



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος στα σχολικά εγχειρίδια
μαθηματικών Κύπρου και Ελλάδας για τις τρεις τελευταίες τάξεις του
Δημοτικού Σχολείου

Καραπάνου Ελένη
Δ 2016-16

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Γεώργιος Ψυχάρης

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα ΕΚΠΑ

Αθήνα
Ιανουάριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την *Πέμπτη 23/01/2020* από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Γιώργος Ψυχάρης	▪ Επίκ. Καθηγητής Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ
▪ Χρυσανγή Τριανταφύλλου	▪ Επίκ. Καθηγήτρια Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ
▪ Δέσποινα Πόταρη,	▪ Καθηγήτρια Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Μάριος Πιττάλης	▪ Δρ στη Διδακτική των Μαθηματικών, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής Πανεπιστήμιο Κύπρου
▪ Γιώργος Ψυχάρης	▪ Επίκ. Καθηγητής Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ
▪ Δέσποινα Πόταρη,	▪ Καθηγήτρια Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο διάστημα μεταξύ Ιουνίου 2019 με Ιανουαρίου 2020 στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών "Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών" του Μαθηματικού Τμήματος του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως τον καθηγητή μου Πιττάλη Μάριο, Δρ στη Διδακτική των Μαθηματικών, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής Πανεπιστημίου Κύπρου, για την σημαντική στήριξη και καθοδήγηση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της συγγραφής του έργου.

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου Ψυχάρη Γεώργιο, Επίκ. Καθηγητής Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ για την υποστηρικτική συμβολή του και για το υπέροχο κλίμα συνεργασίας που αναπτύχθηκε, καθώς τα μέλη της επιτροπής, Τριανφυλλού Χρυσανγή, Επίκ. Καθηγήτρια Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ και Πόταρη Δέσποινα, Καθηγήτρια Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ.

Επίσης, ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω σε όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών, που μου έδωσαν την ευκαιρία να εμβαθύνω τις γνώσεις μου και να επιμορφωθώ με τον μέγιστο δυνατό τρόπο στην επιστήμη της Διδακτικής και της Μεθοδολογίας των Μαθηματικών.

Ωστόσο, αυτό το έργο δε θα ήταν εφικτό χωρίς της υποστήριξη των γονιών μου που με ώθησαν στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση και μέχρι σήμερα στέκονται δίπλα μου στο εγχείρημα αυτό.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ :

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ	7
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : Μαθηματικά Εγχειρίδια	9,12
1.1 Η λειτουργικότητα των μαθηματικών εγχειριδίων.	9,11
1.2 Τα μαθηματικά σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) στην Ελλάδα.	11,12
1.3 Τα μαθηματικά σύμφωνα με το Εκπαιδευτικό Υλικό Δημοτικής Εκπαίδευσης του Υπουργείου Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας της Κύπρου.	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	13,44
2.1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση Εισαγωγή.	13,14
2.2 Λειτουργικότητα και εκτεταμένη χρήση των εγχειριδίων.	14, 16
2.3 Καθορισμός διδακτικού περιεχομένου και στόχων.	16,17
2.4 Σύνοψη των εφαρμογών των εγχειριδίων.	18
2.5 Ιστορική Αναδρομή.	18,19
2.6 Τα νέα προγράμματα σπουδών, τα νέα βιβλία Μαθηματικών και η φιλοσοφία τους.	20,22
<i>Νέα προσέγγιση στην διδασκαλία των Μαθηματικών-Μαθηματικά Προβλήματα</i>	
2.7 Μεθοδολογική προσέγγιση των μαθηματικών εγχειριδίων – Σκοποί και στόχοι.	22,23
2.8 Διδακτικό Περιεχόμενο των νέων Βιβλίων του Ελληνικού Δημοτικού Σχολείου.	24,25
<i>Η χρησιμότητα του Μαθηματικού Προβλήματος</i>	
2.9 Η επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων ως τρόπος κατανόησης των Μαθηματικών.	26,27
2.10 Τι είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα;	27,28
2.11 Στρατηγικές Επίλυσης Μαθηματικού Προβλήματος.	29,31
2.12 Τύποι μαθηματικών προβλημάτων.	31,44
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : Μεθοδολογία	45,50
3 Περιγραφή-Ερευνητικά Ερωτήματα.	45,50
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο : Αποτελέσματα	51,108
4.1 Μαθηματικά προβλήματα των Μαθηματικών Εγχειριδίων της Δ' Δημοτικού της Ελλάδας και της Κύπρου.	52,58

4.1.α Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων Ελλάδας και Κύπρου για τη Δ΄ Δημοτικού.	58,65
4.2 Μαθηματικά προβλήματα των Μαθηματικών Εγχειριδίων της Ε΄ Δημοτικού της Ελλάδας και της Κύπρου.	66,72
4.2.β Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων Ελλάδας και Κύπρου για τη Ε΄ Δημοτικού.	72,76
4.3 Μαθηματικά προβλήματα των Μαθηματικών Εγχειριδίων της ΣΤ΄ Δημοτικού της Ελλάδας και της Κύπρου.	77,82
4.3.γ Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων Ελλάδας και Κύπρου για τη Στ΄ Δημοτικού.	82,85
4.4.α Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων της Κύπρου ανά τάξη	86
4.4.β Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων της Ελλάδος ανά τάξη	87,104
4.5 Διαφορές Ελλάδας-Κύπρου ως προς το περιεχόμενο-πλαίσιο των προβλημάτων	104,108
Συζήτηση	109,114
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : Επίλογος	115,118
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	119,124
ΔΙΚΤΥΟΓΡΑΦΙΑ	125

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

Ε.Π.Π.Σ. = Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών

Δ. Ε. Π. Π. Σ. = Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών

Α.Π.Σ. = Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία θα εστιάσει στα εγχειρίδια μαθηματικών που αφορούν τις τάξεις του Δημοτικού (Δ, Ε, ΣΤ) για τις δύο χώρες ξεχωριστά και θα επισημανθεί η σημαντικότητα των μαθηματικών προβλημάτων, ως προς την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης από τους μαθητές. Επιπλέον, θα τονιστούν οι λόγοι για τους οποίους γίνεται εκτεταμένη χρήση των συγκεκριμένων εγχειριδίων και θα καθοριστεί η συχνότητα με την οποία χρησιμοποιούνται. Η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων θα στοχεύει ως προς συγκεκριμένη μαθηματική πρακτική, την επίλυση προβλήματος. Επιπρόσθετα, είναι σημαντικό να αναλυθεί η θέση, ότι τα εκπαιδευτικά συστήματα της Κύπρου και της Ελλάδας είναι συγκεντρωτικά και τα βασικά σχολικά εγχειρίδιά εξυπηρετούν όλα τα σχολεία.

Σκοπός της εν λόγω εργασίας, είναι η ανίχνευση και ανεύρεση των διαφόρων και διαφορετικών τύπων προβλημάτων, καθώς και η ταξινόμηση και κατηγοριοποίησή τους, η οποία θα βασιστεί σε συγκεκριμένους τρόπους αναλογικά με τον τύπο κάθε προβλήματος. Επιπλέον, θα επιχειρηθεί η σύγκριση των διδακτικών εγχειριδίων των μαθηματικών των δύο χωρών, Ελλάδα και Κύπρου, ως προς την επίλυση του προβλήματος.

Στο κύριο μέρος θα γίνει εκτενής ανάλυση κάθε είδους προβλημάτων, κάθε τάξης και κάθε σχολικού εγχειριδίου και των δύο χωρών (Κύπρου και Ελλάδας) και θα βρεθούν τα κοινά χαρακτηριστικά τους, καθώς και οι ομοιότητες και οι διαφορές ανάμεσα στις διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων. Επιπλέον, θα εξεταστεί η στρατηγική – τεχνική – δραστηριότητα, η οποία χρησιμοποιείται από τους μαθητές μέχρι σήμερα προκειμένου να επιλυθούν. Στο σημείο αυτό θα εξεταστούν τα χαρακτηριστικά των διαφορετικών ειδών των προβλημάτων και θα ακολουθήσει η ανάλυση – ανάπτυξη τους. Στη συνέχεια, θα περιγραφεί η μεθοδολογία που θα ακολουθηθεί και εκτενέστερα η ανάλυση και η συζήτηση των αποτελεσμάτων. Τέλος, θα καταγραφούν τα συμπεράσματα.

Λέξεις-Κλειδιά: εγχειρίδια, μαθηματικό πρόβλημα,, αναλυτικά προγράμματα, επίλυση προβλήματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κεφάλαιο 1^ο : Μαθηματικά Εγχειρίδια

1.1 Η λειτουργικότητα των μαθηματικών εγχειριδίων.

Τα μαθηματικά εγχειρίδια αποτελούν σημαντικό μέρος για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αλλά και τη δευτεροβάθμια. Στην παρούσα εργασία, όμως, θα επικεντρωθούμε στα εγχειρίδια μαθηματικών, τα οποία αφορούν στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και μάλιστα τις τάξεις Δ', Ε' και ΣΤ' των δημοτικών σχολείων της Ελλάδας και της Κύπρου. Ο κύριος ρόλος των εγχειριδίων είναι να δημιουργήσουν ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο διδασκαλίας, το οποίο θα ορίζει : τι θα διδαχτεί, σε ποιον, πότε, πόση διάρκεια θα έχει η διδασκαλία του συγκεκριμένου πεδίου και με ποιον τρόπο θα γίνει (Nickol & Crespo, 2006).

Εξειδικευμένα κείμενα καθορίζουν το προτεινόμενο και θεσμοθετημένο πρόγραμμα σπουδών, καθώς σε πολλά σχολεία είθισται να τηρείται η εφαρμογή του με τόσο πιστό τρόπο, ώστε σε κάποιες περιπτώσεις να μην είναι εν τέλει λειτουργικό, καθώς οι μαθητές παρόλο που περνούν μεγάλο μέρος από τον χρόνο τους σε αίθουσες διδασκαλίας, ή κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας, ή των εργασιών στο σπίτι, με τέτοιου είδους εγχειρίδια δυσκολεύονται τελικά να τα κατανοήσουν (Apple, 1992; Nickol & Crespo, 2006; Goodlad, 1984; Schmidt et al., 2002).

Ακόμα πιο σύνθετα στη χρήση τους είναι τα εγχειρίδια των μαθηματικών, αφού αποτελούν το πιο περίπλοκο κομμάτι στην εκπόνηση των μαθηματικών, καθώς είναι πολύ αυστηρά με την αλληλουχία και την διαδικασία της διδασκαλίας και της εκπόνησης των εργασιών από τους μαθητές, αλλά και τον τρόπο διδασκαλίας από τους δασκάλους, περιορίζοντας με αυτόν τον τρόπο τη δημιουργικότητα και την φαντασία και των δύο πλευρών. Αυτό ισχύει σε πολλά μέρη του κόσμου, όμως η εστίαση της συγκεκριμένης εργασίας θα είναι στα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας και της Κύπρου (Nickol & Crespo, 2006).

Παρότι τα σχολικά εγχειρίδια έχουν κυρίαρχο ρόλο στις σχολικές τάξεις και ιδιαίτερα τα εγχειρίδια των μαθηματικών, δεν έχει δοθεί η ανάλογη σημασία στον ρόλο που μπορεί να έχουν στην προετοιμασία του δασκάλου, τη συνοχή του διδακτικού υλικού και τη σημασία που μπορεί να έχουν στην προσωπική ανάπτυξη του

εκπαιδευτικού σε θέματα διδασκαλίας και μεταδοτικότητας των μαθηματικών προς τους μαθητές τους.

Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι το διδακτικό υλικό του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών έχει γίνει πλείστες φορές αντικείμενο σημαντικών συζητήσεων, ενώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υποστήριξη καινοτομιών των προγραμμάτων διδασκαλίας μαθηματικών και της εκπαίδευσης παράλληλα των εκπαιδευτικών (Ball & Cohen, 1996;Remillard, 2000;Apple, 1992;Ma, 1999). Μια βιβλιογραφική ανασκόπηση επί του θέματος θα μας δείξει ότι ορισμένες έρευνες για το διδακτικό υλικό των προγραμμάτων διδασκαλίας των μαθηματικών έχουν επικεντρωθεί στην περιγραφή του περιεχομένου των κειμένων (Schmidt et al., 2002), ή στο πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα κείμενα για την προώθηση μιας εκπαιδευτικής αλλαγής (Rickard et al., 1996).

Για παράδειγμα, σε άρθρο υποστηρίζεται από το συγγραφέα ότι τα κείμενα προσφέρουν ευκαιρίες στους εκπαιδευτικούς να ασχοληθούν με μια κριτική ανάλυση των οικονομικών, πολιτικών και κοινωνικών πεπραγμένων της αληθινής κοινωνίας μέσα και έξω από την τάξη, βοηθώντας με αυτόν τον τρόπο τους εκπαιδευτικούς να κατασκευάσουν και να κτίσουν εκ νέου το υλικό της διδακτέας ύλης (Apple, 1992).

Οι υποστηρικτές αυτής της θέσης, της εφαρμογής, δηλαδή, των μαθηματικών σε πρακτικά ζητήματα της καθημερινότητας, υποστηρίζουν ότι η κριτική ανάλυση των κειμένων κάνει τους εκπαιδευτικούς επαγγελματικά αυτόνομους. Μέσω της συνειδητοποίησης των κοινωνικών και πολιτικών πλαισίων του τρόπου και της γνώσης που εκπροσωπείται στα κείμενα, οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να απελευθερωθούν από την «τυραννία» των εγχειριδίων και να μπορούν να διερευνήσουν τη δυναμική αξία των κειμένων σε κείμενα που οι ίδιοι θα επιλέξουν, θα προσαρμόσουν και θα διαφοροποιήσουν – αναπτύξουν σύμφωνα με τις ανάγκες τους, αλλά και σύμφωνα με τις ανάγκες της τάξης τους (Nickol & Crespo, 2006). Ενώ άλλοι δηλώνουν ότι τα υλικά του προγράμματος σπουδών μπορούν να συμβάλουν στη μάθηση των εκπαιδευτικών, ειδικά όταν τα κείμενα έχουν σχεδιαστεί με τέτοιο σκοπό (Ball & Cohen, 1996;Remillard, 2000).

Ενδιαφέροντα ερωτήματα μπορούν να τεθούν από την εξέταση της χρήσης των εγχειριδίων ενδοσχολικά, αλλά και στην εξωσχολική τους χρήση, την ώρα της

προετοιμασίας του δασκάλου για το μάθημα της επόμενης ημέρας, ή την προετοιμασία των μαθητών και τη λύση των ασκήσεων. Πώς διδάσκουν οι δάσκαλοι της δημοτικής εκπαίδευσης τα μαθηματικά; Χρησιμοποιούν σε μεγάλο βαθμό τα εγχειρίδια; Μπορούν και σε ποιο βαθμό να συμμετάσχουν σε μια ανάλυση του διδακτικού υλικού του προγράμματος σπουδών; Σε αρχικά στάδια διδασκαλίας και χωρίς εκτεταμένη διδακτική εμπειρία, οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν έχουν ακόμη αναπτύξει τις γνώσεις που χρειάζονται για να δώσουν στους μαθητές τους, τη γνώση που μπορούν να αξιοποιήσουν εντατικά και με νόημα στα μετέπειτα χρόνια διδασκαλίας τους. Όπως επίσης, αδυνατούν να αντλήσουν οι ίδιοι, στο μέγιστο βαθμό, από τα εγχειρίδια αυτό που τους προσφέρουν (Nickol & Crespo, 2006).

Επιπλέον, θα ήταν καλό να εστιάσουμε στην ανάλυση των προγραμμάτων σπουδών από την προοπτική της αυτονομίας τους, η οποία μπορεί να δώσει την εντύπωση στους νεότερους δασκάλους, ότι η καλή διδασκαλία απαιτεί την ανάπτυξη και τη δημιουργία μαθημάτων, τα οποία δεν έχουν, ή δεν χρειάζονται εγχειρίδιο (Ball & Feiman–Nemser, 1988). Αυτό όμως που σημειώνουν οι Ball and Cohen το 1996, είναι ότι η δυναμική δύναμη των σχολικών βιβλίων δεν χρησιμοποιείται χρηστικά, ως πόρος διδακτέας ύλης για τη μάθηση των εκπαιδευτικών (Nickol & Crespo, 2006).

1.2 Τα μαθηματικά σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ. Ε. Π. Π. Σ.) στην Ελλάδα.

Σύμφωνα με το Δ. Ε. Π. Π. Σ. της Ελλάδας και τα Φ. Ε. Κ. 303B/13-03-2003 και 304B/13-03-2003 ο σκοπός της διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών, εντάσσεται στους γενικότερους σκοπούς της Εκπαίδευσης και αφορά τη συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή και της μαθήτριας και την επιτυχή κοινωνική ένταξή τους, εφόσον τα Μαθηματικά: Ασκούν το μαθητή και τη μαθήτρια στην μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, την αφαίρεση, γενίκευση, εφαρμογή, κριτική και στις λογικές διεργασίες και τον διδάσκουν να διατυπώνει τα διανοήματά του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια. Αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη, καλλιεργούν την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου

και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα. Είναι απαραίτητα στην καθημερινή ζωή και ιδιαίτερα στο χώρο εργασίας αλλά και για την ανάπτυξη και εξέλιξη των άλλων επιστημών και ιδιαίτερα της Τεχνολογίας, της Οικονομίας και των Κοινωνικών Επιστημών.

1.3 Τα μαθηματικά σύμφωνα με το Εκπαιδευτικό Υλικό Δημοτικής Εκπαίδευσης του Υπουργείου Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας της Κύπρου.

Σύμφωνα, λοιπόν, με το Υπουργείο Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας της Κύπρου, το Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών έχει ως κύριο στόχο να προετοιμάσει τα παιδιά με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, ώστε να αγαπήσουν τα Μαθηματικά και να κεντρίσει το ενδιαφέρον και την επιθυμία τους να ασχοληθούν συστηματικά με αυτά. Παράλληλα, σκοπό έχει να διασφαλίσει ότι κάθε παιδί θα αποκτήσει τις απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες που θα του επιτρέψουν να λειτουργήσει ως αυτόνομο και παραγωγικό μέλος μιας σύγχρονης κοινωνίας. Το Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών, ακολουθώντας έναν ολοκληρωμένο σχεδιασμό από την Προδημοτική μέχρι το Λύκειο, εδράζεται σε τέσσερις αρχές: (α) οι μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που να υποκινούν το ενδιαφέρον και την περιέργεια των παιδιών, (β) δίνεται έμφαση στη λύση προβλήματος, (γ) η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης και (δ) όλα τα παιδιά ενθαρρύνονται να αποκτήσουν εμπειρίες μέσα από ένα ποιοτικό Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών.¹

1

Κεφάλαιο 2ο : Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

2.1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση Εισαγωγή

Η χρήση εγχειριδίων μαρτυρείται από την αρχαιότητα και θεωρούνταν ενός είδους υποστηρικτικό υλικό διδασκαλίας, παρόλα αυτά η αρχαιολογική έρευνα δεν έχει δώσει σπουδαία αποτελέσματα (Fan et al., 2013). Ωστόσο, ο Lianghuo Fan (2011) υποστηρίζει ότι η έρευνα σχετικά με τα εγχειρίδια έχει αναπτυχθεί τις τελευταίες δεκαετίες και μάλιστα από το 1980 και μετά.

Εντυπωσιακό είναι αυτό που γράφουν οι Sosniak και Perlman (1990), δηλαδή, ότι η δύναμη των εγχειριδίων πηγάζει από την ικανότητά τους να λειτουργούν ως πηγές, οι οποίες εισάγουν, πάντα μέσω των κειμένων, σε κόσμους που δεν είναι άμεσα ορατοί στους αναγνώστες, ή δεν είναι δυνατόν να γίνουν κατανοητοί απευθείας. Τα εγχειρίδια, πιο συγκεκριμένα μπορούν να μετατρέψουν μια αλληλουχία ιδεών και πληροφοριών, η οποία είναι ήδη οργανωμένη, σε μία σωστά δομημένη διαδικασία μάθησης και διδασκαλίας. Εφόσον, λοιπόν πρόκειται για διδακτικό υλικό το οποίο μπορεί να οδηγήσει τους αναγνώστες στην σκέψη, την κατανόηση και την αίσθηση, καθώς επίσης και στην πρόσβαση στη γνώση, η οποία είναι πολιτικώς ενδυναμωμένη και προσωπικώς μεταδιδόμενη με τη συμμετοχή του διδάσκοντα προς τον διδασκόμενο (Sosniak & Perlman, 1990).

Η σημερινή σχολική καθημερινότητα, εξαναγκάζει τους μαθητές να περνούν σημαντικό μέρος του χρόνου τους μέσα στην τάξη, στην οποία εργάζονται με δεδομένα υλικά, όπως είναι τα φύλλα εργασίας, τα εγχειρίδια ή οποιοδήποτε άλλο υλικό προσφέρεται από τις Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας (ΤΠΕ). Επομένως, τα συγκεκριμένα διδακτικά υλικά αποτελούν ένα βασικό μέρος ενός καθορισμένου εκπαιδευτικού πλαισίου, μέσα στο οποίο πρέπει να εργαστούν από κοινού αρμονικά εκπαιδευτικοί και μαθητές. Από τις τρεις κατηγορίες διδακτικών υλικών πιο εκτεταμένη είναι η χρήση των εγχειριδίων, καθώς, αφενός η πρόσβαση εντός της σχολικής μονάδας και ιδιαίτερα της σχολικής τάξης είναι πιο εύκολη σε σχέση με τις ΤΠΕ και αφετέρου, τα φύλλα εργασίας απαιτούν μεγαλύτερη προετοιμασία από τον

εκπαιδευτικό και τα απαραίτητα υλικά από το σχολείο (γραφική ύλη, φωτοτυπικό μηχάνημα ή εκτυπωτή, κ. α.).

Ανάμεσα στις τρεις κατηγορίες διδακτικών υλικών αρχαιότερα, αλλά και πιο αμφιλεγόμενα θεωρούνται τα εγχειρίδια. Τα εγχειρίδια είναι αυτά που εκφράζουν την επίσημη άποψη του κράτους για τη διδασκαλία – εν προκειμένω – των μαθηματικών, κατευθύνοντας τον δάσκαλο, χρησιμοποιούμενα ως μέσο καθοδήγησης σε μια καθορισμένη κατεύθυνση, η οποία δεν του δίνει τη δυνατότητα να παρεκκλίνει – πλην ελαχίστων εξαιρέσεων – και επηρεάζοντας με αυτόν τον τρόπο τη δουλειά του εν γένει (Keitel et al., 1980). Ο κυρίαρχος ρόλος των εγχειριδίων είναι δεδομένος για τους μελετητές – ανεξάρτητα από το είδος του μαθήματος που αντιπροσωπεύουν – ως μέσο έκφρασης του Προγράμματος Σπουδών κάθε χώρας. Παραδείγματος χάριν, στη Βρετανία τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται από αρκετούς δασκάλους, ως ένα μάθημα απολύτως εξαρτημένο από τα σχολικά εγχειρίδια ανεξαρτήτως επιπέδου, ή τάξης των μαθητών και στηρίζουν ολόκληρη τη διδασκαλία τους σε αυτά (Millet & Johnson, 1996), ενώ αρκετοί άλλοι ερευνητές θεωρούν το συγκεκριμένο φαινόμενο παγκόσμιο (Schmidt et al., 1996).

2.2 Λειτουργικότητα και εκτεταμένη χρήση των εγχειριδίων

Η χρήση των μαθηματικών εγχειριδίων είναι ιδιαίτερα εκτεταμένη από ότι σε οποιοδήποτε άλλο γνωστικό αντικείμενο και θεωρείται ότι δημιουργεί ιδιαίτερη εξάρτηση στους δασκάλους (Robitaille & Travers, 1992; Fan et al., 2013). Η έρευνα των Fan και Kaeley (2000) βασίστηκε σε εμπειρικά δεδομένα και αποκάλυψε ότι, η χρήση διαφορετικών ειδών μαθηματικών εγχειριδίων διαμόρφωσε διαφορετικές στρατηγικές διδασκαλίας στους εκπαιδευτικούς που τα χρησιμοποίησαν. Αυτές οι παρατηρήσεις οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι η χρήση των εγχειριδίων είναι εξαιρετικά σημαντική για την παιδαγωγική μέθοδο, την οποία κάθε δάσκαλος προτίθεται να χρησιμοποιήσει.

Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι με την χρήση των σχολικών εγχειριδίων η παιδαγωγική προσέγγιση του εκπαιδευτικού θα είναι πιο συναφής με τη σχολική πραγματικότητα από ότι τα Εθνικά Προγράμματα Σπουδών (Howson, 1995; Fan et al., 2013) και μπορούν να αποτελέσουν μέσο μεταφοράς παιδαγωγικών μηνυμάτων δημιουργώντας ένα ενθαρρυντικό, ή αποθαρρυντικό περιβάλλον εφαρμογής του

Προγράμματος Σπουδών (Fan & Kaeley, 2000). Σχετικά με αυτό, οι Schmidt, McKnight και Raizen (2002) θεωρούν ότι ο κόσμος των επίσημων προθέσεων και αυτός της πραγματικής σχολικής τάξης ενώνονται, κατά κάποιο τρόπο, μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια ενώ, το 2011 ο Fan (2011) λέει ότι τα σχολικά εγχειρίδια θα πρέπει να αντιμετωπίζονται ως μια διαμεσολαβητική μεταβλητή που επιδρά στο πλαίσιο της σχολικής εκπαίδευσης.

Ξεκινώντας λοιπόν, από την αρχή, παρατηρείται ότι το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί πυλώνα της εκπαιδευτικής διαδικασίας στο σχολείο. Με βάση τις παραπάνω έρευνες αποκαλύπτεται ότι η δύναμη του εγχειριδίου είναι τόσο μεγάλη, που μπορεί να επηρεάσει τον ίδιο το δάσκαλο σε σημείο να ακολουθήσει, ή όχι συγκεκριμένες παιδαγωγικές μεθόδους. Επιπρόσθετα, τα σχολικά εγχειρίδια είναι πιο άμεσα στην εκπαιδευτική διαδικασία, τόσο που υπερβαίνουν το ΑΠΣ της εκάστοτε χώρας και μπορούν να επιδράσουν με διαφορετικό τρόπο, αφού ακολουθούνται πιστά από τον εκπαιδευτικό, και δίνεται πολλές φορές πολύ μεγαλύτερη σημασία στο εγχειρίδια από ό,τι στους κανόνες και στόχους του ΑΠΣ. Το εγχειρίδιο, ως πιο άμεσο, αναλαμβάνει να περάσει τις αξίες και στόχους του εκπαιδευτικού συστήματος στα παιδιά. Αν υπερβούμε τη σημασία της χρήσης των εγχειριδίων των μαθηματικών, η οποία είναι αναμφισβήτητα ιδιαίτερα σημαντική για δασκάλους και μαθητές, θα ήταν δόκιμο να μελετήσουμε τη σύνδεσή τους με την εκπαιδευτική πολιτική, την οποία μπορεί να χαράξει η ομάδα συγγραφέων του εκάστοτε εγχειριδίου ή το εκπαιδευτικό ινστιτούτο κάθε χώρας, γεγονός το οποίο έχει παρατηρηθεί και σχολιαστεί από αρκετούς ερευνητές.

Οι Valverde et al. (2002) αναφέρουν στο βιβλίο τους αυτήν ακριβώς τη θέση, λέγοντας ότι ο σχεδιασμός των εγχειριδίων έχει βασιστεί στην λειτουργία τους να μεταφράζουν αφηρημένες ιδέες της εκπαιδευτικής πολιτικής της εκάστοτε χώρας σε δραστηριότητες για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς.

Στο βιβλίο του ο Apple (1999) αναφέρει ότι, η έκφραση της ιδεολογικής διαδικασίας είναι το ίδιο το κείμενο και μέσα από αυτή τη διαδικασία διάφορες κοινωνικές και πολιτικές ομάδες προσπαθούν να ελέγξουν την επίσημη γνώση, για ιδιοτελείς καθαρά σκοπούς. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να πούμε, όπως αναφέρει και η Κολέζα (2009), ότι τα εγχειρίδια αποτελούν «εξουσία μέσα στην εξουσία: παρουσιάζουν τα μαθηματικά θέματα σε μία συγκεκριμένη σειρά, υπογραμμίζουν κάποιες ιδιαίτερες

αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών και αναδεικνύουν, ως σημαντικές, κάποιες συγκεκριμένες ικανότητες ή δεξιότητες».

Εν ολίγοις με τις παρατηρήσεις των Valverde και μετέπειτα του Apple, στο εγχειρίδιο δίνεται και μια άλλη διάσταση, άδηλη αλλά πολύ σημαντική: το εγχειρίδιο δρα ως αναπαράσταση των πολιτικών και πολιτισμικών επιδιώξεων της εκάστοτε κυβέρνησης. Μέσα από αυτά, περνούν στους μαθητές τα πολιτιστικά στοιχεία που θέλει η κυρίαρχη πολιτική ομάδα να εμφυτεύσει στους μαθητές. Ένα καθεστώς πιο συντηρητικό θα εκμηδενίσει το περιθώριο ελεύθερης σκέψης μέσα στο σχολείο και θα χρησιμοποιήσει το εγχειρίδιο για να συμβάλλει στο σκοπό αυτό. Μια πιο ελεύθερη, δημοκρατική κοινωνία θα προάγει την κριτική, τον προβληματισμό, τη συζήτηση και τη συνεργασία στην τάξη, μέσω και των εγχειριδίων με τις ανάλογες δραστηριότητες που περιέχει.

Με βάση τα πιο πάνω συμπεράνουμε ότι είτε με αρνητικά, είτε με θετικά αποτελέσματα τα εγχειρίδια, έχουν κυρίαρχο ρόλο στην τελική γνώση των μαθητών, είναι το μέσο εφαρμογής του Προγράμματος Σπουδών και η πρώτη επαφή των μαθητών με τη γνώση – σε κάποιες περιπτώσεις και η μοναδική επαφή τους με τη γνώση – αλλά και την ανάγνωση (Haggarty & Perin, 2001). Ενώ, ο Begle αναφέρει σε άρθρο του πως η μοναδική μεταβλητή που, από τη μια πλευρά είναι διαχειρίσιμη και από την άλλη πλευρά επηρεάζει βαθιά τον τρόπο, με τον οποίο μαθαίνουν οι μαθητές είναι το εγχειρίδιο (Begle, 1973;Thompson et al, 2012).

Σαν τελικό συμπέρασμα: το εγχειρίδιο είναι πολύ σημαντικό, σχεδόν το πιο καθοριστικό στη διαδικασία της μάθησης. Μπορεί να υπερβεί το ΑΠΣ, μπορεί να υπερβεί ακόμα και τη διδακτική προσέγγιση του ίδιου του δασκάλου, ενώ μπορεί να αποτελέσει εργαλείο για τη μετάδοση των αξιών του καθεστώτος στο οποίο διδάσκεται.

2.3 Καθορισμός διδακτικού περιεχομένου και στόχων.

Ένας από τους βασικότερους ρόλους των εγχειριδίων έχει τονιστεί πως είναι η βοήθεια που προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς να προσδιορίσουν το περιεχόμενο που πρέπει να διδαχθεί ώστε να δώσουν τις κατάλληλες διδακτικές οδηγίες, προκειμένου να επιτευχθούν οι στόχοι που εξ' αρχής θέτουν και φροντίζουν να προτείνουν ανάλογα με

την τάξη και την ηλικία των μαθητών. Ταυτόχρονα, προσφέρουν την ευκαιρία στους δασκάλους για προσωπική εξέλιξη στις μεθόδους διδασκαλίας και για συνεχιζόμενη μάθηση, ενώ αποτελούν ένα παράθυρο επικοινωνίας των ανθρώπων που δημιουργούν την εκπαιδευτική πολιτική για να κατανοήσουν πώς προσλαμβάνονται από μαθητές και εκπαιδευτικούς οι οδηγίες των επαγγελματικών οργανισμών, ή της εκάστοτε νομοθεσίας. Παραδείγματος χάριν, στις Η. Π. Α. η διδασκαλία, κατά κύριο λόγο, των δασκάλων όσον αφορά στα μαθηματικά κατευθύνεται στην πραγματικότητα από το κείμενο, παρά από τον εκπαιδευτικό (Thompson et al., 2012; Grouws et al., 2004).

Επομένως, παρατηρούμε ότι, τα εγχειρίδια μπορούν να αντιμετωπιστούν ως ο κύριος εκπρόσωπος, του Προγράμματος Σπουδών μέσα στην τάξη και πολλοί συγγραφείς χαρακτηρίζουν τα εγχειρίδια ως σημαντικά τεχνουργήματα (artifacts) (Rezat, 2012) και άλλοι τα θεωρούν ως βασική πηγή των εκπαιδευτικών δυνατοτήτων (Schmidt, 2012). Γεγονός, είναι ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να τροποποιήσουν μέρη από το περιεχόμενο, ή την παιδαγωγική αλληλουχία που προτείνει το εγχειρίδιο, ή ακόμη να το χρησιμοποιήσουν ελάχιστα, ή καθόλου. Παρόλα αυτά, οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί θα αντιμετωπίσουν τα εγχειρίδια των μαθηματικών ως τους κύριους εκφραστές του Προγράμματος Σπουδών (Baker et al., 2010).

Σε παρόμοια κατεύθυνση, με τους ξένους μελετητές οι Καφούση κ.α. (2009) αναφέρουν σε άρθρο τους ότι το σχολικό εγχειρίδιο μπορεί να γίνει ο συνδεδεμένος κρίκος ανάμεσα στην παιδαγωγική πρακτική μέσα στην τάξη και στο Πρόγραμμα Σπουδών. Τα εγχειρίδια βρίσκονται στο σημείο επαφής του εφαρμόσιμου (enacted) και του επιδιωκόμενου (intended) Προγράμματος Σπουδών και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να έχουν το ρόλο σχεδόν πολιτικών εγγράφων (Perin et al., 2013). Οι διαφορετικές μορφές του Προγράμματος Σπουδών σχετίζονται και διαφοροποιούνται ανάλογα με το εκάστοτε σημείο αναφοράς και συνήθως, το επιδιωκόμενο αφορά στο επίπεδο του επίσημου εκπαιδευτικού φορέα π.χ. το Υπουργείο Παιδείας ή το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, αντίθετα το εφαρμόσιμο αφορά στους εκπαιδευτικούς και ότι διδάσκεται ενδοσχολικά (Κολέζα, 2009).

2.4 Σύνοψη των εφαρμογών των εγχειριδίων.

Ο εξαιρετικά σημαντικός ρόλος των σχολικών μαθηματικών εγχειριδίων προκύπτει από όλα τα παραπάνω και αφορά εξίσου τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς, εφόσον και οι δύο εμπλέκονται εξίσου στη διαδικασία της εκπαίδευσης. Θα μπορούσαμε λοιπόν να συνοψίσουμε, όπως έχει κάνει ήδη η Κολέζα το 2009 σε :

- Οδηγοί διδασκαλίας με προσδιορισμό του περιεχόμενου («de facto curriculum»). Σπανίως διδάσκονται έννοιες, ή θέματα που απουσιάζουν από το εγχειρίδιο.
- Σημεία αναφοράς της οργάνωσης του μαθηματικού περιεχομένου, κατά συγκεκριμένο τρόπο και αλληλουχία, η οποία συχνά ταυτίζεται απόλυτα με ό τι προτείνει το εγχειρίδιο.
- Πηγές ιδεών αναφορικά με τον τρόπο διδασκαλίας του συγκεκριμένου περιεχόμενου και σε κάποιες περιπτώσεις ίσως λειτουργήσουν ως υποκίνηση αλλαγών στον τρόπο διδασκαλίας.
- Αποτελούν το καθοριστικό πρότυπο του τι θεωρείται «σημαντική γνώση», σε καθορισμένη χρονική στιγμή.
- Επιλογείς του τι θα αξιολογηθεί έμμεσα ή άμεσα.
- Καθορίζουν την ύλη εργασίας για το σπίτι.
- Όργανα διαβίβασης στους γονείς πληροφοριών των τεκταινόμενων μέσα στην τάξη.
- Καταγραφείς της ιστορίας του περιεχομένου της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.
- Δείκτες της «εικόνας» του κοινωνικού και πολιτισμικού επιπέδου της χώρας.

2.5 Ιστορική Αναδρομή.

