και στην περίπτωση του διπόλου θα θεωρήσουμε ότι η πίεση αλλάζει με το ύψος σύμφωνα με την σχέση  $p(z) \propto (1+z)^{-2}$  και θα θεωρήσουμε ότι το  $z$  θα είναι αρκετά μεγάλο άρα  $p(z) \propto z^{-2}$ . Οπότε

και στην σχέση 5.38 το γινόμενο  $Zp(z)^{1.4} \propto Z^{1/2}$  άρα το ύψος θα είναι πλέον τώρα  $Z \propto \omega^{-2(\gamma-1/2)}$ . Τέλος πρέπει να θυμηθούμε ότι το  $P_m \propto p^{1/2}(z)R_m^2 \rightarrow P_m \propto z^{-1}R_m^2$  οπότε και μετά από αυτές τις διευκρινήσεις το διάγραμμα για την μη σταθερή πίεση είναι εύκολο να σχεδιαστεί και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για τρεις διαδοχικούς χρόνους.



Σχήμα 5.5: Στο σχήμα φαίνεται πως αυξάνει η μαγνητική δομή με τον χρόνο για σταθερή πίεση στην περίπτωση του νόμου δύναμης για πίεση της μορφής  $(1+z)^{-2}$ .

Το διάγραμμα αυτό έχει γίνει για χρόνους  $t_1 = 5, t_2 = 10$  και  $t_3 = 15$  και όπως βλέπουμε είναι ποιοτικά παρόμοιο με την περίπτωση του διπόλου απλά εδώ φτάνει σε λίγο μεγαλύτερα ύψη. Και σε αυτήν την περίπτωση η ευθυγράμμιση θα είναι περίπου ίδια και για τις δύο περιπτώσεις όπως και το περιμέναμε.

## 5.4 Μαγνητικά πεδία μέσα στον πίδακα

Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού είχαμε γράψει ότι σε κάθε ύψος το προφίλ της ροής ήταν της μορφής,

$$P = P_m(z)f(\lambda) \quad (5.59)$$

Όπου το  $\lambda$  ήταν η αδιάστατη ποσότητα  $\lambda = [R/R_m]^2$  και το  $P_m$  είναι η μέγιστη τιμή που παίρνει η ροή σε ένα ύψος  $z$  και αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση  $f$  φτάνει την μέγιστη τιμή της που είναι 1 σε κάθε ύψος. Επίσης όπως θυμόμαστε η ροή πρέπει να είναι 0 στον άξονα και στην ακτίνα  $R_m$  δηλαδή  $f(0) = f(1) = 0$  συνεπώς η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα μέχρι την μέγιστη τιμή της και μετά είναι φθίνουσα μέχρι που μηδενίζεται. Αν και γενικά η  $f$  μπορεί να εξαρτάται από το  $z$  εμείς θα θεωρήσουμε εδώ ότι δεν εξαρτάται και επίσης θα θεωρήσουμε ότι και τα  $R_m(z), P_m(z)$  εξαρτώνται ασθενώς από το  $z$  άρα οι δεύτερες παραγωγισίες θα είναι αμελητέες. Αν θυμηθούμε από το κεφάλαιο 3 ότι η εξίσωση *transfield* γράφεται σαν,

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -\beta'(P)\beta(P) \quad (5.60)$$

και αν αγνοήσουμε τον δεύτερο όρο θεωρώντας ότι  $B_R \ll B_z$  τότε,

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial R} \right) = -\beta'(P)\beta(P) \quad (5.61)$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε το προφίλ για την ροή που έχουμε γράψει και θυμηθούμε ότι  $\lambda = (R/R_m)^2 \rightarrow R = R_m\sqrt{\lambda} \rightarrow dR = \frac{R_m}{2\sqrt{\lambda}}d\lambda$  η προηγούμενη θα πάρει μια πιο απλή μορφή,

$$\frac{4P_m}{R_m^2}\lambda\frac{d^2f}{d\lambda^2} = -\beta\frac{d\beta}{dP} = -\left(\frac{d\beta^2}{d\lambda}\right)\frac{1}{2P_m f'} \quad (5.62)$$

Για να λυθεί η προηγούμενη διαφορική εξίσωση θα υποθέσουμε ότι το ρεύμα  $\beta$  έχει την μορφή νόμου δύναμης δηλαδή  $\beta = C_1 P^\nu$  άρα  $\beta'/\beta \propto \nu P^{2\nu-1}$  συνεπώς αν το εισάγουμε αυτό στην προηγούμενη θα προκύψουν δύο διαφορικές εξισώσεις από τον χωρισμό των μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε ότι,

$$\frac{4P_m}{R_m^2}\lambda\frac{d^2f}{d\lambda^2} = -C_1^2\nu P_m^{2\nu-1}f^{2\nu-1} \rightarrow \quad (5.63)$$

$$\lambda\frac{d^2f}{d\lambda^2} = -\frac{R_m^2 C_1^2 P_m^{2\nu-2}}{4}\nu f^{2\nu-1} \quad (5.64)$$

Αν θέσουμε το κλάσμα στην προηγούμενη σχέση σαν μια καινούργια σταθερά  $C^2$  θα έχουμε ότι,

$$C^2 = \frac{R_m^2 C_1^2 P_m^{2\nu-2}}{4} \rightarrow \quad (5.65)$$

$$R_m = \frac{2C}{C_1} P_m^{1-\nu} \quad (5.66)$$

Αν αντικαταστήσουμε το προηγούμενο κλάσμα με μια καινούργια σταθερά  $C_2$  το οποίο είναι προφανές ότι θα είναι,

$$C_2 = \frac{2C}{C_1} \rightarrow C^2 = \frac{C_1^2 C_2^2}{4} \quad (5.67)$$

Άρα μετά από όλα αυτά η σχέσεις 5.64 και 5.66 θα γίνουν όπως είναι εύκολο να δείξει κανείς,

$$\lambda\frac{d^2f}{d\lambda^2} = -C^2\nu f^{2\nu-1} \quad (5.68)$$

$$R_m = C_2 P_m^{1-\nu} \quad (5.69)$$

Η σταθερά  $C$  θα υπολογιστεί από την συνθήκη ότι  $f = 1$  στο μέγιστο. Η δεύτερη εξίσωση που θα πρόκυψει από αυτόν τον χωρισμό μεταβλητών θα είναι η,

$$-\left(\frac{d\beta^2}{d\lambda}\right)\frac{1}{2P_m f'} = -C_1^2\nu P_m^{2\nu-1}f^{2\nu-1} \quad (5.70)$$

Άλλα από αυτήν αν γίνουν οι πράξεις θα προκύψει ξανά ότι  $\beta = C_1 P^\nu$  το οποίο είναι η συνθήκη με την οποία ξεκινήσαμε. Το  $P_m(z)$  μειώνεται καθώς δεν θα φτάσει όλη η ροή στο μέγιστο ύψος  $z$  άρα από την σχέση 5.69 η ακτίνα  $R_m$  της μαγνητικής δομής θα μειώνεται καθώς αυξάνει το ύψος για  $\nu < 1$  δηλαδή ο πίδακας θα στενεύει και θα είναι πιο ευθυγραμμισμένος αντίθετα η ακτίνα θα αυξάνει για  $\nu > 1$  και ο πίδακας θα ανοίγει καθώς η μαγνητική δομή αυξάνει. Αν πολλαπλασιάσουμε την 5.68 με  $-f/\lambda$  και ολοκληρώσουμε κατά μέρη θα έχουμε ότι,

$$\int_0^1 (f')^2 d\lambda = C^2 \nu \int_0^1 f^{2\nu} \lambda^{-1} d\lambda \quad (5.71)$$

Αν θυμηθούμε και πως προκύπτουν οι σχέσεις για τις μέσες τιμές των πεδίων  $\langle B_z^2 \rangle, \langle B_\phi^2 \rangle$  δηλαδή θα πρέπει να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με  $P_m^2/A^2$  θα καταλήξουμε στην σχέση,

$$\langle B_z^2 \rangle = \nu \langle B_\phi^2 \rangle \quad (5.72)$$

Αν το συγκρίνουμε με την σχέση που είχαμε βρει στο κεφάλαιο 2

$$\langle B_z^2 \rangle = \frac{\langle B_\phi^2 \rangle}{2 - \sigma} \quad (5.73)$$

Όπου το  $\sigma(z) = (Ap)_p^{-1} \int A(z')(-dp/dz')dz'$  και άρα προκύπτει ότι,

$$\nu = 1/(2 - \sigma) \quad (5.74)$$

Άρα τελικά βρήκαμε ότι για κάθε ύψος αν ξέρουμε το  $\sigma$  ξέρουμε το  $\nu$  και άρα μπορούμε να βρούμε το προφίλ της ροής λύνοντας ουσιαστικά την διαφορική εξίσωση 5.68.

#### 5.4.1 Σταθερή πίεση

Για την περίπτωση της σταθερής πίεσης το  $\nu = 1/2$  και η διαφορική εξίσωση 5.68 λύνεται με μια απλή ολοκλήρωση ως προς  $f'$  όπου θα προκύψει,

$$f' = -C^2 \left(\frac{1}{2}\right) \ln \lambda + D_1 \quad (5.75)$$

Όμως εμείς ξέρουμε ότι γίνεται μέγιστο όταν  $f' = 0$  δηλαδή  $D_1 = \frac{C^2}{2} \ln \lambda_1$ . Αν ολοκληρώσουμε άλλη μια φορά θα έχουμε ότι,

$$f = -C^2 \left(\frac{1}{2}\right) \lambda (\ln \lambda - 1) + D_1 \lambda + D_2 \quad (5.76)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε ότι για  $\lambda = 0$  το  $f = 0$  και για  $\lambda = 1$  το  $f = 0$ . Εφαρμόζοντας αυτές τις συνθήκες καταλήγουμε ότι  $D_2 = 0, D_1 = -(\frac{C^2}{2})$ . Άρα η προηγούμενη θα γίνει τελικά,

$$f = -C^2 \left(\frac{1}{2}\right) \lambda (\ln \lambda) \quad (5.77)$$

αλλά από την σχέση μεγίστου έχουμε ότι  $D_1 = \frac{C^2}{2} \ln \lambda_1$  συνεπώς πολύ εύκολα προκύπτει ότι  $\lambda_1 = 1/e$ . Τέλος η σταθερά  $C$  θα προκύψει από την συνθήκη ότι το  $f = 1$  στην τιμή  $\lambda_1$  δηλαδή θα έχουμε ότι ,

$$f(\lambda_1) = -C^2 \left(\frac{1}{2}\right) \lambda_1 (\ln \lambda_1) \rightarrow \quad (5.78)$$

$$1 = -C^2 \left(\frac{1}{2e}\right) \ln(1/e) \rightarrow \quad (5.79)$$

$$C^2 = 2e \quad (5.80)$$

Άρα τελικά η συνάρτηση που ψάχνουμε είναι,

$$f = -e\lambda(\ln \lambda) \quad (5.81)$$

Αφού ξέρουμε την συνάρτηση  $f$  είναι εύκολο πλέον να υπολογίσουμε τις σταθερές  $I, J$  που είχαμε ορίσει στην προηγούμενη παράγραφο δηλαδή,

$$I^2 = \frac{\langle B_z^2 \rangle}{(|B_z|)^2} = \frac{1}{4} \int_0^1 \left( \frac{df}{d\lambda} \right)^2 d\lambda = \frac{e^2}{4} \quad (5.82)$$

Άρα τελικά  $I = 1.359$ . Ομοίως μπορούμε να βρούμε το  $J$ ,

$$J = 2 \sqrt{\frac{\int_0^1 (f/\lambda) d\lambda}{\int_0^1 (f^{1/2}/\lambda) d\lambda}} = \sqrt{2/\pi} \quad (5.83)$$

Άρα βρήκαμε ότι η σταθερά  $J = 0.798$ . Μετά από όλη αυτήν την ανάλυση είναι προφανές ότι η ροή και το ρεύμα είναι της μορφής,

$$P(R, z) = P_m(z) e\lambda \ln(1/\lambda) \quad (5.84)$$

$$\beta(R) = 4(2\pi^3 p)^{1/4} P^{1/2} \quad (5.85)$$

Τέλος τα μαγνητικά πεδία μέσα στην μαγνητική δομή θα προκύψουν από τις σχέσεις  $B_\phi = (2\pi R)^{-1} \beta$  και  $B_z = (2\pi R)^{-1} \frac{\partial P}{\partial R}$  άρα τελικά ,

$$B_z = \frac{eP_m}{\pi R_m^2} [\ln(1/\lambda) - 1] \quad (5.86)$$

Όπως βλέπουμε το μαγνητικό πεδίο είναι θετικό για  $\lambda < 1/e$  ,για  $\lambda > 1/e$  είναι αρνητικό ενώ για  $\lambda = 1/e$  είναι 0. Στο άκρό του πίδακα δηλαδή για  $\lambda = 1$  το μαγνητικό πεδίο έχει την τιμή,

$$B_z = -\left( \frac{eP_m}{\pi R_m^2} \right) \quad (5.87)$$

Το πιο ενδιαφέρον με την προηγούμενη σχέση είναι ότι στον άξονα το μαγνητικό πεδίο είναι άπειρο διότι  $B_z \propto \ln(R_m/R)$  όμως η ροή θα είναι  $P \propto R^2 \ln(R_m/R)$  το οποίο κοντά στον άξονα αν θεωρήσουμε ότι το πεδίο πέφτει πιο αργά από  $1/R^2$  είναι μηδέν. Αυτό διορθώνεται αν σκεφτούμε ότι η ενεργειακή πυκνότητα κοντά στον άξονα θα είναι ανάλογο του  $R^2 (\ln(R_m/R))^2$  άρα ο απειρισμός του μαγνητικού πεδίου δεν παίζει σημαντικό ρόλο. Ακόμα πιο ενδιαφέρουσα συμπεριφορά παρουσιάζει το  $B_\phi$  κοντά στον άξονα το οποίο θα είναι της μορφής,

$$B_\phi = \frac{2eP_m}{\pi R_m^2} \sqrt{\ln(R_m/R)} \quad (5.88)$$

Όπως βλέπουμε ενώ περιμέναμε να είναι 0 το  $B_\phi$  στο άξονα προκύπτει ότι είναι άπειρο παρολαυτά αν πάρουμε τον λόγο

$$B_\phi/B_z \rightarrow [\ln(R_m^2/R^2)]^{-1/2} \rightarrow 0 \quad (5.89)$$

Άρα παρόλο που οι δυναμικές γραμμές τυλίγονται ελικοειδώς κοντά στον άξονα η έλικα επιμηχύνεται όλο και πιο πολύ καθώς πλησιάζουμε τον άξονα οπότε και ο ίδιος ο άξονας είναι μια γραμμική ροής. Οπότε η συνοριακή συνθήκη ότι το  $B_\phi$  πρέπει να είναι

Θ θα αλλάξει και θα πούμε ότι ο λόγος  $B_\phi/B_z$  πρέπει να είναι 0 στον άξονα. Αφού θεωρούμε την *force-free* προσέγγιση το ρεύμα που περνάει μέσα από τις γραμμές θα είναι  $4\pi J = (C_1/2)P^{-1/2}B$ . Όταν το  $P = 0$  στον άξονα το ρεύμα απειρίζεται πολύ πιο γρήγορα από το μαγνητικό πεδίο παρόλα αυτά το ρεύμα που περνάει από μια διατομή είναι πεπερασμένο και επειδή η διατομή γίνεται όλο και πιο μικρή καθώς πλησιάζουμε τον άξονα το ρεύμα αυτό μηδενίζεται. Η λύση που βρήκαμε μας λέει ότι υπάρχουν μεγάλες ποσότητες πυκνότητας ρεύματος κοντά στον άξονα το οποίο μας οδηγεί σε άπειρα πεδία εκεί αλλά αυτό διορθώνεται αν θεωρήσουμε πίεση που αλλάζει με το ύψος.

### 5.4.2 Πίεση που ελαττώνεται με το ύψος

Όταν η πίεση μεταβάλλεται με το ύψος το  $\nu < 1$  και άρα η συνάρτηση  $f$  μπορεί να προσεγγιστεί καλά για μικρά  $\nu$  σαν  $-\ln \lambda \approx (1 - \lambda^a)/a$  όπου το  $a = 2\nu - 1$ , αλλά μια καλύτερη προσέγγιση θα ήταν αν λέγαμε ότι,

$$f = g(\lambda)/g(\lambda_1) \quad (5.90)$$

Όπου το  $g(\lambda) = a^{-1}\lambda(1 - \lambda^a)/(1 + a_2\lambda^a)$  και το  $\lambda_1$  δίνεται από την σχέση  $g'(\lambda_1) = 0$ . Αυτή η μορφή της συνάρτησης  $f$  ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες ενώ το  $a_2$  θα προκύψει από την σχέση μεγίστου του  $g$ .

$$1 - [a + 1 - a_2(1 - a)]\lambda_1^a - a_2\lambda_1^{2a} = 0 \quad (5.91)$$

Οπότε αν λύσουμε την προηγούμενη ως προς  $a_2$  θα έχουμε ότι,

$$a_2 = [1 - \lambda_1^a(1 + a)]/[\lambda_1^a[1 - (1 - a)\lambda_1^a]] \quad (5.92)$$

Οι απειρισμοί που εμφανίζονται πριν οφείλονται στον λογαριθμικό παράγοντα εδώ όμως οι απειρισμοί αυτοί αίρονται για  $a > 0$  και το  $B_\phi \rightarrow 0$  όπως και θα έπρεπε. Για  $a = 1$  υπάρχει μια ακριβής λύση την οποία μελετάμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 6 όπου θεωρούμε το  $\beta = CP$  και προκύπτουν σαν λύσεις οι συναρτήσεις *Bessel*.

## 5.5 Δυναμική πίεση RAM

Δείξαμε σε προηγούμενη παράγραφο ότι όταν η πίεση πέφτει πιο γρήγορα από  $z^{-4}$  τότε οι λύσεις δεν έχουν νόημα πλέον και είναι λανθασμένες. Αυτό όμως ισχύει στην περίπτωση της στατικής πίεσης οπότε θα πρέπει να υποθέσουμε μια δυναμική πίεση, που είναι γνωστή και σαν πίεση *RAM*, όταν η ταχύτητα του πίδακα γίνει συγκρίσιμη με την ταχύτητα του ήχου ώστε να διορθωθούν τα αποτελέσματα. Από το κεφάλαιο 4 είχαμε δείξει ότι όταν εφαρμόσουμε το θεώρημα *Bernoulli* βρίσκουμε ότι η πίεση στην κορυφή του πίδακα θα είναι,

$$p_s = p \left[ 1 + \frac{(\gamma - 1)p}{2\gamma\rho u^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (5.93)$$

Αν τώρα πούμε ότι  $p \gg \rho u^2$  τότε η προηγούμενη θα απλοποιηθεί σημαντικά και θα γίνει,

$$p_s = p + \rho u^2/2 \quad (5.94)$$



Παρόλο που η προηγούμενη σχέση χρησιμοποιείται ευρέως εμείς θα βρούμε μια σχέση στην γενική περίπτωση. Όπως ξέρουμε όταν ένα ρευστό γίνει υπερηχητικό δημιουργείται ένα κρουστικό κύμα οπότε και η προηγούμενη σχέση θέλει τροποποίηση. Αν θεωρήσουμε ένα αδρανειακό σύστημα πάνω στο κρουστικό κύμα τότε οι συνθήκες άλματος θα είναι,

$$\rho_2 u_2 = \rho u \quad (5.95)$$

$$\rho_2 u_2^2 + p_2 = \rho u^2 + p \quad (5.96)$$

Όπου οι ποσότητες με δείκτη 2 αναφέρονται δεξιά από το κρουστικό κύμα ενώ αυτές χωρίς δείκτη αριστερά. Αν ορίσουμε τον αριθμό *Mach* σαν  $M = u/c_s$  όπου  $c_s = \gamma p/\rho$  τότε οι δύο προηγούμενες εξισώσεις λύνονται και προκύπτουν οι λόγοι,

$$\frac{\rho_2}{\rho} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \quad (5.97)$$

$$\frac{p_2}{p} = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (5.98)$$

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα *Bernoulli* θα προκύψει ότι η πίεση στην κορυφή θα είναι  $p_s = \Gamma(\gamma)\rho u^2$  όπου το  $\Gamma = [(\gamma + 1)/2]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}\gamma^{-\gamma/(\gamma-1)}$  το οποίο για  $\gamma=1,4/3,5/3$  δίνει  $\Gamma=1,0.93,0.88$ . Η πλήρης μορφή της πίεσης αποδεικνύεται ότι είναι,

$$p_s = p + \rho u^2 \quad (5.99)$$

Αυτή θα είναι η πίεση που θα νιώθει στην κορυφή ο πίδακας και είναι μια καλή προσέγγιση και για την στατική περίπτωση αλλά και για την υπερηχητική περίπτωση.

Η κορυφή του πίδακα θα αλλάζει σύμφωνα με την σχέση 5.37 δηλαδή θα είναι,

$$Z_h^2 \sqrt{8\pi p_s(z)} = \frac{J^2}{8\pi I} \Omega(0) \int_0^F \Omega(P) dPt^2 \quad (5.100)$$

Όπου επειδή έχουμε να κάνουμε με την κορυφή του πίδακα έχουμε αντικαταστήσει την πίεση με την πίεση στην κορυφή  $p_s$  και η μέγιστη ροή στην κορυφή θα είναι προφανώς  $P_m = 0$ . Επίσης μπορούμε να βγάλουμε τον δείκτη  $h$  χωρίς βλάβη της γενικότητας καθώς σε αυτήν την παράγραφο μόνο το ύψος της κορυφής του πίδακα εμφανίζεται. Συνεπώς η προηγούμενη εξίσωση θα είναι μια εξίσωση κίνησης για την κορυφή του πίδακα. Τετραγωνίζοντας την σχέση 5.100 θα προκύψει ότι η πίεση είναι,

$$p_s = L^2 \left(\frac{t}{Z}\right)^4 \quad (5.101)$$

Όπου η σταθερά  $L$  ορίζεται όπως είναι εύκολο να αποδειχθεί σαν,

$$L = \frac{J^2}{I(8\pi)^{3/2}} \Omega(0) \int_0^F \Omega(P) dP \quad (5.102)$$

Όμως από την σχέση 5.99 έχουμε βρει την μορφή της πίεσης άρα τελικά θα έχουμε,

$$p(Z) + \rho(Z) \dot{Z}^2 = L^2 \left(\frac{t}{Z}\right)^4 \quad (5.103)$$

Όσο αυξάνει η ταχύτητα και πάει να γίνει υπερηχητική θα κυριαρχεί ο όρος  $\rho(Z)\dot{Z}^2$  άρα αν αγνοήσουμε στην προηγούμενη σχέση τον πρώτο όρο και αποτετραγωνίσουμε θα καταλήξουμε στην σχέση,

$$Z^2[\rho(Z)]^{1/2}\dot{Z} = Lt^2 \quad (5.104)$$

Αν θέσουμε την πυκνότητα να έχει μια μορφή  $\rho(Z) = \rho_0[1 + (Z/a)^3]^{-m/3}$  και το αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη σχέση και ολοκληρώσουμε θα έχουμε,

$$\int_0^Z Z^2 \rho_0^{1/2} [1 + (Z/a)^3]^{-m/6} dZ = \int_0^t Lt^2 dt \rightarrow \quad (5.105)$$

$$[1 + (Z/a)^3]^{1-m/6} - 1 = \frac{L\rho_0^{-1/2}}{a^3} \left(1 - \frac{m}{6}\right) t^3 \quad (5.106)$$

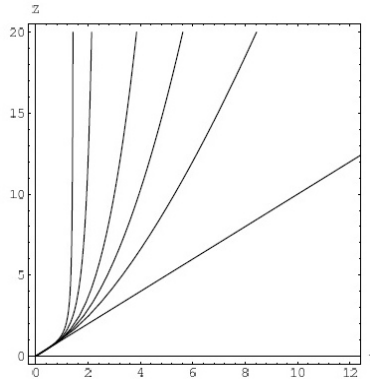
Ορίζουμε σαν  $L_1 = \frac{L\rho_0^{-1/2}}{a^3}$  και θεωρούμε αρχικά ότι έχουμε μικρά  $Z$  οπότε αν κάνουμε ανάπτυγμα *Taylor* στο αριστερό μέλος θα έχουμε ότι  $[1 + (Z/a)^3]^{1-m/6} - 1 \approx (1 - \frac{m}{6}) \frac{Z^3}{a^3}$  άρα θα έχουμε τελικά ότι,

$$Z = a(L_1)^{1/3} t \quad (5.107)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα μεγάλα ύψη τότε  $Z/a \gg 1$  οπότε και θα καταλήξουμε στην τελική σχέση,

$$Z_h = a \left[ \left(1 - \frac{m}{6}\right) L_1 \right]^{2/(6-m)} t^{6/(6-m)} \quad (5.108)$$

Αυτή η λύση που βρήκαμε τώρα συμπεριφέρεται καλύτερα από αυτήν στην παράγραφο 5.3 αλλά και πάλι για περιπτώσεις με  $m > 6$  βλέπουμε ότι οι λύσεις δεν έχουν νόημα άρα ακόμα και η πίεση *RAM* θα είναι αδύναμη και θα εμφανιστούν άπειρες ταχύτητες όπως βλέπουμε και στην παρακάτω εικόνα,



Σχήμα 5.6: Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται η μεταβολή του ύψους με τον χρόνο. Για  $m = 0$  έχουμε σταθερή πίεση και σταθερή ταχύτητα. Για  $m = 2, m = 3, m = 4$  έχουμε επιτάχυνση ενώ για  $m = 6$  έχουμε άπειρες ταχύτητες. Τέλος για  $m = 8$  οι λύσεις δεν έχουν νόημα (*Lynden-Bell 2006[18]*).

Το πρόβλημα τώρα είναι ότι όταν η πίεση πέφτει πολύ γρήγορα τότε δεν θα μπορεί να αντισταθεί στην επιτάχυνση και οι εξισώσεις θα χρειαστούν αλλαγές και αυτό γίνεται είτε με χρήση των σχετικιστικών εξισώσεων της *MHD* είτε διότι η πίεση του μεσογαλαξιακού χώρου δεν πέφτει ποτέ πιο γρήγορα από  $z^{-6}$  οπότε και η πίεση *RAM* θα είναι αρκετή.

# Κεφάλαιο 6

## Αναλυτικές λύσεις της *Grad – Shafranov*

### 6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα λύσουμε αναλυτικά την Grad-Shafranov εξίσωση για κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις και θα βρούμε πώς συμπεριφέρονται τα μαγνητικά πεδία.

### 6.2 Λύση για $\beta = C_1 P$

Αυτό που θα προσπαθήσουμε να κάνουμε είναι να βρούμε κάποιες αναλυτικές λύσεις στην Grad-Shafranov εξίσωση η οποία αν θυμηθούμε από το κεφάλαιο 3 είναι η,

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -\beta' \beta \quad (6.1)$$

Αυτή η εξίσωση όπως βλέπουμε είναι διαφορική με μερικές παραγώγους οπότε δεν λύνεται τόσο απλά. Το πρώτο που πρέπει να κάνουμε είναι να δοκιμάσουμε ένα χωρισμό μεταβλητών ώστε οι μερικές παραγώγους να γίνουν ολικές. Ένας τρόπος είναι με το  $r$  self similar μοντέλο όπου υποθέτουμε ότι  $P = r^{-l} f(\theta)$  αλλά εμείς εδώ σε πρώτη φάση δεν θα ακολουθήσουμε αυτήν την μέθοδο αλλά θα υποθέσουμε ότι είμαστε σε κυλινδρικές συντεταγμένες και ότι  $P = e^{-kz} f(R)$  και επίσης ισχύει ότι  $\beta = C_1 P$  οπότε τότε εξίσωση γίνεται γραμμική και λύνεται με χωρισμό μεταβλητών. Με αυτές τις υποθέσεις οι παραγωγίσεις είναι σχετικά απλές οπότε έχουμε ότι,

$$\frac{\partial P}{\partial R} = e^{-kz} \frac{\partial f}{\partial R} \quad (6.2)$$

Άρα με την βοήθεια της προηγούμενης σχέσης ο πρώτος όρος στην εξίσωση 6.1 θα γίνει,

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial R} \right) = e^{-kz} \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} - \frac{1}{R} e^{-kz} \frac{\partial f}{\partial R} \quad (6.3)$$

Οι παραγωγίσεις ως προς  $z$  είναι εξίσου απλές οπότε θα έχουμε για τον δεύτερο όρο ότι ισχύει,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = k^2 e^{-kz} f(R) \quad (6.4)$$

Τέλος όπως είπαμε και πιο πάνω το ρεύμα είναι της μορφής  $\beta = C_1 P$  ενώ η παράγωγος της θα είναι  $\beta' = C_1$  άρα τελικά ο τελευταίος όρος θα είναι,

$$-\beta'\beta = -C_1^2 e^{-kz} f(R) \quad (6.5)$$

Αν μαζέψουμε όλους τους όρους και απαλείψουμε τα εκθετικά θα έχουμε την τελική ολική διαφορική που καλούμαστε να λύσουμε,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial R} + (k^2 + C_1^2) f = 0 \quad (6.6)$$

Η διαφορική αυτή έχει την μορφή των εξισώσεων *Bessel* και έχει λύσεις τις *Bessel* πρώτου είδους και θα είναι,

$$f(R) = D_1 R J_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) + D_2 R Y_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) \quad (6.7)$$

Σε αυτή την παράγραφο θα αγνοήσουμε τον δεύτερο όρο  $Y_1$  διότι απειρίζεται πάνω στον άξονα ενώ εμείς θέλουμε η ροή να είναι 0 εκεί οπότε και τελικά θα έχουμε ότι η ροή θα είναι της μορφής,

$$P = D_1 e^{-kz} R J_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) \quad (6.8)$$

Αφού έχουμε την ροή ο υπολογισμός των μαγνητικών πεδίων είναι απλός αν θυμηθούμε τις σχέσεις από το κεφάλαιο 3 για τα πεδία οπότε και τελικά θα έχουμε ότι,

$$B_\phi = \frac{1}{2\pi R} \beta(P) = \frac{D_1}{2\pi} C_1 e^{-kz} J_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) \quad (6.9)$$

$$B_R = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{D_1}{2\pi} k e^{-kz} J_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) \quad (6.10)$$

Για τον υπολογισμό του  $B_z$  θα χρειαστούμε την παράγωγο του  $J_1$  οπότε ψάχνοντας σε βιβλία μαθηματικών βρίσκουμε ότι είναι,

$$\frac{dJ_1}{dR} = \frac{\sqrt{k^2 + C_1^2}}{2} (J_0(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) - J_2(\sqrt{k^2 + C_1^2} R)) \quad (6.11)$$

Με την βοήθεια αυτής της σχέσης είναι πλέον εύκολο να βρούμε το μαγνητικό πεδίο στον άξονα  $z$  το οποίο θα είναι της μορφής,

$$B_z = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial P}{\partial R} = \frac{D_1}{2\pi} e^{-kz} \left[ \frac{J_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R)}{R} + \frac{\sqrt{k^2 + C_1^2}}{2} (J_0(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) - J_2(\sqrt{k^2 + C_1^2} R)) \right] \quad (6.12)$$

