



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τα Στοχαστικά Μαθηματικά στα Προγράμματα Σπουδών
διαφόρων χωρών

Κασκαντάμης Μιχαήλ

Επιβλέπουσα καθηγήτρια
Δέσποινα Πόταρη

Αθήνα 2012

Αφιερώνεται στη Σοφία και το Χρήστο

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη.....	4
Abstract.....	4
1 Εισαγωγή.....	5
2 Η εξέλιξη της Στατιστικής εκπαίδευσης.....	7
2.1 Μικρή ιστορική αναδρομή.....	7
2.1.1 Η Διερευνητική Ανάλυση Δεδομένων (Exploratory Data Analysis – EDA).....	10
2.2 Η εξέλιξη της έρευνας στη Διδακτική της Στατιστικής.....	14
2.2.1 Συνοπτική περιγραφή της εξέλιξης της έρευνας στη Διδακτική της Στατιστικής.....	14
2.2.2 Υπάρχουσα κατάσταση σχετικά με τους εκπαιδευτικούς..	19
2.3 Η σχέση της Στατιστικής και των Μαθηματικών στην εκπαίδευση	21
3 Προγράμματα Σπουδών.....	24
4 Στατιστικός γραμματισμός, συλλογιστική και σκέψη.....	25
4.1 Στατιστικός γραμματισμός.....	26
4.2 Στατιστική σκέψη.....	31
4.2.1 Το μοντέλο των Wild και Pfannkuch.....	33
4.2.2 Το μοντέλο των Jones, Thornton, Langrall, Mooney, Perry και Putt	41

4.3	Στατιστική συλλογιστική	43
5	Η έρευνα αναφορικά με τα βασικά συστατικά της Στατιστικής σκέψης	46
5.1	Έρευνα σχετικά με την κατανόηση των γραφημάτων.....	46
5.2	Μεταβλητότητα – μεταβολή (variability – variation)	48
6	Μεθοδολογία Ανάλυσης των Προγραμμάτων Σπουδών.....	50
	Πηγές που χρησιμοποιήθηκαν:.....	50
7	Αποτελέσματα	52
7.1	Γενικά χαρακτηριστικά των Προγραμμάτων Σπουδών στις τρεις χώρες	52
	ΗΠΑ	52
	Καναδάς (Οντάριο).....	59
	Νέα Ζηλανδία	62
7.2	Στατιστικός γραμματισμός.....	68
	Ο Στατιστικός γραμματισμός στο Πρόγραμμα Σπουδών των ΗΠΑ	68
	Ο Στατιστικός γραμματισμός στο Πρόγραμμα Σπουδών του Καναδά	73
	Ο Στατιστικός γραμματισμός στο Πρόγραμμα Σπουδών της Νέας Ζηλανδίας	75
7.3	Στατιστική σκέψη.....	78
	Ο κύκλος της επίλυσης στατιστικού προβλήματος.....	78

Ο ρόλος της μεταβλητότητας.....	79
8 Συμπεράσματα	81
Βιβλιογραφία	82

Περίληψη

Η σημασία της ανάπτυξης στατιστικού γραμματισμού και της στατιστικής σκέψης έχει αποτελέσει στόχο στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών σε όλο τον κόσμο. Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να μελετήσει τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται η στατιστική σκέψη και ο στατιστικός γραμματισμός σε κάποια Προγράμματα Σπουδών Αγγλοσαξονικών χωρών όπου τα Στοχαστικά Μαθηματικά, δηλαδή η Στατιστική και οι Πιθανότητες, έχουν εισαχθεί πάνω από δύο δεκαετίες στην υποχρεωτική εκπαίδευση.

Λέξεις κλειδιά: Στοχαστικά μαθηματικά, στατιστική σκέψη, στατιστικός γραμματισμός, Πρόγραμμα Σπουδών

Abstract

The importance of developing statistical literacy and statistical thinking has been a goal in contemporary curricula worldwide. This study attempts to study how they appear statistical thinking and statistical literacy in some curricula of Anglo-Saxon countries where stochastics, i.e. Statistics and Probability, introduced more than two decades of compulsory schooling.

Key words: Stochastics, statistical thinking, statistical literacy, curriculum

1 Εισαγωγή

Ο κόσμος στον οποίο ζούμε έχει θεωρηθεί σαν ένα «παγκόσμιο χωριό», καθώς είναι στενά συνδεδεμένος με τις μοντέρνες επικοινωνίες και είναι αλληλοεξαρτημένος οικονομικά, κοινωνικά, περιβαλλοντολογικά και πολιτικά. Ένα μεγάλο μέρος της πληροφορίας που υπάρχει είναι ποσοτικό και ο σύγχρονος πολίτης χρειάζεται νέες ικανότητες. Στην καθημερινή τους ζωή οι άνθρωποι έρχονται συνέχεια σε επαφή με πληροφορίες ποσοτικής φύσης καθώς και με ερμηνείες και συμπεράσματα που προέρχονται από τέτοιου είδους πληροφορίες και τα οποία μερικές φορές είναι αντιφατικά μεταξύ τους.

Η Στατιστική σχετίζεται με τα δεδομένα, δηλαδή πληροφορίες που παρουσιάζονται αριθμητικά, ασχολείται με πολύπλοκες καταστάσεις που περιλαμβάνουν αβεβαιότητα και προσφέρει την γνώση και την βάση για την λήψη αποφάσεων κάτω από τέτοιες συνθήκες.

Ο Hacking (1990), όπως αναφέρεται από την Batanero (2005), υποστηρίζει ότι: *«το πιο αποφασιστικό εννοιολογικό γεγονός του εικοστού αιώνα ήταν η ανακάλυψη ότι ο κόσμος δεν είναι ντετερμινιστικός. Γι' αυτό δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι σήμερα η Στατιστική διδάσκεται ευρέως στα διάφορα επίπεδα εκπαίδευσης, λόγω της χρησιμότητάς της στην καθημερινή ζωή, τον αποφασιστικό ρόλο της σε άλλους επιστημονικούς κλάδους, καθώς και τη σημασία της στην ανάπτυξη της κριτικής συλλογιστικής.»*

Οι χρήσεις καθώς και οι επιπτώσεις της Στατιστικής στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων είναι πολλές και σημαντικές είτε σε ατομικό είτε σε κοινωνικό επίπεδο.

Για παράδειγμα στα μέσα ενημέρωσης εμφανίζονται στατιστικές αναφορές γύρω από έρευνες για ένα ευρύ φάσμα θεμάτων όπως η πολιτική, η οικονομία, η υγεία, το περιβάλλον, τα αθλήματα, οι διαφημίσεις, οι επιστήμες ή δημοσκοπήσεις σε σχέση με την όποια επικαιρότητα. Επίσης κάποιες από τις αποφάσεις που παίρνουν οι πολιτικοί βασίζονται (ή θα έπρεπε να βασίζο-

νται σε στατιστικές μελέτες), όπως για παράδειγμα αποφάσεις που θα πρέπει να χτιστεί ένα νέο σχολείο ή ένας νέος δρόμος, πολιτικές αποφάσεις σχετικές με την περίθαλψη και την εργασία, την οικονομική ανάπτυξη ή την κατανομή οικονομικών κονδυλίων. Ως άτομα οι πολίτες σήμερα έχουν μεγαλύτερη πρόσβαση σε δεδομένα από διάφορες πηγές και σε πολύ μεγάλη ποικιλία θεμάτων και κατά μεγάλο μέρος λόγω του Παγκόσμιου Ιστού και του Διαδικτύου.

Οι Konold & Higgins (2003) υποστηρίζουν *«Χωρίς κάποια κατανόηση πώς κάποια δείγματα έχουν συλλεχτεί και πώς τα δεδομένα έχουν αναλυθεί και ανακοινωθεί, δεν μπορεί κάποιος να συμμετάσχει αποτελεσματικά στις περισσότερες από τις τωρινές πολιτικές συζητήσεις σχετικά με το περιβάλλον, την δημόσια υγεία, την ποιότητα της εκπαίδευσης και τα θέματα της ισότητας. Ειδικά όσοι παραδοσιακά είναι αφημένοι έξω από τις πολιτικές διαδικασίες, ίσως η πιο σημαντική δεξιότητα που πρέπει να αποκτήσουν στην μάχη της ισότητας είναι ο στατιστικός γραμματισμός»*.

Η σημασία της ανάπτυξης στατιστικού γραμματισμού και της στατιστικής σκέψης έχει αποτελέσει στόχο στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών σε όλο τον κόσμο.

Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να μελετήσει τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται η στατιστική σκέψη και ο στατιστικός γραμματισμός σε κάποια Προγράμματα Σπουδών Αγγλοσαξονικών χωρών όπου τα Στοχαστικά Μαθηματικά, δηλαδή η Στατιστική και οι Πιθανότητες, έχουν εισαχθεί πάνω από δύο δεκαετίες στην υποχρεωτική εκπαίδευση.

2 Η εξέλιξη της Στατιστικής εκπαίδευσης

2.1 Μικρή ιστορική αναδρομή

Γύρω στο 1980 υπήρξαν σε διάφορες χώρες μεταρρυθμιστικές τάσεις ή φωνές σχετικά με την εκπαίδευση γενικά και την μαθηματική εκπαίδευση ειδικότερα. με κύρια εστίαση στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος, όπως για παράδειγμα στις ΗΠΑ με το *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s* (NCTM, 1980) ή στην Μεγάλη Βρετανία με την έκθεση Cockcroft (1982), σχετικά με την αξιολόγηση της Μαθηματικής εκπαίδευσης στην Αγγλία και την Ουαλία και τις συστάσεις για τα Μαθηματικά που απαιτούνται για την εκπαίδευση μετά το σχολείο, την ανώτερη εκπαίδευση, την απασχόληση και την ενήλικη ζωή.

Στις ΗΠΑ στο *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s* υπήρχαν συστάσεις οι οποίες υπογράμμιζαν την σημασία της διδασκαλίας της Στατιστικής ως μέρους του προγράμματος των Μαθηματικών αναφέροντας ότι: «... για την οργάνωση του Μαθηματικού Προγράμματος Σπουδών γύρω από την επίλυση προβλήματος ... οι μαθητές πρέπει να διδαχτούν τις μεθόδους της συγκέντρωσης , οργάνωσης και ερμηνείας πληροφοριών και της εξαγωγής και του ελέγχου συμπερασμάτων από τα δεδομένα [καθώς] και της επικοινωνίας των αποτελεσμάτων.» (NCTM, 1980, σ. 8). Τα προβλήματα που θα επίλυαν οι μαθητές θα προέρχονταν από καθημερινές καταστάσεις, με δεδομένα από τον πραγματικό κόσμο, από πειράματα, από προβλήματα των κοινωνικών επιστημών, της οικονομίας και της τεχνολογίας.

Στη Μεγάλη Βρετανία η έκθεση Cockcroft περιελάμβανε την Στατιστική και τις Πιθανότητες στις σχετικές συστάσεις για τα σχολικά μαθηματικά και οι παράγραφοι 774-781 αναφέρονταν αποκλειστικά στην διδασκαλία των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής, αν και υπήρχαν και σε άλλα σημεία του κειμένου

διάφορες αναφορές (Holmes, 2003). Μεταξύ των άλλων η έκθεση Cockcroft (<http://www.educationengland.org.uk/documents/cockcroft/>) ανέφερε:

§774 [η Στατιστική] δεν είναι μόνον ένα σύνολο από τεχνικές, είναι μια στάση του νου στην προσέγγιση των δεδομένων. Συγκεκριμένα αναγνωρίζει το γεγονός της αβεβαιότητας και της μεταβλητότητας στην συλλογή δεδομένων. Επιτρέπει στους ανθρώπους να παίρνουν αποφάσεις υπό το φως της αβεβαιότητας.

§775 Η Στατιστική είναι ουσιαστικά ένα πρακτικό μάθημα και η μελέτη της θα πρέπει να βασίζεται στην συλλογή δεδομένων και όποτε είναι δυνατόν από τους ίδιους τους μαθητές. Θα πρέπει να δίνεται προσοχή στα είδη των δεδομένων που είναι κατάλληλα για να συλλεχθούν, του λόγους για τους οποίους γίνεται η συλλογή και τα προβλήματα για τα οποία γίνεται, τους νόμιμους τρόπους χειρισμού των δεδομένων και τα είδη των συμπερασμάτων που θα μπορούσαν να προκύψουν. Η εργασία σε μαθήματα όπως η βιολογία, η γεωγραφία και τα οικονομικά μπορούν να συνεισφέρουν στην μάθηση και κατανόηση της Στατιστικής. Όταν η Στατιστική διδάσκεται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, συχνά δίνεται μεγάλη έμφαση στην εφαρμογή στατιστικών τεχνικών, παρά στην συζήτηση των αποτελεσμάτων, στην ταξινόμηση και εξέταση των δεδομένων και στα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν υπό το πρίσμα του πλαισίου με το οποίο σχετίζεται η συλλογή των δεδομένων. Γι αυτό η εργασία [των μαθητών] μπορεί να αποβεί στείρα και προσανατολισμένη σε τεχνικές, ενώ αποτυγχάνει να δείξει την δύναμη και την φύση της Στατιστικής.

Σαν αποτέλεσμα συστάσεων όπως οι προαναφερόμενες, άρχισαν να δημιουργούνται Προγράμματα Σπουδών σε διάφορες χώρες, τα οποία αναγνώριζαν το σημαντικό ρόλο που παίζουν η Στατιστική και οι Πιθανότητες στην εκπαίδευση των μαθητών και ενέτασσαν αυτή την θεματική περιοχή περιεχομένου σε όλες τις τάξεις του σχολείου και για όλους τους μαθητές, δίπλα στις παραδοσιακές θεματικές περιοχές περιεχομένου, όπως οι Αριθμοί και η Άλγεβρα ή η Γεωμετρία και η Μέτρηση (Shaughnessy, Garfield, & Greer,

1996; Holmes, 2003; Jones & Thornton, 2005).

Παραδείγματα τέτοια ήταν:

- Στις ΗΠΑ το *Curriculum and Evaluation Standards for Teaching Mathematics* (NCTM, 1989), όπου η Στατιστική και οι Πιθανότητες εμφανίζονταν υπό τον τίτλο *Ανάλυση Δεδομένων και Πιθανότητες – Data Analysis and Probability*
- Στην Αυστραλία, όπου η Στατιστική και οι Πιθανότητες εμφανίζονταν υπό τον τίτλο *Πιθανότητες και Δεδομένα – Chance and Data* (Australian Education Council, 1991)
- Στη Μεγάλη Βρετανία υπό τον τίτλο *Διαχείριση Δεδομένων – Data Handling* (Department of Education and Science and the Welsh Office [DES], 1991)
- Στη Νέα Ζηλανδία υπό τον τίτλο *Στατιστική – Statistics* (Mathematics in the New Zealand Curriculum [MoE], 1993)
- Στο Οντάριο του Καναδά, υπό τον τίτλο *Διαχείριση Δεδομένων και Πιθανότητες – Data Management and Probabilities* (Ontario, 1997)

2.1.1 Η Διερευνητική Ανάλυση Δεδομένων (Exploratory Data Analysis – EDA)

Όπως αναφέρουν διάφοροι ερευνητές της διδακτικής των Μαθηματικών ή της Στατιστικής (π.χ. Biehler, 1989; Shaughnessy, Garfield, & Greer, 1996; Konold & Higgins, 2003) καθώς και εκπαιδευτές της Στατιστικής (π.χ. Scheaffer, 2001; Rossman & Scheaffer, 2012; Graham, 2006) σημαντικό ρόλο στην σύνδεση της επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος και της διδασκαλίας της Στατιστικής είχε μια νέα προσέγγιση στην ανάλυση δεδομένων που αναπτύχθηκε από τον στατιστικό John Tukey (1977).

Ο Tukey (1977) ενθάρρυνε τους στατιστικούς να παίρνουν τον ρόλο ενός ντετέκτιβ και να αναζητούν ανάμεσα στα δεδομένα ενδιαφέροντα και μη αναμενόμενα αποτελέσματα. Αυτό το περιέγραψε με την Διερευνητική Ανάλυση Δεδομένων (Exploratory Data Analysis - EDA). Οι περισσότερες τεχνικές της EDA είναι γραφικές στην φύση τους, γιατί ο βασικός σκοπός είναι η εξερεύνηση των δεδομένων με ανοικτό τρόπο. Με την χρήση μεθόδων περισσότερο γραφικών, παρά υπολογιστικών, αφήνεται ανοικτό το ενδεχόμενο του εντοπισμού κανονικοτήτων που να παρουσιάζουν ενδιαφέρον ή εντοπισμού διάφορων ανωμαλιών που δεν θα ήταν εμφανείς με τους υπολογισμούς, όπου οι παραδοχές και οι αποφάσεις τείνουν να γίνονται εκ των προτέρων (Konold & Higgins, 2003).

Οι Shaughnessy, Garfield, & Greer (1996) στο κεφάλαιο σχετικά με την Στατιστική, στο πρώτο *International Handbook of Mathematics Education*, αναφέρουν ότι λόγω του κινήματος EDA εισχώρησαν στα Προγράμματα Σπουδών σχολείων και Πανεπιστημίων διαφόρων χωρών, όροι όπως «ανάλυση δεδομένων», «διερευνητική ανάλυση δεδομένων», «οπτικοποίηση δεδομένων» και «διαχείριση δεδομένων».

Αν και οι ρίζες της ανάλυσης δεδομένων, όπως αναφέρουν οι παραπάνω ερευνητές, μπορεί να ανιχνευθούν σε ένα μέρος αυτού που παραδοσιακά θεωρείται η περιγραφική στατιστική, η σημερινή έννοια της ανάλυσης δεδομέ-

νων τονίζει την οργάνωση, την περιγραφή την αναπαράσταση και την ανάλυση των δεδομένων με μια βαριά εξάρτηση στις γραφικές απεικονίσεις όπως τα διαγράμματα, τα γραφήματα κλπ. Η διαχείριση δεδομένων δεν είναι απλώς ένα σώμα συγκεκριμένου στατιστικού περιεχομένου, αλλά είναι μια προσέγγιση για την αντιμετώπιση των δεδομένων, ένα πλαίσιο σκέψης, ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο κάποιος μπορεί να εξερευνήσει τα δεδομένα.

Παιδαγωγικά η ανάλυση δεδομένων είναι μία ευκαιρία για να εμπλακούν οι μαθητές με ανοικτές (open – ended) εξερευνήσεις.

Εννοιολογικά, η ανάλυση δεδομένων αναζητά κανονικότητες, συστάδες δεδομένων, κενά και μεταβολές στα δεδομένα.

Φιλοσοφικά, κάποιοι υποστηρικτές της ανάλυσης δεδομένων συνιστούν την εισαγωγή στην ανάλυση δεδομένων σε ένα περιβάλλον απαλλαγμένο από τις πιθανότητες, ενώ άλλοι συνιστούν τις συνδέσεις ανάμεσα στην μελέτη της ανάλυσης δεδομένων και στις πιθανότητες. Σε αυτή την τελευταία οπτική τα δεδομένα και οι πιθανότητες θεωρούνται κάτω από την ομπρέλα των στοχαστικών μαθηματικών η συστηματική μελέτη της αβεβαιότητας (Shaughnessy, Garfield, & Greer, 1996).

Μέσω της EDA δίνεται μία έμφαση και σε μέτρα θέσης όπως η διάμεσος και όχι μόνον η μέση τιμή καθώς και σε μέτρα διασποράς όπως το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και όχι μόνον η τυπική απόκλιση. Ο Tukey δημιούργησε τρόπους παρουσίασης και οπτικοποίησης των δεδομένων, όπως το φυλλογράφημα ή φυλλόγραμμα - stem and leaf plot (βλέπετε παράδειγμα 1), το θηκόγραμμα - box plot ή box and whiskers plot (βλέπετε παράδειγμα 2) ή η σύνοψη με τους πέντε αριθμούς - five number summary¹ (βλέπετε παράδειγμα 2), που είναι εξαιρετικοί τρόποι για την σύνοψη ενός συνόλου δεδομένων

¹ Οι 5 αριθμοί είναι: Η ελάχιστη τιμή (min) των δεδομένων, η διάμεσος (Q2), η μέγιστη τιμή (max) των δεδομένων, το κάτω τεταρτημόριο (Q1) που είναι η διάμεσος του πρώτου μισού των διατεταγμένων δεδομένων όπως αυτά χωρίζονται από την διάμεσο Q2 και το άνω τεταρτημόριο (Q3) που είναι η διάμεσος του άλλου μισού των διατεταγμένων δεδομένων. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς και ισούται με την διαφορά Q3-Q1.

Χρόνοι σε sec που χρειάστηκαν δύο ομάδες A (11 άτομα ηλικίας μικρότερης ή ίσης των 40 ετών) και B (7 άτομα ηλικίας μεγαλύτερης των 40 ετών) για να πληκτρολογήσουν στο κινητό ένα σύγνεμο κείμενο.

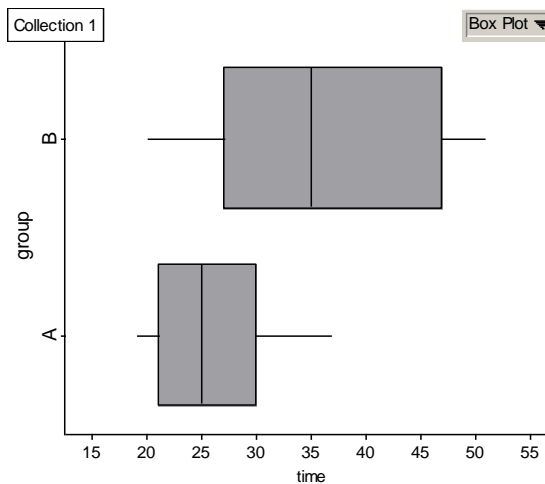
Ομάδα A: 19, 19, 21, 24, 24, 25, 28, 30, 30, 31, 37

Ομάδα B: 20, 27, 29, 35, 36, 47, 51

Σύνοψη με τους 5 αριθμούς για τις δύο ομάδες:

	Min	Q1	Q2 (διάμεσος)	Q3	Max
Ομάδα A	19	21	25	30	37
Ομάδα B	20	27	35	47	51

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος (Q3-Q1): Ομάδα A: 9, Ομάδα B: 20



Παράδειγμα 2: Σύνοψη με τους 5 αριθμούς και τα αντίστοιχα θηκογράμματα για τους χρόνους (σε sec) που χρειάστηκαν δύο διαφορετικές ηλικιακές ομάδες, για την πληκτρολόγηση κειμένου σε κινητό.