Οι μεταρρυθμίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι οποίες διαδέχονται η μία την άλλη τις τελευταίες δεκαετίες είναι αποτέλεσμα ουσιαστικά μιας συνεχούς διαπραγμάτευσης και αμφισβήτησης της αποτελεσματικότητας των προηγούμενων μεθόδων. Δεν είναι μόνο οι μέθοδοι και το περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών, που προκαλούν προβληματισμούς και διχάζουν τους ερευνητές, αλλά και η ίδια η φύση

του μαθήματος των μαθηματικών γεννά πολλά και δύσκολα ερωτήματα, περί της φύσης, της μεθοδολογίας, όπως και του γενικότερου νοήματός τους (Davis & Hersh, 1981).

Αρκετά χρόνια πέρασαν έπειτα από την εφαρμογή της μεταρρύθμισης στα εκπαιδευτικά ιδρύματα της Ελλάδας, ενώ διαπιστώθηκε ότι δεν έδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα στην διδασκαλία των μαθηματικών (Φερεντίνος, 2007). Οι πρώτες αντιδράσεις ήρθαν αρκετά νωρίς από τους Polya, Kline και Courant, οι οποίοι αύξησαν το ενδιαφέρον για εστίαση στην **επίλυση προβλημάτων** κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών (Κολέζα, 2000) και από τη δεκαετία του 1980 και μετά ήταν ο κεντρικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευση και κατ' επέκταση η «επιστροφή της επίλυσης του προβλήματος», όπως αναφέρει ο Polya (1991).

Παράλληλα, η προσοχή των εκπαιδευτικών στράφηκε από τους εξελικτικούς ψυχολόγους στο «πώς» θα μάθουν καλύτερα μαθηματικά τα παιδιά και όχι μόνο στο «τι» είδους μαθηματικά θα μάθουν. Τα νέα ερευνητικά δεδομένα της δεκαετίας του 1970 δημιούργησαν τον κλάδο της «Διδακτικής των Μαθηματικών» και οι νέες απόψεις εκφράστηκαν μέσα από τον κονστρουκτιβισμό, δηλαδή, τη θεωρία της κατασκευασμένης γνώσης, ανάγοντας τη σημασία του υποκειμένου στη μάθηση στο σημαντικότερο στοιχείο (Κεϊσογλου, 1999).

Η παθητική γνώση από τους μαθητές χαρακτηριστικό γνώρισμα του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας και η συνέπεια για το συγκεκριμένο μοντέλο διδασκαλίας ήταν να απορριφθεί και να αναδειχθούν νέα μοντέλα διδασκαλίας, τα οποία στηρίζονταν στην ομαδοσυνεργατική διαδικασία και την ενεργητική συμμετοχή του μαθητή σε αυτά. Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο της Ελλάδας στα πλαίσια της μεταρρύθμισης συνέταξε το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών, το οποίο καθόριζε τη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών ως μια κατασκευαστική δραστηριότητα και ως ακρογωνιαίο λίθο της την επίλυση προβλημάτων (Ε.Π.Π.Σ., 1997. Άρθρο 1). Το συγκεκριμένο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών συμπληρώθηκε και αναθεωρήθηκε το 2003 υπό την έννοια της «διαθεματικότητας» και πήρε τη σημερινή μορφή του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003:3983–3985) και δημιουργήθηκαν νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών και τα νέα βιβλία Δημοτικού και Γυμνασίου (Βρυώνης & Γούπος, 2009).

2.6 Τα νέα προγράμματα σπουδών, τα νέα βιβλία Μαθηματικών και η φιλοσοφία τους.

Ως κυρίαρχο ρεύμα της μαθηματικής διδασκαλίας για πολλά χρόνια αποτελούσε, όπως προαναφέρθηκε η φορμαλιστική φιλοσοφία (Κολέζα, 1977, στο Φερεντίνος, 2001). Η συγκεκριμένη πρακτική μάθησης κυριαρχούσε ως το 1960 και θεωρούσε ότι το μυαλό του μαθητή είναι *tabula rasa* και εκεί πάνω ο εκπαιδευτικός μπορεί να χαράξει τη γνώση. Μια τέτοιου είδους μάθηση ληπτική, παθητική και στατική αποτέλεσε τη φορμαλιστική άποψη των «Νέων Μαθηματικών» (Βρυώνης & Γούπος, 2009).

Τη δεκαετία του 1970 η διδακτική των μαθηματικών διαφοροποιήθηκε και στήριξε τη μαθηματική διδασκαλία στον κονστρουκτιβισμό. Η συγκεκριμένη θεωρία εστιάζει στον μαθητή ως διαφοροποιημένη από το σύνολο προσωπικότητα και δίνει ιδιαίτερη σημασία στα συναισθήματα, την καλύτερη δυνατή μέθοδο πρόσληψης για κάθε μαθητή ξεχωριστά, τους τρόπους αύξησης της δημιουργικότητας και των νοητικών του ικανοτήτων και αποτελεί μια έμμεση «μαθητοκεντρικού τύπου» μάθηση (Χατζηθεολόγου, 2000).

Το Ε.Π.Π.Σ. του 1997 και λίγο αργότερα το Δ.Ε.Π.Π.Σ., όπως επίσης και το Α.Π.Σ. ενστερνίστηκαν τα νέα δεδομένα που έφερε η έρευνα (Μαθηματικά Δ΄, Βιβλίο Δασκάλου, 2007). Στη συγκεκριμένη φιλοσοφία είχαν τη βάση τους τα νέα βιβλία Μαθηματικών (Μαθηματικά Α΄, Βιβλίο Δασκάλου, 2007), με κύριο στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου τον μαθηματικό εγγραμματισμό και την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης (Τύπας – Ντάφου, 2005:1), ώστε ο μαθητής να είναι ικανός να χρησιμοποιεί τις μαθηματικές του γνώσεις σε πρακτικά προβλήματα που αφορούν στην καθημερινή ζωή (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997, άρθρο 2).

Ο κονστρουκτιβισμός, ως θεωρία, προσφέρει ως προς αυτή την κατεύθυνση και δίνοντας σημαντικό ρόλο στα γνωστικά σχήματα που ήδη υπάρχουν (Μαθηματικά ΣΤ΄, Βιβλίο Δασκάλου, 2007). Η νέα γνώση οικοδομείται πάνω στην κεκτημένη γνώση αναλογικά με τον βαθμό ετοιμότητας που έχει το ίδιο το άτομο. Αναπόσπαστο μέρος της συγκεκριμένης διαδικασίας είναι το λάθος (Μαθηματικά Ε΄, Βιβλίο Δασκάλου, 2007), ενώ εξίσου σημαντικό είναι το σύνολο των ενεργειών που οδηγούν στην αυτορρύθμιση

και τον αναστοχασμό (Μαθηματικά Β', Βιβλίο Δασκάλου, 2007). Έτσι, οι μαθηματικές έννοιες, αλλά και η χρηστικότητα τους προκύπτουν από την καθημερινότητα που βιώνουν οι μαθητές (Μαθηματικά Α', Βιβλίο Δασκάλου, 2007) και βασίζονται στη βασικότερη αρχή της διδακτικής ότι «τα Μαθηματικά έχουν νόημα» (Μαθηματικά Β', Βιβλίο Φασκάλου, 2007).

Η σταδιακή μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο οδηγεί προοδευτικά στην απόκτηση της μαθηματικής γνώσης, ενώ οι μαθητές αφήνοντας πλέον τις εμπειρικές γνώσεις, περνούν σε διαδικασία μοντελοποίησης και ομαδοποίησης εννοιών με κοινές ιδιότητες και μπαίνουν σε διαδικασία δημιουργίας εννοιών ανώτερης τάξης μέσω της «αφαιρετικής σκέψης» (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997:2). Οι καινούριες έννοιες δομούνται από ένα σύνολο προβλημάτων και καταστάσεων, μέσα από τα οποία κάθε έννοια παίρνει το νόημά της (Μαθηματικά ΣΤ', Βιβλίο Δασκάλου).

Η επίλυση προβλημάτων είναι πλέον ο ακρογωνιαίος λίθος για την διδασκαλία των Μαθηματικών (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997) και ιδιαίτερα η γνώση των μαθηματικών μπορεί να αναπτυχθεί από την αναζήτηση επίλυσης προβλημάτων, των οποίων η τεκμηρίωση συμβαίνει αρχικώς σε εμπειρικό και διαισθητικό επίπεδο και κατόπιν στη «βάση μιας αποδεικτικής διαδικασίας» (Κολέζα, 2000).

Με αυτή τη διαδικασία, επομένως, οι μαθητές κατανοούν πως η χρησιμότητα των μαθηματικών βρίσκεται στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων κι όπως είναι φυσικό μοντελοποιούν και μαθηματοποιούν την εν λόγω διαδικασία (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997). Τα προβλήματα που επιλέγονται στα εγχειρίδια των μαθηματικών των Δημοτικών σχολείων είναι ως επί το πλείστον καταστάσεις και προβλήματα που αφορούν στην καθημερινότητά τους και αποτελούν οικείες καταστάσεις για τα παιδιά και τα οδηγούν στην επιλογή πρωτότυπων στρατηγικών και λύσεων, οι οποίες πρωταρχικώς παρουσιάστηκαν από τον George Polya (1991). Η μαθηματοποίηση των «προβληματικών καταστάσεων» είναι δυνατόν να γίνει με δύο τρόπους (Μαθηματικά Β', Βιβλίο Δασκάλου):

α) Ο πρώτος τρόπος αφορά στην πλαισιοποίηση. Πλαισιοποίηση ορίζεται ως η διαδικασία μετάφρασης ενός πραγματικού προβλήματος μέσω ορισμένων ενεργειών – μοντέλων σε μαθηματικό πρόβλημα.

β) Ο δεύτερος τρόπος αφορά στην αποπλαισιοποίηση της γνώσης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το μεταφρασμένο πλέον πρόβλημα αφού αντιμετωπιστεί γίνεται αντικείμενο επεξεργασίας και αυτός ο τρόπος αποτελεί πρόταση του Brousseau (Brousseau, 2002:138-139;Κολέζα, 2000).

Το Ε.Π.Π.Σ. υποδεικνύει δραστηριότητες, οι οποίες θα πρέπει να οργανωθούν σε τρία επίπεδα και μπορούν να περιγραφούν με τους ορισμούς της περιγραφής του J. Bruner: το συμβολικό, το εικονικό και το χειριστικό (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997), ή με τους αντίστοιχους ορισμούς της θεωρίας «μάθηση σε επίπεδα», την οποία χρησιμοποιεί ο P. M. van Hiele εκφράζοντας την RME = Realistic Mathematic Education, δηλαδή, Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Κολέζα, 2000). Όλες οι προαναφερθείσες διδακτικές και φιλοσοφικές αρχές εφαρμόζονται ορθότερα στα πλαίσια ομαδοσυνεργατικών μοντέλων διδασκαλίας.

Ο εκπαιδευτικός σε τέτοιου είδους δραστηριότητες εγκαταλείπει τον ρόλο του δασκάλου και αναλαμβάνει πλέον τον ρόλο του διοργανωτή – συντονιστή, κατεβαίνοντας ουσιαστικά από το βήθρο της αυθεντίας και συμμετέχοντας ενεργά, αλληλεπιδρώντας με τους μαθητές του (Βρυώνης & Γούπος, 2009). Έτσι, διαφοροποιεί τη θέση του και από αναμεταδότης γνώσεων γίνεται συνεργάτης των παιδιών και μάλιστα ενεργός, καθώς βοηθά στη διαδικασία με την οποία οι μαθητές ανακαλύπτουν και προβάλλουν τις προσωπικές τους αντιλήψεις. Επιπλέον, αποτελεί τον οδηγό για να δημιουργήσει ο μαθητής μόνος του τη γνώση (Μαθηματικά Γ', Βιβλίο Δασκάλου).

Νέα προσέγγιση στην διδασκαλία των Μαθηματικών-Μαθηματικά Προβλήματα

2.7 Μεθοδολογική προσέγγιση των μαθηματικών εγχειριδίων – Σκοποί και στόχοι.

Τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα σπουδών έχουν ως βασικό σκοπό της μαθηματικής εκπαίδευσης των παιδιών του Δημοτικού Σχολείου την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης και την καλλιέργεια του εγγραμματισμού από μαθηματικής άποψης Όπως έχουμε ήδη αναφέρει μία από τις θεωρίες διδασκαλίας αποτελεί φυσικά, η απόκτηση ικανοτήτων του μαθητή να επιλέγει και να εφαρμόζει τις κατάλληλες μαθηματικές γνώσεις στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων της καθημερινότητάς

του. Ο τρόπος που επιδρούν τα Μαθηματικά οφείλετε στο γεγονός ότι αν ξεπεράσουμε την προαναφερθείσα χρήση στην καθημερινή ζωή, οι μαθηματικές διαδικασίες έχουν ως σκοπό την εξάσκηση των μαθητών στην απόκτηση μεθοδικότητας στην λογική τεκμηρίωση και τη σκέψη του, τη δημιουργική φαντασία και την κριτική σκέψη του, την ανάλυση, τη γενίκευση, την αφαίρεση και τη σύνθεση στη διάρκεια της λύσης μαθηματικών προβλημάτων (Τύπας & Ντάφου, 2005).

Τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών στην ενότητα των Μαθηματικών εξειδικεύονται σε ορισμένους στόχους, οι οποίοι είναι :

- Η χρήση των εργαλείων, που τους προσφέρουν τα μαθηματικά, όπως οι μαθηματικές μέθοδοι και τα μαθηματικά μοντέλα για τη λύση των μαθηματικών προβλημάτων που τους δίνονται.
- Την σταδιακή ανάπτυξη βασικών μαθηματικών διαδικασιών, γνώσεων και εννοιών.
- Την εξεύρεση και συνολική θεώρηση των σχέσεων των διαφόρων τομέων των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών, όπως η σχέση των Μαθηματικών με τη Μουσική, ή την Τέχνη εν γένει.
- Την απόκτηση γνώσης του τρόπου που μπορούν να επαναδιατυπώσουν και να επαναδομήσουν ένα πρόβλημα έξω από τα πλαίσια των Μαθηματικών ως σχολικό μάθημα, ή επιστημονική διαδικασία σε μαθηματικό πρόβλημα.
- Την ανάπτυξη, από μέρους των παιδιών, θετικής στάσης απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών.
- Στα πλαίσια επίτευξης των διαδικαστικών στόχων του μαθήματος των Μαθηματικών οι μαθητές θα πρέπει να αναπτύξουν μεταγνωστικές ικανότητες, μέσω της διαχείρισης και του ελέγχου της μάθησης.
- Την ενθάρρυνση και υποστήριξη ικανοτήτων και δεξιοτήτων που έγκεινται στην ψυχοκινητική και συναισθηματική περιοχή ανάπτυξης των μαθητών (Φ. Ε. Κ. 304-11/03/2003; Τύπας & Ντάφου, 2005).²

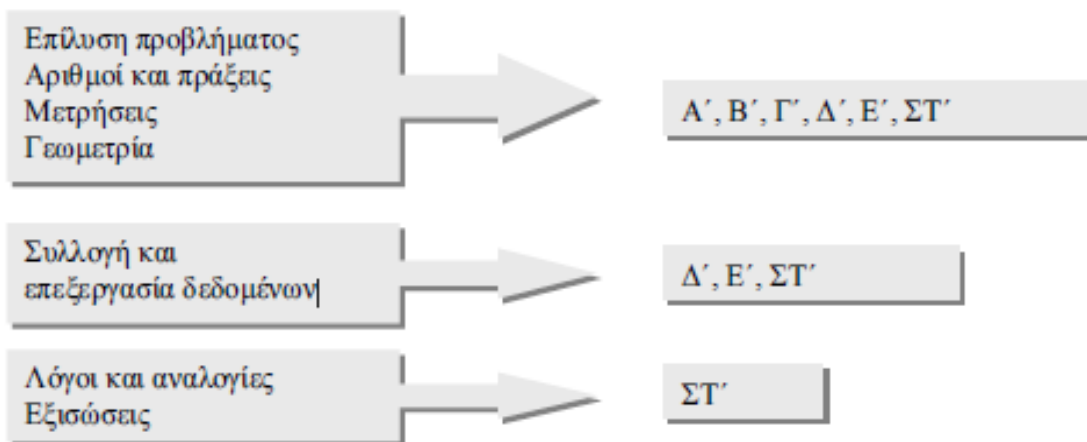
² Οι μαθητές εξερευνούν μία κατάσταση, κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, αναγνωρίζουν και περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες. Α. Π. Σ. 2003. Μαθηματικών

- **2.8 Διδακτικό Περιεχόμενο των νέων Βιβλίων του Ελληνικού Δημοτικού Σχολείου.**

Το περιεχόμενο των νέων Μαθηματικών Εγχειριδίων αναπτύσσεται και δομείται πάνω σε επτά άξονες. Από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου εισάγονται οι τέσσερις από τους επτά άξονες οι «Αριθμοί και Πράξεις», οι «Μετρήσεις», η «Γεωμετρία» και η «Επίλυση Προβλήματος», ενώ, στην Τετάρτη τάξη ξεκινάει η χρήση της «Συλλογής και Επεξεργασίας Δεδομένων. Στην τελευταία τάξη του Δημοτικού Σχολείου εισάγονται οι δύο τελευταίοι άξονες της διδασκαλίας των Μαθηματικών, δηλαδή η «Εξισώσεις» και οι «Λόγοι και Αναλογίες». Ταυτόχρονα με τους επτά άξονες εισάγονται στην ύλη και τον τρόπο διδασκαλίας καινούρια στοιχεία όπως :

- «Η έννοια του μοτίβου», η οποία οδηγεί τους μαθητές να ανακαλύψουν, μέσω ενός τρόπου προσομοίωσης προς τα παιδιά, μαθηματικές σχέσεις.
- Ο νέος τρόπος που προσεγγίζεται η διδασκαλία των Μαθηματικών, εστιάζει στην κατασκευή και κατανόηση λογικών συλλογισμών, ενώ ταυτόχρονα απομακρύνεται από την εκμάθηση αλγορίθμων και την θεωρία των συνόλων.
- Από την Τρίτη πλέον τάξη, και όχι από την Τετάρτη όπως γινόταν στο παρελθόν, προσεγγίζονται οι δεκαδικοί αριθμοί. Αρχικά, η συγκεκριμένη προσέγγιση γίνεται διαισθητικά – οπτικά κυρίως – χρησιμοποιώντας ως εργαλείο κατανόησης το ευρώ. Η χρήση του ευρώ στη Μαθηματική διδασκαλία έχει διπλό ρόλο – χρήση, πρώτο η χρήση του νομίσματος δίνει στα παιδιά την ευκαιρία να κατανοήσουν τον τρόπο χρήσης της νομισματικής μονάδας και παράλληλα μέσω ενός χρηστικού αντικειμένου έχουν μια πρώτη επαφή με τους δεκαδικούς αριθμούς και τις νομισματικές υποδιαιρέσεις (Τύπας & Ντάφου, 2005).

Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα είναι ξεκάθαρη η εισαγωγή των επτά αξόνων στη διδασκαλία των Μαθηματικών σύμφωνα με τα Εγχειρίδια και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών :



Επιπλέον, σημαντική για τα νέα εγχειρίδια θεωρείται η προσπάθεια περιορισμού της ύλης διδασκαλίας, καθώς έγινε ορθολογικότερη κατανομή της ύλης, της διαθεματικότητας, η οποία έχει ως σκοπό τη σύνδεση των Μαθηματικών εννοιών με τις υπόλοιπες επιστήμες με πολύπλευρη διερεύνηση και διεύρυνση της οπτικής των μαθητών και τέλος, την παράλειψη των άσκοπων επαναλήψεων και επικαλύψεων της ύλης ανάμεσα σε κεφάλαια, ή την ύλη ανάμεσα στις τάξεις. Ταυτόχρονα, ήταν ιδιαίτερα σημαντικό ότι τα νέα Βιβλία προσπάθησαν να διασφαλίσουν την συνέχεια και τη συνοχή της ύλης από τάξη σε τάξη (σπειροειδής μάθηση), αλλά και το ομαλό πέρασμα από την ύλη των Μαθηματικών του Δημοτικού στην ύλη των Μαθηματικών του Γυμνασίου (Φ. Ε. Κ. 304-11/03/2003; Τύπας & Ντάφου, 2005).

Η χρησιμότητα του Μαθηματικού Προβλήματος

2.9 Η επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων ως τρόπος κατανόησης των Μαθηματικών.

Όπως παρατηρούμε από το προηγούμενο σχεδιάγραμμα, τη θέση του πρώτου από τους επτά άξονες κατέχει η επίλυση προβλήματος, ξεκινώντας από την πρώτη κιόλας τάξη του Δημοτικού Σχολείου.

Για την εξεύρεση λύσης ενός προβλήματος δεν είναι κατ' ανάγκη απαραίτητη η χρήση Μαθηματικών. Παρ' όλα αυτά, αποτελεί πραγματικότητα το γεγονός ότι σε πάρα πολλές περιπτώσεις, ο μετασχηματισμός μιας κατάστασης στα «κατάλληλα» Μαθηματικά λύνει με πολύ πιο εύκολο τρόπο το εν λόγω πρόβλημα. Επομένως, κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική η ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά, όταν θα πρέπει να αντιμετωπίσουν προβλήματα που μπορούν να δεχθούν επεξεργασία μαθηματικού τύπου. Είναι πιο εύλογο τα μαθηματικά προβλήματα που παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία Μαθηματικών να εντάσσονται είτε στο φυσικό περιβάλλον, από το οποίο αβίαστα μπορούν να μετατραπούν σε Μαθηματικά, ή να εκφράζονται ως μαθηματικά προβλήματα απευθείας. Όταν εντάσσουμε στο φυσικό περιβάλλον τα μαθηματικά προβλήματα, αυτό δεν σημαίνει σε καμία περίπτωση ότι το υλικό που χρησιμοποιούμε είναι «ρεαλιστικό», αλλά το διαμορφώνουμε με αληθοφανή τρόπο, ώστε η αντιμετώπισή του να καταφέρει να εγείρει σημαίνουσες όψεις της μαθηματικής διανοητικής διαδικασίας (Μαμωνά – Downs, 2017).

Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να μας διαφωτίσει, όσον αφορά τη «ρεαλιστικότητα» των προβλημάτων : «Όταν ένας καρχαρίας καταναλώνει x κιλά ψάρια την ημέρα, τότε, δέκα καρχαρίες πόσα κιλά ψάρια θα καταναλώσουν;». Είναι προφανές ότι ένα τέτοιο πρόβλημα δεν εντάσσεται στην καθημερινότητά μας ή την πραγματική ζωή ενός παιδιού, όμως το προκαλεί να εμπλέξει μαθηματικές έννοιες, δεξιότητες και πράξεις προκειμένου να επιλύσει το συγκεκριμένο πρόβλημα. Η Γιάννα Μαμωνά – Downs (2017) θέτει το ερώτημα της αναγκαιότητας του όρου «Επίλυση Προβλήματος» και θεωρεί ότι ως αναγκαιότητα της ύπαρξης του όρου, μπορεί να είναι «η αξιολογική

ανασκόπηση» των πρακτικών διδασκαλίας που συνηθίζεται να χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στις παραδοσιακές τάξεις των Μαθηματικών.

Η τυπική αντιμετώπιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών ορίζει την υπενθύμιση από τον εκπαιδευτικό της ύλης του προηγούμενου μαθήματος και κατόπιν εισάγει μια νέα έννοια στην τάξη. Ακολουθούν τα παραδείγματα προβλημάτων, ή ασκήσεων μαζί με τον τρόπο επίλυσης και τις λύσεις τους προκειμένου να παρουσιάσει τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να εργαστούν οι μαθητές και τέλος, ακολουθεί η εφαρμογή με την λύση παρόμοιων προβλημάτων από τα παιδιά. Αυτού του είδους η διδασκαλία Μαθηματικών έχει επικριθεί σε πολλαπλά επίπεδα και είναι φυσικό καθότι οι γνώσεις παραμένουν σε επιφανειακό επίπεδο, οι μαθητές να δυσκολεύονται να αφομοιώσουν τη νέα ύλη και η διαφοροποίηση τους στην επίλυση των προβλημάτων είναι από ελάχιστη έως καθόλου από ότι τους έδειξε ο δάσκαλος. Έτσι, είναι εύκολο να κατανοήσουμε ότι οι μαθητές αδυνατούν να βοηθηθούν στο να κατανοήσουν τα Μαθηματικά με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, πόσο μάλλον να αναπτύξουν τη μαθηματική τους σκέψη μόνοι τους (Μαμωνά – Downs, 2017).

2.10 Τι είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα;

Προκειμένου να οριστεί η έννοια του μαθηματικού προβλήματος, θα πρέπει πρώτα να διασαφηνιστεί ο όρος πρόβλημα. Το πρόβλημα ορίζεται ως μια κατάσταση, η οποία χρειάζεται προσοχή και πρέπει να αντιμετωπιστεί, ή να λυθεί. Άλλη ερμηνεία είναι κάτι το οποίο προκαλεί δυσκολία, ή είναι δύσκολο να αντιμετωπιστεί. Με βάση τα παραπάνω, ένα μαθηματικό πρόβλημα ορίζεται ως ένα πρόβλημα που μπορεί να αναλυθεί με μαθηματικές μεθόδους (ορισμοί στο Cambridge Dictionary).

Κάποιες κατευθύνσεις δίνονται και σε μια πιο πρακτική προσέγγιση από τον Καραγεώργο, αναφέρονται ότι το πρόβλημα είναι (Καραγεώργος, 2000):

- α) μια εργασία με την οποία ο εμπλεκόμενος θέλει, ή αναγκάζεται να ασχοληθεί περαιτέρω
- β) μια εργασία της οποίας η λύση δεν είναι προφανής και πρέπει να την ψάξει
- γ) μια εργασία όπου ο εμπλεκόμενος που θέλει να φτάσει στη λύση, πρέπει να δαπανήσει χρόνο και ενέργεια και να ακολουθήσει κάποια βήματα για να το πετύχει.

Βασικά στοιχεία στον ορισμό του Καραγεώργου, είναι ότι το πρόβλημα εν ολίγοις εμπεριέχει την ανάγκη ή την επιθυμία του εμπλεκόμενου να το λύσει, ενώ για να το πετύχει θα πρέπει να προσπαθήσει επί τούτου και δεν έρχεται εύκολα. Αυτά τα στοιχεία οδηγούν σε κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Κατά πρώτον, το πρόβλημα θα πρέπει να τραβήξει το ενδιαφέρον του μαθητή για να εμπλακεί με ενδιαφέρον σε αυτή τη διαδικασία. Άρα, το πρόβλημα πρέπει να παρουσιαστεί με τρόπο τέτοιο, που να δημιουργήσει κίνητρο στα παιδιά. Ακόμα και το πιο έξυπνο πρόβλημα δεν έχει αξία, αν ο μαθητής δε θέλει να το λύσει. Δεύτερον, το πρόβλημα χρειάζεται να εμπεριέχει μια δυσκολία. Δηλαδή, να μη δίνεται η συνταγή για την επίλυσή του έτοιμη μπροστά στα μάτια του μαθητή. Θα πρέπει ο αλγόριθμος του προβλήματος να “κρύβεται” μέσα στις λέξεις. Τρίτον, αφού χρειάζεται ο μαθητής να δαπανήσει ενέργεια και χρόνο, θα πρέπει να έχει φροντίσει ο δάσκαλος να είναι στα πλαίσια των δυνατοτήτων των μαθητών. Γι' αυτό θα πρέπει να ξέρει καλά τους μαθητές που έχει για να μπορέσει να αναγνωρίσει τις δυνατότητές τους.

Η εκμάθηση των μαθηματικών έχει συνυφαστεί στην ιστορία με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, γι' αυτό στην εκπαιδευτική διαδικασία δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην επιλογή κατάλληλων προβλημάτων ούτως ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή η αφομοίωση της κατάλληλης γνώσης (Βοσκόγλου, 2008). Αυτό συμβαίνει μέσα από τη διαδικασία της επανα-ανακάλυψης, δηλαδή ότι μπορεί ένας μαθητής να ανακαλύψει μια νέα γνώση μέσω ενός προβλήματος που περιέχει μια ήδη κατεκτημένη γνώση. Αυτό συμβαίνει σε τρία στάδια σύμφωνα με τον Polya:

- Εξερεύνηση
- Διαμόρφωση
- Αφομοίωση

Βασικό συστατικό σε αυτή τη διαδικασία είναι η δημιουργία κινήτρου, όπου ο δάσκαλος παρακινεί τους μαθητές να ασχοληθούν και να κινητοποιηθούν για να θελήσουν να το λύσουν (Βόσκογλου, 2008).

2.11 Στρατηγικές Επίλυσης Μαθηματικού Προβλήματος

Ο πρώτος ο οποίος αναφέρθηκε στις ευρετικές στρατηγικές ήταν ο Polya. Αυτές αποτελούν γενικές προτάσεις και μεθόδους που βοηθούν το μαθητή να λύσει ένα πρόβλημα. Βασικό χαρακτηριστικό στη διαδικασία εύρεσης λύσης είναι οι *κανόνες προτίμησης*, τους οποίους θα χρησιμοποιήσει ο μαθητής προκειμένου να φτάσει στη λύση του προβλήματος. Αυτό γίνεται με το να ταξινομούνται οι ευρετικές στρατηγικές με τέτοιο τρόπο ώστε, να γίνεται εύκολη η χρήση τους.

Είναι γεγονός ότι οι μαθητές πολλές φορές δεν είναι σε θέση να αξιοποιήσουν τις ήδη κατεκτημένες γνώσεις για την επίλυση ενός προβλήματος και αυτό οφείλεται ακριβώς στο ότι δεν είναι ικανοί να διευθετήσουν με σωστό τρόπο τις ευρετικές στρατηγικές που πρέπει να ακολουθήσουν. Έτσι, ο Schoenfeld παροτρύνει τους λύτες να αναγνωρίσουν μέσα στο δοσμένο πρόβλημα τις λέξεις που παραπέμπουν στις συγκεκριμένες ευρετικές στρατηγικές και τελικά στη λύση. Ανάμεσα σε όλες τις ευρετικές στρατηγικές που μπορεί να είναι διαθέσιμες, μία ή κάποιες λίγες θα είναι αυτές που θα ξεκλειδώσουν τις υπόλοιπες και θα είναι άμεσα διαθέσιμες προς χρήση για την επίλυση. Αυτές ονομάζονται από τον Schoenfeld (1980) “κλειδιά” για ευνόητους λόγους.

Στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος ο Schoenfeld αναγνωρίζει 5 φάσεις:

- Ανάλυση
- Εξερεύνηση
- Σχεδιασμός
- Εκτέλεση
- Επαλήθευση

Οι φάσεις του Schoenfeld αποτελούν μια βελτιωμένη σύνθεση σε σχέση με τον Polya που διέκρινε 3 φάσεις από αυτές (Βοσκογλου, 2008).

Τα παραπάνω αξιοποιούνται σε μεγάλο βαθμό από τα αναλυτικά προγράμματα Ελλάδας και Κύπρου. Είναι χαρακτηριστικό στο ΑΠ Κύπρου αναφέρεται σαν στόχος στην εκμάθηση μαθηματικών, η χρήση των μαθηματικών εννοιών με ευέλικτο τρόπο και ο σχεδιασμός των κατάλληλων βημάτων για να πετύχουν την επίλυση του προβλήματος.

Αυτά τα βήματα αποτελούν ακριβώς την ταξινόμηση των κατάλληλων ευρετικών στρατηγικών με τέτοιο τρόπο που να γίνει το πρόβλημα επιλύσιμο (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, 2010:3).

Η επίλυση προβλήματος είναι από τα πιο βασικά στη διδακτική των μαθηματικών, καθώς όλες οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να διδαχθούν αποτελεσματικά μέσα από τη διαδικασία αυτή. Η διαδικασία ξεκινά ήδη από την Α' Δημοτικού, όμως τα προβλήματα αυτά έχουν πολύ απλή σύνθεση με στοιχεία που πιο απτά και με μεγάλη συνάφεια με την πραγματικότητα. Σταδιακά, όμως, αρχίζουν να εισάγονται όλο και πιο πολύπλοκα και σύνθετα προβλήματα, στα οποία υπάρχουν τόσο στοιχεία σύνδεσης με την καθημερινή ζωή, όσο και με καθαρά μαθηματικά.

Ξεκινώντας την επίλυση προβλήματος, πρώτος στόχος είναι η κατανόηση, η οποία γίνεται σε πρώτο επίπεδο με βάση τις εμπειρίες και τη διαίσθηση του υποκειμένου, ενώ στόχος στη συνέχεια είναι να επέλθει ένας μετασχηματισμός της διαδικασίας από αναγωγή σε προϋπάρχουσες εμπειρίες, σε μια αλληλουχία λογικών συλλογισμών που φτάνουν στην επίλυση. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι σημαντικό στη διδασκαλία να δημιουργηθεί το κίνητρο στους μαθητές και πολλές φορές αυτό συμβαίνει με την απόδοση στοιχείων όχι σε κειμενική μορφή απλά, αλλά και μέσω μιας εικόνας ή ενός διαγράμματος, πίνακα κλπ (Πήλιουρας, 2008).

Στα νέα βιβλία των Μαθηματικών, σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές θα βρεθούν αντιμέτωποι με μη τυπικά προβλήματα, όπως για παράδειγμα προβλήματα που δεν λύνονται με πράξεις, χωρίς αριθμούς, ή οι λύσεις να είναι περισσότερες από μία. Αυτό δεν ίσχυε πιο παλιά, καθώς τα παραδοσιακά προβλήματα μαθηματικών έχουν μία λύση την οποία βρίσκουν οι μαθητές με την εκπόνηση συγκεκριμένων πράξεων και διαδικασιών, ενώ τα δεδομένα δίνονται κυρίως σε κειμενική μορφή είτε με λέξεις είτε με αριθμούς. Επίσης, θα πρέπει οι μαθητές να χρησιμοποιούν συγκεκριμένες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων όπως είναι οι παρακάτω:

- Να συλλέξουν τα δεδομένα τους και να τα παρουσιάσουν σε έναν πίνακα, ή σ' ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα.
- Να είναι σε θέση να σπάσουν το πρόβλημα σε επιμέρους ερωτήματα για να λυθεί βήμα προς βήμα.

- Να διερευνούνται διάφορες περιπτώσεις.
- Να μπορούν να διατυπώσουν ερωτήματα για τα διάφορα στάδια.
- Να λύσουν μια πιο απλή περίπτωση.
- Να προσπαθήσουν να λύσουν το πρόβλημα ξεκινώντας από το τέλος του.

Βασικές δεξιότητες επίσης, που καλούνται να αναπτύξουν και να καλλιεργήσουν οι μαθητές, είναι να μπορούν να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα με τα δεδομένα που τους δίνονται, όπως αριθμοί ή μια απάντηση προβλήματος, ενώ τα προκαλεί να αναζητήσουν εναλλακτικές λύσεις (Πήλιουρας, 2008).

2.12 Τύποι μαθηματικών προβλημάτων.

Τα προβλήματα, ως πρώτη κατηγοριοποίηση, μπορούν να διακριθούν σε *Απλά και Σύνθετα*. Τα απλά προβλήματα δίνουν μια απλή μαθηματική σχέση μεταφρασμένη σε λέξεις και ο μαθητής καλείται να αναγνωρίσει απλά τη σχέση αυτή. Ένα παράδειγμα από το ελληνικό εγχειρίδιο Δ' Δημοτικού είναι το εξής:

“Ο Πέτρος αγόρασε ένα άλμπουμ για να κολλήσει 47 φωτογραφίες από μια σχολική εκδρομή. Σε κάθε σελίδα μπορεί να κολλήσει 5 φωτογραφίες. Πόσες σελίδες θα χρειαστεί;”

Εδώ έχουμε μια απλή πράξη ($47:5=9$ και υπόλοιπο 2), οπότε το παιδί πρέπει να σκεφτεί ότι θέλει 9 γεμάτες σελίδες και 1 ακόμα για το υπόλοιπο των 2 φωτογραφιών.

Σε αντίθεση με τα απλά, η άλλη κατηγορία είναι τα σύνθετα προβλήματα, όπου η λύση τους προκύπτει από 2, ή και περισσότερες πράξεις. Παράδειγμα στο ελληνικό εγχειρίδιο Ε' Δημοτικού:

“Η κυρία Μαρία την 1η μέρα μάζεψε από την πορτοκαλιά της 8 πορτοκάλια, τη δεύτερη μέρα τριπλάσια πορτοκάλια από την πρώτη, την τρίτη διπλάσια από τη δεύτερη και την τέταρτη τόσα πορτοκάλια όσα είχε μαζέψει τις προηγούμενες μέρες. Πόσα πορτοκάλια μάζεψε από την πορτοκαλιά της η κυρία Μαρία και τις τέσσερις ημέρες;”

Εδώ η λύση δίνεται με τις εξής πράξεις:

$$2\text{η μέρα: } 8 \cdot 3 = 24$$

$$3\text{η μέρα: } 24 \cdot 2 = 48$$

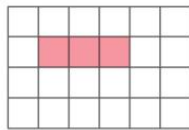
4η μέρα: $8+24+48=80$

Άρα σύνολο: $8+24+48+80=160$ πορτοκάλια.