Αυτά είναι όμως το γενικό μαγνητικό πεδίο και εμείς θέλουμε να δούμε πως αλλάζει το μαγνητικό πεδίο από γραμμή σε γραμμή οπότε αν λύσουμε την σχέση 6.8 ως προς το εκθετικό και το αντικαταστήσουμε στις σχέσεις για τα μαγνητικά πεδία θα έχουμε εν τέλει,

$$B_\phi = \frac{P}{2\pi R} C_1 \quad (6.13)$$

$$B_R = \frac{P}{2\pi R} k \quad (6.14)$$

$$B_z = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{R^2} + \frac{\sqrt{k^2 + C_1^2}}{2R} \left( \frac{J_0(\sqrt{k^2 + C_1^2}R) - J_2(\sqrt{k^2 + C_1^2}R)}{J_1(\sqrt{k^2 + C_1^2}R)} \right) \right] \quad (6.15)$$

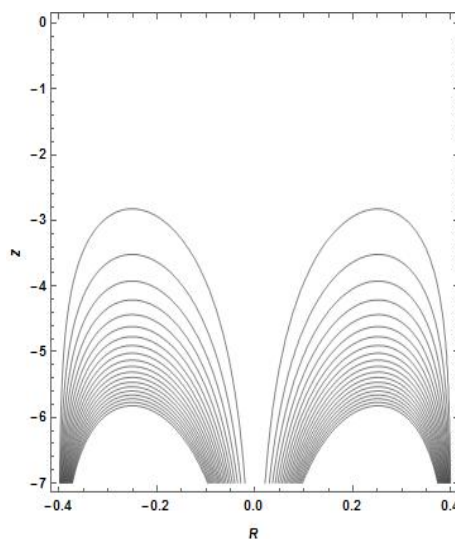
Όπως είδαμε μέχρι τώρα στις εξισώσεις εμφανίζονται κάποιες σταθερές. Την σταθερά  $D_1$  μπορούμε να τη διώξουμε γιατί ουσιαστικά κανονικοποιεί το μαγνητικό πεδίο. Η σταθερά  $k$  έχει μονάδες αντίστροφου μήκους και αλλάζοντάς την ανεβοκατεβαίνει ο άξονας  $z$  οπότε και το θέτω αυθαίρετα ίσο με την μονάδα. Τέλος η σταθερά  $C_1$  έχει και αυτή μονάδες αντίστροφου μήκους και θα προκύψει από συνδυασμό του  $k$  και της ακτίνας του δίσκου. Πιο συγκεκριμένα επειδή εμείς θέλουμε το  $B_R$  να μηδενίζεται στα άκρα του δίσκου και βρίσκοντας ότι η πρώτη ρίζα της *Bessel* είναι 3.83 οπότε για να ισχύει αυτό πρέπει,

$$\sqrt{k^2 + C_1^2} R_o = 3.83 \quad (6.16)$$

Η ακτίνα  $R_o$  είναι μια αυθαίρετη τιμή της ακτίνας του δίσκου όπου εδώ το διαλέγω να είναι  $R_o = 0.4$  και η κανονικοποίηση θα μπορούσε να είναι είτε σε *parsec* είτε σε αστρονομικές μονάδες είτε σε οτιδήποτε. Με βάση την προηγούμενη σχέση και το  $R_o$  που διαλέξαμε βρίσκουμε πολύ απλά ότι αντιστοιχεί σε  $C_1 = 9.523$ . Αν θέλουμε να βρούμε την ευθυγράμμιση τότε από αυτά που έχουμε μέχρι τώρα βλέπουμε ότι  $Z = 1/k$  και  $R = 3.83/\sqrt{k^2 + C_1^2}$  άρα τελικά,

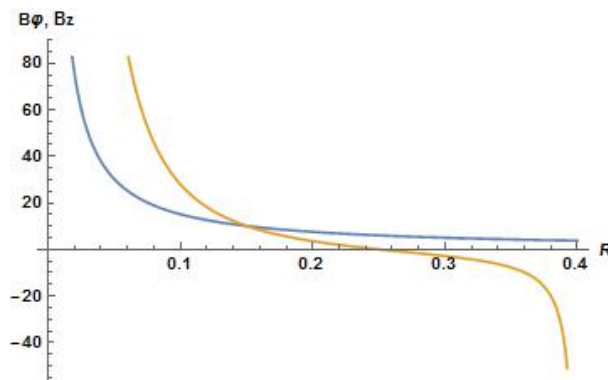
$$\frac{Z}{R} = \frac{1/k}{3.83/\sqrt{k^2 + C_1^2}} \simeq 2.5 \quad (6.17)$$

Αν θυμηθούμε και την σχέση  $Z/R = 1/\tan\theta$  τότε προκύπτει ότι το ημίανοιγμα του πίδακα θα είναι περίπου  $\theta \simeq 38^\circ$ . Έχοντας βρει και τις σταθερές και την μορφή των μαγνητικών πεδίων μπορούμε πλέον να βρούμε πως πάνε οι δυναμικές γραμμές σχεδιάζοντας τις ισοϋψείς της ροής και επίσης να δούμε πως μεταβάλλονται με το  $R$  τα μαγνητικά πεδία  $B_\phi, B_z$ . Θα αρχίσουμε πρώτα με τις δυναμικές γραμμές οι οποίες φαίνονται παρακάτω. Εμείς εδώ έχουμε σχεδιάσει 20 ισοϋψείς.



Σχήμα 6.1: Στο σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές στο πολοειδές επίπεδο ενώ δεν φαίνεται η περιστροφή

Όπως βλέπουμε όσο αυξάνει το ύψος η ροή πέφτει κάτι που το περιμέναμε φυσικά. Αν είχαμε κάνει περισσότερες γραμμές θα βλέπαμε ότι καθώς θα πλησιάζαμε στον άξονα η ροή θα μηδενιζόταν ενώ στο άκρο του δίσκου η ροή είναι μηδέν όπως το είχαμε ορίσει. Στην συνέχεια μπορούμε να δούμε πως συμπεριφέρονται τα πεδία  $B_\phi$ ,  $B_z$  σύμφωνα με τις σχέσεις 6.13 και 6.15 για μια συγκεκριμένη τιμή της ροής  $P$ .



Σχήμα 6.2: Στο σχήμα φαίνονται πως μεταβάλλονται τα πεδία με την ακτίνα  $R$

Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα το αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο  $B_\phi$  πέφτει σαν  $1/R$  κάτι που φαίνεται και από την σχέση 6.13. Όσο θα πλησιάζουμε όμως στην ροή του άξονα που είναι μηδέν δηλαδή για  $P \rightarrow 0$  το μαγνητικό πεδίο θα γίνεται μηδενικό. Από την άλλη μεριά το  $B_z$  πέφτει στην αρχή σαν  $1/R^2$  και μετά γίνεται αρνητικό και απειρίζεται στα άκρα του δίσκου.

Στην συνέχεια θα δοκιμάσουμε να κρατήσουμε και την  $Y$  στην αρχική μας λύση οπότε και η ροή θα γίνει τώρα,

$$P = D_1 e^{-kz} (R J_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) + R Y_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R)) \quad (6.18)$$

Τώρα μπορούμε ακριβώς όπως πριν να βρούμε τα μαγνητικά πεδία που η μορφή τους θα αλλάξει λίγο καθώς θα μπει και ένας παραπάνω όρος οπότε θα έχουμε,

$$B_\phi = \frac{P}{2\pi R} C_1 \quad (6.19)$$

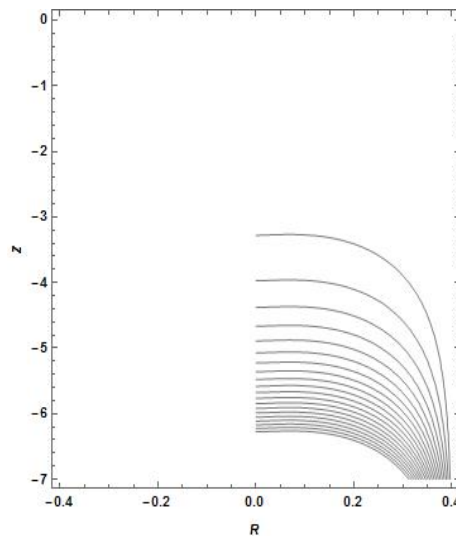
$$B_R = \frac{P}{2\pi R} k \quad (6.20)$$

$$B_z = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{R^2} + \frac{\sqrt{k^2 + C_1^2}}{2R} \left( \frac{J_0(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) - J_2(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) + Y_0(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) - Y_2(\sqrt{k^2 + C_1^2} R)}{J_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) + Y_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R)} \right) \right] \quad (6.21)$$

Ο όρος  $Y$  οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο του κεντρικού αντικείμενου και όχι του δίσκου για αυτό και αυτός ο όρος είναι σημαντικός μόνο για πολύ μικρές αποστάσεις. Την σταθερά  $D_1$  την διώξαμε για τον ίδιο λόγο με πριν, το  $k = 1$  ενώ το  $C_1$  θα προκύψει όχι με τον μηδενισμό του  $J$  στην ακτίνα  $R_0 = 0.4$  αλλά με τον μηδενισμό του αθροίσματος  $J_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R) + Y_1(\sqrt{k^2 + C_1^2} R)$  στην ακτίνα αυτή. Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι απλή και προκύπτει ότι το άθροισμα αυτό μηδενίζεται στο 1.323. Άρα όπως πριν θα έχουμε ότι,

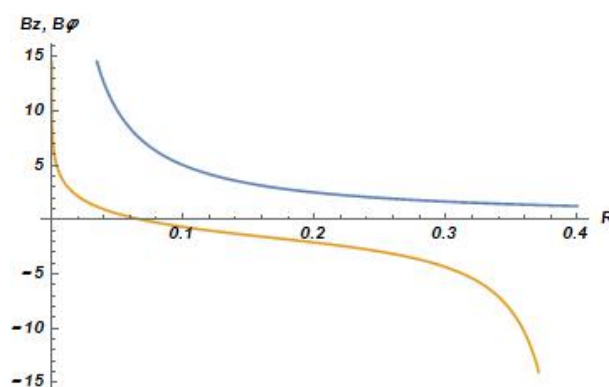
$$\sqrt{k^2 + C_1^2 R_o} = 1.323 \quad (6.22)$$

Από την προηγούμενη προκύπτει ότι το  $C_1 = 3.168$  για μια τυπική ακτίνα  $R_o = 0.4$ . Στην συνέχεια θα δούμε πως μεταβάλλεται η ροή ανά ύψος σχεδιάζοντας τα *contours*.



Σχήμα 6.3: Στο σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές στο πολοειδές επίπεδο κρατώντας και τον όρο  $Y$

Όπως βλέπουμε οι δυναμικές γραμμές φαίνονται να ξεκινάνε από μια πεπερασμένη τιμή στον άξονα και να μηδενίζονται στα άκρα. Αυτό φαίνεται αφύσικο αλλά επειδή τώρα επηρεάζει το πρόβλημα και το μαγνητικό πεδίο του κεντρικού αντικειμένου αν μπορούσαμε να μεγεθύνουμε την κεντρική περιοχή θα βλέπαμε την ροή να ανεβαίνει από το μηδέν μέχρι μια τιμή και να πέφτει οπότε όλα φαίνονται λογικά. Στην συνέχεια βλέπουμε και τα μαγνητικά πεδία πως μεταβάλλονται με την ακτίνα.



Σχήμα 6.4: Στο σχήμα φαίνονται πως μεταβάλλονται τα πεδία με την ακτίνα  $R$  κρατώντας και τον όρο  $Y$

Όπως βλέπουμε το πεδίο  $B_\phi$  πέφτει σαν  $1/R$  όπως ήταν αναμενόμενο καθώς ισχύει η ίδια σχέση με την 6.13. Από την άλλη το  $B_z$  κοντά στον άξονα απειρίζεται ενώ πέφτει σε ένα σημείο αντιστρέφεται και μετά απειρίζεται στα άκρα όπως και στην περίπτωση που είχαμε πριν. Η διαφορά εδώ είναι ότι το  $B_\phi$  κυριαρχεί συνέχεια.

### 6.3 Λύση για $\beta = C_1 P^{1/2}$

Η *transfield* εξίσωση σε σφαιρικές συντεταγμένες αν πούμε ότι  $\mu = \cos\theta$  θα είναι,

$$r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} = -r^2 \beta' \beta \quad (6.23)$$

Εμείς θέλουμε να βρούμε μόνο αυτοόμοιες λύσεις οι οποίες είναι της μορφής  $P = r^{-l} M(\mu)$  και  $\beta = C_1 P^\nu$ . Με αυτήν την παραδοχή βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση της γωνίας οπότε και το  $\beta\beta$  πρέπει να είναι συνάρτηση της γωνίας άρα προκύπτει  $\beta' \beta = (1 + 1/l) C_1^2 P^{1+2/l}$  συνεπώς αν θέσουμε  $\nu = (1 + 1/l)$  η προηγούμενη σχέση θα γίνει ,

$$l(l+1)f + (1 - \mu^2) \frac{d^2 f}{d\mu^2} = -(1 + 1/l) C_3^2 f^{1+2/l} \quad (6.24)$$

Όπου το  $f = M/M_1$  και  $M_1$  είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $M(\mu)$ . Σε αυτό το μοντέλο θα θεωρήσουμε ότι η πίεση είναι σταθερή άρα  $\nu=1/2$  συνεπώς  $l = -2$ . Επίσης θα θεωρήσουμε σφαιρικές και η γωνία  $\theta$  ξεκινάει από τον άξονα και μεγαλώνει προς τα έξω οπότε και η προηγούμενη σχέση θα γίνει,

$$2f + (1 - \mu^2) \frac{d^2 f}{d\mu^2} = -C_4 \quad (6.25)$$

Γράφοντας ότι η συνάρτηση  $f$  έχει την μορφή  $f = (1 - m^2)m$  η προηγούμενη γίνεται,

$$\frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2)^2 \frac{dm}{d\mu}] = -C_4 \quad (6.26)$$

Άρα αν χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες η προηγούμενη λύνεται απλά και καταλήγουμε στο ότι,

$$m = C_4 \int (1 + \mu)^{-2} (1 - \mu)^{-1} d\mu \quad (6.27)$$

Αν κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες τότε η ροή θα είναι τελικά,

$$P = r^2 (1 - \mu^2) m = C_4 r^2 (1 - \mu^2) \left[ \frac{1}{2} (1 + \mu_m)^{-1} - \frac{1}{2} (1 + \mu)^{-1} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \mu}{1 + m_m} \frac{1 - \mu_m}{1 - \mu} \right) \right] \quad (6.28)$$

Η ροή είναι 0 όταν η γωνία γίνει όσο το άνοιγμα του πίδακα δηλαδή  $\theta_m$ . Για ψηλούς και λεπτούς πίδακες η προηγούμενη θα απλοποιηθεί,

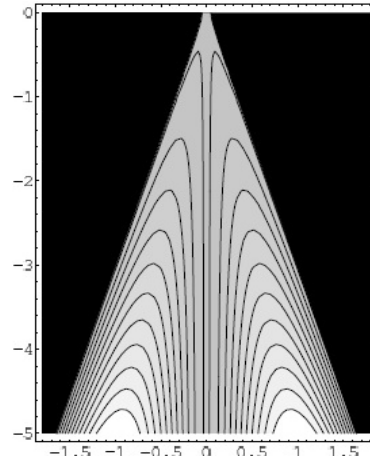
$$P = \frac{C_4 r^2 \theta^2}{4} \ln(\theta_m^2 / \theta^2) \quad (6.29)$$

Επίσης στο  $r = Z$  θα έχουμε την μέγιστη ροή  $F$  άρα και προκύπτει ότι  $C_4 = \frac{4eF}{\theta_m^2 Z^2}$ . Ξέροντας την ροή είναι πλέον απλό να βρούμε το ρεύμα το οποίο είναι της μορφής,

$$\beta = \sqrt{2C_4 P^{1/2}} = C_4 r \theta [\ln(\theta_m / \theta)]^{1/2} \quad (6.30)$$

Μετά από όλη αυτήν την ανάλυση αφού ξέρουμε την μορφή της ροής είναι εύκολο να βρούμε την μορφή των δυναμικών γραμμών το οποίο φαίνεται παρακάτω,





Σχήμα 6.5: Στο σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές μέσα στον πίδακα. Όπως φαίνεται η αρχή των αξόνων δε είναι στον δίσκο αλλά στην κορυφή του πίδακα (Lynden-Bell 2006[18])

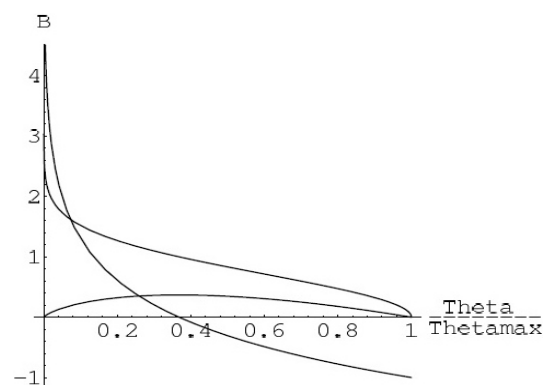
Τα μαγνητικά πεδία υπολογίζονται εξίσου απλά αφού έχουμε την ροή να είναι,

$$2\pi B_r = (r^2\theta)^{-1} \frac{\partial P}{\partial \theta} = C_4 [\ln(\theta_m/\theta) - 1] \quad (6.31)$$

$$2\pi B_\theta = C_4 \theta \ln(\theta_m/\theta) \quad (6.32)$$

$$2\pi B_\phi = C_4 [\ln(\theta_m/\theta)]^{1/2} \quad (6.33)$$

Τα διάγραμματα των μαγνητικών πεδίων φαίνονται παρακάτω,



Σχήμα 6.6: Στο σχήμα φαίνεται η μεταβολή των μαγνητικών πεδίων συναρτήσει του  $\theta$  (Lynden-Bell 2006)

Η σταθερά  $C_4$  μπορεί να προσδιοριστεί από την εξισορρόπηση των πιέσεων δηλαδή  $C_4 = 8\pi(\pi\rho)^{1/2}$ . Κοντά στον άξονα τα πεδία έχουν την ίδια συμπεριφορά που είχαμε βρει και στο κεφάλαιο 5 για την περίπτωση της σταθερής πίεσης παρολαυτά εδώ βλέπουμε ότι τα πεδία δεν εξαρτώνται από το  $r$ . Όπως βλέπουμε τα πεδία  $B_\theta, B_\phi$  μηδενίζονται

στα άκρα ενώ το  $B_r$  κοντά στον άξονα απειρίζεται ενώ στην γωνία  $\theta = \theta_m/\sqrt{e}$  αντιστρέφεται και γίνεται αρνητικό. Το μοντέλο που περιγράψαμε σε αυτήν την παράγραφο είναι γνωστό και σαν μοντέλο *Dunce's Cap*.

# Κεφάλαιο 7

## Κώδικας *PLUTO*

### 7.1 Εισαγωγή

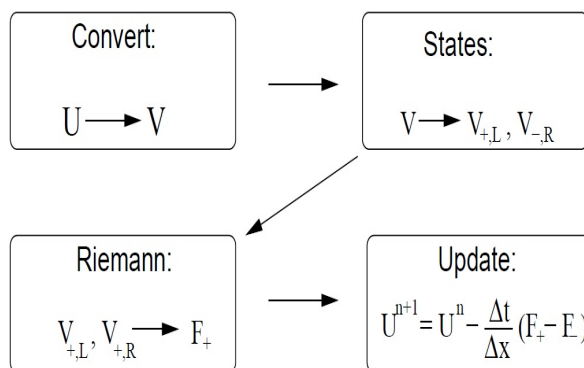
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τον κώδικα *PLUTO* το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια για να προσομοιώσουμε τους πίδακες βασισμένοι στο μοντέλο *Dunce's Cap*. Ο κώδικας αυτός είναι εξειδικευμένος αποκλειστικά για να λύνει προβλήματα με αστροφυσικές ροές και αποτελείται από διάφορους αλγόριθμους τα οποία μπορεί να περιγράφουν Νευτώνια, υδροδυναμικά, μαγνητοϋδροδυναμικά και σχετικιστικά μαγνητοϋδροδυναμικά ρευστά. Ο κώδικας ολοκληρώνει ένα σύστημα από νόμους διατήρησης βασισμένος σε *Godunov* τύπο υπολογισμούς. Σε όλους τους αλγόριθμους χρησιμοποιείται η στρατηγική *RSA* (Reconstruct-Solve-Average). Όπου αρχικά υπολογίζονται τμηματικά οι πεπερασμένοι όγκοι (finite volume) σε κάθε «κελί». Έπειτα ο κώδικας λύνει το Riemann πρόβλημα σε κάθε κομμάτι και η λύση αφήνεται να εξελιχθεί στον χρόνο. Αποδεικνύεται ότι αυτή η αλληλουχία των βημάτων είναι γενική για συστήματα με νόμους διατήρησης για αυτό και εφαρμόζεται στον κώδικα *PLUTO*. Ο κώδικας είναι ιδανικός για χρονοεξαρτώμενα προβλήματα με υπερηχητικές ροές και μπορεί να λυθεί σε διάφορες καταστάσεις όπως κλασικά, σχετικιστικά μη-μαγνητισμένα και μαγνητισμένα ρευστά. Τέλος ο *PLUTO* είναι γραμμένος σε γλώσσα C και μπορεί να τρέξει σε έναν ή σε παράλληλους επεξεργαστές.

### 7.2 Παρουσίαση κώδικα

Ο *PLUTO* είναι σχεδιασμένος να ολοκληρώνει γενικά συστήματα από νόμους διατήρησης της μορφής,

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\nabla \cdot T(\vec{U}) + S(\vec{U}) \quad (7.1)$$

Όπου το  $U$  είναι η εκάστοτε διατηρήσιμη ποσότητα η οποία υπολογίζεται στις έδρες των κυψελίδων, Το  $T(U)$  είναι ένας ταυυστής 2ης τάξης το οποίο περιέχει την ροή της κάθε συνιστώσας των  $U$  και τέλος το  $S(U)$  είναι ο όρος των πηγών. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων γίνεται με την μετατροπή των βασικών μεταβλητών  $U$  σε ένα θεμελιώδες (primitive) διάνυσμα  $V$  το οποίο υπολογίζεται στο κέντρο των κυψελίδων και έπειτα υπολογίζει τον πεπερασμένο όγκο (finite volume (FV)) και λύνει το πρόβλημα Riemann αφήνοντας το σύστημα να εξελιχθεί στον χρόνο. Τα τρία αυτά βήματα φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 7.1: Στο σχήμα φαίνεται η στρατηγική *RSA*: Στην αρχή τα διανύσματα  $U$  μετατρέπονται στα primitive διανύσματα  $V$ . Έπειτα κατασκευάζονται οι καταστάσεις  $V_{+,L}, V_{-,R}$  και αφού λύθει το πρόβλημα Riemann η κατάσταση αφήνεται να εξελιχθεί στον χρόνο. (A.Mignone et al 2007[20])

Η μορφή των  $U, V, S(U), T(U)$  εξαρτάται από τη φυσική που θα έχουμε διαλέξει εμείς. Δεν θα επεκταθούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες. Περισσότερες πληροφορίες μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο user guide του *PLUTO*.

Ο κώδικας έχει ένα ευρύ πεδίο επιλογών και θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση με τα είδη φυσικής που μπορεί να λύνει. Εδώ ο κώδικας μας δίνει τέσσερις επιλογές οι οποίες είναι,

1. Κλασική υδροδυναμική (*HD*)
2. Μαγνητούδροδυναμική (*MHD*)
3. Σχετικιστική υδροδυναμική (*RHD*)
4. Σχετικιστική Μαγνητούδροδυναμική (*RMHD*)

Στην επόμενη παράγραφο θα αναλύσουμε περισσότερα τα είδη φυσικής του κώδικα απλά να πούμε ότι στα δύο τελευταία χρησιμοποιείται η ειδική θεωρία της σχετικότητας και άρα σαν μονάδα ταχύτητας θα είναι η ταχύτητα του φωτός.

Έπειτα μπορούμε να διαλέξουμε πόσες διαστάσεις θέλουμε και πόσες συνιστώσες άλλα πρέπει να προσέξουμε οι συνιστώσες να μην είναι λιγότερες από τις διαστάσεις. Οι επιλογές που έχουμε είναι μέχρι τρεις διαστάσεις και μέχρι τρεις συνιστώσες. Στην συνέχεια χρειαζόμαστε ένα σύστημα συντεταγμένων ώστε να λυθούν οι εξισώσεις, εδώ ο κώδικας μας δίνει τέσσερις επιλογές,

1. Καρτεσιανές συντεταγμένες
2. Πολικές συντεταγμένες
3. Κυλινδρικές συντεταγμένες
4. Σφαιρικές συντεταγμένες

Σε πολλά προβλήματα είναι αναγκαία και η παρουσία βαρύτητας οπότε ο κώδικας μας δίνει την δυνατότητα να εισάγουμε και την βαρύτητα στις προσομοιώσεις με τρεις διαφορετικούς τρόπους,

1. Δυναμικό της μορφής  $-\nabla\Phi$
2. Διάνυσμα της μορφής  $\vec{g}$

3. Δυναμικό+διάνυσμα της μορφής  $-\nabla\Phi + \vec{g}$ 

Όπως είπαμε και πιο πάνω για να υπολογίσει ο κώδικας τους πεπερασμένους όγκους και να κάνει το *reconstruction* χρειάζεται κάποια μέθοδο και οι επιλογές μας είναι πέντε,

1. Flat
2. Linear
3. Weno3
4. LimO3
5. Parabolic

Περισσότερες πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά αυτών των μεθόδων υπάρχουν στην εργασία A.Mignone et al 2007[20]. Τέλος ο PLUTO έχει διάφορους μεθόδους ολοκλήρωσης των εξισώσεων οι οποίοι συνοπτικά είναι,

1.Euler: Το οποίο είναι της μορφής  $U^{n+1} = U^n + \Delta t^n \Lambda^n$  όπου το  $\Lambda$  είναι ο διαφορικός τελεστής του εκάστοτε προβλήματος και το  $U$  είναι η φυσική ποσότητα που θέλουμε να ολοκληρώσουμε.

2.RK2(Runge-Kutta): Όπου εδώ η ολοκλήρωση γίνεται με την μέθοδο Runge-Kutta δηλαδή

$$U^* = U^n + \Delta t^n \Lambda^n$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}(U^n + U^* + \Delta t^n \Lambda^*)$$

3.RK3(Runge-Kutta): Όπως και πριν άλλα η ολοκλήρωση είναι 3ης τάξης πλέον δηλαδή

$$U^* = U^n + \Delta t^n \Lambda^n$$

$$U^{**} = \frac{1}{4}(3U^n + U^* + \Delta t^n \Lambda^*)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3}(U^n + 2U^{**} + 2\Delta t^n \Lambda^{**})$$

4.Characteristic-Tracing,Hancock: Σε αυτήν την περίπτωση η χρονική εξέλιξη του  $U$  γράφεται

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t^n \Lambda(\vec{V}^{n+1/2})$$

Όπου το διάνυσμα  $\vec{V}$  είναι το Primitive διάνυσμα που έχουμε περιγράψει πιο πάνω και ο κώδικας το υπολογίζει με ένα ανάπτυγμα Taylor. Μια συμβουλή που δίνεται στους χρήστες του κώδικα είναι ότι η μέθοδος Hancock πρέπει να χρησιμοποιείται με Linear reconstruction για καλύτερα αποτελέσματα ενώ η μέθοδος Characteristic-Tracing μπορεί να συνδυαστεί με όλους τους reconstruction αλγόριθμους. Τέλος αν έχουμε πολυδιάστατα προβλήματα μπορούμε να διαλέξουμε να έχουμε dimensional splitting όπου θα "σπάει" το αρχικό πολυδιάστατο πρόβλημα σε μονοδιάστατα. Έχοντας διαλέξει την φυσική που θέλουμε μας δίνεται ένα πεδίο επιλογών ως προς το αν θέλουμε να έχουμε ιδανικά ρευστά, ισόθερμα η αδιαβατικά. Να έχουμε θερμική αγωγιμότητα, ιξώδες η και resistivity αλλά επίσης και αν θέλουμε να είμαστε σε μη αδρανειακό περιστρεφόμενο σύστημα. Δεν θα ασχοληθούμε σε αυτήν την εργασία με αυτά καθώς σε όλες τις προσομοιώσεις θα θεωρήσουμε ιδανικά ρευστά. Το μόνο που ίσως αξίζει να

αναφερθεί είναι ότι επειδή εμείς θα κάνουμε προσομοιώσεις με μαγνητικά πεδία θέλουμε η απόκλιση να είναι 0 και εδώ ο κώδικας μας δίνει τέσσερις επιλογές:

1. Να μην χρειάζεται η απόκλιση να είναι 0
2. Eight-Waves
3. Div-Cleaning
4. Constrained-Transport

Όλες τις παραπάνω παραμέτρους ο χρήστης μπορεί να τις αλλάζει οπότε θελήσει από το αρχείο `definitions.h`. Αν θελήσουμε τώρα να διαμορφώσουμε το «κουτί» που θα γίνει η προσομοίωση θα ανοίξουμε το αρχείο `pluto.ini` όπου αρχικά θα δώσουμε τα χαρακτηριστικά του πλέγματος δηλαδή το μέγεθος του «κουτιού» σε κάθε κατεύθυνση και πόσα σημεία θα υπάρχουν για την ολοκλήρωση. Κάθε πλέγμα είναι ανεξάρτητο από τα άλλα και μπορεί να είναι,

- 1.Ομοιόμορφο (Uniform)
- 2.Τεντωμένο' (Stretched)
- 3.Λογαριθμικό (Logarithmic)

Στην συνέχεια επιλέγουμε τον χρόνο που θα «τρέξει» η προσομοίωση καθώς και τις συνοριακές συνθήκες (Boundaries) οι οποίες διακρίνονται σε έξι κατηγορίες

- 1.User defined
- 2.Outflow
- 3.Axisymmetric
- 4.Equatorial symmetric
- 5.Periodic
- 6.Shearingbox

Τέλος ο χρήστης επιλέγει την συχνότητα που αποθηκεύονται τα αρχεία καθώς και το είδος του αρχείου που χρειάζεται έχοντας να επιλέξει μέσα από ένα ευρύ πεδίο από διάφορους τύπους αρχείων ανάλογα με τις ανάγκες του. Το τελευταίο βήμα πριν ξεκινήσει η προσομοίωση είναι να οριστούν οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Αυτό γίνεται με την βοήθεια του αρχείου `init.c` όπου εκεί καθορίζουμε τις αρχικές συνθήκες για τις ακόλουθες ποσότητες

- 1.Πυκνότητα
- 2.Ταχύτητα(3 συνιστώσες)
- 3.Πίεση
- 4.Μαγνητικά πεδία(3 συνιστώσες)

Αυτό που απομένει είναι ο καθορισμός των συνοριακών συνθηκών στο τμήμα του κώδικα `UserDefBoundary()` εφόσον έχει επιλεγεί τουλάχιστον σε ένα σύνορο η επιλογή `User defined`. Το τελευταίο κομμάτι του κώδικα αφορά την βαρύτητα και θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μόνο αν έχουμε επιλέξει να έχουμε `Body force` όπως περιγράψαμε πιο πάνω. Αφού έχουμε κάνει όλα αυτά μπορούμε να τρέξουμε την προσομοίωση και να δούμε τα αποτελέσματά μας.