2.2 Η εξέλιξη της έρευνας στη Διδακτική της Στατιστικής.

2.2.1 Συνοπτική περιγραφή της εξέλιξης της έρευνας στη Διδακτική της Στατιστικής

Κατά τις δεκαετίες του 1950 και του 1960 έγιναν οι αρχικές έρευνες από τους Piaget & Inhelder και είχαν σαν εστίαση την αναπτυξιακή εξέλιξη και δομή της πιθανοτικής σκέψης και των διαισθήσεων των ανθρώπων. Αν και οι ερευνητές αυτής της περιόδου δεν είχαν κάποιο ενδιαφέρον για την Στατιστική και τις Πιθανότητες, ως μέρος του σχολικού προγράμματος, παρ' όλα αυτά η δουλειά τους ενέπνευσε μέρος της έρευνας που ακολούθησε και που εστίαζε σε θέματα διδασκαλίας και μάθησης όπως για παράδειγμα του Fischbein (1975, αναφέρεται στους Jones & Thornton, 2005) ο οποίος έδειχνε σημαντικό ενδιαφέρον για την φύση των πιθανοτικών εννοιών και διαισθήσεων.

Κατά την δεκαετία του 1970 διάφοροι ερευνητές ψυχολόγοι μελέτησαν τρόπους με τους οποίους οι άνθρωποι κάνουν κρίσεις και αποφασίζουν όταν έρχονται αντιμέτωποι με την αβεβαιότητα. Οι μελέτες αυτές εκδόθηκαν από τους Kahneman, Slovic & Tversky (1982) και εστίαζαν στις «ευρετικές» (heuristics) ή στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι άνθρωποι όταν κάνουν πιθανοτικές κρίσεις. Οι μελέτες αυτές στηρίζονται στην υπόθεση ότι οι άνθρωποι δεν ακολουθούν μαθηματικούς κανόνες, οι οποίοι καθοδηγούν την τυπική επιστημονική συμπερασματολογία όταν παίρνουν αποφάσεις σε καταστάσεις αβεβαιότητας, αλλά χρησιμοποιούν πιο απλές μεθόδους, τις ευρετικές κρίσεων (judgmental heuristics). Οι ευρετικές μειώνουν την πολυπλοκότητα, της αξιολόγησης ή της πρόβλεψης πιθανοτήτων, με πιο απλές διαδικασίες κρίσης και είναι σε γενικές γραμμές χρήσιμες, όμως κάποιες φορές δημιουργούν σημαντικά και συστηματικά λάθη και είναι αρκετά δύσκολο να αλλάξουν (Batanero, 2005).

Παραδείγματα αυτών των «ευρετικών» αναφέρονται παρακάτω:

- *Αντιπροσωπευτικότητα (Representativeness)*: Οι άνθρωποι εκτιμούν την πιθανότητα ενός δείγματος βασιζόμενοι στο πόσο

καλά αντιπροσωπεύει κάποια πτυχή του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται.

Μία εσφαλμένη άποψη που σχετίζεται με το παραπάνω έχει την ονομασία *πίστη στον νόμο των μικρών αριθμών* (*belief in the law of small numbers*) και είναι η πεποίθηση ότι ακόμα και μικρά δείγματα πρέπει να αντικατοπτρίζουν την κατανομή του πληθυσμού από τον οποίο προέρχονται τα δείγματα ή να αντικατοπτρίζουν την διαδικασία από την οποία δημιουργούνται τα τυχαία γεγονότα.

Για παράδειγμα πολλοί άνθρωποι πιστεύουν ότι σε μία οικογένεια με έξι παιδιά η ακολουθία ΑΚΚΑΚΑ είναι περισσότερο πιθανή να εμφανιστεί από την ΑΑΑΑΑΚΑ ή την ΑΑΑΚΚΚ, όπου το Α υποδηλώνει αγόρι και το Κ υποδηλώνει κορίτσι. Στην πρώτη περίπτωση η ακολουθία ΑΚΚΑΚΑ μπορεί να εμφανίζεται περισσότερο αντιπροσωπευτική της 50-50 κατανομής των αγοριών και των κοριτσιών απ' ότι η ακολουθία ΑΑΑΑΑΚΑ. Στην δεύτερη περίπτωση η ακολουθία ΑΑΑΚΚΚ δεν δείχνει να είναι αντιπροσωπευτική της τυχαίας διαδικασίας της σύλληψης των παιδιών.

Ένα άλλο παράδειγμα της εμπιστοσύνης στην ευρετική της αντιπροσωπευτικότητας εμφανίζεται όταν κάποιος αγνοεί το μέγεθος του δείγματος. Οι άνθρωποι τείνουν να πιστεύουν ότι η πιθανότητα να έρθουν τουλάχιστον 2 κεφάλια κατά την ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές είναι ίδια με την πιθανότητα να έρθουν τουλάχιστον 200 κεφάλια κατά την ρίψη ενός νομίσματος 300 φορές.

- *Η πλάνη του παίκτη (Gambler's fallacy)*: Η χρήση της ευρετικής της αντιπροσωπευτικότητας οδηγεί στην εσφαλμένη άποψη ότι το τυχαίο είναι μια διαδικασία αυτοδιορθούμενη. Οι άνθρωποι εσφαλμένα πιστεύουν ότι γεγονότα του παρελθόντος επηρεάζουν μελλοντικά γεγονότα, όταν αντιμετωπίζουν δραστηριότητες που έχουν να κάνουν με το τυχαίο. Για

παράδειγμα όταν παρατηρήσουν μια μεγάλη σειρά από γράμματα κατά τις διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος, οι περισσότεροι άνθρωποι πιστεύουν ότι στην επόμενη ρίψη πρέπει να εμφανιστεί κεφάλι γιατί έτσι η σειρά θα είναι πιο αντιπροσωπευτική παρά αν εμφανιστούν γράμματα.

- *Διαθεσιμότητα (Availability)*: Η δύναμη της συσχέτισης χρησιμοποιείται ως βάση για την εκτίμηση της πιθανότητας ενός γεγονότος. Για παράδειγμα η εκτίμηση της πιθανότητας διαζυγίου μέσω της ανάκλησης περιπτώσεων ανθρώπων που γνωρίζει κάποιος και έχουν πάρει διαζύγιο ή η εκτίμηση της πιθανότητας μιας καρδιακής προσβολής για τους μεσήλικες μέσω της μέτρησης γνωστών μεσήλικων που είχαν καρδιακή προσβολή.
- *Η πλάνης της σύζευξης (The conjunction fallacy)*: Στις πιθανότητες η πιθανότητα δύο διακεκριμένων γεγονότων να συμβούν ταυτόχρονα είναι μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα του κάθε ενός εξ αυτών ή συμβολικά $P(A \cap B) \leq P(A)$ και $P(A \cap B) \leq P(B)$. Οι άνθρωποι αρκετές φορές δεν ακολουθούν αυτή την ιδιότητα όταν κάνουν εκτιμήσεις για τις πιθανότητες γεγονότων.

Έτσι για παράδειγμα έκριναν ότι η πιθανότητα να είναι κάποιος 55 ετών και να έχει καρδιακό επεισόδιο είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να έχει κάποιος καρδιακό επεισόδιο.

Επίσης όταν δόθηκε η περιγραφή μιας γυναίκας 31 ετών που δεν είναι παντρεμένη, είναι ευθαρσής, πολύ έξυπνη και ενδιαφέρεται πολύ για θέματα διακρίσεων και κοινωνικής δικαιοσύνης. Όταν ρωτήθηκαν ποια από τις παρακάτω δηλώσεις είναι πιο πιθανή:

A. Η γυναίκα είναι ταμίας σε τράπεζα και

B. η γυναίκα είναι ταμίας σε τράπεζα και ενεργό μέλος του φεμινιστικού κινήματος

λιγότεροι άνθρωποι επέλεξαν την δήλωση A σε σχέση με την B,

παρ' όλο που η δήλωση A έχει μεγαλύτερη πιθανότητα σε σχέση με την δήλωση B.

Εκείνη την περίοδο άρχισαν να εμφανίζονται και έρευνες από ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών που γενικά ενδιαφέρονταν για την πιθανοτική σκέψη των μαθητών διαφόρων ηλικιών όπως για παράδειγμα ο Green (1983, όπως αναφέρεται στους Shaughnessy & Bergman, 1993) και που εξέτασε σε μία έρευνα που διήρκησε τρία χρόνια, πάνω από 3000 μαθητές ηλικίας 11 έως 16 στην Μεγάλη Βρετανία. Ο Green ενδιαφέρονταν για τις πιθανοτικές έννοιες που είχαν οι μαθητές καθώς επίσης και για το επίπεδο της Πιαζετιανής ανάπτυξής τους.

Η εισαγωγή των στοχαστικών μαθηματικών στη βασική εκπαίδευση καθώς και τα Προγράμματα Σπουδών που δημιουργήθηκαν, αποτέλεσαν μοχλό στροφής της έρευνας προς τους μαθητές και τις στρατηγικές τους, ενώ ταυτόχρονα έδωσαν ώθηση για την ανάπτυξη περισσότερων ερευνών (Shaughnessy, Garfield, & Greer, 1996; Shaughnessy M. J., 2007; Jones & Thornton, 2005; Jones, Langrall, & Mooney, 2007).

Παράλληλα η ανάπτυξη της διδασκαλίας της Στατιστικής στα κολέγια και τα Πανεπιστήμια έχει ως αποτέλεσμα οι εκπαιδευτές της Στατιστικής να ενδιαφέρονται με ζητήματα έρευνας της διδασκαλίας και της μάθησης του αντικειμένου τους (Vere-Jones, 1995).

Ιδρύονται λοιπόν οργανώσεις όπως το ISI – International Statistical Institute– Διεθνές Στατιστικό Ινστιτούτο και η IASE - International Association for Statistical Education – Διεθνής Ένωση για την Στατιστική Εκπαίδευση. Οργανώνονται ειδικά συνέδρια που αφορούν στην έρευνα στη διδακτική της Στατιστικής, όπως το ICOTS (International Conference On Teaching Statistics – Διεθνής Διάσκεψη για την διδασκαλία της Στατιστικής), που έγινε για πρώτη φορά το 1982 στην Αγγλία και διεξάγεται κάθε τέσσερα χρόνια σε διάφορα μέρη του κόσμου και το International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL) που ξεκίνησε το 1999 και

διεξάγεται κάθε δύο χρόνια.

Επίσης εκδίδονται περιοδικά που σχετίζονται αποκλειστικά με την διδασκαλία της Στατιστικής καθώς και με την έρευνα στην Διδακτική της Στατιστικής, όπως για παράδειγμα το *Teaching Statistics* που κυκλοφόρησε το 1979, το *Journal of Statistics Education* που κυκλοφόρησε το 1993 και το *Statistical Education Research Journal* που κυκλοφόρησε το 2002.

Τα τελευταία χρόνια διακρίνεται μια αναζήτηση κοινών τόπων ανάμεσα στη Διδακτική της Στατιστικής και των Μαθηματικών. Όπως αναφέρουν οι Garfield & Ben-Zvi (2008) σημαντική πρόοδος στο πεδίο της Διδακτικής της Στατιστικής έχει προκύψει από την συνεργασία ανάμεσα σε εκπαιδευτές - διδασκικούς της Στατιστικής και των Μαθηματικών. Ως ένα τέτοιο παράδειγμα αναφέρουν το *Quantitative Literacy Project (QLP)*, από τις ΗΠΑ, το οποίο ήταν ένα δεκαετές κοινό πρόγραμμα της ASA – American Statistical Association (Αμερικανική Στατιστική Εταιρεία) και του NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών) το οποίο είχε ως επικεφαλή τον Richard Scheaffer. Σκοπός του προγράμματος ήταν η παραγωγή υποδειγματικού υλικού για μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης για την μάθηση της ανάλυσης δεδομένων και των Πιθανοτήτων (Landwehr, Swift, & Watkins, 1987; Landwehr & Watkins, 1987; Gnanadesikan, Scheaffer, & Swift, 1987; Neuman, Obremski, & Scheaffer, 1987) και η επιμόρφωση των καθηγητών πάνω σε αυτές τις θεματικές περιοχές (Rossman & Scheaffer, 2012).

Ανάμεσα στα κοινά θέματα που απασχολούν την έρευνα στην Διδακτική της Στατιστικής και των Μαθηματικών είναι και η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών. Έτσι το 2008 στην πόλη του Μεξικού διοργανώθηκε ένα κοινό συνέδριο από την International Commission on Mathematical Instruction (ICMI – Διεθνής Επιτροπή για την Μαθηματική Εκπαίδευση) και την International Association for Statistical Education (IASE - Διεθνής Ένωση για την Στατιστική Εκπαίδευση) με θέμα: «Statistics Education in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education».

2.2.2 Υπάρχουσα κατάσταση σχετικά με τους εκπαιδευτικούς

Τα Προγράμματα Σπουδών διαφόρων χωρών τις δύο τελευταίες δεκαετίες έδωσαν έμφαση στα στοχαστικά μαθηματικά (π.χ. NCTM, 1989; 2000; Australian Education Council, 1990; Ministry of Education, 1993), όμως οι διδάσκοντες που κλήθηκαν να τα υλοποιήσουν είχαν μικρή ή καθόλου προηγούμενη εμπειρία σχετικά με αυτές τις θεματικές περιοχές, είτε κατά την διάρκεια της δική τους σχολικής εκπαίδευσης είτε κατά την διάρκεια των πανεπιστημιακών τους σπουδών και η εισαγωγή τους δημιούργησε πολυποίκιλα προβλήματα σε δάσκαλους και καθηγητές των μαθηματικών (Konold & Higgins, 2003; Ottaviani, Peck, Pfannkuch, & Rossman, 2005; Stohl, 2005; Gattuso & Ottaviani, 2011).

Οι Konold & Higgins (2003) αναφέρουν σχετικά με το παραπάνω το εξής:

«Αν και αυτές οι εξελίξεις [η Διερευνητική Ανάλυση Δεδομένων - EDA] στην ανάλυση δεδομένων μπορεί να είναι ευλογία για τους στατιστικούς, μπορεί ταυτόχρονα να είναι κατάρρα για τον εκπαιδευτικό ο οποίος πρέπει να σκεφτεί τρόπους για να διδάξει όσο το δυνατόν καλύτερα ένα πεδίο που χαρακτηρίζεται από γρήγορη αλλαγή»

Παράλληλα έρευνες που έγιναν σε εκπαιδευτικούς, υποψήφιους ή ενεργούς, έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν τις ίδιες παρανοήσεις με τους μαθητές για διάφορες στατιστικές έννοιες ή ότι συναντούν δυσκολίες στην κατανόησή τους, όπως για παράδειγμα έρευνες σχετικές με τα μέτρα θέσης (Russell, 1990; Callingham, 1997; Groth & Bergner, 2006)

Διάφοροι ερευνητές που ερευνούν την γνώση των εκπαιδευτικών υποστηρίζουν πώς η γνώση μόνο του περιεχομένου δεν είναι αρκετή από μόνη της για την αποτελεσματική διδασκαλία (Shulman, 1986; Ball, 2000; Ball, Thames, & Phelps, 2008)

Ο Shulman (1987) προσδιόρισε έναν αριθμό από σημαντικά συστατικά στοιχεία της γνώσης που πρέπει να διαθέτουν οι δάσκαλοι:

- Την μαθηματική γνώση περιεχομένου (mathematical content knowledge) η οποία αναφέρεται στην γνώση των εννοιών, των διαδικασιών και των διεργασιών που σχετίζονται με την οργάνωση και την δομή των μαθηματικών καθώς και την σύνδεσή τους με άλλες περιοχές περιεχομένου.
- Την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (pedagogical content knowledge) που είναι η γνώση αποτελεσματικών στρατηγικών, αναπαραστάσεων, μοντέλων και παραδειγμάτων ώστε να καταστήσουν ένα θέμα κατανοητό στους μαθητές. Περιλαμβάνει επίσης την γνώση των διαισθήσεων, των δυσκολιών καθώς και των παρανοήσεων των μαθητών, την κατανόηση του τι κάνει δύσκολη ή εύκολη μια συγκεκριμένη θεματική ενότητα.
- Την γνώση του Προγράμματος Σπουδών.

Όμως όπως αναφέρουν οι Ottaviani, Peck, Pfannkuch, & Rossman (2005): *«Το πρόβλημα είναι ότι οι δάσκαλοι γενικά δεν έχουν κατάλληλη προετοιμασία για την διδασκαλία της Στατιστικής, μικρή γνώση για την κατανόηση της και σχεδόν καθόλου εμπειρία στην διδακτική της Στατιστικής. Χρειάζονται ένα πλαίσιο για την κατανόηση της Στατιστικής, έτσι ώστε να κατανοούν το υπόβαθρο των μαθητών τους και να ξέρουν προς τα που να τους κατευθύνουν.»*, ενώ η Stohl (2005) παρατηρεί ότι *«η επιτυχία οποιουδήποτε Προγράμματος Σπουδών στις πιθανότητες για την ανάπτυξη της πιθανολογικής συλλογιστικής των μαθητών εξαρτάται κατά μεγάλο μέρος από την κατανόηση των διδασκόντων σχετικά με τις πιθανότητες καθώς επίσης και με θέματα όπως οι παρανοήσεις των μαθητών»*

2.3 Η σχέση της Στατιστικής και των Μαθηματικών στην εκπαίδευση

Πολλές από τις έννοιες και τις δεξιότητες που αναπτύσσονται σε αυτούς τους τομείς συνδέονται με άλλες περιοχές περιεχομένου, όπως η άλγεβρα, η γεωμετρία, η μέτρηση και ο αριθμός (Lehrer, 2003; Goldstein, et al., 2005; Van De Walle, Karp, & Bay-Williams, 2010; Langrall & Mooney, 2010).

Οι Πιθανότητες και η Στατιστική είναι σημαντικά μαθήματα λόγω των εφαρμογών τους σε αυθεντικά προβλήματα και διεπιστημονικές έρευνες.

Η Στατιστική προσφέρει συνδέσεις με άλλες περιοχές σπουδών όπως για παράδειγμα η φυσική, η βιολογία, η γεωγραφία, η ιστορία κλπ. και οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν τις μαθητικές ιδέες για να μοντελοποιήσουν και να συλλογιστούν σχετικά με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου (Konold & Higgins, 2003; Goldstein, et al., 2005; Langrall & Mooney, 2010).

Τα Μαθηματικά και η Στατιστική είναι ανθρώπινες δημιουργίες. Έχουν διακεκριμένες, αλλά συνδεδεμένες μεθόδους έρευνας και σώματα γνώσης.

Τα Μαθηματικά είναι η εξερεύνηση και η χρήση των μοτίβων και οι σχέσεις σε ποσότητες, στον χώρο και τον χρόνο. Έχουν τους δικούς τους τρόπους ταξινόμησης και περιγραφής αυτών των μοτίβων και των σχέσεων με την χρήση σχετικών ιδεών όπως αριθμός, σχήμα, χώρος και μέτρηση. Επίσης τα μαθηματικά έχουν δικές τους μεθόδους συλλογιστικής, γενίκευσης και λήψης αποφάσεων.

Η Στατιστική είναι η εξερεύνηση και η χρήση μοτίβων και σχέσεων στα δεδομένα. Είναι η αναζήτηση και η εξήγηση ομοιοτήτων και διαφορών στα δεδομένα, η μεταβλητότητα μέσα στα δεδομένα και με πόση βεβαιότητα μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα απ' αυτά. Η Στατιστική επίσης περιλαμβάνει την συλλογή δεδομένων με συνεπή, αξιόπιστο και αμερόληπτο τρόπο.

Τα μαθηματικά και η Στατιστική περιλαμβάνουν επίλυση προβλημάτων που μας επιτρέπουν να εξηγήσουμε να ερμηνεύουμε και να εξερευνούμε τον κόσμο μέσα στον οποίο ζούμε.

Είναι προφανές ότι τα Μαθηματικά και η Στατιστική μοιράζονται ορισμένα χαρακτηριστικά, Παρ' όλα αυτά υπάρχουν συγκεκριμένες σημαντικές φιλοσοφικές διαφορές ανάμεσα στους τρόπους που οι μαθηματικοί και οι στατιστικοί αντιλαμβάνονται τον κόσμο, το είδος των ερωτήσεων που θέτουν και τι κατ' αυτούς αποτελεί απάντηση σε αυτές τις ερωτήσεις. (Graham, 2006)

Οι στατιστικοί είναι πεπεισμένοι ότι η Στατιστική, ενώ είναι μια μαθηματική επιστήμη, δεν είναι ένα υποπεδίο των μαθηματικών.

«Όπως τα Οικονομικά και η Φυσική, [έτσι και] η Στατιστική κάνει βαριά και ουσιαστική χρήση των Μαθηματικών, αλλά παρ' όλα αυτά διαθέτει το δικό της έδαφος για εξερεύνηση και τις δικές της βασικές έννοιες για να καθοδηγήσει την εξερεύνηση» (Moore, 1997)

Στα πρόσφατα χρόνια υπάρχει μια μετατόπιση από τις παραδοσιακές θεωρήσεις για την διδασκαλία της Στατιστικής ως ένα Μαθηματικό κομμάτι (με έμφαση στους υπολογισμούς, στους τύπους και τις διαδικασίες) στην τωρινή οπτική που δίνει έμφαση στις στατιστικές ιδέες και συλλογιστική. (Cobb & Moore, 1997)

Όπως αναφέρουν οι Gattuso & Ottaviani (2011): *«Διάφοροι άνθρωποι που αναπτύσσουν Προγράμματα Σπουδών στην Στατιστική συστήνουν μια προσέγγιση που να είναι προσανατολισμένη στα δεδομένα, κατά την οποία οι μαθητές διατυπώνουν ερευνητικά ερωτήματα, συγκεντρώνουν δεδομένα μέσω παρατηρήσεων, δημοσκοπήσεων και πειραμάτων, περιγράφουν και συγκρίνουν δεδομένα και προτείνουν και δικαιολογούν συμπεράσματα και προβλέψεις βασιζόμενοι στα δεδομένα. Παρ' όλα αυτά, οι προηγούμενες συστάσεις σπάνια ακολουθούνται και το να κάνει κανείς Στατιστική γίνεται συνώνυμο με το να κάνει υπολογισμούς και να ακολουθεί πρωτόκολλα. Ως συνέπεια οι μαθητές που τελειώνουν το Λύκειο κατανοούν πολύ λίγα γύρω από την Στατιστι-*

κή και συνήθως δεν είναι σε θέση να την χρησιμοποιήσουν με έναν κριτικό τρόπο.»

