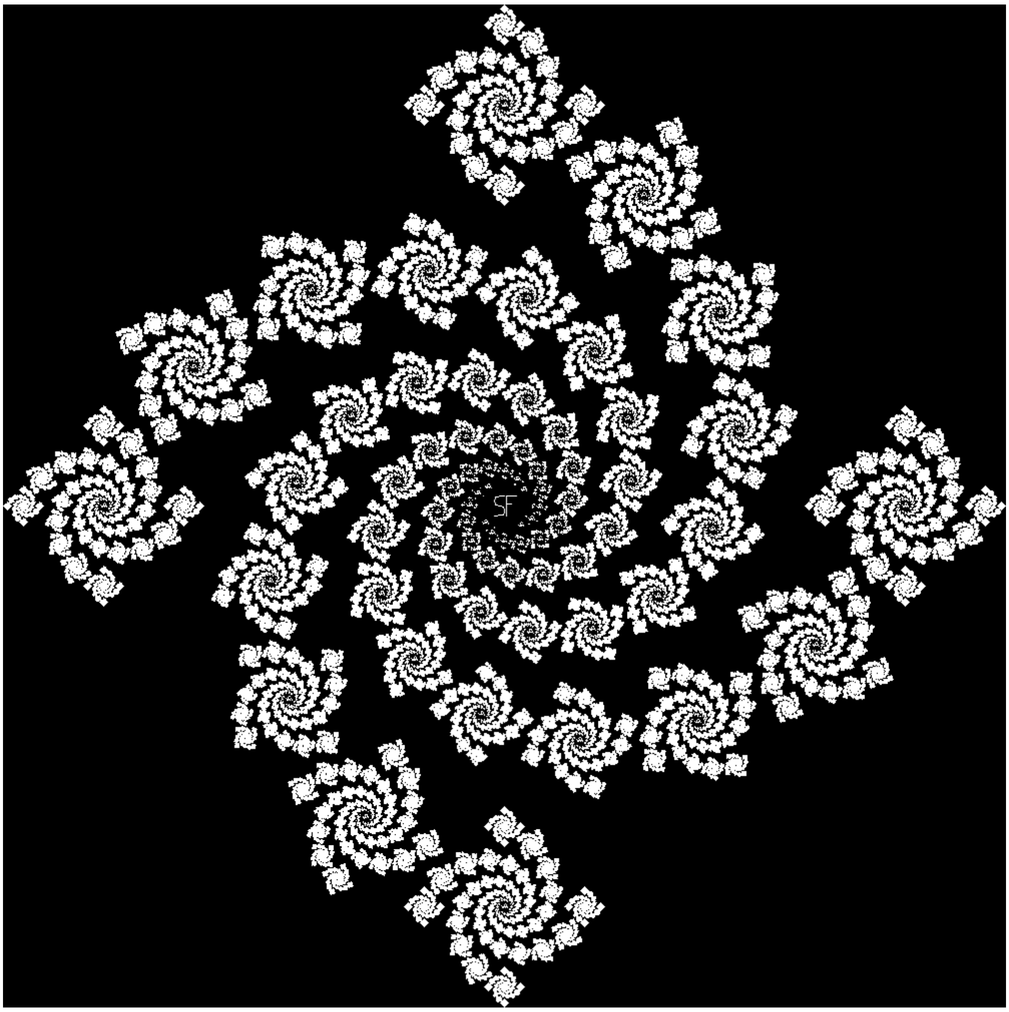
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

“ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ”

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ FRACTALS,
ΜΙΑ FRACTAL ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΑΣΥΝΕΙΔΗΤΟΥ



Παρθενία Κουλτούκη

Επιβλέπουσα: Ευαγγελάτου – Δάλλα Λεώνη

ΑΘΗΝΑ 2013

Τριμελής Επιτροπή:

Ευαγγελάτου – Δάλλα Λεώνη, *Αναπληρώτρια καθηγήτρια του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.*

Αναγνωστοπούλου Σοφία, *Αναπληρώτρια καθηγήτρια του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, Ιατρική Σχολή.*

Κανελλοπούλου Βασιλική – Λίσσου, *Αναπληρώτρια καθηγήτρια του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, Τμήμα Φιλοσοφίας, Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας, Ψυχαναλύτρια.*

Περίληψη

Η εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο 1ο μέρος περιέχονται οι βασικές έννοιες της Fractal Γεωμετρίας. Αρχικά περιγράφονται οι θεμελιώδεις έννοιες της τοπολογίας των μετρικών χώρων, δηλαδή τα ειδικά σημεία (επαφής, συσσώρευσης κτλ.), τα ειδικά σύνολα (κλειστό, ανοικτό, φραγμένο κτλ.) και οι βασικές ιδιότητες (συμπάγεια, πληρότητα κτλ.) αυτών. Στη συνέχεια περιγράφεται ο μετρικός χώρος στον οποίο βρίσκονται τα fractals και κατασκευάζονται με σύστημα Επαναλαμβανομένων Συναρτήσεων τα γνωστά fractal σύνολα (σύνολο Cantor, τρίγωνο Sierpinski, σπόγγος του Menger, καμπύλη von Koch κτλ.) καθώς και δύο fractal σύνολα που λόγω της μορφής τους έχουν ονομασθεί Σπείρα 1 και Σπείρα 2. Το 1ο μέρος ολοκληρώνεται με τον ορισμό της fractal διάστασης (Box, ομοιότητας, Hausdorff – Besicovitch) και περιγράφεται ο υπολογισμός της.

Στο 2ο μέρος επιδιώκεται μία fractal αναπαράσταση και προσέγγιση του ασυνείδητου. Αφού αναλύεται το σύμπτωμα και οι εκφάνσεις του (γλωσσικό ολίσθημα, λαθεμένες κινήσεις, τυχαίες πράξεις, όνειρο), επιχειρείται μία fractal αναπαράσταση του Εγώ, καθώς και η προσέγγισή του με τη μελέτη των συμπτωμάτων ως εκφράσεις του ασυνείδητου. Τέλος γίνεται μία προσπάθεια μελέτης του ασυνείδητου της Ντόρας, της διάσημης υστερικής ασθενούς του Φρόιντ, μέσω της fractal αναπαράστασης και ανάλυσης των ονείρων της.

Abstract

The study consists of two parts. First part contains the basic concepts of Fractal Geometry. Originally describes the fundamental concepts of topology of metric spaces, namely the specific points (contacts, accumulation, etc.), special sets (closed, open, bounded, etc.) and basic properties (compactness, completeness, etc.) of these. Then is described the metric space in which lie the fractals and manufactured with Iterated Function System (IFS) some known fractal sets (Cantor set, Sierpinski triangle, Menger's sponge, von Koch curve, etc.) and two fractal sets which have been named Spiral 1 and Spiral 2 because of their form. The first part is completed by defining the fractal dimension (Box, similarity, Hausdorff - Besicovitch) and describing its calculation.

In the second part, is attempted a fractal representation and approximation of the unconscious. After analyzing the symptoms and its manifestations (linguistic slips, false moves, random acts, dream) is attempted a fractal representation of the Ego, and his approach by studying the symptoms as expressions of the unconscious. Finally, there is an attempt to study the unconscious of Dora, the famous hysterical patient of Freud, through fractal representation and analysis of her dreams.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 2 - Κατασκευή Fractal Συνόλων με Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων

Κεφάλαιο 3 - Fractal Διαστάσεις

Μέρος Β΄: Fractal Προσέγγιση του Ασυνείδητου

Κεφάλαιο 1 - Το Σύμπτωμα και οι Εκφάνσεις του

Κεφάλαιο 2– Προσέγγιση του ασυνείδητου της Ντόρας μέσω της fractal αναπαράστασης των ονείρων της

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ πολύ τους ανθρώπους που με περιβάλλουν, για την κατανόηση και την τόσο πρακτική όσο και ηθική υποστήριξή τους. Ευχαριστώ πολύ την κ. Ευαγγελάτου – Δάλλα, καταρχάς, για τη διερεύνηση της μαθηματικής μου γνώσης και οπτικής, σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο. Επιπλέον την ευχαριστώ γιατί με την εμπιστοσύνη και την παρότρυνσή της, επιχείρησα να βρω ένα δίαυλο επικοινωνίας ανάμεσα σε δύο γνωστικά πεδία φαινομενικά ασύνδετα και να εκφράσω μέσα από τη διπλωματική μου εργασία την πεποίθησή μου ότι τα Μαθηματικά δεν είναι απλά το αποκύημα της ανθρώπινης νόησης, αλλά και ένας τρόπος προσέγγισή της. Στο σημείο αυτό, αναπάντεχος υποστηρικτής και σύμμαχος υπήρξε η κ. Αναγνωστοπούλου Σ., την οποία θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω πολύ για τις ουσιαστικές και καίριες επισημάνσεις για τη δομή και για το περιεχόμενο της εργασίας. Το επιστημονικό υλικό για την εφαρμογή της Fractal Γεωμετρίας στον ανθρώπινο εγκέφαλο με το οποίο με ανατροφοδοτούσε, υπήρξε εξαιρετικά χρήσιμο, αν και δεν περιλαμβάνεται στην εργασία. Κατόπιν, ευχαριστώ την κ. Κανελλοπούλου Λ., για τη βοήθειά της στη διερεύνηση του δύσβατου μονοπατιού της Ψυχαναλυτικής Θεωρίας. Τέλος, ευχαριστώ τη Χούλη Μ., φοιτήτρια του Π.Μ.Σ. των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και ιδιαιτέρως τον Κουνάδη Γ., υποψήφιο διδάκτορα του Τμήματος των Μαθηματικών, του Πανεπιστημίου Αθηνών, για την κατασκευή των Fractal σπειρών της εργασίας, μέσω του προγράμματος MATLAB.

Πρόλογος

Φιλοσοφία είναι γραμμένη σ' αυτό το σπουδαίο βιβλίο που είναι διαρκώς ανοιχτό μπροστά στα μάτια μας (εννοώ το σύμπαν), αλλά δεν μπορούμε να το κατανοήσουμε εάν δε μάθουμε πρώτα να κατανοούμε τη γλώσσα στην οποία είναι γραμμένο και να αναγνωρίζουμε τους χαρακτήρες της. Είναι γραμμένο σε μαθηματική γλώσσα και οι χαρακτήρες της είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα. Χωρίς αυτά τα μέσα είναι ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοήσουμε έστω και μία λέξη του, χωρίς αυτά δεν μπορεί να υπάρξει παρά μόνο μία μάταιη περιπλάνηση σ' ένα σκοτεινό λαβύρινθο.

Γαλιλαίος

Στον Τίμαιο του Πλάτωνα, διατυπώνεται η εικασία ότι ο κόσμος είναι ορθολογικά κατανοητός επειδή έχει δομή και ότι τα απλά, συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα κύκλος και κανονικά στερεά (κύβος, τετράεδρο, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο, εικοσάεδρο), είναι οι δομικοί λίθοι του σύμπαντος. Οι μορφές στη Φύση ωστόσο, οικείες αλλά ταυτόχρονα τόσο περίπλοκες και απρόβλεπτες, υποδηλώνουν την ύπαρξη ενός Θεού που συνυπάρχει με το 'γεωμέτρη' Θεό του Πλάτωνα, αλλά που κατά τη ρήση του Einstein «Ρίχνει Ζάρια». Ίσως αυτή την συνύπαρξη υποδήλωνε και ο ρωμαϊκός θεός Ιανός, που παρουσιαζόταν συνήθως να κοιτά ταυτοχρόνως προς δύο κατευθύνσεις, έχοντας δύο πρόσωπα αχώριστα μεταξύ τους.

Με το βλέμμα στραμμένο τη μία στη Γη και την άλλη στον Ουρανό, όπως λέει και ο Shakespeare («Υπάρχουν πολύ περισσότερα στον Ουρανό και τη Γη, Οράτιε από όσα φανερώνει η φιλοσοφία σου»),[1] παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα ευρύ φάσμα αυτό-ομοιότητας στις φυσικές μορφές. Ένα δέντρο για παράδειγμα, δημιουργείται από τη συνδυασμένη δράση του γεννετικού προγράμματος του φυτού και τη ροή των περιβαλλοντικών παραγόντων, όπως είναι η ηλιακή ακτινοβολία, οι καιρικές συνθήκες, η ποιότητα του εδάφους κτλ.. Το σχήμα του δέντρου αντικατοπτρίζεται σε πολλές διαφορετικές κλίμακες. Ο κορμός διακλαδίζεται και τα κλαδιά αυτά με τη σειρά τους, δίνουν μικρότερα κλωνάρια. Τα τελευταία, έχουν φύλλα που επαναλαμβάνουν το δενδριτικό πρότυπο στα μικροσκοπικά αγγεία τους. Τελικά, τόσο σε μεγάλη κλίμακα, όσο και στις λεπτομέρειες, το δέντρο είναι μία αυτο-όμοια καταγραφή της μη προβλέψιμης ροής που το δημιουργεί και το κρατά στη ζωή. Αν πάλι κοιτάξουμε τον έναστρο ουρανό και διεισδύσουμε μέσα του μεγεθύνοντας τα υποτιθέμενα σκοτεινά σημεία του με ένα τηλεσκόπιο, θα διαπιστώσουμε ότι είναι γεμάτα αστέρες. Όσο περισσότερο μεγεθύνεται κάθε σημείο, τόσο πιο προφανές γίνεται ότι υπάρχουν σκοτεινά κενά ανάμεσα στους αστέρες, τα οποία είναι γεμάτα με αστέρες, Κάθε μεγέθυνση είναι μία επανάληψη και μία επανεκτίμηση πραγμάτων που έχουμε δει προηγουμένως.

Η Fractal Γεωμετρία είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιεί η Μαθηματική Επιστήμη, προκειμένου να περιγράφει και να μελετήσει τις πολύπλοκες δομές τις οποίες επιλέγει η Φύση

[1] *Shakespeare W., Άμλετ, Πράξη 1η, Σκηνή 5η.*

για να απεικονίσει και να επιτελέσει τις λειτουργίες της. Δέντρα και ποτάμια, σύννεφα και ακρογιαλιές, ακόμα και η δενδριτική μορφή του δικτύου των αιμοφόρων αγγείων του ανθρώπινου νεφρού, μπορούν να περιγράφουν από τη γεωμετρία αυτή.

Εκτός από την περιπλοκότητα, τα σχήματα της fractal γεωμετρίας διαθέτουν και το χαρακτηριστικό της 'προς εαυτόν ομοιότητας', παρουσιάζουν δηλαδή συμμετρία κλίμακας. Ένα βουδιστικό κείμενο αναφέρει: ' Ένα σωματίδιο σκόνης αννυφώνεται και μέσα του βρίσκεται η μεγαλόπρεπη γη. Ένα λουλούδι ανθίζει και μέσα του γεννιέται ένα σύμπαν.' Το αρχαίο αυτό ρητό, θα μπορούσε να θεωρηθεί η εκδοχή της fractal αυτό – ομοιότητας σε ότι μας περιβάλλει αλλά και σε ότι ενυπάρχει στη φύση.

Με αφορμή αυτή τη διαπίστωση, στην εργασία, αφού περιγράφεται η Γεωμετρία των Fractals από τη σκοπιά των Μαθηματικών, επιχειρείται μέσω αυτής η προσέγγιση των ασυνείδητων μερών του συμπλέγματος του 'Εγώ'. Το ασυνείδητο είναι ένας συγκερασμός απωθημένων ψυχικών υλικών και μία διαρκώς ενεργή διαδικασία, που εξωτερικεύεται μέσω των συμπτωμάτων του. Με την μελέτη των συμπτωμάτων, όνειρο, τυχαίες πράξεις, λαθεμένες κινήσεις, γλωσσικά ολισθήματα, ο αναλυτής μπορεί να έρθει σε επαφή με τις ασυνείδητες ψυχικές διεργασίες του ασθενούς, και να αποκρυπτογραφήσει τις ορμές της ψυχικής ενέργειας που έχουν απωθηθεί από τη συνείδηση. Δηλαδή το 'Εγώ', παρίσταται ως μία fractal δομή, η οποία προσεγγίζεται από τα συμπτώματα, τα οποία αφού είναι περιοχές του fractal, ως φορείς αυτοομοιότητας, εμπεριέχουν πληροφορίες για το 'Εγώ'.

Η δομή της εργασίας

*Μετά από μία σύντομη Ιστορική Αναδρομή, στο **Κεφάλαιο 0** του **Α΄ Μέρους**, περιγράφονται οι βασικές έννοιες της τοπολογίας των μετρικών χώρων, όπως είναι τα ειδικά σύνολα, τα ειδικά σημεία συνόλου, η συμπάγεια και η πληρότητα. Οι κατανόηση των μετρικών χώρων είναι θεμελιώδης, γιατί ο χώρος που βρίσκονται τα fractals είναι μετρικός και περιγράφεται στο **Κεφάλαιο 1**. Ο χώρος αυτός, αποτελείται από μη κενά, συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου, συνήθως του* $\mathbb{R}$, *του* $\mathbb{R}^2$ *ή του* $\mathbb{R}^3$ $\left(\left\langle \mathcal{H}\left(\mathbb{R}^d\right), h\right\rangle, d = 1,2,3\right)$, *εφοδιάζεται με μία μετρική σχέση, τη μετρική του Haussdorff* (h) *και είναι πλήρης. Τα fractals, τα 'ανελκύουμε' μέσα από το χώρο αυτό, με τη βοήθεια των συναρτήσεων συστολής (που επίσης ορίζονται στο Κεφάλαιο αυτό) και του Θεωρήματος του σταθερού σημείου του Banach. Στο **Κεφάλαιο 2**, παρουσιάζεται η κατασκευή των γνωστότερων Fractal Συνόλων (σύνολο Cantor, τρίγωνο Sierpinski, σπόγγος του Menger, καμπύλη von Koch, 'πλατανόφυλλο') με Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων. Επίσης, αναφέρεται ο τρόπος κατασκευής δύο fractal συνόλων, τα οποία λόγω της μορφής τους, έχουν ονομαστεί Σπείρα 1 και Σπείρα 2. Το Α΄ Μέρος, ολοκληρώνεται με το **Κεφάλαιο 3**, στο οποίο αναλύεται η έννοια της Fractal Διάστασης (Box, ομοιότητας, Haussdorff- Besicovitch) και περιγράφεται ο υπολογισμός της. Η fractal διάσταση ενός συνόλου, είναι ένας αριθμός, συνήθως όχι ακέραιος, ο οποίος περιγράφει την τάση του συνόλου να "γεμίζει" το χώρο που βρίσκεται. Ο αριθμός αυτός, παραμένει αμετάβλητος από τις ενδεχόμενες μεταθέσεις, σμικρύνσεις και περιστροφές του συνόλου.*

*Στο **Β΄ Μέρος**, επιδιώκεται μία fractal προσέγγιση του ασυνείδητου. Στο **Κεφάλαιο 1,** αναλύεται το σύμπτωμα και οι εκφάνσεις του. Ως εκφάνσεις του συμπτώματος αναφέρονται: το ολίσθημα της γλώσσας, οι λαθεμένες κινήσεις, οι τυχαίες πράξεις και το όνειρο. Στην τελευταία παράγραφο, επιχειρείται μία fractal αναπαράσταση του Εγώ καθώς και η προσέγγισή του με τη μελέτη των συμπτωμάτων, ως εκδηλώσεων του ασυνείδητου. Στο **Κεφάλαιο 2,** γίνεται μία προσπάθεια αναπαράστασης και προσέγγισης του ασυνείδητου της Ντόρας, της διάσημης υστερικής ασθενούς του Φρόιντ, μέσω της fractal ανάλυσης των ονείρων της.*

Εισαγωγή

Ιστορική Αναδρομή

Η καθημερινή εμπειρία φέρνει τον άνθρωπο σε επαφή με πολυάριθμες γεωμετρικές μορφές, οι οποίες γίνονται άμεσα αντιληπτές. Για τη μελέτη και την κατανόησή τους ωστόσο, είναι απαραίτητη η ιδεατή αναπαράστασή τους. Ο κύκλος για παράδειγμα (ίσως το αρχαιότερο σύμβολο που χαράχτηκε από τον άνθρωπο) είναι η ιδεατή απεικόνιση του ηλιακού δίσκου, ενώ το επίπεδο της στοιχειώδους γεωμετρίας είναι η απόλυτη εικόνα της στάθμης του νερού όταν αυτό είναι σε ηρεμία.

Κατά την «προελληνική» περίοδο η Γεωμετρία ήταν μία συλλογή από πρακτικούς κανόνες οι οποίοι προέρχονταν από την εμπειρία, την παρατήρηση ή τη διαίσθηση, με τη βοήθεια των οποίων μπορούσε να δοθεί απάντηση σε πρακτικά θέματα υπολογισμού και μέτρησης. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τη Γεωμετρία για τη "μέτρηση των γαιών" μετά από τις πλημμύρες του Νείλου ποταμού, προκειμένου να επιμετρηθούν οι φορολογικές υποχρεώσεις των υπηκόων των Φαραώ. Αργότερα, πολυπλοκότεροι μηχανισμοί χρησιμοποιήθηκαν για την οικοδόμηση των πυραμίδων. Μέσω της αρχαιολογικής σκαπάνης, είναι πλέον γνωστό ότι η Γεωμετρία κάλυπτε παρόμοιες πρακτικές ανάγκες και σε άλλους αρχαίους λαούς, όπως είναι οι Κινέζοι και οι Βαβυλώνιοι.

Ο ελληνικός ορθολογισμός που προσπαθούσε να βάλει τον κόσμο σε μία τάξη και να τον ερμηνεύσει, απαγκίστρωσε τη Γεωμετρία (και τα Μαθηματικά γενικότερα) από τις πρακτικές ανάγκες, και την αντιμετώπισε σαν πνευματική αναζήτηση και θεωρητικό πρόβλημα.

Αναμφίβολα, η σχολή των Πυθαγορείων, έδωσε στην Αριθμητική τη μορφή της Θεωρητικής Επιστήμης, ενώ παράλληλα χρησιμοποίησαν τα Μαθηματικά για να στηρίξουν και τη φιλοσοφική διδασκαλία τους. Το πασίγνωστο Πυθαγόρειο Θεώρημα, η μελέτη των κανονικών σχημάτων και στερεών, καθώς και η καθαρά γεωμετρική απόδειξη πολλών αριθμητικών θεωρημάτων, είναι μερικά από τα επιτεύγματα, τα οποία ενισχύουν τον έντονα γεωμετρικό χαρακτήρα της Αριθμητικής. Επιπλέον, οι Πυθαγόρειοι αναζητώντας τη συμμετρία και την αρμονία του κόσμου, ουσιαστικά αναγνωρίζουν τη γεωμετρική δομή του. Παρόλο που η ανακάλυψη των ασύμμετρων αριθμών κατέρριψε τις φιλοσοφικές τους δοξασίες για τους ακέραιους αριθμούς, η δομή του κόσμου, συνδέεται με το "άρρητο" σχέδιο της δημιουργίας, το οποίο γίνεται αντιληπτό – μόνο κατά προσέγγιση – με τον αριθμό. Έτσι ο αριθμός είναι η γέφυρα ανάμεσα στον άνθρωπο και τη γεωμετρία, η οποία περιγράφει την ίδια τη φύση ('αεί ο Θεός ο μέγας γεωμετρεί …'). Αυτή είναι και η πρώτη σύζευξη ανάμεσα στην Αριθμητική και τη Γεωμετρία, την οποία θα επαναλάβει πολύ αργότερα ο Καρτέσιος σε άλλη μορφή και με άλλο στόχο.

Τη μεγαλύτερη επίδραση στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας είχε το έργο του Ευκλείδη. Στο περίφημο σύγγραμμά του "Στοιχεία", που αποτελείται από 13 βιβλία, ο Ευκλείδης οργάνωσε τη Γεωμετρία με αυστηρό τρόπο, όπως απαιτούσε το ελληνικό πνεύμα της λογικής και της ενότητας.

Η Γεωμετρία αναφέρεται στην έννοια του χώρου, συστατικά στοιχεία του οποίου είναι τα σημεία, οι ευθείες και τα επίπεδα. Πρόκειται για έννοιες που δεν ορίζονται ακριβώς, παρόλο που γίνονται αντιληπτές μέσα από την καθημερινή εμπειρία. Επομένως, δημιουργείται το *εύλογο ερώτημα: «Πώς είναι δυνατόν να οικοδομηθεί αυστηρά η Γεωμετρία, όταν τα ίδια τα δομικά υλικά της παραμένουν άγνωστα»;*

Η συμβολή του Ευκλείδη υπήρξε καταλυτική, αφού έκανε σαφές ότι στα Μαθηματικά το ενδιαφέρον δεν είναι η ουσία των αντικειμένων, αλλά οι σχέσεις μεταξύ αυτών. Έτσι, αδιαφορώντας για την ουσία των σημείων, των ευθειών και των επιπέδων, ξεκίνησε από ένα σύστημα σχέσεων (:αξιωμάτων), με τα οποία ουσιαστικά ορίζονται τα παραπάνω αντικείμενα, και με τη βοήθεια της λογικής απαγωγής, προχώρησε στην απόδειξη κάθε άλλης σχέσης του οικοδομήματος της Γεωμετρίας. Έτσι, τίθενται οι βάσεις της ιδέας της "αξιωματικής θεμελίωσης", όπου τα αξιώματα – αιτήματα πρέπει να οδηγούν σε μονοσήμαντους ορισμούς, και ενώ τα ίδια είναι ανεξάρτητα, κάθε άλλη δυνατή σχέση – Πρόταση να προκύπτει λογικά από αυτά (το σύνολό τους δηλαδή, να είναι πλήρες).