## 7.3 Εξισώσεις του *PLUTO*

### 7.3.1 HD module

Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Euler της κλασικής ρευστοδυναμικής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{m} \\ E + \rho\Phi \end{pmatrix} + \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \rho\vec{u} \\ \vec{m} \cdot \vec{u} + PI \\ (E + P + \rho\Phi)\vec{u} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\nabla\Phi + \rho\vec{g} \\ \vec{m} \cdot \vec{g} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα,  $\vec{m} = \rho\vec{u}$  είναι η πυκνότητα ορμής,  $\vec{u}$  είναι η ταχύτητα,  $P$  είναι η θερμική πίεση και  $E$  είναι η συνολική ενεργειακή πυκνότητα:

$$E = \rho e + \frac{m^2}{2\rho} \quad (7.3)$$

Ο όρος πηγής στο δεξί μέλος προέρχεται μόνο από την βαρύτητα και γράφεται συναρτήσει του δυναμικού  $\Phi$  και της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $\vec{g}$ .

Οι primitive μεταβλητές καθορίζονται από τα διανύσματα  $V = (\rho, \vec{u}, P)^T$ , όπου  $\vec{u} = \vec{m}/\rho$  ενώ η πίεση  $P$  ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση. Τα primitive διανύσματα ικανοποιούν ένα σύστημα ημιγραμμικών εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{\nabla P}{\rho} &= -\nabla \Phi + \vec{g} \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla P + \rho c_s^2 \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Όπου το  $c_s^2 = \sqrt{\Gamma P/\rho}$  είναι η ταχύτητα του ήχου σε ένα ιδανικό ρευστό.

### 7.3.2 MHD module

Με το MHD module ο κώδικας λύνει το παρακάτω σύστημα από νόμους διατήρησης:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{m} \\ E + \rho\Phi \\ \vec{B} \end{pmatrix} + \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \rho\vec{u} \\ \vec{m} \cdot \vec{u} - \vec{B} \cdot \vec{B} + P_t I \\ (E + P_t + \rho\Phi)\vec{u} - \vec{B}(\vec{u} \cdot \vec{B}) \\ \vec{u} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{u} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\nabla\Phi + \rho\vec{g} \\ \vec{m} \cdot \vec{g} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα,  $\vec{m} = \rho\vec{u}$  είναι η πυκνότητα ορμής,  $\vec{u}$  είναι η ταχύτητα,  $P_t = P + B^2/2$  είναι η συνολική πίεση(θερμική+μαγνητική) και  $E$  είναι η συνολική ενεργειακή πυκνότητα:

$$E = \rho e + \frac{m^2}{2\rho} + \frac{B^2}{2} \quad (7.6)$$

Όπως και πριν έτσι και εδώ ο όρος πηγής στο δεξί μέλος προέρχεται μόνο από την βαρύτητα και γράφεται συναρτήσει του δυναμικού  $\Phi$  και της επιτάχυνσης της βαρύτητας

$\vec{g}$ . Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι ο νόμος της επαγωγής γράφεται στην μορφή:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (7.7)$$

Όπου  $E = -\vec{u} \times \vec{B} + \eta \cdot \vec{J}$  ενώ το  $\eta$  είναι ο τανυστής του resistivity. Τα διατηρούμενα και primitive διανύσματα  $U, V$  έχουν την μορφή:

$$U = (\rho, \vec{m}, E, \vec{B})^T, V = (\rho, \vec{u}, P, \vec{B})^T \quad (7.8)$$

Ενώ όπως και πριν το primitive διάνυσμα  $V$  ικανοποιεί το σύστημα των παρακάτω εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) + \frac{\nabla P}{\rho} &= -\nabla \Phi + \vec{g} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{B}(\nabla \cdot \vec{u}) - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} &= \vec{u}(\nabla \cdot \vec{B}) \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla P + \rho c_s^2 \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Όπου η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν απλά το έχουμε κρατήσει στις εξισώσεις για λόγους πληρότητας. Επίσης να σημειώσουμε ότι σε όλες τις προηγούμενες εξισώσεις έχει απορροφηθεί ο όρος  $1/\sqrt{4\pi}$  καθώς στον κώδικα το μαγνητικό πεδίο γράφεται σαν  $B_{pl} = B/\sqrt{4\pi}$ .

### 7.3.3 RHD module

Σε αυτήν την ενότητα θα δείξουμε τις εξισώσεις των σχετικιστικών ρευστών και αξίζει να σημειώσουμε ότι τώρα πλέον η ταχύτητα αναφοράς θα πρέπει να είναι η ταχύτητα του φωτός. Αυτές οι εξισώσεις είναι κατάλληλες για καρτεσιανά συστήματα όπως και καμπυλόγραμμα. Στην σχετικιστική περίπτωση το διάνυσμα  $U$  γράφεται σαν:

$$U = (D, m_1, m_2, m_3, E)^T \quad (7.10)$$

Όπου το  $D$  είναι η πυκνότητα στο σύστημα του εργαστηρίου,  $m_1, m_2, m_3$  είναι οι συνιστώσες της ορμής και  $E$  είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος. Οι εξισώσεις διατήρησης θα είναι της μορφής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D \\ \vec{m} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} D\vec{u} \\ \vec{m} \cdot \vec{u} + PI \\ \vec{m} \end{pmatrix}^T = 0 \quad (7.11)$$

Όπου  $\vec{u}$  είναι η ταχύτητα και  $P$  είναι η θερμική πίεση. Στο primitive διάνυσμα  $V$  συμπεριλαμβάνονται η πυκνότητα ηρεμίας  $\rho$ , η τρι-ταχύτητα  $\vec{u}$  και η θερμική πίεση  $P$ . Η σχέση μεταξύ των συνιστωσών των διανυσμάτων  $U$  και  $V$  είναι:

$$D = \rho\gamma, \vec{m} = \rho h\gamma\vec{u}, E = \rho h\gamma^2 - P \quad (7.12)$$



Όπως και πριν το primitive διάνυσμα  $V$  ικανοποιεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho - \frac{1}{c_s^2 h} \vec{u} \cdot \nabla P &= \frac{1}{c_s^2 h} \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho h \gamma^2} \nabla P &= -\frac{\vec{u}}{\rho h \gamma^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \alpha \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{1 - u^2 c_s^2} [(1 - c_s^2) \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho c_s^2 h \nabla \cdot \vec{u}] &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

### 7.3.4 RMHD module

Όπως και πριν είμαστε στην σχετικιστική περίπτωση οπότε σαν μονάδα ταχύτητας θα πρέπει να είναι η ταχύτητα του φωτός. Η εξισώσεις διατήρησης θα είναι της μορφής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D \\ \vec{m} \\ E \\ \vec{B} \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} D \vec{u} \\ w_t \gamma^2 \vec{u} \vec{u} - \vec{b} \vec{b} + P_t I \\ \vec{m} \\ \vec{u} \vec{B} - \vec{B} \vec{u} \end{pmatrix}^T = 0 \quad (7.14)$$

Όπου το  $D$  είναι η πυκνότητα στο σύστημα του εργαστηρίου,  $m_1, m_2, m_3$  είναι οι συνιστώσες της ορμής και  $E$  είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος:

$$\begin{aligned} D &= \gamma \rho \\ m &= w_t \gamma^2 \vec{u} \vec{u} - b^0 \vec{b} \\ E &= w_t \gamma^2 \vec{u} \vec{u} - b^0 b^0 - P_t \end{aligned}, \quad \begin{cases} b^0 = \gamma \vec{u} \cdot \vec{B} \\ \vec{b} = \vec{B} / \gamma + \gamma (\vec{u} \cdot \vec{B}) \vec{u} \\ w_t = \rho h + B^2 / \gamma^2 + (\vec{u} \cdot \vec{B})^2 \\ P_t = P + \frac{B^2 / \gamma^2 + (\vec{u} \cdot \vec{B})^2}{2} \end{cases} \quad (7.15)$$

Το primitive διάνυσμα  $V$  είναι ίδιο με την προηγούμενη περίπτωση μόνο που υπάρχει και το μαγνητικό πεδίο δηλαδή είναι  $V = (\rho, \vec{u}, P, \vec{B})$ . Οι ημιγραμμικές εξισώσεις δεν είναι διαθέσιμες σε αυτήν την έκδοση του κώδικα οπότε και η μέθοδος Characteristic-Tracing δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ. Αντιθέτως η μέθοδος Runge-Kutta είναι ιδανική για αυτές τις περιπτώσεις και συνιστάται.

Στα επόμενα τρία κεφάλαια θα παρουσιάσουμε τις προσομοιώσεις για διάφορες περιπτώσεις που εκτελέσαμε με τον κώδικα PLUTO και θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα.

# Κεφάλαιο 8

## Προσομοίωση πρώτη για

$$\rho_j = 10, \rho_a = 0.1$$

### 8.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε τις πρώτες προσομοιώσεις που εκτελέσαμε με τον κώδικα PLUTO βασισμένοι στο μοντέλο Duncce's Cap. Στις προσομοιώσεις αυτές θεωρούμε ότι η πυκνότητα του πίδακα είναι  $\rho_j = 10$  και η πυκνότητα του περιβάλλοντος είναι  $\rho_a = 0.1$  όπου οι τιμές αυτές είναι αδιάστατες, επίσης θεωρούμε ότι η πίεση στα άκρα του πίδακα είναι σε ισορροπία με το περιβάλλον. Εμείς αλλάζοντας την ταχύτητα του πίδακα παίρνουμε τα διάφορα αποτελέσματα τα οποία θα δούμε παρακάτω.

### 8.2 Περιγραφή του προβλήματος

Σε όλες τις προσομοιώσεις που εκτελέσαμε εμείς θεωρήσαμε ότι ισχύει η *MHD* σε δύο διαστάσεις με τρεις συνιστώσες. Επίσης θεωρήσαμε ότι είμαστε σε κυλινδρικές συντεταγμένες με αξισυμμετρία δηλαδή τα μεγέθη δεν εξαρτώνται από την  $\phi$  συνιστώσα ( $\partial/\partial\phi = 0$ ). Θεωρούμε ότι η βαρύτητα είναι αμελητέα όπως και το cooling δηλαδή θεωρούμε αδιαβατικές μεταβολές και όπως είπαμε και στο κεφάλαιο 7 θα θεωρήσουμε ιδανικά ρευστά.<sup>12</sup>

Όπως είπαμε εμείς βασιστήκαμε στο μοντέλο Duncce's Cap που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 6 δηλαδή ότι το μαγνητικό πεδίο έχει σχήμα loop μέσα στο τρίγωνο όπως φαίνεται στο σχήμα 6.5 και αυτό προσπαθήσαμε να αναπαράξουμε ώστε να είμαστε όσο πιο κοντά στο μοντέλο αυτό. Οπότε για να μπορέσουμε να λύσουμε το πρόβλημα πιο απλά θεωρήσαμε ότι έχουμε μικρή γωνία της τάξης των 5 μοιρών και έτσι καταλήγουμε στην σχέση 6.29,

$$P = \frac{C_4 r^2 \theta^2}{4} \ln(\theta_m^2 / \theta^2) \quad (8.1)$$

Εμείς όμως είμαστε σε κυλινδρικές συντεταγμένες οπότε πρέπει την προηγούμενη σχέση να την μετατρέψουμε. Ξέρουμε ότι η εφαπτόμενη της γωνίας  $\theta$  το οποίο είναι το ημίανοιγμα του πίδακα είναι,

<sup>1</sup>Σαν reconstruction αλγόριθμο θα διαλέξουμε το parabolic ενώ σαν μέθοδο ολοκλήρωσης θα έχουμε το characteristic tracing.

<sup>2</sup>Τέλος επειδή θα έχουμε μαγνητικά πεδία θέλουμε να έχουμε την απόκλιση μηδέν οπότε και διαλέγουμε το div-cleaning για να ελέγχει την απόκλιση.

$$\tan(\theta) = \frac{\varpi}{Z_o - Z} \rightarrow \theta \simeq \frac{\varpi}{Z_o - Z} \quad (8.2)$$

Όπου  $\varpi$  είναι η κυλινδρική ακτίνα,  $Z$  είναι το ύψος του πίδακα και  $Z_o$  είναι το αρχικό ύψος του τριγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα 6.5. Επίσης η σφαιρική ακτίνα  $r$  είναι της μορφής,

$$r = \sqrt{\varpi^2 + (Z - Z_o)^2} \quad (8.3)$$

Επειδή όμως έχουμε κάνει την προσέγγιση των μικρών γωνιών το  $\varpi \ll |Z - Z_o|$  άρα η προηγούμενη θα γίνει,

$$r \simeq Z - Z_o \quad (8.4)$$

Άρα αν αντικαταστήσουμε τα  $r$ ,  $\theta$  στην σχέση της ροής τότε η μορφή της σε κυλινδρικές θα είναι,

$$P = \frac{C_4}{4} \varpi^2 \ln\left(\frac{\theta_m^2 (Z_o - Z)^2}{\varpi^2 + \varpi_o^2}\right) \quad (8.5)$$

Το  $\varpi_o^2$  έχει μια τιμή της τάξης του  $10^{-3}$  και την εισάγαμε με το χέρι ώστε να μην απειριστεί ο λογάριθμος σε μικρές αποστάσεις. Αυτό που δεν έχουμε αναφέρει είναι ότι η μέγιστη γωνία του πίδακα είναι  $\theta_m = 5^\circ$  και  $Z_o = 0.5$  ενώ η σταθερά  $C_4$  είναι μια σταθερά κανονικοποίησης και θα προσδιοριστεί αργότερα. Εμείς θελήσαμε να έχουμε μαγνητικές γραμμές μόνο μέσα στο τρίγωνο οπότε θέλαμε να έχουμε ροή μέχρι εκεί που ο λογάριθμος θα γίνει μηδέν δηλαδή,

$$P = \begin{cases} \frac{C_4}{4} \varpi^2 \ln\left(\frac{\theta_m^2 (Z_o - Z)^2}{\varpi^2 + \varpi_o^2}\right) & , Z < Z_o - \frac{1}{\theta_m} \sqrt{\varpi^2 + \varpi_o^2} \\ 0 & , Z > Z_o - \frac{1}{\theta_m} \sqrt{\varpi^2 + \varpi_o^2} \end{cases} \quad (8.6)$$

Αφού έχουμε υπολογίσει την ροή είναι πλέον εύκολο να βρούμε τα μαγνητικά πεδία από τις σχέσεις,

$$B_z = \frac{1}{2\pi\varpi} \frac{\partial P}{\partial \varpi}, B_\varpi = -\frac{1}{2\pi\varpi} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (8.7)$$

Ενώ το αζιμουθιακό πεδίο προκύπτει από τον νόμο Ampere οπότε τελικά οι μορφές των μαγνητικών πεδίων έπειτα από κάποιες πράξεις θα είναι,

$$B_z = \frac{C_4}{4\pi} \ln\left(\frac{\theta_m^2 (Z_o - Z)^2}{\varpi^2 + \varpi_o^2}\right) - \frac{C_4}{4\pi} \frac{\varpi^2}{\varpi^2 + \varpi_o^2} \quad (8.8)$$

$$B_\varpi = \frac{C_4}{4\pi} \frac{\varpi}{Z_o - Z} \quad (8.9)$$

$$B_\phi = -\frac{C_4}{4\pi} \sqrt{\ln\left(\frac{\theta_m (Z_o - Z)}{\sqrt{\varpi^2 + \varpi_o^2}}\right)} \frac{B_z}{|B_z|} \quad (8.10)$$

Την σταθερά  $C_4$  την διαλέγουμε να είναι  $2\pi$  και επίσης θέλουμε η μαγνητική πίεση στην ακτίνα  $\theta_m$  να είναι ίση με την εξωτερική πίεση οπότε και τελικά προκύπτει ότι η πίεση του περιβάλλοντος τελικά θα είναι  $P_a = 1/8\pi$ . Η θερμική πίεση στο εσωτερικό

θέλουμε να είναι αρκετά μικρή ώστε να είμαστε όσο πιο κοντά γίνεται στο όριο του force-free όπως περιγράφει και ο Lynden-Bell οπότε και την θέτουμε  $P_j = 0.0001$ . Αυτό που είναι σημαντικό και πρέπει να προσέξουμε είναι ότι το  $B_\phi$  να είναι αρνητικό εκεί που το μαγνητικό πεδίο  $B_z$  είναι θετικό και αντίστροφα ώστε να έχουμε την αντίθετη πολικότητα στα μαγνητικά πεδία. Όμως για να είμαστε όσο πιο κοντά στην θεώρηση του Lynden-Bell θα αγνοήσουμε την βαρύτητα καθώς και την περιστροφή του δίσκου διότι δεν θέλουμε να έχουμε αδράνεια της ύλης. Ουσιαστικά θέλουμε να φτιάξουμε έτσι την κατάσταση ώστε το μαγνητικό πεδίο να είναι κυρίαρχο κατά την διάρκεια των προσομοιώσεων. Τέλος σε αυτό το κεφάλαιο θα προσομοιώσουμε προβλήματα όπου η πυκνότητα μέσα στον πίδακα είναι  $\rho_j = 10$  ενώ έξω θα είναι  $\rho_a = 0.1$  και θα δούμε πως θα συμπεριφερθεί το μοντέλο για διάφορες τιμές της ταχύτητας που θα του δίνουμε. Αυτό το μοντέλο είναι κατάλληλο για πίδακες από νεαρά άστρα (YSO). Συνοπτικά οι τιμές των μεταβλητών μέσα και έξω από τον πίδακα είναι οι εξής:

	Πίδακας	Περιβάλλον
$\rho$	10	0.1
$P$	0.0001	$1/8\pi$
$B_z$	$\frac{C_4}{4\pi} \ln\left(\frac{\theta_m^2(Z_o-Z)^2}{\omega^2+\omega_o^2}\right) - \frac{C_4}{4\pi} \frac{\omega^2}{\omega^2+\omega_o^2}$	0
$B_\omega$	$\frac{C_4}{4\pi} \frac{\omega}{Z_o-Z}$	0
$B_\phi$	$-\frac{C_4}{4\pi} \sqrt{\ln\left(\frac{\theta_m(Z_o-Z)}{\sqrt{\omega^2+\omega_o^2}}\right)}$	0
$v_z$	$C$	0
$v_\omega$	0	0
$v_\phi$	0	0

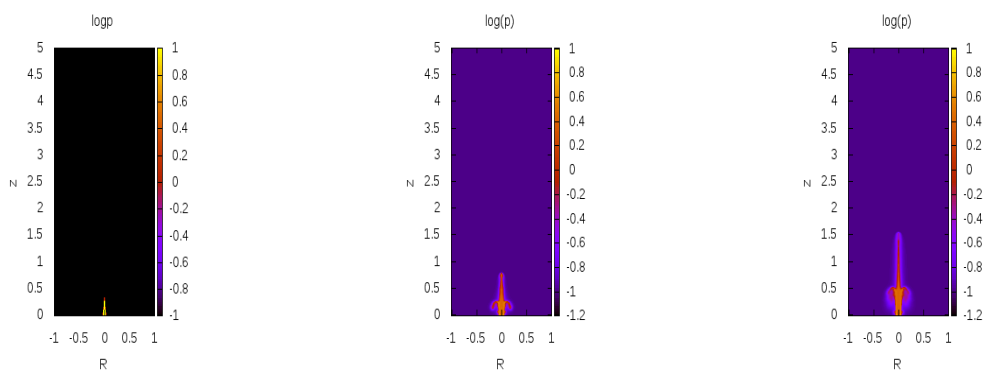
Η τιμή της ταχύτητας που έχουμε βάλει  $C$  δεν σημαίνει κάτι απλά στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για διάφορες ταχύτητες. Κάτι που πρέπει να αναφέρουμε είναι ότι χαρακτηριστική μας ταχύτητα σε αυτά τα προβλήματα είναι η ταχύτητα Alfven δηλαδή  $V_A \propto 1/\sqrt{\rho}$  οπότε και σε μας θα είναι περίπου 0.3. Άρα όταν αναφερόμαστε σε οποιαδήποτε ταχύτητα αυτά θα είναι σε σχέση με την ταχύτητα  $V_A$ . Επίσης το χαρακτηριστικό μας μήκος είναι  $r_n = 1$  οπότε από αυτά τα δύο μεγέθη μπορούμε να βρούμε το χαρακτηριστικό χρόνο (crossing time) το οποίο είναι περίπου 3.

Για να κλείσουμε αυτήν την παράγραφο να πούμε ότι το μέγεθος του 'κουτιού' που θα γίνει η προσομοίωση είναι  $R = 1$  με 200 σημεία και  $Z = 5$  με 1000 σημεία και το αφήσαμε να τρέξει για χρόνο 15 σε μονάδες PLUTO δηλαδή για περίπου 5 crossing time. Τέλος στο αριστερό άκρο του κουτιού θεωρήσαμε axisymmetric boundaries, στο δεξί θεωρήσαμε outflow, στο κάτω άκρο θεωρήσαμε user defined όπου ουσιαστικά βάλουμε τις τιμές του πάνω πίνακα για να έχουμε συνεχή ροή μαγνητικού πεδίου και αερίου από το κάτω άκρο και στο πάνω άκρο θεωρήσαμε ξανά outflow. Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα μας για ταχύτητες  $v_z = 10^{-4}$ ,  $v_z = 10^{-2}$ ,  $v_z = 1$ .

## 8.3 Αποτελέσματα

### 8.3.1 $vz = 10^{-4}$

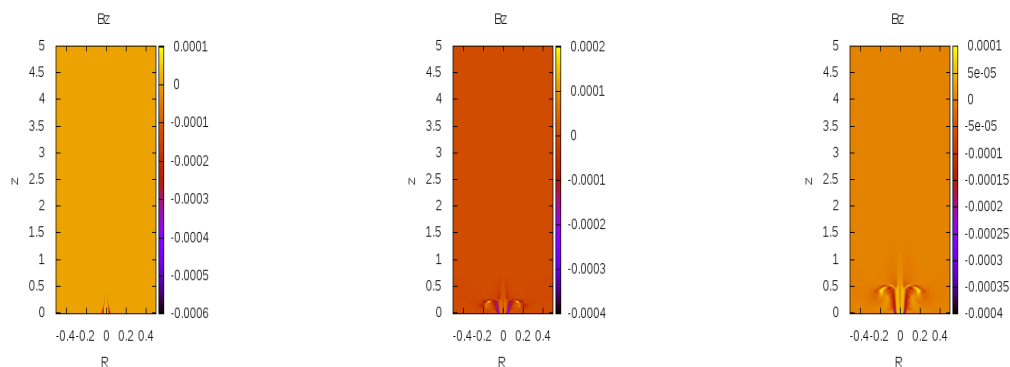
Στην παράγραφο αυτή θα δούμε την πρώτη προσομοίωση που εκτελέσαμε με τον κώδικα θεωρώντας ότι η ταχύτητα του πίδακα είναι  $vz = 10^{-4}$  δηλαδή είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα Alfven και πρακτικά το θεωρούμε ακίνητο. Διαλέξαμε αυτήν την μικρή ταχύτητα γιατί θέλαμε να δούμε αν ο πίδακας ξεκινώντας με αυτήν την μικρή ταχύτητα θα επιταχυνθεί και θα καταφέρει να φτάσει σε super fast ταχύτητες. Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση με την μεταβολή της πυκνότητας για τα τέσσερα διαφορετικά στιγμιότυπα για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 3.75$ ,  $t = 11.25$ ,  $t = 15$  τα οποία φαίνονται παρακάτω:



Σχήμα 8.1: Στα διαγράμματα φαίνεται η πυκνότητα της ροής για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 11.25$ ,  $t = 15$

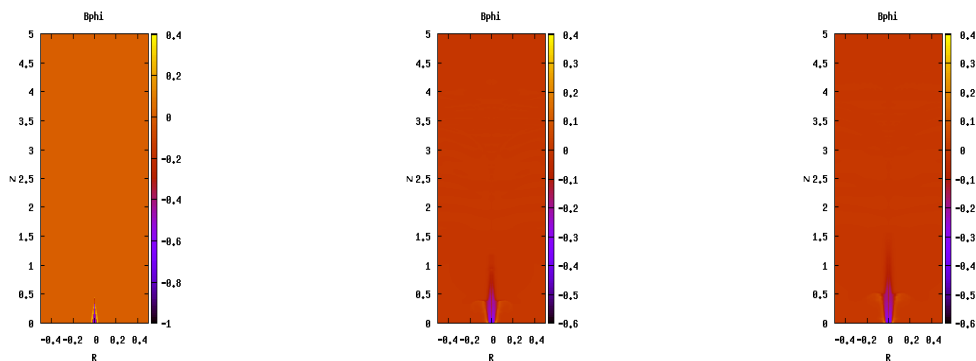
Η πυκνότητα στα διαγράμματα είναι σε λογαριθμική κλίμακα και όπως βλέπουμε ο πίδακας είναι εξαιρετικά ευθυγραμμισμένος. Αυτό που μπορεί να παρατηρήσει κανείς είναι ότι στα άκρα του πίδακα εμφανίζεται μια ροή πλάσματος προς τα έξω. Αυτό πολύ πιθανόν να οφείλεται στο ότι εκεί θα έχουμε μεγάλη περιστροφική ταχύτητα  $V_\phi$  και επειδή δεν έχουμε βαρύτητα να αντισταθμίσει την φυγόκεντρο καταφέρνει να παρασύρει ένα μέρος της πυκνότητας προς τα έξω. Ένα εύλογο ερώτημα που γεννιέται είναι ότι εμείς δεν βάλουμε καθόλου περιστροφή στο πρόβλημα άρα πως γίνεται να δημιουργείται αυτή η ταχύτητα; Η απάντηση είναι απλή. Επειδή έχουμε βάλει ένα αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο άρα αυτό θα δημιουργήσει μια αζιμουθιακή ταχύτητα σύμφωνα με την σχέση  $V_\phi = \omega R + \frac{\Psi_A}{4\pi\rho} B_\phi$  και όπως έχουμε πει ο κώδικας λύνει αυτοσυνεπώς τις εξισώσεις οπότε και για αυτό έχουμε την εμφάνιση της περιστροφής. Κάτι τελευταίο που μπορούμε να σχολιάσουμε είναι ότι καθώς περνάει ο χρόνος και ο πίδακας μεγαλώνει η πυκνότητα πέφτει. Αυτό οφείλεται στην διατήρηση της ροής  $\rho_1 u_1 \Delta S_1 = \rho_2 u_2 \Delta S_2$  οπότε επειδή στην αρχή έχουμε μικρή ταχύτητα και όπως θα δούμε μετά αυξάνει αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η πυκνότητα στο τέλος να μικρύνει. Στην συνέχεια θα δούμε πως συμπεριφέρονται τα μαγνητικά πεδία.

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω διαγράμματα το πολοειδές μαγνητικό πεδίο σχηματικά έχει την ίδια δομή με την πυκνότητα. Είναι θετικό κόντα στο άξονα και αρνητικό πιο μακριά δηλαδή κρατάει την δομή των loop δυναμικών γραμμών που του βάλουμε σαν αρχική συνθήκη. Όπως βλέπουμε και εδώ στα άκρα υπάρχει μια κίνηση του μαγνητι-



Σχήμα 8.2: Στα διαγράμματα φαίνεται το μαγνητικό πεδίο  $B_z$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 11.25$ ,  $t = 15$

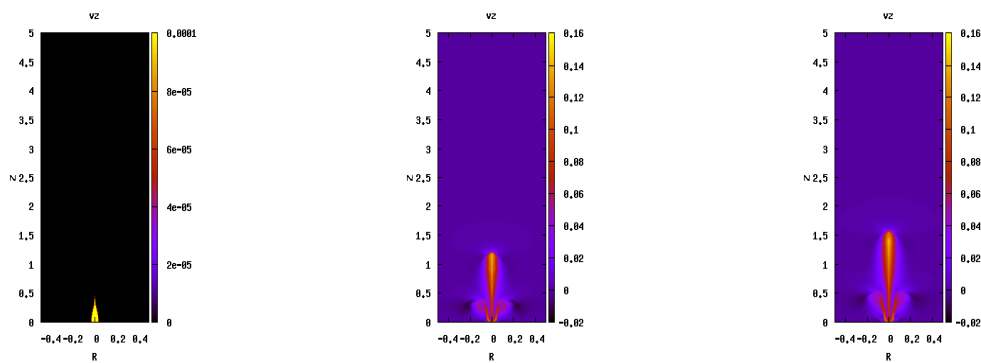
κού πεδίου ακτινικά όπως και στην πυκνότητα ενώ τέλος βλέπουμε ότι καθώς περνάει ο χρόνος το μαγνητικό πεδίο εξασθενεί σε μεγάλα ύψη.



Σχήμα 8.3: Στα διαγράμματα φαίνεται το μαγνητικό πεδίο  $B_\phi$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 11.25$ ,  $t = 15$

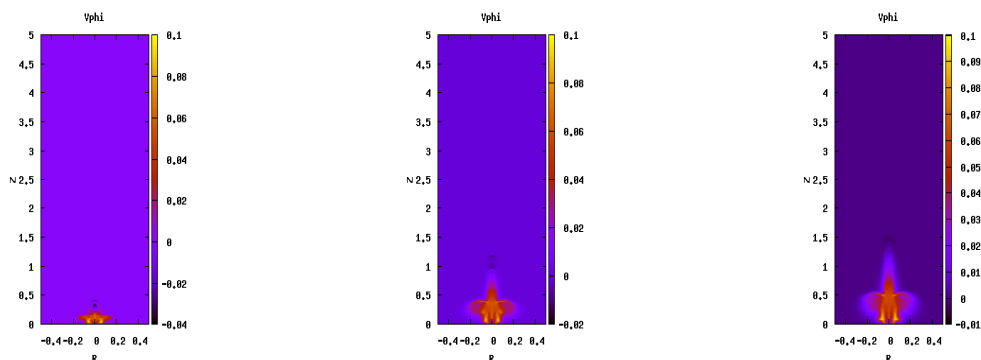
Και στην περίπτωση του αξιμουθιακού μαγνητικού πεδίου βλέπουμε ότι έχει μια σαφή δομή όπου κοντά στον άξονα είναι αρνητικό μετά γίνεται θετικό όπως ακριβώς το περιμέναμε και σε μεγάλα ύψη εξασθενεί σημαντικά διότι ισχύει  $I = B_\phi \omega = Const..$  Όπως και στην πυκνότητα έτσι και εδώ υπάρχει μια ακτινική μεταβολή του πεδίου. Η επόμενη ποσότητα που αξίζει να σχολιάσουμε είναι η μεταβολή του  $V_z$  με τον χρόνο και εδώ θα φανεί καθαρά αν ο πίδακας επιταχύνθηκε. Η ταχύτητα φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα.