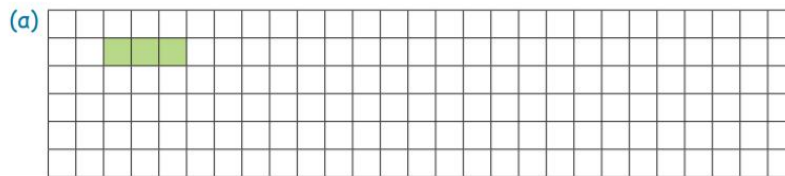
Τα προβλήματα επίσης, μπορούν να διακριθούν σε *Ανοιχτά-Κλειστά*, ή *Ανοιχτού-Κλειστού τύπου* (Zhu & Fan, 2006). Ένα ανοιχτό πρόβλημα, είναι αυτό που έχει πάνω από ένα ορθό τρόπο λύσης. Τα κλειστά προβλήματα έχουν μόνο μια σωστή απάντηση, ανεξάρτητα από τη μέθοδο επίλυσης που θα ακολουθηθεί και τον τρόπο προσέγγισης που θα χρησιμοποιηθεί. Ένα παράδειγμα ανοιχτού προβλήματος στο α' τεύχος της Δ' Δημοτικού της Κύπρου είναι το εξής:

Η Φωτεινή ετοιμάζει ένα σχέδιο.

Τα τετράγωνα που έχω χρωματίσει μέχρι τώρα αντιστοιχούν στο $\frac{1}{4}$ του σχεδίου μου.



Να ολοκληρώσεις το σχέδιο της Φωτεινής με 3 διαφορετικούς τρόπους. Να επεξηγήσεις τον τρόπο σκέψης σου.



Τα κλειστά προβλήματα είναι η συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων. Παράδειγμα στο εγχειρίδιο Ε' δημοτικού στη Ελλάδα α' τεύχος:



Ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής έφτιαξε τη μια ημέρα 684 σοκολατάκια και την άλλη 536. Θέλει να τα συσκευάσει σε κουτιά που καθένα χωράει 20 σοκολατάκια. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;

Η μόνη λύση δίνεται από την εξής ακολουθία πράξεων:

$$684+536=1220 \text{ και } 1220/20=61$$

Η επόμενη κατηγοριοποίηση που ακολουθεί, είναι σε *Παραδοσιακά και μη Παραδοσιακά* (Zhu & Fan, 2006):

Τα μη παραδοσιακά προβλήματα διακρίνονται εδώ σε τέσσερις υποκατηγορίες:

- 1 Κατασκευή προβλήματος, που η εκφώνηση ζητάει από τους μαθητές να δημιουργήσουν ερωτήματα με βάση δεδομένα που τους δίνονται. Πρόβλημα που συναντάται στη Ε' Δημοτικού στο Κυπριακό εγχειρίδιο:

5. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις αφίξεις τουριστών στην Κύπρο κατά το πρώτο τρίμηνο του 2017 και του 2018.

	ΑΦΙΞΕΙΣ ΤΟΥΡΙΣΤΩΝ	
	2017	2018
Ιανουάριος	62 611	75 867
Φεβρουάριος	82 209	101 481
Μάρτιος	140 873	192 090

(γ) Να χρησιμοποιήσεις τις πληροφορίες του πίνακα, για να κατασκευάσεις ένα πρόβλημα του οποίου η απάντηση να είναι 369 438.

- 2 Προβλήματα γρίφου-λογικής, όπου επιτρέπουν στους μαθητές να εμβαθύνουν σε μαθηματικές δεξιότητες και δε σχετίζονται με ξεκάθαρες μαθηματικές έννοιες. Παράδειγμα από το κυπριακό εγχειρίδιο Δ' δημοτικού είναι το παρακάτω:

9. Η Μαρία και ο Γιάννης είναι φίλοι. Οι ηλικίες και των δύο φίλων είναι τετράγωνοι αριθμοί. Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι επίσης τετράγωνος αριθμός. Να γράψεις τις πιθανές ηλικίες της Μαρίας και του Γιάννη.

3 Προβλήματα πρότζεκτ, όπου ζητείται από τους μαθητές να συλλέξουν δεδομένα, να παρατηρήσουν, να ψάξουν πηγές, να μετρήσουν, να αναλύσουν, να καθορίσουν πρότυπα και σχέσεις, να επικοινωνήσουν μεταξύ τους και να σχεδιάσουν. Συνήθως, αυτά τα προβλήματα παίρνουν κάποιο χρόνο να διεκπεραιωθούν και δε λύνονται στη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας, ή μέσα σε μια ημέρα.

Παράδειγμα στην Ε΄ δημοτικού του ελληνικού εγχειριδίου:

Διερεύνηση

Τα παιδιά της Ε΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου στην Αθήνα έκαναν μια έρευνα, στην οποία κατέγραψαν τις ώρες παιχνιδιού και ξεκούρασης που έχουν συνολικά τις καθημερινές της εβδομάδας.

Κάνουμε στην τάξη μας μια αντίστοιχη έρευνα και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.

1. Συμπληρώνουμε τον πίνακα.

Κάθε αριθμός αντιπροσωπεύει την απάντηση ενός συμμαθητή μας ή μιας συμμαθήτριάς μας.

2. Οργανώνουμε τα δεδομένα μας συμπληρώνοντας τους πίνακες συχνοτήτων.

Ε΄ τάξη σχολείου της Αθήνας							
Ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές ημέρες της εβδομάδας							
4	5	10	10	5	15	5	10
5	10	6	15	5	5	5	5
5	5	9	7	14	5	6	11

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΩΡΑ

Η τάξη μας							
Ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές ημέρες της εβδομάδας							

Ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές	Ε΄ τάξη σχολείου της Αθήνας		Η τάξη μας	
	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό
0 - 4 ώρες		1		
5 - 9 ώρες		4		
10 - 14 ώρες		6		
15 - 20 ώρες				
άλλο				

Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι για την επίτευξη αυτής της δραστηριότητας, θα πρέπει να δαπανηθεί αρκετός χρόνος για να συλλεχθούν τα δεδομένα και έπειτα να περάσουμε στην επεξεργασία και ανάλυσή τους.

- 4 Έκθεση ιδεών, που ζητείται από τους μαθητές να εκφράσουν τις ιδέες, τις εμπειρίες, τους προβληματισμούς τους, τις αντιλήψεις, τα πράγματα που έχουν κατανοήσει και τη νέα γνώση που απέκτησαν. Αυτά τα προβλήματα είναι πολύ χρήσιμα για να αξιολογήσουν οι δάσκαλοι τόσο το βαθμό κατανόησης από την πλευρά των μαθητών, όσο και τη δική τους αποτελεσματικότητα.

Παράδειγμα που μπορεί να τεθεί εδώ είναι το εξής (Ε' Δημοτικού Ελλάδας)



Συζητάμε και κάνουμε προβλέψεις για το μέλλον του παίκτη.

- Με βάση τα δεδομένα, ποια πρόβλεψη μπορούμε να κάνουμε για την πορεία του παίκτη στη διάρκεια της αγωνιστικής περιόδου;
- Ποιοι πιθανοί παράγοντες μπορούν να ανατρέψουν τις προβλέψεις μας;



Με το παρόν πρόβλημα ο μαθητής μπαίνει στη θέση να προβλέψει ο ίδιος το πως πιστεύει ότι μπορεί να αγωνιστεί ένας παίκτης μπάσκετ, ενώ τίθεται και το ερώτημα του πώς μπορεί να βγει λάθος η πρόβλεψη. Δίνεται, λοιπόν η δυνατότητα στο μαθητή να αναπτύξει τις ιδέες του και να είναι σε θέση ο δάσκαλος να αντιληφθεί αν όντως ένας μαθητής έχει κατανοήσει την έννοια των πιθανοτήτων, των μέσων όρων κλπ.

Γενικά ως μη παραδοσιακά χαρακτηρίζονται τα προβλήματα που δε δίνονται με το παραδοσιακό κλασικό τρόπο, αλλά απαιτούν από το μαθητή να λύσει μια διαφορετική κατάσταση, είτε με διαφορετική προσέγγιση-στρατηγική από τα συνηθισμένα, είτε με διαφορετική απόδοση δεδομένων, μορφή απάντησης κλπ (McNeil et al., 2011).

Παραδοσιακά μπορούν να χαρακτηριστούν τα ρουτίνας, ξεκάθαρα προβλήματα που πολλές φορές επαναλαμβάνονται μέσα στα εγχειρίδια και δε χρειάζεται να ψάξεις τη μέθοδο επίλυσης, ή τη διαδικασία που θα ακολουθηθεί γιατί είναι προφανής.

Μία επόμενη κατηγοριοποίηση που εντοπίστηκε διακρίνεται ανάμεσα σε προβλήματα *Ρουτίνας* και *Μη ρουτίνας*. Στα προβλήματα ρουτίνας, ο μαθητής ακολουθεί μια δοκιμασμένη “συνταγή” και συνήθως η διαδικασία επίλυσης είναι δεδομένη και προφανής μέσα στο πρόβλημα. Συγκεκριμένα, αν ένα πρόβλημα παρουσιάζεται μετά από επεξήγηση μέσω κειμένου κάποιων συγκεκριμένων μεθόδων επίλυσης (αλγόριθμοι, φόρμουλας, διαδικασίας), οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιλυθεί το πρόβλημα, αυτό αποτελεί πρόβλημα ρουτίνας (Zhu, 2006). Τα ρουτίνας χαρακτηρίζονται από τους ερευνητές και ως συμβατικά, τα οποία είναι θεμελιώδους σημασίας για την

διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης στα μαθηματικά, αφού και η ζωή η ίδια είναι γεμάτη από προβλήματα ρουτίνας (Fan & Zhu, 2007). Είναι χαρακτηριστικό ότι τα προβλήματα ρουτίνας χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό μέσα στα εγχειρίδια, για να υπάρξει μία μεγαλύτερη εξοικείωση με κάθε καινούργια ενότητα που διδάσκεται στην τάξη. Τα προβλήματα αυτά, όπως θα αναδείξει παρακάτω η έρευνα, υπερτερούν σε σχέση με τα μη ρουτίνας μέσα σε όλα τα εγχειρίδια και εξυπηρετούν ένα συγκεκριμένο σκοπό: να εμπεδωθεί ένας κανόνας, ή μία πρακτική, ή μία θεωρία η οποία μόλις διδάχτηκε. Μια διάκριση που μπορεί να γίνει εδώ στα προβλήματα ρουτίνας είναι η εξής (Stigler, 1986):

1. Αθροιστικά: τα προβλήματα αυτά σχετίζονται με τις πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης. Εδώ υπάρχουν και οι εξής υποκατηγορίες:
 - Τα προβλήματα ομαδοποίησης είναι προβλήματα τα οποία φέρνουν μαζί δύο διαφορετικά ποσά. Για παράδειγμα: *Ο Πέτρος έχει 15 μπλε μπίλιες και 18 κίτρινες μπίλιες. Πόσες μπίλιες έχει σύνολο;*
 - Τα προβλήματα αλλαγής φέρνουν ένα νέο δεδομένο στο πρόβλημα. Παραδείγματος χάριν: *Ο Πέτρος έχει 15 μπίλιες και κερδίζει άλλες 14. Πόσες έχει τώρα;*
 - Στα προβλήματα εξισορρόπησης ο μαθητής καλείται να βρει τη διαφορά μεταξύ δύο ποσών και να αναφέρει τι πρέπει να κάνει προκειμένου να φτάσουν τα δύο διαφορετικά ποσά στο ίδιο επίπεδο. Εδώ το ίδιο παράδειγμα που χρησιμοποιήθηκε ως υποθετικό μπορεί να γίνει ως εξής: *Ο Τάκης έχει 23 μπίλιες ενώ ο Πέτρος 15. Πόσες μπίλιες πρέπει να δώσει στον Πέτρο για να φτάσει αυτές του Τάκη;*
 - Τα προβλήματα σύγκρισης στην εκφώνηση ζητούν να βρει ο μαθητής τη σχέση μεταξύ δύο ποσών, σχημάτων και ποια διαφορά έχουν αυτά μεταξύ τους. Το παράδειγμά εδώ μπορεί να γίνει ως εξής: *Ο Πέτρος έχει 15 μπίλιες και ο Τάκης 23. Πόσες περισσότερες μπίλιες έχει ο Τάκης από τον Πέτρο;*
2. Πολλαπλασιαστικά: τα προβλήματα αυτά περιέχουν μέσα τις πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (Fischbein et al., 1985). Παραδείγματα που

μπορεί να βρεθεί στο ελληνικό εγχειρίδιο της Δ' Δημοτικού τεύχος α' είναι τα εξής:

(α) Τα 135 παιδιά του σχολείου της Ναταλίας θα επισκεφθούν το Κέντρο Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης Ακρωτηρίου. Θα χωριστούν σε ομάδες. Κάθε ομάδα θα αποτελείται από 9 παιδιά. Πόσες ομάδες θα σχηματιστούν;

Απάντηση: _____

Προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα θα πρέπει να γίνει στο α' ερώτημα η πράξη $135/9=15$.

3. Ως προς τη θέση του αγνώστου: σύμφωνα με αυτήν την κατηγοριοποίηση τα παραπάνω προβλήματα (αθροιστικά και πολλαπλασιαστικά) μπορούν να διαχωριστούν ως εξής (Jonassen, 2003):

α) Άγνωστος τελικής θέσης: ο άγνωστος είναι το αποτέλεσμα μιας πράξης που περιγράφεται λεκτικά, ή όχι στο πρόβλημα. Παράδειγμα σε σχέση με τα παραπάνω: *Ο Πέτρος έχει 15 μπίλιες και η Μαρία του έδωσε άλλες 3. Πόσες μπίλιες έχει τώρα ο Πέτρος;* Το αποτέλεσμα έρχεται αφού εκτελεστεί η πράξη $15+3=18$, όπου το αποτέλεσμα είναι και ο άγνωστος που ψάχνουμε.

β) Άγνωστος ενδιάμεσης θέσης: ο άγνωστος εδώ είναι κάποιο ενδιάμεσο ποσό που λείπει για να φτάσουμε σε ένα δεδομένο αποτέλεσμα μιας πράξης που περιγράφεται μέσα στο πρόβλημα. *Ο Τάκης έχει 23 μπίλιες. Ο Πέτρος του δίνει*

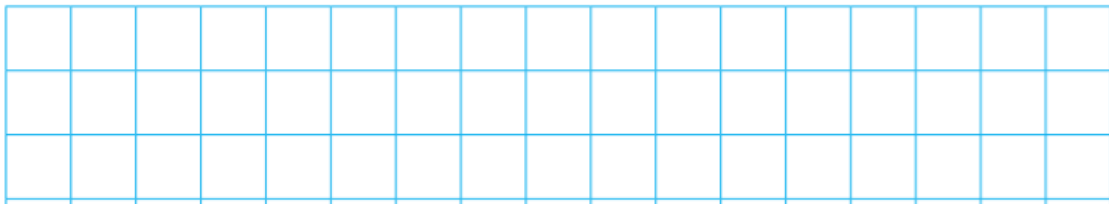
τόσες μπίλιες που ο Τάκης έχει πλέον 42. Πόσες μπίλιες του έδωσε ο Πέτρος; Εδώ, ο άγνωστος είναι ενδιάμεσος στην πράξη: $23+19=42$ όπου, το 19 είναι ο άγνωστος.

Παρατηρείται ότι οι δύο παραπάνω περιπτώσεις ότι είναι αλληλένδετες με τις κατηγορίες των αθροιστικών και πολλαπλασιαστικών παραδειγμάτων. Στο πρόβλημα σύγκρισης: *Ο Πέτρος έχει 15 μπίλιες και ο Τάκης 23. Πόσες περισσότερες μπίλιες έχει ο Τάκης από τον Πέτρο;* ο άγνωστος είναι τελικός στην πράξη $23-15=8$.

Ενώ στο παράδειγμα: *η Θεοδώρα χρειάζεται 750g βούτυρο, για να φτιάξει γλυκίσματα. Πόσα κουτιά βούτυρο πρέπει να αγοράσει;* ο άγνωστος είναι επίσης τελικός στην πράξη $750/250=3$, όμως στην πράξη $250 \times 3=750$ είναι ενδιάμεσος.

Εντοπίζεται στην επόμενη θέση η κατηγορία των *Προβλημάτων Κατασκευής*, όπου εδώ οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν στο γραπτό τους ένα σχέδιο, μια γραφική παράσταση ή έναν πίνακα για να φτάσουν στη λύση του μαθηματικού προβλήματος. Παράδειγμα κατασκευαστικού προβλήματος στο εγχειρίδιο Ε' Δημοτικού της Κύπρου είναι το εξής:

5. Να κατασκευάσεις δύο διαφορετικά τρίγωνα με εμβαδόν 24 cm^2 .



Τα προβλήματα εφαρμογής θα μπορούσαν να οριστούν και ως προβλήματα μοντελοποίησης. Τα προβλήματα μοντελοποίησης που αποτελούν την επόμενη κατηγορία μαθηματικών προβλημάτων, είναι αυτά που προσπαθούν να εξηγήσουν τον πραγματικό κόσμο μέσω μαθηματικών μοντέλων. Η διαδικασία μοντελοποίησης περιγράφεται στη βιβλιογραφία ως μια διαδικασία που ένα μη-μαθηματικό πρόβλημα λύνεται μέσω της εφαρμογής μαθηματικών (Kaiser & Maab, 2007), δηλαδή περιγραφική

μιας κατάστασης με μαθηματική γλώσσα. Παραδείγματα μοντελοποίησης φαίνονται ακριβώς παρακάτω, όπου οι μαθητές καλούνται να σκεφτούν καθημερινά δεδομένα με μαθηματικό τρόπο για να φτάσουν στην επίλυση.

Μαγείρεμα, καθάρισμα, πότισμα, πλύσιμο... το νερό είναι απαραίτητο κάθε μέρα στους ανθρώπους σε κάθε γωνιά της γης. Το ξοδεύουμε όμως με σύνεση; Μελετήστε τον πίνακα και απαντήστε.

Ενεργώ απερίσκεπτα	Λίτρα
Μπάνιο σε γεμάτη μπανιέρα	180
Πλύσιμο δοντιών (η βρύση ανοιχτή)	20
Πλύσιμο πιάτων στο χέρι (24ωρο)	150
Πλυντήριο πιάτων (πλήρες πρόγρ.)	40
Πλυντήριο ρούχων (πλήρες πρόγρ.)	80
Ξύρισμα (βρύση συνεχώς ανοιχτή)	20
Πλύσιμο αυτοκινήτου με λάστιχο	180
Βρύση που στάζει (24ωρο)	144
Καζανάκι χωρίς ειδική σακούλα	10

Ενεργώ με περίσκεψη	Λίτρα
Ντους (κλειστό στο σαπούνισμα)	30
Πλύσιμο δοντιών (η βρύση κλειστή)	0,5
Πλύσιμο-Ξέβγαλμα στον νεροχύτη	25
Πλυντ. πιάτων (οικονομικό πρόγρ.)	22
Πλυντ. ρούχων (οικονομικό πρόγρ.)	45
Ξύρισμα (νερό όταν χρειάζεται)	3
Πλύσιμο αυτοκινήτου με κουβά	60
Βρύση που δεν στάζει	0
Καζανάκι με ειδική σακούλα	7
Καζανάκι 2 ταχυτήτων	3 ή 6

Πηγή: ΕΥΑΘ 2004, ΔΕΥΑΚ 2004

Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες μπορείς να υπολογίσεις χρησιμοποιώντας αριθμητικές παραστάσεις;

α) Το νερό που ξοδεύεις εσύ σε μια εβδομάδα;

.....

β) Το νερό που ξοδεύει η οικογένειά σου σε μια εβδομάδα;

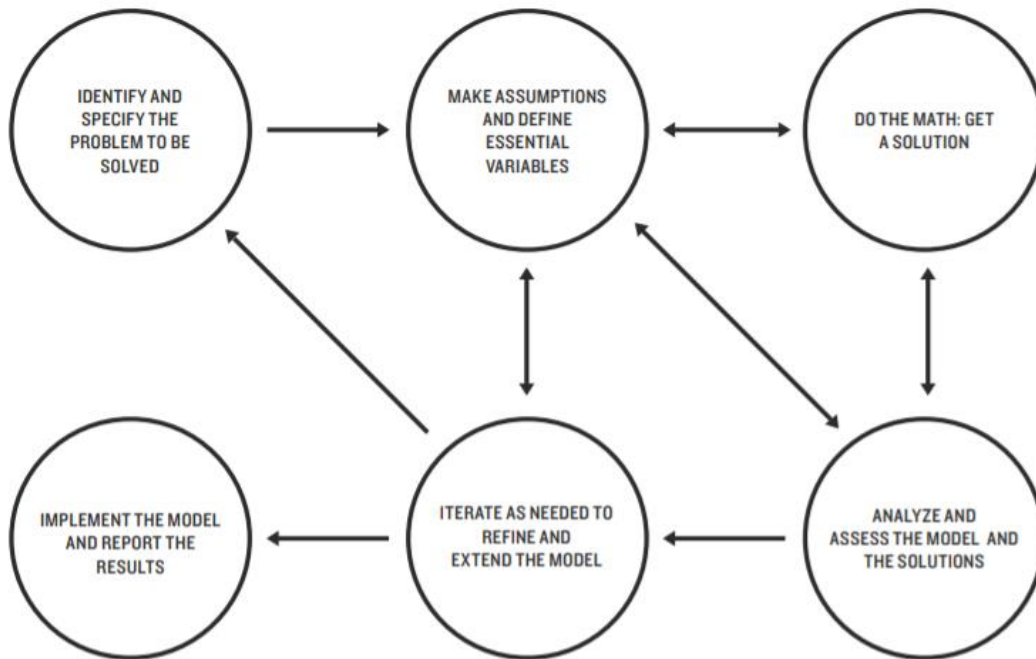
.....



Το παραπάνω πρόβλημα προέρχεται από το βιβλίο της ΣΤ' Δημοτικού στην Ελλάδα. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς τα δεδομένα που δίνονται άπτονται στη σφαίρα του πραγματικού, δηλαδή θα μπορούσαν να είναι πραγματικά αριθμητικά δεδομένα και ο μαθητής θα πρέπει να σκεφτεί ο ίδιος με βάση τα δεδομένα την κατανάλωση του ίδιου και την οικογένειάς του σε μια εβδομάδα. Πράγμα που σημαίνει ότι θα πρέπει να ανακαλέσει δεδομένα από την πραγματική του ζωή όπως τις δραστηριότητες της καθημερινότητας και να τις μοντελοποιήσει σε μαθηματική γλώσσα συνδυασμένα με τις πληροφορίες του προβλήματος για να φτάσει σε ένα αποτέλεσμα. Σύμφωνα με τον κύκλο της μοντελοποίησης, στο πρώτο στάδιο ο λύτης καλείται να προχωρήσει στην κατασκευή ενός μοντέλου με βάση τα δεδομένα που δίνονται για την υπάρχουσα κατάσταση στο πρόβλημα. Σε επόμενη φάση εισέρχονται ορισμένοι μετασχηματισμοί που γνωρίζει ο μαθητής από την καθημερινότητα, πχ στο παραπάνω πρόβλημα ο μαθητής θα πρέπει να

υπολογίσει τις δραστηριότητές του μέσα στη μέρα που συνεπάγονται την κατανάλωση νερού και στη συνέχεια να σκεφτεί ότι μια εβδομάδα έχει 7 ημέρες και άρα να πολλαπλασιάσει με το 7. Στη συνέχεια το μοντέλο μαθηματοποιείται και στην τέταρτη φάση γίνονται οι υπολογισμοί. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να έχει διάφορες προεκτάσεις, καθώς συνδέεται με τις καταναλωτικές συνήθειες και την πολυτιμότητα του νερού ως φυσικός πόρος που δεν είναι ανεξάντλητος και άρα και δοθεί αφορμή και για περαιτέρω συζήτηση.

Τα προβλήματα μοντελοποίησης είναι μερικές φορές δύσκολα για τους μαθητές, καθώς πρέπει να αναλύσουν και να επικοινωνήσουν με άλλους μαθητές ή με άτομα εκτός σχολείου όπως η οικογένεια. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η διαδικασία μοντελοποίησης στα μαθηματικά προβλήματα.



Εικόνα 1: η διαδικασία μοντελοποίησης στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Bliss et al., 2016)

Τα προβλήματα εφαρμογής απεικονίζουν μια ρεαλιστική κατάσταση. Παράδειγμα εφαρμογής σε δεδομένα που προέρχονται από την πραγματική ζωή αποτελεί ένα πρόβλημα με δεδομένα για την ανακύκλωση (σελ. 34 Μέρος 5 κυπριακό εγχειρίδιο Ε' Δημοτικού).

Ήξερες ότι ...

- Ένα πλαστικό μπουκάλι χρειάζεται 100 - 200 χρόνια να αποσυντεθεί.
- Ένα αλουμινένιο κουτί χρειάζεται 500 χρόνια να αποσυντεθεί.
- Ένας τόνος ανακυκλωμένου χαρτιού σώζει 17 δέντρα.
- Η ανακύκλωση 1 τόνου γυαλιού εξοικονομεί ενέργεια αντίστοιχη με 135 λίτρα πετρελαίου.
- Ανακυκλώνοντας 5 πλαστικά μπουκάλια, δημιουργείται αρκετό υλικό, για να κατασκευαστεί ένα μπουφάν.
- Ανακυκλώνοντας ένα γυάλινο μπουκάλι, παράγεται αρκετή ενέργεια, για να φωτιστεί ένα δωμάτιο για 8 ώρες.

(α) Πόσα δέντρα είναι δυνατόν να σωθούν με την ανακύκλωση 25 τόνων χαρτιού;

(β) Με πόσα λίτρα πετρελαίου αντιστοιχεί η ενέργεια που εξοικονομείται από την ανακύκλωση 8 τόνων γυαλιού;

(γ) Πόσα μπουφάν μπορούν να κατασκευαστούν, ανακυκλώνοντας 120 πλαστικά μπουκάλια;

Σε αυτό το πρόβλημα δίνονται πραγματικά δεδομένα και τα παιδιά καλούνται να απαντήσουν στις ερωτήσεις μέσω μαθηματικών πράξεων πχ για το ερώτημα α. οι μαθητές καλούνται να πολλαπλασιάσουν το $17 \cdot 25$ για να βρουν το αποτέλεσμα.

Προχωρώντας στην επόμενη κατάταξη θα αναφερθούν προβλήματα που κατηγοριοποιούνται ως εξής: *Ρεαλισμού-Φαντασίας* (Zhu & Fan, 2006).

Στην κατηγορία ρεαλισμού ανήκει ένα πρόβλημα που παρουσιάζει ένα σενάριο που μπορεί να υφίσταται στην πραγματικότητα και αποτελεί ένα αληθοφανές σενάριο.

Εδώ μπορούν να υπάρξουν σενάρια που είναι αληθινά, ή κατασκευασμένα σενάρια που περιγράφουν όμως μια πραγματική κατάσταση, δηλαδή ένα αληθινό γεγονός.

Αντίθετα, ένα πρόβλημα φαντασίας είναι μια κατάσταση που δεν υφίσταται στην πραγματικότητα, περιγράφει κάτι φανταστικό.

Παράδειγμα προβλήματος που βρίσκεται στο 2ο εγχειρίδιο της Δ' Δημοτικού της Κύπρου και βασίζεται σε πραγματικά γεγονότα είναι το εξής:



(α) Πόσα περίπου κιλά μπαμπού τρώει ένα γιγάντιο πάντα σε μια εβδομάδα;

Απάντηση: _____

(β) Πόσες περίπου ώρες κοιμάται ένα γιγάντιο πάντα σε μια εβδομάδα;

Απάντηση: _____

(γ) Πόσες περίπου ώρες κοιμάται ένα γιγάντιο πάντα σε έναν μήνα;

Απάντηση: _____

Αληθοφανές πρόβλημα που όμως είναι πλασματικό που βρίσκεται πάλι στο ίδιο εγχειρίδιο είναι το εξής:

(α) Στο ξενοδοχείο «Παραλία» έφτασαν τη Δευτέρα 6 τουριστικά λεωφορεία που το καθένα μετέφερε 57 τουρίστες. Την Τρίτη έφτασαν 4 λεωφορεία που το καθένα μετέφερε 55 τουρίστες. Πόσοι τουρίστες έφτασαν στο ξενοδοχείο και τις 2 ημέρες;

Απάντηση: _____

(β) Σε μια καλοκαιρινή κατασκήνωση δήλωσαν συμμετοχή 132 αγόρια. Ο συνολικός αριθμός των παιδιών που δήλωσαν συμμετοχή ήταν 219. Πόσα περισσότερα ήταν τα αγόρια που δήλωσαν συμμετοχή από τα κορίτσια;

Απάντηση: _____

(γ) Ο Θεόδωρος εργάστηκε για 4 εβδομάδες το καλοκαίρι ως σερβιτόρος. Ο εβδομαδιαίος μισθός του ήταν €125. Χρησιμοποίησε ορισμένα από τα χρήματα που κέρδισε, για να αγοράσει έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή αξίας €312. Πόσα χρήματα του έμειναν;

Απάντηση: _____

Παρατηρείται ότι οι καταστάσεις που περιγράφει θα μπορούσαν να συμβαίνουν στην πραγματικότητα. Αντίθετα τα προβλήματα καθαρής φαντασίας περιγράφουν μια εξωπραγματική κατάσταση που ποτέ δε θα μπορούσε να συμβεί. Παράδειγμα: *Πόσα μήλα μπορεί να φάει ο Πέτρος σε 1 ώρα αν γνωρίζεις ότι μπορεί να φάει ένα μήλο σε 30 δευτερόλεπτα;* Είναι αδύνατο για κάποιον να φάει 120 μήλα σε μια ώρα.

Η κατηγοριοποίηση συνεχίζει και διακρίνονται τα προβλήματα με καθαρή μαθηματική μορφή-οπτικά-κειμενικά-μεικτά (Zhu & Fan, 2006).

Στον αριστερό πίνακα φαίνονται πέντε χώρες που έχουν περίπου την ίδια έκταση σε τετραγωνικά χιλιόμετρα (130.000 τετραγωνικά χιλιόμετρα) αλλά διαφορετικό πληθυσμό. Να υπολογίσετε τον λόγο των κατοίκων προς την έκταση. Ο λόγος αυτός ονομάζεται «πυκνότητα πληθυσμού».

Στη συνέχεια να ταξινομήσετε τις χώρες ανάλογα με την πυκνότητα του πληθυσμού και να τις γράψετε στον δεξιό πίνακα.

ΧΩΡΑ	ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ
Νικαράγουα	5.070.000
Ελλάδα	10.530.000
Νεπάλ	23.920.000
Τατζικιστάν	6.110.000
Μπαγκλαντές	120.380.000



Όπως αναφέρεται και στον τίτλο, τα προβλήματα αυτά μπορεί να αποδίδονται μόνο με σύμβολα και αριθμούς, με καθαρό κείμενο, να επεξεργαστούν δεδομένα από μια εικόνα, έναν πίνακα ή ένα διάγραμμα, αλλά και μια μίξη αυτών. Το παραπάνω αποτελεί παράδειγμα από το ελληνικό εγχειρίδιο Στ' δημοτικού.

Κεφάλαιο 3^ο : Μεθοδολογία

3.1 Εισαγωγή-Ερευνητικά Ερωτήματα.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που καλούμαστε να απαντήσουμε στην παρούσα εργασία είναι τα εξής:

- Πως διαφοροποιούνται τα είδη των προβλημάτων ως προς τις κατηγορίες;
- Ποιες είναι οι κατηγορίες προβλημάτων που κυριαρχούν στα εγχειρίδια της Κύπρου και ποιες στην Ελλάδα (σύγκριση);
- Πώς οι κατηγορίες προβλημάτων διαφοροποιούνται από τάξη σε τάξη σε κάθε χώρα;

Προκειμένου να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα, θα γίνει ανάλυση των εγχειριδίων των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού σε Ελλάδα και Κύπρο ως προς τη σύσταση των προβλημάτων που περιέχουν. Τα προβλήματα θα κατηγοριοποιηθούν σε κάθε τύπο σε πίνακες και από αυτήν την ανάλυση, σκοπός είναι να γίνει κατανοητό και να αποδειχθούν ποια είδη προβλημάτων χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου και της Ελλάδος περισσότερο και ποια λιγότερο και να συγκριθούν ανά χώρα και ανά τάξη.

Στην παρούσα εργασία, έλαβε χώρα η διαδικασία ανάλυσης εγχειριδίων. Η μέθοδος της ανάλυσης των εγχειριδίων (textbook analysis) αποτελεί έναν ευρύ όρο ο οποίος περιλαμβάνει (Fan et al., 2013):

A) ανάλυση ενός συγκεκριμένου εγχειριδίου από μια σειρά εγχειριδίων, η οποία συνήθως εστιάζει στο πώς διαχειρίζονται ένα συγκεκριμένο θέμα, ή μια ομάδα θεμάτων, ή πώς παρουσιάζεται μια ιδέα, ή μια οπτική γωνία

B) ανάλυση διαφορετικών εγχειριδίων από την ίδια χώρα, ή , πιο συχνά, ανάμεσα σε διαφορετικές χώρες, όπου συνήθως η έρευνα εστιάζεται στο να αναγνωριστούν οι ομοιότητες και οι διαφορές που υπάρχουν σε αυτά. Αυτή η ανάλυση μπορεί να ειπωθεί και ως σύγκριση εγχειριδίων (textbook comparison).

Η σύγκριση, βέβαια, θα πρέπει να στηριχθεί πρωτίστως στην ανάλυση για να μπορέσει η έρευνα να διεκπεραιωθεί. Οπότε μπορεί να αναφερθεί και ως συγκριτική ανάλυση εγχειριδίων (textbook comparative analysis).

Η προσέγγιση που έχει δοθεί περισσότερο είναι αυτή που εστιάζει στο προϊόν (product-orientated approach). Αυτό σημαίνει ότι η ανάλυση δεν εστιάζει σε θέματα όπως η διανομή, η συγγραφή, ή η ανάπτυξή τους, αλλά γίνεται προσέγγιση με βάση την ύλη που περιέχουν και το είδος της γνώσης που μεταδίδουν. Αυτή η προσέγγιση έχει κυριαρχήσει πλέον στην έρευνα, ενώ έχει αρχίσει να κεντρίζει το ενδιαφέρον και η προσέγγιση με βάση τη χρήση των εγχειριδίων (Fan et al., 2013).

Έχοντας ως στόχο να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα, θα γίνει ανάλυση των εγχειριδίων των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού σε Ελλάδα και Κύπρο ως προς τη σύσταση των προβλημάτων που περιέχουν.

Προκειμένου να γίνει ανάλυση των ειδών προβλημάτων που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια στα οποία αναφερόμαστε στην εργασία αυτήν, ακολουθήσαμε την εξής διαδικασία:

Με βάση την κατηγοριοποίηση που έχει προαναφερθεί, η οποία στηρίζεται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, ξεκίνησε σε κάθε εγχειρίδιο από την αρχή η κατηγοριοποίηση κάθε προβλήματος που περιέχονται σε αυτό. Σε κάθε ενότητα υπάρχουν συγκεκριμένα προβλήματα τα οποία αποδίδονται με διαφορετικές μορφές και επεξηγούν συγκεκριμένες έννοιες, ενώ κάθε πρόβλημα μπορεί να περιέχει μέσα διαφορετικά υποερωτήματα. Επειδή κάθε υποερώτημα μπορεί να ανήκει σε διαφορετικές κατηγορίες, έγινε μία κατηγοριοποίηση των ίδιων των υπό ερωτημάτων και όχι απλά των γενικών προβλημάτων στα οποία αναφέρονται τα υποερωτήματα αυτά.