Σύμφωνα με την Garfield (2003) πολλοί άνθρωποι σκέφτονται τα Μαθηματικά και την Στατιστική σαν να είναι το ίδιο πράγμα και γι' αυτό τον λόγο συγχέουν την στατιστική συλλογιστική με την μαθηματική συλλογιστική.

Οι Gal & Garfield (1997) αναφέρουν τρόπους κατά τους οποίους ξεχωρίζουν τα δύο επιστημονικά πεδία:

- Στην Στατιστική τα δεδομένα θεωρούνται ως αριθμοί μέσα σε ένα πλαίσιο. Το πλαίσιο παρακινεί για την δημιουργία διαδικασιών και είναι η πηγή του νοήματος και η βάση της ερμηνείας των αποτελεσμάτων σε σχετικές δραστηριότητες.
- Η απροσδιοριστία ή «ακαταστασία» των δεδομένων διακρίνει τις στατιστικές έρευνες από την πιο ακριβή και εκλεπτυσμένη φύση που χαρακτηρίζει τις μαθηματικές εξερευνήσεις.
- Οι μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες χρησιμοποιούνται ως μέρος της επίλυσης των στατιστικών προβλημάτων. Παρ' όλα αυτά η ανάγκη για ακριβείς εφαρμογές υπολογισμών αντικαθίσταται από την ανάγκη για επιλεκτική, ακριβή και κατόπιν σκέψης χρήση των τεχνολογικών εργαλείων και των ολοένα πιο εκλεπτυσμένων λογισμικών για τους υπολογιστές.
- Πολλά Στατιστικά προβλήματα δεν έχουν μια μόνο μαθηματική λύση, αλλά αντίθετα ξεκινούν με ένα ερώτημα και καταλήγουν σε ένα αποτέλεσμα που υποστηρίζεται από διάφορα ευρήματα και παραδοχές. Αυτές οι απαντήσεις χρειάζεται να αξιολογηθούν με όρους ποιότητας της συλλογιστικής, καταλληλότητας των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν, της φύσης των δεδομένων και των τεκμηρίων που χρησιμοποιήθηκαν.

3 Προγράμματα Σπουδών

Πριν το 1980 μέσω του Προγράμματος Σπουδών περιγράφονταν απλώς το μαθηματικό περιεχόμενο, η διαδοχή των σχετικών μαθηματικών εννοιών και ίσως κάποια σύνολα δραστηριοτήτων για τους μαθητές.

Κατά την δεκαετία του 1980 και μετά έκαναν την εμφάνισή τους μεταρρυθμιστικά Προγράμματα Σπουδών π.χ. *Curriculum and Evaluation Standards for Teaching Mathematics* (NCTM, 1989), *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), τα οποία βασίζονται σε ένα πλαίσιο αρχών, για παράδειγμα της γνωστικής ψυχολογίας και σε κάποια θεωρία μάθησης, όπως για παράδειγμα ο κονστρουκτιβισμός, που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίον οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά (Jones J. C., 2012).

Μέσα από τα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών περιγράφονται όχι μόνο το μαθηματικό περιεχόμενο αλλά και διεργασίες, όπως για παράδειγμα η επίλυση προβλήματος, η επικοινωνία, οι συνδέσεις κλπ οι οποίες δεν θεωρούνται ξεχωριστές θεματικές ενότητες, αλλά είναι αναπόσπαστα συστατικά της συνολικής μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών.

Επίσης, επειδή η αξιολόγηση αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών, συνήθως τα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών αναφέρονται και σε θέματα αξιολόγησης.

4 Στατιστικός γραμματισμός, συλλογιστική και σκέψη

Όπως γράφει η Chance (2002) «Πολλά κείμενα και έγγραφα χρησιμοποιούν την φράση “στατιστική σκέψη” στον τίτλο τους. Ωστόσο, λίγοι δίνουν ένα τυπικό ορισμό της στατιστικής σκέψης. Πολλοί εμφανίζονται να χρησιμοποιούν [το στατιστικό] “γραμματισμό” , [τη] “συλλογιστική” και [την στατιστική] “σκέψη” χωρίς διάκριση, σε μία προσπάθεια να διαχωρίσουν την κατανόηση των στατιστικών εννοιών από τον χειρισμό των αριθμών, ο οποίος τόσο συχνά έχει χαρακτηρίσει την διδασκαλία και την χρήση της στατιστικής.»

Σύμφωνα με τους Ben-Zvi & Garfield (2004, σ. 6) κάτι το οποίο είναι εμφανές από την ανάγνωση διαφόρων άρθρων που συστήνουν μεταρρυθμίσεις στην διδασκαλία της Στατιστικής είναι η μη ύπαρξη συνεπών ορισμών σχετικά με τους μαθησιακούς στόχους του στατιστικού γραμματισμού, της συλλογιστικής και της σκέψης. Ο στατιστικός γραμματισμός χρησιμοποιείται πολλές φορές στην θέση του ποσοτικού γραμματισμού (quantitative literacy) ενώ η στατιστική συλλογιστική και η σκέψη πολλές φορές προσδιορίζουν τις ίδιες ικανότητες. Αυτό, όπως αναφέρουν οι παραπάνω ερευνητές, έγινε ιδιαίτερα φανερό στο 5^ο ICOTS (International Conference on Teaching Statistics), που έγινε το 1998 στην Σιγκαπούρη, όπου εκπαιδευτές της Στατιστικής ή ερευνητές της διδασκαλίας της Στατιστικής συζητούσαν σχετικά με ή αξιολογούσαν τον στατιστικό γραμματισμό, την συλλογιστική και την σκέψη χρησιμοποιώντας διαφορετικούς ορισμούς και κατανοήσεις σχετικά με αυτές τις γνωστικές διαδικασίες. Οι ομοιότητες και οι διαφορές αυτών των γνωστικών διαδικασιών όμως είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη όταν διατυπώνονται μαθησιακοί στόχοι για τους μαθητές, όταν σχεδιάζονται δραστηριότητες ή όταν αξιολογείται η μάθηση με την χρήση κατάλληλων εργαλείων αξιολόγησης. Τα παραπάνω είχαν σαν αποτέλεσμα την προσπάθεια αποσαφήνισης των όρων και την δημιουργία ειδικών διεθνών ερευνητικών συνεδρίων International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL)

που είναι επικεντρωμένα στην Στατιστική σκέψη, συλλογιστική και τον στατιστικό γραμματισμό.

4.1 Στατιστικός γραμματισμός

Κατά την προεδρική της ομιλία στην Αμερικανική Στατιστική Ένωση- American Statistical Association, η Wallman (1993, όπως αναφέρεται στις Watson & Callingham, 2003) όρισε ότι: *«στατιστικός γραμματισμός είναι η ικανότητα κατανόησης, κριτικής αξιολόγησης και εκτίμησης στατιστικών αποτελεσμάτων που με διάφορους τρόπους εμφανίζονται στην καθημερινή μας ζωή, μαζί με την ικανότητα αναγνώρισης της συνεισφοράς που έχει η στατιστική σκέψη στη λήψη δημόσιων, ιδιωτικών, επαγγελματικών και προσωπικών αποφάσεων»*

Σε μία ανασκόπηση της έρευνας στην στατιστική εκπαίδευση σχετικά με τον στατιστικό γραμματισμό η Rumsey (2002) αναφέρει ότι ορισμένοι από τους ορισμούς που έχουν δοθεί από ερευνητές είναι οι εξής:

- Η ικανότητα των ανθρώπων να ερμηνεύουν και να αξιολογούν κριτικά στατιστικές πληροφορίες και επιχειρήματα βασισμένα σε δεδομένα που εμφανίζονται σε ποικίλα μέσα μαζικής επικοινωνίας και η ικανότητα να συζητούν την άποψή τους σχετικά με τέτοιες στατιστικές πληροφορίες (Gal 2000)
- Η κατανόησης της στατιστικής γλώσσας: λέξεις, σύμβολα και ορολογία. Η ικανότητα της ερμηνείας γραφημάτων και πινάκων. Η ικανότητα ανάγνωσης και κατανόησης των στατιστικών στις ειδήσεις, στα μέσα μαζικής επικοινωνίας, στις δημοσκοπήσεις κλπ (Garfield 1999)
- Η ικανότητα κατανόησης στατιστικών εννοιών και συλλογισμού στο πιο στοιχειώδες επίπεδο (Snell 1999)

- Η ικανότητα κατανόησης του κειμένου, του νοήματος και των επιπτώσεων των στατιστικών πληροφοριών που περιέχονται σ' αυτό, σύμφωνα με το πλαίσιο του θέματος που αναφέρεται» (Watson 1997)

Η Watson (1997) εξερεύνησε την αναπτυξιακή πορεία των μαθητών στον στατιστικό γραμματισμό και προσδιόρισε τρία ιεραρχικά επίπεδα γραμματισμού τα οποία προέκυψαν καθώς οι μαθητές εργάζονταν σε στατιστικά έργα που προέρχονταν από εφημερίδες, περιοδικά, διαφημίσεις κλπ. Το επίπεδο 1 είναι η κατανόηση της βασικής στατιστικής και πιθανοτικής ορολογίας. Το επίπεδο 2 είναι η κατανόηση της στατιστικής γλώσσας και των στατιστικών εννοιών όταν είναι ενσωματωμένες στο ευρύτερο πλαίσιο κοινωνικών συζητήσεων. Το επόμενο επίπεδο είναι η ικανότητα να εφαρμόζει μια κριτική στάση σε στατιστικούς ισχυρισμούς και επιχειρήματα.

Σύμφωνα με τον Gal (2004) ο στατιστικός γραμματισμός αναφέρεται στην ικανότητα των ανθρώπων να ερμηνεύουν, να αξιολογούν κριτικά και να εκφράζουν τις απόψεις τους σχετικά με στατιστικές πληροφορίες, επιχειρήματα που βασίζονται σε δεδομένα ή στοχαστικά φαινόμενα. Ο Gal υποστηρίζει ότι η συμπεριφορά που επιδεικνύει το στατικά γραμματισμένο άτομο απαιτεί την από κοινού ενεργοποίηση γνωστικών συστατικών αλλά και συστατικών προδιάθεσης.

Τα γνωστικά συστατικά προϋποθέτουν πέντε στοιχεία γνώσης:

- Ικανότητες αλφαριθμητισμού.
- Στατιστική γνώση.
- Μαθηματική γνώση
- Γνώση του πλαισίου ή του πραγματικού κόσμου
- Γνώση κρίσιμων ερωτήσεων που πρέπει να τεθούν

Τα συστατικά προδιάθεσης είναι:

- Κριτική στάση
- Στάσεις και πεποιθήσεις, όπως η αυτοπεποίθηση ότι είναι ικανός για στατιστική σκέψη ή η πεποίθηση ότι είναι ορθό να υιοθετεί μια κριτική οπτική στις πληροφορίες που λαμβάνει από επίσημες υπηρεσίες ή από ειδικούς, είτε την πίστη στην δύναμη των στατιστικών διαδικασιών όταν αυτές εφαρμόζονται σωστά.

Σύμφωνα με τον Gal ένα δείγμα κρίσιμων ερωτήσεων που πρέπει να θέτει κανείς, σχετικά με τα στατιστικά μηνύματα είναι το παρακάτω:

1. Από πού προήλθαν τα δεδομένα; Τι είδους μελέτη ήταν αυτή; Είναι αυτού του είδους η μελέτη λογική για αυτό το πλαίσιο;
2. Χρησιμοποιήθηκε δείγμα; Πώς έγινε η δειγματοληψία; Πόσοι άνθρωποι πήραν μέρος πραγματικά; Είναι το δείγμα αρκετά μεγάλο; Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού; Υπάρχει μεροληψία με κάποιον τρόπο; Συνολικά μπορεί αυτό το δείγμα να οδηγήσει σε έγκυρα συμπεράσματα σε σχέση με τον πληθυσμό;
3. Πόσο αξιόπιστα ή ακριβή ήταν τα εργαλεία ή οι μετρήσεις (τεστ, ερωτηματολόγια, συνεντεύξεις) που χρησιμοποιήθηκαν για να δημιουργήσουν τα δεδομένα;
4. Ποιο είναι το σχήμα της υποβόσκουσας κατανομής; Παίξει ρόλο πώς είναι το σχήμα;
5. Είναι τα στατιστικά στοιχεία που αναφέρονται για αυτό το είδος των δεδομένων; Για παράδειγμα είναι η μέση τιμή πιο κατάλληλη από την διάμεσο;
6. Το γράφημα έχει σχεδιαστεί σωστά ή παραμορφώνει τις τάσεις;
7. Με ποιόν τρόπο προέκυψε η δήλωση σχετικά με τις πιθανότητες; Υπάρχουν αρκετά αξιόπιστα δεδομένα για την αιτιολόγηση της εκτίμησης της πιθανότητας;

8. Συνολικά είναι οι ισχυρισμοί λογικοί και υποστηρίζονται από τα δεδομένα; Για παράδειγμα εμφανίζεται η συσχέτιση ως σχέση αιτίου αποτελέσματος;
9. Πρέπει να αναζητήσω περισσότερες πληροφορίες για να εκτιμήσω τα επιχειρήματα; Μήπως λείπει κάτι;
10. Υπάρχουν εναλλακτικές ερμηνείες για το νόημα των ευρημάτων ή εξηγήσεις για το λόγο που προέκυψαν;

Η Utts (2003) προτείνει τις παρακάτω επτά ιδέες που θα πρέπει να μάθει και να κατανοεί ένας μορφωμένος πολίτης.

1. Πότε μπορεί κάποιος να συμπεράνει ότι μια σχέση είναι σχέση αιτίου – αποτελέσματος και πότε όχι, συμπεριλαμβανομένης και της διάκρισης ανάμεσα σε μελέτες παρατήρησης (observational studies) και τυχαίοποιημένα πειράματα (randomized experiments). Η Utts υποστηρίζει ότι αυτή ίσως είναι η πιο συνηθισμένη παρερμηνεία των στατιστικών μελετών όπως αυτές εμφανίζονται στις εφημερίδες και τα περιοδικά. Αναφέρει σαν παράδειγμα γι' αυτό ένα άρθρο που εμφανίστηκε στην εφημερίδα *Usa Today*. Το άρθρο της εφημερίδας αναφέρονταν σε μια μελέτη παρατήρησης η οποία παρακολουθούσε για 6 χρόνια 2.391 άτομα ηλικίας 65 ετών και άνω. Ένα από τα συμπεράσματα που αναφέρονταν στο άρθρο ήταν:

Μια νέα έρευνα έδειξε ότι η παράσταση σε θρησκευτικές λειτουργίες χαμηλώνει την αρτηριακή πίεση του αίματος περισσότερο από την ακρόαση μέσω ραδιοφώνου ή την τηλεθέαση θρησκευτικών εκπομπών. Οι άνθρωποι που ήταν παρόντες σε θρησκευτικές λειτουργίες μια φορά την εβδομάδα και προσεύχονταν ή διάβαζαν την Βίβλο κάθε μέρα ήταν 40% λιγότερο πιθανό να έχουν υψηλή αρτηριακή πίεση απ' αυτούς που δεν πάνε στην εκκλησία κάθε εβδομάδα και προσεύχονται και διαβάζουν την Βίβλο λιγότερο.

Η Utts συνεχίζοντας αναφέρει ότι απ' όλο το άρθρο έβγαινε το μήνυμα ότι η προσευχή και η παράσταση στην λειτουργία είχε σαν αποτέλεσμα την μείωση της αρτηριακής πίεσης, ενώ στην πραγματικότητα μία μελέτη τέτοιου είδους (μελέτη παρατήρησης) δεν θα μπορούσε να οδηγήσει σε τέτοια συμπεράσματα, γιατί μπορεί να υπάρχουν άλλοι λόγοι για την παρατηρούμενη διαφορά, όπως για παράδειγμα ότι οι άνθρωποι που είναι πιο καλά στην υγεία τους μπορούν πιο εύκολα να παραστούν στην λειτουργία.

2. Την διαφορά ανάμεσα στη στατιστική σημαντικότητα και την πρακτική σημασία, ιδίως αν το δείγμα είναι μεγάλο.
3. Την διαφορά ανάμεσα στο «κανένα αποτέλεσμα» ή «καμία διαφορά» και στην εύρεση μη στατιστικά σημαντικού αποτελέσματος ή διαφοράς, ειδικά όταν το δείγμα είναι μικρό σε μέγεθος.
4. Συνηθισμένες πηγές μεροληψίας σε έρευνες και πειράματα, όπως η κακή διατύπωση των ερωτήσεων, η εθελοντική απάντηση και οι κοινωνικά επιθυμητές απαντήσεις.
5. Η ιδέα ότι οι συμπτώσεις και τα *φαινομενικά* πολύ απίθανα γεγονότα δεν είναι και τόσο ασυνήθιστα, γιατί υπάρχουν τόσες πολλές δυνατότητες.
6. «Σύγχυση για το αντίστροφο», όπου η δεσμευμένη πιθανότητα προς την μία κατεύθυνση $P(A/B)$ συγχέεται με την δεσμευμένη πιθανότητα προς την άλλη κατεύθυνση $P(B/A)$.
7. Κατανόηση της φυσικής (natural) μεταβλητότητας και ο ρόλος της στην ερμηνεία του τι είναι «κανονικό».

4.2 Στατιστική σκέψη

Ο Snee (1990) όρισε την στατιστική σκέψη ως «τις διαδικασίες σκέψης που αναγνωρίζουν ότι η μεταβολή είναι παντού γύρω μας και παρούσα σε κάθε τι που κάνουμε, όλη η εργασία είναι μία σειρά αλληλένδετων διαδικασιών που προσδιορίζουν, χαρακτηρίζουν, ποσοτικοποιούν, ελέγχουν και μειώνουν την διακύμανση παρέχοντας ευκαιρίες για βελτίωση».

Ο George Cobb (1992) παρουσίασε την επόμενη λίστα με τα στοιχεία της στατιστικής σκέψης :

- Την ανάγκη για δεδομένα
Αναγνώριση της ανάγκης να βασιστούν οι προσωπικές αποφάσεις σε πειστήρια (δεδομένα) και στους κινδύνους που υποκρύπτονται κατά την δράση [βασιζόμενος] σε υποθέσεις που δεν υποστηρίζονται από τα πειστήρια.
- Την σημασία της παραγωγής δεδομένων
Αναγνώριση ότι είναι δύσκολο και χρονοβόρο να διατυπώσεις προβλήματα και να βρεις δεδομένα καλής ποιότητας που πραγματικά να σχετίζονται με τις σωστές ερωτήσεις. Οι περισσότεροι άνθρωποι δεν φαίνεται να το συνειδητοποιούν αυτό παρά μόνον όταν βιώνουν αυτή την εμπειρία.
- Την πανταχού παρουσία της μεταβλητότητας
Αναγνώριση ότι η μεταβλητότητα είναι παντού παρούσα. Είναι η ουσία της Στατιστικής ως επιστημονικό πεδίο και αυτό δεν γίνεται κατανοητό με διαλέξεις. Πρέπει να γίνει [κατανοητό] μέσω εμπειρίας
- Την μέτρηση και εξήγηση της μεταβλητότητας
Αναγνώριση ότι η μεταβλητότητα μπορεί να μετρηθεί και να εξη-

γηθεί, λαμβάνοντας υπ' όψη τα εξής:

(α) τυχαιότητα και κατανομές

(β) κανονικότητες και αποκλίσεις

(γ) μαθηματικά μοντέλα για τις κανονικότητες

(δ) εγκαθίδρυση διαλόγου ανάμεσα στο μοντέλο και τα δεδομένα

4.2.1 Το μοντέλο των Wild και Pfannkuch

Οι Wild και Pfannkuch (1999) σε μια προσπάθεια να καθορίσουν τις διαδικασίες σκέψης που εμπλέκονται στη στατιστική επίλυση προβλημάτων, πήραν σε βάθος συνεντεύξεις από στατιστικούς που ασκούσαν το επάγγελμά τους σε διάφορους τομείς (επιχειρήσεις, μανάτζμεντ, ιατρική κλπ), όπως και από φοιτητές που ήταν αρχηγοί ομάδων διάφορων στατιστικών πρότζεκτ ή φοιτητές που εργάζονταν σε έργα στατιστικά.

Οι συνεντεύξεις που πήραν μαζί με την βιβλιογραφική ανασκόπηση που έκαναν τους οδήγησαν στην ανάπτυξη ενός τετραδιάστατου πλαισίου της στατιστικής σκέψης στην εμπειρική έρευνα (empirical enquiry). Σύμφωνα με τους προαναφερόμενους ερευνητές όταν οι στατιστικοί εργάζονται σε ένα στατιστικό πρόβλημα, χρησιμοποιούν μέρη αυτών των διαστάσεων συνεχώς και ταυτόχρονα. Επίσης υποστηρίζουν ότι το μοντέλο τους της στατιστικής σκέψης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της σκέψης των μαθητών και μπορεί να πληροφορήσει την διδασκαλία και την ανάπτυξη Προγραμμάτων σπουδών στην στατιστική.