Όπως βλέπουμε η ροή ξεκινάει με την αρχική ταχύτητα που θέσαμε εμείς στην αρχή δηλαδή με  $V_z = 10^{-4}$  και έπειτα φαίνεται ότι επιταχύνεται σχετικά γρήγορα και φτάνει σε μια ταχύτητα περίπου  $V_z = 0.16$  όπου και σταθεροποιείται. Αυτό θα φανεί κάπως καλύτερα αργότερα που θα δείξουμε τον αριθμό Mach για την γρήγορη μαγνητοηχητική ταχύτητα και το πλάσμα  $\beta$ . Όπως και στα προηγούμενα στα άκρα του πίδακα έχουμε μια ταχύτητα και οφείλεται στους λόγους που είπαμε πιο πάνω οπότε από εδώ και πέρα μπορούμε να το αγνοήσουμε και να κοιτάμε μόνο το κεντρικό κομμάτι του πίδακα.



Σχήμα 8.4: Στα διαγράμματα φαίνεται η ταχύτητα  $V_z$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 11.25$ ,  $t = 15$

Όπως είπαμε και λίγο πιο πάνω οι αστάθειες στα άκρα του πίδακα που φαίνονται σε όλα τα διαγράμματα οφείλονται στην περιστροφή που υπάρχει εκεί και αυτό φαίνεται καθαρά στα επόμενα διαγράμματα όπου όπως βλέπουμε στην αρχή ξεκινάει από το μηδέν όπως το θέσαμε εμείς έπειτα αυξάνεται και η μέγιστη ταχύτητα  $V_\phi$  βρίσκεται εκεί ακριβώς που εμφανίζονται οι αστάθειες. Ενώ αυτή η δομή αυξάνει σε ύψος η περιστροφική ταχύτητα ελαττώνεται έως ότου πρακτικά μηδενίζεται και μπορούμε να την αγνοήσουμε. Αυτό μπορούμε να το εξηγήσουμε και με έναν άλλον τρόπο, ξέρουμε ότι η περιστροφική ταχύτητα συνδέεται με το πεδίο  $B_\phi$  σύμφωνα με την σχέση  $V_\phi = \omega\Omega + \frac{\Psi_A}{4\pi\rho}B_\phi$  και όπως θυμόμαστε από τα διαγράμματα το πεδίο  $B_\phi$  από κάποιο ύψος και μετά μηδενίζεται οπότε είναι λογικό να μηδενίζεται και το  $V_\phi$  αλλά όχι με ανάλογο τρόπο. Τέλος από τις τιμές της ταχύτητας φαίνεται ότι η μέγιστη περιστροφική ταχύτητα είναι περίπου 0.08 σχετικά μικρή αλλά επειδή η πυκνότητα του περιβάλλοντος είναι πολύ μικρότερη του πίδακα είναι πολύ πιο εύκολο να σπρώξει υλικό προς το περιβάλλον και αυτό γίνεται στα σημεία όπου η περιστροφή έχει την μέγιστη τιμή της.



Σχήμα 8.5: Στα διαγράμματα φαίνεται η ταχύτητα  $V_\phi$  για χρόνους  $t = 3.75$ ,  $t = 11.25$ ,  $t = 15$

Τέλος αυτό που μένει να σχολιάσουμε είναι το πως μεταβάλλεται ο αριθμός Mach της γρήγορης μαγνητοχημικής ταχύτητας. Αρχικά θα πρέπει να θυμηθούμε λίγο

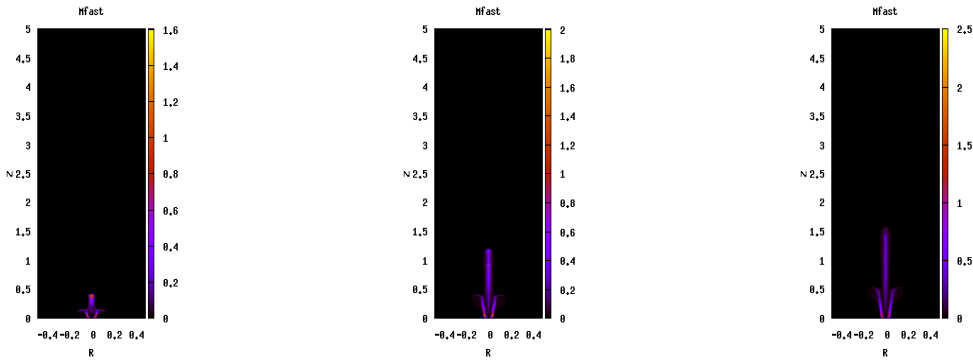
κάποια στοιχεία για την γρήγορη μαγνητοχητική ταχύτητα. Όπως μαθαίνουμε στα μαθήματα της φυσικής πλάσματος σε μαγνητισμένα ρευστά οι διαταραχές στην πίεση και την πυκνότητα διαδίδονται ισότροπα με την ταχύτητα του ήχου ενώ οι διαταραχές του μαγνητικού πεδίου διαδίδονται ανισότροπα με την ταχύτητα Alfven. Εκτός από τις δύο αυτές ταχύτητες υπάρχουν άλλες δύο που οφείλονται στον συνδυασμό των δύο παραπάνω δηλαδή σε διαταραχές της πίεσης και του μαγνητικού πεδίου και λέγονται αργή και γρήγορη μαγνητοχητική ταχύτητα (slow/fast magnetosonic). Η απόδειξη παραλείπεται αλλά υπάρχει σε όλα τα βιβλία φυσικής πλάσματος απλά εμείς εδώ θα παραθέσουμε την σχέση της γρήγορης μαγνητοχητικής ταχύτητας.

$$V_{fast} = \left\{ \frac{1}{2} [V_A^2 + C_S^2 + \sqrt{(V_A^2 + C_S^2)^2 - 4V_A^2 C_S^2 \cos^2 \theta}] \right\}^{1/2} \quad (8.11)$$

Αν θυμηθούμε ότι η ταχύτητα Alfven είναι  $V_A = B/\sqrt{\rho}$  τότε ο όρος στην παρενθεση γράφεται και σαν  $\frac{B^2}{\rho} \cos^2 \theta = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{k})^2}{k^2}$ . Αν πούμε τώρα ότι το κυματόνυσμα είναι παράλληλο στην πολοειδή ταχύτητα  $\vec{k} \parallel \vec{V}_p$  τότε η προηγούμενη σχέση θα γίνει  $\frac{\vec{B} \cdot \vec{k}^2}{k^2} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{V}_p^2}{V_p^2}$ . Συνεπώς ο αριθμός Mach όπως εύκολα θυμόμαστε από το μάθημα βρίσκεται από την σχέση,

$$M_{fast}^2 = \frac{V_p^2}{V_{fast}^2} \quad (8.12)$$

Με την βοήθεια αυτής της σχέσης φτιάξαμε τα διαγράμματα που φαίνονται παρακάτω,



Σχήμα 8.6: Στα διαγράμματα φαίνεται ο αριθμός Mach για χρόνους  $t = 3.75$ ,  $t = 11.25$ ,  $t = 15$

Όπως μπορούμε να δούμε στο πρώτο διάγραμμα ο αριθμός Mach είναι πρακτικά μηδέν κάτι που είναι λογικό διότι αρχικά η πολοειδής ταχύτητα είναι σχεδόν μηδέν. Στα επόμενα διαγράμματα βλέπουμε ότι ο αριθμός Mach αυξάνεται και στο τέλος φαίνεται να είναι περίπου 0.5 και να μην μπορεί να ξεπεράσει το 1 και άρα να μην μπορεί να γίνει super-fast όπως και θα περιμέναμε να γίνει διότι όλοι οι πίδακες περιμένουμε να φτάσουν σε μια κατάσταση ισορροπίας και επίσης έχουμε παρατηρήσει ότι εμφανίζονται και ωστικά κύματα οπότε για να γίνει πρέπει η ροή να φτάσει σε υπερ-γρήγορες ταχύτητες. Σε αυτό το σημείο να πούμε ότι επειδή η θερμική μας πίεση είναι πολύ μεγαλύτερη από την μαγνητική όπως θα δείξουμε και παρακάτω και συνεπώς η ταχύτητα Alfven

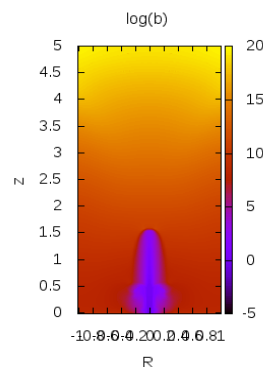


είναι αμελητέα άρα σαν ταχύτητα fast θα είναι η ταχύτητα του ήχου όπως μπορεί να δει κανείς και από την σχέση 8.11. Μια ιδέα που μπορούμε να δώσουμε γιατί η ροή δεν μπορεί να γίνει super-fast είναι διότι αν γινόταν θα έπρεπε η ροή να χάσει επαφή με τον δίσκο γιατί δεν θα μπορούσε να στέλνει πληροφορία προς την βάση αλλά αυτό δεν μπορεί να γίνει διότι οι δυναμικές μας γραμμές έχουν την μορφή loop και δεν μπορούν να χάσουν την επαφή με τον δίσκο.

Στο τέλος θα δούμε το πλάσμα  $\beta$  για να αποφανθούμε αν η ροή είναι υδροδυναμική η μαγνητοϋδροδυναμική. Όπως θυμόμαστε το πλάσμα  $\beta$  δίνεται από την σχέση,

$$\beta = 8\pi \frac{P}{B^2} \quad (8.13)$$

Όπου ουσιαστικά είναι ο λόγος της θερμικής πίεσης προς την μαγνητική πίεση και αν  $\beta < 1$  τότε κυριαρχεί το μαγνητικό πεδίο ενώ αν  $\beta > 1$  κυριαρχεί η θερμική πίεση. Το διάγραμμα για το πλάσμα  $\beta$  σε λογαριθμική μορφή μόνο για  $t = 15$  φαίνεται παρακάτω,



Σχήμα 8.7: πλάσμα  $\beta$  για  $t = 15$

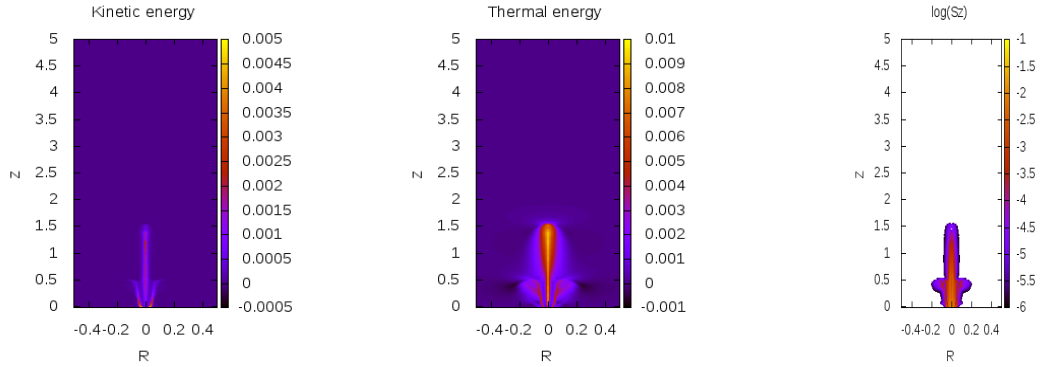
Όπως βλέπουμε το πλάσμα  $\beta$  παίρνει πολύ μεγάλες τιμές της τάξης του  $10^2$  οπότε είναι πλήρως υδροδυναμικό καθώς η ροή δεν μπορεί να μετατρέψει την μαγνητική ενέργεια σε κινητική αλλά την μετατρέπει σε θερμική διότι δεν έχει αρκετή ταχύτητα να διαδοθεί οπότε και μεγαλώνει η θερμική πίεση. Ένας άλλος τρόπος να δούμε τα προηγούμενα είναι ενεργειακά. Παρακάτω θα δούμε την ροή κινητικής ενέργειας η οποία είναι  $K = \frac{\rho u^2}{2} u_z$ , την ροή θερμικής ενέργειας  $T = \frac{\gamma}{\gamma-1} P u_z$  και την ροή Poynting  $S_z = (\vec{u} \times \vec{B} \times \vec{B})_z$  το οποίο προκύπτει από την σχέση για την ροή Poynting  $S = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$  και ισχύει ότι  $\vec{E} = -\frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c}$  αλλά κοιτάμε την διάδοση της ροής μόνο στην  $z$  κατεύθυνση. Τα διαγράμματα των τριών ενεργειών φαίνονται παρακάτω. Όπως είναι προφανές από τα διαγράμματα η θερμική ενέργεια υπερισχύει διότι είναι της τάξης του  $10^{-2}$  ενώ η κινητική είναι περίπου 0.0015 δηλαδή μια τάξη μεγέθους πιο χαμηλά από την θερμική. Τέλος η μαγνητική ενέργεια είναι εντελώς αμελητέα καθώς προκύπτει περίπου  $10^{-4}$ . Μερικές παρατηρήσεις που πρέπει να κάνουμε είναι ότι η ροή θερμικής ενέργειας είναι ανάλογη της θερμικής πίεσης όπως είναι προφανές. Επίσης αν πάρουμε τον λόγο της κινητικής ενέργειας με την θερμική και θυμηθούμε ότι η ταχύτητα του ήχου ορίζεται σαν  $c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$  θα προκύψει ότι,

$$\frac{\frac{\rho}{2}u^2}{\frac{\gamma}{\gamma-1}P} = \frac{\gamma-1}{2}M_s^2 \quad (8.14)$$

Όπου το  $M_s^2$  είναι ο αριθμός Mach για την ηχητική ταχύτητα διότι όπως είπαμε η ροή είναι υδροδυναμική. Αν θυμηθούμε ότι  $\Gamma = 5/3$  τότε η προηγούμενη σχέση θα γίνει,

$$M_s^2 = 3 \frac{\frac{\rho}{2}u^2}{\frac{\gamma}{\gamma-1}P} \quad (8.15)$$

Συνεπώς αν πάρουμε τις τιμές που υπολογίσαμε πιο πάνω για την θερμική και κινητική ενέργεια θα δούμε ότι ο αριθμός Mach που προκύπτει είναι περίπου 0.5 όσο φαίνεται και από τα διαγράμματα του  $M_{fast}$  δηλαδή ο αριθμός Mach μας δίνει τον λόγο της κινητικής ενεργείας προς την θερμική και επίσης βλέπουμε ότι  $c_s > u$ .



Σχήμα 8.8: Στα διαγράμματα φαίνονται οι ενέργειες μόνο για το τελευταίο στιγμιότυπο

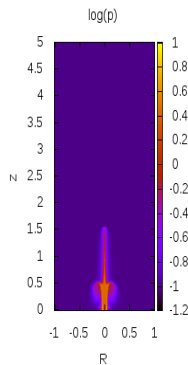
Στην συνέχεια αν πάρουμε τον λόγο της κινητικής ενέργειας με την μαγνητική και θυμηθούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τον νόμο του Ωμ  $\vec{E} = -\frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c}$  καθώς και ότι η ταχύτητα Alfven δίνεται από την σχέση  $u_A^2 = B^2/\rho$  τότε θα προκύψει ότι,

$$\frac{\frac{\rho}{2}u^2}{c\vec{E} \times \vec{B}} = \frac{1}{2} \frac{u^2}{\frac{B^2}{\rho}} = \frac{1}{2} \frac{u^2}{u_A^2} = \frac{1}{2} M_A^2 \quad (8.16)$$

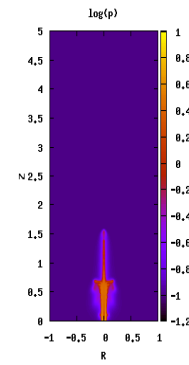
Συνεπώς προκύπτει ότι ο αριθμός Mach για την ταχύτητα Alfven υπολογίζεται από τον λόγο της κινητικής ενέργειας προς την μαγνητική και αν το υπολογίσουμε θα προκύψει περίπου  $M_A^2 = 3$  δηλαδή  $u > u_A$ , όμως είδαμε πριν ότι  $c_s > u$  και άρα τελικά  $c_s > u > u_A$  δηλαδή κυρίαρχη ταχύτητα είναι η ηχητική όπως το περιμέναμε αφού έχουμε υδροδυναμική ροή. Τέλος ο λόγος της θερμικής ενέργειας προς την μαγνητική μας δίνει το πλάσμα β όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς. Οπότε γνωρίζοντας μόνο τις ενέργειες είμαστε σε θέση να καταλάβουμε αν η ροή είναι υδροδυναμική η όχι σύμφωνα με όσα περιγράψαμε.

### 8.3.2 $v_z = 10^{-2}$

Στην δεύτερη προσομοίωση που εκτελέσαμε αυξήσαμε την ταχύτητα της ροής και την κάναμε δύο τάξης μεγέθους μεγαλύτερη δηλαδή  $10^{-2}$  και παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι παρόμοια κάτι που το περιμέναμε διότι ακόμα η ταχύτητα είναι αρκετά μικρή για να δούμε μεγάλες διαφορές. Παρακάτω θα δούμε το διάγραμμα της πυκνότητας μόνο για το τελευταίο στιγμιότυπο στην περίπτωση για ταχύτητα  $10^{-4}$  και για  $10^{-2}$  για να τα συγκρίνουμε.

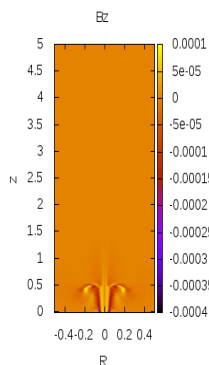


Σχήμα 8.9: Πυκνότητα για ταχύτητα  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$

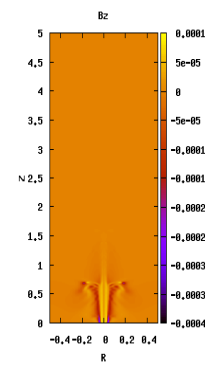


Σχήμα 8.10: Πυκνότητα για ταχύτητα  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

Όπως βλέπουμε η δομή είναι παρόμοια και η μόνη διαφορά είναι ότι ο κεντρικός κορμός είναι λίγο πιο ψηλά στο τέλος και αυτό οφείλεται στην μεγαλύτερη ταχύτητα στην δεύτερη περίπτωση. Εδώ δεν θα δείξουμε όλες τις χρονικές στιγμές καθώς οι διαφορές με την πρώτη περίπτωση είναι ελάχιστες. Στην συνέχεια βλέπουμε το μαγνητικό πεδίο  $B_z$  για τις δύο προσομοιώσεις.

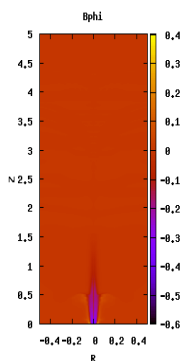


Σχήμα 8.11:  $B_z$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$

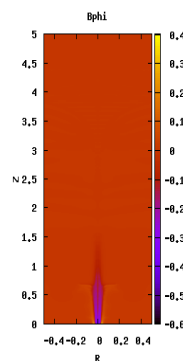


Σχήμα 8.12:  $B_z$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

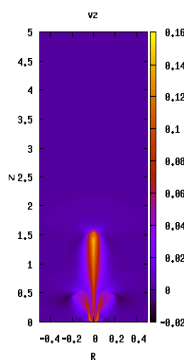
Όπως είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς οι διαφορές σε όλα τα μεγέθη θα είναι ελάχιστες οπότε παρακάτω φαίνονται όλα τα μεγέθη σε σχέση με την πρώτη προσομοίωση.



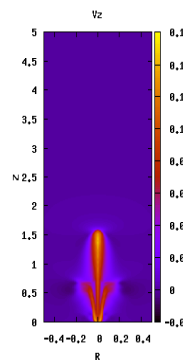
Σχήμα 8.13:  $B_\phi$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$



Σχήμα 8.14:  $B_\phi$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

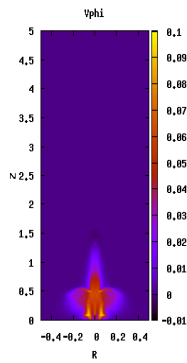


Σχήμα 8.15:  $V_z$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$

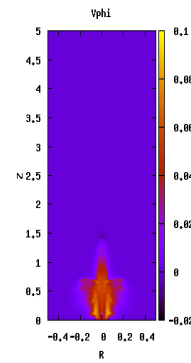


Σχήμα 8.16:  $V_z$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

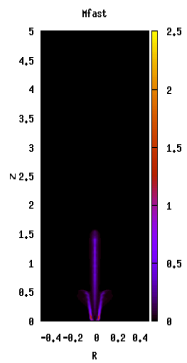
Όπως βλέπουμε όλα τα μεγέθη έχουν την ίδια τελική μορφή και σε αυτήν την περίπτωση βλέπουμε ότι η ροή δεν μπορεί να γίνει super-fast άρα ένα πρώτο συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι ότι οι λύσεις αυτές δεν μπορούν να επιταχύνουν επαρκώς την ροή ώστε να γίνει super-fast όπως θεωρούμε ότι γίνεται στους αστροφυσικούς πίδακες. Επίσης όπως και πριν το πλάσμα  $\beta$  είναι πολύ μεγάλο και άρα είναι κυρίως υδροδυναμικό. Οπότε αυτές οι λύσεις δεν είναι καλές αν θέλουμε να μελετήσουμε επιτάχυνση σωματιδίων σε ωστικά κύματα αλλά πολύ πιθανόν να είναι καλές για μοντέλα με μαγνητική επανασύνδεση όπου η επιτάχυνση γίνεται μέσω φύλλο ρεύματος καθώς



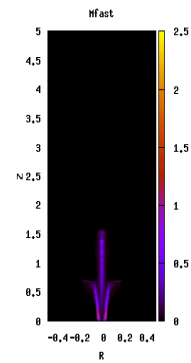
Σχήμα 8.17:  $V_\phi$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$



Σχήμα 8.18:  $V_\phi$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$



Σχήμα 8.19:  $M_{fast}$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$

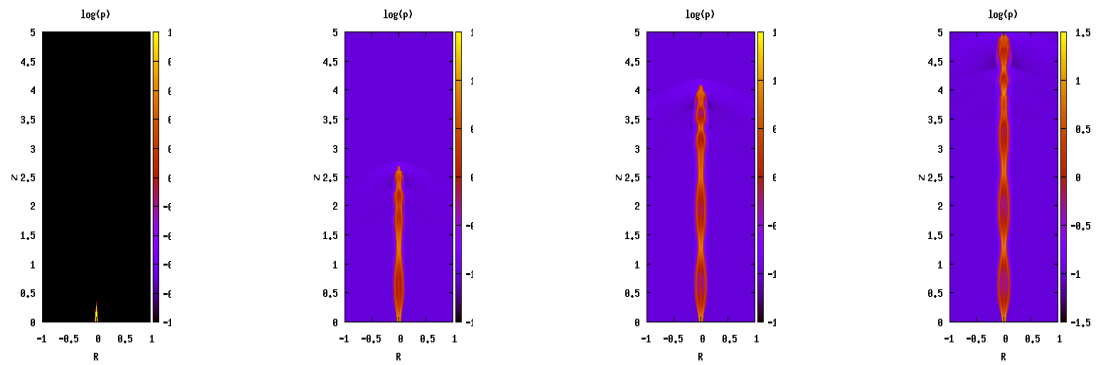


Σχήμα 8.20:  $M_{fast}$  για ταχύτητα  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

εδώ έχουμε μαγνητικά πεδία με αντίθετη πολικότητα και θα ήταν ιδανικά για μια τέτοια περίπτωση και το οποίο εδώ δεν φαίνεται διότι έχουμε ιδανικά ρευστά. Αυτό το θέμα χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.

### 8.3.3 $v_z = 1$

Σε αυτήν την παράγραφο θα θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα μας είναι ήδη superfast καθώς την έχουμε θέσει 1 ενώ η ταχύτητα Alfven είναι περίπου 0.3 και όπως είπαμε θεωρούμε ότι η ταχύτητα του ήχου αρχικά είναι πολύ μικρή άρα η γρήγορη μαγνητοσηχτική ταχύτητα είναι  $V_{fast} = V_A = 0.3$ . Δεν μπορούμε να δικαιολογήσουμε πως μπορεί να ξεκινήσει η ροή με τέτοια ταχύτητα οπότε πλέον δεν κοιτάμε την δημιουργία του πίδακα αλλά θεωρούμε ότι ο πίδακας έχει δημιουργηθεί και επιταχυνθεί οπότε κοιτάμε ουσιαστικά την διάδοση και αλληλεπίδραση του με το περιβάλλον. Συνεπώς στις προσομοιώσεις που θα δείξουμε η βάση δεν είναι πλέον ο δίσκος προσαύξησης αλλά κάποιο ύψος και εμείς βλέπουμε τον ήδη σχηματισμένο πίδακα να εισέρχεται και βλέπουμε πως αλληλεπιδρά με το περιβάλλον. Θα ξεκινήσουμε όπως και πριν με την μεταβολή της πυκνότητας για τέσσερις χρόνους  $t = 0, t = 3.75, t = 6, t = 7.5$ .



Σχήμα 8.21: Στα διαγράμματα φαίνεται η πυκνότητα της ροής για χρόνους  $t = 0, t = 3.75, t = 6, t = 7.5$

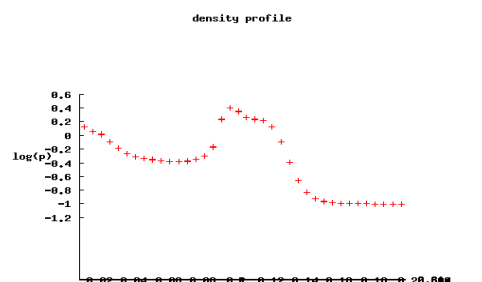
Όπως βλέπουμε στις εικόνες η δομή του πίδακα είναι αρκετά διαφορετική από αυτούς που είχαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Τέτοιου είδους πίδακες ανήκουν σε μια ειδική κατηγορία πιδάκων που λέγονται recollimation πίδακες όπως είναι προφανές από το σχήμα τους. Τέτοιοι υδροδυναμικοί πίδακες όπως μελετώνται στο βιβλίο των Michael L. Norman and Karl-Heinz Winkler δημιουργούνται όταν ένας συμπιεσμένος πίδακας δηλαδή όταν η πίεση του πίδακα είναι μεγαλύτερη από του περιβάλλοντος αρχίζει να εκτονώνεται και να συμπιέζεται περιοδικά μέχρι να ισορροπήσει την πίεση. Αυτό δεν μπορεί να γίνει διότι το ρευστό συνεχώς χαλάει την ισορροπία. Το συμπιεσμένο αέριο σπρώχνει το περιβάλλον όπως στο πρόβλημα του sod που θα περιγράψουμε παρακάτω με αποτέλεσμα μέσα στον πίδακα να αραιώνει το αέριο και διαδίδεται ένα κύμα αραιώσης η rarefaction. Προς τα τοιχώματα του πίδακα το αέριο πυκνώνει και έχουμε την εμφάνιση ενός κωνικού ωστικού κύματος που συγκλίνει στον άξονα όπου όπως φαίνεται από τις εικόνες έχουμε αύξηση της πυκνότητας και της πίεσης οπότε και το φαινόμενο αρχίζει από την αρχή. Βέβαια στο δικό μας πρόβλημα έχουμε μαγνητοϋδροδυναμικούς πίδακες αλλά η ουσία είναι η ίδια.

Τέτοιους πίδακες έχουν μελετήσει οι Mizuno et al 2015[22] καθώς και οι Doosoo Yoon et al 2016[9]. Οι συγκεκριμένες εργασίες βασίζονται σε σχετικιστικούς πίδακες οι οποίοι είναι και συμπιεσμένοι δηλαδή η πίεση μέσα στον πίδακα είναι πολύ μεγαλύτερη από του περιβάλλοντος. Αυτό θυμίζει το πρόβλημα του Sod όπου έχουμε δύο ρευστά σε

επαφή και το ένα ρευστό ως πούμε το αριστερό έχει μεγαλύτερη πίεση από το άλλο οπότε θα αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά. Σε αυτό το πρόβλημα θα έχουμε την εμφάνιση ενός ωστικού κύματος (shock) προς τα δεξιά και ενός κύματος αραιώσης (rarefaction) προς τα αριστερά.

Για να εξηγήσουμε τα ωστικά κύματα ως θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι έχουμε ένα αέριο σε ένα κουτί και στην άκρη έχουμε ένα έμβολο και αρχίζουμε να κινούμε το έμβολο με σταθερή ταχύτητα  $u_e$ . Τα άτομα που βρίσκονται κοντά στο έμβολο κινούνται με την ταχύτητα αυτή και επίσης κοντά στο έμβολο δημιουργείται ένα πύκνωμα οπότε και έχουμε μια μικρή αύξηση της πίεσης και της πυκνότητας. Η πληροφορία ότι έχει αυξηθεί η πίεση ώστε να αποκατασταθεί η ισορροπία θα διαδοθεί με την ταχύτητα του ήχου οπότε και για μικρές ταχύτητες του εμβόλου  $u_e < c$  υπάρχει αρκετός χρόνος για να αποκατασταθεί η ισορροπία. Σε περίπτωση που η ταχύτητα του εμβόλου είναι μεγαλύτερη του ήχου τότε η πληροφορία δεν μπορεί να διαδοθεί καθώς τα κύματα είναι πιο αργά από το έμβολο. Κοντά στο έμβολο τα άτομα έχουν την ταχύτητα  $u_e$  αλλά σε κάποια απόσταση το αέριο είναι ακίνητο. Το ρευστό λύνει το πρόβλημα με το να αυξήσει την πίεση και την πυκνότητα κοντά στο έμβολο δηλαδή να αυξήσει την ταχύτητα του ήχου έτσι λοιπόν δημιουργείται η ασυνέχεια στην ροή η οποία κινείται με ταχύτητα  $u_s > u_e$ .

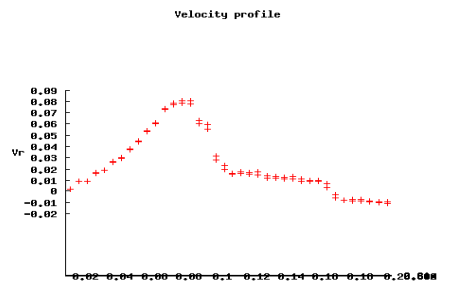
Από την άλλη μεριά το κύμα αραιώσης διαδίδεται πάντα εκεί που ελαττώνεται η πυκνότητα και αποτελείται από το " κεφάλι (head) " και την " ουρά (tail) ". Γενικά όταν έχουμε δύο ρευστά θα έχουμε την εμφάνιση είτε shock-shock είτε rarefaction-shock η μόνο shock αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα ρευστό που εκτονώνεται στο κενό. Μέσα στο κύμα αραιώσης έχουμε την επιτάχυνση των σωματιδίων όπως περιγράφεται στις εργασίες Kostantinos Sapountzis and Nektarios Vlahakis 2013 [27], Sergeui S. Komissarov, Nektarios Vlahakis and Arieih Konigl 2010[13]. Παρακάτω θα δείξουμε σε ένα συγκεκριμένο ύψος του πίδακα που εμφανίζονται τα κύματα αραιώσης και το ωστικό κύμα μέσα στον πίδακα. Από τις εικόνες του πίδακα διαλέγουμε για ύψος το  $Z = 0.6$  και βλέπουμε εκεί πως αλλάζει η πυκνότητα με την ακτίνα  $R$ .



Σχήμα 8.22: Το προφίλ της πυκνότητας για ύψος  $Z = 0.6$ .