Μελετώντας τις ήδη προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών από τον πρώτο κύκλο φοίτησης στο σχολείο (Α', Β', Γ') και τα προβλήματα που υπάρχουν στα εγχειρίδια μαθηματικών των δύο χωρών, Κύπρου και Ελλάδας, προχώρησε η μελέτη στα εγχειρίδια της τετάρτης δημοτικού. Παρατηρείται ότι από την αρχή της χρονιάς, οι μαθητές εντάσσονται σε διαδικασίες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων που ταξινομούνται στις κατηγορίες που προαναφέρθηκαν, βασιζόμενοι σε γνωστικές διεργασίες των προηγούμενων τάξεων και μαθηματικών συλλογισμών. Ξεκινώντας από την πρώτη ενότητα κατηγοριοποιούνται τα προβλήματα αναλύοντας το κάθε ένα υποερώτημα κατά

πόσο ταιριάζει σε κάθε διαφορετική κατηγορία. Δηλαδή, αξιολογείται σε σχέση με το αν μπορεί να ανήκει αρχικά στις γενικές κατηγορίες δηλαδή, απλά-σύνθετα, ανοιχτά-κλειστά, αν είναι παραδοσιακό ή μη παραδοσιακό, ή αν είναι ρουτίνας ή μη ρουτίνας, αν περιγράφεται μια κατάσταση αληθινή, ή πλασματική, αν γίνεται χρήση δεδομένων όπως γραφήματα, πίνακες, εικόνες ή αν το πρόβλημα δίνεται σε καθαρή μαθηματική μορφή, ή σε μορφή κειμένου, καθώς και αν η λύση του προβλήματος είναι ένας αριθμός, ένα σχήμα ή εκφράζεται με λέξεις, ή προτάσεις. Επίσης, αν τα προβλήματα απαιτούν από το μαθητή να κατασκευάσει ο ίδιος ένα γράφημα, έναν πίνακα, ή ένα σχέδιο. Οι γενικές κατηγορίες προβλημάτων παρατίθενται παρακάτω σε πίνακα.

Πίνακας κατηγοριοποίησης μαθηματικών προβλημάτων για τις τάξεις Δ', Ε', Στ'

Κατηγορίες Προβλημάτων
1.1 Απλά Προβλήματα
1.2 Σύνθετα Προβλήματα
2.1 Ανοιχτού Τύπου
2.2 Κλειστού Τύπου
3.1 Παραδοσιακά
3.2 Μη παραδοσιακά
4.1 Ρουτίνας
4.2 Μη ρουτίνας
5. Κατασκευή Προβλήματος
6. Προβλήματα μοντελοποίησης
7.1 Ρεαλιστικά
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή
8.2 Κειμενική μορφή
8.3 Πίνακας, γράφημα
8.4 Εικόνα, σχήμα
8.5 Μικτή μορφή

Κάθε μία από αυτές τις κατηγορίες έχει και υποκατηγορίες. Για παράδειγμα ένα πρόβλημα ρουτίνας μπορεί να είναι ομαδοποίησης και να έχει μία και μοναδική λύση, η οποία βρίσκεται με έναν συγκεκριμένο τρόπο (άρα κατηγοριοποιείται ταυτόχρονα και στα κλειστά προβλήματα και στα ομαδοποίησης), ενώ μπορεί να περιέχει και ένα γράφημα το οποίο χρησιμοποιείται από το μαθητή για να φτάσει στη λύση. Με έναν ανάλογο τρόπο κατηγοριοποιούνται όλα τα προβλήματα που βρίσκονται μέσα στο κάθε εγχειρίδιο. Άρα, κάθε πρόβλημα μπορεί να μπαίνει ταυτόχρονα σε πολλές κατηγορίες, ανάλογα με το πώς ορίζεται η κάθε μία. Δηλαδή, αν ένα πρόβλημα είναι μη παραδοσιακό και εντάσσεται στην υποκατηγορία π.χ. της έκθεσης ιδεών, ο τρόπος που ορίζονται τα ανοιχτού τύπου προβλήματα, δεν μας εμποδίζει να το κατατάξουμε και σε αυτά.

Παρατηρείται επίσης, πως σε ένα μαθηματικό πρόβλημα που καλείται να επιλύσει ο μαθητής, ένα υποερώτημα μπορεί να ανήκει σε διαφορετική κατηγορία από ένα άλλο. Μπορεί το πρόβλημα να περιέχει για παράδειγμα, ένα ερώτημα που αποτελεί κλειστό πρόβλημα και να έχει μία και μοναδική λύση, ενώ το δεύτερο ερώτημα στην ίδια άσκηση να καλεί τον μαθητή να βρει διαφορετικές απαντήσεις, οι οποίες να είναι όλες σωστές. Με αυτό τον τρόπο κατανεμήθηκαν όλα τα προβλήματα που περιέχονται μέσα στο εγχειρίδιο στις διαφορετικές κατηγορίες που παρουσιάζονται στους πίνακες που παρατίθενται παρακάτω. Στη συνέχεια, ομαδοποιήθηκαν και ταξινομήθηκαν τα προβλήματα σε διαφορετικές κατηγορίες.

Στο τέλος της κατηγοριοποίησης του κάθε εγχειριδίου, παρατίθεται σε μορφή ποσοστό επί τοις εκατό, η κάθε κατηγορία προβλημάτων επί του συνόλου των προβλημάτων που περιέχονται σε αυτό. Με αυτό τον τρόπο μπορεί κάποιος να εξάγει συγκεκριμένα συμπεράσματα σε σχέση με το ποια είδη προβλημάτων κυριαρχούν στα εγχειρίδια ανάλογα την τάξη και τη χώρα.

Η διαδικασία αναλυτικότερα που ακολουθήθηκε είναι η εξής:
Τα εγχειρίδια σε κάθε τάξη του ελληνικού σχολείου αποτελούνται από ενότητες οι οποίες είναι ομαδοποιημένες σε περιόδους. Το εγχειρίδιο της Δ' Δημοτικού αποτελείται από 3 περιόδους και συνολικά 56 ενότητες, ενώ συνολικά η τάξη αυτή χρησιμοποιεί μόνο ένα εγχειρίδιο. Κατά την ανάλυση του εγχειριδίου, ξεκινήσαμε από την ενότητα 1 ψάχνοντας το κάθε πρόβλημα που συναντάμε σε ποιες επιμέρους κατηγορίες μπορεί να

ανήκει. Το κάθε υποερώτημα αξιολογήθηκε με βάση τον τρόπο με τον οποίο επιλύεται, δηλαδή τον αριθμό και το είδος των πράξεων που χρησιμοποιούνται, πώς αποδίδονται τα δεδομένα και σε τι μορφή πρέπει να είναι τα ζητούμενα. Επίσης, μας ενδιαφέρεις ποιος είναι ο τρόπος σκέψης που πρέπει να χρησιμοποιήσει ο ίδιος ο μαθητής προκειμένου να φτάσει στη λύση. Κρίνοντας από τη στρατηγική την οποία οφείλει ο μαθητής να ακολουθήσει, πόσο περίπλοκη πρέπει να είναι η σκέψη του, αν αυτό που του ζητείται είναι κάτι συνηθισμένο που το συναντάει και το διεκπεραιώνει συχνά, αν ζητάει από το μαθητή να σκεφτεί με τρόπο έξω από το συνηθισμένο. Ένα πρόβλημα που συναντάται μπορεί να είναι απλό και σύνθετο σε διαφορετικά ερωτήματα, ή να ξεκινάει ως παραδοσιακό πρόβλημα και να καταλήγει σε ένα μη παραδοσιακό υποερώτημα. Ξεκινώντας από την πρώτη σελίδα, τα προβλήματα μετρήθηκαν σε συνολικό αριθμό και προχωρώντας ανά σελίδα, κάθε υποερώτημα αξιολογείται και εντάσσεται στις κατηγορίες που ανήκει ανάλογα τα χαρακτηριστικά του.

Η ύλη την οποία προσεγγίζει το κάθε εγχειρίδιο κλιμακώνεται σε βαθμό δυσκολίας καθώς προχωράει σε επόμενες ενότητες. Η ύλη που πραγματεύονται τα εγχειρίδια στην αρχή αποτελούν επανάληψη της ύλης των προηγούμενων τάξεων και σιγά σιγά εμβαθύνουν σε νέα πεδία γνώσης. Με τον ίδιο τρόπο προχωρήσαμε στην ανάλυση και των υπόλοιπων εγχειριδίων των άλλων τάξεων και των κυπριακών.

Τα μαθηματικά Ε' Δημοτικού της Ελλάδας χωρίζονται σε δύο τεύχη. Στο α' τεύχος περιέχονται 4 ενότητες με την 1 να έχει τα κεφάλαια 1-7, τη 2η τα 8-12, την 3η τα 13-21 και την 4η τα 22-24. Σε κάθε ενότητα υπάρχει και ένα επιπλέον επαναληπτικό κεφάλαιο. Στο τεύχος β' έχουμε τις ενότητες 5 (κεφ. 25-32), 6 (κεφ. 33-35), 7 (36-44) και 8 (κεφ. 45-52). τέλος, στη ΣΤ' Τάξη έχουμε ένα εγχειρίδιο με 6 ενότητες και τα κεφάλαια χωρίζονται ως εξής: ενότητα 1(1-24), 2(25-29), 3(30-44), 4 (45-48), 5 (49-55) και 6 (56-71). Αξίζει να σημειωθεί ότι στα ελληνικά εγχειρίδια τα προβλήματα βρίσκονται στο τετράδιο εργασιών και όχι στο κανονικό εγχειρίδιο. Στο βιβλίο περιλαμβάνονται οι δραστηριότητες και η θεωρία.

Τα μαθηματικά Δ' Δημοτικού της Κύπρου έχουν 5 εγχειρίδια, η Ε' έχει 3 και ΣΤ' 6. Η Δ' τάξη έχει στο 1ο εγχειρίδιο τις ενότητες 1-3, στο 2ο τις ενότητες 4-6, στο 3ο εγχειρίδιο τις ενότητες 7-8, στο 4ο εγχειρίδιο τις ενότητες 79-10 και στο 5ο εγχειρίδιο τις ενότητες 11 και 12. Η Ε' τάξη έχει στο 1ο μέρος τις ενότητες 1-3, στο 2ο μέρος τις 4-5

και στο 3ο μέρος τις ενότητες 6-7. Η ΣΤ' τάξη έχει στο 1ο εγχειρίδιο τις ενότητες 1-3, στο 2ο τις 4-5, στο 3ο τις 6-7, στο 4ο την 8, στο 5ο τις ενότητες 9-10 και στο 6ο τις ενότητες 11-12. Σε γενικές γραμμές τα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου είναι πολύ μεγαλύτερα σε έκταση από τα ελληνικά.

Κεφάλαιο 4^ο : Αποτελέσματα

Η διαδικασία συλλογής δεδομένων για την εξαγωγή συμπερασμάτων ήταν αρκετά χρονοβόρα, καθώς έγινε μετά από λεπτομερή ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων του κάθε εγχειριδίου ξεχωριστά. Μετρώντας τα προβλήματα ένα προς ένα, κατασκευάστηκαν πίνακες για κάθε μία από τις προαναφερθείσες κατηγορίες, όπου εντάσσονταν τα ερωτήματα και τα υποερωτήματων των προβλημάτων που υπάρχουν σε κάθε εγχειρίδιο. Για τα προβλήματα που χωρίζονται σε απλά και σύνθετα κατασκευάστηκε ο πρώτος πίνακας και εκεί εντάχθηκαν προβλήματα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, που ανταποκρίνονταν στον ορισμό της βιβλιογραφίας. Για τα προβλήματα ανοιχτού ή κλειστού τύπου κατασκευάστηκε ο δεύτερος πίνακας βάση της ίδιας διαδικασίας και κάπως έτσι, δημιουργήθηκαν συνολικά οκτώ πίνακες για κάθε τάξη. Παράλληλα, οι υποκατηγορίες των προβλημάτων εντάχθηκαν στον ανάλογο πίνακα, σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά τους. Στους πίνακες παρουσιάζεται επίσης, το πλήθος των προβλημάτων κάθε κατηγορίας για κάθε τάξη και χώρα ξεχωριστά, το τελικό σύνολο, καθώς και το ποσοστό που κατέχει η κάθε κατηγορία επί τοις εκατό. Κάτω από κάθε ξεχωριστό πίνακα, υπάρχει ένας σύντομος σχολιασμός σχετικά με το πλήθος και τα ποσοστά των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν. Ξεκινώντας απ' την Δ' τάξη αρχικά, παρουσιάζονται οι πίνακες που αφορούν τα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου και σχολιασμός των αποτελεσμάτων της τάξης που αφορούν και στη συνέχεια, ακριβώς από κάτω οι πίνακες που αφορούν την Ελλάδα και ο εξίσου ανάλογος σχολιασμός. Ακολουθούν, οι συγκριτικοί πίνακες των δύο χωρών για το ίδιο επίπεδο και τις ίδιες κατηγορίες προβλημάτων και έπειτα η σύγκριση. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο συνεχίζεται η περιγραφή της Ε' τάξης και της Στ' τάξης του δημοτικού. Στο τέλος, επισημαίνονται οι διαφορές ή οι ομοιότητες κάθε χώρας σε κάθε τάξη με βάση τα ποσοτικά στοιχεία για τα προβλήματα κάθε κατηγορίας και αναπτύσσονται σχόλια και παρατηρήσεις για την κάθε χώρα από τάξη σε τάξη.

Παρακάτω, παρατίθενται τα αποτελέσματα όπως περιγράφονται πιο πάνω:

4.1 Μαθηματικά προβλήματα των Μαθηματικών Εγχειριδίων της Δ΄ Δημοτικού της Ελλάδας και της Κύπρου.

Στους παρακάτω πίνακες παρατίθενται το πλήθος των κατηγοριών και το ποσοστό επί του συνόλου των προβλημάτων σε Ελλάδα και Κύπρο για τη Δ΄ Δημοτικού:

Από το κυπριακό εγχειρίδιο:

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
1.1 Απλά Προβλήματα	132	33.6%
1.2 Σύνθετα Προβλήματα	261	66.4%
Σύνολο:	393	100%

Από το σύνολο των προβλημάτων τα περισσότερα αποτελούν σύνθετα προβλήματα, ενώ τα υπόλοιπα απλά.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
2.1 Ανοιχτού τύπου	87	21.1%
2.2 Κλειστού τύπου	325	78.9%
Σύνολο:	412	100%

Στο κυπριακό εγχειρίδιο κυριαρχούν τα κλειστού τύπου προβλήματα (78.9% επί του συνόλου των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας).

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.1 Παραδοσιακά	319	81.8%
3.2 Μη παραδοσιακά	71	18.2%
Σύνολο:	390	100%
3.2 Μη παραδοσιακά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.2.1 Κατασκευή προβλημάτων	15	21.1%
3.2.2 Γρίφου-Λογικής	51	71.8%
3.2.3 Πρώτζεκτ	5	7.1%
3.2.4 Έκθεση Ιδεών	0	0%
Σύνολο:	71	100%

Όπως είναι και αναμενόμενο, τα παραδοσιακά προβλήματα κυριαρχούν (81.8%). Όμως υπάρχουν και αρκετά μη παραδοσιακά, όπου τα περισσότερα είναι τύπου γρίφου-λογικής.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1 Ρουτίνας	340	81.5%
4.2 Μη ρουτίνας	77	18.5%
Σύνολο:	417	100%
4.1 Ρουτίνας	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1.1 Αθροιστικά	127	37.4%
4.1.2 Πολλαπλασιαστικά	213	62.6%
Σύνολο:	340	100%

4.1.1 Αθροιστικά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
-Αλλαγής	40	31.5%
-Ομαδοποίησης	48	37.8%
-Σύγκρισης	19	15%
-Εξισορρόπησης	20	15.7%
Σύνολο:	127	100%

4.1.3 Θέση αγνώστου	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
- Τελικός	126	37%
- Ενδιάμεσος	214	63%
Σύνολο:	340	100%

Τα προβλήματα ρουτίνας αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος των προβλημάτων (81,5%). Από αυτά, τα περισσότερα είναι πολλαπλασιαστικά, πλησιάζοντας τα 2/3 του ποσοστού των προβλημάτων ρουτίνας, ενώ τα αθροιστικά αποτελούν λίγο περισσότερο από το 1/3 των προβλημάτων ρουτίνας. Στα αθροιστικά προβλήματα το μεγαλύτερο ποσοστό καταλαμβάνουν τα ομαδοποίησης, κι έπειτα ακολουθούν τα αλλαγής.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5. Κατασκευή προβλήματος	20	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5.1 Κατασκευή εικόνας	15	75%
5.2 Κατασκευή γραφήματος	3	15%
5.3 Κατασκευή πίνακα	2	10%
Σύνολο:	20	100%

Στο κυπριακό εγχειρίδιο υπάρχουν λίγα κατασκευαστικά προβλήματα (20 σε σύνολο στα 417, δηλαδή περίπου 5%). Από αυτά τα περισσότερα ζητούν από τους μαθητές να κατασκευάσουν κάποιο σχέδιο.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
6. Μοντελοποίησης	17	100%

Στο κυπριακό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης καταμετρήθηκαν στο σύνολο 17 προβλήματα μοντελοποίησης.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1 Ρεαλιστικά	252	100%
7.2 Φανταστικά- Εξωπραγματικά	0	0%
Σύνολο:	252	100%
7.1 Ρεαλιστικά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1.1 Ρεαλιστικά-αληθινά	12	4.8%
7.1.2 Ρεαλιστικά-πλασματικά	240	95.2%
Σύνολο:	252	100%

Τα ρεαλιστικά προβλήματα κατέχουν την ολότητα του ποσοστού. Δεν υπάρχουν εξωπραγματικά προβλήματα.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	23	5.5%
8.2 Κειμενική μορφή	158	37.8%
8.3 Πίνακας, γράφημα	18	4.3%
8.4 Εικόνα, σχήμα	97	23.3%
8.5 Μικτή μορφή	121	29.1%
Σύνολο:	417	100%

Η κύρια μορφή με την οποία αποδίδονται τα προβλήματα είναι κειμενική, αλλά υπάρχουν και πολλά μικτά προβλήματα, ή προβλήματα με δεδομένα εικόνες και σχήματα.

Από τα παραπάνω, αντιλαμβάνεται κανείς ότι η μεγαλύτερη βαρύτητα στο κυπριακό εγχειρίδιο της Δ΄ δημοτικού δίνεται στην κατανόηση των βασικών εννοιών, με επίλυση πολλών προβλημάτων, όπου οι μαθητές εφαρμόζουν τη θεωρία που έχουν διδαχτεί. Παρατηρείται, ότι αυτά αποδίδονται κυρίως με παραδοσιακό τρόπο. Εμφανίζονται σχετικά συχνά ανοιχτά προβλήματα που δίνουν την ευκαιρία για μεγαλύτερη διεύρυνση της κατανόησης από περισσότερα παιδιά και επίσης υπάρχουν περισσότερα σύνθετα προβλήματα. Υπάρχουν προβλήματα-γρίφοι που με βάση προηγούμενης βιβλιογραφίας, μπορούν να κινητοποιήσουν περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών και επίσης, η μεγαλύτερη πλειοψηφία των προβλημάτων είναι προβλήματα

ρουτίνας που απεικονίζουν καθημερινές ιστορίες, κυρίως από παιδιά ίδιας ηλικίας με τους μαθητές. Τέλος, τα περισσότερα προβλήματα δίδονται σε μορφή κειμένου και πολλές φορές το κείμενο συνδυάζεται με κάποιο πίνακα, εικόνα ή γράφημα. Τα κατασκευαστικά προβλήματα είναι λίγα στο κυπριακό εγχειρίδιο της Δ' τάξης, όπως και τα προβλήματα μοντελοποίησης.

Οι αντίστοιχοι για το ελληνικό εγχειρίδιο είναι:

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
1.1 Απλά προβλήματα	45	10.1%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	402	89.9%
Σύνολο:	447	100%

Παρατηρείται εδώ ότι η συντριπτική πλειοψηφία στο ελληνικό εγχειρίδιο είναι σύνθετα προβλήματα, τα απλά αποτελούν ένα μικρό μέρος του συνόλου των προβλημάτων (10.1%).

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
2.1 Ανοιχτού τύπου	59	13.1%
2.2 Κλειστού τύπου	388	86.9%
Σύνολο:	447	100%

Τα κυρίαρχα προβλήματα είναι κλειστά, όμως υπάρχει και ένα ποσοστό προβλημάτων (13.1%) που έχει παραπάνω από μία λύσεις εξίσου σωστές.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.1 Παραδοσιακά	335	73.8%
3.2 Μη παραδοσιακά	119	26.2%
Σύνολο:	454	100%
3.2 Μη παραδοσιακά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.2.1 Κατασκευή προβλημάτων	12	10.1%
3.2.2 Γρίφου-Λογικής	102	85.7%
3.2.3 Πρότζεκτ	5	4.2%
3.2.4 Έκθεση Ιδεών	0	0
Σύνολο:	119	100%

Στο ελληνικό εγχειρίδιο υπάρχει ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό μη παραδοσιακών προβλημάτων που αποτελεί το 26.2% επί του συνόλου. Από αυτά όπως και στο κυπριακό, κυρίαρχα είναι τα προβλήματα γρίφου-λογικής με μεγάλη διαφορά από τα κατασκευαστικά που έρχονται αμέσως μετά, ενώ δεν υπάρχουν προβλήματα έκθεσης ιδεών. Ωστόσο, στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν θέματα προς συζήτηση που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για την ίδια λειτουργία. Συγκεκριμένα, στο σημείο αυτό υπερτερούν τα προβλήματα κατασκευής.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1 Ρουτίνας	445	94.3%
4.2 Μη ρουτίνας	27	5.7%
Σύνολο:	472	100%
4.1 Ρουτίνας	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1.1 Αθροιστικά	250	56.2%
4.1.2 Πολλαπλασιαστικά	195	43.8%
Σύνολο:	445	100%

4.1.1 Αθροιστικά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
-Αλλαγής	87	34.8%
-Ομαδοποίησης	83	33.2%
-Σύγκρισης	61	24.4%
-Εξισορρόπησης	19	7.6%
Σύνολο:	250	100%

4.1.3 Θέση αγνώστου	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
-Τελικός	256	57.5%
- Ενδιάμεσος	189	42.5%
Σύνολο:	445	100%

Τα προβλήματα ρουτίνας είναι το 94.3% του συνόλου των προβλημάτων. Από αυτά τα περισσότερα είναι αθροιστικά προβλήματα, με σχετικά μικρή διαφορά από τα πολλαπλασιαστικά (56.2% έναντι 43.8%). Στα αθροιστικά προβλήματα κυριαρχούν τα αλλαγής και ομαδοποίησης και ακολουθούν τα σύγκρισης. Τα εξισορρόπησης είναι ελάχιστα σε σχέση με το σύνολο.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5. Κατασκευαστικά	71	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5.1 Κατασκευή εικόνας	45	63.4%
5.2 Κατασκευή γραφήματος	6	8.4%
5.3 Κατασκευή πίνακα	20	28.2%

Σύνολο:	71	100%
----------------	-----------	-------------

Υπάρχουν σχετικά αρκετά κατασκευαστικά προβλήματα επί του συνόλου (71/472). Από αυτά τα περισσότερα ζητούν από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα σχέδιο, ενώ μπορεί να ζητείται και κατασκευή πίνακα.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
6. Μοντελοποίησης	8	100%

Καταμετρήθηκαν 8 προβλήματα μοντελοποίησης.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1 Ρεαλιστικά	419	100%
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0	0%
Σύνολο:	409	100%
7.1 Ρεαλιστικά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1.1 Ρεαλιστικά-αληθινά	8	2%
7.1.2 Ρεαλιστικά-πλασματικά	411	98%
Σύνολο:	419	100%

Δεν εντοπίστηκαν εξωπραγματικά προβλήματα.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	23	4.9%
8.2 Κειμενική μορφή	322	68.2%
8.3 Πίνακας, γράφημα	15	3.2%
8.4 Εικόνα, σχήμα	35	7.4%
8.5 Μικτή μορφή	77	16.3%
Σύνολο:	472	100%

Κυριαρχούν τα προβλήματα κειμενικής μορφής (68.2%) και ακολουθεί με διαφορά η μικτή μορφή.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι η συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων της Δ' δημοτικού στο ελληνικό εγχειρίδιο είναι προβλήματα σύνθετα και κλειστού τύπου σε ποσοστό πάνω από 80%. Τα ρουτίνας χρησιμοποιούνται σε πολύ μεγάλο ποσοστό για την εμπέδωση των εννοιών και υπάρχουν ελάχιστα μη ρουτίνας. Τα αθροιστικά κυριαρχούν στο εγχειρίδιο και από αυτά μεγαλύτερο χώρο καταλαμβάνουν

τα προβλήματα αλλαγής με μικρή διαφορά από τα προβλήματα ομαδοποίησης. Τα μη παραδοσιακά προβλήματα αποτελούν ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό, ενώ σε αυτά κυριαρχούν προβλήματα τύπου γρίφοι-λογικής. Εδώ παρατηρούνται και πολλά κατασκευαστικά προβλήματα, κυρίως ο σχεδιασμός σχημάτων. Τα προβλήματα μοντελοποίησης καλούν τους μαθητές να μαθηματικοποιήσουν ρεαλιστικές καταστάσεις καθημερινής ζωής αν και είναι λίγα στο πλήθος. Τέλος, τα περισσότερα προβλήματα είναι σε κειμενική μορφή.

4.1.α) Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων Ελλάδας και Κύπρου για τη Δ΄ Δημοτικού:

Συγκριτικοί Πίνακες

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος προβλημάτων Κύπρος	Ποσοστό επί του συνόλου	Πλήθος προβλημάτων Ελλάδα	Ποσοστό επί του συνόλου
1.1 Απλά προβλήματα	132	33.6%	45	10.1%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	261	66.4%	402	89.9%
<i>Σύνολο:</i>	393	100%	447	100%
2.1 Ανοιχτά προβλήματα	87	21.1%	59	13.1%
2.2 Κλειστά προβλήματα	325	78.9%	388	86.9%
<i>Σύνολο:</i>	412	100%	447	100%
3.1 Παραδοσιακά	319	81.8%	335	73.8%
3.2 Μη παραδοσιακά	71	18.2%	119	26.2%
<i>Σύνολο:</i>	390	100%	454	100%
3.2 Μη παραδοσιακά				
3.2.1 Κατασκευή προβλημάτων	15	21.1%	12	10.1%
3.2.2 Γρίφου-Λογικής	51	71.8%	102	85.7%
3.2.3 Πρότζεκτ	5	7.1%	5	4.2%
3.2.4 Έκθεση Ιδεών	0	0%	0	0%
<i>Σύνολο:</i>	71	100%	119	100%
4.1 Ρουτίνας	340	81.5%	445	94.3%

4.2 Μη ρουτίνας	77	18.5%	27	5.7%
<i>Σύνολο:</i>	417	100%	472	100%
4.1 Ρουτίνας				
<u>4.1.1 Αθροιστικά</u>	127	37.4%	250	56.2%
<u>4.1.2 Πολλαπλασιαστικά</u>	213	62.6%	195	43.8%
<i>Σύνολο:</i>	340	100%	445	100%
<u>4.1.1 Αθροιστικά</u>				
-Αλλαγής	40	31.5%	87	34.8%
-Ομαδοποίησης	48	37.8%	83	33.2%
-Σύγκρισης	19	15%	61	24.4%
-Εξισορρόπησης	20	15.7%	19	7.6%
<i>Σύνολο:</i>	127	100%	250	100%
<u>4.1.3 Θέση αγνώστου</u>				
-Τελικός	126	37%	256	57.5%
-Ενδιάμεσος	214	63%	189	42.5%
<i>Σύνολο:</i>	340	100%	445	100%
5. Κατασκευαστικά	20	100%	71	100%
5.1 Κατασκευή εικόνας	15	75%	45	63.4%
5.2 Κατασκευή γραφήματος	3	15%	6	8.4%
5.3 Κατασκευή πίνακα	2	10%	20	28.2%
<i>Σύνολο:</i>	20	100%	71	100%
6. Μοντελοποίηση	17	100%	8	100%
7.1 Ρεαλιστικά	252	100%	419	100%
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0	0%	0	0%
<i>Σύνολο:</i>	252	100%	419	100%
7.1 Ρεαλιστικά				
7.1.1 Ρεαλιστικά-αληθινά	12	4.8%	8	2%
7.1.2 Ρεαλιστικά-πλασματικά	240	95.2%	411	98%
<i>Σύνολο:</i>	252	100%	419	100%

8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	23	5.5%	23	4.9%
8.2 Κειμενική μορφή	158	37.8%	322	68.2%
8.3 Πίνακας, γράφημα	18	4.3%	15	3.2%
8.4 Εικόνα σχήμα	97	23.3%	35	7.4%
8.5 Μικτή μορφή	121	29.1%	77	16.3%
<i>Σύνολο:</i>	417	100%	472	100%

Από τα παραπάνω αποτελέσματα του κυπριακού εγχειριδίου παρατηρείται ότι τα διπλάσια περίπου προβλήματα είναι σύνθετα, δηλαδή προκειμένου να φτάσουν στο αποτέλεσμα, οι μαθητές πρέπει να εκτελέσουν μια σειρά πράξεων, ενώ συναντάμε σπανιότερα προβλήματα που χρειάζονται μια πράξη για να λυθούν. Στο ελληνικό εγχειρίδιο τα σύνθετα προβλήματα υπερτερούν, σε μεγάλη πλειοψηφία (σχεδόν το 90%). Αυτό σημαίνει ότι τα προβλήματα που υπάρχουν στο ελληνικό εγχειρίδιο απαιτούν πολύ περισσότερο από τους μαθητές να επιλύουν τα προβλήματα εκτελώντας διαδοχικές πράξεις.

Αν και κυριαρχούν τα προβλήματα κλειστού τύπου στο κυπριακό και στο ελληνικό εγχειρίδιο, εντούτοις παρατηρείται ότι στο εγχειρίδιο της Κύπρου υπάρχει ένα αρκετά υψηλό ποσοστό ανοιχτών προβλημάτων. Δηλαδή το 21.1% του ποσοστού για την κατηγορία αυτή αποτελούν προβλήματα, τα οποία δέχονται πάνω από μία δυνατές λύσεις, οι οποίες είναι εξίσου σωστές. Από την άλλη, στο ελληνικό εγχειρίδιο, τα ανοιχτού τύπου ξεπερνάνε κατά πολύ τα κλειστού τύπου προβλήματα, όπου το 13,1 % μόνο είναι προβλήματα που μπορεί να έχουν πολλές, διαφορετικές ορθές λύσεις.

Στην επόμενη κατηγορία, μπορεί κανείς να παρατηρήσει, ότι τα παραδοσιακά προβλήματα είναι πιο συχνά από τα μη παραδοσιακά στο κυπριακό εγχειρίδιο, ενώ τα μη παραδοσιακά εμφανίζονται σε αρκετά μικρό ποσοστό 18.2%. Από αυτά τα συχνότερα είναι τα προβλήματα τύπου γρίφου-λογικής (το 71.8% του συνόλου των μη παραδοσιακών), ακολουθούμενα από τα προβλήματα κατασκευής που δίνουν δεδομένα στο μαθητή και απαιτούν από αυτόν να κατασκευάσει την εκφώνηση του προβλήματος. Τα μη παραδοσιακά στο ελληνικό εγχειρίδιο αποτελούν το 26.2% του συνόλου,

μεγαλύτερο ποσοστό σε σχέση με του κυπριακού. Αυτό εξισορροπεί το γεγονός ότι στο ελληνικό εγχειρίδιο, τα ανοιχτά προβλήματα κατέχουν ένα πολύ μικρό ποσοστό.

Τα προβλήματα ρουτίνας, ως σημαντικό εργαλείο, κυριαρχούν και στα δύο εγχειρίδια. Στο κυπριακό σε ποσοστό 81,5% επί του συνόλου και στο ελληνικό σε ποσοστό 94.3%, αντίστοιχα. Από αυτά κυρίαρχα στο κυπριακό είναι τα πολλαπλασιαστικά σε ποσοστό 62,6%, ενώ στα αθροιστικά επικρατεί η υποκατηγορία της ομαδοποίησης σε ποσοστό 37,8% επί του συνόλου των αθροιστικών, και ακολουθούν τα αλλαγής. Σε σχέση με τη θέση του αγνώστου, στο κυπριακό εγχειρίδιο ο άγνωστος είναι ενδιάμεσος τις πλύστες φορές και υπερτερεί του τελικού κατά 26%. Στο ελληνικό εγχειρίδιο τα αθροιστικά αποτελούν το 56.2% του συνόλου της ρουτίνας, με κυρίαρχα τα ομαδοποίησης και αλλαγής με μικρή διαφορά μεταξύ τους. Επιπρόσθετα, στα προβλήματα ρουτίνας κυριαρχούν τα προβλήματα τελικής θέσης αγνώστου (57.5%) σε αντίθεση με την Κύπρο.

Όσον αφορά στα κατασκευαστικά προβλήματα, υπάρχουν λιγότερα στο κυπριακό εγχειρίδιο, (20 στο σύνολο) και από αυτά κυριαρχούν τα κατασκευαστικά προβλήματα εικόνας, που μπορεί να είναι ένα σχήμα σε κάποια γεωμετρικά προβλήματα. Τα κατασκευαστικά προβλήματα στο ελληνικό εγχειρίδιο από την άλλη, είναι περισσότερα σε αριθμό (71) με κυρίαρχα αυτά που ο μαθητής καλείται να κατασκευάσει κάποιου είδους εικόνα, συνηθέστερα κάποιο γεωμετρικό σχήμα.

Τα προβλήματα μοντελοποίησης που υπάρχουν στο κυπριακό εγχειρίδιο (17 στο σύνολο), καθώς και στο ελληνικό (8 στο σύνολο) οδηγούν την σκέψη των μαθητών σε επινοήσεις μαθηματικών μοντέλων.

Τα προβλήματα που εξιστορούν με λόγια μια ρεαλιστική πραγματικότητα, αποτελούν μεγάλο ποσοστό των προβλημάτων που υπάρχουν και στα δύο εγχειρίδια (252 για το κυπριακό και 419 για το ελληνικό) και σε αυτά κυριαρχούν αισθητά οι φανταστικές (πλαστές) καταστάσεις και τα αποτελέσματα ισχύουν και στις δύο περιπτώσεις. Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι με τον όρο "φτιαχτές", εννοούνται οι ιστορίες που δεν αποτελούν πραγματικά γεγονότα, παρόλο που θα μπορούσαν να ήταν πραγματικές και να ισχύουν, όμως ουσιαστικά είναι επινοήσεις.

Οπότε, περαιτέρω κατηγοριοποίηση τα ρεαλιστικά προβλήματα διαχωρίζονται σε ρεαλιστικά-αληθινά ή πλασματικά, που τα τελευταία κυριαρχούν σε όλα τα εγχειρίδια,

ενώ υπάρχουν και τα εξωπραγματικά, που δε θα μπορούσαν ποτέ να γίνουν πραγματικότητα. Αυτά τα τελευταία δεν εντοπίστηκαν μέσα στα εγχειρίδια οποιασδήποτε τάξης, γεγονός που επιβεβαιώνει και τα λεγόμενα του ΑΠΣ, όπου οι καταστάσεις που περιγράφονται στα εγχειρίδια σύμφωνα με αυτό είναι βγαλμένες από την καθημερινότητα για μεγαλύτερη εξοικείωση των παιδιών με τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται από αυτά. Στα ρεαλιστικά-αληθινά προβλήματα, που υπάρχουν στο κυπριακό εγχειρίδιο έχουν να κάνουν με καταστάσεις που περιγράφουν κάποια ιστορικά γεγονότα, ή αποτελέσματα μιας πραγματικής απογραφής. Αυτό συμβάλλει και στην επίτευξη του στόχου της διαθεματικότητας. Στα ελληνικά εγχειρίδια βρέθηκαν επίσης τέτοιου είδους προβλήματα, αλλά λιγότερα, ενώ εδώ δεν υπάρχουν καθόλου εξωπραγματικά.

Γενικά, τα μαθηματικά προβλήματα που καλούνται να επιλύσουν και να ασχοληθούν οι μαθητές έχουν κυρίως κειμενική μορφή, όμως πολλά από αυτά παρουσιάζονται και σε συνδυασμό με άλλα στοιχεία, όπως εικόνες, πίνακες κλπ, προκειμένου τα παιδιά να αντλήσουν πληροφορίες από τα στοιχεία αυτά για τη λύση του προβλήματος. Συχνή επίσης είναι η εικόνα, ενώ η καθαρή μαθηματική μορφή και τα γραφήματα είναι σπάνια στο κυπριακό εγχειρίδιο. Η κειμενική μορφή κυριαρχεί και στο ελληνικό εγχειρίδιο, όπου ακολουθούνται από τα μικτά και υπάρχουν σε πολύ μικρότερα ποσοστά πίνακες, γραφήματα και προβλήματα με καθαρή μαθηματική μορφή.