Το μοντέλο τους περιλαμβάνει δύο διαστάσεις που τις ονομάζουν κύκλους της δραστηριότητας της σκέψης:

- ένα κύκλο έρευνας (investigative cycle) (Εικόνα 1) και
- έναν ερωτηματικό κύκλο (interrogative cycle)

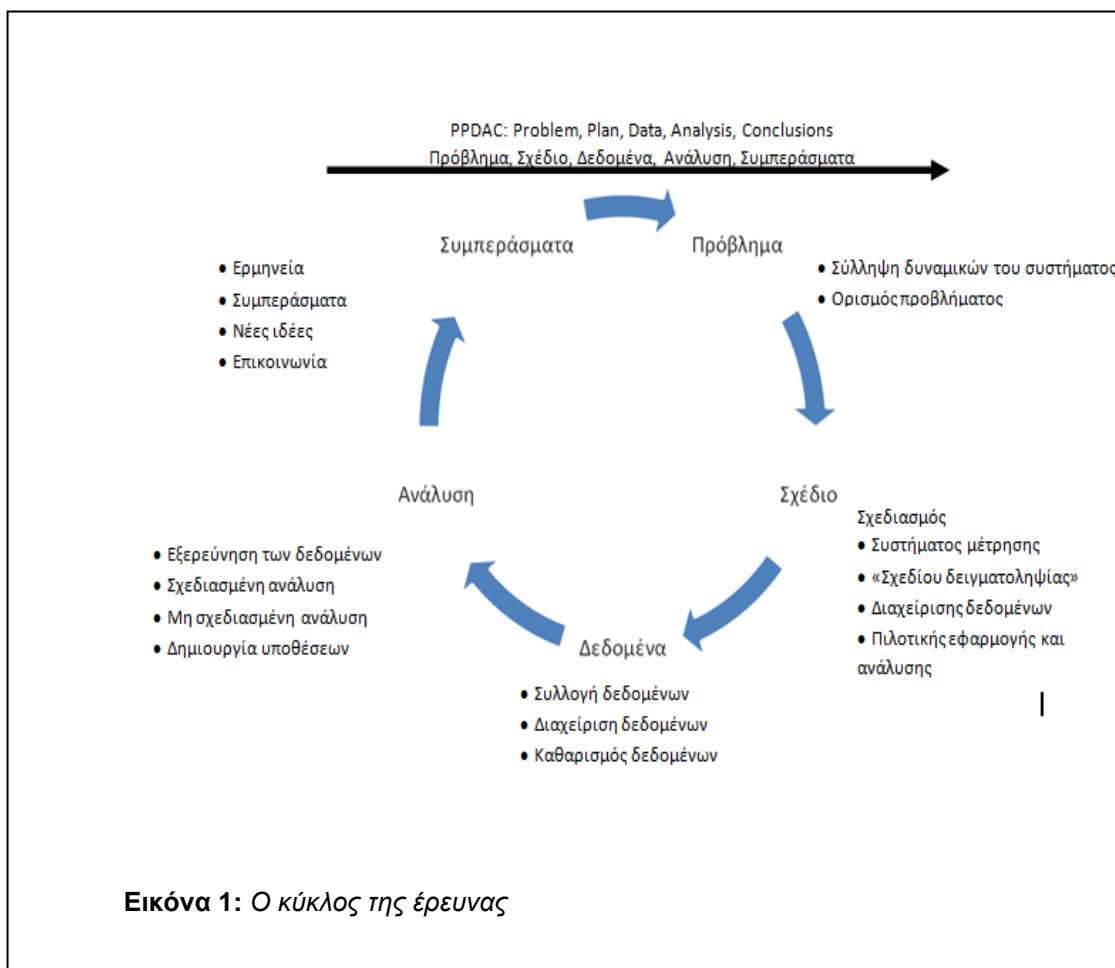
και δύο επιπλέον διαστάσεις που ονομάζονται:

- είδη της σκέψης (types of thinking) και
- προδιαθέσεις (dispositions)

Ο κύκλος της έρευνας έχει ως ετικέτα τα αρχικά των λέξεων Problem, Plan, Data, Analysis, Conclusions (PPDAC) και σύμφωνα με τον Shaughnessy (2007, σελ. 963) θυμίζει το μοντέλο που πρότεινε ο Polya για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος: Κατανόηση, Σχεδιασμός, Εκτέλεση, Αναθεώρηση

(Understand, Plan, Execute, Review), όμως έχουν κρίσιμες διαφορές που σύμφωνα με τον Shaughnessy είναι οι εξής:

- Τα στατιστικά προβλήματα συχνά είναι ισχνά διατυπωμένα στην αρχή καθώς προκύπτουν μέσα από ένα πλαίσιο ακατάστατο.
- Συχνά υπάρχει η ανάγκη αρκετών επαναληπτικών κύκλων ανάμεσα στο Πρόβλημα και το Σχεδιασμό κατά τον κύκλο έρευνας με σκοπό τον επακριβή καθορισμό του στατιστικού προβλήματος.
- Τα δεδομένα (Data) είναι πολύ διαφορετικά στο στατιστικό από το μαθηματικό πρόβλημα, μια και τα δεδομένα σε ένα στατιστικό πρόβλημα συνοδεύονται από επιπλέον πράγματα όπως μεροληψία, μη ελέγξιμες πηγές διασποράς, θέματα που σχετίζονται με το πλαίσιο του προβλήματος κλπ..



Στην διάσταση σχετικά με τα είδη σκέψης οι Wild & Phannkuch έχουν δύο τύπους:

- τα γενικά είδη σκέψης και
- τα είδη εκείνα που είναι θεμελιώδη για την στατιστική σκέψη

Οι παραπάνω ερευνητές θεωρούν πέντε θεμελιώδεις τύπους στατιστικής σκέψης.

- **Αναγνώριση της ανάγκης για δεδομένα.**

Τα θεμέλια της στατιστικής έρευνας εδράζουν στην παραδοχή ότι πολλές πραγματικές καταστάσεις δεν μπορούν να κριθούν χωρίς την συγκέντρωση και ανάλυση των δεδομένων που να έχουν συλλεχθεί σωστά. Είναι μία στατιστική παρόρμηση η αναγνώριση της ανεπάρκειας των προσωπικών εμπειριών και των ανεπίσημων (ή ανεπιβεβαίωτων) στοιχείων και οδηγεί στην ανάγκη συγκέντρωσης και ανάλυσης κατάλληλης συλλογής δεδομένων πάνω στα οποία θα βασισθούν οι κρίσεις και οι αποφάσεις. Ως εκ τούτου, τα δεδομένα θεωρούνται ως μία πρωταρχική απαίτηση για τις αποφάσεις σχετικά με πραγματικές καταστάσεις.

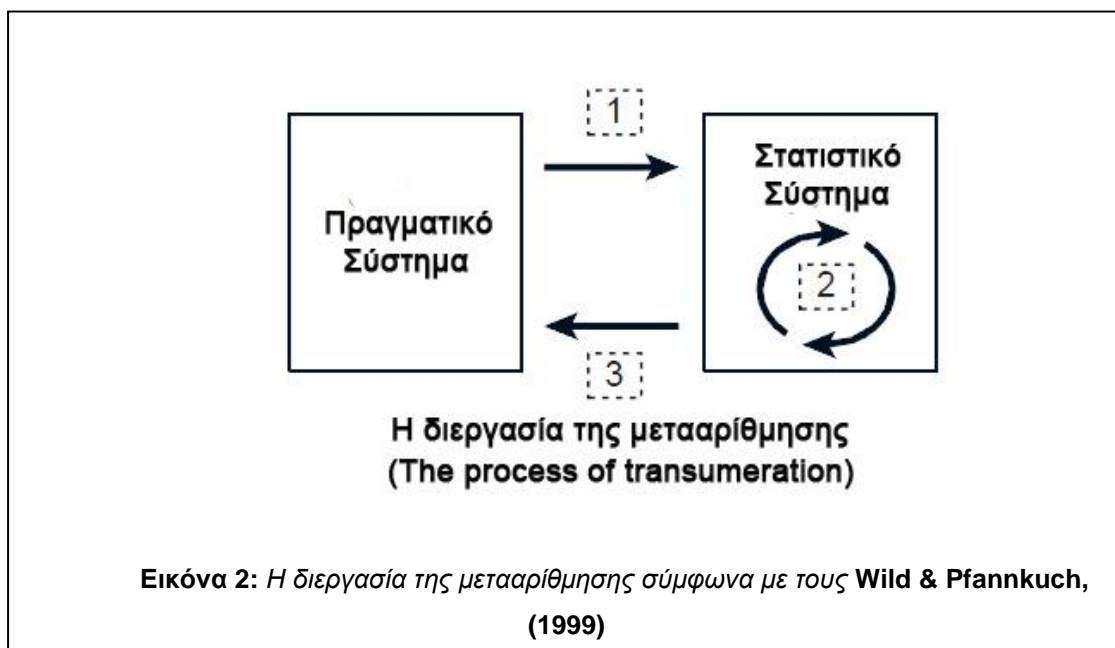
Σύμφωνα με τους Shaughnessy & Pfanckuch (2002) η εστίαση της διδασκαλίας πρέπει να είναι σχετική με την ανάγκη για δεδομένα, επειδή «... μεγάλο μέρος της έρευνας έχει δείξει ότι οι μαθητές πιστεύουν ότι οι δικές τους προσωπικές κρίσεις και πεποιθήσεις είναι πιο αξιόπιστες από τα δεδομένα, ενώ επιπλέον, [οι μαθητές] δεν βλέπουν κανένα σκοπό στην ανάλυση των δεδομένων, δεδομένου ότι γνωρίζουν ήδη την "απάντηση"».

- **Μετααρίθμηση (Transnumeration).**

Οι Wild & Pfanckuch επινόησαν την λέξη μετααρίθμηση για να περιγράψουν αυτό το είδος σκέψης, η οποία σημαίνει "αριθμητικός μετασχηματισμός που γίνεται για τη διευκόλυνση της κατανόησης" (numeracy transformations made to facilitate understanding).

Η μετααρίθμηση είναι μια δυναμική διαδικασία αλλαγής αναπαραστάσεων με σκοπό την δημιουργία κατανόησης. Όταν σκεφτόμαστε το πραγματικό σύστη-

μα και το στατιστικό σύστημα, υπό το πρίσμα της μοντελοποίησης, τότε η μεταριθμισιακή σκέψη εμφανίζεται σε τρεις φάσεις (Εικόνα 2) όταν:



– Βρίσκουμε τρόπους απόκτησης δεδομένων (μέσω της μέτρησης ή της ταξινόμησης), που αποτυπώνουν σημαντικά στοιχεία του πραγματικού συστήματος.

– Αλλάζουμε τον τρόπο με τον οποίον βλέπουμε τα δεδομένα με την ελπίδα ότι αυτή η αλλαγή θα μας φανερώσει νέα κατανόηση.

Αυτό μπορεί να συμβαίνει όταν κοιτάζουμε μέσα από πολλές και διαφορετικές γραφικές παραστάσεις για να βρούμε κάποιες που θα είναι πραγματικά κατατοπιστικές.

Μπορεί να εκφράζουμε εκ νέου τα δεδομένα μέσω μετασχηματισμών ή νέων ταξινομήσεων ψάχνοντας για νέες ιδέες.

Μπορεί να δοκιμάζουμε μια ποικιλία στατιστικών μοντέλων.

– Στο τέλος της διαδικασίας, η μεταριθμηση συμβαίνει ακόμη μια φορά όταν βρίσκουμε αναπαραστάσεις των δεδομένων που θα μας βοηθήσουν να επικοινωνήσουμε στους άλλους την

καινούργια κατανόηση που έχουμε σχετικά με το πραγματικό σύστημα, αυτό που υποδεικνύει το στατιστικό σύστημα για το πραγματικό σύστημα.

Οι Shaughnessy & Pfannkuch (2002), Shaughnessy (2006, 2007) αναφέρουν ένα παράδειγμα μετααριθμησιακού είδους σκέψης, όταν οι μαθητές μιας τάξης εργάζονταν με σύνολα δεδομένων σχετικά με τους χρόνους που μεσολαβούσαν από την μία έκρηξη νερού στην άλλη, ενός θερμοπίδακα (Old Faithfull geiser). Τους είχε ζητηθεί να δημιουργήσουν τις δικές τους αναπαραστάσεις των δεδομένων και μετά να εκτιμήσουν τον χρόνο αναμονής για την διαδοχική έκρηξη νερού του θερμοπίδακα. Οι μαθητές στην αρχή είχαν σχεδιάσει φυλλογραφήματα, θηκογράμματα ή ιστογράμματα με διαφορετικά πλάτη κλάσεων, ενώ μετά έφτιαξαν διαγράμματα για τα δεδομένα σε σχέση με τον χρόνο (εικόνες 3,4 και 5). Όταν παρουσιάστηκαν όλα τα διαγράμματα στην τάξη μία εντελώς διαφορετική όψη των δεδομένων έγινε φανερή προς όλους τους μαθητές ενώ η κάθε γραφική αναπαράσταση αποκάλυπτε ή έκρυβε διαφορετικά μηνύματα σχετικά με τον θερμοπίδακα.

Σύμφωνα λοιπόν με τους πιο πάνω ερευνητές η δεύτερη φάση της μετααριθμησιακής σκέψης λάμβανε χώρα όταν οι μαθητές έπρεπε να εξετάσουν τρόπους για να αλλάξουν τις αναπαραστάσεις των δεδομένων για να διευκολυνθούν στην πρόβλεψη του χρόνου αναμονής, χωρίς να τους είναι ειπωμένο το είδος του γραφήματος που έπρεπε να σχεδιάσουν. Η τρίτη φάση της μετααριθμησιακής διαδικασίας άρχισε να συμβαίνει όταν οι μαθητές κλήθηκαν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους τις προβλέψεις τους σχετικά με τον χρόνο αναμονής.

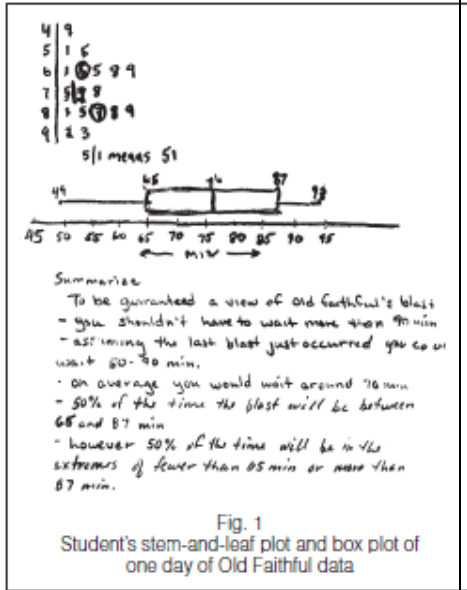


Fig. 1
Student's stem-and-leaf plot and box plot of one day of Old Faithful data

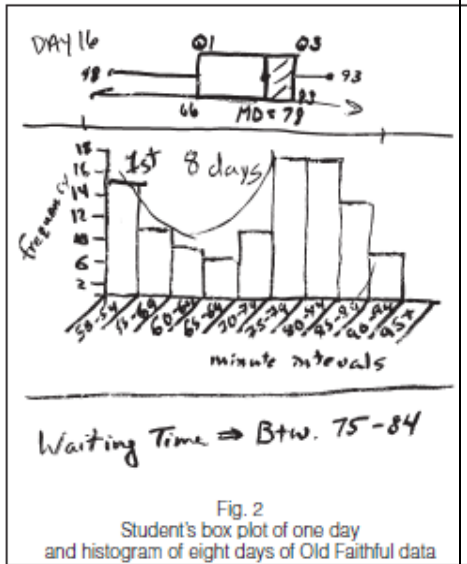


Fig. 2
Student's box plot of one day and histogram of eight days of Old Faithful data

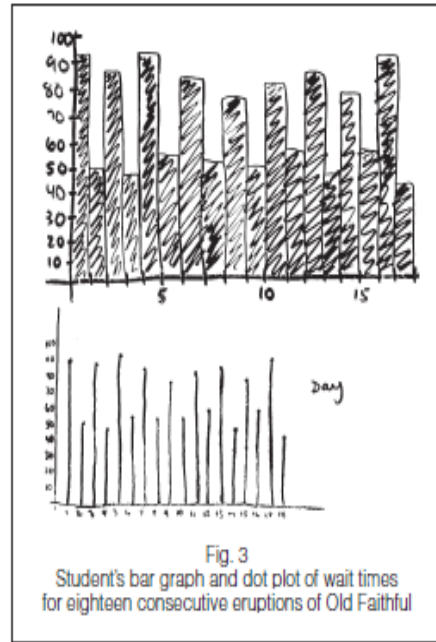


Fig. 3
Student's bar graph and dot plot of wait times for eighteen consecutive eruptions of Old Faithful

Εικόνα 4

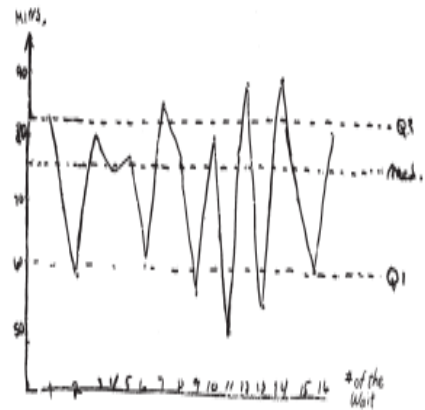


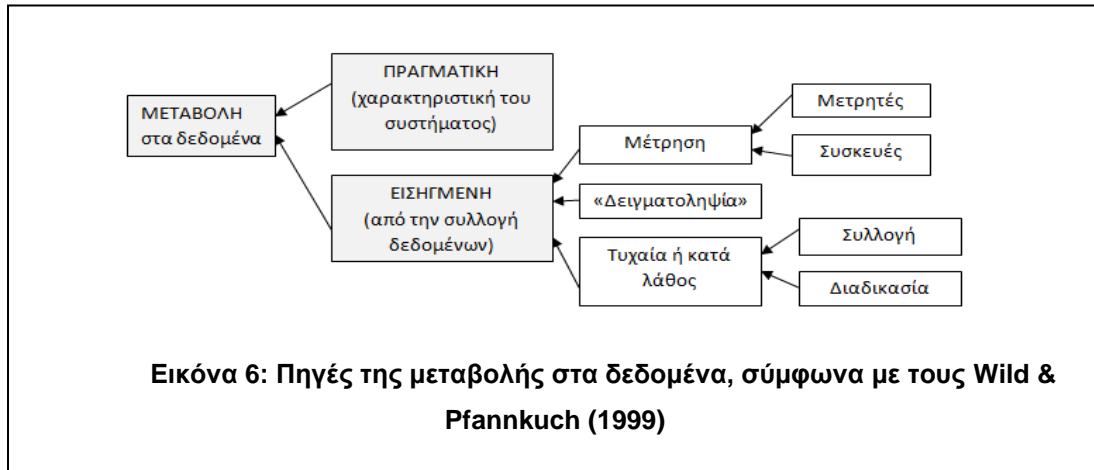
Fig. 4
Student's connected plot of sixteen consecutive wait times for Old Faithful eruptions

Εικόνα 5

• Εξέταση της διακύμανσης

Η κατάλληλη συλλογή δεδομένων και η λήψη σωστών αποφάσεων από τα δεδομένα απαιτεί κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η μετα-

βολή προκύπτει και μεταδίδεται μέσω των δεδομένων καθώς και της αβεβαιότητας που προκαλείται από ανεξήγητη διακύμανση. Είναι ένα είδος σκέψης που αρχίζει από την παρατήρηση της διακύμανσης σε



μία πραγματική κατάσταση και επηρεάζει τους τρόπους με τους οποίους προσπαθούμε να εξαφανίσουμε ή να περιορίσουμε γνωστές πηγές διακύμανσης. Συνεχίζει κατά τις φάσεις της ανάλυσης και των συμπερασμάτων και καθορίζει την δράση μας λόγω της παρουσίας της διακύμανσης. Μπορεί δηλαδή να την αγνοήσουμε ή να σχεδιάσουμε σχετικά με αυτήν ή να την ελέγξουμε. Η εξέταση των επιπτώσεων της διακύμανσης επηρεάζει όλες τις διαδικασίες σκέψης σε κάθε στάδιο του κύκλου εξερεύνησης.

- **Συλλογιστική με στατιστικά μοντέλα**

Ακόμα και τα στατιστικά γραφήματα μπορούν να θεωρηθούν ως στατιστικά μοντέλα αφού είναι στατιστικοί τρόποι αναπαράστασης και σκέψης σχετικά με την πραγματικότητα. Όταν κάνουμε χρήση των στατιστικών μοντέλων για συλλογισμούς η εστίαση είναι περισσότερο σε συγκεντρωτικά χαρακτηριστικά των δεδομένων παρά σε ατομικά χαρακτηριστικά, αν και χρησιμοποιούνται και τα δύο είδη. Η κατάλληλη συλλογιστική βασισμένη στα ατομικά χαρακτηριστικά επικεντρώνεται σε μεμονωμένα σημεία δεδομένων προσπαθώντας να τα συσχετίσει με τα ευρύτερα δεδομένα ενώ η συλλογιστική που βασίζεται σε συγκεντρωτι-

κά χαρακτηριστικά έχει να κάνει με κανονικότητες και σχέσεις στο σύνολο των δεδομένων ως όλο.

- **Η ενοποίηση του στατιστικού και του συγκείμενου (contextual).**

Η ενοποίηση των στατιστικών γνώσεων και των συμφραζόμενων γνώσεων αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο της στατιστικής σκέψης. Το στατιστικό μοντέλο πρέπει να συλλαμβάνει τα στοιχεία της πραγματικής κατάστασης, και τα δεδομένα που προκύπτουν φέρουν τη δική τους βάση λογοτεχνίας, με άλλα λόγια τα δεδομένα λένε μια ιστορία.

4.2.2 Το μοντέλο των Jones, Thornton, Langrall, Mooney, Perry και Putt

Οι Jones, Thornton, Langrall, Mooney, Perry και Putt (2000) δημιούργησαν ένα γνωστικό αναπτυξιακό μοντέλο, με σκοπό να παρέχουν μία συνεκτική εικόνα της στατιστικής σκέψης των παιδιών και της γνωστικής εξέλιξής της, σχετικά με την ανάγνωση και την ερμηνεία γραφημάτων. Είναι ένα μοντέλο που βασίζεται στην θεωρία ταξινόμησης SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) των Biggs & Collis (1982).

Το μοντέλο SOLO είναι ένα νέο-Πιαζετιανό μοντέλο που δημιουργήθηκε για την ανάλυση της πολυπλοκότητας των απαντήσεων των μαθητών σε διάφορα έργα. Αναπτύχθηκε αρχικά ως ένα γενικό μοντέλο για την αξιολόγηση της μάθησης σε οποιοδήποτε περιοχή περιεχομένου ή επιστημονικού πεδίου και είναι ένα αναλυτικό μοντέλο που επικρατεί σε κάποιους ερευνητικούς κύκλους σχετικά με την Στατιστική εκπαίδευση. Μπορεί να είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τους εκπαιδευτές της Στατιστικής, καθώς το θεωρητικό του πλαίσιο είναι σχεδιασμένο για την αξιολόγηση απαντήσεων σε ανοικτού τύπου πολύπλοκα έργα τα οποία φέρνουν στο φως μια ιεραρχία της σκέψης και της συλλογιστικής των μαθητών (Shaughnessy M. J., 2007).