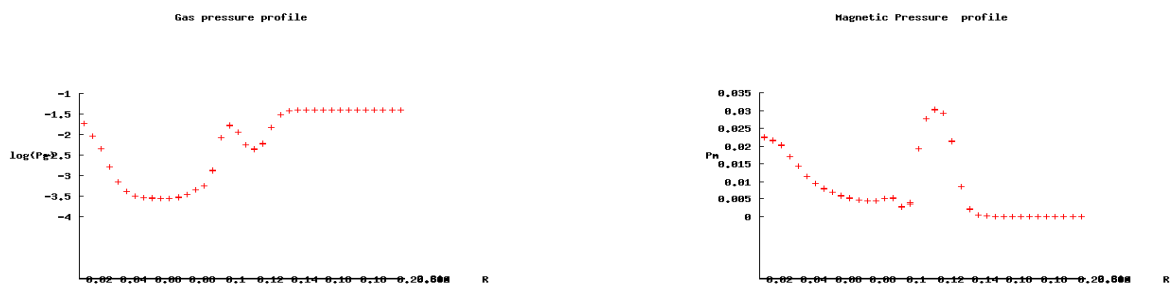
Όπως βλέπουμε στο διάστημα 0.08-0.1 έχουμε μια πτώση της πυκνότητας άρα εκεί αναμένεται να εμφανιστεί το κύμα αραιώσης και άρα εκεί περιμένουμε να έχουμε και επιτάχυνση. Στο διάστημα 0.12-0.16 έχουμε μια αύξηση της πυκνότητας άρα εκεί θα εμφανιστεί το ωστικό κύμα. Παρακάτω θα δούμε την ακτινική ταχύτητα της ροής γιατί πάντα οι κάθετες ταχύτητες επηρεάζονται σε προβλήματα με ασυνέχειες.

Όπως βλέπουμε η ταχύτητα αυξάνει στην περιοχή του κύματος αραιώσης όπως το περιμέναμε και έπειτα πέφτει μέχρι που αντιστρέφεται όταν περάσει και από το ωστικό



Σχήμα 8.23: Το προφίλ της ταχύτητας για ύψος  $Z = 0.6$ .

κύμα. Στην συνέχεια θα δούμε πως συμπεριφέρονται η πίεση του αερίου και η πίεση του μαγνητικού πεδίου για το συγκεκριμένο ύψος.



Σχήμα 8.24: Το προφίλ της πίεσης του αερίου

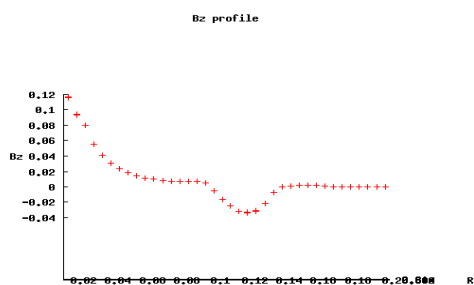
Σχήμα 8.25: Το προφίλ της μαγνητικής πίεσης

Και τέλος θα δούμε παρακάτω και την μεταβολή των μαγνητικών πεδίων  $B_z$ ,  $B_\phi$  με την ακτίνα όπου αναμένουμε από κάποια ακτίνα και μετά να αλλάξουν πρόσημο τα πεδία όπως έχουμε υποθέσει από την αρχή του προβλήματος.

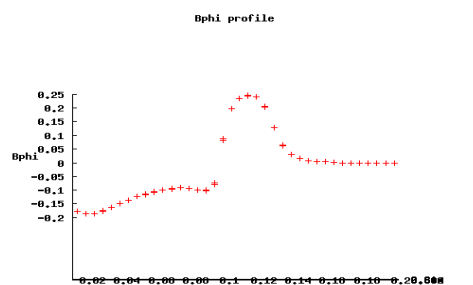
Όπως βλέπουμε από τα παρακάτω διαγράμματα το πεδίο  $B_z$  ξεκινά με θετική τιμή μειώνεται και κάποια στιγμή αντιστρέφεται και έπειτα μηδενίζεται όταν βρεθούμε έξω από τον πίδακα. Από την άλλη μεριά το πεδίο  $B_\phi$  είναι αρνητικό όταν έχουμε θετικό  $B_z$  και στην συνέχεια γίνεται θετικό και στο τέλος μηδενίζεται. Συνεπώς τα πεδία συμπεριφέρονται σωστά όπως και θα έπρεπε. Αυτό μπορεί να φανεί καλύτερα παρακάτω όπου θα δούμε τις εικόνες από τις προσομοιώσεις.

Όπως βλέπουμε και στα διαγράμματα 8.28-8.29 το μαγνητικό πεδίο έχει την σωστή δομή. Ομοίως και για το αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο το οποίο φαίνεται παρακάτω. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι εκεί που στενεύει ο πίδακας το μαγνητικό πεδίο έχει την μέγιστη τιμή του ενώ όταν ανοίγει τότε παίρνει την ελάχιστη τιμή του, αυτό είναι λογικό διότι καθώς στενεύει ο πίδακας οι δυναμικές γραμμές θα αρχίσουν να τυλίγονται πιο πολύ όσο η ακτίνα του πίδακα μειώνεται. Όπως έχουμε πει το πεδίο  $B_\phi$  συνδέεται άμεσα με την περιστροφική ταχύτητα  $V_\phi$  όπου και αναμένουμε εκεί που το πεδίο να έχει την μέγιστη τιμή θα πρέπει και η ταχύτητα να είναι μέγιστη. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω στο διάγραμμα 8.30. Όπως βλέπουμε όντως η μέγιστη τιμή του  $V_\phi$  είναι εκεί που στενεύει ο πίδακας και το πεδίο  $B_\phi$  έχει και αυτό μέγιστη τιμή.

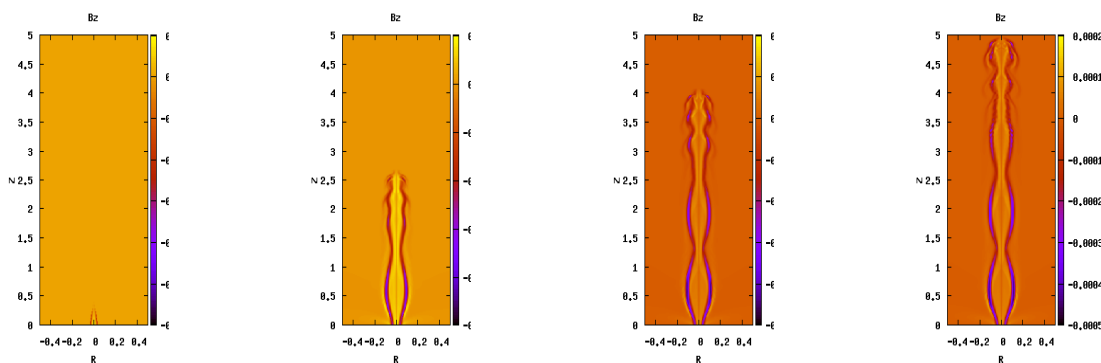




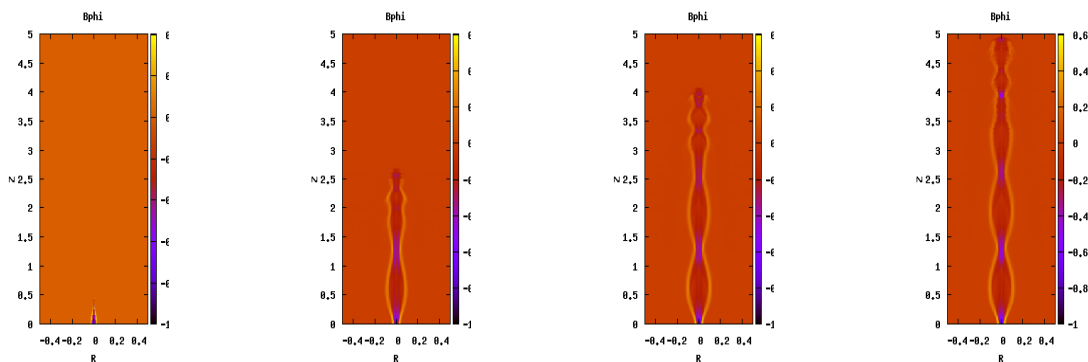
Σχήμα 8.26: Το προφίλ του πεδίου  $B_z$



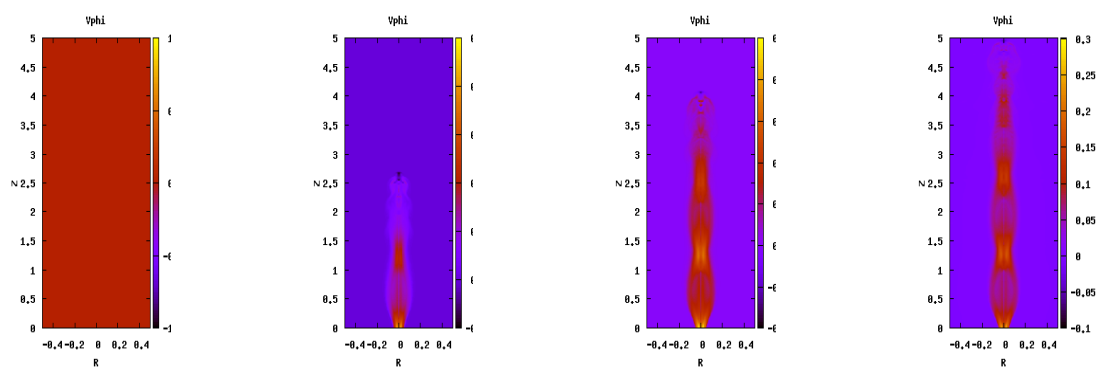
Σχήμα 8.27: Το προφίλ του πεδίου  $B_\phi$



Σχήμα 8.28: Στα διαγράμματα φαίνεται το μαγνητικό πεδίο  $B_z$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 3.75$ ,  $t = 6$ ,  $t = 7.5$

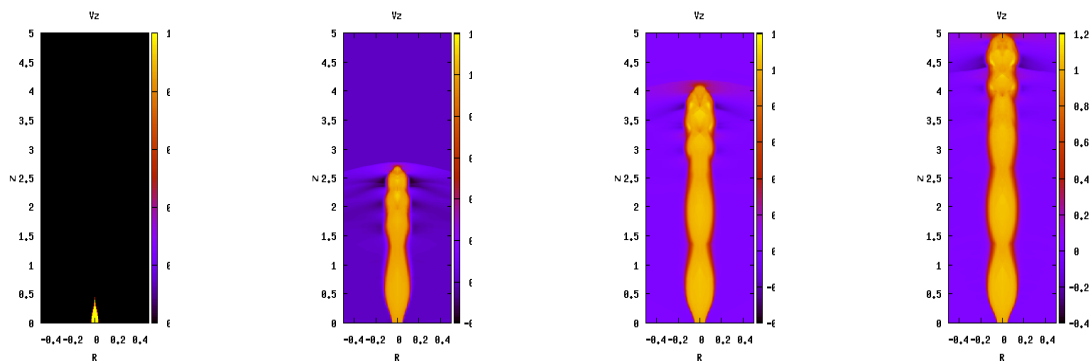


Σχήμα 8.29: Στα διαγράμματα φαίνεται το μαγνητικό πεδίο  $B_\phi$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 3.75$ ,  $t = 6$ ,  $t = 7.5$



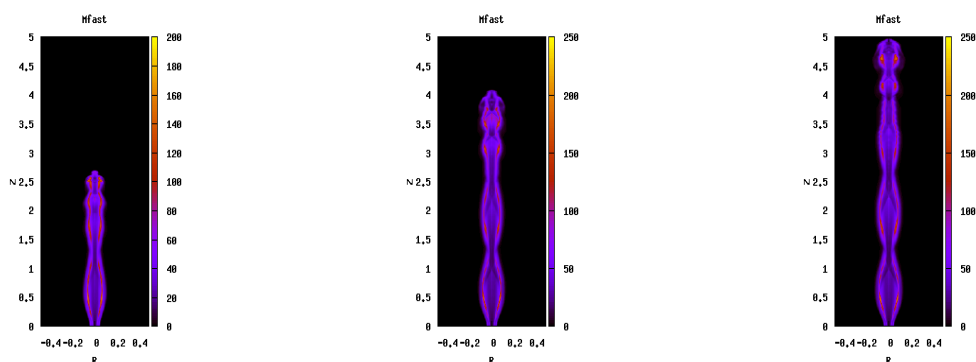
Σχήμα 8.30: Στα διαγράμματα φαίνεται το μαγνητικό πεδίο  $V_\phi$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 3.75$ ,  $t = 6$ ,  $t = 7.5$

Στην συνέχεια θα δούμε την πολοειδή ταχύτητα  $V_z$  όπου περιμένουμε να έχει μια περίπου σταθερή τιμή γύρω από την αρχική τιμή που θέσαμε στην αρχή. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω.



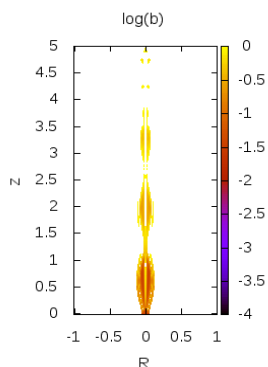
Σχήμα 8.31: Στα διαγράμματα φαίνεται το μαγνητικό πεδίο  $V_z$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 3.75$ ,  $t = 6$ ,  $t = 7.5$

Όπως βλέπουμε η ταχύτητα έχει όντως μια τιμή γύρω στο 1 οπότε και μπορούμε να πούμε ότι στο τέλος ο πίδακας έχει φτάσει σε μια κατάσταση ισορροπίας. Επίσης στην κορυφή του πίδακα μπορούμε να παρατηρήσουμε και το bow shock που φαίνεται αγνά. Θα τελειώσουμε το κεφάλαιο με την παρουσίαση του αριθμού Mach για την γρήγορη μαγνητοχημική ταχύτητα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο διάγραμμα 8.32 όπου βλέπουμε ότι ο πίδακας είναι από την αρχή στην super fast περιοχή αλλά δυστυχώς δεν έφτασε εκεί λόγω επιτάχυνσης αλλά το κάναμε εμείς τεχνητά θέτοντας σαν αρχική ταχύτητα  $v_z = 1$  όπου ήταν ήδη super fast. Όπως είπαμε σε αυτές τις προσομοιώσεις κοιτάμε την διάδοση του πίδακα και όχι την δημιουργία του. Τέλος να πούμε ότι οι τιμές στα διαγράμματα είναι  $M_{fast}^2$  άρα θα πρέπει να πάρουμε την ρίζα των τιμών που βλέπουμε.

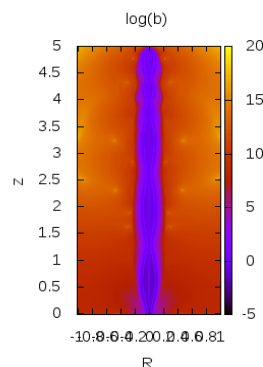


Σχήμα 8.32: Στα διαγράμματα ο αριθμός Mach για χρόνους  $t = 3.75$ ,  $t = 6$ ,  $t = 7.5$

Το τελευταίο που θα δείξουμε είναι πως συμπεριφέρεται το πλάσμα  $\beta$  ώστε να δούμε αν η ροή είναι υδροδυναμική. Παρακάτω θα δείξουμε το πλάσμα  $\beta$  μόνο για το τελικό στιγμιότυπο και θα έχουμε δύο εικόνες ώστε να φαίνονται και οι αρνητικές και οι θετικές τιμές του  $\log(\beta)$ .

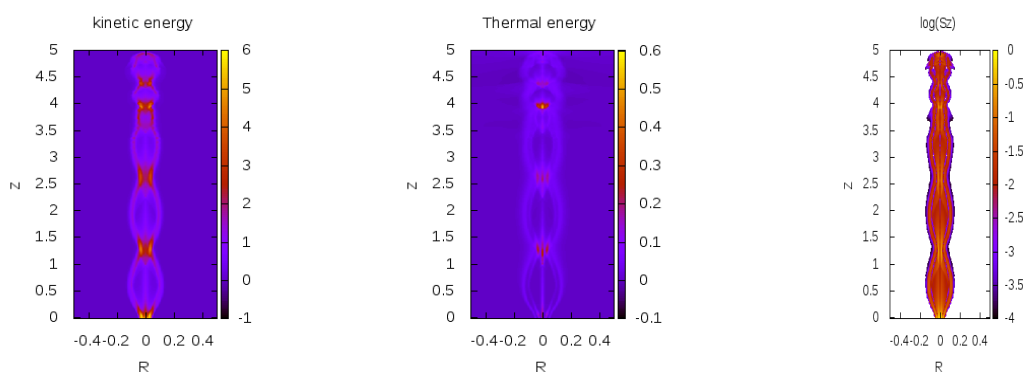


Σχήμα 8.33: Στο πρώτη εικόνα βλέπουμε τις τιμές  $\log(\beta) < 0$



Σχήμα 8.34: Στην δεύτερη εικόνα βλέπουμε τις τιμές  $\log(\beta) > 0$

Όπως βλέπουμε στην αριστερή εικόνα στο κεντρικό κομμάτι του πίδακα και για ένα αρκετά μεγάλο ύψος το  $\beta$  είναι μικρό και οπότε εκεί κυριαρχεί το μαγνητικό πεδίο. Βέβαια όπως βλέπουμε για μεγαλύτερα ύψη η μαγνητική ενέργεια εξασθενεί και γίνεται κυρίως θερμική όπως φαίνεται από την δεξιά εικόνα. Επίσης κάτι που μπορεί να παρατηρήσει κάποιος είναι ότι εκεί που στενεύει ο πίδακας το πλάσμα  $\beta$  είναι μεγάλο και ο λόγος είναι ότι εκεί έχουμε αύξηση της πυκνότητας και άρα της θερμικής ενέργειας. Αυτό μπορεί να φανεί και με τις ενέργειες που βλέπουμε παρακάτω.



Είναι προφανές ότι επειδή είμαστε σε super fast ταχύτητες ο αριθμός Mach θα είναι μεγαλύτερο από το ένα άρα η κινητική ενέργεια θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την θερμική όπως σχολιάσαμε στην παράγραφο 8.3.1 το οποίο και φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα. Αυτό που πρέπει να πούμε είναι ότι η μαγνητική ενέργεια μειώνεται και αυξάνεται συνεχώς μετατρέποντας συνεχώς την ενέργεια σε κινητική και θερμική αλλά όπως φαίνεται υπερिशύει της θερμικής μέχρι ένα ύψος όπως μπορούμε εξάλλου να δούμε και από το πλάσμα  $\beta$ . Κάτι άλλο που παρατηρούμε είναι ότι και η θερμική και η

κινητική αυξάνουν εκεί που στενεύει ο πίδακας διότι η επιφάνεια μειώνεται οπότε από διατήρηση μάζας το  $\rho u$  πρέπει να αυξηθεί οπότε για αυτό βλέπουμε να αυξάνονται και οι δύο ενέργειες. Αν διαιρέσουμε την ροή κινητικής ενέργειας και θερμικής με το γινόμενο  $\rho u$  θα καταλήξουμε στην σχέση  $\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = E$  που είναι ουσιαστικά η εξίσωση Bernoulli οπότε για να μένει σταθερή πρέπει αν αυξάνεται η κινητική ενέργεια να μειώνεται η θερμική Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε τις προσομοιώσεις που εκτελέσαμε αλλά αυτήν την φορά η πυκνότητα του πίδακα είναι μικρότερη του περιβάλλοντος.

# Κεφάλαιο 9

## Προσομοίωση δεύτερη για $\rho_j = 0.1, \rho_a = 1$

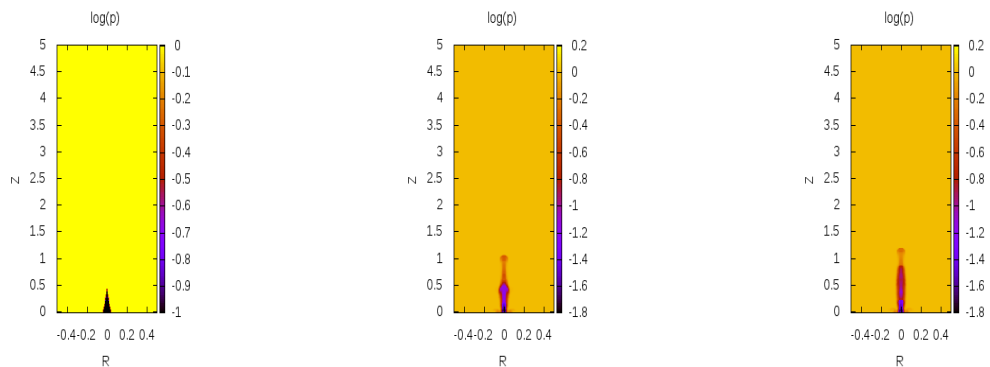
### 9.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε τις προσομοιώσεις που εκτελέσαμε με τον κώδικα αλλά αυτήν την φορά η πυκνότητα του πίδακα ήταν πιο μικρή από την πυκνότητα του περιβάλλοντος και όπως είναι αντιληπτό αυτό θα οδηγήσει σε ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

### 9.2 Αποτελέσματα

#### 9.2.1 $v_z = 10^{-4}$

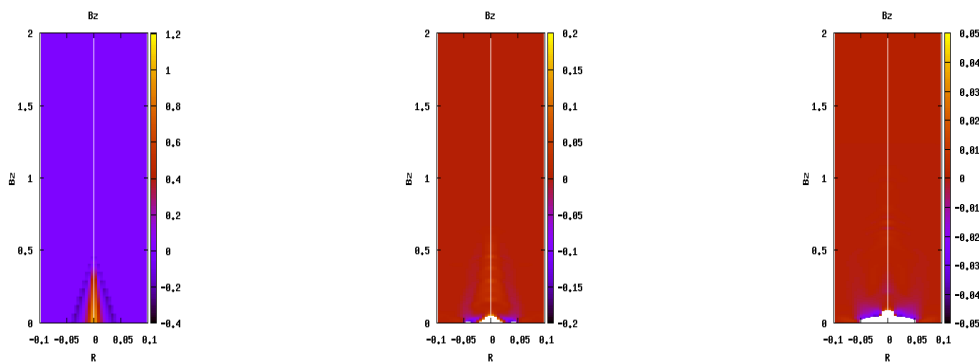
Τα τεχνικά χαρακτηριστικά του προβλήματος είναι ίδια με αυτά που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 8. Βασιζόμαστε και πάλι στο μοντέλο Duncce's Cap και θεωρούμε ότι στα άκρα του πίδακα υπάρχει ισοροπία πιέσεων. Εμείς αλλάζουμε την ταχύτητα και βλέπουμε τα αποτελέσματα. Θα ξεκινήσουμε με τις προσομοιώσεις για ταχύτητα  $v_z = 10^{-4}$  και την μεταβολή της πυκνότητας που φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 9.1: Η πυκνότητα της ροής για χρόνους  $t = 0, t = 11.25, t = 15$

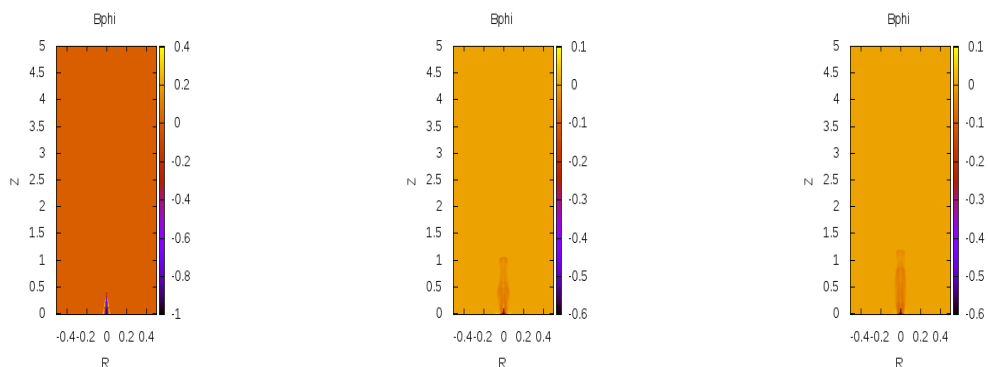
Όπως βλέπουμε εδώ ο πίδακας είναι ευθυγραμμισμένος και δεν έχει την αστάθεια στα πλάγια που είχαμε στις προσομοιώσεις του κεφαλαίου 8. Αυτό οφείλεται στο

γεγονός ότι το έξω περιβάλλον είναι πιο πυκνό από τον πίδακα οπότε και η περιστροφή δεν είναι αρκετά ισχυρή για να σπρώξει υλικό προς τα έξω. Επίσης βλέπουμε ότι ενώ στην αρχή φαίνεται να έχει μια σταθερή πυκνότητα στο τρίτο στιγμιότυπο φαίνεται να πυκνώνει και να επιβραδύνεται αλλά νέο αραιό υλικό έρχεται από την βάση και συνεχίζει να το σπρώχνει. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε και απο την σχέση  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$  οπότε αφού η πυκνότητα αυξάνει πρέπει η ταχύτητα να πέφτει όπως θα δούμε στην συνέχεια. Αυτό που δεν είπαμε είναι ότι τέτοιες προσομοιώσεις μπορούν να εφαρμοστούν σε πίδακες από ενεργούς γαλαξίες (AGN) με την διάφορα ότι εδώ δεν είναι σχετικιστικό και επίσης να πούμε ότι πλέον η χαρακτηριστική ταχύτητα Alfvén είναι περίπου 3 διότι πλέον η πυκνότητα είναι 0.1 δηλαδή  $V_A \propto 1/\sqrt{\rho} \approx 3$ . Στην συνέχεια θα δούμε το πεδίο  $B_z$  για δύο μόνο στιγμιότυπα.



Σχήμα 9.2: Το μαγνητικό πεδίο  $B_z$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 3.75$ ,  $t = 11.25$

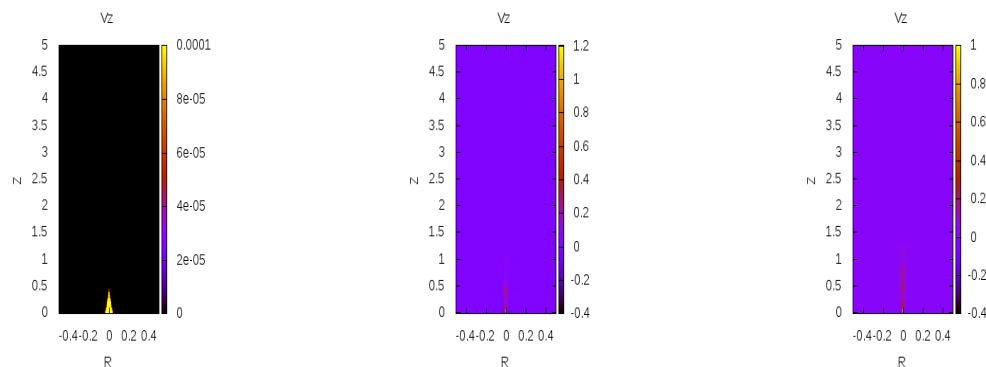
Όπως βλέπουμε το μαγνητικό πεδίο κρατάει την δομή με τις αντίθετες πολικότητες αν και όπως φαίνεται με την πάροδο του χρόνου εξασθενεί σημαντικά. Παρακάτω θα δούμε πως αλλάζει το πεδίο  $B_\phi$ .



Σχήμα 9.3: Το μαγνητικό πεδίο  $B_\phi$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 11.25$ ,  $t = 15$

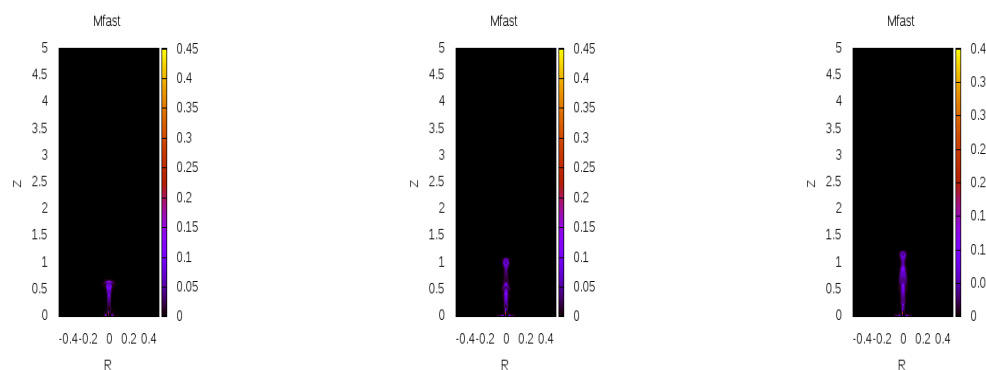
Όπως βλέπουμε και το πεδίο  $B_\phi$  έχει μια σαφή δομή δηλαδή είναι αρνητικό κόντα στον άξονα και θετικό πιο μακριά όπως το περιμέναμε. Τα διαγράμματα για το  $V_\phi$  δεν θα τα δείξουμε καθώς η τιμή είναι μικρή και δεν έχει καμία επίδραση στον πίδακα όπως

είχαμε στο κεφάλαιο 8, οπότε συνεχίζουμε με την ταχύτητα  $V_z$  την οποία βλέπουμε στο διαγράμμα 9.4.



Σχήμα 9.4: Η ταχύτητα  $V_z$  για χρόνους  $t = 0, t = 11.25, t = 15$

Όπως βλέπουμε η πολοειδής ταχύτητα αυξάνει από την αρχική ταχύτητα και φτάνει σε μια τιμή κοντά στο 0.2 αλλά στο τέλος η ταχύτητα πέφτει και η ροή επιβραδύνεται. Αν και έχουμε επιτάχυνση αυτή δεν είναι ικανή να κάνει την ροή super fast όπως θα δούμε και λίγο παρακάτω και το οποίο φαίνεται κιόλας διότι η ταχύτητα του ήχου, η οποία και θα επικρατήσει στο τέλος διότι η μαγνητική ενεργεία θα χαθεί γρηγόρα άρα και η ροή θα γίνει υδροδυναμική όπως θα δείξουμε και με το πλάσμα  $\beta$ , είναι περίπου 1 ενώ η ταχύτητα εδώ είναι 5 φορές πιο κάτω. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τον αριθμό Mach της super fast ταχύτητας που βλέπουμε παρακάτω.



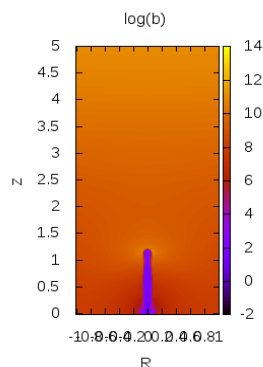
Σχήμα 9.5: Ο αριθμός Mach για χρόνους  $t = 3.75, t = 11.25, t = 15$

Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα 9.5 ο αριθμός Mach ξεκινάει από μικρές τιμές και φτάνει μέχρι μια τιμή γύρω στο 0.15 δηλαδή είναι πολύ μακριά από την super fast περιοχή συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το μοντέλο αυτό είναι εντελώς ακατάλληλο για επιτάχυνση ροής σε πίδακες από AGN ξεκινώντας με τόσο μικρή ταχύτητα.