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

1. Τα σύνθετα προβλήματα αποτελούν την πλειοψηφία και των δύο εγχειριδίων. Ωστόσο στο Ελληνικό εγχειρίδιο επικρατούν σε μεγαλύτερο ποσοστό, με αποτέλεσμα αυτό να σημαίνει ότι στα ελληνικά εγχειρίδια υπάρχει πιθανότητα τα προβλήματα να είναι αυξημένης δυσκολίας σε σχέση με τα κυπριακά, όσον αφορά την διαδικαστική εφαρμογή πράξεων.
2. Τα κυπριακά εγχειρίδια δίνουν τη δυνατότητα μεγαλύτερης ευελιξίας καθώς περιέχουν περισσότερα είδη ανοιχτών προβλημάτων. Αυτό σημαίνει ότι δίνεται η ευκαιρία στο μαθητή να σκεφτεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους προκειμένου να φτάσει στη λύση ενός προβλήματος. Στα ελληνικά εγχειρίδια οι κλειστού τύπου

απαντήσεις καταλαμβάνουν μεγαλύτερο ποσοστό σε σχέση με τα κυπριακά, όπου οι μαθητές καλούνται να φτάσουν στο ίδιο αποτέλεσμα με τον ίδιο τρόπο.

3. Ενδιαφέρουσα παρατήρηση επίσης αποτελούν τα ποσοστά των μη παραδοσιακών προβλημάτων σε σχέση με τα παραδοσιακά. Εξίσου στα κυπριακά, όσο και στα ελληνικά εγχειρίδια τα παραδοσιακά κυριαρχούν. Χαρακτηριστικό επίσης, είναι ότι και στις δύο χώρες κυριαρχούν τα γρίφου λογικής. τα συγκεκριμένα προβλήματα μπορούν να κινητοποιήσουν σε μεγαλύτερο βαθμό το ενδιαφέρον των μαθητών, αν και αυτό εξαρτάται και από την παιδαγωγική προσέγγιση του εκπαιδευτικού. Όμως δίνεται η ευκαιρία στα παιδιά να δραστηριοποιηθούν σκεπτόμενοι με έναν διαφορετικό τρόπο.
4. Από τη θεωρία και σε σχέση με τους τύπους προβλημάτων που έχουν αναπτυχθεί ήδη στην ενότητα 2.12, μπορεί να αντιληφθεί κανείς τη σημασία της εφαρμογής των προβλημάτων ρουτίνας στην κατανόηση των βασικών μαθηματικών εννοιών. Όμως είναι σημαντικό μετά την επίλυση τέτοιων προβλημάτων, και για τη βαθύτερη κατανόηση του διδακτικού αντικειμένου, να δίνεται η δυνατότητα να επιλυθούν προβλήματα που ξεφεύγουν από το συνηθισμένο τρόπο και να μην απαιτείται μία συγκεκριμένη συνταγή, η οποία μόλις διδάχθηκε για να λύσει ο μαθητής το συγκεκριμένο πρόβλημα. Με αυτόν τον τρόπο επιβραβεύεται και μία μορφή αποκλίνουσας σκέψης, όχι τυποποιημένης η οποία εξαναγκάζει τον μαθητή να αξιολογείται μόνο σε σχέση με την κατανόηση και όχι την εμβάθυνση. Τα προβλήματα μη ρουτίνας είναι σε μικρό ποσοστό και στα δύο εγχειρίδια και αυτό είναι αναμενόμενο, όμως στα ελληνικά αποτελεί ακόμα μικρότερο ποσοστό.
5. Τα κατασκευαστικά προβλήματα, δηλαδή αυτά που απαιτούν από τους μαθητές να κατασκευάσουν μία εικόνα, ή έναν πίνακα, ή ένα γράφημα, ή ένα σχήμα, εμφανίζονται περισσότερο στα ελληνικά εγχειρίδια, γεγονός που μπορεί να κάνει το μάθημα πιο διαδραστικό. Πάλι όμως σε σχέση με το σύνολο των προβλημάτων αποτελούν ένα μικρό ποσοστό, στα κυπριακά εγχειρίδια αποτελεί γύρω στο 5%, ενώ στα ελληνικά ξεπερνάει το 10%.
6. Τα προβλήματα μοντελοποίησης δίνουν τη δυνατότητα σε ένα μαθητή να αντιληφθεί τις μαθηματικές έννοιες σε σχέση με την πραγματικότητα. Γι' αυτό και στα δυο εγχειρίδια τα περισσότερα προβλήματα δίνονται με τη μορφή κειμένου ή

μικτή μορφή, εξιστορώντας μία περίπτωση καθημερινότητας που θα μπορούσε να συμβαίνει και στους ίδιους. Παρατηρείται ότι στα κυπριακά εγχειρίδια επικρατούν οι ιστορίες μαθητών ίδιας ηλικίας, οι οποίοι δραστηριοποιούνται σε εκδρομές και ταξίδια, σε οργανώσεις μέσα στο σχολείο, προωθώντας και την ομαδική συνεργασία. Η παραπάνω εφαρμογή συνάδει και με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος και των δύο χωρών, που θέλει τα προβλήματα να αντιστοιχούν στην καθημερινότητα των μαθητών, να είναι δηλαδή κατανόηση, αλλά παράλληλα και να επιτευχθεί ο στόχος της μαθηματικής αντίληψης στον περιβάλλοντα κόσμο. Ελάχιστα προβλήματα αποτελούν πραγματικά γεγονότα στο κυπριακό εγχειρίδιο, τα οποία όμως παίζουν σημαντικό ρόλο, καθώς συνδυάζουν την πραγματικότητα με το μάθημα. Αυτά τα πραγματικά γεγονότα μπορεί να βασίζονται σε ιστορικά συμβάντα, τα οποία συνδέονται διαθεματικά με το γνωστικό αντικείμενο της Ιστορίας.

Παράδειγμα προβλήματος μοντελοποίησης Κύπρος Δ' Δημοτικού

5. Σαράντα μαθητές και έξι εκπαιδευτικοί μιας σχολής καταδύσεων προγραμματίζουν εκπαιδευτική εκδρομή σε ένα νησί. Για τη μετάβασή τους, θα χρειαστεί να ταξιδέψουν με λεωφορείο και πλοιάριο.



Πήραν τις πιο κάτω προσφορές. Κάθε λεωφορείο και πλοιάριο μπορεί να μεταφέρει μέχρι 55 επιβάτες.



(γ) Ποια προσφορά λεωφορείου και πλοιαρίου πρέπει να επιλέξει η σχολή, ώστε το συνολικό κόστος των διαδρομών προς και από το νησί να είναι το χαμηλότερο δυνατόν; Να εξηγήσεις.

Παράδειγμα προβλήματος μοντελοποίησης Ελλάδα Δ' Δημοτικού

α) Οι μαθητές της Δ' τάξης σε μια εκδρομή τους κάθισαν σ' ένα αναψυκτήριο. Ο σερβιτόρος πήρε παραγγελία απ' όλους.

• Υπολογίζω πόσα χρήματα πλήρωσαν συνολικά:

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ	
Είδος χυμού	αξία σε €
ακτινίδιο	5
πορτοκάλι	2 € 20 λ.
ανανάς	6
μπανάνα	4
μήλο	3
ανάμεικτος	7
λεμονάδα	1€ 40 λ.

ΦΥΛΛΟ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ			
Είδος χυμού	Ποσότητα	Τιμή Μονάδας	Αξία
μπανάνα	12		$12 \times 4 = 48 \text{ €}$
μήλο	25		
ακτινίδιο	5		
πορτοκάλι	4		$4 \times 2 \text{ €} = 8 \text{ €}$ $4 \times 20 \text{ λ.} = 80 \text{ λ.}$
ανάμεικτος	7		
ΣΥΝΟΛΟ			

β)  Φτιάχνουμε τη δική μας παραγγελία και υπολογίζουμε πόσα χρήματα θα πληρώσουμε:

ΦΥΛΛΟ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ			
Είδος χυμού	Ποσότητα	Τιμή Μονάδας	Αξία
ΣΥΝΟΛΟ			

4.2 Μαθηματικά προβλήματα των Μαθηματικών Εγχειριδίων της Ε΄ Δημοτικού της Ελλάδας και της Κύπρου.

Από το κυπριακό εγχειρίδιο:

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
1.1 Απλά προβλήματα	147	33.9%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	286	66.1%
Σύνολο:	433	100%

Στο εγχειρίδιο αυτό τα σύνθετα προβλήματα αποτελούν περίπου τα 2/3 των προβλημάτων, ενώ τα απλά είναι λίγο παραπάνω από το 1/3 του συνόλου.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
2.1 Ανοιχτού τύπου	61	14.1%
2.2 Κλειστού τύπου	372	85.9%
Σύνολο:	433	100%

Αν και η συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων είναι κλειστά, υπάρχουν και μερικά ανοιχτά προβλήματα (61) που κατέχουν το 14.1% του συνόλου.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.1 Παραδοσιακά	368	85%
3.2 Μη παραδοσιακά	65	15%
Σύνολο:	433	100%
3.2 Μη παραδοσιακά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.2.1 Κατασκευή προβλημάτων	9	13.8%
3.2.2 Γρίφου-Λογικής	37	57%
3.2.3 Πρότζεκτ	3	4.6%
3.2.4 Έκθεση Ιδεών	16	24.6%
Σύνολο:	65	100%

Τα παραδοσιακά προβλήματα και εδώ αποτελούν την πλειοψηφία σε μεγάλο ποσοστό (85%), όμως υπάρχουν και μερικά μη παραδοσιακά. Σ' αυτήν την περίπτωση, παρατηρείται πάλι πως τα μη παραδοσιακά είναι κυρίως προβλήματα γρίφων-λογικής, ενώ παρατηρούνται προβλήματα έκθεσης ιδεών και μάλιστα σε ένα υψηλό σχετικά ποσοστό.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1 Ρουτίνας	385	88.9%
4.2 Μη ρουτίνας	48	11.1%
Σύνολο:	433	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1 Ρουτίνας	385	88.9%
4.1.1 Αθροιστικά	254	65.9%
4.1.2 Πολλαπλασιαστικά	131	34.1%
Σύνολο:	385	100%

4.1.1 Αθροιστικά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
-Αλλαγής	47	18.5%
-Ομαδοποίησης	106	41.7%
-Σύγκρισης	57	22.4%
-Εξισορρόπησης	44	17.4%
Σύνολο:	254	100%

4.1.3 Θέση αγνώστου	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
Τελικός	231	60%
Ενδιάμεσος	154	40%
Σύνολο:	385	100%

Τα περισσότερα προβλήματα που περιέχονται στο εγχειρίδιο της Κύπρου είναι ρουτίνας (88.9%), αλλά υπάρχουν και ορισμένα προβλήματα που ανταποκρίνονται στην κατηγορία μη ρουτίνας. Τα περισσότερα από τα προβλήματα ρουτίνας είναι αθροιστικά (254/385), ενώ κυριαρχούν τα ομαδοποίησης (41.7% των προβλημάτων ρουτίνας). Τελευταία στην κατάταξη βρίσκονται τώρα τα προβλήματα εξισορρόπησης (17.4%) μαζί με τα προβλήματα αλλαγής (18.5%).

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5. Κατασκευαστικά	86	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5.1 Κατασκευή εικόνας	39	45.3%
5.2 Κατασκευή γραφήματος	31	36.1%
5.3 Κατασκευή πίνακα	16	18.6%
Σύνολο:	86	100%

Εδώ παρατηρήθηκαν και κάποια προβλήματα κατασκευής “κανόνα” (6). Για παράδειγμα, δόθηκε ένα πρόβλημα ρουτίνας πολλαπλασιαστικό 2-3 φορές με διαφορετικούς αριθμούς και ζητήθηκε να βρεθεί ο γενικός κανόνας που διέπει την πράξη. Σε σχέση με την Δ΄ τάξη του κυπριακού εγχειριδίου, εδώ φαίνεται η σπειροειδής μάθησης, ως μια διαδικασία εξέλιξης και κατάκτησης της γνώσης με αναπτυγμένο

επίπεδο στην Ε΄ τάξη. Για το λόγο αυτό η υποκατηγορία “κατασκευή εικόνας” κατέχει το μεγαλύτερο ποσοστό.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
6. Μοντελοποίησης	12	100%

Καταγράφηκαν 12 προβλήματα στα οποία οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα μαθηματικό μοντέλο για την εξεύρεση της λύσης του προβλήματος.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1 Ρεαλιστικά	337	100%
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0	0%
Σύνολο:	337	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1 Ρεαλιστικά	337	100%
7.1.1 Ρεαλιστικά-αληθινά	57	16.9%
7.1.2 Ρεαλιστικά-πλασματικά	280	83.1%
Σύνολο:	337	100%

Παρατηρείται ότι υπάρχουν πολλά ρεαλιστικά προβλήματα. Τα περισσότερα βέβαια, ανήκουν στην υποκατηγορία των πλασματικών.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	35	8.1%
8.2 Κειμενική μορφή	208	48.1%
8.3 Πίνακας, γράφημα	47	10.8%
8.4 Εικόνα, σχέδιο	69	16%
8.5 Μικτή μορφή	74	17%
Σύνολο:	433	100%

Τα περισσότερα προβλήματα και εδώ είναι κειμενικής μορφής με αρκετή διαφορά, υπάρχουν αρκετά μεικτά, ενώ εμφανίζονται και αρκετά με δεδομένα σε εικόνες.

Σε αυτό το εγχειρίδιο, όπως ήταν αναμενόμενο τα απλά προβλήματα είναι λιγότερα από τα σύνθετα, όπως και στα προηγούμενα. Τα ανοιχτά προβλήματα αποτελούν μικρό ποσοστό σε σχέση με το σύνολο, ενώ όπως πάντα κυριαρχούν τα κλειστά. Τα παραδοσιακά προβλήματα αποτελούν και πάλι την πλειοψηφία και εδώ σε σχέση με την προηγούμενη τάξη, τα μη παραδοσιακά αποτελούν μικρότερο ποσοστό,

ακόμη κι από την προηγούμενη τάξη. Όσον αφορά στα προβλήματα μοντελοποίησης και εδώ είναι προβλήματα που ανταποκρίνονται στην καθημερινότητα και αναφέρονται σε ρεαλιστικές καταστάσεις. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι υπάρχουν πολλά προβλήματα που βασίζονται σε πραγματικά γεγονότα (16.9%), που θεωρείται υψηλό ποσοστό συγκρίνοντάς το με άλλα εγχειρίδια. Η μορφή στη συντριπτική πλειοψηφία των παραδειγμάτων είναι κειμενική, αλλά υπάρχουν και αρκετά προβλήματα με εικόνα, ή μικτά. Εδώ, εντάσσονται και προβλήματα της κατηγορίας “κατασκευή προβλήματος”, όπου παρατηρείται η μέθοδος “κατασκευής κανόνα”, εντασσόμενα επίσης και στην υποκατηγορία των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων ρουτίνας.

Οι αντίστοιχοι για το ελληνικό εγχειρίδιο είναι:

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
1.1 Απλά προβλήματα	106	47.1%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	119	52.9%
Σύνολο:	225	100%

Εδώ τα απλά και τα σύνθετα προβλήματα βρίσκονται περίπου σε ίση αναλογία (47.1% και 52.9%). Όμως, τα σύνθετα προβλήματα εξακολουθούν να υπερτερούν των απλών.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
2.1 Ανοιχτού τύπου	27	12%
2.2 Κλειστού τύπου	198	88%
Σύνολο:	225	100%

Τα προβλήματα κλειστού τύπου παρουσιάζουν σημαντική διαφορά (76%) από τα ανοιχτού τύπου προβλήματα.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.1 Παραδοσιακά	213	94.7%
3.2 Μη παραδοσιακά	12	5.3%
Σύνολο:	225	100%
3.2 Μη παραδοσιακά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.2.1 Κατασκευή προβλημάτων	6	50%
3.2.2 Γρίφου-Λογικής	3	25%
3.2.3 Πρότζεκτ	1	8.3%
3.2.4 Έκθεση Ιδεών	2	16.7%
Σύνολο:	12	100%

Τα μη παραδοσιακά προβλήματα είναι πολύ λιγότερα σε αυτό το βιβλίο, αποτελώντας το 5.3% των συνολικών προβλημάτων. Από αυτά, υπάρχουν ελάχιστα προβλήματα κατασκευής και γρίφου-λογικής και αμελητέα προβλήματα προτζεκτ και έθεσης ιδεών.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1 Ρουτίνας	207	92%
4.2 Μη ρουτίνας	18	8%
Σύνολο:	225	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1 Ρουτίνας		
4.1.1 Αθροιστικά	99	47.8%
4.1.2 Πολλαπλασιαστικά	108	52.2%
Σύνολο:	207	100%

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1.1 Αθροιστικά		
-Αλλαγής	6	6.2%
-Ομαδοποίησης	35	35.3%
-Σύγκρισης	34	34.3%
-Εξισορρόπησης	24	24.2%
Σύνολο:	99	100%

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1.3 Θέση αγνώστου		
Τελικός	135	65.2%
Ενδιάμεσος	72	34.8%
Σύνολο:	207	100%

Μεγάλο ποσοστό (92%) των προβλημάτων, καταλαμβάνουν ως συνήθως προβλήματα ρουτίνας, όπως φαίνεται στον πίνακα πιο πάνω. Από αυτά τα πολλαπλασιαστικά βρίσκονται σε περίπου ίση αναλογία με τα αθροιστικά. Στα τελευταία κυρίαρχη ομάδα είναι τα προβλήματα ομαδοποίησης, ενώ ο άγνωστος στις πλύστες των περιπτώσεων (65.2%), είναι σε τελική θέση.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5. Κατασκευαστικά	20	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5.1 Κατασκευή εικόνας	17	85%
5.2 Κατασκευή γραφήματος	3	15%
5.3 Κατασκευή πίνακα	0	0%
Σύνολο:	20	100%

Υπάρχουν ελάχιστα κατασκευαστικά προβλήματα, κυρίως κατασκευή εικόνας.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
6. Μοντελοποίησης	15	100%

Καταμετρήθηκαν 15 προβλήματα που αντιστοιχούν στην κατηγορίας της μοντελοποίησης.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1 Ρεαλιστικά	183	100%
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0	0
Σύνολο:	183	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1 Ρεαλιστικά		
7.1.1 Ρεαλιστικά-αληθινά	8	4.4%
7.1.2 Ρεαλιστικά-πλασματικά	175	95.6%
Σύνολο:	183	100%

Στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο δεν υπάρχουν προβλήματα που να περιγράφουν εξωπραγματικές καταστάσεις,

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	4	1.8%
8.2 Κειμενική μορφή	170	75.6%
8.3 Πίνακας, γράφημα	15	6.7%
8.4 Εικόνα, σχέδιο	12	5.3%
8.5 Μικτή μορφή	24	10.6%
Σύνολο:	225	100%

Όπως και σε προηγούμενα εγχειρίδια και αυτήν τη φορά τα περισσότερα προβλήματα είναι κειμενικής μορφής (75.6%) και ακολουθούν τα μικτά (10.6).

Στο εγχειρίδιο αυτό, παρατηρείται ότι σε αντίθεση με την προηγούμενη τάξη, τα σύνθετα προβλήματα βρίσκονται σε ίδια περίπου ποσοστά με τα απλά. Από αυτά, σε πολύ μεγάλο ποσοστό βρίσκουμε κλειστά προβλήματα και σχεδόν όλα παραδοσιακά ενώ υπάρχουν ελάχιστα μη παραδοσιακά. Το ίδιο συμβαίνει και με την κατηγοριοποίηση σε ρουτίνας και μη ρουτίνας. Τα ρουτίνας αποτελούν την πλειοψηφία, με πολλαπλασιαστικά και αθροιστικά σε περίπου ίση αναλογία. Για τα κατασκευαστικά προβλήματα, αυτά αποτελούν πολύ μικρό κομμάτι της ύλης, με κυρίαρχα αυτά της κατασκευής εικόνας. Όσον αφορά στα προβλήματα μοντελοποίησης, σχεδόν όλα αποτελούν προβλήματα

ρεαλιστικά αλλά μη πραγματικά (φτιαχτά), ενώ υπάρχουν και ελάχιστα που βασίζονται σε πραγματικά γεγονότα. Τέλος, τα προβλήματα είναι σε μεγάλο βαθμό κειμενικής μορφής (75.6%) και ακολουθεί με μεγάλη απόσταση η κατηγορία μικτών προβλημάτων.

4.2.β) Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων Ελλάδας και Κύπρου για τη Ε΄ Δημοτικού:

Συγκριτικοί Πίνακες

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος προβλημάτων Κύπρος	Ποσοστό επί του συνόλου	Πλήθος προβλημάτων Ελλάδα	Ποσοστό επί του συνόλου
1.1 Απλά προβλήματα	147	33.9%	106	47.1%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	286	66.1%	119	52.9%
<i>Σύνολο:</i>	433	100%	225	100%
2.1 Ανοιχτά προβλήματα	61	14.1%	27	12%
2.2 Κλειστά προβλήματα	372	85.9%	198	88%
<i>Σύνολο:</i>	433	100%	225	100%
3.1 Παραδοσιακά	368	85%	213	94.7%
3.2 Μη παραδοσιακά	65	15%	12	5.3%
<i>Σύνολο:</i>	433	100%	225	100%
3.2 Μη παραδοσιακά				
3.2.1 Κατασκευή προβλημάτων	9	13.8%	6	50%
3.2.2 Γρίφου-Λογικής	37	57%	3	25%
3.2.3 Πρότζεκτ	3	4.6%	1	8.3%
3.2.4 Έκθεση Ιδεών	16	24.6%	2	16.7%
<i>Σύνολο:</i>	65	100%	12	100%
4.1 Ρουτίνας	385	88.9%	207	92%
4.2 Μη ρουτίνας	48	11.1%	18	8%
<i>Σύνολο:</i>	433	100%	225	100%

4.1 Ρουτίνας				
<u>4.1.1 Αθροιστικά</u>	254	65.9%	99	47.8%
<u>4.1.2 Πολλαπλασιαστικά</u>	131	34.1%	108	52.2%
<i>Σύνολο:</i>	385	100%	207	100%
<u>4.1.1 Αθροιστικά</u>				
-Αλλαγής	47	18.5%	6	6.2%
-Ομαδοποίησης	106	41.7%	35	35.3%
-Σύγκρισης	57	22.4%	34	34.3%
-Εξισορρόπησης	44	17.4%	24	24.2%
<i>Σύνολο:</i>	254	100%	99	100%
<u>4.1.3 Θέση αγνώστου</u>				
-Τελικός	231	60%	135	65.2%
-Ενδιάμεσος	154	40%	72	34.8%
<i>Σύνολο:</i>	385	100%	207	100%
5. Κατασκευαστικά	86	100%	20	100%
5.1 Κατασκευή εικόνας	39	45.3%	17	85%
5.2 Κατασκευή γραφήματος	31	36.1%	3	15%
5.3 Κατασκευή πίνακα	16	18.6%	0	0%
<i>Σύνολο:</i>	86	100%	20	100%
6. Μοντελοποίηση	12	100%	15	100%
7.1 Ρεαλιστικά	337	100%	183	100%
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0	0%	0	0
<i>Σύνολο:</i>	337	100%	183	100%
7.1 Ρεαλιστικά				
7.1.1 Ρεαλιστικά-αληθινά	57	16.9%	8	4.4%
7.1.2 Ρεαλιστικά-πλασματικά	280	83.1%	175	95.6%
<i>Σύνολο:</i>	337	100%	183	100%
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	35	8.1%	4	1.8%
8.2 Κειμενική μορφή	208	48.1%	170	75.6%

8.3 Πίνακας, γράφημα	47	10.8%	15	6.7%
8.4 Εικόνα σχήμα	69	16%	12	5.3%
8.5 Μικτή μορφή	74	17%	24	10.6%
<i>Σύνολο:</i>	433	100%	225	100%

Όσον αφορά στη σύγκριση των δύο εγχειριδίων, υπάρχουν κάποιες ενδιαφέρουσες διαφορές. Στο ελληνικό εγχειρίδιο παρατηρούνται αρκετά λιγότερα προβλήματα σε σχέση με το κυπριακό. Αυτό βέβαια οφείλεται και στην έκταση των εγχειριδίων, όπου το κυπριακό είναι πολύ μεγαλύτερο. Εδώ τα ποσοστά των κλειστών προβλημάτων είναι μειωμένα σε σχέση με την προηγούμενη τάξη, ειδικά στο ελληνικό εγχειρίδιο όπου τα ανοικτά προβλήματα είναι ελάχιστα κι ακόμη λιγότερα σε σχέση με το κυπριακό. Βέβαια, στο κυπριακό υπάρχουν πολύ περισσότερα προβλήματα.

Τα μη παραδοσιακά στην Ε΄ τάξη και στα δύο βιβλία είναι πολύ λιγότερα. Αυτό αποτελεί σημαντική διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη τάξη. Από τα μη παραδοσιακά, αυτά που υπάρχουν είναι κυρίως γρίφων-λογικής. Η ίδια αναλογία παρατηρείται και για τα ρουτίνας σε σχέση με τα μη ρουτίνας, όπου τα προβλήματα βρίσκονται σε συντριπτική πλειοψηφία στα ρουτίνας και στα δύο εγχειρίδια. Υπάρχει αισθητή διαφορά με την προηγούμενη τάξη, όπου στα κυπριακά, τα μη ρουτίνας καταλαμβάνουν ένα μεγαλύτερο ποσοστό σε σχέση με τα ελληνικά και με τα κυπριακά αυτής της τάξης. Παρατηρείται όμως, ότι πάλι στο κυπριακό είναι αυξημένα σε σχέση με το ελληνικό (11.1% έναντι 8%).

Μια έντονη διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη τάξη, αλλά και με το ελληνικό εγχειρίδιο είναι ότι τα κατασκευαστικά προβλήματα του κυπριακού βιβλίου είναι περισσότερα από το ελληνικό, πάντα όμως παίζει ρόλο και η έκταση των αναγνωσμάτων.

Όσον αφορά στα προβλήματα μοντελοποίησης, το κυπριακό εγχειρίδιο περιέχει πολύ περισσότερα προβλήματα που βασίζονται σε πραγματικά γεγονότα, ενώ στο ελληνικό είναι σε ποσοστό λιγότερο του 5%. τα προβλήματα αυτά αφορούν κυρίως το πεδίο της ιστορίας.

Όλα τα προβλήματα και των δύο εγχειριδίων είναι ρεαλιστικά, στην Κύπρο ωστόσο τα προβλήματα που αναφέρουν πραγματικά γεγονότα έχουν πολύ υψηλό

ποσοστό, ενώ και στις δύο χώρες οι καταστάσεις που θα μπορούσαν να είναι ρεαλιστικές υπερτερούν. Στο ελληνικό εγχειρίδιο μάλιστα, κατά πολύ.

Σαφώς και στα δύο εγχειρίδια, η επιλογή για την κειμενική μορφή στην παρουσίαση του προβλήματος βρίσκεται στα υψηλότερα ποσοστά.

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- 1.** Τα σύνθετα προβλήματα αποτελούν την πλειοψηφία και των δύο εγχειριδίων. Το γεγονός αυτό είναι μάλλον αναμενόμενο, συλλογιζόμενοι την αυξημένη δυσκολία του επιπέδου που βρισκόμαστε σε σχέση με την προηγούμενη τάξη.
- 2.** Με βάση τα ποσοστά, η ευελιξία μειώνεται σ' αυτή την τάξη, διότι το ποσοστό των ανοιχτών προβλημάτων μειώνεται, οπότε οι μαθητές συνήθως καλούνται να βρουν τη μία και μοναδική απάντηση. Το βιβλίο του μαθητή της Κύπρου αποτελείται στο 85.9% από κλειστού τύπου προβλήματα και το ελληνικό στο 88%.
- 3.** Στην κατηγορία των παραδοσιακών και μη, τα ποσοστά μαρτυρούν πως το ελληνικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης κατευθύνει τους μαθητές περισσότερο σε παραδοσιακές λύσεις των προβλημάτων. Επίσης, το κυπριακό εγχειρίδιο ακολουθεί την ίδια πορεία. Υπάρχει μεγάλη διαφορά και απόκλιση σε σχέση με την προηγούμενη τάξη, ιδιαίτερα στην Ελλάδα.
- 4.** Τα περισσότερα προβλήματα είτε είναι απλά-σύνθετα είτε ανοιχτά-κλειστά εμπεριέχουν διαδικασίες ρουτίνας στα εγχειρίδια και των δύο χωρών. Στην Ε' τάξη η διαδικασία εμπέδωσης νέων εννοιών είναι πρωταρχικής σημασίας.
- 5.** Προβλήματα κατασκευής εντοπίζονται, καθώς στο κυπριακό εγχειρίδιο υπάρχουν κάποια προβλήματα που ζητάνε από τους μαθητές να κατασκευάσουν τον κανόνα μέσω σχεδίου, σχήματος ή πίνακα.
- 6.** Σημαντική είναι η κατηγορία των προβλημάτων μοντελοποίησης, όπου υπάρχουν αρκετά πραγματικά γεγονότα, κυρίως στο κυπριακό εγχειρίδιο, που καλούνται οι μαθητές να μοντελοποιήσουν, αλλά και ρεαλιστικές καταστάσεις. Δεν υπάρχουν εξωπραγματικά προβλήματα σε κανένα εγχειρίδιο και τα περισσότερα προβλήματα παρουσιάζονται και πάλι σε κειμενική μορφή.

Παράδειγμα προβλήματος μοντελοποίησης Κύπρος Ε΄ Δημοτικού

Τα 30 μέλη ενός ναυτικού ομίλου προγραμματίζουν μια τριήμερη εκδρομή. Πιο κάτω παρουσιάζονται όλες οι πληροφορίες σχετικά με την εκδρομή.

Τιμές διανυκτέρευσης ανά δωμάτιο για 1 βράδι	
Τύπος δωματίου	Κόστος
Δίκλινο δωμάτιο	€96
Τρίκλινο δωμάτιο	€102



- Κάθε άτομο έχει στη διάθεσή του €190.
- Η διαμονή σε ξενοδοχείο θα είναι για 2 βράδια.
- Η ενασχόληση με ναυταθλήματα κάθε μέρα δεν θα ξεπερνά τις 5 ώρες.

Προσφερόμενα Ναυταθλήματα			
Είδος	Μέγιστος αριθμός ατόμων σε κάθε ομάδα*	Κόστος	Διάρκεια
Κωπηλασία	8	€240	2 ώρες
Κολύμβηση	12	€120	1 ώρα
Ιστιοσανίδα	4	€240	4 ώρες
Ιστιοπλοΐα	3	€150	3 ώρες
Υδατοσφαίριση	15	€180	2 ώρες
Καταδύσεις	5	€300	4 ώρες

* Για κάθε άθλημα μπορούν να δημιουργηθούν περισσότερες από μία ομάδες, οι οποίες θα αθλούνται παράλληλα.

Παράδειγμα προβλήματος μοντελοποίησης Ελλάδα Ε΄ Δημοτικού

Διερεύνηση – Επέκταση

Ο πατέρας της Αγγελικής θα κάνει ένα ταξίδι απόστασης 480 χμ. Το αυτοκίνητό του ξοδεύει 0,099 λίτρα βενζίνης για διαδρομή ενός χιλιομέτρου. Στα πρατήρια βενζίνης της περιοχής του έχει τις ακόλουθες τέσσερις επιλογές:

- Τιμή βενζίνης 1,126 €.
- Τιμή βενζίνης 1,353 € το λίτρο και δώρο μία δερμάτινη μπάλα.
- Τιμή βενζίνης 1,319 € το λίτρο και δωρεάν πλύσιμο αυτοκινήτου.
- Τιμή λίτρου 1,286 € και κουπόνια έκπτωσης 5 € στο κάθε γέμισμα τις επόμενες 2 φορές που θα βάλει βενζίνη.

- Συζητάμε στην τάξη και επιλέγουμε την πιο συμφέρουσα επιλογή για τον πατέρα της Αγγελικής. Δικαιολογούμε την επιλογή μας.



4.3 Μαθηματικά προβλήματα των Μαθηματικών Εγχειριδίων της ΣΤ΄ Δημοτικού της Ελλάδας και της Κύπρου.

Από το κυπριακό εγχειρίδιο:

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
1.1 Απλά προβλήματα	168	41.4%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	238	58.6%
Σύνολο:	406	100%

Τα σύνθετα προβλήματα είναι περισσότερα από τα απλά (58.6% έναντι 41.4%), όμως δεν εμφανίζουν αξιοσημείωτη διαφορά.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
2.1 Ανοιχτού τύπου	14	3.4%
2.2 Κλειστού τύπου	392	96.6%
Σύνολο:	406	100%

Εδώ, τα κλειστού τύπου κυριαρχούν σχεδόν αποκλειστικά στο εγχειρίδιο, σε ποσοστό που ξεπερνά και τις προηγούμενες τάξεις των κυπριακών εγχειριδίων, ενώ τα ανοιχτά υπάρχουν σε πολύ μικρό ποσοστό.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.1 Παραδοσιακά	371	91.4%
3.2 Μη παραδοσιακά	35	8.6%
Σύνολο:	406	100%
3.2 Μη παραδοσιακά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.2.1 Κατασκευή προβλημάτων	1	2.9%
3.2.2 Γρίφου-Λογικής	28	80%
3.2.3 Πρότζεκτ	0	0%
3.2.4 Έκθεση Ιδεών	6	17.1%
Σύνολο:	35	100%

Τα παραδοσιακά κι εδώ αποτελούν τη μεγάλη πλειοψηφία, υπάρχουν και ελάχιστα μη παραδοσιακά που κατά κύριο λόγο είναι προβλήματα γρίφων, υπάρχουν και κάποια προβλήματα έκθεσης ιδεών.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1 Ρουτίνας	374	92.1%
4.2 Μη ρουτίνας	32	7.9%
Σύνολο:	406	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1 Ρουτίνας	374	100%
4.1.1 Αθροιστικά	252	67.4%
4.1.2 Πολλαπλασιαστικά	122	32.6%
Σύνολο:	374	100%

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1.1 Αθροιστικά	252	100%
-Αλλαγής	7	2.8%
-Ομαδοποίησης	177	70.2%
-Σύγκρισης	56	22.2%
-Εξισορρόπησης	12	4.8%
Σύνολο:	252	100%

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1.3 Θέση αγνώστου	301	80.5%
Τελικός	301	80.5%
Ενδιάμεσος	73	19.5%
Σύνολο:	374	100%

Τα ρουτίνας είναι κυρίαρχα και εδώ, με περισσότερα τα αθροιστικά να είναι περισσότερα από το διπλάσιο των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων. Στα αθροιστικά κυρίαρχη ομάδα και εδώ είναι τα ομαδοποίησης. Παρόμοια, ο αγνώστος σε τελική θέση βρίσκεται στο 80.5% των προβλημάτων.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5. Κατασκευαστικά	21	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5.1 Κατασκευή εικόνας	9	42.9%
5.2 Κατασκευή γραφήματος	7	33.3%
5.3 Κατασκευή πίνακα	5	23.8%
Σύνολο:	21	100%

Τα κατασκευαστικά προβλήματα είναι ελάχιστα και εδώ, σχεδόν το 5% επί του συνόλου των προβλημάτων. Από αυτά τα περισσότερα ζητούν κατασκευή εικόνας.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
6. Μοντελοποίησης	15	100%

Τα προβλήματα που καλούνται να μοντελοποιήσουν οι μαθητές, αφορούν προβλήματα καθημερινότητας που σχετίζονται με πραγματικές καταστάσεις.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1 Ρεαλιστικά	378	100%
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0	0
Σύνολο:	378	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1 Ρεαλιστικά		
7.1.1 Ρεαλιστικά-αληθινά	56	14.8%
7.1.2 Ρεαλιστικά-πλασματικά	322	85.2%
Σύνολο:	378	100%

Δεν καταγράφηκαν προβλήματα με εξωπραγματικό σενάριο.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	38	9.4%
8.2 Κειμενική μορφή	268	66.1%
8.3 Πίνακας, γράφημα	29	7.1%
8.4 Εικόνα, σχέδιο	48	11.8%
8.5 Μικτή μορφή	23	5.6%
Σύνολο:	406	100%

Ακόμη μία φορά, τα περισσότερα προβλήματα είναι σε κειμενική μορφή με μεγάλη διαφορά από τις υπόλοιπες υποκατηγορίες. Ακολουθούν, τα προβλήματα εικόνας..