Σημαντική για τη γεωμετρία, ήταν και η συνεισφορά του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου. Ο πρώτος υπολόγισε το εμβαδόν διαφόρων επιφανειών και τον όγκο στερεών σωμάτων και έφτασε ουσιαστικά στις ιδέες του ολοκληρωτικού λογισμού, ενώ ο Απολλώνιος στο οκτάτομο έργο του «Κώνου Τομαί», μελέτησε σε βάθος τις τομές του κυκλικού κώνου με ένα επίπεδο μεταβαλλόμενης κλίσης (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή).

Με την παρακμή του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού και της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, υπάρχει μία ανάλογη πτώση της μαθηματικής δραστηριότητας στον ελληνικό και δυτικό κόσμο. Αντίθετα, η Αριθμητική είτε προσφέροντας διευκόλυνση στους υπολογισμούς λογαριασμών για εμπορικούς λόγους, είτε επιλύοντας πρακτικά προβλήματα Μηχανικής και Αστρονομίας, κυριάρχησε στον Μεσαίωνα και την Αναγέννηση.

Η συστηματική ανάπτυξη της Μηχανικής (Κλασσικής και Ουράνιας), και γενικότερα της Φυσικής, μελετώντας τα φαινόμενα στο συνδυασμένο πλαίσιο χώρου – χρόνου, ξανάδωσε στη Γεωμετρία τη θέση της. Η εξέλιξη αυτή αναμφισβήτητα σημαδεύτηκε από τις ιδέες του Καρτέσιου, που δημιούργησε την Αναλυτική Γεωμετρία σαν μέρος του φιλοσοφικού του στοχασμού για την προσέγγιση της αλήθειας με ένα ορθολογικό τρόπο. Η Αναλυτική Γεωμετρία, συνδέοντας την Κλασσική Γεωμετρία με την αλγεβρική μεθοδολογία, έγινε ένα πολύ δυνατό μαθηματικό εργαλείο και σε συνδυασμό με την Μηχανική του Νεύτωνα, άνοιξε νέους ορίζοντες στη μελέτη του σύμπαντος.

Και ενώ η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει εδραιώσει τη θέση της ανάμεσα στις Επιστήμες, το 5ο αίτημα, το λεγόμενο "Αξίωμα των παραλλήλων" ("Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία και μοναδική παράλληλη ευθεία προς αυτή"), εξακολουθούσε να τραβάει την προσοχή των μαθηματικών. Πολλοί από αυτούς, όπως ο K.F. Gauss, ο N.I. Lobachevsky και ο J. Bolyai προσπάθησαν να δείξουν ότι ανάγεται στα άλλα αξιώματα, επομένως δεν είναι ένα τυπικό αξίωμα αλλά ένα θεώρημα. Η μάταιη αυτή προσπάθεια έδωσε στη μαθηματική σκέψη την αφορμή να πάρει μία νέα κατεύθυνση. Αφού δεν υπάρχει απόδειξη της ορθότητας του αιτήματος των παραλλήλων και αφού παραμένει ανεξάρτητο από τα άλλα αξιώματα, θα μπορούσε να αναιρεθεί και να αντικατασταθεί με μία άλλη πρόταση (σχέση).

Έτσι, θα μπορούσε να υπάρχει ένας χώρος στον οποίο θα ίσχυε το εξής αξίωμα: "από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχονται (στο επίπεδο του σημείου και της ευθείας) τουλάχιστον δύο ευθείες που δεν τέμνουν τη δοθείσα" (αντι – παράδειγμα). Κατά συνέπεια, προκύπτει μία νέα Γεωμετρία, μη Ευκλείδεια κατά την ορολογία του Gauss, με θεμελιώδη σημασία για την κατανόηση του φυσικού κόσμου. Εξίσου ριζοσπαστική υπήρξε η αντίληψη του B. Riemann, που φαντάστηκε ένα χώρο «καμπυλωμένο», με αυθαίρετη διάσταση, ο οποίος μόνον τοπικά (δηλαδή σε μία περιοχή κάθε σημείου του) είναι ευκλείδειος. Σε ένα τέτοιο χώρο δεν ορίζεται η έννοια της ευθείας και της παραλληλίας. Έτσι ο Riemman συνέλαβε την έννοια της πολλαπλότητας, η οποία είχε τεράστια επίδραση στην εξέλιξη των σύγχρονων Μαθηματικών και της Θεωρητικής

Φυσικής (: Θεωρία της Σχετικότητας). Ταυτίζοντας την καμπυλότητα που είναι μέγεθος γεωμετρικό, με την βαρύτητα που είναι εκδήλωση της ύλης, έχουμε μία γεωμετρική ερμηνεία της φύσης.

Ωστόσο, καμία από τις παραπάνω γεωμετρικές δομές δεν έχει τη δυνατότητα να περιγράφει με ακρίβεια την αέναη κίνηση και το άφρισμα των κυμάτων που ξεσπούν στην ακτή, τα τυχαία γεωμετρικά σχήματα στα κλαδιά των δέντρων, τα ξαφνικά ξεσπάσματα του ανέμου, τις χιονονιφάδες, ή και ακόμα τους κυτταρικούς όγκους, τους μυϊκούς ιστούς και το σύστημα των αιμοφόρων αγγείων στο ανθρώπινο σώμα. Ο Benoit Mandelbrot, στα τέλη του 20ου αιώνα με το βιβλίο του "The Fractal Geometry of Nature", εισήγαγε την πρωτότυπη ιδέα των Fractals και έδωσε στην επιστήμη έναν πανίσχυρο μεγεθυντικό φακό για την μελέτη των φυσικών αντικειμένων. Με τη βοήθεια αυτού του φακού, ξεκίνησε η έρευνα των πολύπλοκων και φαινομενικά απρόβλεπτων διακυμάνσεων των καιρικών συνθηκών, του καρδιογραφήματος, του σεισμογράφου, του Χρηματιστηρίου και κάθε πολυσύνθετης δομής. Η Γεωμετρία των Fractals, σε συνδυασμό με τις εκπληκτικές εξελίξεις της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών έγινε το ιδανικό μέσο για την παρατήρηση και την μελέτη της πολυπλοκότητας.

Ο όρος Fractal προέρχεται από τη λατινική λέξη "frangere" [σπάζω, θρυμματίζω] και εισήχθηκε το 1975 από τον Β. Mandelbrot. Μορφές φυσικών fractal μπορούν να θεωρηθούν οι ρωγμές που άφησε ένας σεισμός ή ένας παγετός στη βραχώδη επιφάνεια ενός βουνού, το δενδριτικό δίκτυο ενός ποτάμιου συστήματος ή ακόμη και ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Οι μαθηματικοί κατόρθωσαν να μιμηθούν αυτά τα φυσικά fractal σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της συμπεριφοράς μη γραμμικών εξισώσεων (με ανάδραση). Δίνοντας στον υπολογιστή την εντολή «ο τύπος να επαναλαμβάνεται πολλές φορές», δημιουργούνται εικόνες με οργανικά χαρακτηριστικά και μία ποιότητα που μοιάζει με την τέχνη. Αν και μετά από επαναλαμβανόμενες μεγεθύνσεις τα μαθηματικά fractal ξεθωριάζουν και αποδεικνύουν ότι η δομή τους στερείται λεπτότητας, τα φυσικά fractal αποδεικνύουν ότι το αληθινό χάος αντιτίθεται στη μαθηματική εξομοίωση που δημιουργείται από την επανάληψη ενός μαθηματικού τύπου. Ωστόσο δε θα μπορούσε να παραληφθεί ότι οι μαθηματικοί τύποι που χρησιμοποιούνται είναι εφαρμογές κανόνων λογικής, οι οποίοι εκτός από τη χαοτική ομορφιά που περικλείουν, προσαρτούν στο μαθηματικό οικοδόμημα μία Γεωμετρία με σημαντικό θεωρητικό υπόβαθρο και πολυάριθμες εφαρμογές.

Βιβλιογραφία:

[1] VAN der WAERDEN B.L., Η αφύπνιση της Επιστήμης, Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά, μετφρ. Χριστιανίδης Γ., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2003.
[2] ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Ε., Σημειώσεις Προβολικής Γεωμετρίας, Αθήνα 2003.
[3] ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ Δ., ΝΤΖΙΑΧΡΗΣΤΟΣ Β., Βασικές Έννοιες της Γεωμετρίας, Αθήνα 2003.

Μέρος Α΄: Γεωμετρία των Fractals

«Η Φύση χρησιμοποιεί τα πιο μακριά της νήματα για να υφάνει τα μοτίβα της, και έτσι κάθε μικρό κομμάτι του υφαντού της αποκαλύπτει την οργάνωση ολόκληρου του έργου της.»

Richard Phillips Feynman,

The Character of Physical Laws, 1965

Κεφάλαιο 0 - Βασικές Έννοιες στους Μετρικούς Χώρους

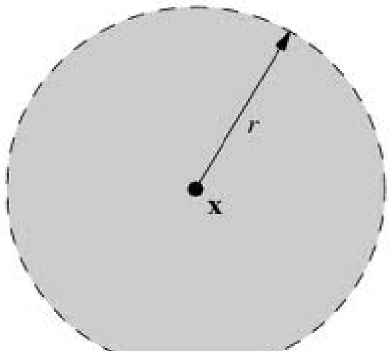
Οι ακόλουθοι ορισμοί, τα θεωρήματα και οι ιδιότητες, είναι βασικοί και χρήσιμοι για την περιγραφή και μελέτη του χώρου των Fractals.

Ορισμός 0.1.1: *Ένας* ***μετρικός χώρος (μ.χ)*** *είναι ένα ζεύγος $<X, d>$, όπου X είναι ένα τυχαίο μη κενό σύνολο και $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία πραγματική συνάρτηση, η οποία καλείται* ***μετρική*** *ή* ***απόσταση*** *και ικανοποιεί για όλα τα $x, y, z \in \Re$ τις ιδιότητες:*

i. $d(x, y) > 0$ *και* $d(x, y) = 0$ *αν και μόνο αν* $x = y$
ii. $d(x,y) = d(y,x)$ *(συμμετρία)*
iii. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(τριγωνική ανισότητα).*

0.1 Ειδικά Σύνολα στον $<X, d>$

Ορισμός 0.1.2: *Έστω $x_0 \in X$. Εάν $r>0$ τότε το σύνολο $S(x_o, r) = \{x \in X : d(x, x_o) < r\}$ καλείται* ***ανοικτή σφαίρα*** *κέντρου x_o και ακτίνας r.*



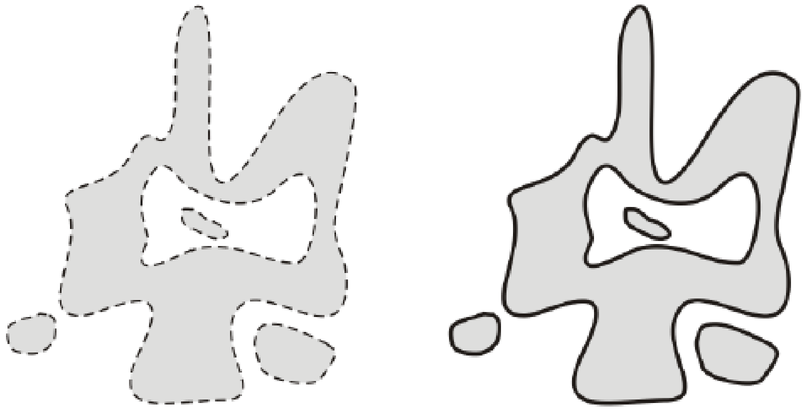
Εικ.0.1.1 Ανοικτή Σφαίρα

Ορισμός 0.1.3: *Έστω $x_0 \in X$. Εάν $r \geq 0$ τότε το σύνολο $\hat{S}(x_o, r) = \{x \in X : d(x, x_o) \leq r\}$ καλείται* ***κλειστή σφαίρα*** *κέντρου x_o και ακτίνας r.*

Ορισμός 0.1.4: *Το σύνολο $A \subseteq X$ καλείται* ***ανοικτό σύνολο****, αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $r > 0$, ώστε $S(a, r) \subseteq A$.*

Ορισμός 0.1.5: *Το σύνολο $K \subseteq X$ καλείται* ***κλειστό σύνολο****, αν το συμπλήρωμα του $X \setminus K = K^c$ είναι ανοικτό.*

Εικ.0.1.2 Ανοικτό Σύνολο *Εικ.0.1.3 Κλειστό Σύνολο*



Ορισμός 0.1.6: *Το σύνολο* $\mathcal{B} \subseteq X$ *καλείται* ***συμπαγές σύνολο***, *αν για κάθε τυχαία κάλυψή του,* $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ *από ανοικτά σύνολα,* $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$,

υπάρχουν $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}$, $i, j \in I$, $j = 1, 2, \ldots, k$, *ώστε* $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{A}_{ij}$.

Ορισμός 0.1.7: *Το σύνολο* $\mathcal{D} \subseteq X$ *καλείται* ***φραγμένο σύνολο***, *αν υπάρχει* $\mathcal{M} > 0$ *και* $x_o \in X$ *ώστε* $\mathcal{D} \subseteq S(x_o, \mathcal{M})$.

Ορισμός 0.1.8: *Το σύνολο* $C \subseteq X$ *καλείται* ***ολικά φραγμένο σύνολο,*** *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχουν* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *ώστε* $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon)$.

0.2 Ειδικά Σημεία Συνόλου

Ορισμός 0.2.1: *Έστω και $x_o \in X$. Το x_0 καλείται **σημείο επαφής** του A, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $S(x_o, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.*

Ισοδύναμα: *Υπάρχει ακολουθία $\alpha_n \in A, n \in \mathbb{N}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x_o$.*

Ορισμός 0.2.2: *Το x_0 καλείται **σημείο συσσώρευσης** του A, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $(S(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_o\}) \cap A \neq \varnothing$.*

Ισοδύναμα: *Υπάρχει ακολουθία $\beta_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ με $\beta_n \neq x_o$, ώστε $\lim_{n\to\infty} \beta_n = x_0$.*

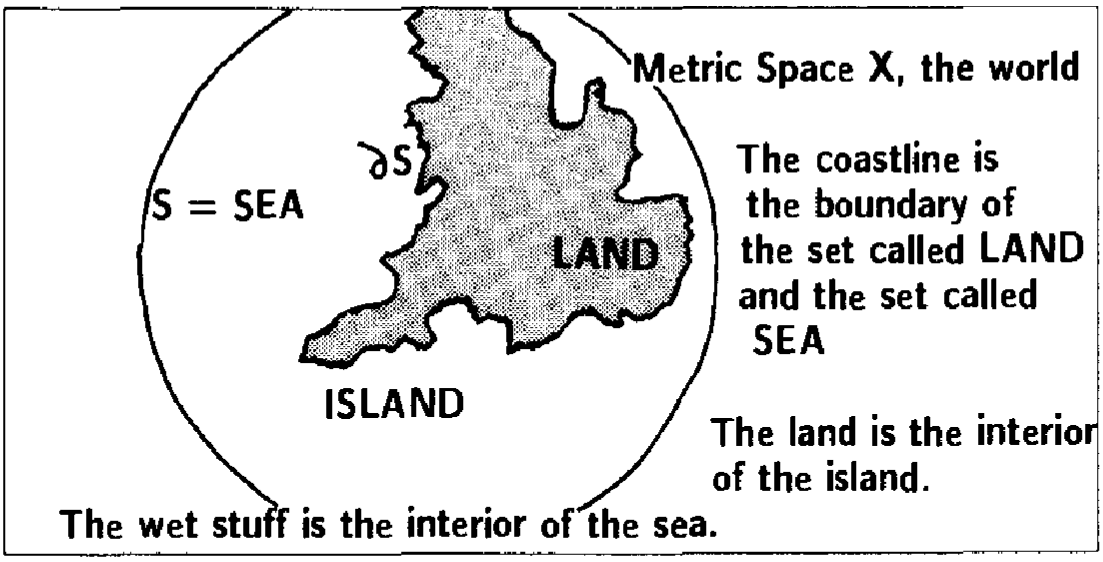
Το σύνολο των σημείων επαφής του A συμβολίζεται με $\bar{A}$, ενώ το σύνολο των σημείων συσσώρευσης με A'.

Ορισμός 0.2.3: *Ένα σύνολο είναι **κλειστό**, αν και μόνο αν, $\bar{A} = A$.*

Ισοδύναμα: *Για τυχαία ακολουθία $\alpha_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ έχουμε ότι $a \in A$.*

Ορισμός 0.2.4: *Το $x_o \in A$, καλείται **εσωτερικό σημείο** του A, αν και μόνο αν, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x_o, \varepsilon) \subseteq A$.*

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A συμβολίζεται με A^o.



Εικ.0.2.1 Εσωτερικό σημείο

Ορισμός 0.2.5: *Το A είναι **ανοικτό**, αν και μόνο αν, $A = A^o$.*

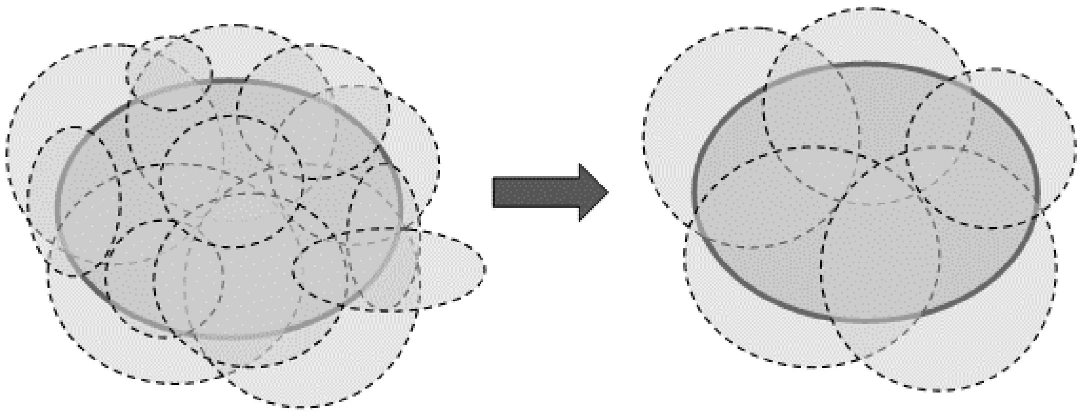
Ορισμός 0.2.6: *Το $x_o \in X$, καλείται* ***συνοριακό σημείο*** *του A, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $S(x_o, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $S(x_o, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.*

Το σύνολο των συνοριακών σημείων συμβολίζεται με ∂A. Ισχύει $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

0.3 Συμπαγής μ.χ.

Ορισμός 0.3.1: *Στον μ.χ. X ένα σύνολο $X_1 \subseteq X$ θα καλείται* ***συμπαγές****, αν κάθε ανοικτή κάλυψη $\mathcal{A}$ του X_1 έχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη. Δηλαδή το $X_1 \subseteq X$ είναι συμπαγές αν για κάθε οικογένεια $\mathcal{A}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $X_1 \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ υπάρχουν $A_i \in \mathcal{A}$:*

$$X_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$



Εικ.0.3.1 Συμπαγές Σύνολο

Ορισμός 0.3.2: *Εάν $X_1 \subseteq X$ συμπαγές και $X_1 = X$, τότε ο μ.χ. είναι X* ***συμπαγής.***

Ιδιότητες:

1. *Εάν ο $\langle X, d \rangle$ είναι συμπαγής μ.χ. και $K \subseteq X$ είναι κλειστό σύνολο, τότε το K είναι συμπαγές.*

2. *Ο $\langle X, d \rangle$ είναι συμπαγής μ.χ., αν και μόνο αν, κάθε ακολουθία του περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία (ακολουθιακή συμπάγεια).*

0.4 Πλήρης μ.χ.

Ορισμός 0.4.1: *Αν κάθε βασική ακολουθία ενός μ.χ. συγκλίνει, τότε ο χώρος καλείται* ***πλήρης μ.χ.***

Ιδιότητες:

1. *Εάν ο* $\langle X, d \rangle$ *είναι πλήρης μ.χ. τότε το* $K \subseteq X$ *είναι κλειστό, αν και μόνο αν, ο* $\langle K, d_K \rangle$ *είναι πλήρης μ.χ.*

2. ***(Σχέση Συμπαγούς και Πλήρους μ.χ.):*** *Ο μ.χ.* $\langle X, d \rangle$ *είναι συμπαγής, αν και μόνο αν, είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

0.5 Συναρτήσεις Μεταξύ μετρικών χώρων

Έστω $\langle X, d \rangle, \langle Y, \sigma \rangle$ *μ.χ. και* $f : X \to Y$ *συνάρτηση μεταξύ των συνόλων* X, Y.

Ορισμός 0.5.1: *Η* f *είναι* ***συνεχής*** *στο* $x_o \in X$ *, αν και μόνο αν, για κάθε ε > 0 υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon, x_o) > 0$ *ώστε* $f(S_X(x_o, \delta)) \subseteq S_Y(f(x_o), \varepsilon)$.

Ισοδύναμα: *Για κάθε ε > 0 υπάρχει δ = δ(ε, x_0), ώστε, αν d(x, x_0) < δ τότε,* $\sigma(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$.

Ισοδύναμα: *Για κάθε ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *του* X *με* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_o$ *έχουμε και* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_o)$.

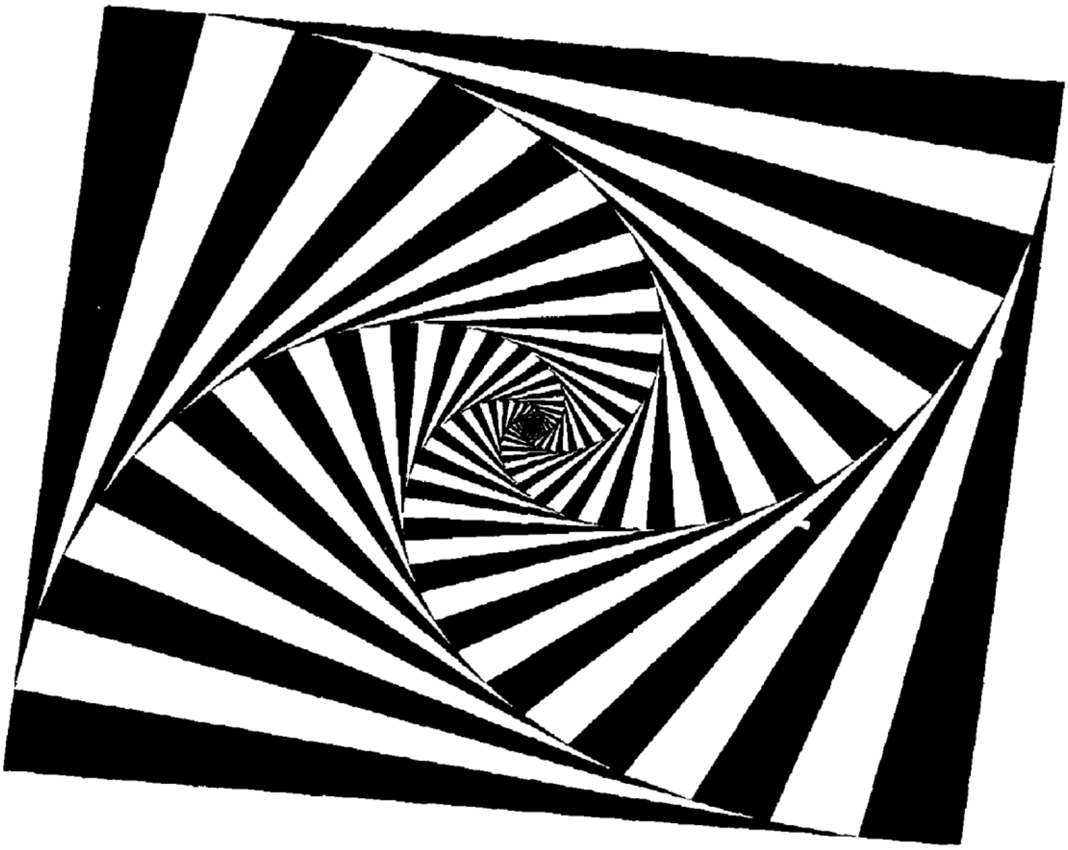
Η f είναι ***συνεχής στον*** *X αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X.*

Ορισμός 0.5.2: *Η f είναι* ***ομοιόμορφα συνεχής*** *στον X, αν και μόνο αν, για κάθε ε > 0 υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *ώστε, για* $x, y \in X$ *με* $x, y \in X$ *έχουμε* $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Ισοδύναμα: *Για κάθε ζεύγος ακολουθιών* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *του X με* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ *έχουμε και* $\lim_{n\to\infty} \sigma(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Ορισμός 0.5.3: *Η συνάρτηση f ικανοποιεί συνθήκη* ***Lipschitz****, αν υπάρχει M > 0, ώστε* $\sigma(f(x), f(y)) \leq M \cdot d(x, y)$ *για κάθε* $x, y \in X$.