Τέλος θα δούμε το πλάσμα  $\beta$  και την μεταβολή των ενεργειών σε αυτήν την περίπτωση όπως και στο κεφάλαιο 8 τα οποία φαίνονται παρακάτω. Όπως βλέπουμε οι τιμές του αριθμού  $\beta$  είναι εξαιρετικά μεγάλες οπότε φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι και σε αυτήν

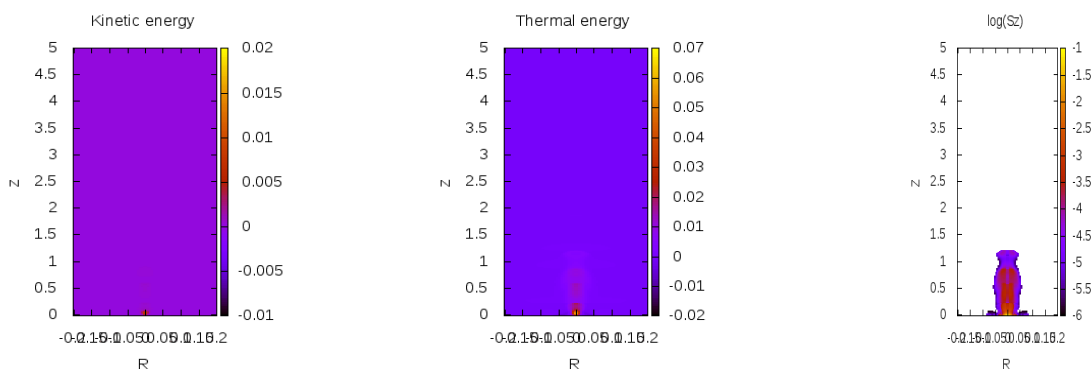


την περίπτωση η ροή είναι κυρίως υδροδυναμική δηλαδή η πίεση του μαγνητικού πεδίου είναι εντελώς αμελητέα. Αυτό μας δείχνει ότι η ροή δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει την μαγνητική ενέργεια για να επιταχύνει το ρευστό αλλά έχουμε συσσώρευση πυκνότητας και θερμικής πίεσης και το ρευστό επιβραδύνει.



Σχήμα 9.6: πλάσμα  $\beta$  για  $t = 15$

Αυτό μπορεί να φανεί και συγκρίνοντας τις τρεις κυρίαρχες ενέργειες δηλαδή την κινητική, θερμική και μαγνητική που βλέπουμε παρακάτω,

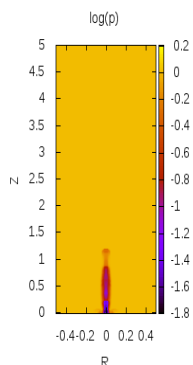


Σχήμα 9.7: Οι ενέργειες για το τελικό στιγμιότυπο

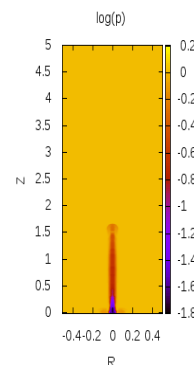
Όπως και στην παράγραφο 8.3.1 έτσι και εδώ βλέπουμε ότι η κινητική ενέργεια είναι πολύ μικρή της τάξης του  $10^{-4}$  σε σχέση με την θερμική που υπερσχύει και της μαγνητικής. Αν πάρουμε και τους λόγους όπως κάναμε στο κεφάλαιο 8 θα προκύψει και πάλι ότι η ταχύτητα του ήχου θα είναι ισχυρότερη οπότε και η ροή θα είναι υποηχητική και υδροδυναμική όπως έχουμε εξηγήσει.

### 9.2.2 $v_z = 10^{-2}$

Στην δεύτερη προσομοίωση που εκτελέσαμε αυξήσαμε την ταχύτητα της ροής και την κάναμε δύο τάξης μεγέθους μεγαλύτερη δηλαδή  $10^{-2}$  και παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι παρόμοια κάτι που το περιμέναμε διότι ακόμα η ταχύτητα είναι αρκετά μικρή για να δούμε μεγάλες διαφορές. Παρακάτω θα δούμε το διάγραμμα της πυκνότητας μόνο για το τελευταίο στιγμιότυπο στην περίπτωση για ταχύτητα  $10^{-4}$  και για  $10^{-2}$  για να τα συγκρίνουμε.

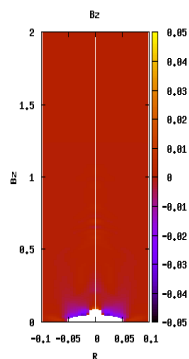


Σχήμα 9.8: Πυκνότητα για ταχύτητα  $V_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$

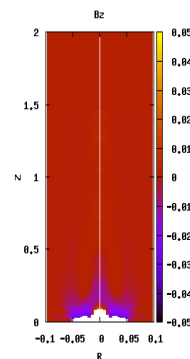


Σχήμα 9.9: Πυκνότητα για ταχύτητα  $V_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

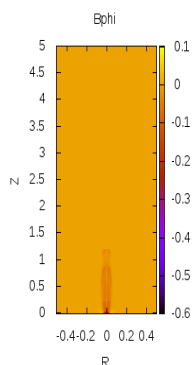
Όπως βλέπουμε και σε αυτήν την περίπτωση η δομή είναι η ίδια με την διαφορά ότι όταν έχουμε μεγαλύτερη ταχύτητα η ροή φτάνει σε μεγαλύτερο ύψος όπως είναι αναμενόμενο. Στην δεύτερη περίπτωση βλέπουμε ότι στο τέλος ενώ σε πιο μεγάλα ύψη η πυκνότητα είναι μεγαλύτερη και επβραδύνει μια αραιή πυκνότητα φαίνεται να ανεβαίνει από κάτω συνεπώς αν το αφήναμε τον κώδικα να "τρέξει" για περισσότερο χρόνο αυτή η αραιή πυκνότητα θα ανέβαινε σε μεγαλύτερα ύψη. Στην συνέχεια θα δούμε πως αλλάζουν τα μαγνητικά πεδία  $B_z, B_\phi$ .



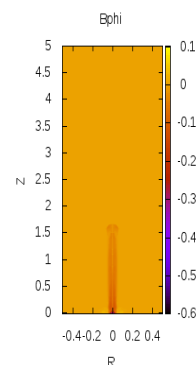
Σχήμα 9.10:  $B_z$  για ταχύτητα  $V_z = 10^{-4}$  και για  $t = 11.25$



Σχήμα 9.11:  $B_z$  για ταχύτητα  $V_z = 10^{-2}$  και για  $t = 11.25$

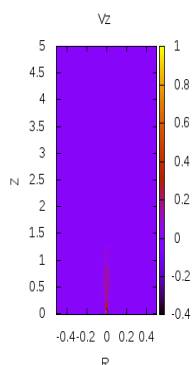


Σχήμα 9.12:  $B_\phi$  για ταχύτητα  $V_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$

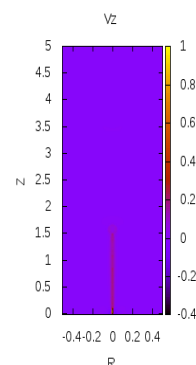


Σχήμα 9.13:  $B_\phi$  για ταχύτητα  $V_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

Όπως είπαμε και πιο πριν το  $B_z$  έχει τιμές κοντά στο μηδέν και δεν φαίνεται καλά στα διαγράμματα αλλά φαίνεται να κρατάει την σωστή δομή. Όπως βλέπουμε τα μαγνητικά πεδία έχουν την ίδια δομή αλλά στην περίπτωση με την μεγαλύτερη ταχύτητα φτάνουν σε υψηλότερα ύψη. Θα κλείσουμε αυτήν την παράγραφο με τα διαγράμματα για την ταχύτητα και τον αριθμό Mach.

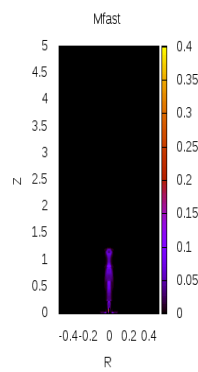


Σχήμα 9.14:  $V_z$  για ταχύτητα  $V_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$

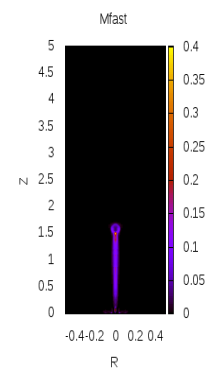


Σχήμα 9.15:  $V_z$  για ταχύτητα  $V_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

Όπως παρατηρούμε και σε αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα φτάνει μέχρι την τιμή 0.2 περίπου όπως και ο αριθμός Mach χωρίς κάποια άλλη μεγάλη διαφορά ενώ και για το πλάσμα β ισχύουν ότι είπαμε στην παράγραφο 9.1. Κλείνοντας την παράγραφο μπορούμε να πούμε ότι αυτές οι λύσεις είναι εντελώς ακατάλληλες για προσομοίωση πιδάκων από ενεργούς γαλαξίες διότι μπορεί να έχουμε επιτάχυνση αλλά η ροή δεν μπορεί να φτάσει τότε στην super fast περιοχή άρα δεν συμπίπτει με τα εως τώρα αποτελέσματα που έχουν γίνει σε διάφορες εργασίες.



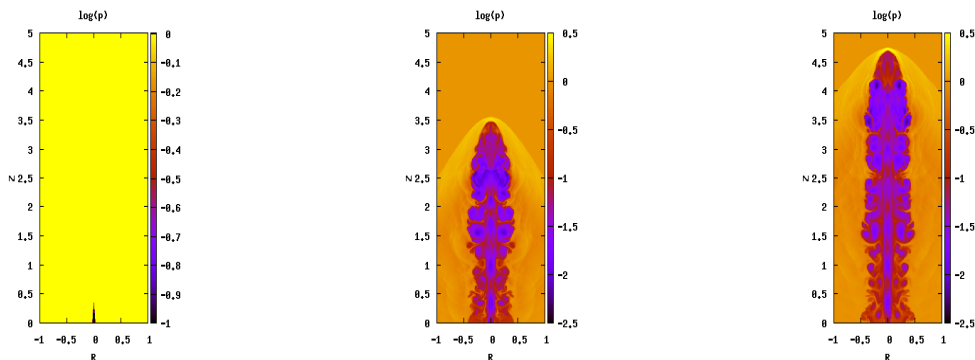
Σχήμα 9.16:  $M_{fast}$  για ταχύτητα  $V_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$



Σχήμα 9.17:  $M_{fast}$  για ταχύτητα  $V_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

### 9.2.3 $v_z = 5$

Σε αυτήν την παράγραφο θα θεωρήσουμε ότι έχουμε μια αρχική ταχύτητα  $v_z = 5$  δηλαδή μεγαλύτερη από την αρχική ταχύτητα Alfvén οπότε θα είμαστε ήδη στην super fast περιοχή και όπως είπαμε και στην παράγραφο 8.3 θα μελετήσουμε την διάδοση και αλληλεπίδραση του πίδακα με το περιβάλλον. Θα ξεκινήσουμε με την μεταβολή της πυκνότητας για τέσσερις χρόνους  $t = 0, t = 3.75, t = 7.5, t = 11.25$ .

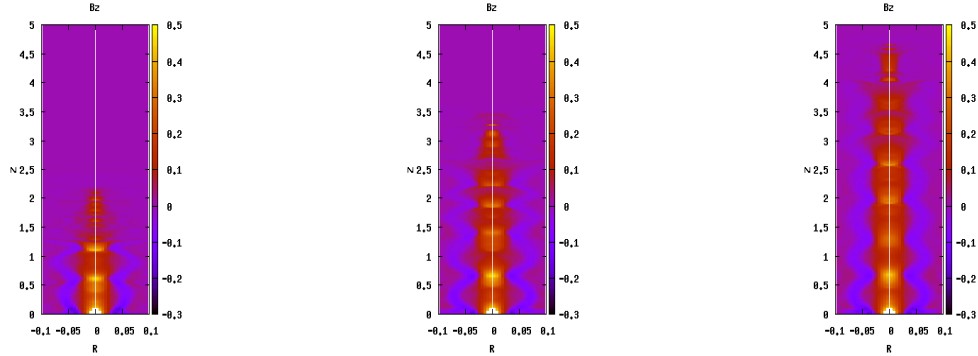


Σχήμα 9.18: Η πυκνότητα της ροής για χρόνο  $t = 0, t = 7.5, t = 11.25$

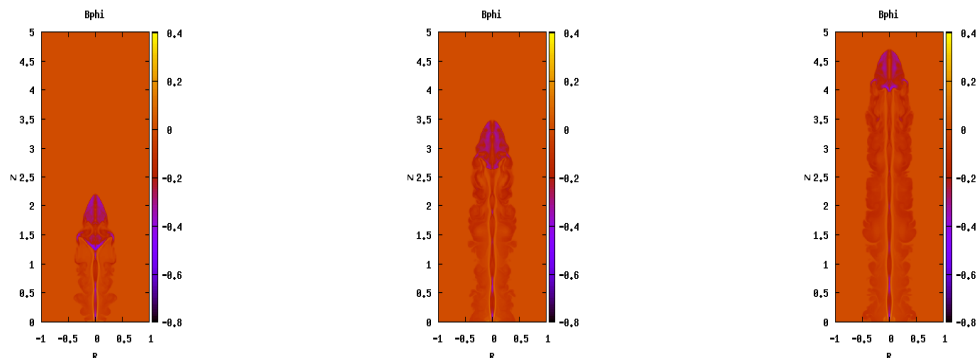
Όπως βλέπουμε ο πίδακας είναι ευθυγραμμισμένος και παρατηρούμε ότι έχουν εμφανιστεί πολλές αστάθειες που σε πρώτη ματιά φαίνονται να είναι Kelvin-Helmholtz. Η μορφή του πίδακα αυτή είναι κλασική στην βιβλιογραφία και όπως μπορούμε να δούμε έχουμε εκτός από το bow shock και το λεγόμενο cocoon όπου ουσιαστικά υλικό φτάνει στην κορυφή και γυρνάει προς τα πίσω. Αυτό θα φάνει καλύτερα αργότερα όταν δείξουμε την ταχύτητα. Οι αστάθειες Kelvin-Helmholtz δημιουργούνται όταν στην αδιατάρακτη κατάσταση το ένα ρευστό έχει μια σχετική ταχύτητα σε σχέση με το άλλο και αναπτύσσονται στη επιφάνεια του κινούμενου ρευστού. Ανάλογα με το μήκος κύματος των ασταθειών μπορούμε να βρούμε και τον χρόνο ανάπτυξης (growth rate) τους. Σε ασυμπίεστα ρευστά η ανάλυση είναι ευκόλη διότι το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να πάρουμε διαταραχές στην πίεση και στην ταχύτητα ώστε να γραμμικοποιηθούν η εξίσωση Laplace και η εξίσωση Bernoulli και έπειτα θα προκύψει η σχέση διασποράς όπου το μιγαδικό κομμάτι θα μας δώσει τον χρόνο ανάπτυξης της αστάθειας.

Στις δικές μας προσομοιώσεις όμως τα ρευστά είναι συμπιεστά άρα η γραμμικοποίηση δεν είναι τόσο απλή διότι στο τέλος θα προκύψουν διαφορικές εξισώσεις που πρέπει να λυθούν αριθμητικά για να μας δώσουν την σχέση διασποράς όπως φαίνεται στην εργασία του Birkinshaw 1984[2]. Συνεπώς αν μπορούσαμε να κανούμε το διάγραμμα του growth rate για διάφορα μήκη κύματος ανάλογα με τον αριθμό Mach θα βλέπαμε ποιος τρόπος ταλάντωσης κυριαρχεί και φυσικά θα βλέπαμε και τον χρόνο ανάπτυξης και αν σχετίζεται με αυτό που βλέπουμε από τις προσομοιώσεις. Τέλος να πούμε ότι η εξέλιξη των ασταθειών χωρίζεται σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση έχουμε την γραμμική εξέλιξη των ασταθειών με τον χρόνο. Δυστυχώς εδώ δεν μπορούμε να δούμε την φάση αυτή καθώς θα ερπέπε να ο Pluto να μας βγάξει αρχεία σε περισσότερα χρονικά διαστήματα για να φανεί. Στην δεύτερη φάση έχουμε την εμφάνιση κωνικών ωστικών κυμάτων στον άξονα του πίδακα και επίσης ο πίδακας επεκτείνεται ακτινικά. Η φάση αυτή λέγεται και φάση επέκτασης. Τέλος καθώς τα ωστικά κύματα εξελίσσονται

έχουμε αλληλεπίδραση του πίδακα με το περιβάλλον και η φάση αυτή λέγεται φάση ανάμειξης. Στις δικές μας προσομοιώσεις η φάση ανάμειξης ξεκινάει από το πρώτο στιγμιότυπο δηλαδή σε χρόνο  $t = 0.75$ . Στην συνέχεια θα δείξουμε πως μεταβάλλονται τα μαγνητικά πεδία  $B_z$ ,  $B_\phi$  με τον χρόνο.



Σχήμα 9.19: Το μαγνητικό πεδίο  $B_z$  για χρόνο  $t = 3.75, t = 7.5, t = 11.25$

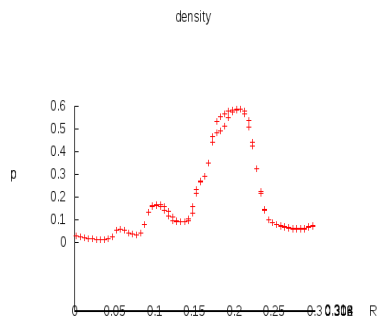


Σχήμα 9.20: Το μαγνητικό πεδίο  $B_\phi$  για χρόνο  $t = 3.75, t = 7.5, t = 11.25$

Όπως και πριν οι τιμές του  $B_z$  είναι πολύ κοντά στο μηδέν αλλά αν κοιτάξουμε κοντά στον άξονα θα δούμε καθαρά την δομή του. Το πεδίο  $B_\phi$  από την άλλη, που βλέπουμε στο διαγράμμα 9.18, ενώ στο κεντρικό κορμό κρατάει την σωστή δομή στην κορυφή έχει μεγάλες αρνητικές τιμές και μια εξήγηση που μπορούμε να δώσουμε είναι ότι εκεί το ρευστό αρχίζει να επιβραδύνει οπότε και μαζεύεται όλο και περισσότερο υλικό όπως και φαίνεται αφού έχουμε μια αύξηση της πυκνότητας άρα και με την βοήθεια της περιστροφής όλο και περισσότερες δυναμικές γραμμές τυλίγονται σε αυτό το σημείο δημιουργώντας αυτήν την αύξηση στην τιμή του πεδίου  $B_\phi$ .

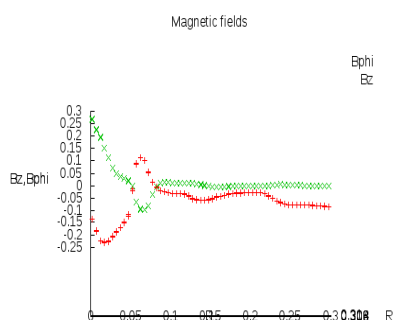
Από τα προηγούμενα διαγράμματα φαίνεται ότι ο κεντρικός κορμός να ακολουθεί την δομή των recollimation πιδάκων που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 8. Για να το δούμε αυτό παρακάτω δείχνουμε τα διαγράμματα της πυκνότητας και των μαγνητικών πεδίων για ένα ύψος περίπου  $Z = 0.3$ .

Όπως φαίνεται καθαρά για  $R = 0.25$  έχουμε μια απότομη μεταβολή της πυκνότητας και άρα εκεί θα έχουμε την εμφάνιση ενός ωστικού κύματος. Για το εσωτερικό του



Σχήμα 9.21: Το προφίλ της πυκνότητας

πίδακα δεν φαίνεται καθαρά το κύμα αραιώσης διότι το πρόβλημα του sod δεν εφαρμόζεται καλά σε διδιάστατα προβλήματα όπως έχουμε εδώ οπότε δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι έχουμε ένα recollimation πίδακα. Παρακάτω θα δούμε τα μαγνητικά πεδία για το συγκεκριμένο ύψος.

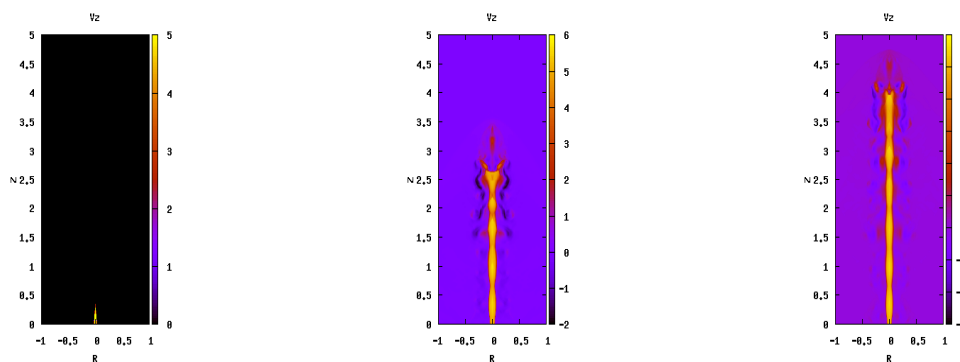


Σχήμα 9.22: Το προφίλ του μαγνητικού πεδίου

Τα πεδία  $B_z$ ,  $B_\phi$  συμπεριφέρονται όπως το περιγράψαμε πιο πάνω. Δηλαδή αρχικά έχουμε θετικό  $B_z$  και αρνητικό  $B_\phi$  και σε κάποια ακτίνα αντιστρέφονται. Το παράξενο είναι ότι εκεί που αντιστρέφεται το  $B_\phi$  έχουμε μια αύξηση της πυκνότητας χωρίς όμως να είμαστε σε θέση αυτήν την στιγμή να πούμε αν είναι τυχαίο η αν υπάρχει κάποιος βαθύτερος λόγος.

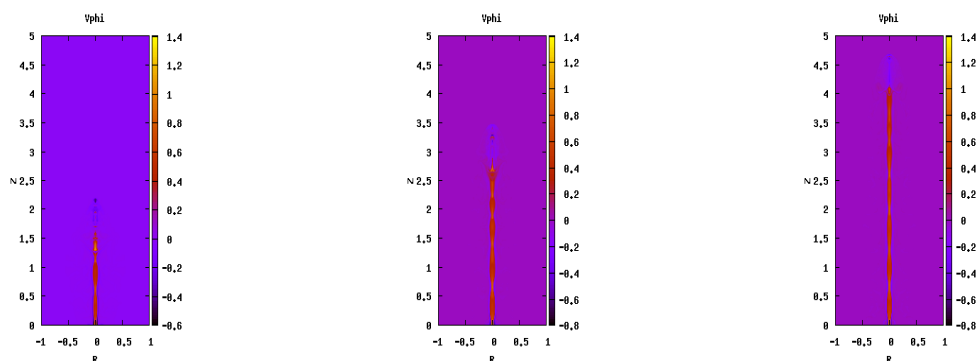
Στην συνέχεια θα δούμε τις ταχύτητες  $V_z$ ,  $V_\phi$  όπου περιμένουμε να δούμε και αρνητικές ταχύτητες στην πολοειδή ταχύτητα που θα οφείλεται στο υλικό που θα πέφτει ξανά κάτω.

Όπως βλέπουμε το κεντρικό κομμάτι έχει μια σταθερή ταχύτητα περίπου 5 όσο το είχαμε θέσει αρχικά αλλά παρατηρούμε ότι η κορυφή του πίδακα έχει σαφώς χαμηλότερη ταχύτητα και αυτό οφείλεται στο ότι το ρευστό συναντά αντίσταση από το περιβάλλον και αυξάνει η πυκνότητα του με αποτέλεσμα να μειώνεται η ταχύτητα του αισθητά. Επίσης παρατηρούμε και αυτό που λέγαμε πιο πάνω ότι γύρω από τον πίδακα έχουμε αρνητικές ταχύτητες λόγω του ότι υλικό δεν μπορεί να διαπεράσει το περιβάλλον και



Σχήμα 9.23: Η ταχύτητα  $V_z$  για χρόνο  $t = 0, t = 7.5, t = 11.25$

γυρνάει προς τα πίσω. Αυτή η περιοχή με τις αρνητικές ταχύτητες που φαίνεται να περιβάλλει τον πίδακα λέγεται και cocoon. Στην συνέχεια θα δείξουμε την περιστροφική ταχύτητα αν και δεν παίζει μεγάλο ρόλο στις αστάθειες που βλέπουμε καθώς αυτές οφείλονται καθαρά στην αλληλεπίδραση του πίδακα με το περιβάλλον.

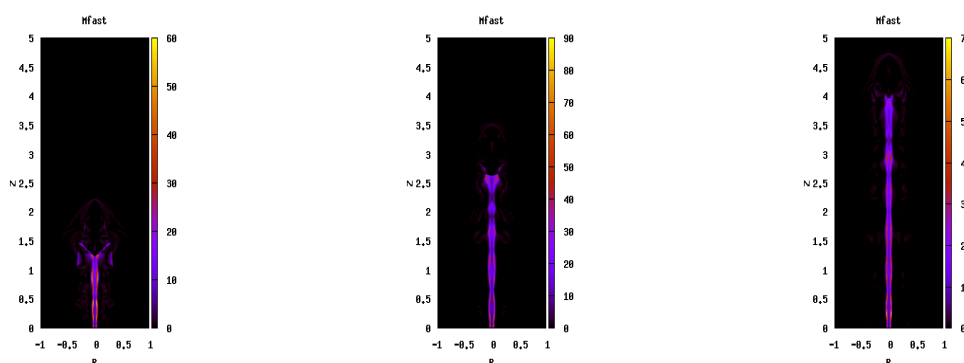


Σχήμα 9.24: Η ταχύτητα  $V_\phi$  για χρόνο  $t = 3.75, t = 7.5, t = 11.25$

Όπως φαίνεται και εδώ η περιστροφική ταχύτητα είναι σχετικά μικρή και επίσης είναι εντοπισμένη σε μια λεπτή περιοχή του πίδακα άρα επιβεβαιώνει το γεγονός ότι δεν ευθύνεται για τις πολλές αστάθειες που βλέπουμε. Κάτι άλλο που παρατηρούμε είναι ότι στο μεγαλύτερο μέρος του πίδακα η ταχύτητα είναι θετική άρα έχουμε και αρνητικό  $B_\phi$  όπως μπορούμε εύκολα να δούμε από τα διαγράμματα του μαγνητικού πεδίου όμως αυτό που είναι περίεργο είναι ότι στην κορυφή έχουμε αρνητική ταχύτητα και θετικό μαγνητικό πεδίο μόνο όμως γύρω από την στενή αυτή περιοχή όπου έχουμε περιστροφική ταχύτητα. Μόλις βγούμε λίγο προς τα έξω το μαγνητικό πεδίο και η περιστροφική ταχύτητα αντιστρέφονται ξανά και γίνεται αρνητικό. Αυτό δεν είναι προφανές γιατί συμβαίνει καθώς σε όλες τις άλλες προσομοιώσεις δεν συμβαίνει αυτό αλλά μια εξήγηση που μπορούμε να δώσουμε είναι ότι εκεί η ταχύτητα αντιστρέφεται ώστε να αντιστραφεί και η φόρα των δυναμικών γραμμών καθώς θα κατεβαίνουν ξανά στην βάση. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε και έναν "μανδύα" αρνητικής ταχύτητας και εκεί όπως είναι προφανές εντοπίζουμε το θετικό  $B_\phi$ . Θα τελειώσουμε αυτό το κε-



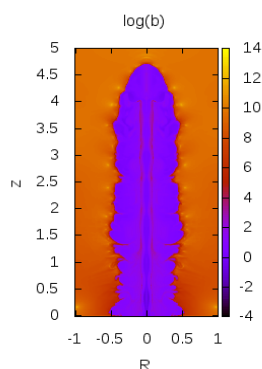
φάλαιο με την μεταβολή του αριθμού Mach για την γρήγορη μαγνητοχητική ταχύτητα καθώς και την μεταβολή του πλάσμα  $\beta$ .



Σχήμα 9.25: Ο αριθμός Mach για χρόνο  $t = 3.75$ ,  $t = 7.5$ ,  $t = 11.25$

Όπως βλέπουμε η ροή είναι σαφώς super fast και αυτό το περιμέναμε καθώς εμείς το κάναμε τεχνητά αυτό βάζοντας μεγάλη αρχική ταχύτητα. Κάτι άλλο που παρατηρούμε είναι ότι στην κορυφή του πίδακα ο αριθμός Mach πέφτει πάρα πολύ και αυτό οφείλεται στο ότι η ροή επιβραδύνεται πολύ όπως είδαμε και από τα προηγούμενα διαγράμματα. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο έτσι και εδώ δεν καταφέραμε να επιταχύνουμε την ροή σε μεγάλες ταχύτητες παρά μόνο τεχνητά.

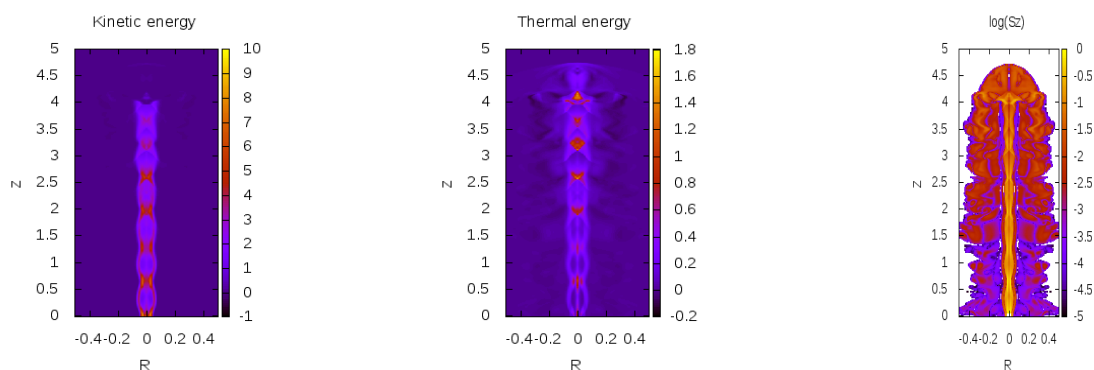
Θα κλείσουμε το κεφάλαιο με την παρουσίαση του πλάσματος  $\beta$  και των ενεργειών όπου και εδώ αναμένουμε η ροή να είναι κυρίως υδροδυναμική. Το διάγραμμα για  $t = 7.5$  φαίνεται παρακάτω. Όπως βλέπουμε και σε αυτήν την περίπτωση οι τιμές του πλάσματος  $\beta$  βρίσκονται στο διάστημα  $10 - 10^2$  οπότε η ροή είναι κυρίως υδροδυναμική δηλαδή και σε αυτήν την περίπτωση το ρευστό δεν μπορεί να μετατρέψει την μαγνητική ενέργεια σε κινητική.