Τα προβλήματα σε αυτό το εγχειρίδιο είναι ως επί το πλείστο σύνθετα προβλήματα όμως δεν παρουσιάζεται μεγάλη διαφορά με τα απλά (58.6% και 41.4% αντίστοιχα). Τα κλειστού τύπου είναι σχεδόν η αποκλειστική μορφή προβλημάτων με ελάχιστα προβλήματα να έχουν πάνω από μια σωστές λύσεις (3.4%). Τα παραδοσιακά προβλήματα κυριαρχούν και εδώ, με ένα ποσοστό 91,4% επί του συνόλου των προβλημάτων. Τα ρουτίνας το ίδιο με τα παραδοσιακά βρίσκονται σε υψηλά ποσοστά (92.1%) και κυριαρχούν τα αθροιστικά, κυρίως της ομαδοποίησης. Επίσης, σ' αυτό το εγχειρίδιο ο άγνωστος είναι τελικής θέσης στο 80.5% των προβλημάτων. Όσον αφορά τα ρεαλιστικά προβλήματα, πάλι κατέχουν ένα υψηλό ποσοστό μέσα στο εγχειρίδιο. Τέλος, παρατηρείται ότι η κειμενική μορφή στα προβλήματα κυριαρχεί άλλη μία φορά, όπως σε όλα τα εγχειρίδια μέχρι στιγμής.

Οι αντίστοιχοι για το ελληνικό εγχειρίδιο είναι:

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
1.1 Απλά προβλήματα	79	33.9%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	154	66.1%
Σύνολο:	233	100%

Τα σύνθετα προβλήματα αποτελούν σχεδόν το διπλάσιο ποσοστό των απλών προβλημάτων σε αυτό το εγχειρίδιο.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
2.1 Ανοιχτού τύπου	4	1.7%
2.2 Κλειστού τύπου	229	98.3%
Σύνολο:	233	100%

Σε αυτό το εγχειρίδιο, σχεδόν όλα τα προβλήματα είναι κλειστού τύπου.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.1 Παραδοσιακά	219	94%
3.2 Μη παραδοσιακά	14	6%
Σύνολο:	233	100%
3.2 Μη παραδοσιακά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
3.2.1 Κατασκευή προβλημάτων	4	28.6%
3.2.2 Γρίφου-Λογικής	9	64.3%
3.2.3 Πράτζεκτ	0	0%
3.2.4 Έκθεση Ιδεών	1	7.1%
Σύνολο:	14	100%

Τα παραδοσιακά προβλήματα είναι το 94% όλων των προβλημάτων, ενώ από τα μη παραδοσιακά τα περισσότερα αποτελούν προβλήματα γρίφου-λογικής. Ελάχιστα είναι τα μη-παραδοσιακά προβλήματα.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1 Ρουτίνας	230	98.7%
4.2 Μη ρουτίνας	3	1.3%
Σύνολο:	233	100%
4.1 Ρουτίνας	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
4.1.1 Αθροιστικά	107	46.5%
4.1.2 Πολλαπλασιαστικά	123	53.5%
Σύνολο:	230	100%

4.1.1 Αθροιστικά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
-Αλλαγής	13	12.1%
-Ομαδοποίησης	48	44.9%
-Σύγκρισης	39	36.4%
-Εξισορρόπησης	7	6.6%

Σύνολο:	107	100%
----------------	------------	-------------

<u>4.1.3 Θέση αγνώστου</u>	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
<u>Τελικός</u>	147	64%
<u>Ενδιάμεσος</u>	83	36%
Σύνολο:	230	100%

Σε αυτό το εγχειρίδιο τα μη ρουτίνας είναι πολύ λίγα έως μη αντιληπτά, όλα τα προβλήματα σχεδόν είναι ρουτίνας, με πολλαπλασιαστικά να αποτελούν πλειοψηφία, με μικρή σχετικά διαφορά. Από τα αθροιστικά τα περισσότερα είναι ομαδοποίησης και υπάρχουν και αρκετά σύγκρισης.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5. Κατασκευαστικά	6	100%
Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
5.1 Κατασκευή εικόνας	4	66.7%
5.2 Κατασκευή γραφήματος	0	0%
5.3 Κατασκευή πίνακα	2	33.3%
Σύνολο:	6	100%

Τα κατασκευαστικά προβλήματα είναι μόλις 6 στο εγχειρίδιο αυτό, ενώ από αυτά τα περισσότερα είναι για κατασκευή εικόνας.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
6. Μοντελοποίησης	25	100%

Υπάρχουν περισσότερα προβλήματα τα οποία ζητούν από τους μαθητές να σκεφτούν ένα μοντέλο στην Στ' σε σχέση με τις άλλες δύο τάξεις.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1 Ρεαλιστικά	212	100%
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0	0
Σύνολο:	212	100%
7.1 Ρεαλιστικά	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
7.1.1 Ρεαλιστικά-αληθινά	67	31.6%
7.1.2 Ρεαλιστικά-πλασματικά	145	68.4%
Σύνολο:	212	100%

Σ' αυτήν την περίπτωση, όπως και σε προηγούμενες, δεν υπάρχουν προβλήματα με εξωπραγματικό περιεχόμενο.

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος	Ποσοστό επί του συνόλου
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	4	1.7%
8.2 Κειμενική μορφή	181	77.7%
8.3 Πίνακας, γράφημα	21	9%

8.4 Εικόνα, σχέδιο	7	3%
8.5 Μικτή μορφή	20	8.6%
Σύνολο:	233	100%

Αποδεικνύεται ότι στα εγχειρίδια του δημοτικού σχολείου (Δ', Ε', Στ' τάξεων) τα περισσότερα προβλήματα είναι σε μορφή κειμένου.

Συνολικά, σε αυτό το εγχειρίδιο τα προβλήματα που κυριαρχούν είναι κλειστού τύπου σχεδόν σε αποκλειστικότητα, ενώ τα περισσότερα είναι σύνθετα προβλήματα. Εδώ τα ποσοστά ρουτίνας και παραδοσιακών είναι σε ποσοστό άνω του 90%. Επίσης, τα κατασκευαστικά προβλήματα είναι ελάχιστα σε όλο το εγχειρίδιο, ενώ αυξάνονται τα προβλήματα μοντελοποίησης και η συντριπτική πλειοψηφία είναι σε κειμενική μορφή. Τέλος, και σ' αυτό το εγχειρίδιο πάλι κυριαρχούν τα προβλήματα ρουτίνας, ενώ υπάρχει ένα υψηλό ποσοστό προβλημάτων που παραθέτουν πραγματικά γεγονότα.

4.3.γ) Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων Ελλάδας και Κύπρου για τη Στ' Δημοτικού:

Συγκριτικοί Πίνακες

Κατηγορίες προβλημάτων	Πλήθος προβλημάτων Κύπρος	Ποσοστό επί του συνόλου	Πλήθος προβλημάτων Ελλάδα	Ποσοστό επί του συνόλου
1.1 Απλά προβλήματα	168	41.4%	79	33.9%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	238	58.6%	154	66.1%
<i>Σύνολο:</i>	406	100%	233	100%
2.1 Ανοιχτά προβλήματα	14	3.4%	4	1.7%
2.2 Κλειστά προβλήματα	392	96.6%	229	98.3%
<i>Σύνολο:</i>	406	100%	233	100%
3.1 Παραδοσιακά	371	91.4%	219	94%
3.2 Μη παραδοσιακά	35	8.6%	14	6%
<i>Σύνολο:</i>	406	100%	233	100%
3.2 Μη παραδοσιακά				

3.2.1 Κατασκευή προβλημάτων	1	2.9%	4	28.6%
3.2.2 Γρίφου-Λογικής	28	80%	9	64.3%
3.2.3 Πρότζεκτ	0	0%	0	0%
3.2.4 Έκθεση Ιδεών	6	17.1%	1	7.1%
<i>Σύνολο:</i>	35	100%	14	100%
4.1 Ρουτίνας	374	92.1%	230	98.7%
4.2 Μη ρουτίνας	32	7.9%	3	1.3%
<i>Σύνολο:</i>	406	100%	233	100%
4.1 Ρουτίνας				
<u>4.1.1 Αθροιστικά</u>	252	67.4%	107	46.5%
<u>4.1.2 Πολλαπλασιαστικά</u>	122	32.6%	123	53.5%
<i>Σύνολο:</i>	374	100%	230	100%
<u>4.1.1 Αθροιστικά</u>				
-Αλλαγής	7	2.8%	13	12.1%
-Ομαδοποίησης	177	70.2%	48	44.9%
-Σύγκρισης	56	22.2%	39	36.4%
-Εξισορρόπησης	12	4.8%	7	6.6%
<i>Σύνολο:</i>	252	100%	107	100%
<u>4.1.3 Θέση αγνώστου</u>				
-Τελικός	301	80.5%	147	64%
-Ενδιάμεσος	73	19.5%	83	36%
<i>Σύνολο:</i>	374	100%	230	100%
5. Κατασκευαστικά	21	100%	6	100%
5.1 Κατασκευή εικόνας	9	42.9%	4	66.7%
5.2 Κατασκευή γραφήματος	7	33.3%	0	0%
5.3 Κατασκευή πίνακα	5	23.8%	2	33.3%
<i>Σύνολο:</i>	21	100%	6	100%
6. Μοντελοποίηση	15	100%	25	100%
7.1 Ρεαλιστικά	378	100%	212	100%

7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0	0%	0	0
<i>Σύνολο:</i>	378	100%	212	100%
7.1 Ρεαλιστικά				
7.1.1 Ρεαλιστικά-αληθινά	56	14.8%	67	31.6%
7.1.2 Ρεαλιστικά-πλασματικά	322	85.2%	145	68.4%
<i>Σύνολο:</i>	378	100%	212	100%
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	38	9.4%	4	1.7%
8.2 Κειμενική μορφή	268	66.1%	181	77.7%
8.3 Πίνακας, γράφημα	29	7.1%	21	9%
8.4 Εικόνα σχήμα	48	11.8%	7	3%
8.5 Μικτή μορφή	23	5.6%	21	8.6%
<i>Σύνολο:</i>	406	100%	233	100%

Γενικά, συγκρίνοντας τα δύο εγχειρίδια, παρατηρείται ότι δεν εμφανίζουν ιδιαίτερες διαφορές στα ποσοστά των διαφόρων κατηγοριών. Τόσο στο κυπριακό, όσο και στο ελληνικό τα εγχειρίδια περιέχουν ως επί το πλείστον σύνθετα προβλήματα, ενώ υπάρχει μια συρρίκνωση των μη παραδοσιακών, των ανοιχτών και των μη ρουτίνας προβλημάτων. Τα κατασκευαστικά προβλήματα είναι επίσης λιγότερα σε σχέση με τις προηγούμενες τάξεις και όπως σε όλα τα εγχειρίδια που έχουν αναλυθεί στην παρούσα εργασία, τα προβλήματα είναι κειμενικής μορφής. Τέλος, όσον αφορά τα προβλήματα μοντελοποίησης, και στα δύο εγχειρίδια παρουσιάζονται ρεαλιστικές καταστάσεις, ενώ αρκετές είναι οι περιπτώσεις προβλημάτων στηριγμένων σε πραγματικά γεγονότα. Στα παραδείγματα που ακολουθούν ισχύει η διαδικασία που καλούνται να ακολουθήσουν οι μαθητές για να επιλύσουν με επιτυχία προβλήματα της κατηγορίας αυτής, η οποία βασίζεται στο σχήμα που αναφέρθηκε στο σημείο 2.11.

Παράδειγμα προβλήματος μοντελοποίησης Κύπρος Στ' Δημοτικού

ΠΩΛΕΙΤΑΙ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΑ		ΠΩΛΕΙΤΑΙ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΑ	
• Εμβαδόν: 60 m ²	• 2 υπνοδωμάτια	• Εμβαδόν: 80 m ²	• 2 υπνοδωμάτια
• Έτος κατασκευής: 2008	• 400 m από το κέντρο της πόλης	• Έτος κατασκευής: 2012	• 2 km από το κέντρο της πόλης
• Σαλόνι και κουζίνα	• Άνετος χώρος στάθμευσης	• Σαλόνι και κουζίνα	• Άνετος χώρος στάθμευσης
Κτηματομεσιτικό γραφείο "Επένδυση" τηλ.333 333 333		Κτηματομεσιτικό γραφείο "Επένδυση" τηλ.333 333 333	
			
€185 000		€210 000	

Η Βασιλική ζήτησε την άποψη ενός εκτιμητή ακινήτων σχετικά με τις τιμές πώλησης των διαμερισμάτων. Ο εκτιμητής υπολογίζει ότι το κόστος των διαμερισμάτων είναι €2000 ανά m². Επιπρόσθετα, χρησιμοποιεί τα πιο κάτω κριτήρια, για να υπολογίσει την τελική τιμή ενός διαμερίσματος:

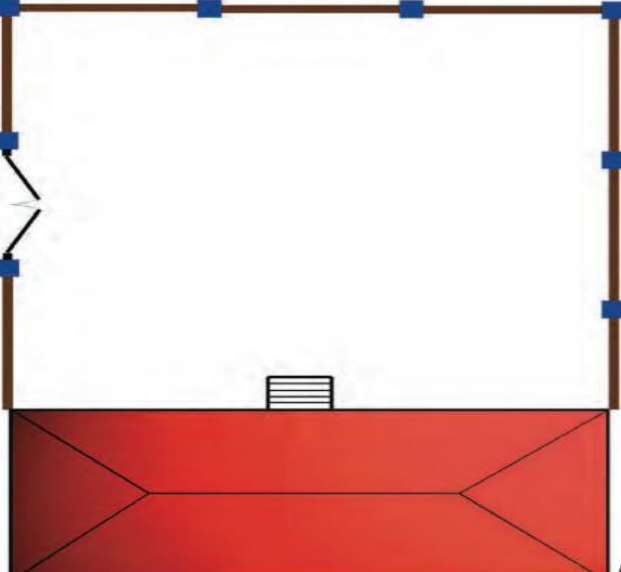
Έτος κατασκευής	Απόσταση από το κέντρο της πόλης	Χώρος στάθμευσης
Πάνω από 15 χρονών: + €0	Περισσότερα από 10 km: + €0	Όχι: + €0
Από 5 μέχρι 15 χρονών: + €5000	Από 5 μέχρι 10 km: + €10 000	Ναι: + €30 000
Από 0 μέχρι 5 χρονών: + €10 000	Από 0,5 μέχρι 5 km: + €15 000	
	Λιγότερο από 0,5 km: + €20 000	

(β) Ποιο από τα πιο πάνω διαμερίσματα είναι η καλύτερη ευκαιρία αγοράς για τη Βασιλική; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Παράδειγμα προβλήματος μοντελοποίησης Ελλάδα Στ' Δημοτικού















Αν αποφάσιζαν να ανασχεδιάσουν τις σχολικές αυλές των δημοτικών σχολείων, εκτός από τις προτάσεις των αρχιτεκτόνων, των περιβαλλοντολόγων και των δασκάλων, θα έπρεπε να ζητήσουν και τη γνώμη των παιδιών. Εσείς λοιπόν τα παιδιά της Στ' τάξης του σχολείου κάνετε τη δική σας πρόταση, αφού μελετήσετε μια κάτοψη σχολικής αυλής, όπως είναι η ακόλουθη.

Συμβουλευτείτε τον κατάλογο φυτών δεξιά της κάτοψης, ο οποίος περιλαμβάνει: **α)** το σκίτσο κάθε φυτού που θα το μεταφέρετε στην κάτοψη όπως είναι, **β)** την εικόνα, **γ)** τις τιμές των φυτών που θα μπορούσατε να φυτέψετε. Δοκιμάστε λοιπόν με την ομάδα σας να εμπλουτίσετε την αυλή με φυτά και υπολογίστε το συνολικό κόστος χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή για κάθε φυτό.



Κλίμακα 1:300

ΣΚΙΤΣΟ ΕΙΚΟΝΑ ΤΙΜΗ

		Κέδρος 80€
		Ελιά 60€
		Κυπαρίσσι 50€
		Λεύκα 40€
		Ιτιά 100€
		Φτέρη 25€
		Γιουνίπερο 20€

4.4 α) Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων της Κύπρου ανά τάξη

Ξεκινώντας από τα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου ακολουθεί ο παρακάτω πίνακας που δείχνει συνοπτικά τις ποσοτικές διαφορές από τάξη σε τάξη. Σημειώνεται ότι στο εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης καταγραφίκαν συνολικά 417 προβλήματα, στο εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης 433 προβλήματα σύνολο και στην Στ΄ το αριθμητικό σύνολο όλων των προβλημάτων είναι 406.

Εγχειρίδια Μαθηματικών Κύπρου			
Κατηγορίες Προβλημάτων	Ποσοστά επί του συνόλου των προβλημάτων ανά κατηγορία Δ΄ τάξης	Ποσοστά επί του συνόλου των προβλημάτων ανά κατηγορία Ε΄ τάξης	Ποσοστά επί του συνόλου των προβλημάτων ανά κατηγορία Στ΄ τάξης
1.1 Απλά προβλήματα	33.6%	33.9%	41.4%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	66.4%	66.1%	58.6%
2.1 Ανοιχτά προβλήματα	21.1%	14.1%	3.4%
2.2 Κλειστά προβλήματα	78.9%	85.9%	96.6%
3.1 Παραδοσιακά προβλήματα	81.8%	85%	91.4%
3.2 Μη παραδοσιακά προβλήματα	18.2%	15%	8.6%
4.1 Ρουτίνας	81.5%	89.9%	92.1%
4.2 Μη ρουτίνας	18.5%	11.1%	7.9%
5. Κατασκευαστικά	4.8%	19.9%	5.2%
6. Μοντελοποίησης	4.1%	3.5%	3.7%
7.1 Ρεαλιστικά	60.4%	77.8%	93.1%
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0%	0%	0%
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	5.5%	8.1%	9.4%
8.2 Κειμενική μορφή	37.8%	48.1%	66.1%
8.3 Πίνακας, γράφημα	4.3%	10.8%	7.1%
8.4 Εικόνα, σχήμα	23.3%	16%	11.8%
8.5 Μικτή μορφή	29.1%	17%	5.6%

Ο τρόπος εύρεσης των ποσοστών βασίζεται στους προηγούμενους τρεις συγκριτικούς πίνακες. Συγκεκριμένα για την πρώτη κατηγοριοποίηση σε απλά και σύνθετα προβλήματα τα ποσοστά υπολογίστηκαν με βάση το άθροισμα των προβλημάτων της συγκεκριμένης κατηγορίας. Η ίδια μέθοδος ακολουθείται και στις υπόλοιπες κατηγορίες.

β) Σύγκριση των μαθηματικών προβλημάτων των εγχειρίδιων της Ελλάδος ανά τάξη

Συνεχίζοντας με τα ελληνικά εγχειρίδια, ακολουθεί ο παρακάτω πίνακας που δείχνει συνοπτικά τις ποσοτικές διαφορές από τάξη σε τάξη. Σημειώνεται ότι στο εγχειρίδιο της Δ' τάξης καταγραφήκαν συνολικά 472 προβλήματα, στο εγχειρίδιο της Ε' τάξης 225 προβλήματα σύνολο και στην Στ' το αριθμητικό σύνολο όλων των προβλημάτων είναι 233.

Εγχειρίδια Μαθηματικών Ελλάδας			
Κατηγορίες Προβλημάτων	Ποσοστά επί του συνόλου των προβλημάτων ανά κατηγορία Δ' τάξης	Ποσοστά επί του συνόλου των προβλημάτων ανά κατηγορία Ε' τάξης	Ποσοστά επί του συνόλου των προβλημάτων ανά κατηγορία Στ' τάξης
1.1 Απλά προβλήματα	10.1%	47.1%	33.9%
1.2 Σύνθετα προβλήματα	89.9%	52.9%	66.1%
2.1 Ανοιχτά προβλήματα	13.1%	12%	1.7%
2.2 Κλειστά προβλήματα	86.9%	88%	98.3%
3.1 Παραδοσιακά προβλήματα	73.8%	94.7%	94%
3.2 Μη παραδοσιακά προβλήματα	26.2%	5.3%	6%
4.1 Ρουτίνας	94.3%	92%	98.7%
4.2 Μη ρουτίνας	5.7%	8%	1.3%
5. Κατασκευαστικά	15.9%	8.9%	2.6%
6. Μοντελοποίησης	1.7%	6.7%	10.7%
7.1 Ρεαλιστικά	93.7%	81.3%	91%
7.2 Φανταστικά-Εξωπραγματικά	0%	0%	0%
8.1 Καθαρά μαθηματική μορφή	4.9%	1.8%	1.7%
8.2 Κειμενική μορφή	68.2%	75.6%	77.7%
8.3 Πίνακας, γράφημα	3.2%	6.7%	9%
8.4 Εικόνα, σχήμα	7.4%	5.3%	3%
8.5 Μικτή μορφή	16.3%	10.6%	8.6%

Τα ποσοστά υπολογίστηκαν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και στον πίνακα των κυπριακών εγχειριδίων, δηλαδή βασιζόμενοι στους τρεις συγκριτικούς πίνακες και με βάση το άθροισμα των προβλημάτων της κάθε κατηγορίας ξεχωριστά.

Λόγω της φύσης των αποτελεσμάτων, θα γίνει μια απόπειρα να επεξηγηθούν τα αποτελέσματα που σχετίζονται με τα ποσοστά των απλών και σύνθετων προβλημάτων

στα σχολικά εγχειρίδια και των δύο χωρών. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τα αποτελέσματα, τα εγχειρίδια της τετάρτης δημοτικού περιέχουν μεγαλύτερο ποσοστό σύνθετων προβλημάτων από τις επόμενες τάξεις της πέμπτης και έκτης και αυτό ισχύει και στις δύο χώρες. Πιο συγκεκριμένα, στην τετάρτη δημοτικού της Κύπρου τα 2/3 των προβλημάτων αποτελούν σύνθετα προβλήματα, ενώ στο ελληνικό κυριαρχούν τα σύνθετα σε πολύ μεγάλο ποσοστό, σχεδόν το 90%. Στις επόμενες τάξεις παρατηρείται μια μεταβολή σε αυτήν την τάση, με τα απλά και σύνθετα προβλήματα να τείνουν να εξισορροπούνται στα εγχειρίδια τόσο της Κύπρου, όσο και της Ελλάδας. Αυτό είναι ένα μη αναμενόμενο αποτέλεσμα, καθώς θα περίμενε κανείς ότι στις μεγαλύτερες τάξεις θα αυξανόταν ο αριθμός των σύνθετων προβλημάτων, καθώς θα αναμενόταν τα προβλήματα να είναι περισσότερο περίπλοκα.

Με βάση τα αποτελέσματα αυτά και με περαιτέρω αναλυτική επισκόπηση των αναλυτικών εγχειριδίων, η εξήγηση μάλλον οφείλεται στη διδακτέα ύλη που πραγματεύονται τα εκάστοτε εγχειρίδια. Πιο συγκεκριμένα, στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται τα είδη των πράξεων και των αριθμών που συναντώνται μέσα σε κάθε εγχειρίδιο:

Τάξη	Είδη αριθμών και πράξεων
Κύπρος Δ' Δημοτικού	<ul style="list-style-type: none"> • Τριψήφιοι-τετραψήφιοι αριθμοί • Προτεραιότητα πράξεων με μονοψήφιους-διψήφιους αριθμούς • Πράξεις με κλάσματα • Πολλαπλασιασμός με τριψήφιους-διψήφιους αριθμούς • Διαιρέσεις τριψήφιων με μονοψήφιους • Στερεομετρία (εύρεση όγκου) • Μικτοί αριθμοί • Δεκαδικοί αριθμοί (1-2 δεκαδικά ψηφία) • Πολλαπλασιασμός πενταψήφιων/εξαψήφιων με μονοψήφιους
Κύπρος Ε' Δημοτικού	<ul style="list-style-type: none"> • Πολλαπλασιασμός πενταψήφιων/εξαψήφιων με μονοψήφιους • Διαιρέσεις με διψήφιο • Κριτήρια διαιρετότητας, ΕΚΠ&ΜΚΔ • Κλάσματα (ομώνυμα και ετερόνυμα) • Μικτοί αριθμοί • Δεκαδικοί αριθμοί (2+δεκαδικά ψηφία) • Μετατροπές μονάδων μέτρησης (ακέραιοι και δεκαδικοί)

Κύπρος ΣΤ' Δημοτικού	<ul style="list-style-type: none"> • Πράξεις με δεκαδικούς • Πολλαπλασιασμός διψήφιων • Πρόσθεση/Αφαίρεση πενταψήφιων/εξαψήφιων αριθμών • Αρνητικοί αριθμοί • Πράξεις με δυνάμεις • Υπολογισμός γωνιών (Παραπληρωματικές γωνίες, άθροισμα γωνιών τριγώνου, διχοτόμος, ύψος) • Κλάσματα • Μικτοί • Γωνίες/Πλευρές παραλληλογράμμων • Αναλογίες • Πολλαπλασιασμοί/ Διαιρέσεις, σύνθετα κλάσματα • πολλαπλασιασμοί/διαιρέσεις δεκαδικών • Αλγεβρικές παραστάσεις • Ποσοστά, πιθανότητες
Ελλάδα Δ' Δημοτικού	<ul style="list-style-type: none"> • Πράξεις με πενταψήφιους • μετατροπές μονάδων • Πολλαπλασιασμοί/Διαιρέσεις διψήφιων/τριψήφιων • Δεκαδικοί • Αναγωγή στη μονάδα • Επταψήφιοι αριθμοί (έως το 1.000.000) • Διαδοχικές πράξεις με διψήφιους
Ελλάδα Ε' Δημοτικού	<ul style="list-style-type: none"> • Εξαψήφιοι αριθμοί • Κλάσματα • Μέσος όρος • Δεκαδικοί αριθμοί, δεκαδικά κλάσματα
Ελλάδα ΣΤ' Δημοτικού	<ul style="list-style-type: none"> • Δεκαδικοί • Κλάσματα • Επταψήφιοι+ αριθμοί • Πολλά προβλήματα παρατήρησης/κατασκευής

Οι πράξεις που υπάγονται στα εγχειρίδια της Δ' Δημοτικού, τόσο της Ελλάδας όσο και της Κύπρου είναι μικρές απλές πράξεις στην πλειοψηφία τους. Μέσα στα προβλήματα των τάξεων αυτών συναντώνται πολλές φορές σύνθετα προβλήματα, που όμως δεν απαιτούν πολύπλοκες πράξεις, απλά περισσότερες από μία διαδοχικές. Αυτό ισχύει σε οποιαδήποτε ενότητα, ακόμα και για την εκμάθηση πράξεων με δεκαδικούς πολλές φορές εμφανίζεται η απαίτηση να γίνει μια πιο μικρή πράξη πρώτα πριν εκτελεστεί η βασική.

Στις επόμενες τάξεις υπάρχουν και απλά και σύνθετα προβλήματα σε ίσο ποσοστό περίπου. Αυτή η διαφοροποίηση εξηγείται από το γεγονός ότι υπάρχουν απλά προβλήματα ως υποερωτήματα μεγαλύτερων προβλημάτων, αλλά και οι αριθμοί που πραγματεύονται είναι πιο μεγάλοι και οι πράξεις πιο σύνθετες. Δηλαδή, για παράδειγμα, οι διαιρέσεις με διψήφιους μπορεί να εξασκούνται μέσω απλών προβλημάτων, που απαιτούν μια πράξη, αλλά η ίδια η πράξη είναι περίπλοκη για τους μαθητές.

Πιο αναλυτικά, στο κυπριακό εγχειρίδιο της τετάρτης Δημοτικού, στην πρώτη ενότητα γίνεται μια επανάληψη της ύλης της προηγούμενης τάξης, όπου οι μαθητές ξαναθυμούνται τους τριψήφιους και τετραψήφιους αριθμούς και πώς να τους διαχειριστούν στις πράξεις, απλούς πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, όπου εξετάζονται σε ασκήσεις με απλές πράξεις, αλλά και σε απλά και σύνθετα προβλήματα. Στη δεύτερη ενότητα τα παιδιά καλούνται να διαχειριστούν προβλήματα, αλλά και να ανακαλύπτουν τις μαθηματικές διατυπώσεις πίσω από αυτά.

(β) Μια παρέα πέντε παιδιών της ίδιας ηλικίας αγόρασαν εισιτήρια για τον κινηματογράφο. Έδωσαν στο ταμείο ένα χαρτονόμισμα των €50 και πήραν ρέστα €10. Πόσα κόστιζε το κάθε εισιτήριο;

$$(i) (50 + 10) \div 5 = v$$

$$(ii) (50 \div 5) + 10 = v$$

$$(iii) (50 - 10) \div 5 = v$$

$$(iv) (50 \div 10) \div 5 = v$$

(γ) Ένας πτηνοτρόφος συσκέυασε 78 αυγά σε όμοιες αυγοθήκες, οι οποίες αποτελούνται από 2 σειρές των 3 αυγών η καθεμία. Πόσες αυγοθήκες γέμισε;

$$(i) (78 \div 2) \times 3 = v$$

$$(ii) 78 \div (2 \times 3) = v$$

$$(iii) (78 - (2 \times 3)) = v$$

$$(iv) 78 \times (2 \times 3) = v$$

(δ) Σε ένα ελαιοτριβείο παράχθηκαν 3500 L λάδι, τα οποία συσκευάστηκαν σε δοχεία των 5 L το καθένα. Τα δοχεία τοποθετήθηκαν σε κιβώτια που το καθένα χωρούσε 10 δοχεία. Πόσα κιβώτια γέμισαν;

$$(i) 3500 \div (10 \div 5) = v$$

$$(ii) (3500 \div 5) \div 10 = v$$

$$(iii) (3500 \div 10) \times 5 = v$$

$$(iv) 3500 \times (5 \times 10) = v$$

Τα παραπάνω προβλήματα προέρχονται από το εν λόγω εγχειρίδιο της παραπάνω ενότητας και στοχεύουν σε μια επαναληπτική-συστηματική μάθηση, αλλά και στο να σκεφτούν τα παιδιά την προτεραιότητα των πράξεων που πρέπει να εκτελέσουν προκειμένου να φτάσουν στη λύση.

9. (α) Ο Στέφανος ετοιμάζει ανθοδέσμες. Έχει στη διάθεσή του 18 ροζ τριαντάφυλλα και 12 κίτρινα τριαντάφυλλα. Σε κάθε ανθοδέσμη βάζει 2 ροζ τριαντάφυλλα και 3 κίτρινα. Πόσες ίδιες ανθοδέσμες είναι δυνατόν να ετοιμάσει;

(β) Ο Κώστας ετοιμάζει σακουλάκια με γλυκά για το παζαράκι του σχολείου του. Έχει 12 σακουλάκια, 40 καραμέλες και 48 σοκολατάκια. Σε κάθε σακουλάκι βάζει 10 καραμέλες και 8 σοκολατάκια. Πόσα ίδια σακουλάκια είναι δυνατόν να ετοιμάσει;

Η πλειοψηφία των προβλημάτων σε αυτήν την ενότητα είναι σύνθετα προβλήματα τέτοιου τύπου όπως παραπάνω, όπου οι διαδοχικές πράξεις είναι απλές και συνήθως περιλαμβάνουν μονοψήφιους και διψήφιους ακέραιους αριθμούς.

Στη συνέχεια της δεύτερης ενότητας, οι μαθητές χειρίζονται τα κλάσματα. Στις ασκήσεις που εξασκούνται εδώ τα παιδιά, καλούνται απλά να διαχειριστούν απλές μεμονωμένες πράξεις. Τα προβλήματα όμως απαιτούν περισσότερες διαδοχικές πράξεις προκειμένου να επιλυθούν. Για παράδειγμα, στο παρακάτω πρόβλημα, χρειάζεται να γίνουν δύο πολλαπλασιασμοί με τα αναφερθέντα κλάσματα και το 60 (1 ώρα) και πρόσθεση των αποτελεσμάτων.

7. Ο Κυριάκος μαθαίνει κιθάρα. Ο πίνακας παρουσιάζει τις ώρες που μελέτησε το Σαββατοκύριακο.

Σάββατο	$\frac{2}{3}$ της ώρας
Κυριακή	$\frac{8}{10}$ της ώρας



Πόσα λεπτά μελέτησε συνολικά ο Κυριάκος το Σαββατοκύριακο;

Ακολούθως, τα παιδιά πραγματεύονται την έννοια του εμβαδού, ξεκινώντας από απλές πράξεις καταλήγουν και πάλι σε σύνθετα προβλήματα που επιλύονται με απλές εξισώσεις μικρών αριθμών.

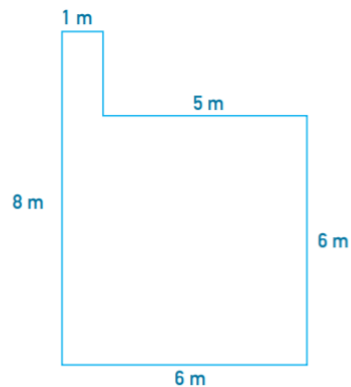
Στην τρίτη ενότητα όπου πραγματεύονται τους τετραψήφιους αριθμούς και τη στρογγυλοποίηση, τα προβλήματα είναι περισσότερο απλά, αλλά και πάλι υπάρχουν αρκετά σύνθετα. Ακολουθούν μαθήματα στα οποία κυριαρχεί η κατασκευή προβλήματος και τα σύνθετα προβλήματα. Εδώ, οι μαθητές διαχειρίζονται τετραψήφιους ακέραιους αριθμούς προσθέτοντας ή πολλαπλασιάζοντας.

(β) Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών, στην αρχή του μήνα Μαρτίου, διέθετε στην αποθήκη του 1157 συσκευές κινητών τηλεφώνων. Μέχρι το τέλος του μήνα, πωλήθηκαν 458 συσκευές, ενώ το κατάστημα παρέλαβε 154 καινούριες συσκευές. Πόσες ήταν όλες οι συσκευές στην αποθήκη του καταστήματος στο τέλος του μήνα;

Απάντηση: _____

Στο δεύτερο μέρος, η τέταρτη ενότητα ασχολείται με έννοιες γεωμετρίας και δεν υπάρχουν πολλά προβλήματα, αλλά περισσότερο κατασκευές και μικρές ασκήσεις μέτρησης και παρατήρησης.

5. Το πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζει την κάτοψη της αυλής του Γιάννη.



Ποια είναι η περίμετρος της αυλής;

Η πέμπτη ενότητα ασχολείται κυρίως με την ώρα στις διάφορες μορφές της. Έπειτα, και πάλι τα προβλήματα είναι στην πλειοψηφία σύνθετα με μικρούς αριθμούς και υπάρχουν προβλήματα που περιέχουν πολλαπλασιασμούς με ένα τριψήφιο κι ένα διψήφιο αριθμό, ενώ σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να προηγείται μια πιο μικρή πράξη (πρόσθεσης ή αφαίρεσης) πριν γίνει αυτό.

Στην έκτη ενότητα, κυριαρχούν οι διαιρέσεις και τα προβλήματα είναι σύνθετα κατά βάση, όπου υπάρχουν περισσότερες διαδοχικές πράξεις με μικρούς αριθμούς.

Προχωρώντας στο 4ο μέρος, η ενότητα 7 της στερεομετρίας έχει προβλήματα με τον όγκο, όπου και πάλι είναι πολλαπλασιασμοί με μικρούς αριθμούς. Στην 8η ενότητα κυριαρχούν τα κλάσματα και η σύγκριση μεταξύ τους. Εδώ παρατηρούμε απλά προβλήματα, αλλά και αρκετά σύνθετα.

Στο 5ο μέρος, στην 9η ενότητα εμφανίζονται μικτοί και δεκαδικοί αριθμοί. Τα προβλήματα που επικρατούν είναι σύνθετα.

(β) Η Ευγενία οδήγησε τη Δευτέρα 4,6 km για να φτάσει από το σπίτι της στο γραφείο. Στην επιστροφή ακολούθησε άλλη διαδρομή, η οποία ήταν κατά 0,75 km μεγαλύτερη. Πόση ήταν η συνολική απόσταση που διένυσε η Ευγενία από το σπίτι προς το γραφείο και από το γραφείο προς το σπίτι;



Απάντηση: _____

(γ) Η Δώρα αγόρασε στις εκπτώσεις ένα σακάκι και ένα φόρεμα. Πόσα εξοικονόμησε από την αρχική τιμή;



Απάντηση: _____

Στα επόμενα μαθήματα, στην ενότητα 11 τα μαθηματικά προβλήματα πραγματεύονται και πάλι πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις και η πλειοψηφία των προβλημάτων είναι σύνθετα με μικρές διαδοχικές πράξεις.

Στην ενότητα 12 γίνεται η εισαγωγή στους πενταψήφιους και εξαψήφιους αριθμούς, οι οποίοι πολλαπλασιάζονται με μονοψήφιους, τα προβλήματα με τέτοιου είδους πράξεις χαρακτηρίζονται ως απλά.