Ορισμός 0.5.4: *Η f είναι* ***συνάρτηση συστολής****, αν υπάρχει* $0 < s < 1$*, ώστε* $\sigma(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$ *για κάθε* $x, y \in X$.

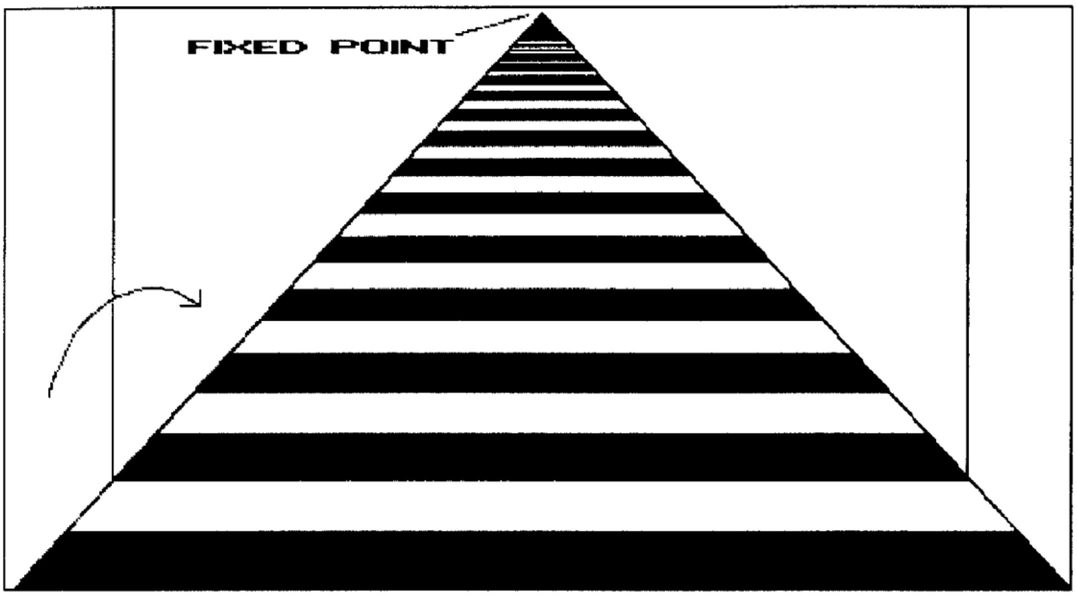


Εικ.0.5.1 Συνάρτηση συστολής σε συμπαγή μ.χ..

0.6 Ελκυστής Συνάρτησης

Ορισμός 0.6.1: *Το σύνολο* $A \neq \emptyset$, $A \subseteq X$ *καλείται* ***σταθερό σύνολο*** *ή* ***ελκυστής*** *για την* $f: X \to X$ *,αν* $f(A) = A$.

Ορισμός 0.6.2: *Εάν το A μονοσύνολο,* $A = \{x_o\}$, *τότε το* x_o *καλείται* ***σταθερό σημείο*** *της f.*



Εικ.0.6.1 Σταθερό σημείο συνάρτησης f

Σχόλιο: *Γενικά μία συνάρτηση f δεν έχει σταθερό σύνολο. Σε ειδικές περιπτώσεις εξασφαλίζεται η ύπαρξη.*

Συμβολισμός: $f^1 = f$ *και* $f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n\ \text{φορές}}$, $n \in \mathbb{N}$,

Όπου "$\circ$ *" είναι η σύνθεση συναρτήσεων ("συνεχής επανάληψη" της συνάρτησης).*

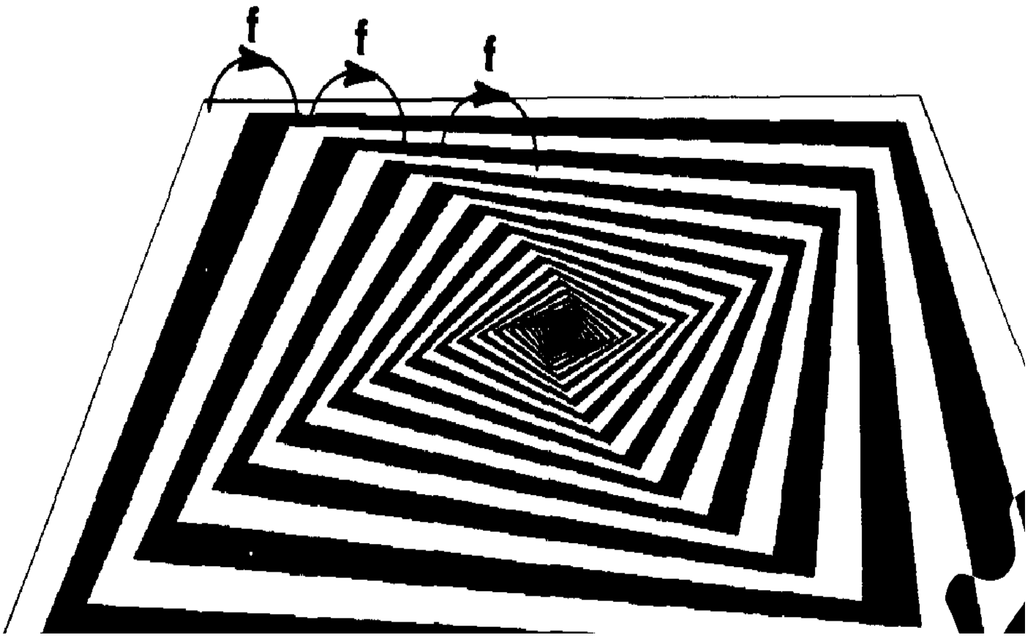
Πρόταση: *Έστω* $f: X \to X$ *συνεχής συνάρτηση, όπου* $\langle X, d \rangle$ *είναι συμπαγής μ.χ.. Τότε υπάρχει συμπαγές σύνολο* $A \neq \emptyset$, *ώστε* $f(A) = A$.

Παρατήρηση: *Το A δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό.*

Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach: *Έστω* $f : X \to X$ *, συνάρτηση συστολής, όπου* $\langle X , d \rangle$ *πλήρης μ.χ.. Τότε:*

i. *υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο* x_o *της f.*

ii. $x_o = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ *για κάθε* $x \in X$.



Εικ.0.6.2 Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach

Βιβλιογραφία:

[1] ΔΑΛΛΑ – ΕΥΑΓΓΕΛΑΤΟΥ Λ., Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2000.

[2] ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ Σ., ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ Θ., ΚΑΛΑΜΙΔΑΣ Ν., ΦΑΡΜΑΚΗ Β., Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Αίθρα, Αθήνα 1989.

[3] BANSLEY M.F., Fractals Everywhere, Academic Press, Inc., U.S.A., 1998.

[4] FEDER J., Fractals, Plenum Press, New York, 1988.

Κεφάλαιο 1 - Ο Χώρος των Fractals

Οι χώροι μέσα στους οποίους κατασκευάζουμε τα σύνολα fractal και τις fractal συναρτήσεις, είναι οι συνήθεις Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένοι με την Ευκλείδεια μετρική

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2} \quad d = 1,2,3.$$

Ορίζουμε $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), (d \geq 1)$ το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του χώρου $\mathbb{R}^d$. Το σύνολο εφοδιάζεται με τη δομή πλήρους μετρικού χώρου με την μετρική του Hausdorff (h), η οποία αποτελεί μία επέκταση της μετρικής του $\mathbb{R}^d$. Η Ευκλείδεια μετρική του $\mathbb{R}^d$ μετρά αποστάσεις μεταξύ των σημείων του, ενώ η μετρική του Hausdorff, μετρά αποστάσεις μεταξύ συμπαγών συνόλων του. Εάν τα σύνολα είναι μονοσύνολα, τότε έχουμε ισότητα των αποστάσεων. Στη συνέχεια με τη βοήθεια κατάλληλης συνάρτησης συστολής κατασκευάζουμε fractal, ως το σταθερό σημείο που προκύπτει από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach.

1.1 Μετρική του Hausdorff

Ορισμός 1.1.1: *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{H}$. Εάν $d(x, \mathcal{B}) = \min\{|x - \beta| : \beta \in \mathcal{B}\}$ είναι η απόσταση του σημείου $x \in \mathbb{R}^d$ από το $\mathcal{B}$, ορίζεται $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{d(a, \mathcal{B}) : a \in \mathcal{A}\}$ ως απόσταση του $\mathcal{A}$ από το $\mathcal{B}$ και $d(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \max\{d(\beta, \mathcal{A}) : \beta \in \mathcal{B}\}$ ως απόσταση του $\mathcal{B}$ από το $\mathcal{A}$.*

*Ως **Hausdorff απόσταση των $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$,** ορίζουμε*

$$h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\left\{\tilde{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tilde{d}(\mathcal{B}, \mathcal{A})\right\} = \max\left\{\max_{a \in \mathcal{A}} \min_{\beta \in \mathcal{B}} |a - \beta|,\ \max_{\beta \in \mathcal{B}} \min_{a \in \mathcal{A}} |a - \beta|\right\}.$$

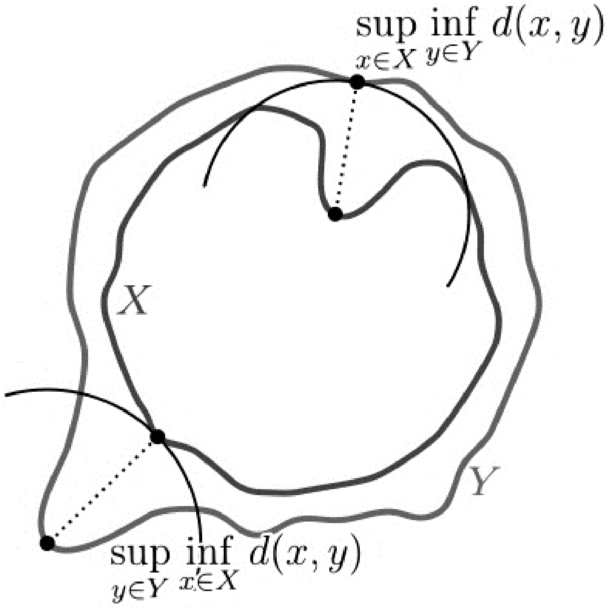
Ισοδύναμος Ορισμός: Εάν $\mathcal{A} \in \mathcal{H}, \varepsilon \geq 0$ και $\mathcal{B}^d = \hat{\mathcal{S}}(0,1)$ είναι η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^d$, ορίζουμε

$$\mathcal{A} + \varepsilon := \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B}^d = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x = a + \varepsilon y, a \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}^d\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : d(x, \mathcal{A}) \leq \varepsilon\right\} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \hat{\mathcal{S}}(a, \varepsilon).$$

Για ε = 0, $\mathcal{A} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : d(x, \mathcal{A}) = 0\right\}$, επειδή το $\mathcal{A}$ είναι κλειστό σύνολο.

Εάν $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{H}$ έχουμε $h(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \min\{\varepsilon \geq 0 : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}+\varepsilon, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}+\varepsilon\}$.

Παρατήρηση: *Η h είναι μετρική.*



Εικ.1.1.1 Μετρική του Haussdorff

1.2 Πληρότητα του χώρου των Fractals

Η μετρική h, επάγεται κάποιες ιδιότητες του $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h\rangle$*, δηλαδή του χώρου στον οποίο υπάρχουν τα fractals και που θα "ανελκυστούν" μέσω του Θεωρήματος του σταθερού σημείου του Banach.*

Πρόταση 1.2.1: *Εάν* $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *φθίνουσα ακολουθία του* $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h\rangle$, $(\mathcal{K}_{n+1} \subseteq \mathcal{K}_n,\ n\in\mathbb{N})$, *τότε η* $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στο* $\mathcal{K} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n, \mathcal{K} \in \mathcal{H}$.

Θεώρημα 1.2.1: (Πληρότητα του Χώρου των Fractals): *Ο χώρος* $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h\rangle$ *είναι πλήρης μ.χ.,*

Ιδιαιτέρως: Εάν ο X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$, *τότε ο* $\langle \mathcal{H}(X), h\rangle$ *είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Παρατήρηση: *Το παραπάνω Θεώρημα ισχύει για τον* $\langle \mathcal{H}(X), h\rangle$, *εάν ο* $\langle X, d\rangle$ *είναι πλήρης μ.χ.. Η απόδειξη είναι εκτενής, γιατί πρέπει να παρακαμφθεί η δυσκολία ότι ένα σύνολο κλειστό και φραγμένο δεν είναι και κατ' ανάγκη συμπαγές.*

Ωστόσο, από την απόδειξη του θεωρήματος έχουμε ότι: Εάν $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι συγκλίνουσα ακολουθία του* $\langle \mathcal{H}, h \rangle$, *τότε το* $\lim_{n\to\infty} \mathcal{K}_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{i=m}^{\infty} \mathcal{K}_i \right)} = \mathcal{K}$.

Το σύνολο $\mathcal{K}$ *θεωρείται το τοπολογικό όριο της* $\left(\mathcal{K}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. *Το* $\mathcal{K}$ *είναι το σύνολο των σημείων του* $\mathbb{R}^d$ *για τα οποία ισχύει ότι, για κάθε* $S(x,\varepsilon) \bigcap \mathcal{K}_n \neq \emptyset$ *για άπειρο πλήθος n. Τα σύνολα fractals θα κατασκευαστούν ως όρια συγκλινουσών ακολουθιών.*

Το παρακάτω Θεώρημα, δίνει μία πιο σαφή εικόνα των σημείων του $\mathcal{K}$ *και περιγράφει αναλυτικότερα το* $\mathcal{K} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}_n$.

Θεώρημα 1.2.2: *Εάν η ακολουθία* $\left\{\mathcal{K}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *του* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, *συγκλίνει στο* $\mathcal{K}$, *τότε*

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \exists x_n \in \mathcal{K}_n,\ n \in \mathbb{N},\ \text{ώστε} \lim_{n\to\infty} x_n = x \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \exists x_{v_n} \in \mathcal{K}_{v_n},\ \left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{υπακολουθία},\ \text{ώστε} \lim_{n\to\infty} x_{v_n} = x \right\}.$$

Θεώρημα 1.2.3 (Επιλογής του Blaschke): *Έστω* $\langle \mathcal{H}(\mathcal{B}), h \rangle$ *το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων του συμπαγούς συνόλου* $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^d$. *Τότε ο* $\langle \mathcal{H}(\mathcal{B}), h \rangle$ *είναι συμπαγής μ.χ..*

Ισοδύναμα: Κάθε φραγμένη ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ *περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

1.3 Συνάρτηση συστολής στον $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \rangle$

Αφού έχουμε κατασκευάσει το χώρο $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \rangle$ *μέσα στον οποίο «ζουν» τα fractals, θα τα ανελκύσουμε με τη βοήθεια των συναρτήσεων συστολής.*

Πρόταση 1.3.1: *Εάν* $w : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *είναι συνάρτηση συστολής με συντελεστή* $0 < s < 1$, *τότε η* $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, *με* $W(\mathcal{A}) = w(\mathcal{A}),\ \mathcal{A} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ *είναι συνάρτηση συστολής με συντελεστή συστολής* s.

Λήμμα 1.3.1:

Εάν $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, *τότε* $h\left(\mathcal{A}_1 \bigcup \mathcal{A}_2,\ \mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2\right) \leq max\left\{h(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1),\ h(\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_2)\right\}$.

Πρόταση 1.3.2: *Εάν* $\left\{W_n,\ n = 1, 2, ..., \mathcal{N}\right\}$ *είναι συναρτήσεις συστολής στον* $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \rangle$, *τότε η* $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ *με* $W(\mathcal{B}) = w_1(\mathcal{B}) \bigcup w_2(\mathcal{B}) \bigcup ... \bigcup w_{\mathcal{N}}(\mathcal{B}),\ \mathcal{B} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ *είναι συνάρτηση συστολής.*

Εάν $\{s_n : n = 1, 2, ..., N\}$ *είναι οι συντελεστές συστολής των* $\{w_n, n = 1, 2, ..., N\}$ *τότε η* W *έχει συντελεστή συστολής* $s = max\{s_n : n = 1, 2, ..., N\}$.

Θεώρημα 1.3.1: *Έστω* X *πλήρης μετρικός υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου* $\mathbb{R}^d$ *και* $\{w_n, n = 1, 2, ..., N\}$ *συναρτήσεις συστολής του. Τότε για τη συνάρτηση συστολής* $W : H(X) \rightarrow H(X)$, $W(B) = w_1(B) \bigcup w_2(B) \bigcup ... \bigcup w_N(B)$,

i. *Υπάρχει ακριβώς ένα* $A \in H(X)$, *σταθερό σημείο της* W.

ii. $A = \lim_{n \to \infty} W^n(B)$, *για κάθε* $B \in H(X)$.

Βιβλιογραφία:

[1] ΔΑΛΛΑ – ΕΥΑΓΓΕΛΑΤΟΥ Λ., Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2000.

[2] ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ Σ., ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ Θ., ΚΑΛΑΜΙΔΑΣ Ν., ΦΑΡΜΑΚΗ Β., Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Αίθρα, Αθήνα 1989.

[3] BANSLEY M.F., Fractals Everywhere, Academic Press, Inc., U.S.A., 1998.

[4] FEDER J., Fractals, Plenum Press, New York, 1988.

Κεφάλαιο 2 - Κατασκευή Fractal Συνόλων με Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων

Ο πλήρης μετρικός υπόχωρος X *και οι συναρτήσεις συστολής* $\{w_n : n = 1,2,...,\mathcal{N}\}$ *συμβολίζεται με* $\{X ; w_{1-\mathcal{N}}\}$ *και καλείται Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων, (ΣΕΣ).*

Με τη βοήθεια κατάλληλου ΣΕΣ κατασκευάζουμε fractal σύνολα στους χώρους $\mathbb{R},\mathbb{R}^2$ *και* $\mathbb{R}^3$*, ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής.*

2.1 Τριαδικό σύνολο Cantor

Περιγραφή: Ξεκινώντας με ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, πάνω στην ευθεία των αριθμών μεταξύ του 0 και του 1, αφαιρούμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας το μεσαίο τρίτο του, δηλαδή το διάστημα μεταξύ των αριθμών 1/3 και 2/3. Ακολούθως, αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο των δύο τμημάτων που απομένουν, δηλαδή τα διαστήματα μεταξύ των αριθμών 1/9, 2/9 και 7/9, 8/9.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο την κατασκευή αυτή και αφαιρώντας σε κάθε βήμα από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα το μεσαίο τρίτο τους, μετά από άπειρα βήματα, το σύνολο των σημείων που παραμένουν στο «τέλος», ονομάζεται τριαδικό σύνολο Cantor.

Παρατηρούμε ότι τα τελικά σημεία του συνόλου Cantor είναι άπειρα, αφού ανάμεσα σε αυτά είναι π.χ. όλα τα άκρα των τμημάτων που δημιουργούνται σε κάθε βήμα. Έτσι, στο Βήμα 1 έχουμε τα σημεία 0, 1/3, 2/3 και 1, στο Βήμα 2 έχουμε 0, 1/9, 2/9, 3/9, 6/9, 7/9, 8/9 και 1, στο Βήμα 3 έχουμε 0, 1/27, 2/27, 3/27, 6/27, 7/27, 8/27, 9/27, 18/27, 19/27, 20/27, 21/27, 24/27, 25/27, 26/27 και 1, κ.ο.κ.. Στο τέλος τα σημεία θα είναι άπειρα, αφού σε κάθε βήμα ο αριθμός τους διπλασιάζεται. Άπειρα όμως είναι και τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος με το οποίο αρχίσαμε. Άπειροι είναι και οι αριθμοί ανάμεσα στο 0 και 1 που γράφονται με τη μορφή κλάσματος (ρητοί) και πολλοί από τους οποίους παραλείφθηκαν κατά την κατασκευή του συνόλου Cantor.

Επίσης, παρατηρούμε ότι κάθε ένα από τα δύο ζεύγη τμημάτων που έχουν δημιουργηθεί στο Βήμα 2 είναι πανομοιότυπο με τα δύο τμήματα του Βήματος 1, αν τα σμικρύνει κανείς κατά 1/3. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για όλα τα ζεύγη του Βήματος 3, σε σχέση με τα αντίστοιχα ζεύγη του Βήματος 2 από το οποίο προήλθαν. Το φαινόμενο αυτό που παρατηρείται μεταξύ όλων των διαδοχικών τμημάτων της κατασκευής του συνόλου Cantor, ονομάζεται αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας και η συγκεκριμένη κλίμακα που συνδέει εδώ τα διαδοχικά ζεύγη τμημάτων είναι το 1/3.

Έστω $\langle \mathbb{R}, d \rangle$, όπου $d(x,y)=|x-y|$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε τις συστολές (3^1-1 το πλήθος), $w_1(x)=\frac{1}{3}x$, $w_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $W(B)=w_1(B)\cup w_2(B)$, $B\in\mathcal{H}(\mathbb{R})$.

Για B=[0,1],

$$W([0,1])=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right],$$

$$W^2([0,1])=W\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\right)=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]\cup\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right] \text{ κ.ο.κ..}$$

Τότε το σταθερό σημείο της W είναι το $A=\lim_{n\to\infty}W^n([0,1])$, το οποίο είναι το τριαδικό σύνολο

Εικ.2.1.1 Τριαδικό σύνολο Cantor

Cantor.

2.2 Τρίγωνο Sierpinski

Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 και αφαιρούμε το μεσαίο τριγωνικό κομμάτι που έχει ως κορυφές τα μέσα των τριών πλευρών του αρχικού τριγώνου. Στη συνέχεια αφαιρούμε από τα 3 συμπαγή τρίγωνα που έμειναν στο σχήμα το μεσαίο τους κομμάτι, δηλαδή ένα ισόπλευρο πλευράς 1/4. Κατόπιν από κάθε ένα από τα 9 συμπαγή τρίγωνα που μένουν αφαιρούμε το μεσαίο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1/8.