Οι Jones et al. (2000) ενσωμάτωσαν στο μοντέλο τους το πλαίσιο που είχε αναπτύξει η Curcio (1987; Curcio & Artz , 1997) σχετικά με την ανάγνωση και την ερμηνεία των δεδομένων σε γραφήματα.

Το μοντέλο των Jones et al (2000) έχει τα παρακάτω τέσσερα επίπεδα σκέψης:

- Το ιδιοσυγκρασιακό (idiosyncratic)
- Το μεταβατικό (transitional)
- Το ποσοτικό (quantitative)
- Το αναλυτικό (analytical)

και τέσσερις βασικές δομές για την στατιστική ανάλυση:

- Περιγραφή απεικονίσεων δεδομένων (describing data displays)
- Οργάνωση και μείωση των δεδομένων (organizing and reducing data)
- Αναπαράσταση των δεδομένων (representing data)
- Ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων (analyzing and interpreting data)

Η ανάλυση και η ερμηνεία των δεδομένων του παραπάνω μοντέλου σχετίζεται με τους όρους που χρησιμοποιεί η Curcio *ανάγνωση ανάμεσα στα δεδομένα και ανάγνωση πέρα από τα δεδομένα*.

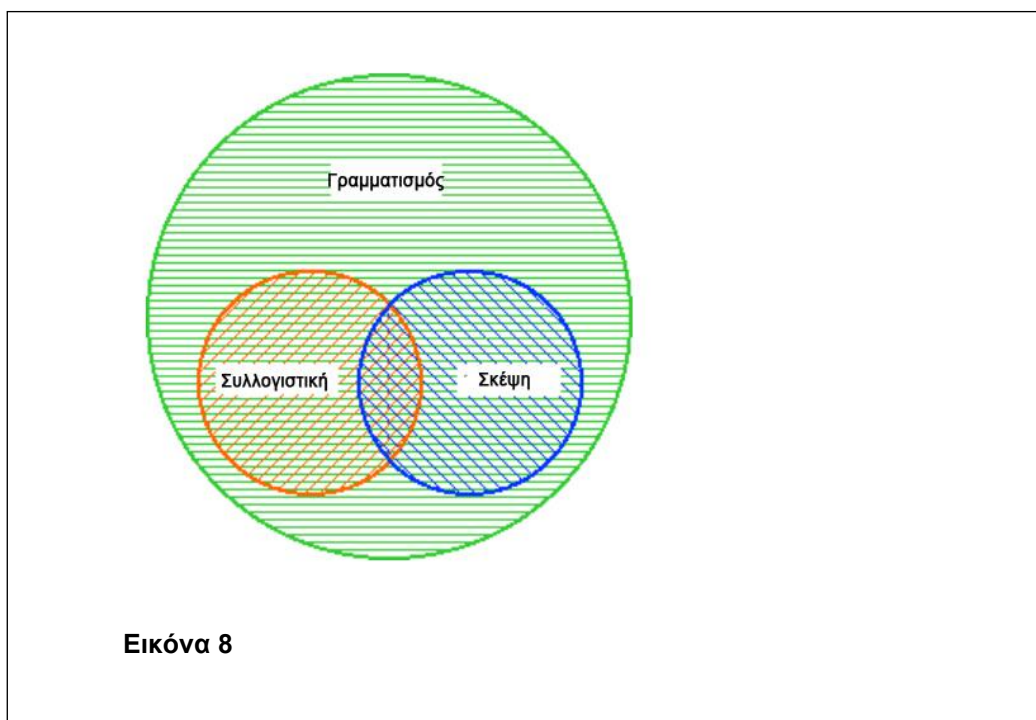
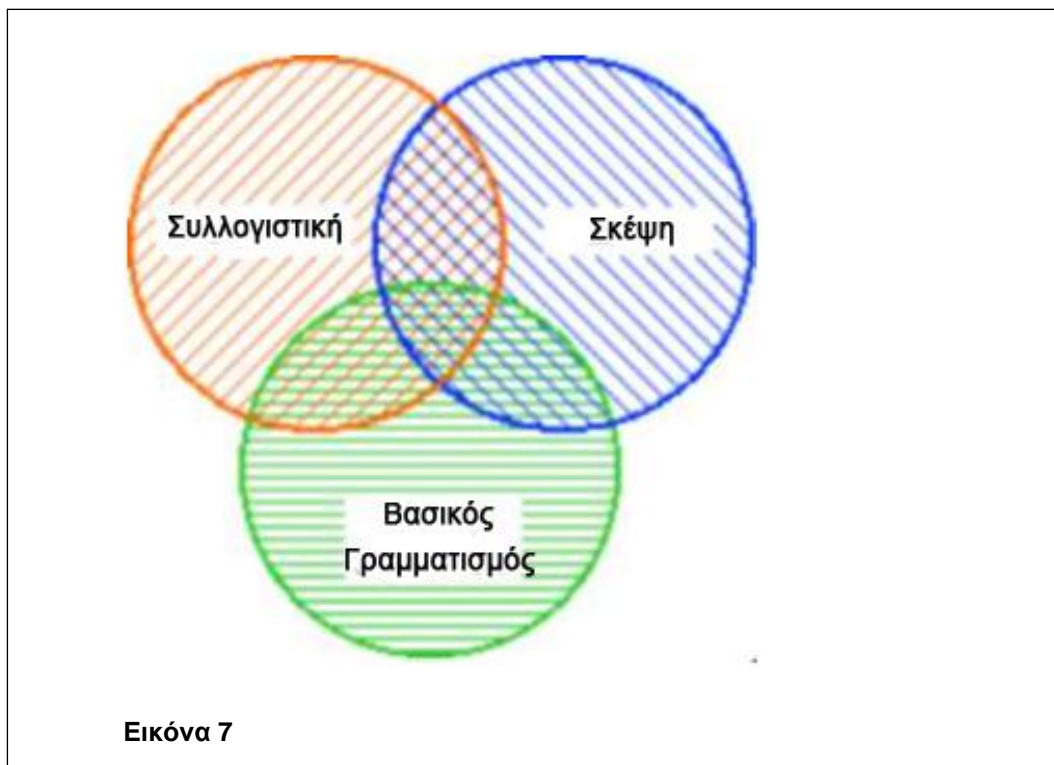
4.3 Στατιστική συλλογιστική

Σύμφωνα με τους Garfield & Gal (1999) , Garfield (2002) «*Η στατιστική συλλογιστική μπορεί να οριστεί ως ο τρόπος με τον οποίο οι άνθρωποι συλλογίζονται με στατιστικές ιδέες και νοηματοδοτούν τις στατιστικές πληροφορίες. Αυτός εμπεριέχει ερμηνείες που βασίζονται σε σύνολα δεδομένων, γραφικές αναπαραστάσεις ή στατιστικές περιλήψεις. Μέρος της στατιστικής συλλογιστικής συνδυάζει ιδέες σχετικές με τα δεδομένα και τις πιθανότητες και οδηγεί σε συμπεράσματα και ερμηνείες των στατιστικών αποτελεσμάτων. Πίσω από αυτή τη συλλογιστική είναι μια εννοιολογική κατανόηση σημαντικών ιδεών, όπως η κατανομή, το κέντρο, η διασπορά, η συσχέτιση, η αβεβαιότητα, η τυχαιότητα και η δειγματοληψία. Μπορεί να περιλαμβάνει σύνδεση της μιας έννοιας με την άλλη (π.χ. κέντρο και διασπορά)*»

Η στατιστική συλλογιστική σημαίνει να κατανοεί και να μπορεί κάποιος να εξηγήσει στατιστικές διαδικασίες και να μπορεί να ερμηνεύσει πλήρως στατιστικά αποτελέσματα (Ben-Zvi & Garfield 2004).

Είναι οι νοητικές αναπαραστάσεις και συνδέσεις που έχουν οι μαθητές σχετικά με τις στατιστικές έννοιες (Garfield & Ben-Zvi 2008)

Ο delMas (2002) υποστηρίζει ότι κάποιος μπορεί να δει τα αποτελέσματα της στατιστικής εκπαίδευσης σχετικά με τον στατιστικό γραμματισμό, την συλλογιστική και την σκέψη είτε ως ανεξάρτητους τομείς που έχουν κάποια επικάλυψη μεταξύ τους (Εικόνα 7), είτε την στατιστική συλλογιστική και σκέψη να



περιλαμβάνονται μέσα στον στατιστικό γραμματισμό (Εικόνα 8) ως αποτέλεσμα της ανάπτυξης ενός πολίτη που να είναι στατιστικά ικανός.

5 Η έρευνα αναφορικά με τα βασικά συστατικά της Στατιστικής σκέψης

5.1 Έρευνα σχετικά με την κατανόηση των γραφημάτων

Τα γραφήματα έχουν πολύ βασικό ρόλο στην αναπαράσταση των δεδομένων, την σύνοψή τους και την ανάλυση τους, την στατιστική σκέψη και συλλογιστική (Shaughnessy, 2007,σελ. 988).

Η Curcio (1987) δημιούργησε ένα θεωρητικό πλάσιο, σχετικά με την κατανόηση γραφημάτων δεδομένων, το οποίο περιλαμβάνει τρία επίπεδα:

- Ανάγνωση των δεδομένων, το οποίο σημαίνει εξαγωγή άμεσων πληροφοριών που υπάρχουν στην απεικόνιση των δεδομένων, αναγνώριση των συμβάσεων που υπάρχουν στα γραφήματα (π.χ η κλίμακα, η μονάδα μέτρησης κλπ) καθώς και άμεσες συνδέσεις ανάμεσα στα αρχικά δεδομένα και στην απεικόνισή τους.
- Ανάγνωση ανάμεσα στα δεδομένα, που σημαίνει εύρεση σχέσεων στα δεδομένα που παριστάνονται στο γράφημα. Αυτό περιλαμβάνει συγκρίσεις ανάμεσα στα δεδομένα (π.χ. μεγαλύτερο από, μεγαλύτερο, μικρότερο από κλπ) όπως επίσης και πράξεις (πρόσθεση , αφαίρεση, κλπ) στα δεδομένα δηλαδή συνδυασμός των δεδομένων.
- Ανάγνωση πέρα από τα δεδομένα, το οποίο σημαίνει πρόβλεψη ή εξαγωγή συμπερασμάτων από την απεικόνιση των δεδομένων με σκοπό να απαντηθούν έμμεσα ερωτήματα. Για παράδειγμα αν τα δεδομένα που εξετάζουν οι μαθητές, είναι ο αριθμός των γραμμάτων των ονομάτων μαθητών, αν έρθει ένας νέος μαθητής στην τάξη πόσα γράμματα προβλέπουν ότι θα έχει το όνομά του;

Ο Shaughnessy (2007) υποστηρίζει ότι υπάρχει ακόμα ένα επίπεδο κατανόησης πέρα απ' τα τρία που προτείνει η Curcio και αυτό είναι η ανάγνωση πίσω από τα δεδομένα, δηλαδή η σύνδεση των δεδομένων με το συγκεκριμένο τους και η αναζήτηση συνθηκών που μπορεί να επέδρασαν στην μεταβλητότητα των δεδομένων. Για παράδειγμα όταν οι μαθητές εξετάζουν ένα γράφημα που δείχνει την χρονική εξέλιξη της ετήσιας κατανάλωσης χυμών φρούτων ανά άτομο, κατά την ανάγνωση πίσω από τα δεδομένα, προσπαθούν να εικάσουν πιθανούς λόγους και να προτείνουν εξηγήσεις για τις γενικές τάσεις που εμφανίζονται στο γράφημα ή για απότομες αυξομειώσεις κλπ.

5.2 Μεταβλητότητα – μεταβολή (variability – variation²)

Όπως σημειώνουν οι Reading & Shaughnessy (2004) οι όροι *μεταβλητότητα* και *μεταβολή* είναι δύο όροι που χρησιμοποιούνται από διάφορους ερευνητές στην ερευνητική βιβλιογραφία χωρίς διάκριση, ο ένας στην θέση του άλλου. Ο όρος *μεταβολή*, σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, είναι ένα ουσιαστικό που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την πράξη της αλλαγής ή της μεταβολής κατάστασης ενώ *μεταβλητότητα* είναι ένας τύπος ουσιαστικού από το επίθετο «μεταβλητός» και σημαίνει ότι κάτι έχει την τάση ή είναι επιρρεπές στο να μεταβληθεί ή να αλλάξει, γι' αυτό προτείνουν ο όρος *μεταβλητότητα* να σημαίνει την τάση κάποιου πράγματος να αλλάζει, ενώ ο όρος *μεταβολή* να είναι η περιγραφή ή η μέτρηση αυτής της τάσης.

Ο Moore (1997) επισημαίνει ότι η μεταβλητότητα καθώς και η μέτρηση και η μοντελοποίηση της είναι σημαντικά στοιχεία της στατιστικής σκέψης, ενώ οι Wild & Pfannkuch (1999, σελ. 236) υποστηρίζουν ότι η μεταβολή είναι η αιτία για την οποία οι άνθρωποι έπρεπε να αναπτύξουν εκλεπτυσμένες στατιστικές μεθόδους για να φιλτράρουν οποιαδήποτε μηνύματα στα δεδομένα από τον περιβάλλοντα θόρυβο.

Σύμφωνα με τους Reading & Shaughnessy (2004) δεν έχει δοθεί η πρέπει σημασία στη μεταβολή (variation) και κατά την δημιουργία προγραμμάτων σπουδών και κατά την έρευνα στην διδακτική της στατιστικής, παρά το γεγονός του σημαντικού ρόλου της στην Στατιστική. Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, υπάρχει μια αυξημένη έμφαση στα μέτρα θέσης

² Προτιμήσαμε να αποδώσουμε τον όρο *variation* ως *μεταβολή* και όχι ως *διακύμανση*, επειδή στο συνοδευτικό γλωσσάρι των Στατιστικών όρων (<http://seniorsecondary.tki.org.nz/content/download/2195/18147/file/Full%20Glossary%20of%20Statistics%20Terms.doc>) που βρήκαμε στον ιστότοπο που υποστηρίζει το Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών στο Λύκειο (Senior Secondary School) στη Νέα Ζηλανδία (<http://seniorsecondary.tki.org.nz/Mathematics-and-statistics>) οι όροι *variance* (*διακύμανση*) και *variation* (*μεταβολή*) είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

και μια μειωμένη προσοχή στα μέτρα μεταβλητότητας, στην αναγνώριση πιθανών πηγών μεταβλητότητας, στην μοντελοποίησή της ή στην οπτικοποίησή της.

Οι Watson, Kelly, Callingham, & Shaughnessy (2003) εξερεύνησαν τρία πλαίσια για την μεταβολή: μεταβλητότητα στα αποτελέσματα πειραμάτων τύχης, μεταβλητότητα σε συγκεκριμένες ομάδες δεδομένων και μεταβλητότητα κατά την δειγματοληψία και περιέγραψαν τέσσερα επίπεδα συλλογιστικής σχετικά με την μεταβλητότητα σε αυτά τα πλαίσια: *προϋποθέσεις της μεταβολής, μερική αναγνώριση της μεταβολής, εφαρμογές της μεταβολής και κρίσιμες πτυχές της μεταβολής.*

6 Μεθοδολογία Ανάλυσης των Προγραμμάτων Σπουδών

Πηγές που χρησιμοποιήθηκαν:

Για τις ΗΠΑ χρησιμοποιήθηκαν

- Το *Principles and Standards for School Mathematics* στην έντυπη (NCTM, 2000) και στην ηλεκτρονική του έκδοση (<http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=16909>)
- *To Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) PreK-12 Report* (Franklin, et al., 2005)

Για τον Καναδά χρησιμοποιήθηκαν:

- Το *The Ontario Curriculum Grades 1 - 8, Mathematics* (Ontario, 2005), *The Ontario Curriculum Grades 9 and 10, Mathematics* (Ontario 2005 b) και το *The Ontario Curriculum Grades 11 and 12, Mathematics* (Ontario, 2007 a) της επαρχίας Οντάριο του Καναδά.
- Τα βιβλία εκπαιδευτικού:
 - *A Guide to Effective Instruction in Mathematics, Kindergarten to Grade 3 - Data Management and Probability* (Ontario, 2007 b)
 - *A Guide to Effective Instruction in Mathematics, Grades 4 to 6 - Data Management and Probability* (Ontario, 2008)

Για την Νέα Ζηλανδία χρησιμοποιήθηκαν:

- Το γενικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά καθώς και οι οδηγοί για τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα: *The New Zealand Curriculum* (MoE, 2007 a), *The New Zealand Curriculum: Mathematics Standards for years 1-8* (MoE, 2009), *The New Zealand Curriculum: Curriculum achievement objectives by level*, (MoE, 2007 c)

- Ο οδηγός εκπαιδευτικού σχετικά με την Στατιστική και την διδασκαλία της: *Book 9: Teaching Number through Measurement, Geometry, Algebra and Statistics - Numeracy Professional Development Projects 2007*, (MoE, 2007 e), καθώς και υλικό που απευθύνεται στον εκπαιδευτικό, στους διαδικτυακούς τόπους του Υπουργείου Παιδείας που υποστηρίζουν το Πρόγραμμα Σπουδών και την διδασκαλία των Μαθηματικών και της Στατιστικής:
NZMATH (<http://nzmaths.co.nz/>) , που απευθύνεται στις τάξεις 1-8 (υποχρεωτική εκπαίδευση) και για τα επίπεδα 1-4 του Προγράμματος Σπουδών (βλέπε §7.1, Νέα Ζηλανδία), καθώς και τον διαδικτυακό τόπο <http://senioresecondary.tki.org.nz/Mathematics-and-statistics>, που έχει υλικό σχετικό με τις υπόλοιπες τάξεις και τα υπόλοιπα επίπεδα.
- Τα βιβλία για τον εκπαιδευτικό και τον μαθητή της σειράς *Figure it out*, σχετικά με την Στατιστική (MoE, 2008 a; MoE, 2008 f; MoE, 2008 e; MoE, 2008 d; MoE, 2004 b; MoE, 2009 h; MoE, 2008 b; MoE, 2008 c; MoE, 2004), τα οποία αναλύουν δραστηριότητες για τους μαθητές, που είναι γραμμένες σύμφωνα με το πνεύμα και την φιλοσοφία του Προγράμματος Σπουδών. Οι αναφερόμενες δραστηριότητες υπάρχουν στον διαδικτυακό τόπο: http://www.nzmaths.co.nz/figure-it-out-carousel-interface?parent_node=#p=0.
 Τα βιβλία αυτά για τον εκπαιδευτικό και για τον μαθητή, διανέμονται σε όλα τα σχολεία της Νέας Ζηλανδίας, όμως σύμφωνα με το σύστημά τους, το σχολείο και οι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιούν άλλα βιβλία του εμπορίου. Τα βιβλία της προαναφερόμενης σειράς απευθύνονται στα επίπεδα 2 έως 4+ , δηλαδή στις τάξεις 4 έως 9.

7 Αποτελέσματα

7.1 Γενικά χαρακτηριστικά των Προγραμμάτων Σπουδών στις τρεις χώρες

ΗΠΑ

Το *Principles and Standards for School Mathematics* περιλαμβάνει έξι αρχές (Principles) και δέκα κριτήρια (Standards). Οι αρχές περιγράφουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά μιας υψηλού επιπέδου μαθηματικής εκπαίδευσης και τα κριτήρια περιγράφουν το μαθηματικό περιεχόμενο και τις διαδικασίες που οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν (NCTM, 2000, σ. 11).

Οι έξι αρχές περιγράφουν την φιλοσοφία του Προγράμματος Σπουδών σχετικά με θέματα ισότητας, ανάπτυξης του Προγράμματος Σπουδών, διδασκαλίας, μάθησης, αξιολόγησης και του ρόλου της τεχνολογίας.

Τα κριτήρια χωρίζονται ως προς το περιεχόμενο και ως προς τις διεργασίες και είναι:

- Ως προς το περιεχόμενο:
 - Αριθμοί και πράξεις
 - Άλγεβρα
 - Γεωμετρία
 - Μέτρηση
 - Ανάλυση Δεδομένων και Πιθανότητες
- Ως προς τις διεργασίες:
 - Επίλυση προβλήματος
 - Συλλογιστική και Αποδείξεις
 - Επικοινωνία
 - Συνδέσεις
 - Αναπαράσταση

Τα πέντε κριτήρια διεργασιών δεν θεωρούνται ξεχωριστές θεματικές ενότητες στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών, αλλά αντίθετα κατευθύνουν μεθόδους ή διαδικασίες των μαθηματικών στο σύνολό τους και είναι αναπόσπαστα συστατικά της συνολικής μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών.

Αναφέρεται ότι η Στατιστική και οι Πιθανότητες επιτρέπουν στους μαθητές αλλά και στους καθηγητές να κάνουν σημαντικές συνδέσεις ανάμεσα σε ιδέες και διαδικασίες από τους αριθμούς, την άλγεβρα, την μέτρηση, την γεωμετρία. Η εργασία στην ανάλυση των δεδομένων και τις πιθανότητες προσφέρει έναν φυσικό τρόπο ώστε οι μαθητές να συνδέσουν τα μαθηματικά με άλλα μαθήματα καθώς και με εμπειρίες από την ζωή τους. Επιπλέον οι διεργασίες που χρησιμοποιούνται για την συλλογιστική σχετικά με δεδομένα και στατιστικές θα εξυπηρετήσουν τους μαθητές στην εργασία και την ζωή. (NCTM, 2000, σελ. 48) .