Στο κυπριακό εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης:

Στην πρώτη ενότητα γίνεται επανάληψη στους πολλαπλασιασμούς και στις διαιρέσεις πενταψήφιων και εξαψήφιων αριθμών. Εντοπίζονται τόσο απλά, όσο και σύνθετα προβλήματα.

Στη δεύτερη ενότητα οι μαθητές επαναλαμβάνουν τις ιδιότητες των πράξεων και εξασκούνται στους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις πρωτίστως με διψήφιους αριθμούς σε προβλήματα αναλογίας. Για την εκμάθηση αυτής της δεξιότητας υπάρχουν αρκετά προβλήματα.

(α) Σε ένα εργοστάσιο συσκευάζονται μπουκάλια νερού σε συσκευασίες των 12 μπουκαλιών. Πόσα μπουκάλια νερού περιέχονται συνολικά σε 135 συσκευασίες;

(δ) Ο Μιχάλης συμμετείχε σε ένα παιχνίδι γνώσεων. Συγκέντρωσε συνολικά 465 βαθμούς. Πόσους βαθμούς συγκέντρωσε σε κάθε γύρο ο Μιχάλης, αν έπαιξε 15 γύρους και ο αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσε σε κάθε γύρο ήταν ο ίδιος;

Στην τρίτη ενότητα τα παιδιά μαθαίνουν τα κριτήρια διαιρετότητας και το ΕΚΠ & ΜΚΔ. Εδώ ως επί το πλείστον υπάρχουν σύνθετα προβλήματα, αλλά επίσης υπάρχουν και αρκετά απλά ως υποερωτήματα μεγάλων προβλημάτων.

Η τέταρτη ενότητα εστιάζει στις πράξεις μεταξύ κλασμάτων. Εδώ, τα προβλήματα είναι απλού τύπου με πράξεις που εμπεριέχουν πολλαπλασιασμό ενός ακεραίου με κλάσμα ή πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων, ενώ η πρόσθεση και αφαίρεση ετερόνυμων κλασμάτων γίνεται σε σύνθετα κλάσματα.

(α) Ένας ποδηλάτης κάλυψε το πρωί τα $\frac{2}{8}$ μιας ποδηλατικής διαδρομής. Το απόγευμα κάλυψε $\frac{3}{8}$ της διαδρομής περισσότερα από το πρωί. Τι μέρος της διαδρομής κάλυψε συνολικά ο ποδηλάτης το πρωί και το απόγευμα;

Προχωρώντας στην πέμπτη ενότητα, παρατηρούνται λίγα προβλήματα που ως επί το πλείστον είναι σύνθετα και αφορούν την εκμάθηση της διαδικασίας υπολογισμού του εμβαδού του τριγώνου.

Ακολουθεί η έκτη ενότητα, όπου τα παιδιά εξασκούνται στην πρόσθεση και αφαίρεση μικτών και δεκαδικών. Εδώ εντοπίστηκαν κατά κύριο λόγο απλά προβλήματα (πρόσθεση μικτών με ομώνυμα κλάσματα, πρόσθεση αφαίρεση δεκαδικών), αλλά και σύνθετα (πρόσθεση αφαίρεση ετερόνυμων μικτών κλασμάτων).

Στην 7η ενότητα τα παιδιά συνεχίζουν τις πράξεις με κλάσματα που τα συνοδεύουν μονάδες μέτρησης. Καταγράφηκαν απλά και σύνθετα προβλήματα.

(α) Οι ευχετήριες κάρτες σε ένα κατάστημα πωλούνται όπως φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

Συσκευασία	Τιμή
Μία κάρτα	€0,75
Συσκευασία με 6 κάρτες	€3,90
Συσκευασία με 10 κάρτες	€6,50

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός καρτών που μπορεί να αγοράσει η Σοφία με €20;

(α) Ο Σωτήρης θα ετοιμάσει ρύζι για 3 άτομα. Με βάση τη συνταγή, χρειάζονται $\frac{2}{5}$ του ποτηριού ρύζι για κάθε άτομο. Πόση είναι η συνολική ποσότητα ρυζιού που χρειάζεται ο Σωτήρης;

(β) Ο Κώστας έχει στη διάθεσή του ένα ύφασμα με μήκος 5 m. Θα χρησιμοποιήσει τα $\frac{3}{4}$ του υφάσματος, για να ράψει μια σημαία. Πόσα μέτρα ύφασμα θα χρησιμοποιήσει;

(γ) Το $\frac{1}{4}$ των παιδιών ενός μουσικού ωδείου παρακολουθούν μαθήματα κιθάρας. Τα $\frac{3}{8}$ των παιδιών παρακολουθούν και μαθήματα πιάνου. Τι μέρος των παιδιών του ωδείου παρακολουθούν μαθήματα κιθάρας και πιάνου;

Επίσης παρατηρείται μετατροπή μονάδων μέτρησης.

(α) Ένα σκυλάκι έχει μάζα 2,75 kg. Ποια είναι η μάζα του σε g;

(β) Μια θηλυκή καμηλοπάρδαλη έχει ύψος 4,6 m. Ποιο είναι το ύψος της σε cm;

Υπάρχουν προβλήματα για εξάσκηση με δεκαδικούς.

(α) Η Ιωάννα έβαλε στο αυτοκίνητό της 25 L βενζίνη. Πόσα θα πληρώσει, αν η βενζίνη κοστίζει 1,077 σεντ το λίτρο;

(β) Η Θάλεια ξοδεύει €2,75 καθημερινά στην καντίνα του σχολείου. Κάθε Παρασκευή ξοδεύει €0,55 περισσότερα. Πόσα χρήματα θα ξοδέψει σε 2 εβδομάδες;

Στο κυπριακό εγχειρίδιο της Στ' τάξης:

Η πρώτη ενότητα είναι επανάληψη, η δεύτερη είναι ακέραιοι αριθμοί, προτεραιότητα πράξεων και η τρίτη δυνάμεις, αριθμοί ως το δισεκατομμύριο και διαιρετότητα.

Στην πρώτη ενότητα υπάρχουν απλά και σύνθετα προβλήματα, και φαίνεται να είναι περισσότερα τα απλά, τα οποία πραγματεύονται πράξεις με δεκαδικούς, πολλαπλασιασμό διψήφιων, ή πρόσθεση-αφαίρεση μεγάλων αριθμών με 5 ή 6 ψηφία.

15. Να απαντήσεις στις ερωτήσεις.

(α) Πόσα κιλά ζυγίζει η άσπρη γάτα;



(β) Σε έναν μαραθώνιο δρόμο, ένας αθλητής έχει διανύσει 25,7 km. Πόσα μέτρα έχει διανύσει ο αθλητής;



(α) Μια δακτυλογράφος μπορεί να δακτυλογραφήσει 64 λέξεις σε ένα λεπτό. Να υπολογίσετε πόσες λέξεις μπορεί να δακτυλογραφήσει σε μία ώρα, αν συνεχίσει να δακτυλογραφεί με τον ίδιο ρυθμό.

(β) Σε ένα κολυμβητήριο έχουν κάνει εγγραφή σε μαθήματα κολύμβησης 272 παιδιά. Να υπολογίσετε τον ελάχιστο αριθμό των εκπαιδευτών που πρέπει να προσληφθούν, αν κάθε εκπαιδευτής μπορεί να αναλάβει μέχρι και 8 παιδιά.

(γ) Σε ένα θέατρο υπάρχουν συνολικά 1680 θέσεις. Να υπολογίσετε πόσες θέσεις υπάρχουν σε κάθε σειρά, αν στο θέατρο υπάρχουν 35 σειρές με τον ίδιο αριθμό θέσεων η καθεμιά.

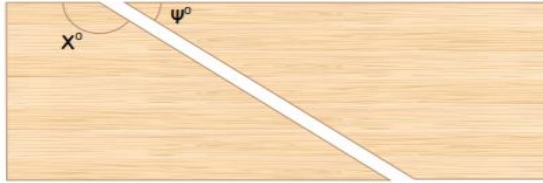
(δ) Ο Φάνης πήγε διακοπές για 7 μέρες στην Ελλάδα. Πλήρωσε €550 για τη διατροφή και την ψυχαγωγία του και €65 για κάθε μέρα που διέμενε στο ξενοδοχείο. Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος των διακοπών του Φάνη.

Στη δεύτερη ενότητα γίνεται εισαγωγή στους αρνητικούς αριθμούς. Σ' αυτήν την ενότητα υπάρχουν αρκετά απλά προβλήματα. Από την άλλη, στις ιδιότητες των πράξεων όπως η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, περιέχει σύνθετα προβλήματα. Το ίδιο ισχύει και για την εκμάθηση του μέσου όρου.

Στην ενότητα 3 υπάρχουν και απλά και σύνθετα προβλήματα, όπου μαθαίνουν τις δυνάμεις και περαιτέρω διαιρέσεις.

Στην ενότητα 4 υπολογίζονται οι παραπληρωματικές γωνίες με απλά προβλήματα κυρίως.

8. (α) Ένας ξυλουργός θα κόψει το πιο κάτω ξύλο. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\chi}$, αν η γωνία $\hat{\psi}$ είναι ίση με 38° .



- (β) Για την κατασκευή του πιο κάτω κτηρίου, χρησιμοποιήθηκαν μεταλλικές δοκοί. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{\alpha}$, αν η γωνία $\hat{\beta}$ είναι ίση με 120° .



Έπειτα για τα επαναληπτικά προβλήματα υπολογισμού αθροίσματος γωνιών τριγώνου χρησιμοποιούνται σύνθετα προβλήματα και για τον υπολογισμό διαμέσου, διχοτόμου και ύψους χρησιμοποιούνται και απλά και σύνθετα προβλήματα.

Στην πέμπτη ενότητα πάλι υπάρχουν προβλήματα με κλάσματα και μικτούς αριθμούς. Και πάλι υπάρχουν σύνθετα αλλά και κυρίως απλά προβλήματα ως υποερωτήματα.

Στην έκτη ενότητα, όπου υπολογίζονται γωνίες και πλευρές παραλληλογράμμων υπάρχουν αρκετά απλά προβλήματα για την εκμάθηση εννοιών. Το ίδιο και στις αναλογίες που υπάγονται στην 7^η ενότητα.

Η 8^η ενότητα αποτελείται κατά βάση από πολλαπλασιαστικά και διαιρετικά προβλήματα σύνθετων κλασμάτων.

Έπειτα, στην 9^η ενότητα τα παιδιά μαθαίνουν πολλαπλασιασμό και διαίρεση δεκαδικών, και εδώ υπάρχουν πολλά απλά προβλήματα για την εξάσκηση των πράξεων.

Στην ενότητα 10 υπάρχουν αρκετά σύνθετα προβλήματα, όπου τα παιδιά εξασκούνται στις αλγεβρικές παραστάσεις.

Τέλος στην 11^η , όπου διδάσκονται τα ποσοστά, τις πιθανότητες και τις αναλογίες υπάρχουν αρκετά απλά προβλήματα, ενώ στη 12^η που εισχωρούν στην εκμάθηση του μήκους του κύκλου, του όγκου κλπ υπάρχουν επίσης κάμποσα απλά προβλήματα ως υποερωτήματα.

3. Σε έναν κυκλικό χώρο πρασίνου με διάμετρο 4,5 m θα τοποθετηθεί περιμετρικά περίφραξη.

(α) Να υπολογίσετε το μήκος της περίφραξης.

(β) Να υπολογίσετε το κόστος της περίφραξης, αν η περίφραξη κοστίζει €4,00 το μέτρο.

	Εγχειρίδια Κύπρου					
	Δ' τάξη		Ε' τάξη		Στ' τάξη	
	Απλά προβλήματα	Σύνθετα προβλήματα	Απλά προβλήματα	Σύνθετα προβλήματα	Απλά προβλήματα	Σύνθετα προβλήματα
Ακέραιοι αριθμοί	113	203	46	96	81	119
Κλασματικοί αριθμοί	8	31	35	51	38	37
Δεκαδικοί αριθμοί	11	22	66	115	49	58
Μικτοί αριθμοί	0	5	0	32	0	24

Όσον αφορά τα ελληνικά εγχειρίδια:

Στη Δ' Δημοτικού υπάρχουν πάρα πολλά σύνθετα προβλήματα. Στα πρώτα μαθήματα τα παιδιά ασχολούνται με πράξεις με πενταψήφιους αριθμούς και με μικρές διαδοχικές πράξεις σε ένα πρόβλημα. Το ίδιο ισχύει και στις μετατροπές μονάδων, όπου υπάρχει πολύ μεγαλύτερο ποσοστό σύνθετων προβλημάτων.

- (α) Τα 180 παιδιά ενός σχολείου παρακολούθησαν μια κινηματογραφική παράσταση. Τα 135 παιδιά δήλωσαν ότι τους άρεσε η κινηματογραφική παράσταση. Σε τι ποσοστό των παιδιών του σχολείου άρεσε η κινηματογραφική παράσταση;
- (β) Το προσδόκιμο ζωής της μαύρης αρκούδας είναι 40 χρόνια. Το προσδόκιμο ζωής του λύκου είναι ίσο με το 45% του προσδόκιμου ζωής της μαύρης αρκούδας. Ποιο είναι το προσδόκιμο ζωής του λύκου;
- (γ) Ένα μπουκάλι με οινόπνευμα παρέμεινε ανοικτό, με αποτέλεσμα να εξατμιστεί το 22% της ποσότητας οινοπνεύματος που περιείχε. Πόση ήταν η αρχική ποσότητα οινοπνεύματος στο μπουκάλι, αν εξατμίστηκαν 132 ml;
- (δ) Ο Τάσος ξόδεψε €18 από τα €30 που είχε. Η Φάνη ξόδεψε €13 από τα €20 που είχε. Ποιο παιδί ξόδεψε το μεγαλύτερο ποσοστό από τα χρήματα που είχε αρχικά;

- 3) Η καρδιά ενός ενήλικα χτυπά περίπου 60 φορές το λεπτό. Η καρδιά ενός βρέφους χτυπά περίπου 120 φορές το λεπτό. Πόσες φορές χτυπά η καρδιά του ενήλικα και πόσες του βρέφους σε μία ώρα;



Σε ένα λεπτό η καρδιά του βρέφους χτυπά διπλάσιες φορές από του ενήλικα.

- Αξιοποιώ ό,τι λέει ο Σαλ και υπολογίζω:

- 4) Ο Πέτρος αγόρασε 3 κόκκινα, 4 πράσινα και 6 μπλε στυλό, με 70 λεπτά το καθένα. Πόσα χρήματα πλήρωσε για όλα;

- Υπολογίζω με τον πιο σύντομο τρόπο που μπορώ να σκεφτώ.



- α) Ο πατέρας του Νικήτα ζυγίζει 85 κ. και 400 γραμμ. Ο Νικήτας ζυγίζει 30 κ. και 250 γραμμ. λιγότερο. Πόσο ζυγίζει ο Νικήτας;

	κιλά	γραμμάρια
πατέρας
–
Νικήτας

Ο Νικήτας ζυγίζει

6) Το σπίτι της Ηρώς απέχει από το σχολείο 2 χμ., ενώ του Πέτρου 329 μ. λιγότερο. Πόσο απέχει το σπίτι του Πέτρου από το σχολείο;

- Εκτιμώ:
- Υπολογίζω με ακρίβεια.

Το ίδιο ισχύει και στους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με διψήφιους και τριψήφιους.

7) Η καρδιά μιας νυχτερίδας χτυπά 750 φορές το λεπτό. Πόσες φορές χτυπάει σε 4 ώρες;



Μπορείς να το υπολογίσεις σύντομα;



Στην αναγωγή στη μονάδα και πάλι η εξάσκηση γίνεται μέσω σύνθετων προβλημάτων.

3) Η μητέρα της Στέλλας αγόρασε μισό κιλό φέτα και πλήρωσε 6,50 €. Ο πατέρας του Σαλ αγόρασε 3 κιλά από την ίδια φέτα. Πόσα πλήρωσε;

4) Ένα τέταρτο του κιλού ανθότυρο κοστίζει 75 λεπτά. Πόσο κοστίζουν τα 2 κιλά;

Ακόμα και σε πράξεις με μεγάλους αριθμούς, όπως το 1.000.000 και πάλι υπάρχουν κυρίως σύνθετα προβλήματα.

3) Τα παιδιά της Δ' τάξης φυτεύουν 72 άσπρα, 64 κίτρινα και 40 κόκκινα χρυσάνθεμα. Αν κάθε σειρά έχει 8 χρυσάνθεμα, πόσες σειρές φυτεύουν;



Μπορούμε να ξέρουμε τι χρώμα χρυσάνθεμα έχει η κάθε σειρά; Συζητούμε.



Σε γενικές γραμμές στα τετράδια εργασιών οι ασκήσεις έχουν απλές πράξεις, ενώ τα προβλήματα σε συντριπτική πλειοψηφία είναι σύνθετα.

Στο ελληνικό εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης:

Στην Ε' Δημοτικού υπάρχουν γενικά πολλά απλά προβλήματα είτε μεμονωμένα είτε σαν υποερωτήματα σε μεγάλα προβλήματα.

- 1) Η μέση ετήσια παραγωγή λαδιού στην Κρήτη είναι 150.000 τόνοι. Ξεκινώντας ν' αθροίζουμε τις παραγωγές από το 2002, ποια χρονιά θα υπερβούμε για πρώτη φορά τους 1.000.000 τόνους;

5ο Πρόβλημα



Ο Διονύσιος Σολωμός γεννήθηκε στη Ζάκυνθο στις 8 Απριλίου του 1798. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από την ημέρα της γέννησής του ως σήμερα;

6ο Πρόβλημα



Ο κύριος Μενέλαος είναι 58 ετών και η κόρη του Μαρία είναι 29 χρόνια μικρότερή του και 6 χρόνια μεγαλύτερη από τον αδερφό της. Ποια είναι η ηλικία της Μαρίας και του αδερφού της;



Μια οικογένεια αγόρασε στα δύο της παιδιά από ένα ποδήλατο. Το εφηβικό κόστιζε 275 € και το παιδικό 129 €. Πόσα € πλήρωσε συνολικά;

Αυτό ισχύει επίσης και στα κλάσματα.

3 αδέρφια μοιράστηκαν εξίσου 7 χαρτόνια, για να φτιάξουν ευχετήριες κάρτες και ζωγραφιές για τη γιορτή της μητέρας τους. Πόσο χαρτόνι χρησιμοποίησε καθένα από τα αδέρφια;

Κατά την εύρεση μέσου όρου τα προβλήματα είναι σύνθετα.

Κατά την εξάσκηση σε δεκαδικούς αριθμούς και δεκαδικά κλάσματα και πάλι υπάρχουν απλά προβλήματα.

5ο Πρόβλημα

Ο Νίκος και η Δανάη επισκέφθηκαν ένα λούνα παρκ. Ο Νίκος ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων του και η Δανάη το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων της.

- α.** Μπορείς να βρεις ποιος ξόδεψε τα περισσότερα χρήματα; Να εξηγήσεις τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκες.
- β.** Είναι πιθανό ο Νίκος να ξόδεψε περισσότερα χρήματα από τη Δανάη; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.



Στο ελληνικό εγχειρίδιο της Στ' τάξης:

ΔΟΣΟΛΟΓΙΑ ΑΠΟΡΡΥΠΑΝΤΙΚΟΥ			
	λίγο λερωμένα	αρκετά λερωμένα	πολύ λερωμένα
μαλακό-μέτριο νερό	50 ml	75 ml	100ml
σκληρό νερό	+25 ml		
Για πλύσιμο στο χέρι διαλύστε 45 ml σε σκόνη σε 5 l νερού και στη συνέχεια προσθέστε τα ρούχα.			

Σε μια ετικέτα απορρυπαντικού αναγράφεται η συνιστώμενη δόση απορρυπαντικού σε ml, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα.

- α.** Ο πατέρας του Νίκου χρησιμοποίησε 0,1 l απορρυπαντικού. Ποια από τις οδηγίες της ετικέτας ακολούθησε;
- β.** Ο πατέρας του Νίκου έπλυσε στο χέρι τα αθλητικά ρούχα του και χρησιμοποίησε 0,09 l απορρυπαντικού. Πόσα λίτρα νερού χρησιμοποίησε;

Στην Στ΄ Δημοτικού υπάρχουν επίσης αρκετά απλά προβλήματα, τουλάχιστον όσον αφορά στις πράξεις, αν και πολλές φορές συνδέονται και με άλλες απαιτήσεις όπως κριτική σκέψη, αλλά και ως υποερωτήματα σε σύνθετα προβλήματα.

Πρόβλημα 2ο

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 4ου Δημοτικού Σχολείου Κοκκινιάς, για να ενισχύσουν το ταμείο της τάξης τους, αποφάσισαν στο μάθημα των τεχνικών να κατασκευάσουν ημερολόγια και να τα πουλήσουν στη γειτονιά και τους συγγενείς τους. Τα παιδιά κατασκεύασαν 25 ημερολόγια και τα πούλησαν όλα προς 3,20 € το καθένα. Ο ταμίας της τάξης, καθώς συγκέντρωνε τα χρήματα, πρόσεξε στο τέλος ότι είχε μόνο χαρτονομίσματα χωρίς να έχει καθόλου κέρματα. Ανησύχησε μήπως έχασε τα ψιλά. Εσείς τι λέτε;



Στον διπλανό πίνακα παρουσιάζεται ο πληθυσμός της Ελλάδας κατά τις απογραφές των ετών 1971, 1981, 1991 και 2001.

- Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το 1971 ως το 2001;
- Κατά τη διάρκεια αυτών των χρόνων ο πληθυσμός συνολικά παρουσιάζει αύξηση ή μείωση; Πόσο;

Πραγματικός πληθυσμός της Ελλάδας κατά φύλο και ομάδες ηλικιών				
Απογραφές				
	1971	1981	1991	2001
Άρρενες	4.286.748	4.779.571	5.055.408	5.431.816
Θήλειες	4.481.624	4.960.018	5.204.492	5.532.204
Σύνολο	8.768.372	9.739.589	10.259.900	10.964.020
0 - 14 ετών	2.223.904	2.307.297	1.974.867	1.666.888
15 - 64 ετών	5.587.352	6.192.751	6.880.681	7.423.889
Άνω των 65	957.116	1.239.541	1.404.352	1.873.243
<i>Πηγή: ΕΣΥΕ - Η Ελλάδα με αριθμούς, 2003.</i>				

- Στην τελευταία απογραφή είναι περισσότεροι οι άνδρες ή οι γυναίκες; Πόσο;
- Ποια μερίδα πληθυσμού, παρουσιάζει μείωση μετά το 1981; Πόσο μειώθηκε ο πληθυσμός της από την απογραφή του 1991 μέχρι την απογραφή του 2001;
- Αν υποθέσουμε ότι η μείωση του πληθυσμού αυτής της μερίδας θα είναι ίδια και κατά τα επόμενα χρόνια, με αυτή της τελευταίας δεκαετίας τότε ποιος θα είναι ο πληθυσμός της το 2011;

Εδώ τα παιδιά μπορεί να επεξεργάζονται μεγάλους αριθμούς και οι πράξεις να είναι μεμονωμένες σε κάθε ερώτημα, αν και στην πραγματικότητα δεν είναι τόσο απλά καθώς πολλά συνδυάζονται με παρατήρηση κατασκευή κλπ όπως το να επεξεργαστούν τα στοιχεία του πίνακα της απογραφής παραπάνω. Ωστόσο, ο αριθμός των μαθηματικών πράξεων που χρησιμοποιούνται, όσον αφορά τη διαδικαστική επίλυση των προβλημάτων ανταποκρίνεται στον ορισμό των απλών προβλημάτων.

	Εγχειρίδια Ελλάδας					
	Δ' τάξη		Ε' τάξη		Στ' τάξη	
	Απλά προβλήματα	Σύνθετα προβλήματα	Απλά προβλήματα	Σύνθετα προβλήματα	Απλά προβλήματα	Σύνθετα προβλήματα
Ακέραιοι αριθμοί	27	355	71	72	56	112
Κλασματικοί αριθμοί	18	57	17	19	11	20
Δεκαδικοί αριθμοί	0	0	18	23	12	17
Μικτοί αριθμοί	0	0	0	4	0	5

4.5. Διαφορές Ελλάδας-Κύπρου ως προς το περιεχόμενο-πλαίσιο των προβλημάτων.

Κάνοντας μια γενική επισκόπηση των εγχειριδίων της Κύπρου και Ελλάδος μπορούν να παρατηρηθούν τα εξής σημεία:

- Στη Δ' τάξη στα εγχειρίδια και των δύο χωρών, υπάρχουν κάποιοι σταθεροί χαρακτήρες μέσα στα προβλήματα. Στην Ελλάδα συναντώνται αρκετές φορές ο Πέτρος, η Ηρώ, η Στέλλα, ο Σαλ και ο Νικήτας.

Οι ήρωες του βιβλίου



Στέλλα



Νικήτας



Ηρώ



Σαλ



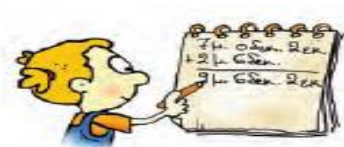
Πέτρος

3)



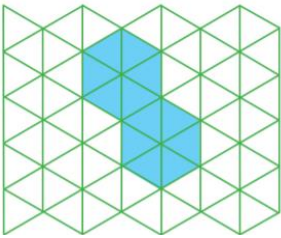
Ο Σαλ, η Ηρώ και η Στέλλα υπολογίζουν το άθροισμα των αριθμών:

$$7 \mu. 2 \text{ εκ.} + 2 \mu. 6 \text{ δεκ.}$$



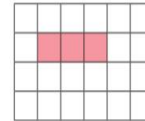
Στο κυπριακό εγχειρίδιο επίσης, παίρνουν μέρος διάφορα παιδιά τα οποία δεν είναι απαραίτητα κάθε φορά τα ίδια, υπάρχουν κάποια που επαναλαμβάνονται στα προβλήματα και άλλα που εμφανίζονται μια φορά.

34. Η Φωτεινή χρησιμοποιεί τριγωνικές ψηφίδες, για να ετοιμάσει μια κατασκευή. Οι ψηφίδες που έχει τοποθετήσει μέχρι τώρα αντιστοιχούν στα $\frac{2}{3}$ της κατασκευής της.



Η Φωτεινή ετοιμάζει ένα σχέδιο.

Τα τετράγωνα που έχω χρωματίσει μέχρι τώρα αντιστοιχούν στο $\frac{1}{4}$ του σχεδίου μου.



Η

Να ολοκληρώσεις το σχέδιο της Φωτεινής με 3 διαφορετικούς τρόπους. Να επεξηγήσεις τον τρόπο σκέψης σου.

ενσωμάτωση παιδιών-μαθητών στα σχολικά

εγχειρίδια τις Δ' τάξης, περίπου συνομήλικων με τους μαθητές είναι βοηθητική, καθώς τα παιδιά μπορούν να ταυτιστούν με τους ήρωες, οι οποίοι είναι καθημερινοί χαρακτήρες που επιλύουν μαθηματικά προβλήματα και τα κάνουν πιο προσιτά και ευχάριστα στους μαθητές. Στις μεγαλύτερες τάξεις αυτό το μοτίβο δεν υφίσταται.

- Στα κυπριακά εγχειρίδια, η θεματική των περισσότερων ρεαλιστικών-πλασματικών προβλημάτων στις περισσότερες περιπτώσεις έχει να κάνει με αγορές, με φαγητό, μαγειρική (συστατικά), αθλήματα και εκδρομές, ωστόσο αντίθετα στα ελληνικά δεν υπάρχουν κάποιες θεματικές να κυριαρχούν.
- Όσον αφορά στο πεδίο της διαθεματικότητας τα ελληνικά εγχειρίδια εστιάζουν περισσότερο στη σύνδεση με τις θετικές επιστήμες. Παράδειγμα:

Πρόβλημα 1ο

Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 340 μέτρα το δευτερόλεπτο. Ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που βλέπω την αστραπή μέχρι να ακούσω τη βροντή είναι x .

Το x μεταβάλλεται ανάλογα με το πόσο μακριά βρίσκομαι από το σημείο που πέφτει ο κεραυνός. Να υπολογίσεις πόσο μακριά μου έπεσε ο κεραυνός, όταν $x = 5$ και $x = 12$ δευτερόλεπτα. Ο υπολογισμός να γίνει με δύο τρόπους:



α) συμπληρώνοντας τις τιμές στον πίνακα.

β) σχηματίζοντας την αριθμητική παράσταση και αντικαθιστώντας το x με την τιμή του.

Λύση

Στις 2 Μαρτίου του 1972 η NASA (αμερικανική διαστημική υπηρεσία) εκτόξευσε το «πάιονιρ δέκα» (Pioneer 10), ένα μικρό διαστημικό σκάφος, με σκοπό να φωτογραφίσει από κοντά τον Δία και να ταξιδέψει έξω από το ηλιακό μας σύστημα. Για να γίνει αυτό δυνατό χρησιμοποιήθηκε ειδικός πύραυλος που έδωσε στο Pioneer 10 πολύ μεγάλη ταχύτητα, μόλις βγήκε από την ατμόσφαιρα της γης.

Εκτός από τα διάφορα όργανα μέτρησης, το διαστημικό σκάφος έχει επάνω του μια χρυσή πλάκα χαραγμένη όπως το διπλανό σκίτσο, ώστε, αν βρεθεί από νοήμονα όντα, να μπορέσουν να καταλάβουν το μήνυμα της πλάκας.

Όμως η πηγή ενέργειας που έχει το σκάφος σιγά-σιγά εξασθενεί. Εξαιτίας της μεγάλης απόστασης από τη Γη και της χαμηλής ενέργειας που διαθέτει, το Pioneer 10 επικοινωνήσε για τελευταία φορά με τη Γη στις 7 Φεβρουαρίου 2003. Από τότε η Γη δεν ελαβε ξανά σήμα του.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ραδιοκύματα) με τα οποία γίνεται η ασύρματη επικοινωνία ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός (1.080.000.000 χιλιόμετρα την ώρα). Στην τελευταία επικοινωνία με το Pioneer 10 τα ραδιοκύματα χρειάστηκαν 6,5 ώρες για να φτάσουν στη Γη.

Να υπολογίσεις την απόσταση ανάμεσα στη Γη και το διαστημικό σκάφος κατά την τελευταία του επαφή με τη Γη με τους εξής τρόπους:

α) σχηματίζοντας και λύνοντας την εξίσωση:

.....

.....

.....

β) συμπληρώνοντας τον πίνακα:

ΩΡΕΣ	0,5	1	2	3	4	5	6	6,5
ΑΠΟΣΤΑΣΗ								

γ) χωρίς να χρησιμοποιήσεις εξίσωση (κάνοντας τις πράξεις):

- Η διαθεματική προσέγγιση είναι αρκετά πιο έντονη στο σύνολο των κυπριακών εγχειριδίων, καθώς αντλεί πιο συχνά πραγματικά γεγονότα για να δομηθεί ένα πρόβλημα και αυτό διαφαίνεται από τη Δ' Τάξη μέχρι και τη ΣΤ'. Στα ελληνικά εγχειρίδια σπάνια συναντώνται προβλήματα, ή εφαρμογές διαθεματικές, που να συνδέονται με άλλα επιστημονικά πεδία. Τα κυπριακά εγχειρίδια προσφέρονται


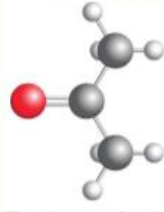

σε μεγαλύτερο βαθμό για κινητοποίηση των μαθητών, καθώς τα προβλήματα είναι πιο διαδραστικά και αναφέρονται σε ευρύτερο πεδίο διαφορετικών θεμάτων που δίνουν τροφή για συζήτηση έξω από το καθιερωμένο, καθώς και περισσότερες κατασκευές προβλημάτων. Στην κινητοποίηση των μαθητών να λύσουν τα προβλήματα, τα κυπριακά εγχειρίδια φαίνεται να περιέχουν περισσότερα προβλήματα γρίφων που θα μπορούσαν να κινητοποιήσουν το μαθητή να σκεφτεί με διαφορετικό τρόπο.

(α) Ο Θεοφάνης πραγματοποίησε ένα οδικό ταξίδι από το Βερολίνο προς το Παρίσι, κάνοντας στάση στις Βρυξέλλες. Διένυσε 724 km από το Βερολίνο μέχρι τις Βρυξέλλες και 312 km από τις Βρυξέλλες μέχρι το Παρίσι. Ποια ήταν η ένδειξη στο οδόμετρο του αυτοκινήτου του στην αρχή του ταξιδιού, αν στο τέλος η ένδειξη ήταν 46 455 km;



(β) Το αρχαίο θέατρο της Επιδαύρου χωριζόταν σε δύο μέρη. Το πάνω μέρος είχε 21 σειρές καθισμάτων και σε κάθε σειρά μπορούσαν να καθίσουν 285 άτομα. Το κάτω μέρος είχε 34 σειρές καθισμάτων και σε κάθε σειρά μπορούσαν να καθίσουν 176 άτομα. Να υπολογίσετε τη συνολική χωρητικότητα του αρχαίου θεάτρου της Επιδαύρου.

9. Ο Αλέξης και η Λάουρα βρήκαν τις πιο κάτω πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο συμβολισμού διάφορων χημικών ενώσεων.

<p>Ένα μόριο νερού</p>  <p>Υδρογόνο (H) ● Οξυγόνο (O) ●</p> <p>Συμβολισμός: H_2O 2 άτομα υδρογόνου προς 1 άτομο οξυγόνου</p>	<p>Ένα μόριο ασετόν</p>  <p>Άνθρακας (C) ● Υδρογόνο (H) ● Οξυγόνο (O) ●</p> <p>Συμβολισμός: C_3H_6O 3 άτομα άνθρακα προς 6 άτομα υδρογόνου προς 1 άτομο οξυγόνου</p>	<p>Ένα μόριο διοξειδίου του άνθρακα</p>  <p>Άνθρακας (C) ● Οξυγόνο (O) ●</p> <p>Συμβολισμός: CO_2 1 άτομο άνθρακα προς 2 άτομα οξυγόνου</p>
---	---	--

(α) Πόσα άτομα υδρογόνου πρέπει να ενωθούν χημικά με 100 άτομα οξυγόνου, ώστε να σχηματιστούν μόρια νερού;

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα ανάλυση εγχειριδίου η εστίαση έγινε στην επίλυση προβλήματος και στο κατά πόσον υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις χώρες Ελλάδα και Κύπρου για κάθε τάξη, αλλά και τις διαφορές που μπορεί να υπάρχουν ανάμεσα σε κάθε τάξης της εκάστοτε χώρας. Με βάση τα αποτελέσματα που παρατέθηκαν στην προηγούμενη ενότητα θα γίνει απόπειρα να απαντηθούν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα, όπως έχουν διατυπωθεί και στη μεθοδολογία:

1. Πως διαφοροποιούνται τα είδη των προβλημάτων ως προς τις κατηγορίες;
2. Ποιες είναι οι κατηγορίες προβλημάτων που κυριαρχούν στα εγχειρίδια της Κύπρου και ποιες στην Ελλάδα (σύγκριση);
3. Πώς οι κατηγορίες προβλημάτων διαφοροποιούνται από τάξη σε τάξη σε κάθε χώρα;

Τα είδη προβλημάτων που υπάρχουν στα εγχειρίδια σαν σύνολο, ως επί το πλείστον αφορούν κείμενα με περιεχόμενο αληθοφανές που καλεί τους μαθητές να εφαρμόσουν αυτά που έμαθαν στην παρούσα ενότητα κάθε φορά. Τα προβλήματα στα περισσότερα εγχειρίδια απαιτούν από τους μαθητές να εκτελέσουν πολλαπλές διαδοχικές πράξεις προκειμένου να φτάσουν σε μια μοναδική λύση. Ανάλογα με τη στρατηγική και την πορεία επίλυσης που πρέπει να ακολουθήσει ένας μαθητής για να καταφέρει να φτάσει στη λύση, διαφοροποιούνται αναλόγως και τα είδη των κατηγοριών κάθε προβλήματος. Επομένως, οι κατηγορίες βασίζονται στο τι αναμένεται από τους μαθητές να σκεφτούν, ώστε να καταλήξουν με επιτυχία στο ζητούμενο. Εξαιρούμενης της τελευταίας κατηγοριοποίησης, η οποία σχετίζεται με την μορφή και τη δομή των μαθηματικών προβλημάτων και το πώς αυτά εντάσσονται και παρουσιάζονται στους μαθητές μέσα στα εγχειρίδια (με ποια μορφή). Παρακάτω θα γίνει αναλυτική επεξήγηση του τι πρεσβεύει η κάθε κατηγοριοποίηση, με επακόλουθο συμπέρασμα τη διαφοροποίησή της από οποιαδήποτε άλλη.