Μαθηματική Περιγραφή

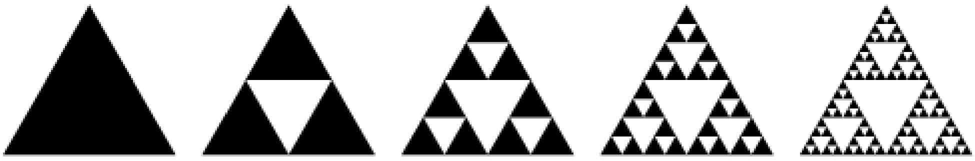
Έστω $\langle \mathbb{R}^2, d \rangle$ *όπου d είναι η Ευκλείδεια απόσταση. Ορίζουμε τις συστολές(*$2^2 - 1$ *το πλήθος)*

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

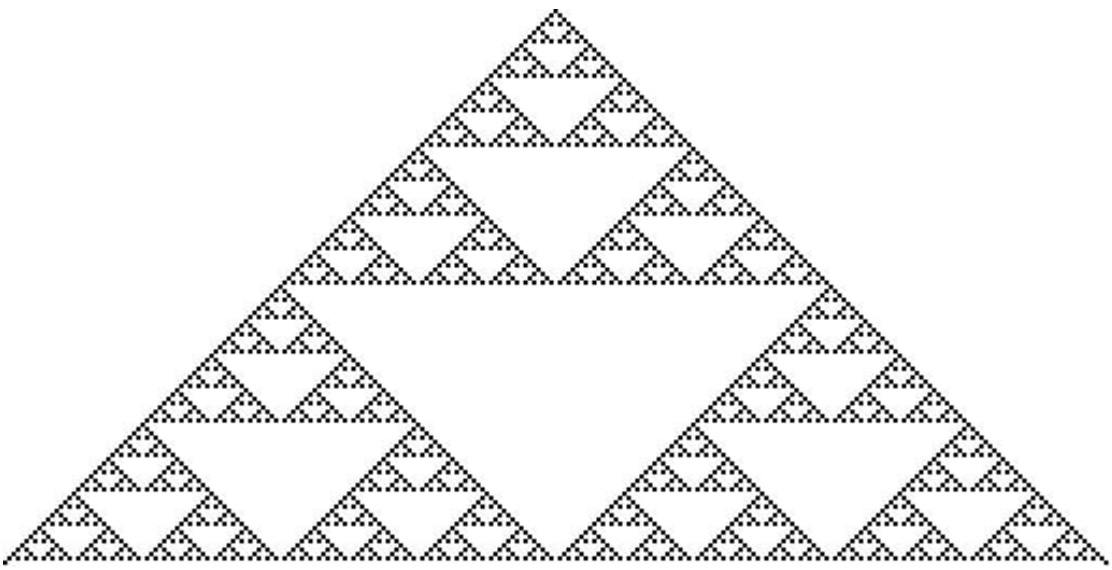
$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Έστω, $W(B) = w_1(B) \bigcup w_2(B) \bigcup w_3(B)$, $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. *Το σταθερό σημείο της* W *είναι το τρίγωνο Sierpinski.*



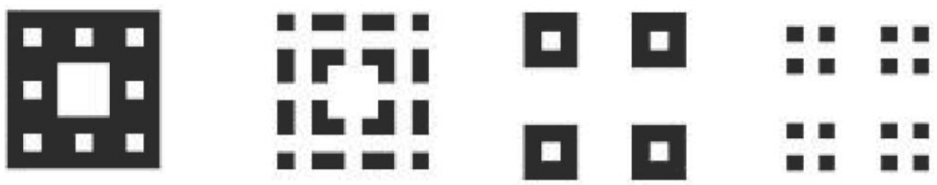
Εικ. 2.2.1 Κατασκευή Τριγώνου Sierpinski



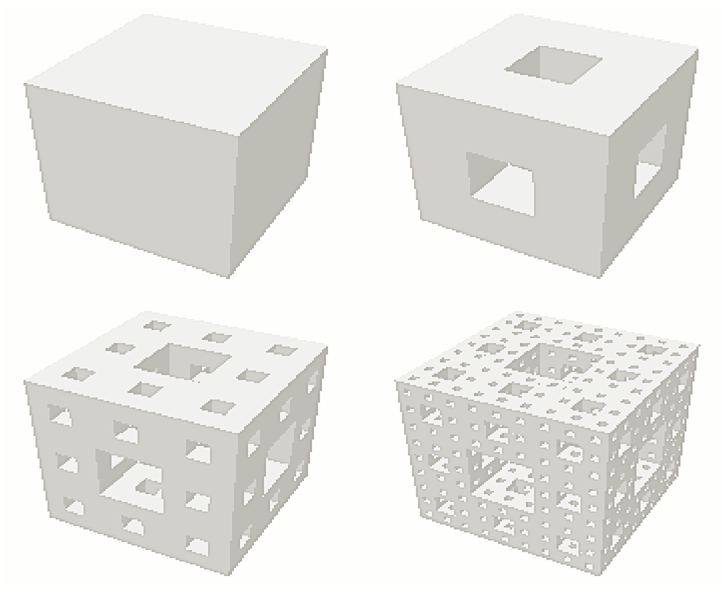
Εικ.2.2.2 Τρίγωνο Sierpinski

2.3 Σπόγγος του Menger ή Sierpinski

Ο σπόγγος κατασκευάζεται αν χωρίσουμε το μοναδιαίο κύβο $[0,1]^3$ σε 27 κύβους πλευράς 1/3 και αφαιρέσουμε τους εφτά κεντρικούς κύβους. Οι συναρτήσεις συστολής είναι 3^3-7 το πλήθος, γι' αυτό και δεν αναφέρονται.



Εικ.2.3.1 Κατασκευή σπόγγου του Menger στον R^2



Εικ.2.3.2 Κατασκευή σπόγγου του Menger στον R^3

2.4 Καμπύλη von Koch

Θεωρούμε το μοναδιαίο διάστημα [0,1] στο επίπεδο και αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο, προσθέτοντας στη θέση του δύο άλλα τμήματα μήκους 1/3 (βήμα 1). Στη συνέχεια αφαιρούμε *από κάθε ευθύγραμμο τμήμα της τεθλασμένης καμπύλης που δημιουργείται το μεσαίο τρίτο του και τοποθετούμε στη θέση του, δύο ίσα τμήματα μήκους* $\varepsilon_n = (1/3)^n$ *, στα βήματα* $n = 2, 3, \ldots$*, πάντα σε σχήμα ισόπλευρου τριγώνου. Στο όριο αυτής της διαδικασίας, καθώς* $n \to \infty$ *, θα σχηματιστεί μία άπειρα πολύπλοκη καμπύλη, που μοιάζει με πολυσχιδή παραλία, με κολπίσκους και εξογκώματα σε κάθε μεγέθυνση!*

Μαθηματική Περιγραφή

Στον $\left\langle \mathbb{R}^2, d \right\rangle$ *, όπου d η Ευκλείδεια μετρική απόσταση, ορίζουμε*

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

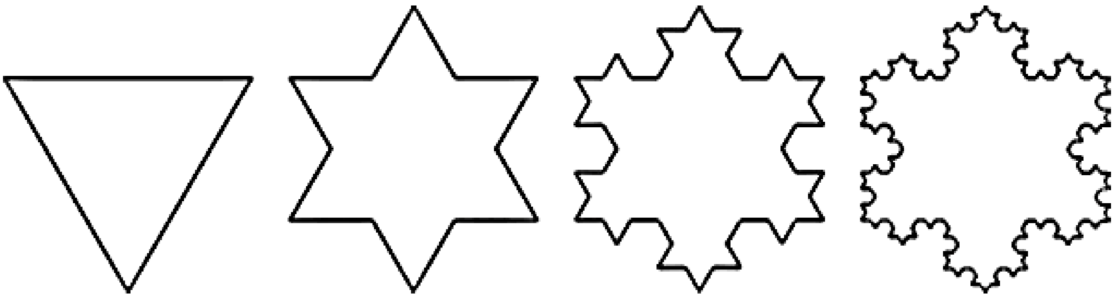
(στροφή κατά $\frac{\pi}{3}$ *)*

$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(στροφή κατά $-\frac{\pi}{3}$ *)*

$$w_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σταθερό σημείο της $W(\mathcal{B}) = w_1(\mathcal{B}) \bigcup w_2(\mathcal{B}) \bigcup w_3(\mathcal{B}) \bigcup w_4(\mathcal{B}),\ \mathcal{B} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ *είναι η καμπύλη von Koch.*



Εικ.2.4.1 Κατασκευή Καμπύλης von Koch

2.5 'Πλατανόφυλλο'

Μαθηματική Περιγραφή

Στον $\left\langle \mathbb{R}^2, d \right\rangle$*, όπου* d *η Ευκλείδεια μετρική απόσταση, ορίζουμε*

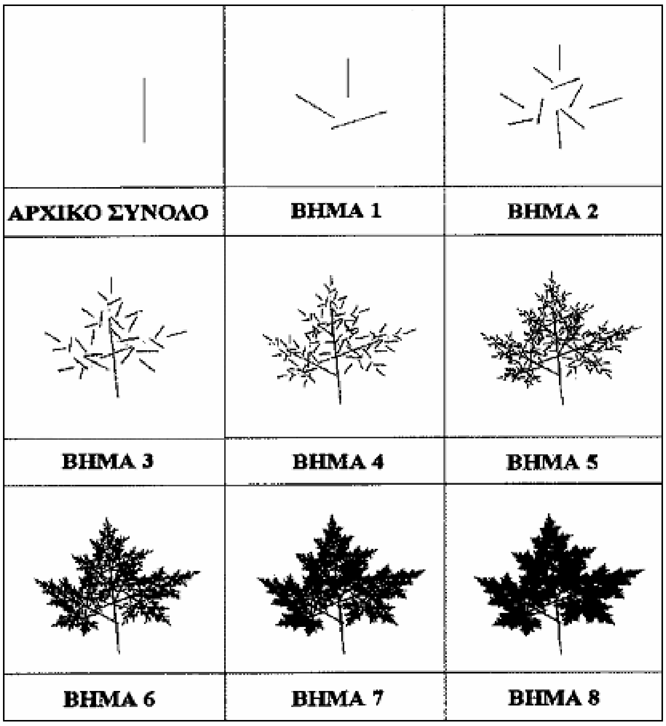
$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49 & 0,01 \\ 0 & 0,62 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,52 \\ 0,40 & 0,36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 56 \end{pmatrix}$$

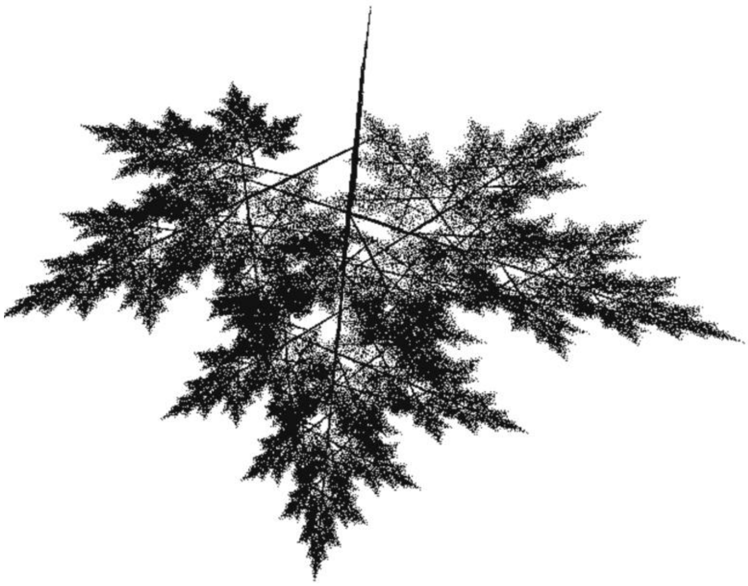
$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 & -0,73 \\ 0,50 & 0,26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 88 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$w_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 & -0,01 \\ 0,50 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 52 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Το σταθερό σημείο της $W(\mathcal{B}) = w_1(\mathcal{B}) \bigcup w_2(\mathcal{B}) \bigcup w_3(\mathcal{B}) \bigcup w_4(\mathcal{B}),\ \mathcal{B} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$*, είναι ένα 'πλατανόφυλλο'.*



Εικ.2.5.1 Κατασκευή Πλατανόφυλλου



Εικ.2.5.2 'Πλατανόφυλλο'

2.6 Σπείρα 1 (σπείρα του 1ου ονείρου της Ντόρας)

Μαθηματική περιγραφή

Στον $\left\langle \mathbb{R}^2, d \right\rangle$, όπου d η Ευκλείδεια απόσταση, ορίζουμε

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

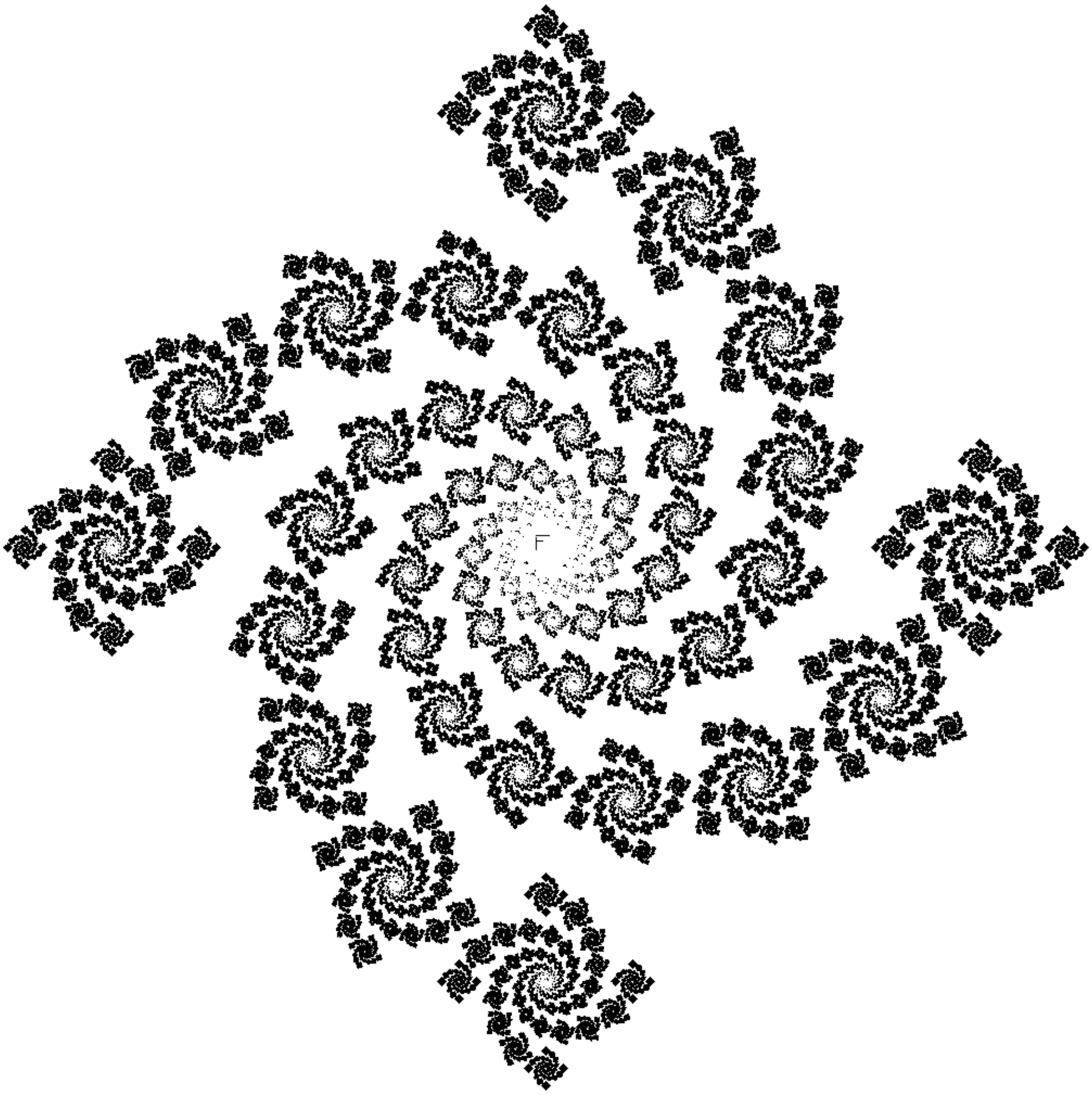
$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

$$w_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

(στροφή κατά $\frac{\pi}{9}$)

$$w_5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{17}{20}\begin{pmatrix} 0,939 & -0,342 \\ 0,342 & 0,939 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Το σταθερό σημείο της $\mathcal{W}(\mathcal{B})=w_1(\mathcal{B})\bigcup w_2(\mathcal{B})\bigcup w_3(\mathcal{B})\bigcup w_4(\mathcal{B})\bigcup w_5(\mathcal{B}),\ \mathcal{B}\in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ είναι η σπείρα SFf.



Εικ.2.6 Σπείρα 1

2.7 Σπείρα 2 (σπείρα του 2ου ονείρου της Ντόρας)

Στον $\left\langle \mathbb{R}^2, d \right\rangle$, όπου d η Ευκλείδεια απόσταση, ορίζουμε

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{3}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0,26 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

(στροφή κατά $\frac{\pi}{6}$)

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{9}{10}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Το σταθερό σημείο της $W(B) = w_1(B) \bigcup w_2(B)$, $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ είναι η σπείρα 2.

Εικ.2.7 Σπείρα 2

Βιβλιογραφία:

[5] ΔΑΛΛΑ – ΕΥΑΓΓΕΛΑΤΟΥ Λ., Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2000.
[6] BANSLEY M.F., Fractals Everywhere, Academic Press, Inc., U.S.A., 1998.
[7] FEDER J., Fractals, Plenum Press, New York, 1988.

Κεφάλαιο 3 – Fractal Διαστάσεις

Στην Κλασσική Γεωμετρία (Ευκλείδεια), η έννοια της «διάστασης» εκφράζεται ως θετικός ακέραιος αριθμός. Ένα σημείο έχει διάσταση μηδέν (0), μία γραμμή έχει διάσταση ένα (1), μία επιφάνεια διάσταση δύο (2) και ο χώρος έχει διάσταση τρία (3). Μέσω των θεμελιωδών αυτών εννοιών, σημείο – γραμμή – επιφάνεια – χώρος, ορίζονται και τα βασικά γεωμετρικά σχήματα: τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, πολύγωνο, κύκλος, κύβος, κώνος, σφαίρα κτλ.. Τα fractal σχήματα, είναι σύνολα σημείων που εμφανίζουν νέες λεπτομέρειες σε κάθε κλίμακα μεγέθυνσης· επί μέρους τμήματά τους είναι παρόμοια με άλλα τμήματα του συνόλου σε διαφορετική κλίμακα. Παρουσιάζουν δηλαδή, αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας. Ωστόσο ένα fractal μπορεί να περιγραφεί από μία άπειρη ακολουθία κλιμάκων και η αυτοομοιότητά του να είναι και στατιστική ιδιότητα του συνόλου. Επιπλέον, συχνά ένα fractal δημιουργείται μέσω μίας επαναληπτικής διαδικασίας, σε κάθε βήμα της οποίας εφαρμόζονται οι ίδιοι μαθηματικοί μετασχηματισμοί (αλλαγή κλίμακας, μετάθεση και στροφή). Επομένως, υπάρχουν πολλοί τρόποι προσδιορισμού της fractal διάστασης ενός συνόλου. Οι πιο σημαντικές θεωρητικές fractal διαστάσεις, είναι η Hausdorff και η Box διάσταση, οι οποίες αν και για τα κλασσικά fractals συμπίπτουν, γενικά δεν είναι ισοδύναμες.

3.1 Fractal Διαστάσεις

3.1.1 Διάσταση Box

Η διάσταση Box είναι η απλούστερη διάσταση που χρησιμοποιούμε και φέρει επίσης τα ονόματα εντροπία Kolmogorov, διάσταση εντροπίας, διάσταση Minkowski και άλλα.

Για την κατανόηση του ορισμού της Box διάστασης, θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς α και δ>0. Χρειαζόμαστε τουλάχιστον $N_\delta = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{\delta}\right)^2$ *κύβους πλευράς δ για να καλύψουμε το αρχικό τετράγωνο. Ανάλογα για τον κύβο πλευράς α, χρειαζόμαστε τουλάχιστον* $N_\delta = \alpha^3 \left(\frac{1}{\delta}\right)^3$ *κύβους πλευράς δ για να τον καλύψουμε.*

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που εμφανίζεται στο $\frac{1}{\delta}$, *είναι η διάσταση του αντικειμένου. Για το τυχαίο αντικείμενο θα χρειαζόμαστε* $N_\delta \cong c\left(\frac{1}{\delta}\right)^s$ *κύβους πλευράς δ για να το καλύψουμε, για κάποιο* $s \geq 0$ *(όπου c σταθερά εξαρτώμενη από το αντικείμενο, με* $f(\delta) \cong g(\delta)$, *αν*

$\lim_{\delta\to 0}\big(f(\delta)-g(\delta)\big)=0$). Λογαριθμίζοντας έχουμε $\log \mathcal{N}_\delta \cong \log c - s\log\delta$. Άρα $s=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\log\mathcal{N}_\delta}{-\log\delta}$.

Ορισμός 3.1.1: *Εάν* $F\subseteq\mathbb{R}^d$ *είναι φραγμένο σύνολο, ορίζουμε ως* ***Box – διάσταση*** *του, τον αριθμό* $\dim_B F=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\log\mathcal{N}_\delta(F)}{-\log\delta}$ *(εφόσον υπάρχει το όριο), όπου* $\mathcal{N}_\delta(F)$ *είναι ο ελάχιστος αριθμός κύβων του* $\mathbb{R}^d$, *πλευράς δ που καλύπτουν το F.*

Ισοδύναμα: $\mathcal{N}_\delta(F)$ *είναι ένα από τα ακόλουθα*

i. Ο ελάχιστος αριθμός κλειστών σφαιρών ακτίνας δ που καλύπτει το F.
ii. Ο ελάχιστος αριθμός συνόλων διαμέτρου το πολύ δ, που καλύπτει το F.
iii. Ο αριθμός κύβων της μορφής $[m_1\delta,(m_1+1)\delta]\times\ldots\times[m_d\delta,(m_d+1)\delta]$ όπου $m_1,\ldots,m_d$ ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι τέμνουν το F.
iv. Ο μεγαλύτερος αριθμός σφαιρών $S(x,\delta)$, ξένων ανά δύο με κέντρο $x\in F$.

3.1.2 Διάσταση ομοιότητας

Η διάσταση αυτή ορίζεται σε σύνολα που έχουν κατασκευαστεί με ειδικής μορφής ΣΕΣ, δηλαδή σε fractal σύνολα που έχουν προκύψει υπό αλλαγή κλίμακας.

Ορισμός 3.1.2: *Έστω* $w_1,w_2,\ldots,w_{\mathcal{N}}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ *είναι ομοιότητες με κοινό συντελεστή συστολής* $0<c<1$, *και F σταθερό σημείο* $F=w_1(F)\cup w_2(F)\cup\ldots\cup w_{\mathcal{N}}(F)$.

Ορίζουμε διάσταση ομοιότητας $\dim_s F=\frac{\log\mathcal{N}}{-\log c}$ *Είναι φανερό ότι η διάσταση Box και η διάσταση αυτοομοιότητας, ενδέχεται να είναι μη θετικοί ακέραιοι.*

Οι παραπάνω ορισμοί, έχοντας τη δυνατότητα κάλυψης ενός φραγμένου συνόλου F με σύνολα (ίδιας) διαμέτρου δ σε οποιαδήποτε μεγέθυνση, εμπεριέχουν την υπόθεση ότι το σύνολο είναι «πυκνό» σε όλα τα σημεία του. Ένας πιο γενικός και αυστηρός προσδιορισμός της fractal διάστασης ενός συνόλου, επιτυγχάνεται με τη Hausdorff διάσταση.

3.1.3 Διάσταση Hausdorff – Besicovitch

Η διάσταση ενός γεωμετρικού σχήματος είναι εκείνος ο αριθμός n που αν το μετρήσουμε με μέτρο $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ *έχει μέτρο άπειρο ενώ αν το μετρήσουμε με μέτρο* $\lambda_{n+1},\lambda_{n+2},\ldots$ *έχει μέτρο μηδέν. Την έννοια "διάσταση" του συνόλου θα την γενικεύσουμε με τη βοήθεια του μέτρου Hausdorff του συνόλου.*

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathcal{H}^s(E)$ το s – Hausdorff μέτρο του, για $s \geq 0$. Εάν $0 \leq s < t$ τότε

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(E) = inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\delta^s(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}U_i,\, \delta(U_i) \leq \varepsilon,\, i \in \mathbb{N}\right\} \geq$$

$$\geq inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\delta^t(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}U_i,\, \delta(U_i) \leq \varepsilon,\, i \in \mathbb{N}\right\} = \mathcal{H}^t_\varepsilon(E), \text{ για } 0 \leq \varepsilon < 1.$$

Από τον ορισμό του μέτρου Hausdorff έχουμε ότι $\mathcal{H}^t(E) \leq \mathcal{H}^s(E)$ για $0 \leq s < t$.

Άρα, εάν $\mathcal{H}^s(E) = 0$ για κάποιο $s \geq 0$, θα έχουμε και $\mathcal{H}^t(E) = 0$ για κάθε $t \geq s$. Επιπλέον

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(E) = inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\delta^t(U_i)\cdot\delta^{s-t}(U_i), E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}U_i,\, \delta(U_i) \leq \varepsilon,\, i \in \mathbb{N}\right\} \geq \varepsilon^{s-t}\mathcal{H}^t_\varepsilon(E).$$

Εάν $0 < \mathcal{H}^t(E) \leq +\infty$ τότε $\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}^s_\varepsilon(E) \geq \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{s-t}\right)\mathcal{H}^t(E) = +\infty$ για κάθε $0 \leq s < t$.

Ιδιαιτέρως, για το σύνολο $\mathbb{R}^d$ έχουμε ότι $\mathcal{H}^d(\mathbb{R}^d) = +\infty$ και $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) = 0$ για $s > d$, και για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^d$ έχουμε ότι $\mathcal{H}^s(E) = 0$ για $s > d$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός s_o, $0 \leq s_o \leq d$, ώστε $\mathcal{H}^t(E) = \begin{cases} 0, & \text{για } t > s_o \\ +\infty, & \text{για } t < s_o \end{cases}$.

Τότε $s_o = sup\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(E) = +\infty\} = inf\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(E) = 0\}$.

Τον αριθμό αυτό ονομάζουμε Hausdorff – Besicovitch διάσταση του E και συμβολίζουμε $dim_{\mathcal{H}} E$.