Σχήμα 9.26: πλάσμα  $\beta$  για  $t = 7.5$

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε την κινητική, θερμική και μαγνητική ενέργεια για τον χρόνο  $t = 7.5$  που βλέπουμε παρακάτω,

Όπως είναι εύκολο να αντιληφθούμε επειδή είμαστε στην super fast περίπτωση η κινητική ενέργεια θα υπερισχύσει της πίεσης γιατί όπως είπαμε και στο κεφαλαίο 8 ο



Σχήμα 9.27: Οι ενέργειες για  $t = 7.5$

αριθμός Mach ορίζεται σαν τον λόγο την κινητικής προς την θερμική και αφού εδώ  $M > 1$  σημαίνει ότι  $\frac{\rho}{2}u^2 > \frac{\gamma}{\gamma-1}P$ . Αυτό το αποτέλεσμα αποτυπώνεται στα διαγράμματα. Τέλος βλέπουμε ότι εκεί που στενεύει ο πίδακας αυξάνει και η κινητική και η θερμική ενέργεια διότι καθώς στενεύει ο πίδακας η επιφάνεια μειώνεται οπότε από διατήρηση μάζας το  $\rho u$  πρέπει να αυξηθεί οπότε για αυτό βλέπουμε να αυξάνονται και οι δύο ενέργειες. Αν διαιρέσουμε την ροή κινητικής ενέργειας και θερμικής με το γινόμενο  $\rho u$  θα καταλήξουμε στην σχέση  $\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = E$  που είναι ουσιαστικά η εξίσωση Bernoulli οπότε για να μένει σταθερή πρέπει αν αυξάνεται η κινητική ενέργεια να μειώνεται η θερμική. Δυστυχώς οι λύσεις αυτές ακόμα και στην ιδανική περίπτωση που ξεκίναμε με γρήγορη ταχύτητα δεν μπορούν να διατηρήσουν τα μαγνητικά πεδία. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε τις τελευταίες προσομοιώσεις όπου θα θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα μέσα και έξω από τον πίδακα είναι ίδια.

# Κεφάλαιο 10

## Προσομοίωση τρίτη για

$$\rho_j = 0.1, \rho_a = 0.1$$

### 10.1 Εισαγωγή

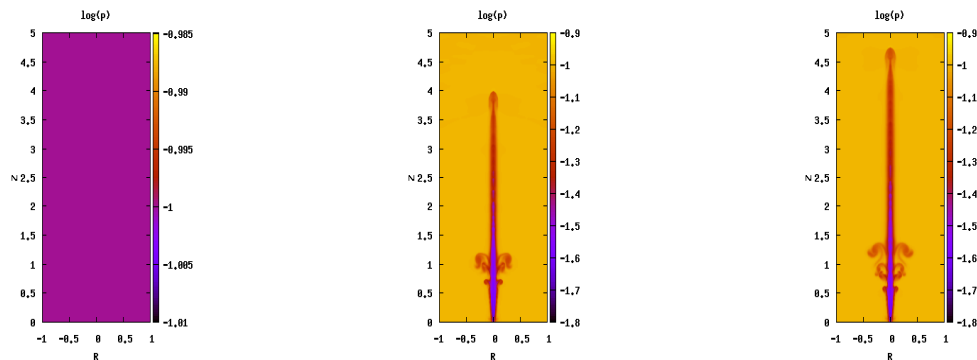
Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τις τελευταίες προσομοιώσεις που εκτελέσαμε με τον κώδικα θεωρώντας αυτήν την φορά ότι η πυκνότητα μέσα και έξω από τον πίδακα είναι ίδια και έτσι θα έχουμε καλύψει πλέον όλα τα ενδεχόμενα. Θα ξεκινήσουμε με πολύ μικρή ταχύτητα και θα δούμε στο τέλος τι αποτελέσματα θα προκύψουν.

### 10.2 Αποτελέσματα

#### 10.2.1 $v_z = 10^{-4}$

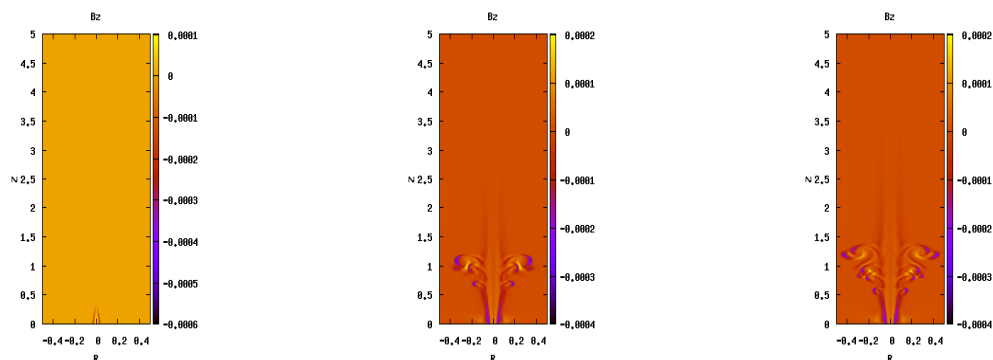
Όπως είναι αναμενόμενο τα χαρακτηριστικά του προβλήματος είναι ίδια όπως στα κεφάλαια 8 και 9 καθώς και το μοντέλο στο οποίο βασιζόμαστε. Να σημειώσουμε ότι εδώ η πυκνότητα μέσα στον πίδακα είναι 0.1 άρα η χαρακτηριστική μας ταχύτητα Alfven είναι περίπου 3 αρχικά. Όπως και στις προηγούμενες προσομοιώσεις έτσι και σε αυτό θα δείξουμε τα αποτελέσματα για ταχύτητα  $v_z = 10^{-4}$  στην αρχή,  $v_z = 10^{-2}$  στην συνέχεια και θα κλείσουμε το κεφάλαιο με τις προσομοιώσεις για ταχύτητα  $v_z = 5$ . Θα ξεκινήσουμε με την μεταβολή της πυκνότητας για τέσσερις χρονικές στιγμές όπως κάναμε και στα προηγούμενα κεφάλαια.

Όπως βλέπουμε στην πρώτη εικόνα η πυκνότητα είναι παντού η ίδια όπως και θα έπρεπε αφού το είχαμε καθορίσει από τις αρχικές συνθήκες. Στην συνέχεια βλέπουμε έναν ευθυγραμμισμένο πίδακα να ανεβαίνει και όπως παρατηρούμε στα άκρα του εμφανίζονται πάλι κάποιες αστάθειες οι οποίες οφείλονται όπως και στο κεφάλαιο 8 λόγω της περιστροφικής ταχύτητας. Ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο είναι ότι σε αυτές τις προσομοιώσεις ο πίδακας φτάνει σχεδόν μέχρι το  $Z = 5$  δηλαδή στην κορυφή του "κουτιού" σε αντίθεση με τις προηγούμενες προσομοιώσεις όπου έφτανε μέχρι το 2 περίπου. Ο λόγος δεν είναι προφανής αλλά μια εικασία που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι η πυκνότητα του περιβάλλοντος είναι μικρή ενώ και η πυκνότητα του πίδακα είναι και αυτή σχετικά μικρή και άρα πιο εύκολα μπορεί να επιταχυνθεί και να φτάσει σε μεγάλα  $Z$ . Στο κεφάλαιο 8 είχαμε μικρή πυκνότητα στο περιβάλλον και μεγαλύτερη στον πίδακα και συνεπώς παρόλο που το περιβάλλον ήταν αραιό ο πίδακας ήταν αρκετά πυκνός για να μπορέσει να επιταχυνθεί. Στο κεφάλαιο 9 από την άλλη είχαμε το περιβάλλον να είναι πιο πυκνό και άρα και πιο δύσκολο για τον πίδακα να φτάσει σε μεγάλα



Σχήμα 10.1: Η πυκνότητα της ροής για χρόνους  $t = 0, t = 11.25, t = 15$

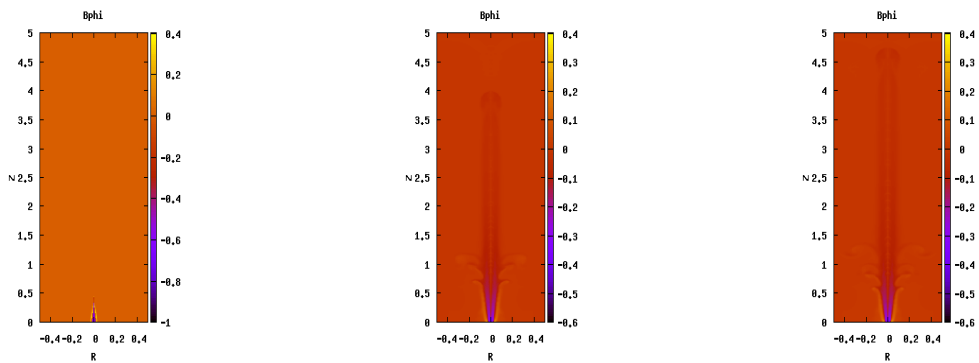
ύψη. Στην συνέχεια θα δούμε την μεταβολή των μαγνητικών πεδίων  $B_z, B_\phi$ .



Σχήμα 10.2: Το μαγνητικό πεδίο  $B_z$  για χρόνους  $t = 0, t = 11.25, t = 15$

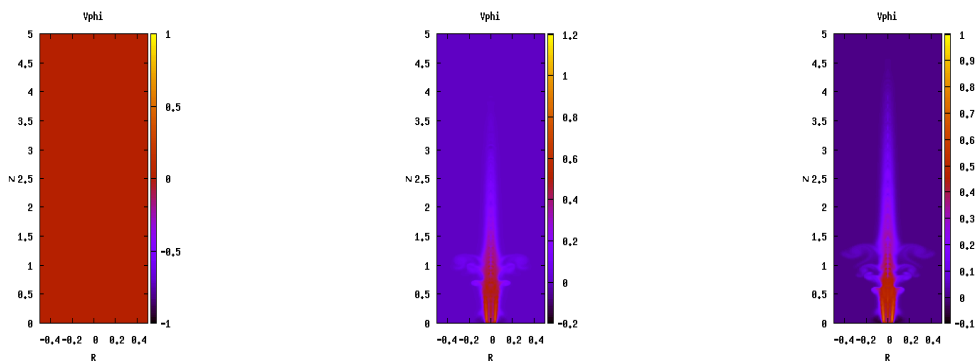
Όπως βλέπουμε στις εικόνες 10.2 το μαγνητικό πεδίο έχει μια σαφή δομή όπου κοντά στον άξονα είναι θετικό το  $B_z$  και μετά γίνεται αρνητικό, κρατάει δηλαδή το σχήμα των δυναμικών γραμμών που θέσαμε εξ αρχής στον κώδικα. Αυτό που επίσης μπορεί να παρατηρήσει κάποιος είναι όπως εξηγήσαμε και πριν λόγω ασταθειών υπάρχει μια ροή ακτινικά και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα δυναμικές γραμμές να κινούνται προς τα εκεί δημιουργώντας αυτές τις αστάθειες που βλέπουμε. Τέλος βλέπουμε ότι από κάποιος ύψος και μετά το  $B_z$  εξασθενεί και γίνεται πρακτικά μηδέν. Παρόμοια δομή περιμένουμε να έχει και το αζιμουθιακό πεδίο  $B_\phi$  όπως φαίνεται στις εικόνες 10.3 όπου κοντά στον άξονα είναι αρνητικό όπως θέλαμε αφού έχουμε πει ότι το πεδίο  $B_\phi$  είναι αρνητικό εκεί που το πεδίο  $B_z$  είναι θετικό και έπειτα γίνεται θετικό. Όπως βλέπουμε σε χαμηλότερα ύψη το πεδίο είναι πολύ πιο αρνητικό δηλαδή οι δυναμικές γραμμές που τυλίγονται γύρω από τον άξονα είναι περισσότερες και έπειτα αρχίζει και φθίνει αλλά σε αντίθεση με το πεδίο  $B_z$  δεν μηδενίζεται εντελώς σε μεγάλα ύψη αλλά έχει μια τιμή γύρω στο 0.1. Όπως και πριν εμφανίζονται αστάθειες οι οποίες όπως είναι λογικό θα εμφανίζονται σε όλα μας τα μεγέθη.

Στην συνέχεια θα δούμε πως αλλάζει η περιστροφική ταχύτητα ώστε να βεβαιωθούμε ότι αυτή είναι υπεύθυνη για τις αστάθειες. Όπως βλέπουμε στην αρχή δεν υπάρχει



Σχήμα 10.3: Το μαγνητικό πεδίο  $B_\phi$  για χρόνους  $t = 0, t = 11.25, t = 15$

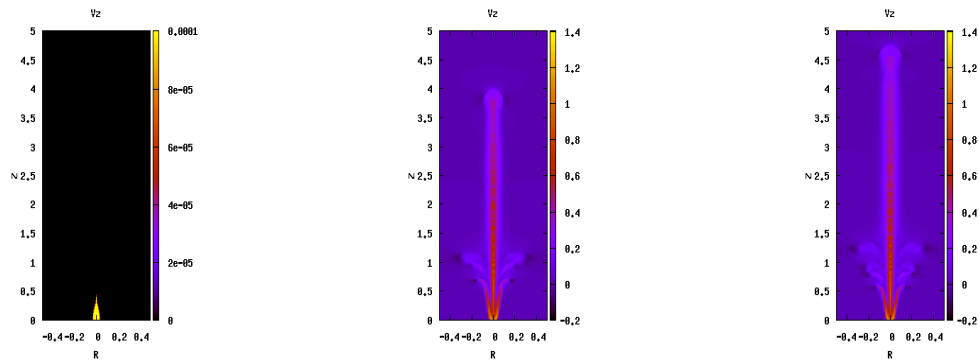
περιστροφή και έπειτα αρχίζει να αυξάνεται και όπως βλέπουμε έχει μεγάλες τιμές εκεί που εμφανίζονται οι αστάθειες οπότε και αυτό εξηγεί γιατί βλέπουμε αυτούς του σχηματισμούς. Όσο περνάει ο χρόνος και σε μεγάλα ύψη η περιστροφή έχει πολύ μικρές τιμές.



Σχήμα 10.4: Η περιστροφική ταχύτητα  $V_\phi$  για χρόνους  $t = 0, t = 11.25, t = 15$

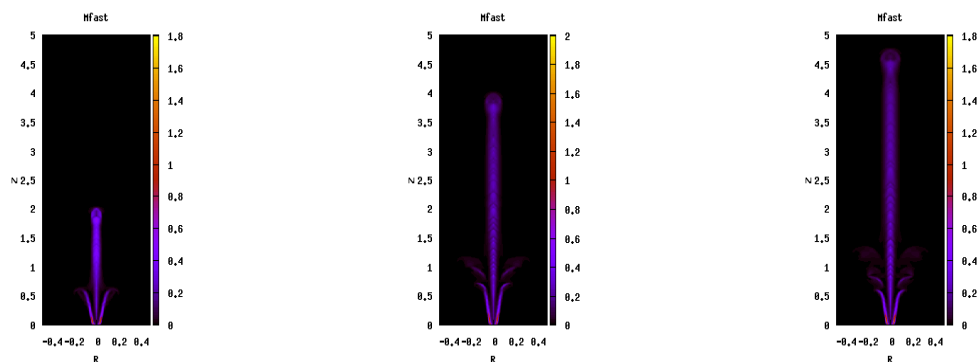
Στην συνέχεια θα δούμε και την ταχύτητα  $V_z$ . Όπως βλέπουμε στα διαγράμματα των ταχυτήτων ενώ ξεκινάμε από πολύ μικρή ταχύτητα η ροή γρήγορα επιταχύνεται και φτάνει μέχρι περίπου 1 αλλά μετά βλέπουμε ότι καθώς περνάει ο χρόνος η ταχύτητα μειώνεται και σταθεροποιείται περίπου στο 0.5.

Αυτό που απομένει να δείξουμε είναι πως αλλάζει ο αριθμός *Mach* και αν τελικά θα μπορέσει η ροή να γίνει *super-fast*. Αυτό φαίνεται στο διάγραμμα 10.6 όπου όπως βλέπουμε στο τελικό στιγμιότυπο ο αριθμός *Mach* φτάνει μέχρι την τιμή περίπου 0.5-0.6. Και πάλι η ροή δεν μπορεί να γίνει *super fast* αλλά αυτήν την φορά έχουμε κάτι πιο περίεργο. Όπως θυμόμαστε η ταχύτητα  $V_z$  φτάνει μέχρι μια τιμή περίπου ένα και έπειτα πέφτει οπότε θα πρέπει να δούμε πως αλλάζει η ταχύτητα του ήχου και η ταχύτητα *Alfven* για να βγάλουμε σαφή συμπεράσματα. Οι δύο αυτές ταχύτητες φαίνονται παρακάτω μόνο για το τελικό στιγμιότυπο. Όπως βλέπουμε από κάποιο ύψος και μετά η ταχύτητα *Alfven* πρακτικά μηδενίζεται ενώ η ταχύτητα του ήχου έχει μια τιμή κοντά στο 1. Αυτό σημαίνει ότι από κάποιο ύψος και μετά η ροή γίνεται

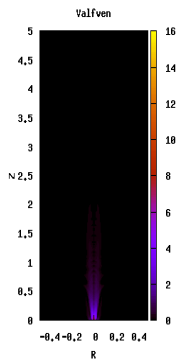
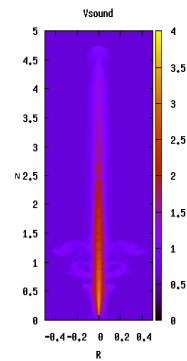


Σχήμα 10.5: Η πολοειδής ταχύτητα  $V_z$  για χρόνους  $t = 0, t = 11.25, t = 15$

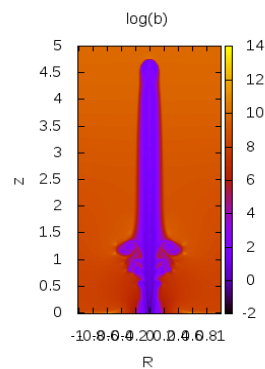
κυρίως υδροδυναμική καθώς τα μαγνητικά πεδία παύουν να κυριαρχούν δηλαδή η ροή χρησιμοποιεί όλη την μαγνητική ενέργεια από την βάση για να επιταχύνει την ροή για αυτό βλέπουμε ότι για μικρά ύψη η ταχύτητα Alfven είναι περίπου 3. Να σημειώσουμε ότι οι ταχύτητες αυτές είναι ουσιαστικά το τετράγωνο των ταχυτήτων δηλαδή στα διαγράμματα αυτό που βλέπουμε είναι το  $V_{alfven}^2, V_{sound}^2, M_{fast}^2$  προς αποφυγή των λαθών.



Σχήμα 10.6: Ο αριθμός Mach για χρόνους  $t = 3.75, t = 11.25, t = 15$

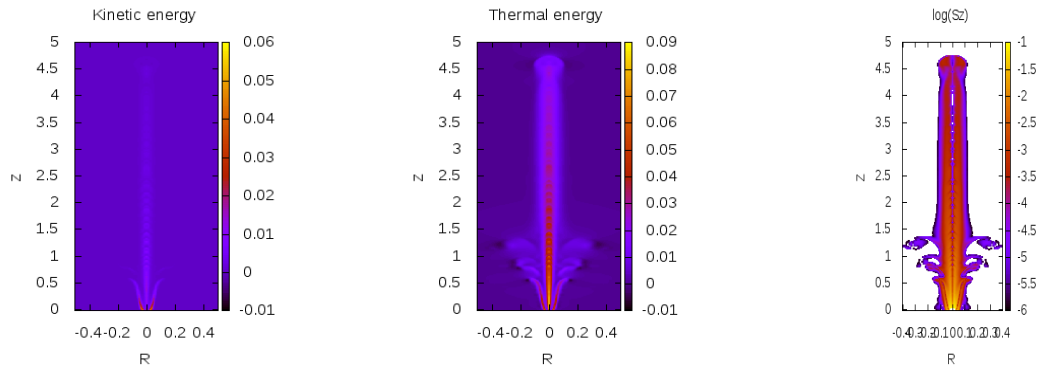
Σχήμα 10.7:  $V_{alfven}$  για  $t = 15$ Σχήμα 10.8:  $V_{sound}$  για  $t = 15$ 

Το συμπέρασμα ότι η ροή είναι κυρίως υδροδυναμική φαίνεται και από το πλάσμα  $\beta$  το οποίο θα δείξουμε παρακάτω.

Σχήμα 10.9: πλάσμα  $\beta$  για  $t = 15$ 

Και σε αυτήν την περίπτωση βλέπουμε ότι οι τιμές του  $\log(\beta)$  κυμαίνονται από  $10 - 10^4$  οπότε και σε αυτήν την περίπτωση η ροή είναι κυρίως υδροδυναμική και κυριαρχεί η θερμική πίεση δηλαδή η ροή είναι θερμή. Κάτι που δεν έχουμε πει είναι ότι όλη η μωβ περιοχή είναι η περιοχή στο οποίο έχει φτάσει μαγνητικό πεδίο για αυτό και φαίνεται να είναι πιο παχύ από τα διαγράμματα της πυκνότητας. Αντιθέτως έξω από τον πίδακα οι τιμές είναι της τάξης του  $10^{12} - 10^{16}$  διότι εκεί δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο και το πλάσμα  $\beta$  έχει πολύ μεγάλες τιμές. Τέλος αυτό που μένει να δείξουμε είναι τις τρεις κυρίαρχες ενέργειες για να σιγουρευτούμε πλήρως ότι η ροή είναι υδροδυναμική. Οι ενέργειες φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα για την sub fast που μελετάμε σε αυτήν την παράγραφο. Όπως βλέπουμε η κινητική ενέργεια κοντά στην βάση έχει μια τιμή κοντά στο 0.01 και σε μεγαλύτερα ύψη φθίνει και πρακτικά μηδενίζεται. Αντιθέτως η θερμική ενέργεια παρόλο που ξεκινάει από την βάση με μια τιμή 0.09 σε μεγάλα ύψη φθίνει αλλά διατηρείται σε μεγαλύτερες τιμές από την κινητική και την μαγνητική που βλέπουμε στην δεξιά εικόνα και η οποία ξεκινάει από μια τιμή 0.1 και στο τέλος γίνεται  $10^{-3}$ . Αυτό δικαιολογεί το γεγονός ότι η ροή είναι υδροδυναμική. Ένα τελευταίο που μπορούμε να πούμε είναι ότι αν θυμηθούμε από το κεφάλαιο 8 ότι ο λόγος της

κινητικής με την θερμική μας δίνει τον αριθμό Mach θα δούμε ότι επαληθεύει τις τιμές που βλέπουμε στο διάγραμμα του  $M_{fast}$ , όπως και ο λόγος της θερμικής ενέργειας προς την μαγνητική που μας δίνει το πλάσμα  $\beta$ . Από τις τιμές των διαγραμμάτων των ενεργειών είναι εύκολο ναδειχθεί ότι όντως επαληθεύει τα διαγράμματα του αριθμού Mach και του πλάσματος  $\beta$ .

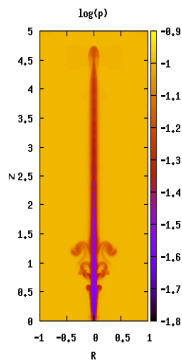


Σχήμα 10.10: Στα διαγράμματα φαίνονται οι ενέργειες μόνο για το τελευταίο στιγμιότυπο

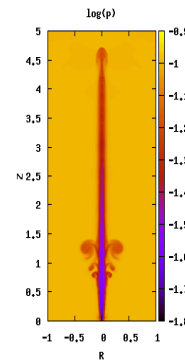


### 10.2.2 $v_z = 10^{-2}$

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις που εκτελέσαμε για αρχική ταχύτητα  $v_z = 10^{-2}$  αυτήν την φορά. Όπως είναι αναμενόμενο οι διαφορές με την προηγούμενη παράγραφο θα είναι ελάχιστες οπότε και δεν θα δείξουμε όλη την εξέλιξη αλλά μόνο το τελικό στιγμιότυπο ώστε να το συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα για  $v_z = 10^{-4}$ . Θα ξεκινήσουμε με την πυκνότητα που φαίνεται παρακάτω.

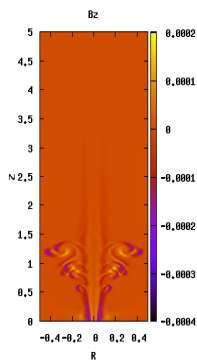


Σχήμα 10.11: Πυκνότητα για  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$

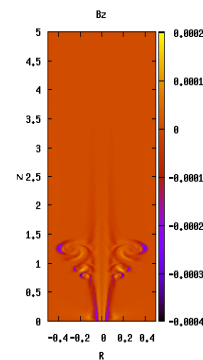


Σχήμα 10.12: Πυκνότητα για  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

Όπως βλέπουμε οι διαφορές είναι μηδαμινές συνεπώς η αλλαγή στην ταχύτητα δεν άλλαξε καθόλου το αποτέλεσμα και αυτό θα φάνει και παρακάτω στα επόμενα διαγράμματα.

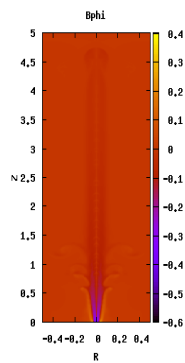


Σχήμα 10.13:  $B_z$  για  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$

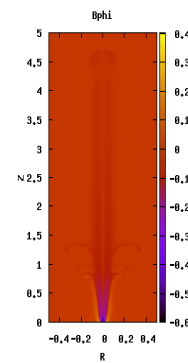


Σχήμα 10.14:  $B_z$  για  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

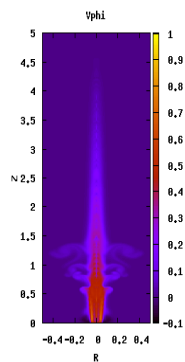
Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο βλέπουμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση οι λύσεις αυτές δεν μπορούν να φτάσουν την ροή σε super fast περιοχές οπότε είχαμε πει και στο κεφάλαιο 8 δεν είναι καλές λύσεις αν θέλουμε να κάνουμε επιτάχυνση σε ωστικά κύματα αλλά θα μπορούσαν να ήταν καλές λύσεις για μοντέλα με μαγνητική επανασύνδεση. Επίσης και σε αυτήν την περίπτωση το πλάσμα β έχει μεγάλες τιμές οπότε



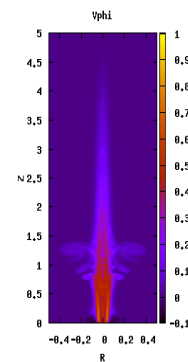
Σχήμα 10.15:  $B_\phi$  για  $v_z = 10^{-4}$   
και για  $t = 15$



Σχήμα 10.16:  $B_\phi$  για  $v_z = 10^{-2}$   
και για  $t = 15$

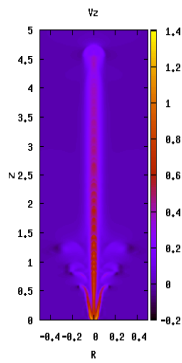


Σχήμα 10.17:  $V_\phi$  για  $v_z = 10^{-4}$   
και για  $t = 15$

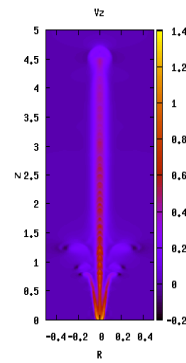


Σχήμα 10.18:  $V_\phi$  για  $v_z = 10^{-2}$   
και για  $t = 15$

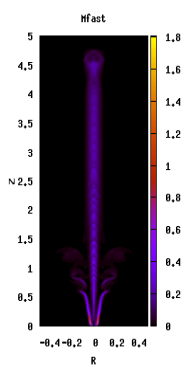
και εδώ η ροή είναι κυρίως υδροδυναμική. Στην επόμενη παράγραφο θα θεωρήσουμε ότι είμαστε ήδη σε super fast ταχύτητες και θα δούμε την διάδοση και αλληλεπίδραση του πίδακα με το περιβάλλον.



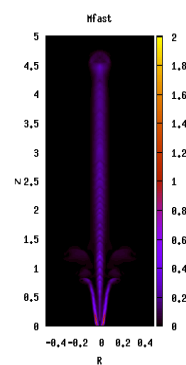
Σχήμα 10.19:  $V_z$  για  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$



Σχήμα 10.20:  $V_z$  για  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$



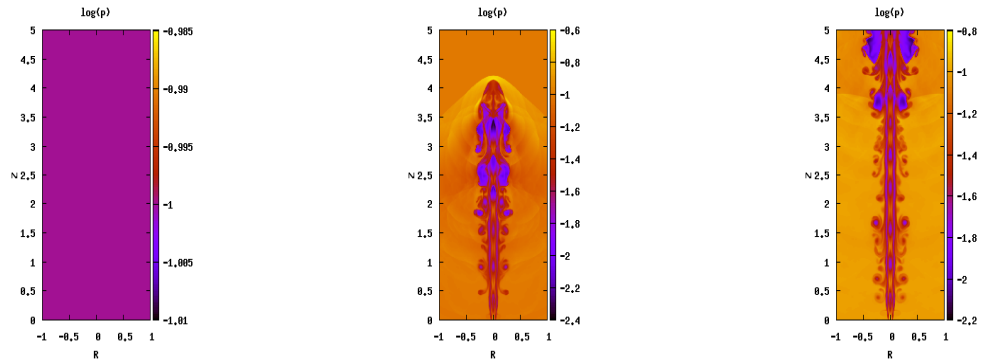
Σχήμα 10.21:  $M_{fast}$  για  $v_z = 10^{-4}$  και για  $t = 15$



Σχήμα 10.22:  $M_{fast}$  για  $v_z = 10^{-2}$  και για  $t = 15$

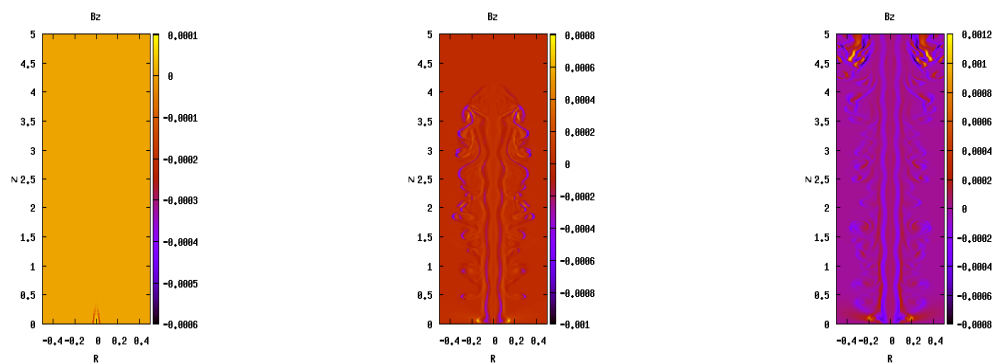
### 10.2.3 $v_z = 5$

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε την τελευταία προσομοίωση που εκτελέσαμε με τον κώδικα με αρχική ταχύτητα  $v_z = 5$  το οποίο όπως έχουμε ξανασχολιάσει είναι ήδη super fast και θα δούμε την συμπεριφορά του πίδακα μέσα στο περιβάλλον. Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση με την μεταβολή της πυκνότητας.