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε θεματική ενότητα περιεχομένου περιγράφονται σε τέσσερις ομάδες τάξεων³ που είναι:

- Από το προνήπιο έως την 2^η τάξη
- Από την 3^η έως την 5^η τάξη
- Από την 6^η έως την 8^η τάξη
- Από την 9^η έως την 12^η τάξη

³ Με βάση το εκπαιδευτικό σύστημα των ΗΠΑ η σχολική εκπαίδευση περιλαμβάνει το Preschool (προνήπιο), το Kindergarten (νηπιαγωγείο), οι τάξεις 1 έως 5 ανήκουν στο Elementary School (αντίστοιχο του Δημοτικού σχολείου), οι τάξεις από την 6 έως την 8 ανήκουν στο Middle School (αντίστοιχο του Γυμνασίου) και οι υπόλοιπες τάξεις ανήκουν στο High School (αντίστοιχο του Λυκείου)

Η Στατιστική και οι Πιθανότητες διατρέχουν όλες τις προηγούμενες ομάδες και οι τέσσερις άξονες θεματικού περιεχομένου της Στατιστικής (content strand) είναι:

- διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν απαντηθούν με δεδομένα και συλλογή, οργάνωση και απεικόνιση των δεδομένων για να απαντηθεί το ερώτημα
- επιλογή και χρήση κατάλληλων στατιστικών μεθόδων για την ανάλυση των δεδομένων
- ανάπτυξη και κρίση συμπερασμάτων και προβλέψεων που να είναι βασισμένα στα δεδομένα
- κατανόηση και χρήση βασικών εννοιών των πιθανοτήτων

Σε κάθε άξονα θεματικού περιεχομένου περιγράφονται τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα.

Για παράδειγμα για την 3^η έως την 5^η τάξη στον άξονα θεματικού περιεχομένου :

- επιλογή και χρήση κατάλληλων στατιστικών μεθόδων για την ανάλυση των δεδομένων

περιγράφονται ως προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα ότι οι μαθητές:

- περιγράφουν το σχήμα και τα σημαντικά χαρακτηριστικά ενός συνόλου δεδομένων και συγκρίνουν σχετιζόμενα σύνολα δεδομένων με κάποια έμφαση στο πώς κατανέμονται τα δεδομένα
- χρησιμοποιούν μέτρα θέσης, εστιάζοντας στην διάμεσο και κατανοούν τι δείχνει και τι δεν δείχνει το καθένα
- συγκρίνουν διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου συνόλου δεδομένων και αξιολογούν πόσο καλά κάθε αναπαράσταση δείχνει σημαντικές πτυχές των δεδομένων

Το *Gaise Report* αναφέρει ότι κύριος στόχος του είναι να προσφέρει ένα εννοιολογικό πλαίσιο για την Στατιστική εκπαίδευση στο σχολείο και βασική του επιδίωξη ο στατιστικός γραμματισμός. Αναφέρει ότι τα θεμέλια του

πλαisiού είναι το *Principles and Standards for School Mathematics* και προορίζεται για να υποστηρίξει τους στόχους του *Principles and Standards for School Mathematics* προσφέροντας μια εννοιολογική δομή που δίνει μια συνεκτική εικόνα όλου του Προγράμματος Σπουδών στην Στατιστική. Περιγράφει διαφορές ανάμεσα στα Μαθηματικά και την Στατιστική.

Η κύρια αντικειμενική επιδίωξη της Στατιστικής εκπαίδευσης είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν στατιστική σκέψη. Η στατιστική σκέψη κατά μεγάλο μέρος πρέπει να ασχοληθεί με την πανταχού παρουσία της μεταβλητότητας.

- Η εστίαση στην μεταβλητότητα των δεδομένων διαχωρίζει την Στατιστική από τα Μαθηματικά
- Ο ρόλος του πλαισίου είναι σημαντικός για την Στατιστική αλλά όχι και τόσο για τα Μαθηματικά

Είναι δομημένο γύρω από την διεργασία επίλυσης στατιστικού προβλήματος και τον ρόλο της μεταβλητότητας στην διεργασία αυτή.

Η διεργασία επίλυσης στατιστικού προβλήματος περιγράφεται ως μια ερευνητική διεργασία που εμπεριέχει τέσσερα συστατικά στοιχεία:

Διατύπωση ερωτημάτων

- Αποσαφήνιση του προβλήματος
- Διατύπωση ενός ή περισσότερων ερωτημάτων τα οποία μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα

Συλλογή δεδομένων

- Δημιουργία σχεδίου για την συλλογή κατάλληλων δεδομένων
- Εφαρμογή του σχεδίου για την συλλογή δεδομένων

Ανάλυση των δεδομένων

- Επιλογή κατάλληλων γραφικών και αριθμητικών μεθόδων

- Χρήση αυτών των μεθόδων για την ανάλυση των δεδομένων

Ερμηνεία των αποτελεσμάτων

- Ερμηνεία της ανάλυσης
- Συσχέτιση της ερμηνείας με το αρχικό ερώτημα

Ο ρόλος της μεταβλητότητας στα συστατικά στοιχεία της διεργασίας επίλυσης στατιστικού προβλήματος αλλά και η επίδραση που έχει η μεταβλητότητα στην Στατιστική, όπως εμφανίζεται σε διάφορα σημεία του *GAISE Report* θα μπορούσε να παρασταθεί με τον παρακάτω πίνακα:

Συστατικά στοιχεία της επίλυσης του Στατιστικού προβλήματος	Ρόλος της μεταβλητότητας	Επίδραση στην Στατιστική
<i>Διατύπωση ερωτημάτων</i>	Προσδοκία μεταβλητότητας (Anticipating variability)	Κάνει τα στατιστικά ερωτήματα διακεκριμένα (από τα ντετερμινιστικά)
<i>Συλλογή δεδομένων</i>	Αναγνώριση μεταβλητότητας (Acknowledging variability)	Σχεδιασμός για διαφορές
<i>Ανάλυση των δεδομένων</i>	Μία περιγραφή της μεταβλητότητας (An accounting of variability)	Χρήση κατανομών

<i>Ερμηνεία των αποτελεσμάτων</i>	Επιτρέποντας την μεταβλητότητα (Allowing for variability)	Κοιτώντας πέρα από τα δεδομένα
-----------------------------------	--	--------------------------------

Το μοντέλο που αναφέρεται στο GAISE Report, παρουσιάζει τρία αναπτυξιακά επίπεδα «ωρίμανσης» του μαθητή σχετικά με την κατανόηση του ρόλου της μεταβλητότητας στην διεργασία επίλυσης του στατιστικού προβλήματος και ένα μέρος του παρουσιάζεται στον επόμενο πίνακα, μαζί με τις δύο τελευταίες γραμμές που περιγράφουν την φύση της μεταβλητότητας και την εστίαση στην μεταβλητότητα.

Συστατικά διεργασίας επίλυσης στατιστικού προβλήματος	Επίπεδο Α	Επίπεδο Β	Επίπεδο Γ
.....
Συλλογή δεδομένων	Δεν γίνονται ακόμα σχεδιασμοί για διαφορές	Αρχίζει η συνειδητοποίηση του σχεδιασμού για διαφορές	Οι μαθητές κάνουν σχεδιασμούς για διαφορές
	Απογραφή στην τάξη	Δειγματοληπτική έρευνα	
		Αρχίζουν να χρησιμοποιούν την τυχαία επιλογή	Σχεδιασμοί δειγματοληψίας με τυχαία επιλογή
	Απλά πειράματα	Συγκριτικά πειράματα	
		Αρχίζουν να χρησιμοποιούν την τυχαία ανά-	Πειραματικά σχέδια με τυχαιοποίηση

		θεση	
.....
Φύση της μεταβλητότητας	Μεταβλητότητα μέτρησης Φυσική μεταβλητότητα	Μεταβλητότητα δειγματοληψίας	Τυχαία μεταβλητότητα
Εστίαση στην μεταβλητότητα	Μεταβλητότητα εντός μιας ομάδας	Μεταβλητότητα εντός μιας ομάδας και μεταβλητότητα ανάμεσα σε ομάδες Συμμεταβλητότητα	Μεταβλητότητα στην προσαρμογή μοντέλου

Καναδάς (Οντάριο)

Το Πρόγραμμα Σπουδών του Οντάριο για την υποχρεωτική εκπαίδευση⁴ (Ontario, 2005 a) περιλαμβάνει τις βασικές αρχές πάνω στις οποίες είναι δομημένο, τις μαθηματικές διεργασίες, την αξιολόγηση των μαθητών καθώς και θέματα που πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν για την εφαρμογή του Προγράμματος(π.χ. ισότητα, ο ρόλος της τεχνολογίας κλπ).

Οι μαθηματικές διεργασίες περιγράφονται ότι είναι το μέσο με το οποίο οι μαθητές αποκτούν και εφαρμόζουν τη μαθηματική γνώση και τις δεξιότητες. Υπάρχουν προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε διεργασία και για κάθε τάξη. Οι διεργασίες που έχει το Πρόγραμμα Σπουδών είναι:

- Επίλυση Προβλήματος
- Συλλογιστική και Απόδειξη
- Αναστοχασμός
- Επιλογή εργαλείων και υπολογιστικών στρατηγικών
- Συνδέσεις
- Αναπαραστάσεις
- Επικοινωνία

Το Πρόγραμμα περιλαμβάνει πέντε θεματικές περιοχές:

- Αίσθηση των αριθμών και Αρίθμηση
- Γεωμετρία και Χωρική Αίσθηση
- Κανονικότητες και Άλγεβρα
- Διαχείριση Δεδομένων και Πιθανότητες

⁴ Αναφέρεται ως Elementary School και περιλαμβάνει τις τάξεις 1 έως 8

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε διεργασία και για κάθε θεματική περιοχή περιγράφονται ανά τάξη. Στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα περιγράφονται πρώτα γενικά προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και μετά εξειδικεύονται.

Για την διαχείριση δεδομένων και τις πιθανότητες αναφέρεται ότι τα σχετικά θέματα είναι πολύ σχετικά με την καθημερινή ζωή και ότι οι πιθανότητες προσφέρουν ένα πλούτο προβλημάτων που θα ενθουσιάσουν τους μαθητές και επίσης προσφέρουν μια γέφυρα για άλλα θέματα όπως οι λόγοι, τα κλάσματα, τα ποσοστά κλπ. Κατά την εργασία τους στην θεματική περιοχή της Διαχείρισης Δεδομένων και των Πιθανοτήτων οι μαθητές μαθαίνουν να εφαρμόζουν μια ποικιλία ερευνητικών μεθόδων καθώς επιλύουν στατιστικά προβλήματα. Επίσης μαθαίνουν να προσδιορίζουν σχετικές πληροφορίες από μια ποικιλία πηγών όπως στατιστικές βάσεις δεδομένων, εφημερίδες και αναφορές.

Η Στατιστική και οι Πιθανότητες εμφανίζονται στο Πρόγραμμα Σπουδών σε όλες τις τάξεις και οι άξονες θεματικού περιεχομένου είναι:

- Συλλογή και οργάνωση των Δεδομένων
- Σχέσεις Δεδομένων
- Πιθανότητες

Για κάθε τάξη περιγράφονται τα συνολικά προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, που είναι περιγραφή με γενικούς όρους της γνώσης και των δεξιοτήτων που αναμένεται να επιδείξουν οι μαθητές και μετά αυτά περιγράφονται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια ως ειδικά προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Για παράδειγμα στην τάξη 4 περιγράφονται ως συνολικά προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και μετά ένα από τα ειδικά τα παρακάτω:

- Συλλέγουν και οργανώνουν διακριτά πρωτεύοντα δεδομένα και απεικονίζουν τα δεδομένα σε διαγράμματα και γραφήματα, πε-

ριλαμβανομένων των φυλλογραφημάτων και των διπλών ραβδογραμμάτων

- ο Συλλέγουν δεδομένα πραγματοποιώντας μια δημοσκόπηση (π.χ. «Διάλεξε το αγαπημένο σου γεύμα από την ακόλουθη λίστα: πρωινό, μεσημεριανό, βραδινό, άλλο) σχετικά με αυτούς ή το περιβάλλον, θέματα από το σχολείο τους ή την κοινότητα ή κάνοντας ένα πείραμα με περιεχόμενο από άλλο μάθημα και καταγράφουν παρατηρήσεις ή μετρήσεις

Στην 9^η τάξη η Διαχείριση δεδομένων σχετίζεται με την Άλγεβρα και τις γραμμικές σχέσεις μόνο, ενώ στην 10^η τάξη δεν υπάρχει κάτι σχετικό (Ontario, 2005 b).

Ομοίως δεν υπάρχει στην 11^η τάξη ενώ στην 12^η τάξη υπάρχει σαν ειδικό μάθημα που οδηγεί σε Πανεπιστημιακές Σπουδές (Ontario, 2007).

Νέα Ζηλανδία

Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών της Νέας Ζηλανδίας για την υποχρεωτική εκπαίδευση εκδόθηκε από το Υπουργείο Παιδείας Ministry of Education [MoE] το 2007 (MoE, 2007 a).

Σχετικά με το μάθημα αυτό αναφέρεται ως Μαθηματικά και Στατιστική, ενώ στο παλιό Πρόγραμμα το μάθημα αναφέρονταν ως Μαθηματικά. Επίσης δεν περιέχει διεργασίες ενώ το παλιό είχε (MoE, 1995), όμως σε όλα τα σημεία πριν τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα αναφέρεται: «*Σε πλαίσια που θα απαιτούν απ' αυτούς να λύσουν προβλήματα ή να μοντελοποιήσουν καταστάσεις, οι μαθητές θα...*»

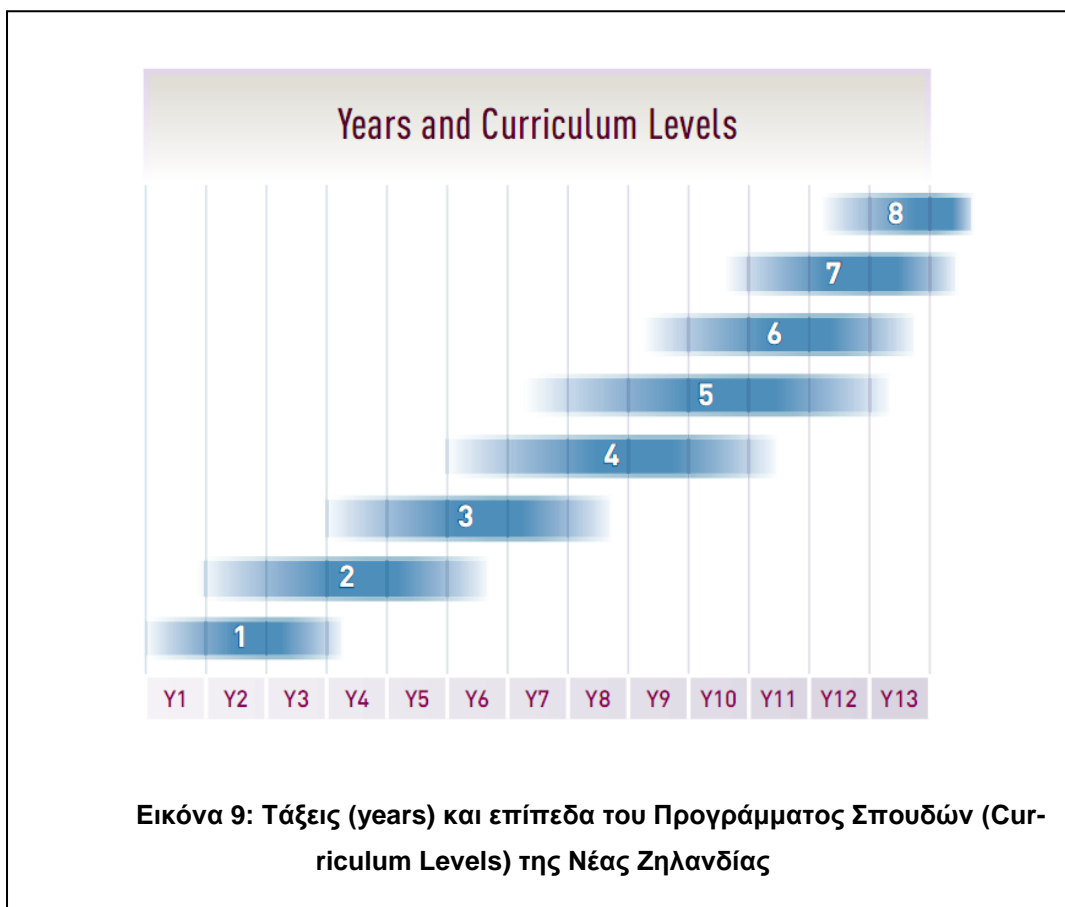
Τα Μαθηματικά περιγράφονται ότι είναι η εξερεύνηση και η χρήση των κανονικοτήτων και των σχέσεων σε ποσότητες, το χώρο και τον χρόνο. Η Στατιστική είναι η εξερεύνηση και η χρήση των κανονικοτήτων και των σχέσεων στα δεδομένα. Τα δύο επιστημονικά πεδία σχετίζονται αλλά έχουν διαφορετικούς τρόπους σκέψης και επίλυσης προβλημάτων.

Το πρόγραμμα Σπουδών περιέχει τρεις θεματικές περιοχές αντικειμένου:

- Αριθμός και Άλγεβρα
- Γεωμετρία και μέτρηση
- Στατιστική

Είναι δομημένο γύρω από 8 αναπτυξιακά επίπεδα , δηλαδή τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα δεν αναφέρονται σε τάξη αλλά αναφέρονται σε επίπεδο και περιγράφονται στο *The New Zealand Curriculum: Curriculum achievement objectives by level* (MoE, 2007 c). Τα επίπεδα (levels) παρουσιάζονται στην εικόνα 9, ενώ οι σχολικές τάξεις αναφέρονται ως έτη (years). Η υποχρεωτική εκπαίδευση είναι ως την 8^η τάξη.

Τα επίπεδα μέχρι και το 4^ο , που είναι η υποχρεωτική εκπαίδευση έχουν οριστικοποιηθεί, ενώ τα υπόλοιπα δεν έχουν εφαρμοστεί σε εθνικό επίπεδο.



πεδο, απ' όσο μπορέσαμε να καταλάβουμε από τον διαδικτυακό τόπο του Υπουργείου Παιδείας που είναι για την υποστήριξη των Μαθηματικών και της Στατιστικής, τον NZMATH (<http://nzmaths.co.nz/>).

Η Στατιστική διατρέχει όλες τις τάξεις και τα επίπεδα και οι άξονες θεματικού περιεχομένου είναι:

- Στατιστικές εξερευνήσεις
- Στατιστικός γραμματισμός
- Πιθανότητες

Τα ευρήματα σχετικά με τα Προγράμματα Σπουδών συγκεντρώνονται και περιγράφονται στους παρακάτω πίνακες.

Συγκριτικός πίνακας του Προγράμματος Σπουδών των τριών χωρών ως προς το περιεχόμενο (θεματικές περιοχές) και τις διεργασίες			
	ΗΠΑ	ΚΑΝΑΔΑΣ	ΝΕΑ ΖΗΛΑΝΔΙΑ
ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ	<p>Αριθμοί και πράξεις</p> <p>Άλγεβρα</p> <p>Γεωμετρία</p> <p>Μέτρηση</p> <p>Ανάλυση Δεδομένων και Πιθανότητες</p>	<p>Αίσθηση των αριθμών και Αρίθμηση</p> <p>Κανονικότητες και Άλγεβρα</p> <p>Γεωμετρία και Χωρική Αίσθηση</p> <p>Διαχείριση Δεδομένων και Πιθανότητες</p>	<p>Αριθμός και Άλγεβρα</p> <p>Γεωμετρία και μέτρηση</p> <p>Στατιστική</p>
ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ	<p>Επίλυση προβλήματος</p> <p>Συλλογιστική και Απόδειξεις</p> <p>Επικοινωνία</p> <p>Συνδέσεις</p>	<p>Επίλυση Προβλήματος</p> <p>Συλλογιστική και Απόδειξη</p> <p>Επικοινωνία</p> <p>Συνδέσεις</p>	<p>Επίλυση προβλήματος</p> <p>Μοντελοποίηση</p>

	Αναπαράσταση	Αναπαραστάσεις Επιλογή εργαλείων και υπολογιστικών στρατηγικών Αναστοχασμός	
--	--------------	---	--

Συγκριτικός πίνακας του Προγράμματος Σπουδών των τριών χωρών ως προς τις τάξεις και ως προς τους άξονες θεματικού περιεχομένου που διατρέχουν το περιεχόμενο της Στατιστικής			
	ΗΠΑ (NCTM)	ΚΑΝΑΔΑΣ (Ontario)	ΝΕΑ ΖΗΛΑΝΔΙΑ
ΤΑΞΕΙΣ	Όλες	1-8	Όλες
Άξονες θεματικού περιεχομένου	<p>Διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν απαντηθούν με δεδομένα και συλλογή, οργάνωση και απεικόνιση των δεδομένων για να απαντηθεί το ερώτημα</p> <p>Επιλογή και χρήση κατάλληλων στατιστικών μεθόδων για την ανάλυση των δεδομένων</p> <p>Ανάπτυξη και κρίση συμπερασμάτων και προβλέψεων που να είναι βασισμένα στα δεδομένα</p> <p>Κατανόηση και χρή-</p>	<p>Συλλογή και οργάνωση των Δεδομένων</p> <p>Σχέσεις Δεδομένων</p> <p>Πιθανότητες</p>	<p>Στατιστικές εξερευνήσεις</p> <p>Στατιστικός γραμματισμός</p> <p>Πιθανότητες</p>

	ση βασικών εννοιών των πιθανοτήτων		
--	---------------------------------------	--	--

7.2 Στατιστικός γραμματισμός

Ο Στατιστικός γραμματισμός στο Πρόγραμμα Σπουδών των ΗΠΑ

Αποτελέσματα σε σχέση με τους γενικούς στόχους της Μαθηματικής και της Στατιστικής εκπαίδευσης.

Αναγνωρίζεται έμμεσα ή άμεσα ο ρόλος της Στατιστικής στην Δημόσια ή την Ιδιωτική ζωή. Στην Δημόσια να γίνουν ενεργοί και κριτικοί πολίτες και στην Ιδιωτική για να παίρνουν αποφάσεις σχετικές με σπουδές όπως επίσης επαγγελματικές ή καταναλωτικές αποφάσεις.

Τα μέλη μιας νοήμονος πολιτείας πρέπει να είναι σε θέση να κρίνουν ισχυρισμούς, να βρίσκουν ανακόλουθα συμπεράσματα, να εκτιμούν τους κινδύνους και να σταθμίζουν τα αποδεικτικά στοιχεία (NCTM, 2000, σελ 16).

Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους στην ανάλυση δεδομένων και την μαθηματική μοντελοποίηση για να κατανοήσουν κοινωνικά θέματα και προβλήματα που σχετίζονται με εργασιακά θέματα (NCTM, 2000,σελ. 66)

Η Στατιστική συχνά χρησιμοποιείται με άσχημο τρόπο για να επηρεάσει την κοινή γνώμη σε διάφορα θέματα ή για να διαστρέψει την ποιότητα και την αποτελεσματικότητα των εμπορικών προϊόντων. Οι μαθητές χρειάζεται να γνωρίζουν σχετικά με την ανάλυση δεδομένων και τις σχετικές πτυχές της πιθανότητας ώστε να μπορούν να συλλογίζονται στατιστικά, δεξιότητες που είναι απαραίτητες για να γίνουν ενημερωμένοι πολίτες και έξυπνοι καταναλωτές ... οι διεργασίες που χρησιμοποιούνται στην συλλογιστική σχετικά με τα δεδομένα και την Στατιστική θα είναι χρήσιμες στους μαθητές στην [μετέπειτα] εργασία τους και την ζωή τους. (NCTM, 2000, σ. 48)

Η κατανόηση της Στατιστικής και των πιθανοτήτων μπορεί να τους εφοδιάσει [τους μαθητές των τάξεων 9-12] με τρόπους σκέψης σχετικά με ένα μεγάλο εύρος θεμάτων που έχουν σημαντικές κοινωνικές επιπτώσεις, όπως η

σκοπιμότητα έκδοσης αμφισβητούμενης αξιοπιστίας αποδεικτικών στοιχείων που μπορούν να προκαλέσουν πανικό σε σχέση με την υγεία ή πότε το αποτύπωμα του DNA μπορεί να θεωρηθεί ισχυρό ή ασθενές αποδεικτικό στοιχείο (NCTM, 2000, σελ 288)

Οι μαθητές πρέπει να τελειώσουν το Λύκειο με την ικανότητα να κρίνουν την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που βασίζονται σε δεδομένα, όπως αυτά που εμφανίζονται στον τύπο (NCTM, 2000, σελ. 50-51).

Αποτελέσματα από την ανάλυση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων και των στόχων τους.

Η αξιολόγηση συμπερασμάτων που βασίζονται σε δεδομένα ξεκινάει κυρίως από τις τάξεις 3-5 και διατρέχει όλο το Πρόγραμμα Σπουδών αφού είναι ένας από τους 4 άξονες θεματικού περιεχομένου της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων: «αναπτύσσουν και αξιολογούν συμπεράσματα και προβλέψεις που είναι βασισμένα σε δεδομένα»

Οι μαθητές από τις μικρές κιάλας τάξεις [3-5] συλλέγουν δεδομένα που μπορεί να μην είναι δικά τους, έτσι έρχονται αντιμέτωποι με πραγματικά- κοινωνικά πλαίσια, τα δεδομένα μπορεί να προερχόμενα από μια ποικιλία πηγών και έρχονται αντιμέτωποι με ποικιλίες απεικονίσεων τις οποίες προσπαθούν να αναλύσουν και να ερμηνεύσουν: «Μπορεί να μαζέψουν τα δικά τους δεδομένα, να χρησιμοποιήσουν δεδομένα που έχουν ήδη συλλεχθεί από το σχολικό τους περιβάλλον ή την πόλη ή να χρησιμοποιήσουν υπάρχοντα σύνολα δεδομένων όπως απογραφικά ή μετεωρολογικά» (σελ 117)

Οι μαθητές των τάξεων 3-5 πρέπει να αποκτήσουν οικειότητα με μια ποικιλία απεικονίσεων απεικονίσεις που βρίσκονται στο περιβάλλον τους (π.χ. εφημερίδες, κουτιά δημητριακών κλπ) (NCTM, 2000,σελ. 178)

Βιβλία, εφημερίδες, ο Παγκόσμιος ιστός και άλλα μέσα είναι γεμάτα με απεικονίσεις δεδομένων και μέχρι να τελειώσουν τις τάξεις 3-5 οι μαθητές θα

πρέπει να μάθουν να διαβάζουν και να κατανοούν αυτές τις απεικονίσεις (NCTM, 2000,σελ. 49).

Επίσης αξιολογούν τους τρόπους συλλογής τους: «Όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν υπάρχοντα δεδομένα χρειάζεται να λάβουν υπόψη και να αξιολογήσουν τους τρόπους με τους οποίους τα δεδομένα συλλέχθηκαν» (σελ 178).

Παρουσιάζοντας οι μαθητές τα δεδομένα τους σε κάποιο κοινό αρχίζουν να λαμβάνουν υπόψη πτυχές των αναπαραστάσεων και να αξιολογούν πόσο καλά ή όχι σημαντικές πτυχές των δεδομένων εμφανίζονται μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις (σελ 178)

Η προτροπή οι μαθητές να μάθουν να βρίσκουν δεδομένα σε διάφορες πηγές σχετικά με το πρόβλημα που έχουν υπάρχει και στο Γυμνάσιο: «Επιπρόσθετα με την συλλογή δικών τους δεδομένων [από πειράματα] οι μαθητές πρέπει να μάθουν να συλλέγουν σχετικά [με το πείραμα τους] δεδομένα και από άλλες πηγές, όπως ο Παγκόσμιος Ιστός ή έντυπες εκδόσεις. Το *Consumer Reports*⁵, για παράδειγμα, συχνά συγκρίνει τα χαρακτηριστικά διάφορων προϊόντων οι μαθητές χρειάζεται να προσδιορίσουν ποια δεδομένα τους είναι χρήσιμα , να κατανοήσουν πώς συλλέχθηκαν και να λάβουν υπόψη τους περιορισμούς που μπορεί να επηρεάσουν την ερμηνεία»

Τάξεις 9-12

Τα εργαλεία και οι μέθοδοι που περιγράφονται σε αυτή την κατηγορία τάξεων είναι προχωρημένα και εκλεπτυσμένα. Περιγράφονται μέθοδοι από την Στατιστική Δειγματοληψία για τον σχεδιασμό πειραμάτων και την Στατιστική συμπερασματολογία (π.χ. εκτίμηση παραμέτρων, έλεγχος υποθέσεων, ε-

⁵ Είναι περιοδικό της Αμερικανικής Ένωσης Καταναλωτών, το οποίο διαθέτει και ιστοσελίδα.

κτίμηση σφάλματος, σχεδιασμός με τυχαία ανάθεση κλπ) αλλά με άτυπες μεθόδους όπως η προσομοίωση με υπολογιστή και όχι με τυπικές (π.χ. υπολογισμός της τιμής p μέσω θεωρητικών κατανομών)

Στις τάξεις 9-12 κάποια από τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα που περιγράφονται είναι ότι οι μαθητές:

- *Κατανοούν τις διαφορές ανάμεσα στα διάφορα είδη ερευνών και ποια είδη συμπερασμάτων μπορούν νόμιμα να προκύψουν από το κάθε είδος*
- *Γνωρίζουν τα χαρακτηριστικά των καλά σχεδιασμένων ερευνών , συμπεριλαμβανομένου του ρόλου της τυχαιοποίησης σε επισκοπικές έρευνες και πειραματικές έρευνες*
- *Αξιολογούν δημοσιευμένες έρευνες που είναι βασισμένες σε δεδομένα εξετάζοντας τον σχεδιασμό της έρευνας, την καταλληλότητα της ανάλυσης των δεδομένων και την εγκυρότητα των συμπερασμάτων.*

Οι μαθητές θα μάθουν να θέτουν ερωτήσεις που θα τους βοηθήσουν να αξιολογούν την ποιότητα των δημοσκοπήσεων, των ερευνών παρατήρησης και των ελεγχόμενων πειραμάτων ... θα γίνουν βαθύς γνώστες , αναλυτικοί και συνετοί καταναλωτές των πληροφοριών και των δεδομένων που παρήχθησαν από άλλους (NCTM, 2000, σελ 325)

Αποτελέσματα με βάση το ευρύτερο πλαίσιο των παραδειγμάτων που περιγράφονται.

Το γενικότερο πλαίσιο θεμάτων που περιγράφονται στις τάξεις K-5 είναι θέματα που αφορούν την ασφάλεια, το περιβάλλον, την επιστήμη, διατροφικές ή καταναλωτικές συνήθειες ή την οικονομία. Για παράδειγμα:

Οι μαθητές κάνουν μια έρευνα για να διαπιστώσουν αν τα αυτοκίνητα της γειτονιάς τους σταματούν στο σήμα στοπ ή όχι

Οι μαθητές προσπαθούν να βρουν τρόπους μείωσης της καθημερινής κατανάλωσης του νερού

Οι μαθητές κάνουν μετρήσεις της ποσότητας του νερού που δεν έχει εξατμιστεί σε δύο διαφορετικής διαμέτρου βάζα ανά δύο ημέρες

Εξετάζουν ως δεδομένα τις τροφές που καταναλώνονται και που πετιούνται σε ένα εστιατόριο (το θέμα είναι ανοικτό και μπορεί να συνδέεται με πολλές κατηγορίες)

Στις τάξεις 6-8 το ευρύτερο πλαίσιο των παραδειγμάτων είναι κυρίως επιστήμες και το περιβάλλον.

Οι μαθητές εξετάζουν ποια είναι τα χαρακτηριστικά που κάνουν ένα χάρτινο αεροπλανάκι να πετάει καλύτερα

Οι μαθητές εξετάζουν τις επιπτώσεις της μόλυνσης του περιβάλλοντος στα φυτά και τα ζώα

Στις τελευταίες τάξεις υπάρχουν παραδείγματα που σχετίζονται με εκλογές, με θέματα κοινωνικών διακρίσεων στην εργασία ή δικαστικά θέματα.

Οι μαθητές προσπαθούν να διαπιστώσουν πόσο πιθανό είναι σε μια επιχείρηση στην οποία πήραν προαγωγή 50 άτομα, να πήραν προαγωγή το πολύ 25 γυναίκες απ' όσους έκαναν αίτηση, αν όλοι είχαν τα ίδια τυπικά προσόντα και η αναλογία των γυναικών στο σύνολο των αιτήσεων ήταν 65%.

Ο Στατιστικός γραμματισμός στο Πρόγραμμα Σπουδών του Καναδά

Αποτελέσματα σε σχέση με τους γενικούς στόχους της Μαθηματικής και της Στατιστικής εκπαίδευσης.

Στο εισαγωγικό σημείωμα αναφέρεται ότι «Τα θέματα που σχετίζονται με την Στατιστική και τις Πιθανότητες είναι πολύ σχετικά με την καθημερινή ζωή. Τα γραφήματα και οι στατιστικές βομβαρδίζουν το κοινό στις διαφημίσεις, σφυγμομετρήσεις, τάσεις του πληθυσμού, εκτιμήσεις αξιοπιστίας, περιγραφές ανακαλύψεων από τους επιστήμονες και εκτιμήσεις για διάφορους κινδύνους σε σχέση με την υγεία.»

Καθώς εργάζονται οι μαθητές στην Στατιστική και τις Πιθανότητες μαθαίνουν να εφαρμόζουν μια ποικιλία ερευνητικών μεθόδων καθώς επιλύουν στατιστικά προβλήματα. Επίσης μαθαίνουν να εντοπίζουν πληροφορίες που σχετίζονται με το πρόβλημα από διάφορες πηγές όπως στατιστικές βάσεις δεδομένων, εφημερίδες και αναφορές.

Αποτελέσματα από την ανάλυση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων και των στόχων τους.

Στο Πρόγραμμα του Οντάριο τα δεδομένα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα αν τα έχουν συλλέξει οι μαθητές ή κάποιος άλλος. Τα πρώτα χαρακτηρίζονται ως πρωτεύοντα δεδομένα και τα άλλα δευτερεύοντα. Από την 4^η τάξη και μετά ερμηνεύει πρωτεύοντα και δευτερεύοντα δεδομένα, ενώ στις προηγούμενες τάξεις μόνο πρωτεύοντα. Επίσης από την 5^η τάξη και μετά συλλέγει και δευτερεύοντα δεδομένα από πηγές όπως οι εφημερίδες ή το διαδίκτυο. Στην 6^η τάξη ένα από τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι να εξηγήσει την επίπτωση της κλίμακας στα συμπεράσματα που βγάζει κάποιος, στις επόμενες τάξεις εξερευνά γραφήματα που αναπαριστούν τα

δεδομένα με παραπλανητικούς τρόπους ή προσδιορίζει μεροληψίες στις μεθόδους δειγματοληψίας.

Αποτελέσματα με βάση το ευρύτερο πλαίσιο των παραδειγμάτων που περιγράφονται.

Τα παραδείγματα στο Πρόγραμμα Σπουδών του Καναδά είναι πολύ μικρά σε έκταση και περισσότερο προσπαθούν να εξηγήσουν τον επιδιωκόμενο στόχο. Το ευρύτερο πλαίσιο τους είναι επιστημονικό (δεδομένα από πειράματα, καταγραφές θερμοκρασίας κλπ), δεδομένα από εκλογές, θέματα καθημερινά (lifestyle), καθώς και θέματα που σχετίζονται με το περιβάλλον π.χ. έρευνα σχετικά με την μόλυνση του περιβάλλοντος.

Ο Στατιστικός γραμματισμός στο Πρόγραμμα Σπουδών της Νέας Ζηλανδίας

Αποτελέσματα από την ανάλυση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων και των στόχων τους.

Ο στατιστικός γραμματισμός είναι ένας από τους τρεις άξονες του θεματικού περιεχομένου και διατρέχει όλες τις τάξεις. Οι άλλοι δύο άξονες είναι οι στατιστικές εξερευνήσεις και οι πιθανότητες. Ένα χαρακτηριστικό που υπάρχει σε όλες τις διατυπώσεις των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων είναι ότι απαιτείται ερμηνεία, σύγκριση, αξιολόγηση κλπ δηλώσεων, αναπαραστάσεων, ευρημάτων κλπ που έκαναν **άλλοι**.

Για παράδειγμα στο επίπεδο 4, που είναι περίπου η 3^η Γυμνασίου, ως προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα αναφέρεται ότι ο μαθητής:

Αξιολογεί δηλώσεις που έγιναν από άλλους σχετικά με ευρήματα από στατιστική έρευνα ή δραστηριότητα με πιθανότητες.

Στην διευκρίνιση σχετικά με το προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα που υπάρχει, στον διαδικτυακό τόπο του Υπουργείου Παιδείας και που υποστηρίζει το μάθημα των Μαθηματικών (NZMATH: http://www2.nzmaths.co.nz/curriculum/S_SL.aspx), αναφέρεται:

Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές θα αξιολογήσουν με κριτικό τρόπο την δύναμη των επιχειρημάτων που θα προτείνουν άλλοι και που υποστηρίζονται από στατιστικές πληροφορίες. Στο επίπεδο 4 οι μαθητές θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους χαρακτηριστικά της στατιστικής έρευνας που έκαναν άλλοι ζυγίζοντας την δύναμη των επιχειρημάτων τους. Αυτά τα χαρακτηριστικά περιλαμβάνουν την καταλληλότητα των μεθόδων δειγματοληψίας (π.χ. πλήθος, αντιπροσωπευτικότητα), ποιότητα της συλλογής δεδομένων (οι ερωτήσεις που έγιναν, η ακρίβεια της μέτρησης), η ανάλυση των δεδομένων (χρήση τεχνολογίας, επιλογή αναπαραστάσεων) καθώς και σε ποια έκταση οι ισχυρισμοί που έγιναν υποστηρίζονται από τα αποδεικτικά στοιχεία.

Σε άλλο σημείο περιγραφής , σχετικά με το επίπεδο 3, αναφέρεται ότι οι μαθητές πρέπει να γίνουν κριτικοί καταναλωτές δεδομένων.

Στο επίπεδο 6 περιγράφεται ως προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα:

Αξιολογεί στατιστικές αναφορές [που υπάρχουν σε διάφορα είδη] μέσω ενημέρωσης σχετίζοντας τις αναπαραστάσεις, τα στατιστικά στοιχεία, τις διεργασίες και τις πιθανότητες που χρησιμοποιούνται στους ισχυρισμούς που έγιναν.

Τα επίπεδα 5 - 8 δεν περιλαμβάνουν περισσότερες λεπτομέρειες , οι οποίες όπως αναφέρεται θα προστεθούν αργότερα (είναι ακόμα σε εξέλιξη η εφαρμογή του Προγράμματος Σπουδών σε όλη την Νέα Ζηλανδία και η παραγωγή υλικού)

Αποτελέσματα με βάση τα παραδείγματα και το ευρύτερο πλαίσιο των παραδειγμάτων που περιγράφονται

Ως παραδείγματα εξετάσαμε τα βιβλία που προτείνονται ως υποστηρικτικά μέσα με δραστηριότητες για την εφαρμογή του νέου Προγράμματος Σπουδών και που τα έχει εκδώσει το Υπουργείο Παιδείας⁶ της σειράς *Figure it out* (MoE, 2008 a; MoE, 2008 f; MoE, 2008 e; MoE, 2008 d; MoE, 2004 b; MoE, 2009 h; MoE, 2008 b; MoE, 2008 c; MoE, 2004)

Τα παραδείγματα ανήκουν σε πολλές κατηγορίες , δεδομένου ότι πρόκειται για μικρά βιβλιαράκια τα οποία χρησιμοποιούνται σε διαφορετικά επίπεδα και καλύπτουν μέχρι και το Γυμνάσιο. Υπάρχουν παραδείγματα που σχετίζονται με επιστημονικά πειράματα (μελέτη παραγόντων που μπορεί να επηρεάζουν την αύξηση των φυτών), με θέματα ασφάλειας (κυκλοφοριακή πυκνότητα)

⁶ Υπάρχουν σε όλα τα σχολεία αλλά δεν είναι υποχρεωτικό να διδάσκονται οι μαθητές απ' αυτά. Δείχνουν το πνεύμα του Προγράμματος Σπουδών.

τητα στο σχολείο), Διαφημίσεις προϊόντων (έλεγχος των ισχυρισμών) , θέματα οικονομικά (κόστος διαφημίσεων σε διαφορετικά μέσα ενημέρωσης) , με θέματα ποιότητας ζωής (χρόνος και είδος διαφημίσεων, θέματα ειδήσεων, χρόνος συνέπειας των λεωφορείων, ξυστά διαφημιστικά λαχεία) , παιχνίδια στον υπολογιστή και πώς θα μπορούσα να πάρω αποφάσεις σε αυτά κλπ.

7.3 Στατιστική σκέψη

Ο κύκλος της επίλυσης στατιστικού προβλήματος

Ο κύκλος αυτός εμφανίζεται στα Προγράμματα Σπουδών και των τριών χωρών που εξετάζουμε.

Στις ΗΠΑ ξεκινάει με την διατύπωση ενός ερωτήματος ή περισσότερων. Αυτό δημιουργεί την ανάγκη για συλλογή δεδομένων. Η ανάλυση γίνεται με την χρήση απεικονίσεων και οργάνωσης των δεδομένων (διαδικασία μετα-αρίθμησης) και ακολουθούν η ερμηνεία και τα συμπεράσματα. Για παράδειγμα, στις τάξεις 6-8 οι μαθητές δοκιμάζουν διάφορα χαρακτηριστικά ενός χάρτινου αεροπλάνου για να δουν πώς αυτά επηρεάζουν την απόσταση που ταξιδεύει και την συνέπεια της πτήσης. Καθορίζουνε τις παραμέτρους του συστήματος (μήκος φτερών, διπλά φτερά), δημιουργούν ένα σχέδιο για το πώς θα κάνουν τις μετρήσεις και εφαρμόζουν το πλάνο τους με το οποίο θα μπορέσουν να μαζέψουν δεδομένα για να συγκρίνουν την επίδραση των διαφορετικών χαρακτηριστικών σχεδιασμού.

Στο Πρόγραμμα του Καναδά ο κύκλος αυτός εμφανίζεται για παράδειγμα στην 7^η τάξη μέσα από τους στόχους: «συλλέγουν και οργανώνουν κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή πρωταρχικά και δευτερογενή δεδομένα και τα απεικονίζουν χρησιμοποιώντας διαγράμματα και γραφήματα», « διατυπώνουν και αξιολογούν επιχειρήματα που βασίζονται στην ανάλυση των δεδομένων». Ένα παράδειγμα όπου αξιοποιείται ένα μέρος του κύκλου είναι από την ίδια τάξη όπου οι μαθητές συλλέγουν δεδομένα από ιστότοπους όπως το Census At Schools και τα απεικονίζουν σε πίνακες , με διαγράμματα κλπ . Στην περίπτωση του Καναδά τα προβλήματα που προτείνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών είναι πολύ συνοπτικά και έτσι δεν επιτρέπουν την ολοκλήρωση όλου του κύκλου.

Στο Πρόγραμμα της Νέας Ζηλανδίας ο κύκλος αναφέρεται στον άξονα θεματικού περιεχομένου στατιστικές εξερευνήσεις, στις οδηγίες προς τους εκπαιδευτικούς. Στην περίπτωση αυτή ο κύκλος επίλυσης στατιστικού προβλή-

ματος αποτελεί το πλαίσιο το οποίο χαρακτηρίζει στη Στατιστική σε όλες τις τάξεις. Παρόλα αυτά ο κύκλος δεν είναι πάντοτε ολοκληρωμένες αλλά οι μαθητές εργάζονται σε κομμάτια αυτού.

Από την παραπάνω καταγραφή αναδεικνύονται κοινά χαρακτηριστικά που υπάρχουν και στα τρία Προγράμματα Σπουδών που είναι η ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης μέσα από τον κύκλο και τις σχετικές δραστηριότητες που τον υποστηρίζουν. Ο κύκλος αυτός δρα ως ένα εργαλείο που ο μαθητής μαθαίνει να το χρησιμοποιεί και να αποκτά συνήθειες του μυαλού στην επίλυση στατιστικού προβλήματος (Goldengerg, 1999). Στην περίπτωση των ΗΠΑ ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται ο κύκλος επίλυσης στατιστικού προβλήματος γίνεται φανερό στον εκπαιδευτικό μέσω του GAISE Report . Επιπλέον η διάκριση μαθηματικής και στατιστικής σκέψης τονίζεται ιδιαίτερα στα Προγράμματα της Νέας Ζηλανδίας και των ΗΠΑ μέσω του GAISE Report .

Ο ρόλος της μεταβλητότητας

Στις ΗΠΑ και στη Νέα Ζηλανδία γίνεται αναφορά σε μαθησιακούς στόχους που αφορούν την μεταβλητότητα των δεδομένων σε μεγάλες τάξεις.