Το μέτρο $\mathcal{H}^{s_o}(E)$ είναι δυνατό να είναι $0, +\infty$ ή θετικός αριθμός.

Οι fractal διαστάσεις, Hausdorff και Box, αν και για τα κλασσικά fractals συμπίπτουν, γενικά δεν είναι ισοδύναμες. Για παράδειγμα, ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος πεπερασμένο, εμβαδόν και όγκο μηδέν, αλλά το εμβαδόν του τριγώνου Sierpinski είναι μηδέν. Επίσης, ένα τρίγωνο έχει «μήκος» άπειρο, εμβαδόν πεπερασμένο και όγκο μηδέν, αλλά και ο όγκος του κύβου του Menger είναι μηδέν. Ένας κύβος, έχει «μήκος» και «εμβαδόν» άπειρο και όγκο πεπερασμένο.

3.2 Υπολογισμός fractal διαστάσεων

3.2.1 Διάσταση συνόλων κατασκευασμένων με ΣΕΣ

Η εύρεση των διαστάσεων Hausdorff και Box, συνόλων fractal χρειάζεται μελέτη της μεθόδου κατασκευής καθενός από αυτά και εν συνεχεία να γίνει προσπάθεια υπολογισμού των διαστάσεων.

Οι διαστάσεις των fractal συνόλων που κατασκευάσαμε με τη βοήθεια ΣΕΣ, υπολογίζονται βάσει γενικών Θεωρημάτων.

Με το ακόλουθο Θεώρημα, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διάσταση του ενός σταθερού συνόλου ΣΕΣ.

Θεώρημα 3.2.1: *Έστω* $w_1, w_2, ..., w_{\mathcal{N}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, *ομοιότητες, (με την Ευκλείδεια μετρική) με συντελεστές* $s_1, s_2, ..., s_{\mathcal{N}} \in (0,1)$, *ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη ανοικτού συνόλου: Υπάρχει* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathcal{V} \neq \emptyset$, $\mathcal{V}$ *ανοικτό, ώστε*

i. $\bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}} w_i(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ *και*

ii. $w_i(\mathcal{V}) \cap w_j(\mathcal{V}) = \emptyset, \ i \neq j$.

Εάν $\mathcal{K}$ *είναι το σταθερό σημείο της* $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, *τότε:*

i. $dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{K}) = dim_{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) = \mathcal{D}$, *όπου* $\mathcal{D}$ *δίδεται από τη σχέση:* $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} s_i^{\mathcal{D}} = 1$.

ii. $0 < \mathcal{H}^{\mathcal{D}}(\mathcal{K}) < +\infty$.

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει με πολύ απλό τύπο, την fractal διάσταση συνόλων που το ΣΕΣ της κατασκευής του ικανοποιεί τις υποθέσεις του. Ο άμεσος υπολογισμός διάστασης συνόλου είναι ιδιαίτερα επίπονος και τεχνικός, ακόμη και για το απλούστερο των fractal συνόλων, το τριαδικό σύνολο του Cantor. Παραθέτουμε τον υπολογισμό της διάστασης αυτού, με χρήση μόνο των ορισμών.

Θα αποδείξουμε ότι

$$s = dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}) = dim_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}6309.. \text{ και } \frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(\mathcal{E}) \leq 1.$$

Πράγματι: Το $\mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$, *όπου κάθε* $\mathcal{E}_n$ *αποτελείται από* 2^n *διαστήματα μήκους* $\frac{1}{3^n}$ *το καθένα.*

Άρα $\mathcal{H}^t_{\frac{1}{3^n}}(\mathcal{E}) \leq 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^t = \left(\frac{2}{3^t}\right)^n$.

Για να είναι $\mathcal{H}^t(E) < +\infty$ θα πρέπει $\frac{2}{3^t} \le 1$, δηλαδή $t \ge \frac{\log 2}{\log 3}$.

Για $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ έχουμε $\mathcal{H}^s(E) \le 1$.

Θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{H}^s(E) \ge \frac{1}{2}$.

Έστω $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Θα αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \delta^s(U_n) \ge \frac{1}{2} = \frac{1}{3^s}$. $\quad (1)$

Επειδή $\delta(conU_n) = \delta(U_n) = \delta(\bar{U}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα U_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι κλειστά διαστήματα, $U_n = [\alpha_n, \beta_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon_n > 0$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n + 2\varepsilon_n)^s \le \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - a_n)^s + \varepsilon .$$

Τότε $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \varepsilon_n, \beta_n + \varepsilon_n)$, με E συμπαγές, άρα $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{n_i} - \varepsilon_{n_i}, \beta_{n_i} + \varepsilon_{n_i}]$.

Εάν αποδείξουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} \left(\beta_{n_i} - \alpha_{n_i} + 2\varepsilon_{n_i}\right)^s \ge \frac{1}{2}$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\beta_n - \alpha_n\right)^s + \varepsilon \ge \frac{1}{2}$, για τυχαίο $\varepsilon > 0$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} \delta^s\left(U_n\right) \ge \frac{1}{2}$.

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε το εξής:

Εάν $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{v} U_n$, $U_n = \left[y_n, \delta_n\right]$, τότε $\sum_{n=1}^{v} \delta^s\left(U_n\right) \ge \frac{1}{2}$.

Έστω $\delta(U_1) \le \delta(U_2) \le \ldots \le \delta(U_v)$ και $k_n \in \mathbb{N}$, ώστε $\frac{1}{3^{k_n+1}} \le \delta(U_n) < \frac{1}{3^{k_n}}$, $n = 1, 2, \ldots, v$.

Τότε $k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_n$.

Το U_n τέμνει το πολύ ένα από τα διαστήματα που αποτελούν το E_{k_n}. Εάν $j \ge k_n$, τότε το U_n τέμνει το πολύ 2^{j-k_n} από τα διαστήματα που αποτελούν το E_j.

Άρα $2^{j-k_n} = 2^j \cdot \frac{1}{2^{k_n}} = 2^j \cdot \frac{1}{3^{k_n s}} = 2^j 3^s \left(\frac{1}{3^{(k_n+1)}} \right)^s \le 2^j 3^s \delta^s(\mathcal{U}_n).$ $\quad (2)$

Το $\mathcal{U}_1$ τέμνει το πολύ ένα από τα 2^{k_1} διαστήματα του $\mathcal{E}_{k_1}$.

Το $\mathcal{U}_2$ τέμνει το πολύ $2^{k_1-k_2}$ από τα 2^{k_1} διαστήματα του $\mathcal{E}_{k_1}$.

Το $\mathcal{U}_v$ τέμνει το πολύ $2^{k_1-k_v}$ από τα 2^{k_1} διαστήματα του $\mathcal{E}_{k_1}$.

Επειδή τα $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_v$ τέμνουν όλα τα διαστήματα του $\mathcal{E}_{k_1}$, θα πρέπει $1 + 2^{k_1-k_2} + \ldots + 2^{k_1-k_v} \ge 2^{k_1}.$ $\quad (3)$

Από τις (2), (3), έχουμε $\sum_{n=1}^{v} 2^{k_1} \cdot 3^s \delta^s(\mathcal{U}_n) \ge 2^{k_1}$, $\sum_{n=1}^{v} \delta^s(\mathcal{U}_n) \ge \frac{1}{3^s} = \frac{1}{2}.$

Από την (1) έχουμε ότι $\mathcal{H}^s(\mathcal{E}) \ge \frac{1}{2}$.

Άρα για $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, $\frac{1}{2} \le \mathcal{H}^s(\mathcal{E}) \le 1$, επομένως $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{E} = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Θα υπολογίσουμε την $\dim_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$.

Εάν $\frac{1}{3^k} < \delta < \frac{1}{3^{k-1}}$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε ο ελάχιστος αριθμός για να καλύψουμε τον $\mathcal{E}$ με διαστήματα μήκους δ, είναι $\mathcal{N}_\delta(\mathcal{E}) \le 2^k$. Άρα $\frac{\log \mathcal{N}_\delta(\mathcal{E})}{-\log \delta} \le \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{k}{k-1}.$ $\quad (4)$

Εάν $\frac{1}{3^{k+1}} < \delta < \frac{1}{3^k}$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε $k \in \mathbb{N}$.

Άρα $\frac{\log \mathcal{N}_\delta(\mathcal{E})}{-\log \delta} \ge \frac{\log 2^k}{\log 3^{k+1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{k}{k+1}.$ $\quad (5)$

Από τις (4), (5) έχουμε ότι $\dim_{\mathcal{B}} \mathcal{E} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(\mathcal{E})}{-\log \delta} = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Παραδείγματα

1.

- *Τα ευθύγραμμα τμήματα και οι ευθείες έχουν διάσταση 1.*
- *Τα τρίγωνα, τα πολύγωνα και οι κύκλοι έχουν διάσταση 2.*
- *Τα πολύεδρα, οι σφαίρες και οι κύλινδροι έχουν διάσταση 3.*
- *Ανοικτά σύνολα στον* $\mathbb{R}^d$ *, έχουν διάσταση d.*

Τα παραπάνω προκύπτουν από τη σχέση $\mathcal{H}^d(E) = c\lambda_d(E),\ E \subseteq \mathbb{R}^d$ . .

2.

- *Το τριαδικό σύνολο Cantor είναι διάστασης* $d = \dfrac{\log 2}{\log 3} \in (0,1)$.
- *Το τρίγωνο Sierpinski είναι διάστασης* $d = \dfrac{\log 3}{\log 2} \in (1,2)$.
- *Ο σπόγγος του Menger είναι διάστασης* $d = \dfrac{\log 20}{\log 3} \in (2,3)$.
- *Η καμπύλη von Koch είναι διάστασης* $d = \dfrac{\log 4}{\log 3} \in (1,2)$.
- *Η σπείρα του 1ου ονείρου έχει διάσταση* $d \cong 1{,}73384 \in (1,2)$.
- *Η σπείρα του 2ου ονείρου έχει διάσταση* $d \cong 1{,}56476 \in (1,2)$.

Τα παραπάνω προκύπτουν από το Θεώρημα 3.5.1.

Σχόλιο: *Εάν* $0 < s < d$ *, μπορούμε να κατασκευάσουμε* $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *, ώστε* $\dim_{\mathcal{H}} E = s$.

Θα δώσουμε δύο κατασκευές.

Έστω $0 < s < 1$.

i. *Θεωρούμε* $m \in \mathbb{N}$*,* $m \geq 2$ *και* $0 < \lambda < \dfrac{1}{m}$ *ώστε* $s = \dfrac{\log m}{-\log \lambda}$.

Έστω $E_o = [0,1]$. *Ορίζουμε* $E_1 = [\alpha_1 = 0, \beta_1] \cup [\alpha_2, \beta_2] \cup \ldots \cup [\alpha_m, \beta_m = 1]$ *με*
$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_m < \beta_m$, *ώστε* $\left| \dfrac{\beta_i + \alpha_i}{2} - \dfrac{\beta_{i+1} + \alpha_{i+1}}{2} \right| = c_1,\ i = 1, 2, \ldots, m-1$ *και*
$|\beta_i - \alpha_i| = \lambda,\ i = 1, 2, \ldots, m$.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία σε καθένα από τα $[\alpha_i, \beta_i], i = 1,2,\ldots,m$ *, στη θέση του* E_o *και λαμβάνουμε το* E_2 *κ.ο.κ.*

Τότε το $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ *είναι το ομοιόμορφο σύνολο Cantor, με* $\dim_{\mathcal{H}} E=\dim_{\mathcal{B}} E=s$ *και* $0<\mathcal{H}^s(E)<+\infty$.

ii. *Θεωρούμε* $n_k\in\mathbb{N}$ *ώστε* $n_{k+1}\geq max\left\{n_k^k,\ 3n_k^{\frac{1}{s}}\right\}$. *Για κάθε* $k\in\mathbb{N}$, A_k *, είναι η ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων που το καθένα έχει μήκος* $\dfrac{1}{n_k^{\frac{1}{s}}}$ *και η απόσταση των μέσων δύο διαδοχικών διαστημάτων είναι* $\dfrac{1}{n_k}$. *Τότε το σύνολο* $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ *έχει διάσταση s.*

Για τυχαίο $1<s<2$ *κατασκευάζουμε υποσύνολο E του* $\mathbb{R}$ *διαστάσεως s - 1. Τότε το σύνολο* $E\times[0,1]\subseteq\mathbb{R}^2$ *έχει διάσταση s.*

Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για τυχαίο $0<s<d$.

Βιβλιογραφία:

[1] ΔΑΛΛΑ – ΕΥΑΓΓΕΛΑΤΟΥ Λ., Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2000.
[2] ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ Σ., ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ Θ., ΚΑΛΑΜΙΔΑΣ Ν., ΦΑΡΜΑΚΗ Β., Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Αίθρα, Αθήνα 1989.
[3] BANSLEY M.F., Fractals Everywhere, Academic Press, Inc., U.S.A., 1998.
[4] FEDER J., Fractals, Plenum Press, New York, 1988.
[5] ΜΠΟΥΝΤΗΣ Τ., Ο Θαυμαστός κόσμος των Fractal, Leader Books, Αθήνα, 2004.

Μέρος Β΄: Fractal προσέγγιση του ασυνείδητου

Κεφάλαιο 1 - Το Σύμπτωμα και οι Εκφάνσεις του

Η λέξη ***ασυνείδητο*** *χρησιμοποιείται συχνά για να υποδηλώσει το σύνολο των περιεχομένων που δεν είναι παρόντα στο ενεστώς σημείο της συνειδήσεως (περιγραφική έννοια). Το ασυνείδητο προσδιορίζει ένα από τα συστήματα που ορίζει ο Φρόιντ στα πλαίσια της πρώτης θεωρίας για το ψυχικό όργανο: συγκροτείται από απωθημένα περιεχόμενα για τα οποία δεν έχει γίνει αποδεκτή η πρόσβαση στο προσυνειδητό-συνειδητό λόγω της δράσης της απώθησης (τοπική έννοια).*

Από μόνο του το ασυνείδητο παραμένει άγνωστο: μπορούμε να το συλλάβουμε μόνο στα παράγωγά του (σύμπτωμα, όνειρο, γλωσσική παραδρομή, λογοπαίγνιο, παιχνίδι...) ώστε να παραπεμφθούμε στις πηγές και σε εκείνη την ασυνείδητη επιθυμία που δίνει ψυχή στη ζωή μας. Είναι άχρονο, είναι επικαιρότητα και αποτελεσματικότητα.

Ο όρος fractal, όπως έχει ήδη αναφερθεί, χρησιμοποιήθηκε από τον πολωνικής καταγωγής μαθηματικό Benoit B. Mandelbrot για να εκφράσει την ιδέα ενός σχήματος του οποίου οι διαστάσεις δεν περιγράφονται με ακέραιο αριθμό. Το βασικό χαρακτηριστικό των fractal είναι «Η προς εαυτόν ομοιότητα». Αυτοόμοιο είναι ένα αντικείμενο του οποίου τα μέρη που το αποτελούν, μοιάζουν με το σύνολο. Ουσιαστικά, ένα αυτοόμοιο αντικείμενο, παρουσιάζει συμμετρία κλίμακας, δηλαδή, η γεωμετρική του δομή παραμένει η ίδια σε κάθε κλίμακα.

Ένα fractal σχήμα ενδεχομένως να μπορούσε να αναπαραστήσει το συνονθύλευμα των απωθημένων ψυχικών υλικών, το ασυνείδητο, ενώ τα παράγωγά του (σύμπτωμα, όνειρο, γλωσσική παραδρομή κτλ.) θα μπορούσαν να είναι οι φορείς της αυτοομοιότητας. Δηλαδή, να είναι περίπλοκα τμήματα με μερική ή ολική επανάληψη του αρχικού σχήματος σε οποιαδήποτε κλίμακα.

1.1 Σύμπτωμα[2]

Ο κάθε άνθρωπος διέπεται από ψυχικούς νόμους, οι οποίοι αν και δεν του είναι προφανείς, συγκαθορίζουν την πορεία της ψυχικής του ζωής. Οι περισσότεροι από αυτούς τους νόμους ανήκουν στην περιοχή του ασυνείδητου, και η επιρροή τους μπορεί να αναζητηθεί πίσω από τετελεσμένες πράξεις ή σχηματισμένες σκέψεις, άλλοτε αυτούσιες και άλλοτε δύσκολα αναγνωρίσιμες.

Στην πορεία κάθε ανάλυσης, παρουσιάζεται μία ιδιαίτερα προνομιούχα στιγμή, μία εμπειρία όπως ονομάζεται, η οποία σημαδεύει και χαράσσει την πορεία της. Είναι το οριακό σημείο κατά το οποίο η ομιλία αποτυγχάνει και η εκφορά λόγου του ασθενούς πραγματοποιείται απουσία συντακτικών και συνειδητών νόμων.

---

[2] Nasio J.- D., Πέντε παραδόσεις πάνω στη θεωρία Jacques Lacan, μτφρ. Κανελλοπούλου Β.- Λ. κ.α., Πατάκης 2010.

Μία από τις μορφές με τις οποίες εκφαίνεται η εμπειρία, είναι το σύμπτωμα. Δεν είναι σύμπτωμα όλες οι αναλυτικές εμπειρίες, αλλά κάθε σύμπτωμα που εκδηλώνεται κατά τη διάρκεια θεραπείας συνιστά μία αναλυτική εμπειρία. ***Το σύμπτωμα, είναι κυρίως μία ακούσια πράξη που εκδηλώνεται πέρα από οποιαδήποτε σκοπιμότητα και πέρα από οποιαδήποτε συνειδητή γνώση και παραπέμπει στη διαδικασία που ονομάζεται ασυνείδητο. Το σύμπτωμα, είναι λοιπόν μία εκδήλωση του ασυνείδητου.***

Το σύμπτωμα αποτελείται από δύο όψεις, την όψη σημείο και τη σημαίνουσα όψη. Ο Lacan, ορίζει το σημείο ως ***αυτό που αναπαριστά κάτι για κάποιον.*** *Η όψη σημείο συνδέεται με το φαινόμενο της υπόθεσης. Δηλαδή, συμβαίνει ένα οδυνηρό και απρόσμενο συμβάν, ο ασθενής το εξηγεί και τοποθετεί αμέσως τον αναλυτή στο ρόλο του να είναι ταυτόχρονα ο Άλλος του συμπτώματος και η αιτία του συμπτώματος.*

Από την άλλη πλευρά, η σημαίνουσα όψη του συμπτώματος υποστηρίζει ότι το απρόσμενο οδυνηρό γεγονός που προκύπτει πέρα από τη θέληση του ασθενούς, είναι ένα συμβάν που σε αντίθεση με το σημείο, δεν έχει νόημα. Βρίσκεται μεταξύ άλλων συμβάντων που συνδέονται αυστηρά μαζί του και δεν έχει σημασία τι σημαίνει. Το σημαίνον είναι μία τυπική κατηγορία και όχι περιγραφική. Ένα σημαίνον μπορεί εξίσου να είναι ***μία παραδρομή, ένα όνειρο, μία λεπτομέρεια στη διήγηση ή και μία χειρονομία, ένας ήχος, ακόμα και μία σιωπή ή μία ερμηνεία του ψυχαναλυτή.*** *Όλες αυτές οι εκδηλώσεις μπορούν να χαρακτηριστούν ως σημαίνοντα συμβάντα, με την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται κάποια μη γλωσσικά κριτήρια, παρά τον όρο σημαίνον, ο οποίος έχει γλωσσική προέλευση. Το σημαίνον είναι λοιπόν μία ακούσια έκφραση ενός ομιλούντος όντος και δεν έχει νόημα, δε σημαίνει τίποτα και επομένως δεν τίθεται το δίλημμα να είναι εξηγήσιμο ή μη εξηγήσιμο. Ένα σύμπτωμα ως σημαίνον συμβάν, δεν απαιτεί ούτε κάποια υπόθεση του αναλυόμενου ούτε κάποια κατασκευή του αναλυτή. Με μία λέξη, το σημαίνον είναι!*

Το σημαίνον είναι, είναι όμως Ένα μεταξύ άλλων με τα οποία συναρθρώνεται. Ενώ το σημαίνον Ένα γίνεται αντιληπτό από τον αναλυόμενο ή τον αναλυτή, τα άλλα με τα οποία συνδέεται δε γίνονται αντιληπτά. Είναι δυνητικά σημαίνοντα που ήταν άλλοτε ενεργοποιημένα ή δεν έχουν ακόμα ενεργοποιηθεί.

Η συνάρθρωση ανάμεσα στο Ένα και στα άλλα είναι τόσο στενή, ώστε, όταν σκέφτεται κανείς το σημαίνον, δεν πρέπει ποτέ να το φαντάζεται μόνο του. Κατά τον γνωστό λακανικό αφορισμό: ένα σημαίνον δεν είναι σημαίνον παρά μόνο για άλλα σημαίνοντα. Η εμβέλεια αυτής της τυπικής συνάρθρωσης είναι πρακτική: ένα σημαίνον δεν είναι σημαίνον ούτε για τον ψυχαναλυτή ούτε για τον αναλυόμενο, αλλά για άλλα σημαίνοντα. Αυτό σημαίνει ότι μόλις εμφανίζεται το σημαίνον, θυμίζει τα άλλα σημαίνοντα που πέρασαν και ανακοινώνει τον αναπόφευκτο ερχομό του επόμενου σημαίνοντος. Το άτομο μπορεί να εκπλαγεί από ένα σύμπτωμα που ξεπερνά την πρόθεσή του, ή μπορεί ακόμη και να το αντιληφθεί σαν ένα οδυνηρό συμβάν. Μπορεί ακόμη και να το ερμηνεύσει, να το σκεφτεί, να του δώσει ένα νόημα, και, εντούτοις, όλες του οι υποθέσεις να μην αλλάξουν το γεγονός ότι το σύμπτωμα θα επαναληφθεί όμοιο ή με τη μορφή ενός άλλου συμβάντος απρόοπτου και ανεξέλεγκτου.

Από την άποψη της ατομικής τους αλήθειας, όλα τα συμπτώματα είναι διαφορετικά και δεν επαναλαμβάνονται ποτέ ίδια. Αντίθετα από την άποψη της τυπικής και σημαίνουσας αξίας τους, όλα τα συμπτώματα είναι ταυτόσημα, γιατί όλα εμφανίζονται ένα προς ένα στη θέση του Ενός. Η ουσιαστική ιδέα στο κέντρο της λακανικής έννοιας της ***επανάληψης*** *είναι ότι όλα τα συμβάντα που κατέχουν τη θέση του Ενός επαναλαμβάνονται, από τυπική άποψη όμοια, όποιες και αν είναι οι διαφορετικές τους υλικές πραγματικότητες.*

Τελικά, το σύμπτωμα αν θεωρηθεί ως ένα συμβάν του οποίου δεν εξουσιάζεται από το άτομο ούτε η αιτία, ούτε το νόημα, ούτε η επανάληψη, είναι ένα σημαίνον.

Ο Lacan γράφει το σημαίνον συμβάν με το αλγεβρικό σύμβολο S1. Ο αριθμός 1 έρχεται να επισημάνει ότι είναι ένα μοναδικό συμβάν και το γράμμα S συμβολίζει τη λέξη σημαίνον [significant]. Θεωρώντας ότι το σύμπτωμα έχει μία σημαίνουσα όψη δείχνει ότι είναι Ένα, ότι αυτό το Ένα αιφνιδιάζει και επιβάλλεται στον ασθενή εν αγνοία του και έπειτα ότι επαναλαμβάνεται, δηλαδή ότι θα υπάρξει ένα άλλο Ένα και ένα άλλο Ένα κλπ..

Η δήλωση του συμπτώματος ως σημαίνον συμβάν, τονίζει όχι μόνο ότι είναι Ένα, ότι επιβάλλεται και διαφεύγει δυνάμενο να επαναληφθεί, αλλά κυρίως ότι επισυμβαίνει απρόοπτα την κατάλληλη στιγμή. Το σύμπτωμα ως σημαίνον, δεν είναι μία επιβαλλόμενη και παθητικά απολαμβανόμενη οδύνη. Είναι μία αρμόζουσα οδύνη, που εμφανίζεται σα φορέας μηνυμάτων που θα φανερώσει τα γεγονότα της ιστορίας που αγνοούνται.

Το να επαναλαμβάνεται ένα σημαίνον ταυτόσημο με ένα άλλο, σημαίνει ότι υπάρχει πάντοτε ένα συμβάν που καταλαμβάνει την τυπική θέση του Ενός, ενώ άλλα συμβάντα απόντα και δυνητικά, βρίσκονται εν αναμονή να την καταλάβουν. Τα παρελθόντα ή και τα ερχόμενα συμβάντα που κατέλαβαν ή πρόκειται να καταλάβουν την τυπική θέση του Ενός, εξασφαλίζουν την κίνησή τους, μέσω του ασυνείδητου. Το ασυνείδητο είναι μία διαρκώς ενεργή διαδικασία που δεν παύει να εξωτερικεύεται με πράξεις, συμβάντα ή λόγια που συγκεντρώνουν τις προϋποθέσεις οι οποίες ορίζουν ένα σημαίνον.