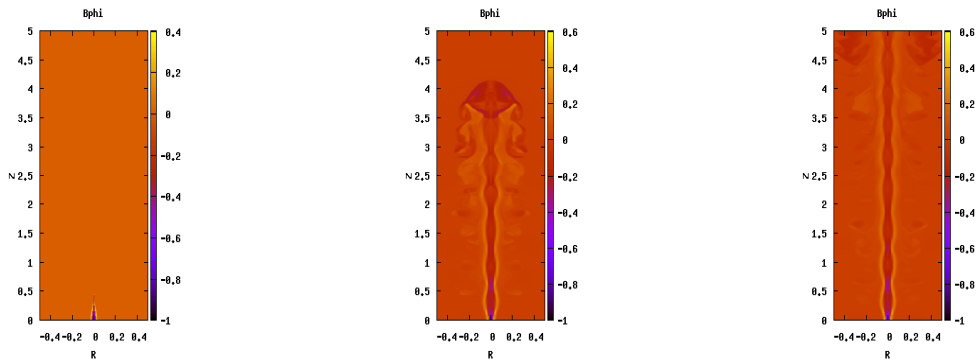


Σχήμα 10.23: Η πυκνότητα της ροής για χρόνους  $t = 0, t = 3.75, t = 7.5$

Όπως βλέπουμε και σε αυτήν την περίπτωση ο πίδακας είναι ευθυγραμμισμένος και εμφανίζονται πολλές αστάθειες στα πλάγια μόνο που τώρα φαίνονται να είναι διαφορετικής μορφής από αυτούς που είχαμε στο κεφάλαιο 9. Και πάλι βλέπουμε πως έχει σχηματιστεί το bow shock και το cocoon που περιβάλλει τον πίδακα. Αυτό που παρατηρεί κανείς είναι ότι η δομή του κεντρικού κομματιού θυμίζει λίγο το recollimation πίδακα που σχολιάσαμε στο κεφάλαιο 8 με την διαφορά ότι εδώ έχει και πολλές αστάθειες και δεν διακρίνεται τόσο καλά. Κάτι άλλο που αξίζει να σχολιάσουμε είναι ότι οι περισσότερες αστάθειες εμφανίζονται σε μεγαλύτερη ύψη όπως βλέπουμε ενώ αντίθετα σε χαμηλότερα ύψη οι αστάθειες είναι ελάχιστες. Να πούμε τέλος ότι διαλέξαμε να φτάσουμε μέχρι χρόνο  $t = 7.5$  διότι για μεγαλύτερους χρόνους ο πίδακας βγαίνει από τα όρια και δεν βλέπουμε κάτι αξιολογικό μετά. Στην συνέχεια θα δείξουμε την μεταβολή των μαγνητικών πεδίων  $B_z, B_\phi$ .

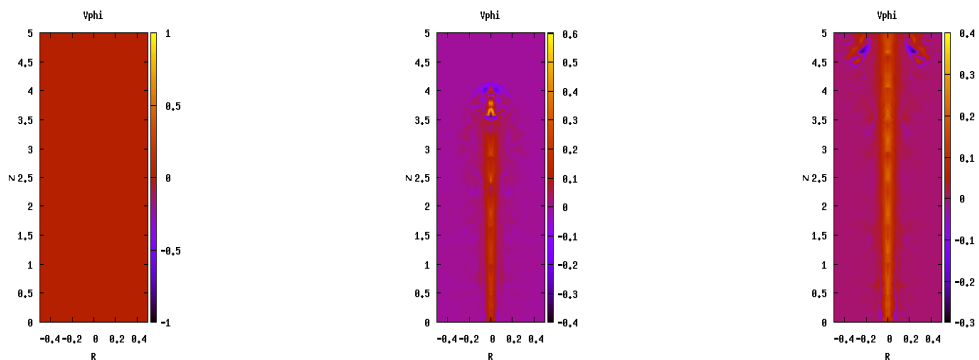


Σχήμα 10.24: Το μαγνητικό πεδίο  $B_z$  για χρόνους  $t = 0, t = 3.75, t = 7.5$



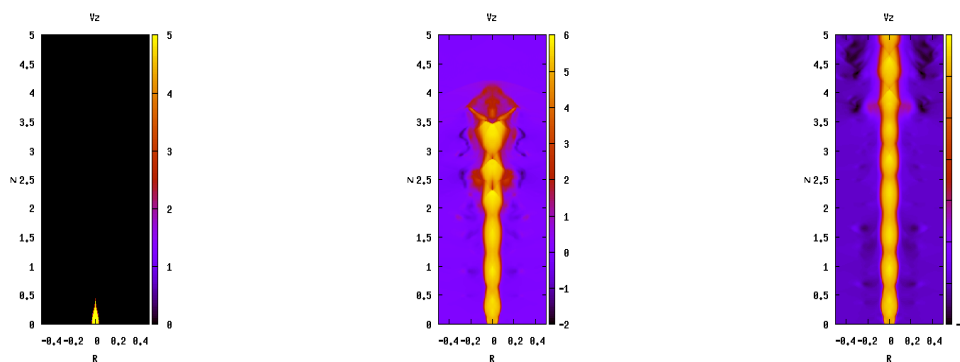
Σχήμα 10.25: Το μαγνητικό πεδίο  $B_\phi$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 3.75$ ,  $t = 7.5$

Όπως βλέπουμε το πεδίο  $B_z$  φαίνεται να έχει μια σωστή δομή με θετικές τιμές κοντά στον άξονα και αρνητικές πιο μακριά δηλαδή κρατάει την διπολικότητα που θέλουμε άλλα οι τιμές όπως και στις προηγούμενες προσομοιώσεις είναι πολύ κοντά στο μηδέν και να μην μπορούμε να βγάλουμε σαφή συμπεράσματα. Το πεδίο  $B_\phi$  κρατάει και αυτό την διπολική δομή και όπως στο κεφάλαιο 9 στην κορυφή έχει μεγάλες αρνητικές τιμές κάτι που δεν είναι τόσο εύκολο να εξηγηθεί καθώς όπως είπαμε και στην παράγραφο 9.2.3 δεν οφείλεται στην ταχύτητα  $V_\phi$ . Όπως προείπαμε και εδώ φαίνεται μια δομή που αντιστοιχεί σε recollimation πίδακα όπως επίσης βλέπουμε ότι οι πιο αρνητικές τιμές βρίσκονται εκεί που στενεύει ο πίδακας και έχει λογικά θα έχουμε και την μεγαλύτερη περιστροφική ταχύτητα το οποίο και οδηγεί περισσότερες δυναμικές γραμμές να τυλίγονται γύρω από τον άξονα. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι σε όλες τις προσομοιώσεις η βασική δομή των δυναμικών γραμμών στο κεντρικό κορμό δεν άλλαξε με εξαίρεση βέβαια τις περιοχές που είχαμε πολλές αστάθειες κάτι που δεν μπορούμε να το αποφύγουμε διότι οφείλονται σε αλληλεπιδράσεις των δύο ρευστών. Παρακάτω θα συνεχίσουμε με την μεταβολή της ταχύτητας  $V_z$  και της ταχύτητας  $V_\phi$ .



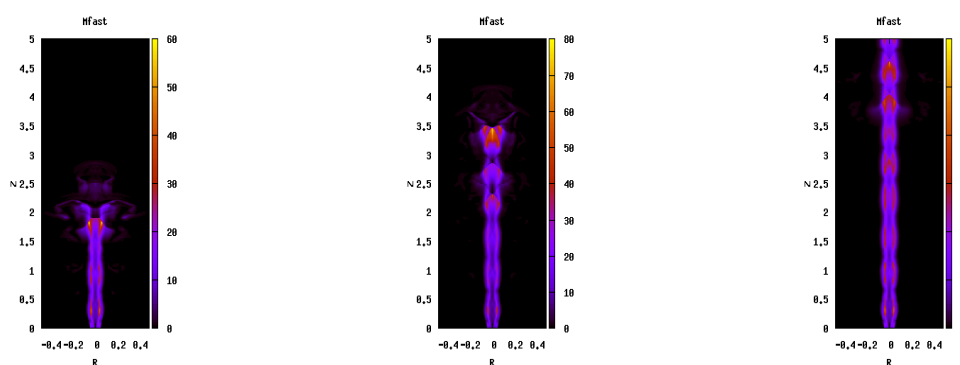
Σχήμα 10.26: Η περιστροφική ταχύτητα  $V_\phi$  για χρόνους  $t = 0$ ,  $t = 3.75$ ,  $t = 7.5$

Όπως βλέπουμε στα διαγράμματα για την περιστροφική ταχύτητα  $V_\phi$  οι τιμές είναι σχετικά μικρές και κυμαίνονται γύρω από το 0.1 οπότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι δεν επηρεάζουν πολύ το πρόβλημα και δεν ευθύνονται για τις αστάθειες. Κάτι άλλο



Σχήμα 10.27: Η πολοειδής ταχύτητα  $V_z$  για χρόνους  $t = 0, t = 3.75, t = 7.5$

που μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι ότι στην κορυφή υπάρχουν αρνητικές ταχύτητες δηλαδή η ταχύτητα αντιστρέφεται όπως και στην παράγραφο 9.2.3 και μια εξήγηση που είχαμε επιχειρήσει να δώσουμε σε εκείνο το κεφάλαιο είναι ότι εκεί οι δυναμικές γραμμές αντιστρέφονται ώστε να αρχίσουν να κατεβαίνουν προς την βάση οπότε για να γίνει αυτό πρέπει να αντιστραφεί η περιστροφική ταχύτητα. Από την άλλη στα διαγράμματα για την πολοειδή ταχύτητα βλέπουμε ότι ο κεντρικός κορμός έχει μια ταχύτητα κοντά στην αρχική τιμή δηλαδή περίπου 5 και στην κορυφή η ροή επιβραδύνεται λόγω του ότι βρίσκει αντίσταση από το περιβάλλον με αποτέλεσμα να συσσωρεύεται ύλη και να επιβραδύνει και έπειτα ύλη αρχίζει να πέφτει προς τα κάτω και φαίνεται εκεί που έχουμε αρνητικές ταχύτητες όπου και τελικά έχουμε τον σχηματισμό του λεγόμενου cocoon που περιβάλλει τον πίδακα. Θα τελιώσουμε το κεφάλαιο με την παρουσίαση του πλάσματος  $\beta$  και του αριθμού Mach όπου όπως είναι λογικό η ροή είναι ήδη super fast άρα δεν περιμένουμε κάτι διαφορετικό.

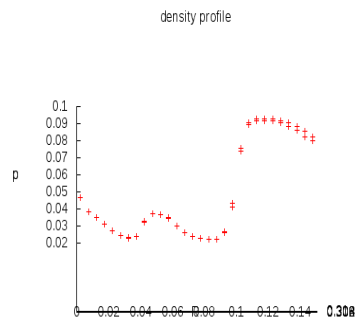


Σχήμα 10.28: Ο αριθμός Mach για χρόνους  $t = 2.25, t = 3.75, t = 7.5$

Όπως βλέπουμε στα διαγράμματα 10.59-10.62 επιβεβαιώνεται το γεγονός που είχαμε υποθέσει ότι η ροή είναι ήδη super fast αλλά όπως βλέπουμε στην κορυφή ο αριθμός Mach πέφτει κάτι που το περιμέναμε διότι εκεί όπως θυμόμαστε από τα διαγράμματα ταχύτητας αρχίζει και επιβραδύνει.

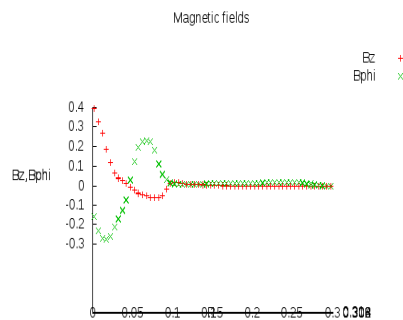
Όπως παρατηρούμε από τα διαγράμματα βλέπουμε ότι έχει μια δομή που θυμίζει ένα

recollimation πίδακα οπότε παρακάτω θα δούμε τα διαγράμματα για ένα ύψος  $Z = 0.3$  για την πυκνότητα και τα μαγνητικά πεδία τα οποία φαίνονται παρακάτω.



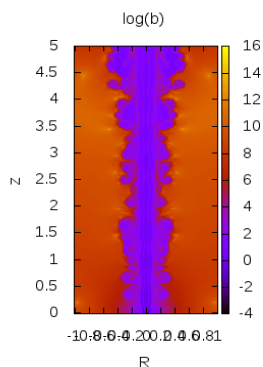
Σχήμα 10.29: Το προφιλ της πυκνότητας

Όπως βλέπουμε και εδώ έχουμε πολλές διαταραχές στην πυκνότητα και δεν φαίνεται καθαρά το ωστικό κύμα η το κύμα αραιώσης οπότε και δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι είναι recollimation πίδακας. Παρακάτω φαίνονται και τα μαγνητικά πεδία.



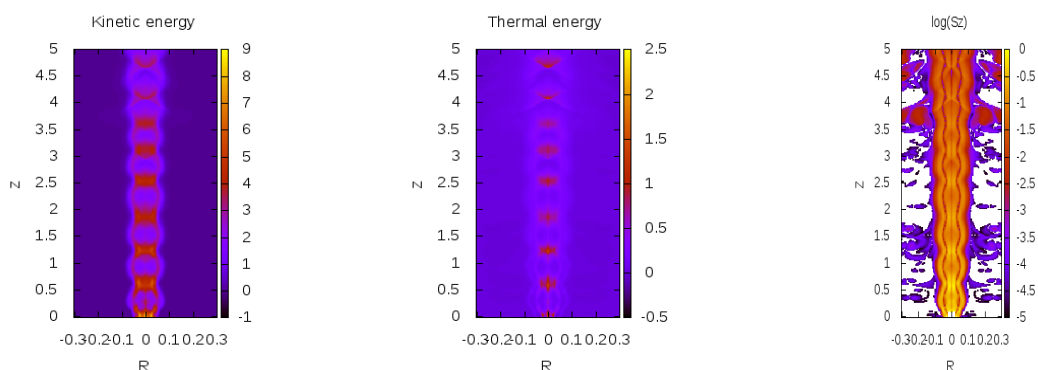
Σχήμα 10.30: Το προφιλ του μαγνητικού πεδίου

Στα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται καθαρά ότι τα μαγνητικά πεδία έχουν αντίθετη πολικότητα όπως το περιμέναμε και επίσης σε αυτήν την περίπτωση δεν εμφανίζεται η αύξηση της πυκνότητας εκεί που το πεδίο αλλάζει πρόσημο όπως στο κεφάλαιο 9.2.3 το οποίο είναι αρκετά περίεργο καθώς δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν είναι τυχαίο η όχι. Τέλος θα δείξουμε και την μεταβολή στο πλάσμα  $\beta$  καθώς και τις ενέργειες για να δούμε αν η ροή είναι υδροδυναμική.



Σχήμα 10.31: πλάσμα  $\beta$  για  $t = 15$

Όπως βλέπουμε και εδώ το πλάσμα  $\beta$  έχει πολύ μεγάλες τιμές οπότε και σε αυτήν την περίπτωση η ροή είναι κυρίως υδροδυναμική εκτός από μια στενή περιοχή κοντά στον άξονα που κυριαρχεί η μαγνητική πίεση. Αυτό που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι σε όλες τις προσομοιώσεις εκτός από την προσομοίωση του κεφαλαίου 8.3.3 οι πίδακες ενώ ξεκινάγανε σαν μαγνητοϋδροδυναμικοί, γρήγορα κυριαρχούσε η θερμική πίεση με αποτέλεσμα να γίνονται υδροδυναμικοί στο τέλος. Αυτό θα φανεί καλύτερα και παρακάτω με την παρουσίαση των ενεργειών που εμφανίζονται μέσα στον πίδακα,



Σχήμα 10.32: Στα διαγράμματα φαίνονται οι ενέργειες μόνο για το τελευταίο στιγμιότυπο

Όπως βλέπουμε επειδή είμαστε στην super fast περίπτωση ισχύει ότι  $M_{fast} > 1$  αρά όπως έχουμε πει η κινητική ενέργεια υπερیشχει της θερμικής. Αυτό όντως συμβαίνει διότι η κινητική ενέργεια παίρνει τιμές περίπου στο 6 εκεί που στενεύει ο πίδακας ενώ η θερμική είναι στο 1 στο ίδιο σημείο. Βεβαία η κινητική υπερνικά την θερμική ενέργεια και στον υπόλοιπο κορμό του πίδακα. Αυτό συμβαίνει διότι καθώς στενεύει ο πίδακας η επιφάνεια μειώνεται οπότε από διατήρηση μάζας το  $\rho u$  πρέπει να αυξηθεί οπότε για αυτό βλέπουμε να αυξάνονται και οι δύο ενέργειες. Αν διαιρέσουμε την ροή κινητικής ενέργειας και θερμικής με το γινόμενο  $\rho u$  θα καταλήξουμε στην σχέση  $\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = E$  που είναι ουσιαστικά η εξίσωση Bernoulli οπότε για να μένει σταθερή πρέπει αν αυξάνεται η κινητική ενέργεια να μειώνεται η θερμική. Τέλος βλέπουμε ότι μαγνητική ενέργεια στον άξονα κοντά στο μηδέν έχει μεγάλες τιμές έπειτα μειώνεται και



αυξάνει ξανά εκεί που στενεύει ο πίδακας και αυτό γίνεται περιοδικά. Βεβαία η μέγιστη τιμή της μαγνητικής ενέργειας είναι κατά πολύ μικρότερη των άλλων δύο ενεργειών. Με αυτά τα διαγράμματα τελειώνουμε το κεφάλαιο και κατ' επέκταση την εργασία όπου πλέον παρουσιάσαμε όλες τις προσομοιώσεις που εκτελέσαμε με τον κώδικα PLUTO. Στον επίλογο θα γράψουμε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε για το μοντέλο Duncce's Cap.

# Κεφάλαιο 11

## Συμπεράσματα-Επίλογος

Κλείνοντας αυτήν την εργασία θα κάνουμε μια μικρή ανασκόπηση και θα γράψουμε τα συμπεράσματα που καταλήξαμε. Αρχικά ξεκινήσαμε με τα θεωρήματα της μαγνητοστατικής χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις του Lynden-Bell χωρίς να λύσουμε την Transfield εξίσωση και καταλήξαμε σε μια πρώτη εικόνα για το εσωτερικό των πίδακων θεωρώντας επίσης ότι μέσα στον πίδακα κυριαρχεί μόνο το μαγνητικό πεδίο οπότε και ισχύει η προσέγγιση της force-free. Στην συνέχεια θεωρήσαμε ότι ο δίσκος προσαύξησης περιστρέφεται σαν στερεό σώμα οπότε και η Transfield απλοποιείται σημαντικά δίνοντας μας μια υπεραπλουστευμένη εικόνα για μια απλοποιημένη εκδοχή του πίδακα. Στο κεφάλαιο 5 θεωρήσαμε την πλήρη μορφή της θεωρίας του Lynden-Bell όπου πλέον ο δίσκος περιστρέφεται διαφορικά με αποτέλεσμα οι δυναμικές γραμμές που έχουν το σχήμα κλειστών loop γραμμών να αρχίζουν να συστρέφονται και όλη αυτή η δομή να φουσκώνει όπου και δείξαμε δύο παραδείγματα για κεντρικό δίπολο και για νόμο δύναμης. Βέβαια όλα αυτά έγιναν με προσεγγίσεις και όχι αναλυτικά. Τέλος στο κεφάλαιο 6 παρουσιάσαμε κάποιες αναλυτικές λύσεις της Transfield όπου προκύπτουν σαν λύσεις οι Bessel καθώς και το μοντέλο Duncce's Cap. Αυτές οι δύο λύσεις είναι οι μόνες γνωστές αναλυτικές λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας θέλαμε να προσομοιώσουμε τις ιδέες του Lynden-Bell με την βοήθεια του κώδικα PLUTO όπου θεωρούμε ότι τα μαγνητικά πεδία είναι αυτά που προκύπτουν από το μοντέλο Duncce's Cap και παρουσιάζουμε στα κεφάλαια 8-11 τα αποτελέσματα για διάφορα προφίλ πυκνοτήτων και για διάφορες ταχύτητες. Στο κεφάλαιο 8 θεωρήσαμε ότι ο πίδακας είναι πιο πυκνός από το περιβάλλον ενώ στο κεφάλαιο 9 θεωρήσαμε το αντίθετο. Τέλος στο κεφάλαιο 10 θεωρήσαμε ότι είναι ίσα. Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι:

1. Στην περίπτωση που η πυκνότητα του πίδακα είναι 10 και του περιβάλλοντος 0.1 καθώς και όταν είμαστε αρχικά σε sub fast ταχύτητες τότε παρατηρούμε ότι η ροή αν και επιταχύνεται δεν μπορεί να φτάσει σε super fast ταχύτητες αλλά ο αριθμός Mach φτάνει μέχρι το 0.5 χωρίς να μπορεί να ξεπεράσει το 1. Συνεπώς το μοντέλο Duncce's Cap δεν είναι καλό για να μελετήσουμε επιτάχυνση ροών αλλά πολύ πιθανόν να είναι καλές λύσεις αν θέλουμε να κάνουμε μαγνητική επανασύνδεση.

2. Στην περίπτωση που αρχικά έχουμε μια super fast ταχύτητα τότε η δομή του πίδακα είναι ενός recollimation πίδακα όπου βλέπουμε και την περιοδικότητα και φτάνει στο τέλος σε μια κατάσταση ισορροπίας. Όπως είδαμε μέσα στον πίδακα έχουμε την εμφάνιση ενός κύματος αραιώσης όπου εκεί έχουμε και επιτάχυνση καθώς και την εμ-

φάνιση ενός ωστικού κύματος όπου έχουμε την αύξηση της πυκνότητας και πίεσης. Φυσικά επειδή το κάναμε τεχνητά αυτή η λύση αντιπροσωπεύει έναν πίδακα που έχει επιταχυνθεί με κάποιον τρόπο και εμείς απλά κοιτάμε την διάδοση και την αλληλεπίδραση με τον μεσοαστρικό χώρο.

3. Στο κεφάλαιο 9 θεωρήσαμε ότι η πυκνότητα του πίδακα είναι 0.1 ενώ του περιβάλλοντος 1 και ξεκινώντας με μικρές ταχύτητες αν και έχουμε επιτάχυνση η ροή δεν μπορεί να φτάσει τον αριθμό Mach ούτε καν κοντά στο 1 και σταματάει περίπου στο 0.2. Οι λύσεις αυτές είναι εντελώς ακατάλληλες για επιτάχυνση ροής σε ενεργούς γαλαξίες για παράδειγμα. Μια μεγάλη διαφορά με τις λύσεις του κεφαλαίου 8 είναι ότι εδώ δεν εμφανίζονται αστάθειες κάτι που οφείλονται στο ότι το περιβάλλον είναι πιο βαρύ και δεν μπορεί η περιστροφή να σπρώξει ύλη προς τα πλάγια.

4. Στην περίπτωση που ξεκινάμε με μεγάλη ταχύτητα τότε ο πίδακας εμφανίζεται αρκετά ευθυγραμμισμένος με πολλές αστάθειες που δεν οφείλονται στην περιστροφή ενώ επίσης επειδή η ροή στην κορυφή βρίσκει αντίσταση υλικό γυρνάει προς τα πίσω και δημιουργείται το cocoon που περιβάλλει τον πίδακα.

5. Στο τελευταίο κεφάλαιο θεωρήσαμε ότι η πυκνότητα και του πίδακα και του περιβάλλοντος είναι ίδια και πάλι όταν ξεκινάμε με μικρές ταχύτητες η ροή αν και επιταχύνεται δεν μπορεί να γίνει ποτέ super fast ενώ έχουμε και πάλι την εμφάνιση ασταθειών.

6. Όταν ξεκινάμε με μεγάλη ταχύτητα έχουμε και πάλι την εμφάνιση ασταθειών αλλά είναι διαφορετικής μορφής από του κεφαλαίου 9. Και πάλι έχουμε την εμφάνιση του cocoon όπως παρατηρούμε από τις εικόνες.

7. Τέλος όπως είδαμε από όλες τις προσομοιώσεις ενώ ξεκινάγαμε με το μαγνητικό πεδίο να κυριαρχεί έπειτα από κάποιο χρονικό διάστημα όλη η μαγνητική ενέργεια μετατράπηκε σε θερμική αντί για κινητική ώστε να επιταχύνει το ρευστό οπότε και η ροή έγινε υδροδυναμική όπως φαίνεται από το πλάσμα β.

8. Ένα γενικό συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι ότι το μοντέλο Duncce's Cap δεν είναι κατάλληλο για αυτούς που θέλουν να κάνουν επιτάχυνση ροής άλλα από την άλλη αν ξεκινήσουμε με μεγάλες ταχύτητες δίνει ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Δυστυχώς εκτός από την προσομοίωση του κεφαλαίου 8.3 όλες οι άλλες γίνονται υδροδυναμικές οπότε και δεν μπορούν να εφαρμοστούν εύκολα σε αστροφυσικούς πίδακες

Μελλοντικές δουλειές που μπορούν να γίνουν είναι να δοκιμαστούν και οι λύσεις με τις Bessel που δείξαμε στο κεφάλαιο 6 όπου και αυτές είναι αναλυτικές λύσεις της Transfield. Κάτι άλλο που μπορεί να γίνει είναι να μην έχουμε αρχικά τον πίδακα σε ισορροπία αλλά να τον θεωρήσουμε συμπιεσμένο και να βλέπαμε αν θα μπορούσαν να δημιουργηθούν recollimation πίδακες. Επίσης θα μπορούσαν να δοκιμαστούν λύσεις σε σχετικιστικές ταχύτητες αν θέλουμε να προσομοιώσουμε πίδακες από ενεργούς γαλαξίες. Τέλος θα μπορούσαμε αντί για ιδανική MHD να βάζαμε resistivity για να δούμε αν μπορούν αυτές οι λύσεις να ισχύουν στην περίπτωση της μαγνητικής επανασύνδεσης και αν θα μπορούν να επιταχύνουν την ροή μέσω φύλλου ρεύματος αντί για ωστικά κύματα .

# Βιβλιογραφία

- [1] Baade W.. *Polarization in the jet of M87* . 1956, ApJ, 123, 550.
- [2] Birkinshaw M.. *Kelvin-Helmholtz instability for relativistic particle beams-I. Stability analysis in the time and space domains for vortex-sheet flows* . 1984, MNRAS, 208, 887.
- [3] Blandford R. D. and Rees M. J.. *A 'twin-exhaust' model for double radio sources* . 1974, MNRAS, 169, 395.
- [4] Blandford R. D. and Payne D. G.. *Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets* . 1982, MNRAS, 199, 883.
- [5] Bodo G., Massaglia S., Ferrari A., and Trussoni E.. *Kelvin-Helmholtz instability of hydrodynamics supersonic jets* . 1994, A&A, 283, 655.
- [6] Casadio C., Gomez L., Giroletti M. et al *A sensitive study of the peculiar jet structure HST-1 in M87* . 2013, EPJ Web Conf. 61 .
- [7] Contopoulos J., Lovelace R. V. E. *Magnetically driven jets and winds: Exact solutions* . 1992, ApJ, 429, 139 .
- [8] Curtis H. D.. *Descriptions of 762 Nebulae and Clusters Photographed with the Crossley Reflector* . 1918, Publ. Lick. Obs., 13, 31.
- [9] Doosoo Yoon, Andrzej A. and Hentz S.. *Formation of recollimation shocks in jets of high-mass X-ray binaries* . 2016, MNRAS, 456, 3638.
- [10] Giroletti M., Hada M., Giovannini K. et al *The kinematic of HST-1 in the jet of M87* . 2012, A&A, 538, L10 .
- [11] Gracia J. & Tsinganos K., Bogolanov S. V.. *Magnetic collimation of the relativistic jet in M87*. 2005, A&A, 442, L7.
- [12] Hoyle F., Burbidge G. R, Sargent W. L. W *On the Nature of the Quasi-stellar Sources* . 1966, Nat, 209, 751 .
- [13] Komissarov S., Vlahakis N. and Konigl A. *Rarefaction acceleration of ultra-relativistic magnetized jets in gamma-ray burst sources* . 2010, MNRAS, 407, 17.
- [14] Lynden-Bell D., Boily C. . *Self-similar solutions up to flashpoint in highly wound magnetostatics* . 1994, MNRAS, 267, 146.

- [15] Lynden-Bell D. . *Magnetic collimation by accretion discs of quasars and stars* . 1996, MNRAS, 279, 389.
- [16] Lynden-Bell D. . *Why do disks form jets* . 2001, ASP conference series, 249 .
- [17] Lynden-Bell D. . *On why disks generate magnetic towers and collimate jets* . 2003, MNRAS, 341, 1360 .
- [18] Lynden-Bell D. . *Magnetic jets from swirling disks* . 2006, MNRAS, 369, 1167 .
- [19] Matsakos T., Tsinganos K., Vlahakis N., Massaglia, Mignone A., Trussoni E. *Two-component jet simulations I: Topological stability of analytical MHD outflow solutions* . 2008, A&A, 477, 52.
- [20] Mignone, G. Bodo et al. *PLUTO: A numerical code for computational astrophysics* . 2007, ApJ, 170, 228.
- [21] Mizuno Y., Hardee P. et al. *A MHD boost for relativistic jets* . 2008, ApJ, 672, 72.
- [22] Mizuno Y., Jose L. Gomez et al. *Recollimation shock in magnetized relativistic jets* . 2015, ApJ, 809, 38.
- [23] Norman L. Michael, Winkler Karl-Heinz. *Supersonic jets* . Los Alamos, 1985.
- [24] Perucho M. and Lobanov A. P.. *Kelvin-Helmholtz modes revealed by the transversal structure of the jet in 0836+710*. 2008, ASP conference series, Vol. 336, 381.
- [25] Elisabete M. de Gouveia Dal Pino. *Astrophysical jets and outflows*. 2004, ASP, 35, 5.
- [26] Rees M. J.. *Studies in Radio Source Structure: I. A Relativistically Expanding Model for Variable Quasi-stellar Radio Sources*. 1967, MNRAS, 135, 345.
- [27] Sapountzis K. and Vlahakis N.. *Rarefaction acceleration in magnetized gamma-ray burst jets*. 2013, MNRAS, 434, 1779.
- [28] Sauty C. and Tsinganos K.. *Nonradial and nonpolytropic astrophysical outflows III. A criterion for the transition from jets to winds*. 1994, A&A, 287, 893.
- [29] Scheuer P.. *Models of Extragalactic Radio Sources with a Continuous Energy Supply from a Central Object* . 1974, MNRAS, 166, 513.
- [30] Tsinganos K.. *Magnetohydrodynamic equilibrium. I - Exact solutions of the equations*. 1981, ApJ, 245, 764.
- [31] Tsinganos K.. *Theory of MHD jets and outflow*. 2007, Lect. Notes phys, 723, 117.
- [32] Vlahakis N. & Tsinganos K.. *Systematic construction of exact MHD models for astrophysical winds and jets*. 1998, MNRAS, 298, 777.
- [33] Vlahakis N. & Tsinganos K., Sauty K., Trussoni C.. *A disc wind model with correct crossing of all MHD critical surfaces*. 2000, MNRAS, 318, 417.

- [34] Vlahakis N. . *Output from MHD models*. 2010, Lect. Notes phys, 793, 51.
- [35] Αντωνοπούλου Ε., Κονιζά Μ., Μαστιχιάδης Απόστολος. *Αστρικά Συστήματα και Γαλαξίες*. Ε.Κ.Π.Α, 2015.
- [36] Μαστιχιάδης Απόστολος, Βλαχάκης Νεκτάριος. *Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών*. Ε.Κ.Π.Α, 2010.
- [37] Τσίγκανος Χ. Κανάρης. *Αστροφυσική Πλάσματος*. Αθήνα, 2015.