Είναι γεγονός, ότι υπάρχει μεγάλη ποικιλία μαθηματικών προβλημάτων μέσα σε κάθε εγχειρίδιο ξεχωριστά, και των τριών τάξεων και των δύο χωρών. Δεδομένου ότι οι δύο χώρες έχουν κοινή πορεία προσέγγισης διδακτικού περιεχομένου, οι κατηγορίες

προβλημάτων είναι οι ίδιες για Ελλάδα και Κύπρο. Παρατηρούνται ελάχιστες διαφορές που μπορεί να υπάρχουν από χώρα σε χώρα ή από τάξη σε τάξη, όσον αφορά το πλήθος ορισμένων προβλημάτων ανά κατηγορία. Ως προς την κυριαρχία των προβλημάτων ανά χώρα και ανά τάξη δεν υπάρχει καμία διαφοροποίηση, γεγονός που οφείλεται επίσης στην κοινή πορεία διδακτικής προσέγγισης που προαναφέρθηκε. Πιο συγκεκριμένα και στις δύο χώρες τα προβλήματα που κυριαρχούν είναι σύνθετα προβλήματα, κλειστού τύπου, καθώς και τα παραδοσιακά. Η κατηγορία που κυριαρχεί με την παρουσία των προβλημάτων σε όλα τα εγχειρίδια είναι και στις τρεις τάξεις και στις δύο χώρες η κατηγορία των προβλημάτων ρουτίνας, όπου καταγράφονται τα περισσότερα στο πλήθος μαθηματικά προβλήματα. Όσον αφορά τα κατασκευαστικά προβλήματα το ποσοστό που υπάρχει στα εγχειρίδια και των δύο χωρών είναι σχετικό με το σύνολο των προβλημάτων των εγχειριδίων. Σημειώνεται επίσης μικρός αριθμός προβλημάτων μοντελοποίησης, ενώ τα φανταστικά προβλήματα είναι ανύπαρκτα απ' όλα τα εγχειρίδια. Κοινό στοιχείο, είναι ακόμη η κυριαρχία των προβλημάτων κειμενικής μορφής σε όλα τα εγχειρίδια.

Όσον αφορά τα είδη προβλημάτων με τα μειωμένα ποσοστά, σ' αυτά ανήκουν τα απλά προβλήματα, γεγονός που είναι αναμενόμενο. Υπάρχουν σε κάποιο βαθμό προβλήματα που έχουν πολλές διαφορετικές σωστές λύσεις. Τέτοιου είδους προβλήματα μπορούν να δώσουν τη δυνατότητα στους μαθητές να σκεφτούν με διαφορετικό τρόπο και να εκφράσουν τις σκέψεις τους μέσω διαφορετικών λύσεων. Υπάρχει λοιπόν, η δυνατότητα συμμετοχής πιο πολλών μαθητών και μεγαλύτερη πιθανότητα συμμετοχής και κέντριση του ενδιαφέροντος. Στα εγχειρίδια, γενικά εμφανίζονται τέτοιου είδους προβλήματα με κάποιες διαφοροποιήσεις.

Ενδιαφέρον έχει η κατηγορία των μη παραδοσιακών προβλημάτων. Τόσο στα εγχειρίδια της Κύπρου, όσο και της Ελλάδας η κυρίαρχη κατηγορία στα μη παραδοσιακά προβλήματα είναι αυτή των γρίφων-λογικής. Αυτή η κατηγορία είναι μια καλή ευκαιρία για μαθητές που θέλουν να πάνε ένα βήμα παραπέρα τη σκέψη τους, να ξεφύγουν από τον καθιερωμένο τύπο προβλημάτων που μπορεί να θεωρηθεί και τετριμμένος, ή βαρετός από παιδιά που διαθέτουν ένα βαθμό αποκλίνουσας σκέψης.

Σύμφωνα με έρευνες που διεξήχθησαν οι δάσκαλοι που χρησιμοποιούσαν διάφορες μη παραδοσιακές πρακτικές μέσα στην τάξη, όπως ο διάλογος, η συνεργασία σε ομάδες, αντιστροφή ρόλων μεταξύ μαθητή και δασκάλου, έδειξε ότι οι δάσκαλοι, ανεξάρτητα

από τη μέθοδο που χρησιμοποιούσαν κάθε φορά, παρατήρησαν ότι τα παιδιά έδειχναν μεγαλύτερη προσοχή και συμμετοχή/εμπλοκή τους μέσα στη διαδικασία. Σε σχέση με εφαρμογές που ενίσχυαν το διάλογο, πολλοί δάσκαλοι παρατήρησαν ότι τα παιδιά αναπτύσσουν την ικανότητα επικοινωνίας μεταξύ μαθητή και δασκάλου, αλλά και μεταξύ μαθητών, όπως επίσης και ότι τα παιδιά αφομοίωναν την παρεχόμενη γνώση πιο εύκολα και ενισχυόταν η μνήμη τους σε σχέση με τη συγκεκριμένη ενότητα. Από την άλλη, οι εφαρμογές δραστηριοτήτων σε ομάδες, ενισχύουν την κοινωνικοποίηση των μαθητών και τη συμμετοχή τους στο μάθημα. Αυτές οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι τα παιδιά είχαν πιο ενεργό συμμετοχή και καλύτερα αποτελέσματα όταν το μάθημα γινόταν πιο διαδραστικό μέσω μη-παραδοσιακών εφαρμογών (Pesci, 2001). Τα προβλήματα που τίθενται εδώ από τους ίδιους τους δασκάλους από την εφαρμογή της εν λόγω διαδικασίας είναι ότι οι μη παραδοσιακές τεχνικές καθυστερούν πολύ τη διδασκαλία, θέλουν περισσότερες διδακτικές ώρες για να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα, ενώ θα πρέπει να γίνει σε μια πειθαρχημένη τάξη, αλλιώς κινδυνεύει ο δάσκαλος να χάσει τον έλεγχο της διαδικασίας. Επίσης, φαίνεται ότι και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί δε νιώθουν εξοικειωμένοι να θέσουν σε εφαρμογή μια μη παραδοσιακή τεχνική.

Από τα παραπάνω μπορεί κάποιος να αντιληφθεί ότι υπάρχει η ανάγκη για στροφή από την παραδοσιακή διδασκαλία σε πρακτικές που ενισχύουν τη συμμετοχή των ίδιων των παιδιών και αυτό μπορεί να δοθεί σαν έναυσμα από μη παραδοσιακά προβλήματα που μπορούν να περιέχονται μέσα στα εγχειρίδια. Όμως, προϋποθέτει μια διαφορετική προσέγγιση του μαθήματος και περαιτέρω εξοικείωση των ίδιων των δασκάλων στο πώς θα μπορούσαν και οι ίδιοι να διαχειριστούν τέτοιου είδους προβλήματα προκειμένου να εξαχθεί το μέγιστο δυνατό όφελος και να μην υπάρξουν αντίθετα αποτελέσματα. Δεν αρκεί δηλαδή, μόνο να εμπλουτιστούν τα σχολικά εγχειρίδια με περισσότερα μη παραδοσιακά προβλήματα, αλλά και αυτό να συνδυαστεί με την καλύτερη εκπαίδευση των δασκάλων να μπορούν να τα διαχειριστούν αποτελεσματικά στην τάξη. Αυτό θα είναι βέβαια μια χρονοβόρα διαδικασία, από την άλλη τα οφέλη που μπορούν να αποκομιστούν από τη διαδικασία είναι πολλαπλά. Είναι ήδη γνωστό ότι τα παιδιά έχουν φόβο με το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών και πολλά από αυτά αποφεύγουν ένα επάγγελμα που να προϋποθέτει μαθηματικές γνώσεις. Έτσι κι αλλιώς, λοιπόν, υπάρχει

ανάγκη για μεγαλύτερη εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης και αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με προβλήματα που ξεφεύγουν από τα κλασικά.

Τα κατασκευαστικά προβλήματα δίνουν επίσης τη δυνατότητα πιο διαδραστικής συμμετοχής στην τάξη. Οι μαθητές, αντί να γράφουν με τον παραδοσιακό τρόπο επίλυσης προβλημάτων, σχεδιάζουν κάποιο σχήμα, συμμετέχουν στην κατασκευαστική διαδικασία και το πρόβλημα γίνεται πιο προσιτό και ενδιαφέρον σε αυτούς, αφού η συγκεκριμένη κατηγορία επιτρέπει την ενεργή τους εμπλοκή.

Τα προβλήματα μοντελοποίησης που περιέχονται μέσα στα εγχειρίδια σε πολύ μεγάλο βαθμό βοηθούν στη σύνδεση της μαθηματικής θεωρίας με την πραγματικότητα. Σε πολλές περιπτώσεις, οι μαθητές αναρωτιούνται ποια είναι η χρησιμότητα και η σύνδεση των μαθηματικών, ή και άλλων μαθημάτων με την καθημερινή τους ζωή. Μέσω των προβλημάτων μοντελοποίησης που αποδίδονται απλά καθημερινά σενάρια, τα παιδιά συνδέουν τη θεωρία με την πράξη. Αντιλαμβάνονται ότι τα μαθηματικά προβλήματα που επιζητούν λύση εφαρμόζονται καθημερινά στη ζωή τους και σπουδαιολογούν την αξία τους και την ανάγκη να γνωρίζουν να τα επιλύουν στην πραγματική ζωή.

Τέλος, τα προβλήματα μπορεί να δίνονται με διαφόρων ειδών μορφές. Στα εγχειρίδια της Κύπρου και της Ελλάδος κυριαρχεί η κειμενική μορφή, όπου η μαθηματική γλώσσα συγκαλύπτεται από λέξεις και ο μαθητής μπαίνει στη διαδικασία να αποκρυπτογραφήσει τη μαθηματική σχέση μέσα από το κείμενο. Ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει και η εφαρμογή δεδομένων σε εικόνα, ή πίνακα.

Όσον αφορά στη σύγκριση εγχειριδίων Ελλάδας και Κύπρου, όπως έχουν ήδη ειπωθεί πράγματα στην ενότητα των αποτελεσμάτων, στα ελληνικά εγχειρίδια κυριαρχούν σε μεγάλο βαθμό τα σύνθετα, κλειστά προβλήματα. Στο κυπριακό εγχειρίδιο επίσης υπάρχει σε γενικές γραμμές αυτή η προτίμηση, αλλά όχι σε τόσο μεγάλο βαθμό σε σχέση με τα ελληνικά. Αυτό είναι πιο φανερό κυρίως στη Δ' Δημοτικού. Καθώς όμως ανεβαίνουμε τάξη, οι διαφορές μεταξύ του πλαισίου των προβλημάτων ανάμεσα στις δύο χώρες αμβλύνεται. Στην έκτη τάξη, οι διαφορές Ελλάδας-Κύπρου, είναι πολύ μικρές σε σχέση με τη τετάρτη Δημοτικού. Αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι καθώς ανεβαίνουμε τάξη, υπάρχει η ανάγκη ο μαθητής να αρχίσει να προσαρμόζεται στα δεδομένα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η ηλικία είναι διαφορετική, το ίδιο και ο τρόπος σκέψης των μαθητών.

Σε σχέση με τις διαφορές που παρατηρούνται από τάξη σε τάξη, είναι φανερό ότι στη Δ' Δημοτικού υπάρχει μεγαλύτερη γκάμα στα προβλήματα που περιέχονται. Τόσο στην Ελλάδα όσο και στην Κύπρο, τα προβλήματα της Δ' περιέχουν σε μεγάλο βαθμό ανοιχτά, μη ρουτίνας, μη παραδοσιακά προβλήματα. Καθώς, ανεβαίνει η τάξη, ανεβαίνει ακόμα περισσότερο το ποσοστό κλειστών, παραδοσιακών και ρουτίνας. Όπως ήδη αναφέρθηκε, αυτό πρέπει να οφείλεται στη λειτουργικότητα των εγχειριδίων των ανώτερων τάξεων ως προπομπός για την ομαλή εισαγωγή στο Γυμνάσιο, όπου εκεί οι απαιτήσεις αυξάνονται και τα μαθηματικά προβλήματα δυσκολεύουν.

Τα σχολικά εγχειρίδια τροφοδοτούν το μαθητή και το δάσκαλο με το υλικό που θα χρησιμοποιηθεί για την εκπαιδευτική διαδικασία και ορίζει τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει η διδασκαλία, αποτελεί εργαλείο και ταυτόχρονα επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο διδασκαλίας. Στην παρούσα εργασία, φάνηκε ότι τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών σε Ελλάδα και Κύπρο δεν εμφανίζουν σημαντικές διαφορές ως προς την ποιότητα των προβλημάτων, ενώ παρατηρείται διαφορά μεταξύ των τάξεων των παιδιών. Ο παραδοσιακός, κλασικός τρόπος διδασκαλίας γίνεται πιο έντονος καθώς ανεβαίνει η ηλικία των παιδιών. Τελικά, πριν την εισαγωγή στη Δευτεροβάθμια σχεδόν κυριαρχεί στο εγχειρίδιο.

Εν κατακλείδι, παρατηρείται η τάση για όλο και πιο συμβατική και παραδοσιακή διδασκαλία, και μέσω των ειδών προβλημάτων που χρησιμοποιούνται, στη διαδικασία όσο ανεβαίνουμε τάξη. Αυτό, αν και πιο εύκολο για τον καθηγητή να χρησιμοποιήσει το εγχειρίδιο σαν διδακτικό μέσο, εντούτοις δεν προσφέρεται και για την επίτευξη πιο ποιοτικής διδασκαλίας σε κάποιες περιπτώσεις, καθώς το πρόβλημα του αποκλεισμού μεγάλης μερίδας μαθητών από την ενεργό συμμετοχή δεν επιλύεται μέσω αυτής της προσέγγισης. Σε τέτοια προβλήματα μέσα στην τάξη θα συμμετέχουν μόνο οι "καλοί" μαθητές που τους είναι πιο εύκολο να κατακτήσουν την καινούρια γνώση που προσφέρεται μέσα στη διδακτική ώρα, με τους μαθητές που έχουν κενά, δυσκολεύονται κλπ να μένουν ολοένα και πιο πολύ στο περιθώριο και να έχουν επαφή στο σπίτι, συνήθως με βοήθεια. Από την άλλη, τα παραδοσιακά προβλήματα είναι λίγο πολύ γνωστά στο πώς να προσεγγιστούν από τους μαθητές και δίνουν τη δυνατότητα εκμάθησης κυρίως μέσω της επανάληψης. Δε σημαίνει όμως ότι αφομοιώνεται

πραγματικά η γνώση, ή, κυρίως, ότι μπορεί να εφαρμοστεί από τα ίδια τα παιδιά εκτός εκπαιδευτικού πλαισίου, θέμα που χρήζει περαιτέρω διερεύνησης.

Κεφάλαιο 5^ο : ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα εργασία έγινε μια καταμέτρηση των ειδών προβλημάτων που υπάρχουν μέσα στα σχολικά εγχειρίδια των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού σε Ελλάδα και Κύπρο. Παρατηρείται ότι τα είδη προβλημάτων που περιέχονται γίνονται πιο συμβατικά καθώς ανεβαίνει η τάξη και αυτό συμβαίνει και στις δύο χώρες.

Η έρευνα που διεξήχθη στα πλαίσια αυτής της εργασίας δίνει τη δυνατότητα τόσο στους εκπαιδευτικούς, όσο και στους αρμόδιους που αποφασίζουν για τη σύσταση των προβλημάτων στη συγγραφή να παρατηρήσουν πιο αναλυτικά το διδακτικό εγχειρίδιο και τις δυνατότητές του, καθώς και να εκτιμήσουν το επίπεδο που χρειάζεται να έχει ένας μαθητής για να λύσει τα προβλήματα αυτά. Επίσης, παρέχεται η δυνατότητα σε ενδιαφερόμενους περί του θέματος να παρατηρήσουν τις διαφορές ανάμεσα στις τάξεις και να τις συγκρίνουν με το δυναμικό που έχουν τα παιδιά μέσα στην τάξη και να εξάγουν πορίσματα σχετικά με τη χρησιμότητα της κάθε κατηγορίας στοχευόμενα. Παράλληλα, δίνεται η δυνατότητα σύγκρισης μεταξύ των χωρών όπου είναι εφικτό να εξαχθούν συμπεράσματα για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που έχουν τα εγχειρίδια μεταξύ τους ανά τάξη, οδεύοντας στην βελτιστοποίησή τους, στην κριτική και την εξέλιξη.

Η έρευνα αυτή μπορεί να αποτελέσει έναυσμα για τη συνέχεια της σε άλλες τάξεις. Θα είχε ενδιαφέρον αν η έρευνα συνεχιζόταν περαιτέρω και στις τάξεις του Γυμνασίου, προκειμένου να δειχθεί αν γίνεται ομαλή μετάβαση από τη μια εκπαιδευτική βαθμίδα στην άλλη. Επίσης, θα μπορούσε μέσω αυτού να φανεί αν όντως τα προβλήματα πρόκειται να γίνουν ακόμα περισσότερο συμβατικά και αν αυτή η κατηγοριοποίηση συνεχίζεται και στη βαθμίδα αυτή, αν αλλάζει ή αν προστίθεται-αφαιρείται κάτι.

Επιπλέον, ενδιαφέρον θα ήταν, η κατηγοριοποίηση αυτή να συνεχιζόταν και σε άλλες υποκατηγοριοποιήσεις πιο αναλυτικά, για παράδειγμα για το αν τα προβλήματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως προς την αναλυτικότερη λύση που έχουν, ή ως προς την οπτική μορφή που έχουν ή, ακόμη εάν μπορούν λυθούν με ένα μόνο τρόπο, ή με πολλαπλούς τρόπους, ή αν τα σύνθετα προβλήματα λύνονται με 2 ή περισσότερες πράξεις. Τα αποτελέσματα από τέτοιες έρευνες θα μπορούσαν να συνδυαστούν με αυτήν

και να εξαχθούν ακόμη περισσότερα πορίσματα σχετικά με τα είδη προβλημάτων που περιέχονται μέσα στα εγχειρίδια.

Τέλος, θα μπορούσε να γίνει περαιτέρω έρευνα που να περιείχε και λύσεις παιδιών, να γίνει μια ποσοτικοποίηση του κατά πόσο τα παιδιά χωρίς καθοδήγηση είναι ικανά να λύσουν τα προβλήματα που η ύλη τους έχει ήδη διδαχτεί. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσε να γίνει και μία αντιστοίχιση του αν όντως τα παιδιά είναι ικανά να λύσουν τα προβλήματα αυτά και με ποιο τρόπο τα προσεγγίζουν, αν τα θεωρούν ενδιαφέροντα κλπ.

Η έρευνα αυτή προσφέρεται ως τροφή για τη διερεύνηση παρεμφερών ζητημάτων. Ένα θέμα που τίθεται είναι, όπως αναφέρθηκε ήδη στη συζήτηση, η ενίσχυση των μη παραδοσιακών προβλημάτων μέσα στα σχολικά εγχειρίδια, ιδίως των μεγαλύτερων τάξεων. Όπως έχει ήδη ειπωθεί, η μη παραδοσιακή διδασκαλία μπορεί να έχει πολλαπλά οφέλη στην εκπαιδευτική διαδικασία. Οπότε, μια μεταβολή των σχολικών εγχειριδίων με ταυτόχρονη αλλαγή και στα εγχειρίδια που δίνονται στον ίδιο το δάσκαλο, θα μπορούσε να είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στους δασκάλους για να τους δοθεί η ευκαιρία να ξεφύγουν από το στενό πλαίσιο της δασκαλοκεντρικής προσέγγισης, και να προχωρήσει πιο πολύ προς το μαθητοκεντρικό μοντέλο. Προφανώς, η διδασκαλία με παραδοσιακό τρόπο έχει δείξει ότι είναι χρήσιμο εργαλείο στην αφομοίωση και κατανόηση της γνώσης, και γι' αυτό είναι και το βασικότερο μοντέλο προβλημάτων και εφαρμογών μέσα στα σχολικά εγχειρίδια. Όμως, υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω εμβάθυνση στη μαθηματική γνώση, καθώς και σύνδεση με τις πραγματικές συνθήκες ζωής σε περιπτώσεις εργοδότησης και αυτό μπορεί να γίνει μέσω μη παραδοσιακών προβλημάτων ή προβλημάτων που ωθούν τα παιδιά να κατασκευάσουν τα ίδια με τα χέρια τους, για να κάνουν πράξη τη μαθηματική έννοια που διδάσκονται. Μια πρόταση, δηλαδή είναι να ενισχυθούν τα εγχειρίδια με επιπλέον μη παραδοσιακά προβλήματα που ενισχύουν το διάλογο, την κριτική σκέψη, καθώς και την ενεργό συμμετοχή, ακόμα και έξω από την τάξη. Μεγάλο έλλειμμα αποτελεί η σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή και αυτό θα μπορούσε να επιλυθεί μέσω πρότζεκτ. Αντί πχ να φορτωθεί το παιδί δεκάδες πανομοιότυπες ασκήσεις από το δάσκαλο, να δοθεί η ευκαιρία μέσω των εγχειριδίων να κάνουν τα ίδια μια έρευνα και να εξάγουν αποτελέσματα μετρήσιμα.

Τα εγχειρίδια μπορούν να ενισχύσουν αυτό το μοντέλο διδασκαλίας αφού ασκεί μεγάλη επιρροή στον τρόπο με τον οποίο διδάσκει ο δάσκαλος.

Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι ενώ στη Δ' Τάξη το εγχειρίδιο περιέχει ήρωες που πρωταγωνιστούν στα προβλήματα, στην Ε' και ΣΤ' αυτό πλέον δεν υπάρχει. Αυτό ίσως θα μπορούσε να ενισχυθεί και να έχει οφέλη. Δηλαδή, η ταύτιση μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο στη μάθηση, με ήρωες των ανάλογων ηλικιών που προβληματίζονται για θέματα της καθημερινότητας των ίδιων των μαθητών. Αυτό θα μπορούσε να έχει δύο οφέλη:

α) την ενίσχυση της ενεργής συμμετοχής μέσω της ταύτισης του παιδιού με τον ήρωα που αντιμετωπίζει και λύνει ένα πρόβλημα που προέκυψε στο εγχειρίδιο.

β) τη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με την καθημερινή ζωή, δηλαδή, έχοντας ήρωες σε παρόμοια ηλικία που αντιμετωπίζουν καθημερινά προβλήματα που και τα ίδια τα παιδιά μπορούν να αντιμετωπίσουν, εξοικειώνονται με τη σύνδεση μαθηματικών και καθημερινής ζωής.

Παρατηρείται ότι με βάση τα αποτελέσματα, είναι δύσκολο για ένα δάσκαλο να ξεφύγει από το μοντέλο της παραδοσιακής διδασκαλίας και να δοκιμάσει εναλλακτικές πρακτικές, καθώς μια διδασκαλία αντίθετη προς αυτήν τη κατεύθυνση δε συστήνεται από το εκπαιδευτικό σύστημα. Τα σχολικά εγχειρίδια μπορούν να συμβάλλουν σε αυτό μέσω της εκμάθησης τεχνικών προσέγγισης τέτοιων προβλημάτων από το βιβλίο του δασκάλου. Με τη βοήθεια των ερευνητών και περαιτέρω μελέτης, θα μπορούσε το μάθημα να εξελίσσεται με μια διαφορετική πορεία και με την ενεργή εμπλοκή της πλειοψηφίας των μαθητών. Έτσι, οι δάσκαλοι έχοντας σαν εργαλείο ένα περίγραμμα διδασκαλίας τέτοιων προβλημάτων, να μπορούν να το εφαρμόσουν με επιτυχία, υπερβαίνοντας τα διάφορα προβλήματα που μπορούν να προκύψουν από την αντίσταση των παιδιών, από την άγνοια κλπ.

Από τα παραπάνω μπορεί κανείς να διαπιστώσει και τη σημαντικότητα της έρευνας που διεξήχθη στην παρούσα διαδικασία. Με τη συνολική αποτίμηση των κατηγοριών προβλημάτων που παρατίθενται μπορεί να γίνει και μια ανασκόπηση και κριτική πάνω στα εγχειρίδια αλλά και στις διδακτικές προσεγγίσεις που ενισχύονται μέσω αυτών. Επίσης, είναι ενδιαφέρουσες οι ομοιότητες, αλλά και οι διαφορές που εμφανίζονται ανάμεσα στις δύο χώρες. Η κουλτούρα των δύο χωρών είναι ισχυρά

συνδεδεμένη και οι ομοιότητες ούτως ή άλλως διαφαίνονται σε πολλούς τομείς. Θα μπορούσαμε εδώ να επισημάνουμε διαφορές ως προς τον όγκο των εγχειριδίων, που στην Κύπρο είναι πολύ μεγαλύτερα, αλλά και στην ποιότητα των προβλημάτων, κυρίως στη Δ' τάξη που στα κυπριακά εγχειρίδια είναι πολύ περισσότερα τα προβλήματα που προσφέρονται για εναλλακτική προσέγγιση. Αυτή η παρατήρηση δίνει τη δυνατότητα προβληματισμού στο αν είναι όντως πιο λειτουργική πρακτική μέσα στα πλαίσια της τάξης και από την άλλη, αφού εντοπιστούν τα δυνατά σημεία του ενός ή του άλλου εγχειριδίου μέσω περαιτέρω έρευνας, να υιοθετηθούν και από άλλες τάξεις ή από την άλλη χώρα.

Σε κάθε περίπτωση υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω έρευνα και συμπερίληψη των αποτελεσμάτων της έρευνας αυτής στη διαμόρφωση των μελλοντικών εγχειριδίων προκειμένου να ενισχυθούν τα αδύναμα σημεία και να καλλιεργηθούν τα δυνατά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ελληνική:

Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα : εκδ. Νεφέλη.

Βοσκόγλου, Μ. (2008). Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. *ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ*, Τεύχος 14, Νο. 1. Ανακτήθηκε από [<http://www.pi-schools.gr/publications/epitheorisi/teyxos14/>]

Βρυώνης, Κ. & Γούπος, Θ. (2009). Η φιλοσοφία των Μαθηματικών και τα νέα Α.Π.Σ. - Δ.Ε.Π.Π.Σ. Στο *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, τ. χ. 15. σελ. 5 – 15.

Ζαράνης, Ν. (1997). «Ανάπτυξη και υλοποίηση των επιπέδων Van Hiele στην γεωμετρία με την βοήθεια υπολογιστή» στο *14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε.* σελ.281 – 291.

Καραγεώργος, Δ. (2000). *Το πρόβλημα και η επίλυσή του: Μία διδακτική προσέγγιση*. Αθήνα: Εκδ. Σαββάλας.

Καφούση, Σ., Σκουμπουρδή, Χ. & Τάτσης, Κ. (2009). «Αναλύοντας ένα σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών: Η περίπτωση της Α΄ Δημοτικού» στο *Ευκλείδης Γ΄*, 71, 42 – 62.

Κεϊσογλου, Σ. (1999). «Ο Καντ και τα θεμέλια των σύγχρονων κατασκευαστικών απόψεων για τη διδακτική των μαθηματικών» στο *Πρακτικά του 16ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε., Λάρισα*. σελ. 386 – 394.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα : εκδ. Τόπος.

Κουλαϊδής, Β. (2002). *Αναπαραστάσεις του Φυσικού Κόσμου*. Αθήνα: Gutenberg.

Λιόσης, Β. (2005). Η επιστήμη των μαθηματικών υπό την οπτική του διαλεκτικού υλισμού. Διπλωματική Εργασία Μεταπτ. Προγρ. Π.Α./Τμ.Μαθ. - Παν. Κύπρου.

Kuhn, T. (2004). *Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων*. Αθήνα: Σύγχρονα θέματα.

- Μαμωνά - Downs, Γ. (2017). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά : Η πορεία της σκέψης κατά την αναζήτηση της λύσης*. Ηράκλειο Κρήτης : Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης,
- Μητακίδης, Γ. (1983). «Τα Νέα Μαθηματικά» στο *Μαθηματική Επιθεώρηση*, τ.χ. 25, 85 – 100.
- Πήλιουρας, Π. (2008) Επίλυση Προβλήματος: Φάσεις και Στρατηγικές. [Ανακτήθηκε από:
http://users.sch.gr/ppiliour/epim_yliko/docs_ekp_yliko/Piliouras_ProblemSolving_8_9_0_8.doc]
- Τουμάσης, Μ. 2000. *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα : Gutenberg.
- Τύπας, Γ. – Ντάφου, Ε. (2005). Τα μαθηματικά του Δημοτικού μέσα από τα νέα διδακτικά εγχειρίδια. *Επιμόρφωση Σχολικών Συμβούλων και εκπαιδευτικών Π.Ε. στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ.* Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. σελ. 1 – 6.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (1997). Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών, *ΦΕΚ 303*, τεύχος Β'/13-3-2003, σ. 3983 – 3985.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου.*
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Β' Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου.*
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου.*
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου.*
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου.*
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού. Βιβλίο Δασκάλου.*
- ΦΕΚ 303 Β (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών. (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Δημοτικού – Γυμνασίου.
- ΦΕΚ 304 Β (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών. (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Δημοτικού – Γυμνασίου.
- Φερεντίνος, Σ. (2001). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, τχ. 5, σελ. 7 – 19.
- Φερεντίνος, Σ. (2007). «Νέα Βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου» στο *Πρακτικά του 24ου Πανελληνίου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε.* Κοζάνη. σελ. 68 – 74.

Χατζηθεολόγου. Α. (2000). Μάθηση: Προσωπικός ρυθμός και μαθησιακό στυλ. Παιδαγωγικός Λόγος, τχ. 1. σελ. 128 – 138.

Ξενόγλωσση

Apple, W. M. (1992). «The text and cultural politics» στο *Educational Researcher*, Vol.21, No. 7. pp. 4 – 19.

Apple, M.W. (1999). *Power, Meaning, and Identity: Essays in Critical Education Studies*. New York: Peter Lang.

Baker, D. & Knipe, H. & Collins, J. & Leon, J. & Cummings, E. & Blair, C. & Gamson, D. (2010). «One hundred years of elementary school mathematics in the United States: A content analysis and cognitive assessment of textbooks from 1900 to 2000» στο *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 41. pp. 383 – 423.

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1996). «Reform by the Book : What Is – or Might Be – the Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform?» στο *Educational Researcher*, Vol. 25, No. 9. σελ. 6 – 8, 14.

Ball, D. L. & Feiman – Nemsler, S. (1988). «Using Textbooks and Teachers' Guides: A Dilemma for Beginning Teachers and Teacher Educators» στο *Curriculum Inquiry*, Vol. 18, No. 4. σελ. 401 – 423.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Didactique des Mathématiques, 1970 – 1990. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bruner, J. S. 1991. «The Narrative Construction of Reality» στο *Critical Inquiry*, Vol. 18, σελ. 1 – 21.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία*. Αθήνα: Τροχαλία.

Descartes, R. (1976). *Λόγος περί της Μεθόδου*. Αθήνα : εκδ. Παπαζήση.

Fan, L. (2011). Textbook research as scientific research: Towards a common ground for research on mathematics textbooks. *Paper presented at the 2011 International Conference on School Mathematics Textbooks*, Shanghai.

Fan, L. & Kaeley, G. S. (2000). «The influence of textbooks on teaching strategies: An empirical study» στο *Mid – Western Educational Researcher*, Vol.13, No. 4. σελ. 2 – 9.

- Fan, L. & Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). «Textbook research in mathematics education: development status and directions ZDM» στο *The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 45, No. 5. σελ. 633 – 646.
- Goodlad, I. J. (1984). «Introduction: The Uncommon Common School» στο *Education and Urban Society*, Vol. 16, No. 3. σελ. 243 – 252.
- Grouws, D. A. & Smith, M. S. & Sztajn, P. (2004). «The preparation and teaching practises of United States mathematics teachers: Grades 4 and 8» στο Kloosterman, P. & Haggarty, L. & Pepin, B. (2001). «An Investigation of Mathematics Textbooks and their use in English, French and German Classrooms: Who gets an Opportunity to Learn What?» στο Winter, J. (Ed.) (*Proceedings of BCME5*) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, Vol. 21, No.2. σελ. 117 – 125.
- Howson, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts Vol. 3*. Vancouver: Pacific Educational Press.
- Kant, I. (1976). *Κριτική του Καθαρού Λόγου. Τόμος Α΄*, μτφ. Γιανναράς, Α. Αθήνα: εκδ. Παπαζήσης.
- Keitel, C. & Otte, M. & Seeger, F. (1980). *Text – Wissen – Tätigkeit: Das Schulbuch im Mathematikunterricht [Text – knowledge – activity: The textbook in the mathematics classroom]*. Königstein, Germany: Scriptor.
- Lester, F. K. *Results and interpretations of 1990 through 2000 mathematics assessments of the National Assessment of Educational Progress*. Reston, V. A. : National Council of Teachers of Mathematics. σελ. 221 – 267.
- Losee, J. (1993). *Φιλοσοφία της επιστήμης – Μια ιστορική εισαγωγή*, μτφρ. Χρηστίδης Θ. Μ. Θεσσαλονίκη : Εκδ. Βάνιας.
- Ma, L.(1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. London : Routledge.
- Millet, A. & Johnson, D. C. 1996. «Solving teachers’ problems? The role of commercial mathematics schemes» στο Johnson, D. C. & Millett A. *Implementing the Mathematics National Curriculum Policy: Politics and Practice*. London : Paul Chapman.
- Nicol, C. C. & Crespo. S. M. (2006). «Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials» στο *Educational Studies in Mathematics*, Vol.62, No. 3. εκδ. Springer. σελ. 331 – 355.

- Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). «Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice : two contrasted case studies in France and Norway» στο *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, Vol.45, No.5. σελ. 685 – 698.
- Polya, G. (1991). *ΠΩΣ ΝΑ ΤΟ ΛΥΣΩ*. Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.
- Pesci A. (2001). The Mathematics Teacher's Judgement on 'non traditional' Lessons: the Results of an Investigation, "Proceedings of the International Conference 'New Ideas in Mathematics Education'", Palm Cove, Australia, pp.212-216, A. Rogerson (Ed.) (2001). Ανακτήθηκε στις 10/2/2020 από: <http://math.unipa.it/~grim/cairms.htm>
- Remillard, J. T. (2000). «Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth – grade teachers' use of a new mathematics text» στο *The Elementary School Journal*, Vol.100, No.4. σελ. 331 – 350.
- Rezat, S. (2012). «Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks» στο Gueudet, G. & Pepin, B. & L. Trouche (Eds.) στο *Mathematics curriculum material and teacher development: From text to 'lived' resources*. Dordrecht: Springer. σελ. 231 – 246.
- Rickard, A. & College, A & Michigan, A. (1996). «Connections and Confusion: Teaching Perimeter and Area With a Problem – Solving Oriented Unit» στο *Journal of mathematical behaviour*, Vol. 15. σελ. 303 – 327.
- Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). «International studies of achievement in mathematics» στο Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc. σελ. 687 – 709.
- Schmidt, W. H. & Jorde, D. & Cogan, L. S. & Barrier, E. & Gonzalo, I. & Moser, U., et al. (1996). *Characterizing pedagogical flow: An investigation of mathematics and science teaching in six countries*. Dordrecht: Springer.
- Schmidt, W. H. (2012). «Measuring content through textbooks: The cumulative effect of middle-school tracking» στο Gueudet, G. & Pepin, B. & Trouche L. (Eds.), *Mathematics curriculum material and teacher development: From text to 'lived' resources*. Dordrecht: Springer. σελ. 143 – 160.

Schmidt, W. H. & McKnight, C. C. & Raizen, S. (2002). *Splintered Vision: An Investigation of U.S. Science and Mathematics Education*. The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. (1980). Teaching Problem-Solving skills. *Amer. Math. Monthly*, 87, 794-805

Sosniak, L. A. & Perlman, C. L. (1990). «Secondary education by the book» στο *Journal of Curriculum Studies*, Vol. 22, No. 5. σελ. 427 – 442.

Warburton N. (1999). *Φιλοσοφία. Τα βασικά ζητήματα*, μτφρ. Βίκυ Χατζοπούλου. Αθήνα : εκδ. Περίπλους.

Woolhouse R.S. (2003). *Φιλοσοφία της Επιστήμης – Τόμος Β Οι Εμπειριστές*, μτφρ. Τσούρτη, Σ. Αθήνα : εκδ. Πολύτροπον.

ΔΙΚΤΥΟΓΡΑΦΙΑ

Εκπαιδευτικό Υλικό Δημοτικής Εκπαίδευσης. (2010). *Μαθηματικά Δημοτικής Εκπαίδευσης*. Διαθέσιμο στο : <http://mathd.schools.ac.cy/index.php/el/>.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών*. Διαθέσιμο στο : <http://www.pi-schools.gr/programs/depps/>.