1.2 Οι εκφάνσεις του συμπτώματος

1.2.1 Το ολίσθημα της γλώσσας[3]

*Η χρήση του λεκτικού υλικού μίας γλώσσας, υπόκειται συχνά σε μία διαταραχή, γνωστή ως «ολίσθημα της γλώσσας». Οι συγγραφείς ταξινομούν τα παραδείγματα γλωσσικών ολισθημάτων σε: **αντιμεταθέσεις** π.χ. «η Μήλος της Αφροδίτης αντί η Αφροδίτη της Μήλου», π.χ. «μου στήθωσε το… αντί μου πλάκωσε το στήθος», **απόηχοι ή μετεκφορές** π.χ. «προπίνω στην υγεία του προδότη αντί πίνω στην υγεία του εργοδότη», **συμφύρσεις** π.χ. «πατώ κεφάλι», όπου συγχωνεύονται «πατώ πόδι» και «σηκώνω κεφάλι», **υποκαταστάσεις** π.χ. «φέρε το πλατό από τη θερμάστρα» αντί «φέρε το παλτό από την κρεμάστρα».*

Η διαταραχή του λόγου, μπορεί να προκαλείται πρώτον από την επιρροή ενός άλλου, προεκφερόμενου ή μετεκφερόμενου συστατικού στοιχείου της ίδιας λεκτικής ενότητας, ή από μία δεύτερη διατύπωση μέσα στη ίδια πρόταση ή συντακτική ενότητα, που σκοπεύει κανείς επίσης να αναφέρει. Δεύτερον όμως, η διαταραχή μπορεί να δημιουργηθεί από επιρροές εκτός της λέξης, της πρότασης ή της συντακτικής ενότητας, από στοιχεία, τα οποία δε σκοπεύει κανείς να αναφέρει και η διέγερση των οποίων γίνεται γνωστή μόνο από την ίδια τη διαταραχή. Κοινό σημείο των δύο τρόπων δημιουργίας του ολισθήματος της γλώσσας, είναι η ταυτόχρονη διέγερση, ενώ η διαφορά βρίσκεται στη θέση του διαταρακτικού στοιχείου μέσα ή έξω από την πρόταση ή τη συντακτική ενότητα.

[3] Sigmund Freud, Ψυχοπαθολογία της καθημερινής ζωής, V Το ολίσθημα της γλώσσας σελ.67, μετφρ. Αναγνώστου Λ., Επίκουρος, Αθήνα 1992.

Συχνά στις υποκαταστάσεις, η ηχητική ομοιότητα των λέξεων εξηγεί επαρκώς την ξαφνική εμφιλοχώρηση της νοούμενης λέξης μέσα σε αυτή που ο ομιλών επέλεξε να χρησιμοποιήσει. Στις συμφύρσεις, σημαντικό ρόλο παίζουν τα "αιωρούμενα" ή "περιπλανώμενα" λεκτικά σχήματα. Αν και βρίσκονται κάτω από το κατώφλι της συνείδησης, είναι ακόμη μέσα σε ακτίνα δράσης, οπότε εύκολα μπορούν να παρεμβάλλονται, λόγω ομοιότητας προς το φραστικό σύμπλεγμα, που θέλει να εκφέρει ο ομιλητής, οδηγώντας το συρμό των λέξεων σε εκτροχιασμό. Επίσης, στις αντιμεταθέσεις, κυρίως των αντίθετων λέξεων, το ολίσθημα της γλώσσας είναι αποτέλεσμα της στενής σχέσης που κατέχουν οι λέξεις αυτές στη γλωσσική μας συνείδηση.

Ο Φρόιντ μελετώντας και αναλύοντας μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων ασθενών του, υποστηρίζει ότι την ύπαρξη μίας διαταρακτικής επιρροής επερχόμενης έξω από το πλαίσιο λόγου που προορίζεται να λεχθεί. Το διαταρακτικό στοιχείο είναι ή μία μεμονωμένη ασυνείδητη σκέψη, η οποία εκδηλώνεται λόγω του ολισθήματος και συχνά δεν μπορεί να συνειδητοποιηθεί παρά μόνο με τη βοήθεια μίας λεπτομερούς ανάλυσης, ή είναι ένα γενικό ψυχικό κίνητρο αντιτιθέμενο συνολικά στον εκφερόμενο λόγο. Σύμφωνα με τον Φρόιντ, μία ασυνήθιστη σύνταξη ή ένας βεβιασμένος τρόπος έκφρασης, αρκούν για να αποκαλυφθεί η συμμετοχή μίας απωθημένης σκέψης στα διαφορετικά αιτιολογούμενα λόγια του ασθενούς. Ειδικά η σεξουαλικότητα, καταδικασμένη πάντα να εκφράζεται με μισόλογα, με σύμβολα, με υποκατάστατες πράξεις, επιζητεί απλώς και μόνο να εκμεταλλευθεί την ευκαιρία ηχητικής ομοιότητας με άσεμνες λέξεις και σημασίες, για να αποτελέσει το διαταρακτικό σημείο του λόγου, που συνδέεται με τις απαγορευμένες και καταπιεσμένες σκέψεις του ασθενούς.

Κοινό σημείο όλων των περιπτώσεων γλωσσικών παραδρομών, αδιακρίτως υλικού, παραμένει το γεγονός ότι οι ξεχασμένες ή παραμορφωμένες λέξεις ενός συνειρμικού δρόμου, έρχονται να συνδεθούν με μία ασυνείδητη ιδέα, από την οποία ξεκινά η επίδραση που εκδηλώνεται ως λεκτικό ολίσθημα.

1.2.2 Οι λαθεμένες κινήσεις[4]

Οι παραδρομές της ομιλίας δεν αποτελούν μεμονωμένα φαινόμενα. Η καθημερινή ζωή των ανθρώπων βρίθει άστοχων κινητικών πράξεων και δραστηριοτήτων, η ψυχολογική κατανόηση των οποίων δεν υπάγεται στην αταξία. Ο Φρόιντ, μέσα από επαρκώς διευκρινισμένα παραδείγματα ασθενών του και από αυτοπαρατηρήσεις, υποστηρίζει ότι οι λειτουργικές διαταραχές της καθημερινής ζωής, είναι συμβολικές αναπαραστάσεις μίας σκέψης η οποία δεν είναι προορισμένη να ληφθεί στα σοβαρά από τη συνείδηση.

Το γλίστρημα αντικειμένων από τα χέρια, η ανατροπή και το σπάσιμό τους, χρησιμοποιείται πολύ συχνά για να εκφρασθούν ασυνείδητες νοητικές διεργασίες και δεν οφείλονται σε σύμπτωση ή αθέλητη αδεξιότητα. Είναι αλήθεια ότι τέτοιες κινήσεις όταν πληρείται η ανατομική ακεραιότητα των νευρομυϊκών μηχανισμών, έχουν να επιδείξουν κάτι βίαιο, εκσφενδονιστικό και άτακτα σπαστικό, αλλά φαίνονται να διέπονται από μία πρόθεση, και πλήττουν τον στόχο τους με μία σιγουριά που δύσκολα απαντάται σε συνειδητές και ηθελημένες κινήσεις. Και τα δύο χαρακτηριστικά, η βιαιότητα και η ευστοχία, κατά τον Φρόιντ, είναι κοινά και σε αυτές τις κινήσεις αλλά και στις κινητικές εκδηλώσεις της υστερικής

[4]Sigmund Freud, Ψυχοπαθολογία της καθημερινής ζωής, VIIIΟι λαθεμένες κινήσεις σελ.201, μετφρ. Αναγνώστου Λ., Επίκουρος, Αθήνα 1992.

νεύρωσης και εν μέρει της υπνοβασίας, γεγονός που παραπέμπει στην ίδια, άγνωστη τροπολογία της εννευρωτικής διαδικασίας που πηγάζει από το ασυνείδητο.

Το πέσιμο, το παραπάτημα, το γλίστρημα, δεν πρέπει επίσης να ερμηνεύονται πάντοτε σαν τυχαία αστοχία του κινητικού μηχανισμού. Άλλωστε, η διπλή σημασία αυτών των εκφράσεων στη γλώσσα μας, παραπέμπει άμεσα στο είδος των συγκρατημένων φαντασιώσεων, που μπορούν να εξωτερικεύονται με αυτή την εγκατάλειψη του σώματος. Η σκοπιμότητα των τυχαίων αυτών πράξεων, πουθενά αλλού δεν μπορεί να γίνει τόσο εμφανής όσο στο πεδίο της σεξουαλικότητας, όπου τα όρια μεταξύ τυχαίου και ηθελημένου φαίνονται πράγματι εξαλειμμένα.*

Επίσης, πολλές φαινομενικά τυχαίες ζημίες, που πλήττουν τους υπεύθυνους για αυτές, κατά βάθος είναι αυτοζημίες, καθώς μία σταθερή λανθάνουσα τάση αυτοτιμωρίας, η οποία συνήθως εκφράζεται ως αυτομομφή ή συμβάλλει στη δημιουργία συμπτωμάτων, εκμεταλλεύεται επιδέξια μία τυχαία προκύπτουσα εξωτερική κατάσταση ή ίσως την ενισχύει ως την επίτευξη του επιθυμητού βλαβερού αποτελέσματος. Η ύπαρξη της ασυνείδητης πρόθεσης αποκαλύπτεται από ορισμένα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, όπως λόγου χάρη η εντυπωσιακή ψυχραιμία των παθόντων κατά το υποτιθέμενο ατύχημα ή η επιδεξιότητα που ανάγκασε τη σύμπτωση να επιβάλει μία αρμοστή ποινή για την ενοχή της.

Τέλος, εκτός από τη συνειδητή και σκόπιμη αυτοκτονία υπάρχει και η ημισκόπιμη αυτοεξόντωση, με ασυνείδητη πρόθεση, η οποία ξέρει να εκμεταλλεύεται επιδέξια μία απειλή της ζωής και να τη μεταμφιέζει σε τυχαίο δυστύχημα. Οι αυτοτραυματισμοί αποτελούν κατά κανόνα ένα συμβιβασμό ανάμεσα στην τάση αυτοχειρίας και στις αντίρροπες προς αυτή δυνάμεις. Σύμφωνα με τον Φρόιντ, όλες αυτές οι φαινομενικά αδέξιες κινήσεις και πράξεις, ανάγονται σε ατελώς καταπιεσμένα ψυχικά υλικά, τα οποία έχουν μεν απωθηθεί από τη συνείδηση, αλλά δεν τους έχει αφαιρεθεί κάθε ικανότητα να εκδηλωθούν.

**Οι αντίστοιχες γερμανικές εκφράσεις: sichfallenlassen (αφήνω τον εαυτό μου να πέσει), fehltritt (παραπάτημα, παραστράτημα) και ausgleiten (ολισθαίνω, γλιστρώ), υποδηλώνουν παραδρομές με σεξουαλικό ή ηθικό περιεχόμενο. Το fallen (πέφτω), στην περίπτωση κοριτσιών, σημαίνει και την απώλειας της «τιμής» της. Επίσης, ένα κοινότοπο παράδειγμα της ελληνικής γλώσσας, είναι η έκφραση «Πού θα πάει, θα πέσει..», που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την επιθυμητή έκβαση της ερωτικής πολιορκίας.*

1.2.3 Τυχαίες Πράξεις[5]

Η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα στις λαθεμένες κινήσεις και στις τυχαίες πράξεις, είναι ότι οι δεύτερες δεν επιζητούν το στήριγμα μίας συνειδητής πρόθεσης και συνεπώς δεν έχουν την ανάγκη ενός προσχήματος. Εμφανίζονται αυτοτελείς και γίνονται αποδεκτές γιατί δεν εγείρουν ερωτήματα γύρω από τις προθέσεις τους. Τις εκτελεί κανείς, χωρίς να «σκέφτεται τίποτα», καθαρά «τυχαία», «σαν να θέλει να απασχολήσει τα χέρια του», και υπολογίζει πως μία τέτοια εξήγηση θα θέσει τέρμα σε διερεύνηση της σημασίας αυτής της πράξης.

---

[5] Sigmund Freud, Ψυχοπαθολογία της καθημερινής ζωής, IXΠράξεις με χαρακτήρα συμπτώματος και τυχαίες πράξεις, σελ.237, μετφρ. Αναγνώστου Λ., Επίκουρος, Αθήνα 1992.

Το παίξιμο με ένα αντικείμενο που κρατάει κανείς στα χέρια του, το κουδούνισμα με τα κέρματα στην τσέπη, το μάλαγμα της ζύμης ή άλλων εύπλαστων ουσιών, κάθε είδους χειρονομίες στα ρούχα και πολλά παρόμοια, δεν έχουν να κρύψουν τίποτα το επιλήψιμο. Πίσω από όλα αυτά τα παιχνίδια απασχόλησης κρύβεται, όπως αποκαλύπτει η ψυχοθεραπεία, κατά κανόνα ένα νόημα και μία σημασία, που δεν μπορούν να βρουν άλλο τρόπο έκφρασης. Το σχετικό άτομο δεν ξέρει τίποτα για αυτά που κάνει ούτε για τυχόν τροποποιήσεις που πραγματοποιεί στα συνηθισμένα παιχνίδια, και έτσι παραβλέπει και παρακούει και τα αποτελέσματα αυτών των πράξεων. Δεν ακούει π.χ. τον θόρυβο των κερμάτων που κουδουνίζει στην τσέπη, και έτσι παραμένει δύσπιστο, όταν κάποιος του εφιστά την προσοχή σε αυτά.

Σημασία έχει επίσης, η απασχόληση των χεριών με τα ρούχα, την οποία το άτομο δεν αντιλαμβάνεται. Ο αναλυτής γνωρίζει ότι κάθε αλλαγή στο συνηθισμένο παρουσιαστικό, κάθε μικρή αμέλεια, όπως π.χ. ένα ξεκούμπωτο μανίκι, σημαίνει κάτι που ο φορέας των ενδυμάτων δε θέλει να το πει απευθείας. Η εξέταση των ιδιαίτερων συνθηκών, η συζήτηση του σχετικού θέματος και οι συνειρμοί που έρχονται στο νου του ασθενούς, όταν ο θεραπευτής του εφιστά την προσοχή στις πράξεις αυτές, καταδεικνύει ότι όχι απλά δεν είναι τυχαίες, αλλά ότι παριστάνουν συμβολικά φαντασιώσεις ή επιθυμίες.

Μία άλλη πράξη με χαρακτήρα συμπτώματος, είναι και η «απώλεια» πραγμάτων. Συχνά δεν είναι παρά μία έκφραση χαμηλής εκτίμησης για το χαμένο αντικείμενο ή μίας κρυφής αποστροφής γι' αυτό ή για το πρόσωπο που το έδωσε. Ακόμα, η τάση απώλειας μπορεί να μεταβιβαστεί σε ένα αντικείμενο μέσω συμβολικού συνειρμού από άλλα αντικείμενα. Έτσι, η απώλεια πραγμάτων μπορεί να εκφράζει πολύμορφες παρορμήσεις, μπορεί να παριστάνει συμβολικά μία απωθημένη σκέψη, ή μπορεί να επαναλαμβάνει μία υπόμνηση, στην οποία το άτομο θα προτιμούσε να κωφεύσει.

Η προέλευση των σκέψεων και των παρορμήσεων που εκφράζονται στις παραδρομές, είναι περιπτώσεις διαταρακτικών σκέψεων από ποικιλόμορφες ασυνείδητες ή συγκρατημένες παρορμήσεις. Συναισθήματα και εκδηλώσεις εγωισμού, ζηλοτυπίας και εχθρότητας, που δέχονται την πίεση της ηθικής διαπαιδαγώγησης, χρησιμοποιούν στους «υγιείς» πολλές φορές το μέσον της παραδρομής, για να εκδηλώσουν την αναμφισβήτητη, αλλά μη αναγνωριζόμενη από τις υψηλότερες ψυχικές αρχές δύναμή τους. Η παραχώρηση ελευθερίας σε αυτές τις παραδρομές και στις τυχαίες πράξεις ισοδυναμεί εν μέρει προς μία ανοχή στο μη ηθικό.

Το σύμπτωμα και οι εκφάνσεις του, αποδεικνύουν με πόση συνέπεια το ασυνείδητο είναι σε θέση να επιβάλλεται, όταν έχει λόγους να αντιτάσσεται στην εκτέλεση ενός σχεδίου και πόσο δύσκολο είναι να προστατευθεί κανείς από αυτή την τάση. Μέσω της μελέτης των συμπτωμάτων στην πορεία μίας ανάλυσης, ο αναλυτής μπορεί να έρθει σε επαφή με τις ασυνείδητες ψυχικές διεργασίες του ασθενούς, και να αποκρυπτογραφήσει τις ορμές τις ψυχικής ενέργειας που έχουν απωθηθεί από τη συνείδηση.

1.2.4 Το όνειρο [6]

[6] *Sigmund Freud, Όνειρο και τηλεπάθεια, Το όνειρο, σελ.5, μετφρ. Τσαμπουράκης Γ., Επίκουρος, Αθήνα 1983.*

Κατά τις παρατηρήσεις του πάνω σε ασθενείς και υγιείς ο Φρόιντ έφθασε στη διαπίστωση ότι το όνειρο είναι ένα πλήρες νοήματος ψυχικό μόρφωμα και, όμοια με ένα σύμπτωμα, έχει τους δικούς του τρόπους και δρόμους δημιουργίας, έκφρασης και εκδήλωσης. Ο Φρόιντ προλαμβάνει οποιαδήποτε επιμέρους αναζήτηση του νοήματος του ονείρου με τη διατύπωση ενός αξιώματος: «Το όνειρο είναι η (μεταμφιεσμένη) εκπλήρωση μίας (καταπιεσμένης, απωθημένης) επιθυμίας».

Ο Φρόιντ, κατ' αρχάς χώρισε το όνειρο σε δύο μέρη: στο έκδηλο περιεχόμενο και στο λανθάνον περιεχόμενο του ονείρου. Το έκδηλο περιεχόμενο είναι η κορυφή του παγόβουνου που επιπλέει στην επιφάνεια, αυτό που ονειρεύεται ο άνθρωπος, αυτό που θυμάται και διηγείται μετά το ξύπνημα, το λανθάνον περιεχόμενο είναι αυτό που βρίσκεται υποθαλάσσια και αποτελείται από όλες τις σκέψεις, τις εντυπώσεις, τις αναμνήσεις, τις μακρινές αιτίες και τις επίκαιρες αφορμές που ώθησαν στο σχηματισμό του έκδηλου περιεχομένου. Όλες αυτές οι ψυχικές διεργασίες υπόκεινται στο μηχανισμό της λογοκρισίας, η οποία επιβάλει μετάθεση και συμπύκνωση ιδεών, προσώπων, πραγμάτων, τόπων, καταστάσεων κλπ., επιφέροντας μία τέτοια παραμόρφωση του λανθάνοντος περιεχομένου, ώστε αυτό να εμφανίζεται καθολικά παραγνωρισμένο στο έκδηλο περιεχόμενο.

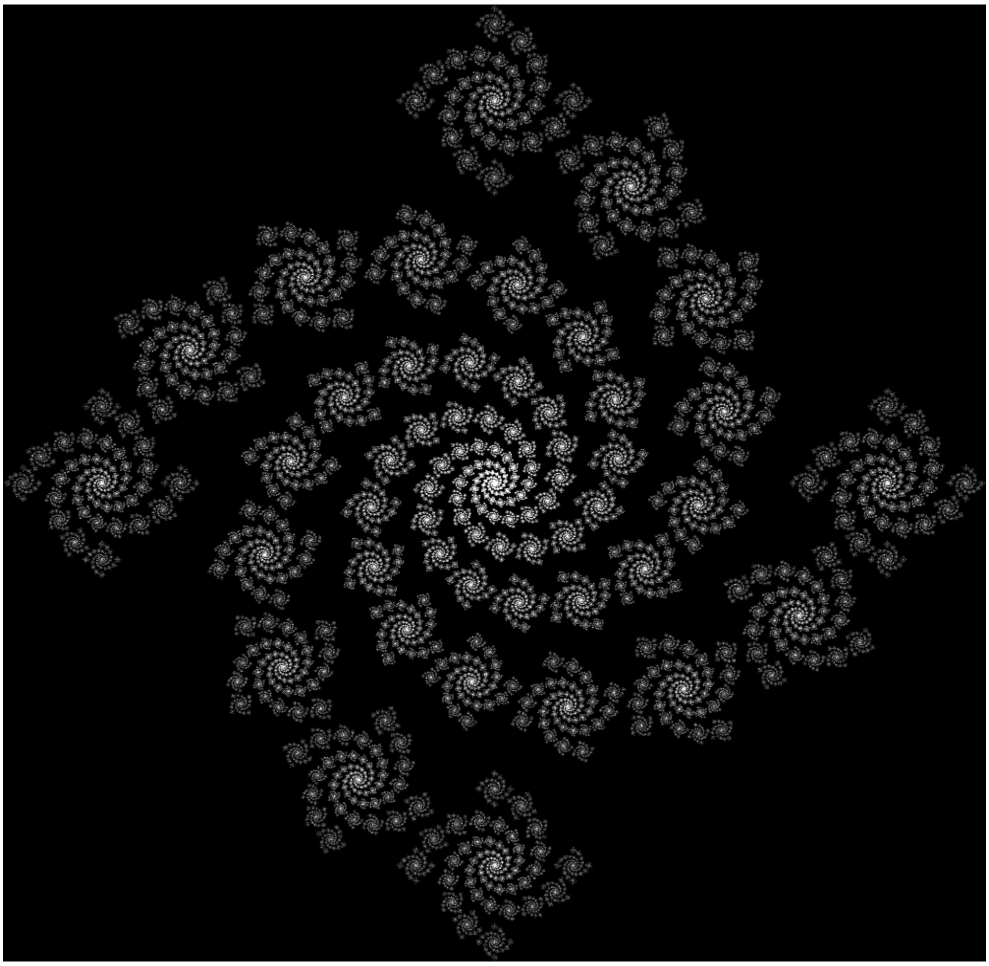
Η διεργασία του ονείρου, είναι η διαδικασία που ακολουθείται για να μετατραπεί το περιεχόμενο του ονείρου από λανθάνον σε έκδηλο. Τα στάδια διεργασίας του ονείρου είναι: συμπύκνωση, μετάθεση, δραματοποίηση του ψυχικού υλικού και τακτοποίηση των δραματικών στοιχείων του ονείρου κατά τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζουν μία ονειρική ενότητα. Η προσπάθεια να γίνει κατανοητό το όνειρο, προκαλεί την επεξεργασία του. Όνειρα με «καλή σύνθεση» υπόκεινται στην επεξεργασία με μία ψυχική δραστηριότητα εντελώς ανάλογη προς τη σκέψη του ξυπνητού ατόμου. Σε άλλα όνειρα αυτή η δραστηριότητα αποτυγχάνει εντελώς ή δε γίνεται καν προσπάθεια να αποκατασταθεί κάποια τάξη και να δοθεί μία ερμηνεία. Έτσι, μόλις παρέλθει η κατάσταση του ύπνου, το άτομο ταυτίζεται με αυτό το τελευταίο κομμάτι της διεργασίας του ονείρου και το όνειρο κρίνεται ως «εντελώς συγκεχυμένο». Πολλές φορές ωστόσο, η διεργασία του ονείρου έχει πρόθεση να παραποιήσει ή να κρύψει και χρησιμοποιεί τη διαστρέβλωση για να μην προδώσει ανεπίτρεπτες ονειρικές σκέψεις. Έτσι προκύπτουν τα σκοτεινά και συγκεχυμένα όνειρα, που στόχο έχουν να εκπληρώσουν κατά τρόπο συγκαλυμμένες, απωθημένες στο ασυνείδητο σκέψεις.

Η ανάλυση δείχνει πως ότι στο όνειρο παριστάνεται καθαρά και εκτεταμένα, σαν να είναι το ουσιαστικό περιεχόμενό του, αυτό έχει πολύ δευτερεύοντα ρόλο στις ονειρικές σκέψεις. Αντιθέτως, ότι στις ονειρικές σκέψεις χρειάζεται μεγαλύτερη προσοχή, αυτό είτε δεν παριστάνεται καθόλου στο περιεχόμενο του ονείρου είτε αντιπροσωπεύεται με έναν ασαφή υπαινιγμό σε κάποιο σημείο του ονείρου. Αυτή τη διαδικασία που κρύβει το νόημα του ονείρου και τη συνάρτηση ανάμεσα στο περιεχόμενο του ονείρου και τις ονειρικές σκέψεις, ο Φρόιντ την ονομάζει μετάθεση του ονείρου.

Υπάρχουν όνειρα που δημιουργήθηκαν χωρίς την παραμικρή μετάθεση. Πρόκειται για τα όνειρα με ξεκάθαρο νόημα, τα οποία αποτελούν εκπλήρωση κάποιας επιθυμίας. Υπάρχουν και όνειρα όπου οι ονειρικές σκέψεις έχασαν ολόκληρη την ψυχική τους αξία, ή όπου όλα τα ουσιαστικά στοιχεία έχουν αντικατασταθεί με δευτερεύοντα και ανάμεσά τους μπορεί να γίνει διακριτή μία πλήρης σειρά μεταβάσεων. Όσο πιο σκοτεινό και συγκεχυμένο είναι ένα όνειρο, τόσο περισσότερο ο σχηματισμός του οφείλεται στη μετάθεση.

Όταν η ανάλυση ανατρέψει την ονειρική μετάθεση, προκύπτουν βέβαιες πληροφορίες για δύο βασικά προβλήματα του ονείρου, για τους διεγέρτες του ονείρου και για τη συνάρτηση ανάμεσα στο όνειρο και τη ζωή του ατόμου εκτός της κατάστασης του ύπνου. Υπάρχουν όνειρα που μαρτυρούν απροκάλυπτα την άμεση σχέση τους με τα βιώματα της ημέρας ενώ σε άλλα δεν παρατηρείται ίχνος μίας παρόμοιας σχέσης. Με τη βοήθεια της ανάλυσης, αποδεικνύεται ότι ανεξαίρετα όλα τα όνειρα έχουν σαν αφορμή μία εντύπωση των τελευταίων ημερών, αν όχι *μία της τελευταίας μέρας πριν από το όνειρο. Η εντύπωση που παίζει το ρόλο του διεγέρτη για το όνειρο μπορεί να είναι άλλες φορές σημαντική, ώστε δίκαια απασχολεί το ξυπνητό άτομο και άλλες φορές ελάχιστη και ασήμαντη, οπότε χρειάζεται αρκετή προσπάθεια για να τη θυμηθεί. Το όνειρο, ακόμα και αν το περιεχόμενό του έχει νόημα και συνέπεια, φαίνεται να απασχολείται με ασήμαντες μικρολεπτομέρειες. Ένας σπουδαίος λόγος για την περιφρόνηση με την οποία συχνά περιβάλλονται τα όνειρα, είναι η προτίμησή τους στις αδιάφορες αυτές λεπτομέρειες. Η ανάλυση αναιρεί το φαινόμενο, πάνω στο οποίο στηρίζεται αυτή η υποτίμηση. Όπου στο περιεχόμενο του ονείρου προβάλλεται σα διεγέρτης μία αδιάφορη εντύπωση, εκεί η ανάλυση φανερώνει το σημαντικό και συνταρακτικό βίωμα που έχει αντικατασταθεί από το ασήμαντο, με το οποίο το συνδέουν άφθονοι συνειρμοί. Όπου το περιεχόμενο του ονείρου απασχολείται με ασήμαντες παραστάσεις χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον, εκεί η ψυχανάλυση αποκαλύπτει τα πολυάριθμα κανάλια που συνδέουν αυτό το φαινομενικά άχρηστο υλικό με ότι πιο πολύτιμο κρύβει ο ψυχικός κόσμος του ατόμου. Η μετάθεση, είναι υπεύθυνη, που το έκδηλο όνειρο περιέχει την αδιάφορη εντύπωση στη θέση του δικαιολογημένα συνταρακτικού βιώματος και το αδιάφορο υλικό στη θέση του δικαιολογημένα ενδιαφέροντος. Συμπερασματικά, ποτέ το όνειρο δεν απασχολείται με πράγματα ανάξια να απασχολήσουν το άτομο κατά τη διάρκεια της ημέρας, ούτε λεπτομέρειες αδιάφορες κατά τη διάρκεια της ημέρας μπορούν να το προβληματίσουν στον ύπνο του.*

Ακόμα και οι πιο άμεσες ονειρικές σκέψεις, δεν μπορούν να διατυπωθούν με λιτά λεκτικά σχήματα, αλλά παρίστανται με τρόπο συμβολικό. Το ψυχικό υλικό που περιλαμβάνεται στις ονειρικές σκέψεις, περιέχει αναμνήσεις, εντυπωσιακά βιώματα (κυρίως από την παιδικά ηλικία), μη αφομοιωμένα κλάσματα από οπτικές εικόνες, ομιλίες, κομμάτια από αναλλοίωτες απωθημένες σκέψεις. Ο αποσυμβολισμός του ονείρου μέσω της ανάλυσης, μπορεί να είναι ο μίτος που αναζητά την άκρη του σε κάποια γωνιά του ασυνείδητου.



Εικ.1.3.1 Fractal αναπαράσταση και προσέγγιση του Εγώ

1.3 Fractal αναπαράσταση και προσέγγιση του Εγώ

*Το ένστικτο της αναπαραγωγής, είναι μία παράμετρος του ενστίκτου της αυτοσυντήρησης. Ενυπάρχει σε κάθε άνθρωπο και προκύπτει σαν λειτουργία του μεταιχμιακού συστήματος. Το μεταιχμιακό σύστημα (**limbic system**) είναι η περιοχή του ανθρώπινου εγκεφάλου στην οποία επιτελούνται οι λειτουργίες της μνήμης, της όσφρησης (ρυθμίζει την ευχαρίστηση και τον φόβο που μπορεί να προκαλέσουν οσμές), του σπλαχνικού ελέγχου (μεταβάλλει την αναπνοή, την καρδιοαγγειακή και γαστροεντερική κινητικότητα) και του συναισθήματος (ρυθμίζει συναισθηματικές καταστάσεις και παρέχει ενίσχυση κινήτρου για την εκδήλωση συμπεριφοράς). Είναι αναπόσπαστο σύστημα όσον αφορά τις δραστηριότητες, γιατί παίζει ρόλο στο σύστημα πρόγνωσης και προσχεδιασμού. Είναι επίσης θεμελιώδες για την αυτό-συντήρηση, αφού ρυθμίζει δραστηριότητες σχετιζόμενες με την σίτιση, με τη θερμοκρασία, με τον κύκλο του ύπνου, σχετίζεται με αντιδράσεις πάλης ή αποφυγής, και τέλος ρυθμίζει δραστηριότητες σχετιζόμενες με τη σεξουαλική συμπεριφορά.*[7]

[7] *Αναγνωστοπούλου Σ., Κεντρικό Νευρικό Σύστημα, Ιατρικές εκδόσεις Πασχαλίδη, Αθήνα 1987.*

Πειραματικές ενδείξεις σχετικά με την ύπαρξη και τη φύση του ασυνείδητου[8], επιβεβαιώνουν την πεποίθηση του Φρόιντ πως τα συναισθήματα δεν περνούν πάντοτε το κατώφλι προς τη συναίσθηση και τη συνειδητότητα. Δηλαδή, ένα μεγάλο μέρος της συναισθηματικής ζωής είναι ασυνείδητο. Το μέρος αυτό, περιέχει προσωπικές εμπειρίες που έχουν καταπιεστεί γιατί είναι επώδυνες (τραυματικές). Τέτοιες εμπειρίες οφείλονται σε διαμάχες μεταξύ προσωπικών επιθυμιών, βασιζόμενων σε σεξουαλικές, κοινωνικές ή άλλες παρορμήσεις και σε περιοριστικές κοινωνικές αξίες. Επιπλέον, οι διαμάχες μπορούν να οφείλονται σε διαφορετικές εσωτερικές παρορμήσεις. Πολλές φορές οι άνθρωποι κρύβουν τις επιθυμίες τους, όχι μόνο όταν δεν είναι κοινωνικά αποδεκτές, αλλά και για να βελτιώσουν τη διαπραγματευτική τους θέση στο κοινωνικό παιχνίδι. Έτσι, κρύβουν από τους εαυτούς τους τις επιθυμίες τους, αν θεωρήσουν ότι αυτές δεν μπορούν να εκπληρωθούν.

Σύμφωνα με τον Γιούνγκ, το ασυνείδητο χωρίζεται σε δύο μέρη, το «Προσωπικό Ασυνείδητο» και το «Συλλογικό Ασυνείδητο». Το Προσωπικό Ασυνείδητο δεν περιέχει μόνο τις καταπιεσμένες εμπειρίες, αλλά και άλλους παράγοντες που προσδιορίζουν την προσωπικότητά του ατόμου, κυρίως τα ασυνείδητα μέρη του συμπλέγματος του Εγώ. Το Εγώ, είναι η καταγραφή στη μνήμη των προσωπικών παρορμήσεων και επιθυμιών στη διαχρονική τους εξέλιξη, το τεράστιο απόθεμα της προσωπικής ιστορίας του ατόμου. Αυτό είναι ένα τεράστιο δίκτυο διασυνδέσεων οι οποίες δεν μπορούν ποτέ να ενεργοποιηθούν ως σύνολο την ίδια στιγμή. Ακόμα και μη καταπιεσμένες επιθυμίες δεν είναι πάντοτε ενεργές, δηλαδή παρούσες στο συνειδητό νου, ενώ υπάρχουν και βαθύτερα στρώματα που δε γίνονται ποτέ συνειδητά.

Αν θεωρήσουμε το ένστικτο της αναπαραγωγής (σεξουαλική επιθυμία) σαν αρχικό σύνολο, στο οποίο επενεργούν βιολογικοί, κλιματολογικοί, γεωγραφικοί, κοινωνικοί, θρησκευτικοί και πολιτισμικοί παράγοντες ως συναρτήσεις συστολής, το σταθερό σημείο αυτής της επενέργειας, είναι το Εγώ. Το Εγώ συναποτελείται από το συνειδητό (σύνολο σημείων που απεικονίζονται με λευκό χρώμα) και από το ασυνείδητο (σύνολο σημείων που φέρουν μαύρο χρώμα). Το σύνολο των λευκών σημείων δημιουργεί μια περιοχή η οποία αν και φαίνεται να καταλαμβάνει κάποια επιφάνεια, έχει μηδενικό εμβαδόν. Από μαθηματική σκοπιά, η ιδιότητα αυτή αιτιολογείται πλήρως, αφού η διάσταση του fractal είναι μικρότερη από δύο (d = 1, …). Έτσι, επαληθεύεται και η περιγραφή του Γιούνγκ, κατά την οποία το Ασυνείδητο είναι ένας «ωκεανός» από τον οποίο το Συνειδητό «ξεπροβάλλει σταδιακά σα νησί» [9]. Τηρουμένων των αναλογιών, το εμβαδόν του νησιού σε σχέση με το «εμβαδόν» του ωκεανού, είναι μηδέν.

Η προσέγγιση του Εγώ μπορεί να επιτευχθεί μελετώντας τις εκδηλώσεις του ασυνείδητου, τα συμπτώματα. Αυτά, μπορούν να είναι οι περιοχές του fractal, όπου ως φορείς αυτοομοιότητας εμπεριέχουν τις πληροφορίες που θέλει κανείς να αντλήσει για τη σύνθεση και τη λειτουργία του ασυνείδητου και τη δομή του Εγώ του ατόμου.

Βιβλιογραφία:

[1] ΦΡΟΪΝΤ Σ., Ντόρα, η ανάλυση μιας υστερίας, μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα,1991.

[8] Κιουστελίδης Ι., Ο Μηχανισμός της νόησης, σελ. 312, Παπασωτηρίου, Αθήνα 2002.
[9] Κιουστελίδης Ι., Ο Μηχανισμός της νόησης, σελ.317, Παπασωτηρίου, Αθήνα 2002.

[2] ΦΡΟΪΝΤ Σ., Ψυχοπαθολογία της καθημερινής ζωής, μετφρ. Αναγνώστου Λ., Επίκουρος, Αθήνα 1992.

[3] ΦΡΟΪΝΤ Σ., Όνειρο και τηλεπάθεια, μετφρ. Τσαμποράκης Γ., Επίκουρος, Αθήνα 1983.

[4] ΒΑΜΒΑΛΗΣ Γ., Ξαναδιαβάζοντας τον Φρόιντ, Μία επανάληψη σε τριάντα απλά μαθήματα, Επίκουρος, Αθήνα 2000.

[5] NASIO J.- D., Πέντε παραδόσεις πάνω στη θεωρία Jacques Lacan, μτφρ. Κανελλοπούλου Β.- Λ. κ.α., Πατάκης 2010.

[6] ΚΙΟΥΣΤΕΛΙΔΗΣ Β. ΙΩΑΝΝΗΣ,Ο Μηχανισμός της νόησης, Παπασωτηρίου, Αθήνα 2002.

[7] ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΥ Σ. Κεντρικό Νευρικό Σύστημα. Ιατρικές Εκδόσεις Πασχαλίδη, Αθήνα 1987.

Κεφάλαιο 2 – Προσέγγιση του ασυνείδητου της Ντόρας μέσω της fractal ανάλυσης των ονείρων της

Κατά τη διάρκεια της ανάλυσης τους, οι ασθενείς αδυνατούν να παρουσιάσουν τη ζωή τους στο βαθμό που αυτή συμπίπτει με το ιστορικό της ασθένειά τους με συνοχή. Η αδυναμία αυτή προέρχεται κυρίως από το γεγονός ότι οι ασθενείς είτε δεν έχουν ξεπεράσει το γεγονός που πρέπει να αφηγηθούν, είτε από διακριτικότητα, όταν εμπλέκονται άλλα άτομα. Πρόκειται λοιπόν για μία συνειδητή ανειλικρίνεια. Επίσης, κατά τη διάρκεια της αφήγησης παραλείπουν μέρος των αναμνήσεων, χωρίς να είναι στις προθέσεις τους (ασυνείδητη ανειλικρίνεια). Τέλος υπάρχουν πάντα πραγματικές αμνησίες, κενά στη μνήμη, όπου κατέληξαν όχι μόνο παλιές αλλά και εντελώς πρόσφατες αναμνήσεις, όπως υπάρχουν και πλαστές αναμνήσεις, που δημιουργήθηκαν για να καλύψουν αυτά τα κενά. Στις περιπτώσεις που τα γεγονότα δεν έχουν ξεχαστεί, οι ασθενείς καταφέρνουν να πάθουν αμνησία εξαλείφοντας απλώς τον συσχετισμό. Η δε συνοχή κατακερματίζεται, με την αλλαγή της χρονικής διαδοχής των συμβάντων[10]. Έτσι, από τη φύση των πραγμάτων που αποτελούν το υλικό της ψυχανάλυσης, ο αναλυτής οφείλει να δώσει την ίδια σημασία τόσο στις καθαρά ανθρώπινες και κοινωνικές συνθήκες του ασθενούς, όσο και στα σωματικά δεδομένα και τα συμπτώματα της ασθένειας.

Τα όνειρα κατά τον Φρόιντ, ζητούν επιτακτικά την ένταξή τους ανάμεσα στα συμπτώματα της ασθένειας και της παθολογικής ιδέας. Στο βιβλίο του «Ντόρα, η ανάλυση μιας υστερίας», παραθέτοντας ένα απόσπασμα από τη θεραπεία ενός υστερικού κοριτσιού, της Ντόρας, επιδιώκει να δείξει με ποιο τρόπο επεμβαίνει η ερμηνεία του ονείρου στη δουλειά της ψυχανάλυσης. Θεωρεί ότι η γνώση της γλώσσας του ονείρου του ασθενούς, είναι απαραίτητα στον αναλυτή, διότι το όνειρο αποτελεί έναν από τους δρόμους, από τους οποίους φτάνει στην επιφάνεια το ψυχικό υλικό, το οποίο λόγω του περιεχομένου του έχει απομονωθεί από τη συνείδηση και έχει απωθηθεί.[11]

Η Ντόρα κατά την περιγραφή του Φρόιντ, ήταν μία πανέμορφη κοπέλα δεκαοχτώ χρονών, με έξυπνα και ελκυστικά χαρακτηριστικά. Τον Οκτώβριο του 1900 τα υστερικά συμπτώματα που παρουσίαζε κατά διαστήματα από το όγδοο έτος της ηλικίας της, είχαν αυξηθεί και επιδεινωθεί. Δύσπνοια, επίμονος βήχας, λιποθυμίες, αφωνίες και ημικρανίες, κακοδιαθεσία και υστερική δυστροπία ήταν μερικά από αυτά. Όλα τα παραπάνω, καθώς και μία (όχι σοβαρή, κατά τον Φρόιντ) αποστροφή προς τη ζωή, συνοδεύτηκαν από μία επιστολή προς τους γονείς της, στην οποία τους ανακοίνωνε ότι θα αυτοκτονήσει. Στον Φρόιντ, παρά τις αντιρρήσεις της, την έφερε ο πατέρας της, ο οποίος κατά κάποιο τρόπο την είχε οδηγήσει σε αυτή την κατάσταση.

Η ευαίσθητη Ντόρα, ήταν θύμα ενός φαύλου σεξουαλικού κύκλου, όπου ο πατέρας της διατηρούσε μακροχρόνιο δεσμό με μία άλλη γυναίκα, ο άνδρας της οποίας είχε σεξουαλικές σχέσεις με την γκουβερνάντα των παιδιών τους. Επιπλέον, ο εν λόγω κύριος, εκμεταλλευόμενος τις φιλικές σχέσεις με την οικογένεια της Ντόρας, επιζητούσε διαρκώς και επίμονα, να την κατακτήσει. Η Ντόρα ανατροφοδοτούσε το ενδιαφέρον του, αλλά ταυτόχρονα τον απωθούσε. Ένα επεισόδιο κατά το οποίο ο κύριος Κ… έκανε ερωτική εξομολόγηση στην Ντόρα, στη διάρκεια μίας εκδρομής, έγινε η αιτία ενός ψυχικού της τραυματισμού (απαραίτητου προκαταρκτικού παράγοντα στο σχηματισμό υστερικών καταστάσεων, κατά τον

[10] Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ. 17), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.
[11] Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ. 15), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.

Φρόιντ). Η Ντόρα διηγήθηκε το περιστατικό στους γονείς της, αλλά όταν ο πατέρας της ζήτησε εξηγήσεις από τον κύριο Κ… εκείνος αρνήθηκε κατηγορηματικά ότι είχε κάνει το παραμικρό εγχείρημα που θα επιδεχόταν τέτοιου είδους ερμηνεία. Αντιθέτως, έστρεψε τις υποψίες στην ίδια τη Ντόρα που, κατά τα λεγόμενα της κυρίας Κ… έδειχνε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα σεξουαλικά θέματα και διάβαζε και βιβλία σχετικά με αυτά. Η Ντόρα, που σύμφωνα με τον Φρόιντ ένιωθε πιο ευχάριστα σε μία πλατωνικά ανεπτυγμένη ερωτική σχέση προς τη γυναίκα του κυρίου Κ… και ερωμένη του πατέρα της, ένιωσε προσβεβλημένη και προδομένη περισσότερο από τη στάση της κυρίας Κ…, παρά από τη στάση του πατέρα της.

Η Ντόρα συνεργάσθηκε πρόθυμα με τον Φρόιντ. Παρόλα αυτά, και ενώ η θεραπεία εξελισσόταν ομαλά., του ανακοίνωσε ότι θα διακόψει την ανάλυσή της. Έτσι ο Φρόιντ, συνέγραψε το ιστορικό της διακοπείσας ανάλυσης και ανακοίνωσε ότι πρόκειται «για το απόσπασμα μίας ανάλυσης υστερίας, όπου οι ανιχνεύσεις ομαδοποιούνται γύρω από δύο όνειρα».[12]

2.1 1ο Όνειρο – Fractal αναπαράσταση και προσέγγιση αυτού

Περιγραφή[13]

Η Ντόρα διηγείται: *"Σε ένα σπίτι είναι πυρκαγιά.. Ο πατέρας μου στέκεται στο κρεβάτι και με ξυπνά. Ντύνομαι γρήγορα. Η μαμά θέλει να σώσει την κοσμηματοθήκη της, αλλά ο μπαμπάς λέει: «Δε θέλω να απανθρακωθούμε τα δύο παιδιά μου και εγώ, εξαιτίας της κοσμηματοθήκης σου». Κατεβαίνουμε βιαστικά, και μόλις φθάνουμε έξω, ξυπνώ."*

«Διασαφήνιση»

Διάλογος γονιών: *Οι γονείς της Ντόρας είχαν μία φιλονικία σχετικά με το αν η πόρτα της τραπεζαρίας θα έμενε ανοικτή κατά τη διάρκεια της νύχτας. Η πόρτα αυτή, χρησίμευε και ως δεύτερη είσοδος, οπότε ο πατέρας πίστευε ότι πρέπει να παραμένει ανοικτή το βραδύ, ώστε σε περίπτωση ανάγκης να μπορεί να βγει έξω.*

Πυρκαγιά: *Η ιδέα της πυρκαγιάς, είναι η συνέχεια των συνειρμών που είχε ενεργοποιήσει η διαπίστωση του πατέρα της Ντόρας για αυξημένο κίνδυνο φωτιάς στο σπίτι, λόγω έλλειψης αλεξικέραυνου (εκείνες τις μέρες επικρατούσε σφοδρή θύελλα…).*

Στάση του πατέρα στην άκρη του κρεβατιού: *Με τον τρόπο που είδε στο όνειρο τον πατέρα της να στέκεται μπροστά στο κρεβάτι της, είχε δει τον κύριο Κ… Το όνειρο πραγματοποιήθηκε μετά το επεισόδιο με τον κύριο Κ… στη λίμνη. Το απόγευμα της ημέρας της εκδρομής στη λίμνη, επιστρέφοντας στο σπίτι, η Ντόρα ξάπλωσε στην κρεβατοκάμαρά της για να κοιμηθεί και όταν ξύπνησε, είδε τον κύριο Κ… όρθιο μπροστά της. Ο ισχυρισμός του ότι ήθελε να πάρει*

[12] Βαμβαλής Γ., Ξαναδιαβάζοντας τον Φρόιντ, Μία επανάληψη σε τριάντα απλά μαθήματα, Επίκουρος, Αθήνα 2000.
[13] Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ. 67), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.

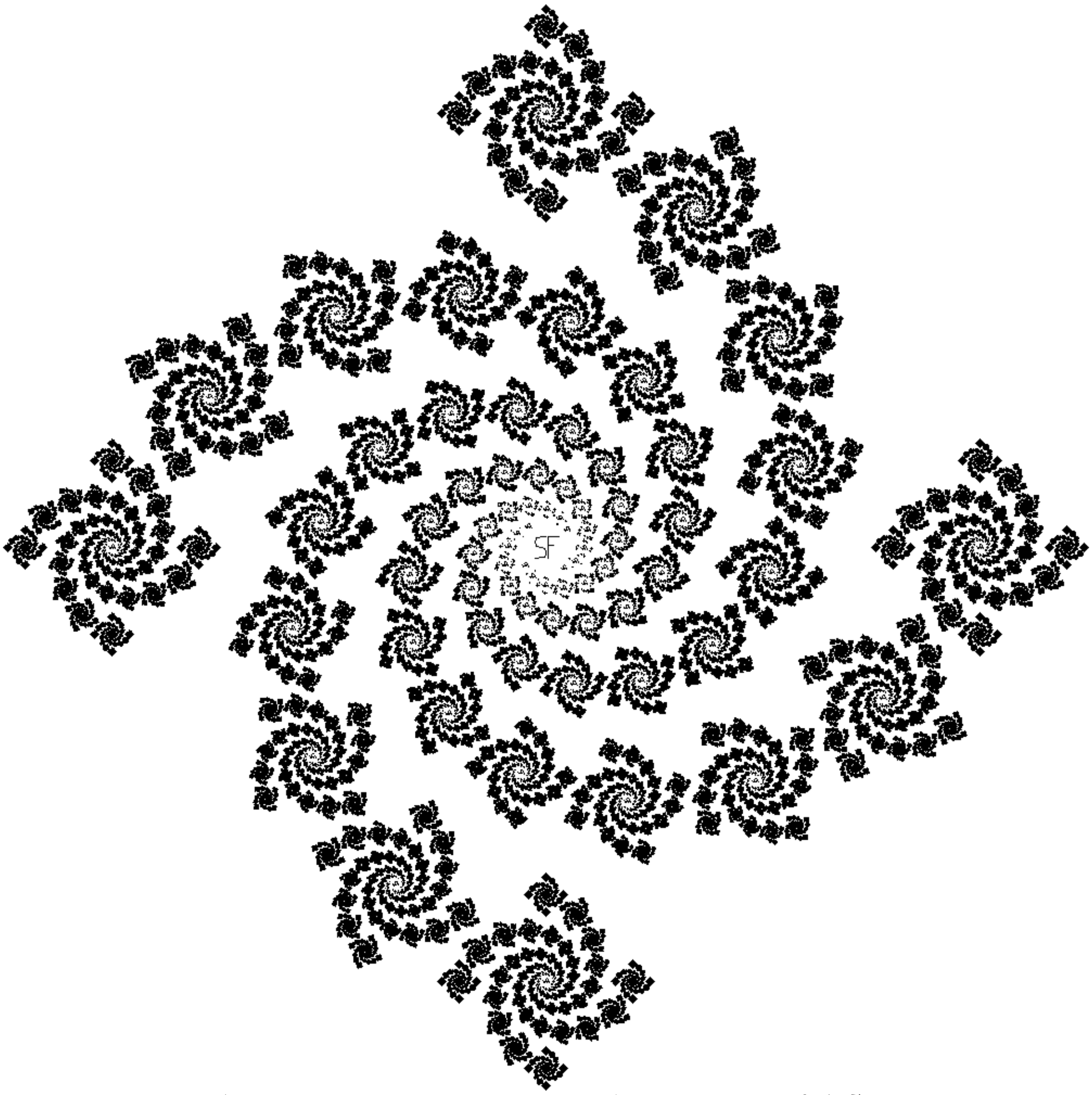
κάτι, αλλά ότι στην πραγματικότητα δεν τον εμπόδιζε τίποτα να μπαίνει όταν θέλει στο δωμάτιο, έκανε την Ντόρα να κλειδώνεται. Στη συνέχεια, η απώλεια του κλειδιού της πόρτας (η Ντόρα ισχυρίζεται ότι το είχε πάρει ο κύριος Κ…), έκανε την Ντόρα να πραγματοποιεί όλες τις ενέργειές της με ταχύτητα (στο όνειρο: ντύνομαι γρήγορα).*

**η Ντόρα διέμενε στο σπίτι των Κ…, οι οποίοι διατηρούσαν πολύ καλές σχέσεις με τους γονείς της*

Κοσμηματοθήκη: *Πολύ καιρό πριν το όνειρο, η μητέρα της Ντόρας είχε εκφράσει την επιθυμία για ένα συγκεκριμένο κόσμημα: σκουλαρίκια από μαργαριτάρια σε σχήμα σταγόνας. Ο σύζυγός της, αντί αυτών, της είχε αγοράσει ένα βραχιόλι. Εκείνη τότε θυμωμένη του είπε ότι αφού είχε ξοδέψει τα χρήματα για κάτι που δεν της άρεσε, θα μπορούσε να το προσφέρει σε κάποια άλλη (η Ντόρα ομολόγησε ότι είχε κάνει τη σκέψη ότι ευχαρίστως θα το δεχόταν εκείνη).*

Fractal αναπαράσταση και ερμηνεία (προσέγγιση) του 1ου ονείρου

Σπείρα 1 (σπείρα του 1ου ονείρου της Ντόρας)



Εικ.2.1 Σπείρα 1 (σπείρα του 1ου ονείρου της Ντόρας), όπου το F συμβολίζει τον πατέρα και το S τη κοσμηματοθήκη (F, S αρχικά γράμματα των λέξεων πατέρας και κοσμηματοθήκη στα γερμανικά).

Ερμηνεία

Ο Φρόιντ υποστηρίζει ότι τα αίτια της υστερίας είναι πάντα και σε κάθε περίπτωση ψυχοσεξουαλικά[14]. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε και εδώ σαν αρχικό σύνολο την ερωτική επιθυμία. Για να σχηματιστεί ένα όνειρο, το ψυχικό υλικό:

---

[14] Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μιας υστερίας (σελ. 14), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.

α) συμπιέζεται ώστε να συμπυκνωθεί σημαντικά

β) θρυμματίζεται εσωτερικά και υφίσταται μεταθέσεις

γ) δέχεται την επίδραση των στοιχείων, που είναι περισσότερο κατάλληλα για να σχηματιστεί το περιστατικό (δραματοποίηση)

δ) απωθείται (ανικανότητα συνειδητοποίησης ορισμένων ονειρικών σκέψεων) και

ε) διαστρεβλώνεται (το όνειρο παραποιείται ώστε να μην προδίδονται οι ανεπίτρεπτες ονειρικές σκέψεις)[15]. Οι διεργασίες αυτές, μπορούν να θεωρηθούν οι συναρτήσεις συστολής με τη σύνθεση των οποίων, προκύπτει η παραπάνω σπείρα περιγραφής του πρώτου ονείρου της Ντόρας. Αναλύοντας τα σύμβολα που συνθέτουν αυτή τη σπείρα, ξετυλίγουμε τον ψυχικό μίτο της Ντόρας, με σκοπό να φτάσουμε στα αίτια της υστερίας της που βρίσκονται στο κέντρο του λαβύρινθου.

Κυρίαρχο πρόσωπο στο όνειρο της Ντόρας είναι ο πατέρας της. Πράγματι, ο πατέρας είναι καθοριστικό πρόσωπο για τη Ντόρα, τόσο λόγω της εξυπνάδας και του χαρακτήρα του, όσο και λόγω των συνθηκών της ζωής του, που αποτελούν τον σκελετό του ιστορικού της παιδικής ηλικίας και της ασθένειας της. Ο πατέρας της Ντόρας, ήταν εξαιρετικά δραστήριος και ταλαντούχος μεγαλοβιομήχανος, με μεγάλη οικονομική άνεση. Η κόρη ήταν προσκολλημένη σε αυτόν με ιδιαίτερη τρυφερότητα, λόγω των πολλών ασθενειών από τις οποίες έπασχε, αφότου εκείνη έγινε έξι χρονών. Η Ντόρα χωρίς να το συνειδητοποιεί, ασχολούταν καταναγκαστικά με τη σχέση του πατέρα της με τη γυναίκα του φιλικού ζευγαριού (κυρία Κ…). Η συμπεριφορά της ξεπερνούσε κατά πολύ το ενδιαφέρον της κόρης. Αισθανόταν και ενεργούσε περισσότερο σαν ζηλότυπη γυναίκα, όπως θα ήταν κατανοητό να ενεργούσε η μητέρα της. Η εμφάνιση της κυρίας Κ…, δεν εκδίωξε τη μητέρα, αλλά τη Ντόρα από τις θέσεις που κατείχε στη ζωή του πατέρα της.

Ένα ακόμα στοιχείο – σύμβολο που κυριαρχεί στο όνειρο, είναι η κοσμηματοθήκη. Σχετικό με την εμφάνιση του συγκεκριμένου αντικειμένου στο όνειρο, είναι επίσης το γεγονός ότι ο κύριος Κ… είχε δωρίσει στη Ντόρα λίγο καιρό πριν μία πανάκριβη κοσμηματοθήκη.

Επίσης, η κοσμηματοθήκη κατά τον Φρόιντ χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει τα γυναικεία γεννητικά όργανα.

Ο Φρόιντ υποστηρίζει ότι η σκέψη που συμπυκνώνεται στο όνειρο είναι: "Αυτός ο άνδρας με κυνηγά. Θέλει να μπει στο δωμάτιο μου, η «κοσμηματοθήκη» μου κινδυνεύει, και αν συμβεί κάτι, το λάθος θα είναι του μπαμπά". Γι' αυτό το λόγο, στο όνειρο, κατά τον Φρόιντ, η Ντόρα έχει διαλέξει μία κατάσταση που εκφράζει το αντίθετο, έναν κίνδυνο από τον οποίο τη σώζει ο πατέρας της. Όλα σε αυτή την περιοχή του ονείρου, μεταβάλλονται στο αντίθετό τους. Η Ντόρα θα δεχόταν ευχαρίστως αυτό που η μητέρα της, η παλιά της αντίζηλος ως προς τον πατέρα της, είχε αρνηθεί. Αυτό σημαίνει ότι ήταν πρόθυμη να δώσει στον πατέρα της εκείνο που του αρνιότανε η μητέρα της…

Επίσης, στην κοσμηματοθήκη που της είχε χαρίσει ο κύριος Κ… υπάρχει η αρχή μια παράλληλης σειράς ιδεών, στην οποία ο κύριος Κ… θα πρέπει να πάρει τη θέση του πατέρα της, όπως στη θέση του ανδρός που στεκότανε όρθιος στο κρεβάτι της. Ο κύριος Κ… της είχε δώσει την κοσμηματοθήκη, οπότε έπρεπε και εκείνη να του ανταποδώσει το δώρο. Στη σειρά αυτή των ιδεών η μητέρα της πρέπει να αντικατασταθεί από την κυρία Κ…. Η Ντόρα λοιπόν

[15] Sigmund Freud, Όνειρο και τηλεπάθεια (σελ. 36), μετφρ. Τσαμπουράκης Γ., Επίκουρος, Αθήνα 1983.

ήταν πρόθυμη να δώσει στον κύριο Κ… ότι του αρνιόταν η γυναίκα του. Αυτή είναι η ιδέα που έχει γίνει με τόση προσπάθεια απωθημένη και η οποία καθιστά αναγκαία την αντιστροφή όλων των στοιχείων στο αντίθετο τους.

Μία ακόμη αντίθεση που φαίνεται ότι εξυπηρετεί τους σκοπούς του ονείρου της Ντόρας, είναι αυτή της φωτιάς και του νερού. Η μαμά της, θέλει να σώσει την κοσμηματοθήκη της ώστε να μην καεί, αλλά στις κρυφές ιδέες του ονείρου, ο σκοπός είναι να μη βραχεί. Η φωτιά επίσης, δε χρησιμεύει μόνο ως το αντίθετο του νερού, αλλά και σαν την άμεση αναπαράσταση του έρωτα (ερωτευμένοι - φλογισμένοι…). Από τη φωτιά λοιπόν ξεκινάει ένας δρόμος που οδηγεί μέσω της συμβολικής σημασίας, στις ερωτικές σκέψεις.

Μέσω του αντίθετου της φωτιάς, του νερού, ξεκινάει ένας άλλος δρόμος που οδηγεί σε ένα» ατύχημα» που συμβαίνει συχνά στην παιδική ηλικία το βράδυ, και δεν είναι άλλο από το γεγονός ότι τα παιδιά βρέχουν το κρεβάτι τους. Οι γονείς για να προφυλάξουν τα παιδιά τους από αυτό το συμβάν τα ξυπνούν, όπως ακριβώς και ο πατέρας της Ντόρας στο όνειρό της.*

**η Ντόρα, υπέφερε από ακράτεια ούρων, πολύ περισσότερο καιρό από όσο συνηθίζεται στα παιδιά. Το ίδιο και ο αδερφός της (ο πατέρας στο όνειρο λέει: "Δε θέλω να χαθούν τα δύο μου παιδιά").*

Η κεντρική ιδέα του ονείρου λοιπόν θα μπορούσε να είναι: «Ο πειρασμός είναι πολύ μεγάλος. Αγαπημένε μπαμπά, προστάτευσε με ακόμη, όπως τον καιρό της παιδικής ηλικίας, για να μη «βρέξω» το κρεβάτι μου».

Έτσι, μελετώντας κάθε ένα από τα στοιχεία του ονείρου, αφού αναγνωρίσουμε σε αυτά μη αφομοιωμένα κλάσματα από οπτικές εικόνες και ομιλίες, κομμάτια από αναλλοίωτες σκέψεις, αλλά και αναμνήσεις από βιώματα της πρώιμης παιδικής ηλικίας, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι ασυνείδητες σκέψεις που ενυπάρχουν σε αυτά, αποκαλύπτουν πληροφορίες για τη συνολική δομή και λειτουργία του ασυνείδητου.

Στο πρώτο της όνειρο η Ντόρα εκφράζει με έντονο τρόπο τα συναισθήματά της προς τον πατέρα της καθώς και τους φόβους της και τις ανησυχίες της. Τούτο απεικονίζεται με την έντονη και πυκνή εικόνα της επανάληψης αυτών των συμβόλων που καθορίσαμε για να εκφράσουμε την ψυχολογική της κατάσταση. Η εικόνα είναι έντονα φορτισμένη από τα σύμβολα που επαναλαμβάνονται με fractal δομή και μας αποκαλύπτουν τον έντονο ψυχισμό της όπου τα αδιέξοδα αισθήματά της την "πνίγουν", την "στραγγαλίζουν" σαν το πύθωνα του Λαοκόοντα.

2.2 2ο Όνειρο – Fractal αναπαράσταση και προσέγγιση αυτού

Λίγες εβδομάδες μετά το πρώτο όνειρο η Ντόρα είδε το δεύτερο όνειρο, μετά την ερμηνεία του οποίου διακόπηκε η ανάλυση. Αυτό το όνειρο δεν έχει την απόλυτη διαφάνεια του πρώτου, ωστόσο απέφερε την επιθυμητή επιβεβαίωση μίας υπόθεσης για την ψυχική κατάσταση της ασθενούς, κάλυψε ένα κενό στη μνήμη και επέτρεψε στον Φρόιντ να διεισδύσει βαθιά στην προέλευση ενός άλλου από τα συμπτώματά της.[16]

[16] *Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ.93), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.*

Περιγραφή

Η Ντόρα διηγείται: *"Περπατώ σε μία πόλη που δε γνωρίζω, βλέπω δρόμους και πλατείες που μου είναι άγνωστες. Κατόπιν φτάνω σε ένα σπίτι όπου μένω, πηγαίνω στο δωμάτιό μου και βρίσκω εκεί ένα γράμμα της μαμάς μου. Μου γράφει: Επειδή λείπω από το σπίτι χωρίς να το γνωρίζουν οι γονείς, δεν θέλησε να μου γράψει ότι ο μπαμπάς αρρώστησε. Τώρα πέθανε και, αν θέλεις, μπορείς να έρθεις. Μετά πηγαίνω προς στο σταθμό και ρωτώ κάπου 100 φορές: Πού είναι ο σταθμός; Διαρκώς παίρνω την απάντηση: Πέντε λεπτά. Κατόπιν βλέπω μπροστά μου ένα πυκνό δάσος και μπαίνω μέσα. Ρωτώ έναν άντρα που συναντώ εκεί, και εκείνος μου λέει: Δυόμιση ώρες. Προσφέρεται να με συνοδεύσει, εγώ όμως αρνούμαι και προχωρώ μόνη μου. Βλέπω μπροστά μου το σταθμό και δεν μπορώ να τον φτάσω. Με κυριεύει το συνηθισμένο αίσθημα φόβου, που έχουμε στα όνειρα, όταν δεν μπορούμε να προχωρήσουμε. Κατόπιν βρίσκομαι στο σπίτι, στο μεταξύ όμως θα πρέπει να ταξίδεψα, μόνο που δε θυμάμαι τίποτα. – Μπαίνω στο θυρωρείο και ρωτώ τον θυρωρό για το διαμέρισμά μας. Η υπηρέτρια μου ανοίγει και απαντά: Η μαμά και οι άλλοι είναι κιόλας στο νεκροταφείο."*[17]

«Διασαφήνιση»

Η Ντόρα περιπλανιέται σε μία ξένη πόλη, βλέπει δρόμους και πλατείες: *Το περιδιάβασμα σε μία ξένη πόλη ήταν υπερ-προσδιορισμένο και αναγόταν σε μία από τις αφορμές της ημέρας*[18]*. Η Ντόρα είχε ανασύρει ένα φωτογραφικό άλμπουμ που της είχαν χαρίσει, προκειμένου να δείξει κάποιες εικόνες σε συγγενείς που φιλοξενούσαν. Η άγνωστη πόλη του ονείρου είχε αναπαρασταθεί με εικόνες από αυτό, αφού κατά ομολογία της Ντόρας (μετά από μία παρατήρηση του Φρόιντ), ένα μνημείο του ονείρου το είχε δει σε μία από τις φωτογραφίες. Ανάμεσα στους επισκέπτες – συγγενείς, ήταν και ένας εξάδελφος της Ντόρας, ο οποίος της θύμισε την παραμονή της στη Δρέσδη.* ***<u>Τότε περιφερόταν στην πόλη σαν ξένη</u>*** *<u>και δεν παρέλειψε βέβαια να επισκεφθεί την περίφημη πινακοθήκη. Ένας άλλος εξάδελφος που ήταν μαζί τους και γνώριζε τη Δρέσδη, ήθελε να την ξεναγήσει.</u>* ***<u>Εκείνη όμως τον απέκρουσε και πήγε μόνη.</u>*** *<u>Στάθηκε μπροστά σε πίνακες που της άρεσαν και συγκεκριμένα μπροστά στη Σιξτίνα, στάθηκε δύο ώρες σε ονειροπόλο θαυμασμό.</u>*[19]

Δεν υπάρχει αμφιβολία πως αυτές οι σκέψεις ανήκαν στο υλικό που δημιούργησε το όνειρο. Περιέχουν συστατικά που τα βρίσκουμε αναλλοίωτα στο περιεχόμενο του ονείρου (τον απέκρουσε και πήγε μόνη – δύο ώρες). Επίσης, οι φωτογραφίες αντιστοιχούν σε ένα κομβικό σημείο του ιστού των ονειρικών σκέψεων (οι φωτογραφίες στο άλμπουμ – οι πίνακες στη Δρέσδη).[20]

Πηγαίνει στο δωμάτιό της και βρίσκει ένα γράμμα της μητέρας της: *Η Ντόρα είχε αφήσει μία αποχαιρετιστήρια επιστολή στους γονείς της, με σκοπό να τρομοκρατήσει ή να εκδικηθεί τον*

---

[17]*Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ.93), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.*
[18]*Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ.95), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.*
[19]*Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ.95), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.*
[20]*Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ.95), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.*

πατέρα. Ανεξάρτητα όμως από το κίνητρο, η πράξη αυτή έχει πραγματοποιηθεί στον φυσικό κόσμο, πριν εκτελεστεί στον ονειρικό.

Το θέμα της επιστολής ήταν ο θάνατος του πατέρα: *Στη συγκέντρωση συγγενών της προηγούμενης μέρας, κάποιος έκανε πρόποση για τον πατέρα και εξέφρασε την ευχή να ζήσει πολλά χρόνια με άριστη υγεία κτλ.. Η Ντόρα παρατήρησε ότι όσο γινόταν η πρόποση, το πρόσωπο του πατέρα έπαιρνε διάφορες εκφράσεις. Εκείνη τις απέδωσε στις σκέψεις του πατέρα της σχετικά με την ήδη κλονισμένη υγεία του και στην απορία του – ανησυχία του για το πόσος χρόνος ζωής του έχει απομείνει. Επομένως, στο όνειρο αποτυπώνονται οι σκέψεις που έκανε η Ντόρα την προηγούμενη μέρα για τον θάνατο του πατέρα της.*

Ρωτά κάπου 100 φορές …: *Το προηγούμενο βράδυ, μετά τη δεξίωση, ο πατέρας της Ντόρας την παρακάλεσε να του φέρει ένα κονιάκ, επειδή δεν μπορούσε να κοιμηθεί, αν δεν έπινε πριν ένα κονιάκ. Η Ντόρα ζήτησε από τη μητέρα της το κλειδί από μία αποθήκη τροφίμων, εκείνη όμως αφοσιωμένη σε μία συζήτηση, δεν της απάντησε, μέχρι που η Ντόρα χάνοντας την υπομονή της ξεφώνισε: Σε ρώτησα ήδη* ***εκατό φορές*** *που είναι το κλειδί. Στην πραγματικότητα ωστόσο είχε επαναλάβει την ερώτηση πέντε φορές. Στο όνειρο ο αριθμός πέντε αφορά έναν χρονικό προσδιορισμό: πέντε λεπτά. Στο βιβλίο του Φρόιντ για την ερμηνεία των ονείρων, αναφέρεται και υποστηρίζεται με παραδείγματα ότι οι αριθμοί στο όνειρο έχουν αποσπαστεί από τον συσχετισμό τους και έχουν υπεισέλθει σε άλλον.*[21]

Εικ.2.2 Σπείρα αναπαράστασης 2ου ονείρου της Ντόρας, όπου τα σύμβολα Τ, F συμβολίζουν το θάνατο του πατέρα.

Στο δεύτερο όνειρο, πραγματοποιείται μία απέραντη σειρά μετατοπίσεων[22]*. Η Ντόρα καταδιώκει όλα τα άτομα και κυρίως τον πατέρα*, με σχεδόν δόλια εκδικητικότητα, για να*

---

[21] *Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ.136, σχόλιο 63), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.*

[22] *Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ. 138, σχόλιο 74), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.*

καλύψει το αντίθετο ρεύμα, τη γενναιοψυχία, με την οποία συγχωρεί την προδοσία της αγαπημένης της φίλης και αποκρύπτει από όλους, πως εκείνη ήταν που της έμαθε όλα όσα αργότερα χρησιμοποιήθηκαν εναντίον της. Ο Φρόιντ υποστηρίζει ότι τα γυναικόφιλα αισθήματα για την κυρία Κ., ήταν το ισχυρότερο από τα ασυνείδητα ρεύματα της ψυχικής της ζωής[23]. Κατά δική του θεώρηση εξάλλου, σε όλες τις υστερικές γυναίκες και στα κορίτσια, που συνέβη να καταπιεστεί δραστικά η στραμμένη προς τον άντρα λίμπιντο, θα βρει κανείς κατά κανόνα μία ενισχυμένη από την αναπλήρωση και εν μέρει συνειδητοποιημένη κλίση προς τη γυναίκα.[24]

Η εικόνα του δεύτερου ονείρου της Ντόρας απεικονίζει πιο χαλαρά συναισθήματα και καθρεφτίζει την πιο ώριμη ψυχική της κατάσταση αφού έχει συνειδητοποιήσει από τις συζητήσεις – αναλύσεις με τον Φρόιντ το πρόβλημα. Ο πατέρας της δεν υπάρχει, το κεντρικό πρόσωπο που γύρω του αναπτύσσονταν συναισθήματα και συμπεριφορές δεν υπάρχει πια και απελευθερωμένη μπορεί να πράξει ελεύθερα, να κινηθεί αργά όπως εκείνη θέλει για τον εαυτό της. Το "κεντρί" πού την "τσιγκλούσε" έφυγε οπότε υπάρχει μια ανακούφιση.

Τα σύμβολα στην σπείρα εξελίσσονται σταθερά αλλά πιο "ανοικτά" αφήνοντας χώρο που συμβολίζει την ικανότητα της να έχει τον έλεγχο του εαυτού της. Έτσι διέκοψε την θεραπεία της μια και κατάλαβε ότι μόνη της θα μπορούσε να αντιμετωπίσει τα γεγονότα της ζωής. Ο ίδιος ο Φρόιντ εξάλλου, υποστηρίζει ότι ενώ το πρώτο όνειρο δήλωνε τη στροφή από τον αγαπημένο άντρα στον πατέρα, το δεύτερο όνειρο προανήγγειλε πως θα απομακρυνθεί από τον πατέρα και θα ξανακερδίσει τη ζωή.[25]

**Φαντασίωση της εκδίκησης κατά του πατέρα: Η Ντόρα έφυγε από το σπίτι με δική της απόφαση, ο πατέρας αρρώστησε και πέθανε… Εκείνη γυρίζει τώρα σπίτι, οι άλλοι βρίσκονται ήδη στο νεκροταφείο. Εκείνη ανεβαίνει, καθόλου λυπημένη, στο δωμάτιό της και ανοίγει με την ησυχία της το λεξικό και διαβάζει.*

Βιβλιογραφία:

[1] ΦΡΟΪΝΤ Σ., Ντόρα, η ανάλυση μιας υστερίας, μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα,1991.

[2] ΦΡΟΪΝΤ Σ., Ψυχοπαθολογία της καθημερινής ζωής, μετφρ. Αναγνώστου Λ., Επίκουρος, Αθήνα 1992.

[3] ΦΡΟΪΝΤ Σ., Όνειρο και τηλεπάθεια, μετφρ. Τσαμπαράκης Γ., Επίκουρος, Αθήνα 1983.

[4] ΒΑΜΒΑΛΗΣ Γ., Ξαναδιαβάζοντας τον Φρόιντ, Μία επανάληψη σε τριάντα απλά μαθήματα, Επίκουρος, Αθήνα 2000.

[5] GLENN J., Freud, Dora and the maid: a study of countertansference. J. Am. Psychoanal Assoc 1986:4 (3) 591-606.

---

[23] Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ. 140, σχόλιο 80), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.

[24] Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ. 62), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.

[25] Sigmund Freud, Ντόρα, η ανάλυση μίας υστερίας (σελ.122), μετφρ. Λιάπτση Κ., Επίκουρος, Αθήνα 1991.

[6] KING V., Anna, Irma and Dora - the key to the mothers in the creation of psychoanalysis Psyche (Stuttg) 49 (9-10): 838-66.
[7] KROHN A., KROHN J., The nature of the Oedipus complex in the Dora. Case. J. Am. Psychoanal Assoc 1982 30 (3) 555-78.
[8] MAKARI G. J., Dora's hysteria and the maturation of Sigmund Freud's transference theory: a new historical interpretation. J Am Psychoanal Assoc 1997 45 (4) 1061-96.
[9] KALMANTI E, MARIS T. G., Fractal Dimension as an Index of Brain cortical Change Throughout life. In Vivo 21:641-646, 2007.
[10] DOUG D.: Freud's Dora A Victorian Fable.