Συγκεκριμένα στις ΗΠΑ στις τάξεις 9-12 αναφέρεται : «[οι μαθητές] χρησιμοποιούν προσομοιώσεις για να εξερευνήσουν την μεταβλητότητα μιας στατιστικής παραμέτρου από το δείγμα ενός γνωστού πληθυσμού και να κατασκευάσουν δειγματικές κατανομές».

Στην Νέα Ζηλανδία αναφέρεται: «[οι μαθητές] αναγνωρίζουν την επίδραση του μεγέθους του δείγματος στην μεταβλητότητα μιας παραμέτρου». Στον Καναδά η έννοια της μεταβλητότητας δεν εμφανίζεται γιατί η Στατιστική και οι Πιθανότητες σταματούν στην 8^η τάξη.

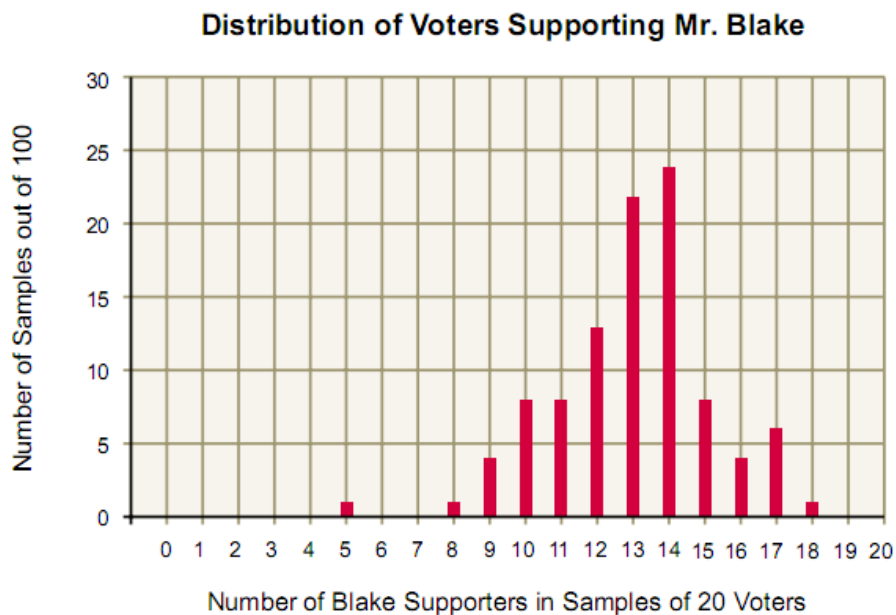
Στα Προγράμματα Σπουδών που εμφανίζεται η έννοια της μεταβλητότητας συνδέεται με την άτυπη συμπερασματολογία, δηλαδή αυτή που δεν βασίζεται σε τυπικές στατιστικές μεθόδους. Στον ερευνητικό χώρο της Διδακτικής της Στατιστικής υπάρχει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον γύρω από αυτές

τις περιοχές και προσπάθεια να μπουν αυτές οι μέθοδοι σε μικρότερες τάξεις μέσα από προσομοιώσεις .

Στη συνέχεια ακολουθεί ένα παράδειγμα δραστηριότητας που προτείνεται από τις ΗΠΑ:

Αν υποθέσουμε ότι το 65% των εγγεγραμμένων ψηφοφόρων σε μια πόλη είναι υποστηρικτές του κ. Blake που είναι υποψήφιος δήμαρχος. Πόσο ασυνήθιστο θα ήταν να βρούμε ένα τυχαίο δείγμα 20 ψηφοφόρων στο οποίο οι 8 το πολύ υποστηρίζουν τον κ. Blake;

Οι μαθητές δοκιμάζουν με προσομοίωση και δημιουργούν 100 δείγματα από μια δυνωμική κατανομή που έχει ποσοστό επιτυχίας 65% και μετράνε πόσες φορές στις 100 εμφανίστηκαν δείγματα με 8 άτομα το πολύ.



8 Συμπεράσματα

Ανάμεσα στα κοινά χαρακτηριστικά των τριών Προγραμμάτων Σπουδών είναι ίσως η προτροπή οι μαθητές να δουλεύουν σε πολλές και διαφορετικές εφαρμογές της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων. Με θέματα που έχουν σχέση με την καθημερινότητα, τις συνήθειες, το περιβάλλον, τα πειράματα, την ασφάλεια, με θέματα που προέρχονται από τις εφημερίδες ή άλλα μέσα ενημέρωσης κλπ. Οι πηγές απ' όπου αντλούν πληροφορίες είναι πολλές και μεταξύ των άλλων τα μέσα ενημέρωσης και το διαδίκτυο. Έτσι οι μαθητές ίσως αποκτήσουν μια θετική στάση απέναντι στην Στατιστική και εκτιμήσουν την συνεισφορά της στην δημόσια και την ιδιωτική ζωή, στην λήψη επαγγελματικών ή ατομικών αποφάσεων (Wallman, 1993). Τα πλαίσια αυτά που είναι μέσα από την πραγματική ζωή, μαζί με την θετική στάση μπορεί να δημιουργήσουν κίνητρα για την περαιτέρω ενασχόληση με την Στατιστική (Watson & Callingham, 2003).

Επίσης υπάρχει προσπάθεια και στις τρεις χώρες για την ανάπτυξη μιας κριτικής στάσης απέναντι στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται από τρίτους και στα συμπεράσματα που βγαίνουν απ' αυτά, καθώς και στην υποστήριξη αυτών των συμπερασμάτων από το είδος της έρευνας με την οποία προέκυψαν τα δεδομένα. Αυτό σε συνδυασμό με την ικανότητα να εφαρμόζουν εναλλακτικούς τρόπους αναζήτησης δεδομένων, ίσως τους προετοιμάσουν καλύτερα ως αυριανούς πολίτες, με διάθεση να αναζητούν περισσότερες πληροφορίες για να κρίνουν μια κατάσταση ακόμα και αν δεν τους είναι οικείο το πλαίσιο της κατάστασης (Gal , 2004).

Βιβλιογραφία

- [1] Ainley, J., & Pratt, D. (2001). Introducing a special issue on constructing meanings from data. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 1-8.
- [2] Ainley, J., Pratt, D., & Nardi, E. (2001). Normalising: Children's activity to construct meanings for trend. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 131-146.
- [3] Australian_Education_Council. (1991). *A National Statement on Mathematics for Australian Schools. A Joint Project of the States, Territories and the Commonwealth of Australia Initiated by the Australian Education Council*. Carlton, VIC: Curriculum Corporation.
- [4] Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools. Dissertation*. Utrecht.
- [5] Barbella, P., Kepner, J., & Scheaffer, R. L. (1994). *Exploring Measurements*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
- [6] Batanero, C. (2005). Statistics Education as a Field for Research and Practice. *Proceedings of ICME-10. Regular Lecture*. Copenhagen: International Commission for Mathematical Instruction. Retrieved from <http://www.ugr.es/~batanero/english%20papers%20and%20books.htm>
- [7] Ben-Zvi, D., & Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 35-65.
- [8] Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy*,

Reasoning, and Thinking (pp. 3-16). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers (Springer).

- [9] Ben-Zvi, D., Garfield, J., & Zieffler, A. (2006). Research in the Statistics Classroom: Learning from Teaching Experiments. In *Thinking and Reasoning with Data and Chance* (Vol. 68th Yearbook, pp. 467-481). NCTM.
- [10] Biehler, R. (1989). Educational perspectives on exploratory data analysis. In R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education* (pp. 185-201). Paris: UNESCO.
- [11] Biehler, R., & Steinbring, H. (1991). Entdeckende Statistik, Stenget-und-Blatter, Boxplots Konzepte, Begründungen and Erfahrungen eines Unterrichtsversuches [Explorations in statistics, stem-and-leaf, boxplots Concepts, justifications, and experience in a teaching experiment]. *Der Mathematikunterricht*, 37(6), 5-32.
- [12] Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (Structure of the observed learning outcome)*. New York: Academic.
- [13] Broers, N. J. (2006). Learning Goals: The Primacy of Statistical Knowledge. In A. Rossman, & B. Chance (Ed.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Brasil: International Association for Statistical Education.
- [14] Burrill, G. (2006). In G. Burrill, & P. Elliott (Eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance* (Vol. 68th Yearbook). NCTM.
- [15] Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School*

Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education - A Joint ICMI IASE Study - The 18th ICMI Study (pp. 57-70). Springer.

- [16] Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm: Students' understanding of the arithmetic average concept. In L. Meira, & D. Carraher (Ed.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 144-151. Sao Paulo, Brazil.
- [17] Callingham, R. A. (1997). Teachers' multimodal functioning in relation to the concept of average. *Mathematics Education Research Journal*, 9(2), 205-224.
- [18] Chance, B. (2002). Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment. *Journal of Statistics Education*, Volume 10, Number 3. Retrieved from <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html>
- [19] Chevarney, N., Benson, P., & Iyer, R. (1980). The planning stage in statistical reasoning. *The American Statistician*, 34, 222-226.
- [20] Chevarney, N., Collier, R., Fienberg, S., Johnson, P., & Neter, J. (1977). A framework for the development of measurement instruments for evaluating the introductory statistics course. *The American Statistician*, 31, 17-23.
- [21] Cobb, G. W. (1992). Report of the joint ASA/MAA committee on undergraduate statistics. *American Statistical Association 1992 proceedings of the Section on Statistical Education* (pp. 281-283). Alexandria, VA.: American Statistical Association.
- [22] Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.

- [23] Cobb, P. (2000). The Importance of a Situated View of Learning to the Design of. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives On Mathematics Teaching and Learning* (pp. 45-82). Ablex Publishing.
- [24] Cockcroft, W. (1982). *The Cockcroft Report: Mathematics counts*.
- [25] Curcio, F. (1987). Comprehension of Mathematical Relationships Expressed in Graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- [26] Curcio, F., & Artz, A. F. (1997). Assessing students' statistical problem-solving behaviors in a small-group setting. In I. Gal, & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 123-138).
- [27] delMas, R. (2002). Statistical Literacy, Reasoning, and Learning: A Commentary. *Journal of Statistics Education*, Volume 10, Number 3. Retrieved from http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/delmas_discussion.html
- [28] delMas, R. (2004). A Comparison of Mathematical and Statistical Reasoning. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (pp. 79-95). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers (Springer).
- [29] DES. (1991). *National Curriculum: Mathematics for ages 5 to 16*. UK: Department of Education and Science and the Welsh Office.
- [30] Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- [31] Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for Assessment and*

Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A PreK-12 Curriculum Framework. American Statistical Association (ASA), Alexandria, VA. Retrieved from <http://www.amstat.org/education/gaise/>

- [32] Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, Volume 70(1), 1-51. Retrieved from <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/isr/02.Gal.pdf>
- [33] Gal, I. (2004). Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. In J. Garfield, & D. Ben-Zvi (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 47-78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers (Springer).
- [34] Garfield, J. (2002). The Challenge of Developing Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education*, Volume 10, Number 3. Retrieved from www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html
- [35] Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review*, 75(3), 372–396.
- [36] Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. Springer.
- [37] Garfield, J., & Gal, I. (1999). Teaching and Assessing Statistical Reasoning. In L. V. Stiff, & F. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12, 1999 Yearbook* (pp. 207-219). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- [38] Garfield, J., delMas, R., & Chance, B. (2003). The Web-based ARTIST: Assessment Resource Tools for Improving Statistical

Thinking. Paper presented in the Symposium: Assessment of Statistical Reasoning to Enhance Educational Quality.

- [39] Garfield, J., delMas, R., Chance, B., & Ooms, A. (n.d.). Retrieved from Web - ARTIST (Assessment Resource Tools for Improving Statistical Thinking): <https://app.gen.umn.edu/artist/index.html>
- [40] Garfield, J., & Chance, B. (2000). Assessment in Statistics Education: Issues and Challenges. *Mathematics Thinking and Learning, 2* (1&2), 99-125.
- [41] Gattuso, L., & Ottaviani, M. G. (2011). Complementing Mathematical Thinking and Statistical Thinking in School Mathematics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education - A Joint ICMI/IASE Study - The 18th ICMI Study*. Springer.
- [42] Gnanadesikan, M., Scheaffer, R. L., & Swift, J. (1987). *The art and techniques of simulation*. Dale Seymour Publications.
- [43] Goldengerg, P. (1999). Principles, art and craft in curriculum design: The case of Connected Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4*, 191-224.
- [44] Graham, A. (2006). *Developing Thinking in Statistics*. London: Paul Chapman Publishing.
- [45] Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (Ed.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). Sheffield: Organising Committee of the First International Conference on Teaching Statistics.

- [46] Groth, R. E., & Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning*, 8, 37-63.
- [47] Holmes, P. (2003). 50 years of statistics teaching in English schools: some milestones. *Journal of the Royal Statistical Society Series D (The Statistician)*, 52(4), 439 - 463.
- [48] Jones, G., & Thornton, C. (2005). An Overview of Research into the Teaching and Learning of Probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 65-92). New York: Springer.
- [49] Jones, G., Langrall, C., & Mooney, E. (2007). Research in Probability: Responding to Classroom Realities. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research On Mathematics Teaching and Learning : a Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 2, pp. 909-956). NCTM.
- [50] Jones, G., Thornton, C., Langrall, C., Mooney, E., Perry, B., & Putt, I. (2000). A framework for characterizing children's statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(4), 269-307.
- [51] Jones, J. C. (2012). *Visualizing Elementary and Middle School Mathematics Methods*. John Wiley & Sons, Inc.
- [52] Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and Biases*. New York: Cambridge University Press.
- [53] Konold, C., & Higgins, T. (2003). Reasoning About Data. In J. Kilpatrick, G. W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and standards for School Mathematics* (pp. 193-215). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

- [54] Landwehr, J. M., & Watkins, A. (1987). *Exploring Data*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
- [55] Landwehr, J. M., Swift, J., & Watkins, A. (1987). *Exploring Surveys and Information from Samples*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
- [56] MoE. (1993). *Mathematics in the New Zealand curriculum*. Wellington: Ministry of Education.
- [57] MoE. (2004 b). *Figure It Out Level 4: Statistics Book 1 - Student , Web Source - Figure It Out carousel interface*. Ministry of Education.
- [58] MoE. (2004). *Figure It Out, Statistics Book 1, Level 4 , years 7-8 - Teacher's Notes*. Ministry of Education.
- [59] MoE. (2007 a). *The New Zealand Curriculum*. Ministry of Education.
- [60] MoE. (2007 b). *The New Zealand Curriculum: Achievement Objectives by learning area, set of 8 charts*. Ministry of Education, Learning Media Limited.
- [61] MoE. (2007 c). *The New Zealand Curriculum: Curriculum achievement objectives by level*. Ministry of Education.
- [62] MoE. (2007 d). *New Zealand Curriculum Guides - Senior Secondary: Mathematics and Statistics*. New Zealand: Ministry of Education.
- [63] MoE. (2007 e). *Book 9: Teaching Number through Measurement, Geometry, Algebra and Statistics - Numeracy Professional Development Projects 2007 (Draft)*. New Zealand: Ministry of Education. Retrieved from <http://nzmaths.co.nz/numeracy-development-projects-books>

- [64] MoE. (2008 a). *Figure It Out Level 2-3: Statistics Revised Edition - Teacher's Notes*. New Zealand: Ministry of Education.
- [65] MoE. (2008 b). *Figure It Out carousel interface: Statistics , Level 2-3 , Revised Edition - Student , Web Source*. Ministry of Education. Retrieved from http://www.nzmaths.co.nz/figure-it-out-carousel-interface?parent_node=#c=11;p=0
- [66] MoE. (2008 c). *Figure It Out, Level 3: Statistics Revised Edition - Teacher's Notes*. Ministry of Education.
- [67] MoE. (2008 d). *Figure It Out Level 3: Statistics Revised Edition - Student , Web Source - Figure It Out carousel interface*. Ministry of Education. Retrieved from http://www.nzmaths.co.nz/figure-it-out-carousel-interface?parent_node=#c=24;p=0
- [68] MoE. (2008 e). *Figure It Out Level 3-4: Statistics Revised Edition - Teacher's Notes*. Ministry of Education.
- [69] MoE. (2008 f). *Figure It Out Level 3-4: Statistics Revised Edition - Student , Web Source - Figure It Out carousel interface*. Ministry of Education. Retrieved from http://www.nzmaths.co.nz/figure-it-out-carousel-interface?parent_node=#c=33;p=0
- [70] MoE. (2009). *Figure It Out carousel interface, Statistics In The Media, Levels 4-4+ , Student - Web Source*. Ministry of Education. Retrieved from http://www.nzmaths.co.nz/figure-it-out-carousel-interface?parent_node=#c=45;p=0
- [71] MoE. (2009 h). *Figure It Out carousel interface, Statistics In The Media, Levels 3+ -4 - Student , Web Source*. Ministry of Education. Retrieved from http://www.nzmaths.co.nz/figure-it-out-carousel-interface?parent_node=#c=36;p=0

- [72] MoE. (2009). *The New Zealand Curriculum: Mathematics Standards for years 1-8*. Ministry of Education. Retrieved from <http://nzcurriculum.tki.org.nz/National-Standards/Mathematics-standards>
- [73] MoE. (2012 d). *Full Glossary of Statistics Terms for the New Zealand Mathematics and Statistics Curriculum (έγγραφο από τον ιστότοπο NEW ZEALAND CURRICULUM GUIDES Senior Secondary: <http://seniorsecondary.tki.org.nz/Mathematics-and-statistics>)*. Ministry of Education. Retrieved from <http://seniorsecondary.tki.org.nz/Mathematics-and-statistics/Glossary>
- [74] MoE. (2012). *New Zealand Curriculum guides: Mathematics and Statistics , Web Source*. Ministry of Education. Retrieved from <http://seniorsecondary.tki.org.nz/Mathematics-and-statistics>
- [75] Moore, D. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the Shoulders of Giants* (pp. 95-137). National Academy Press.
- [76] Moore, D. (1997). New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics. *International Statistical Review*, 65, 123-165.
- [77] NCTM. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. National Council of Teachers of Mathematics.
- [78] NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- [79] NCTM. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

- [80] NCTM. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- [81] NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- [82] NCTM. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- [83] Neuman, C. M., Obremski, T. E., & Scheaffer, R. L. (1987). *Exploring Probability*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
- [84] Newton, J., Dietiker, L., & Horvath, A. (2008). Statistics: A Look Across K-8 Standards. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Ed.), *Joint ICMI/IASE Study: Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE. Round Table Conference: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Mexico. Retrieved from <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=rt08>
- [85] Newton, J., Dietiker, L., & Horvath, A. (2011). Statistics Education in the United States: Statistical Reasoning and the Statistical Process. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education - A Joint ICMI/IASE Study - The 18th ICMI Study* (pp. 9-14). Springer.
- [86] Onatrio. (2007 b). *A Guide to Effective Instruction in Mathematics, Kidnergarten to Grade 3 - Data Management and Probability*. Ministry of Education.

- [87] Ontario. (1997). *The Ontario Curriculum Grades 1 - 8, Mathematics*. Ottawa, Canada.
- [88] Ontario. (2005 a). *The Ontario Curriculum Grades 1 - 8, Mathematics*. Ministry of Education, Toronto.
- [89] Ontario. (2005 b). *The Ontario Curriculum Grades 9 and 10, Mathematics*. Ministry of Education, Toronto.
- [90] Ontario. (2007). *The Ontario Curriculum Grades 11 and 12, Mathematics*. Ministry of Education, Toronto.
- [91] Ontario. (2008). *A Guide to Effective Instruction in Mathematics, Grades 4 to 6 - Data Management and Probability*. Ministry of Education.
- [92] Ottaviani, M. G., Peck, R., Pfannkuch, M., & Rossman, A. (2005). Working group report on teacher preparation for statistics education. In G. Burrill, & M. Camden (Ed.), *Curricular Development in Statistics Education: International Association for Statistical Education*.
- [93] Pfannkuch, M., & Watson, J. (2005). Statistics Education. In P. Anthony, & C. Diezmann (Eds.), *Research on mathematics education in Australasia 2000-2003*.
- [94] Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 17-46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers (Springer).
- [95] Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. London: Routledge & Kegan Paul.
- [96] Reading, C., & Shaughnessy, M. (2004). Reasoning About Variation. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of*

Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking (pp. 201-226). Kluwer Academic Publishers.

- [97] Rossman, A., & Scheaffer, D. (2012). Interview with Dick Scheaffer. *Journal of Statistics Education*, 20(1).
- [98] Rossman, A., Chance, B., & Medina, E. (2006). Some Important Comparisons between Statistics and Mathematics, and Why Teachers Should Care. In G. F. Burrill, & P. C. Elliot (Eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance, 68th Yearbook NCTM* (pp. 323-333). Reston, VA: NCTM.
- [99] Rumsey, D. (2002). Statistical Literacy as a Goal for Introductory Statistics Courses. *Journal of Statistics Education*, Volume 10, Number 3. Retrieved from <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/rumsey2.html>
- [100] Russell, S. J. (1990). Issues in training teachers to teach statistics in the elementary school: A world of uncertainty. In A. Hawkins (Ed.), *Training Teachers to Teach statistics: Proceedings of the international statistical institute roundtable conference* (pp. 59-71). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- [101] Scheaffer, R. L. (2001). Statistics education: Perusing the past, embracing the present, and charting the future. *Newsletter for the section on statistical education*, 7(1). Retrieved from <http://www.amstat.org/sections/educ/newsletter/v7n1/Perusing.html>
- [102] Scheaffer, R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. In G. F. Burrill, & P. C. Elliot (Eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance, 68th Yearbook NCTM* (pp. 309-321). NCTM.

- [103] Shaughnessy, J. M., Garfield, J., & Greer, B. (1996). Data Handling. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 205-237). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- [104] Shaughnessy, M. (2006). Research on Students' Understanding of Some Big Concepts in Statistics. In G. F. Burrill, & P. C. Elliot (Eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance, 68th Yearbook NCTM* (pp. 77-98). NCTM.
- [105] Shaughnessy, M. J. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research On Mathematics Teaching and Learning : a Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 957-1010). NCTM.
- [106] Shaughnessy, M. J., & Bergman, B. (1993). Thinking about Uncertainty: Probability and Statistics. In P. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (pp. 177-197). New York, NY: Macmillian Publishing Company.
- [107] Shaughnessy, M. J., & Pfannkuch, M. (2002). How Faithfull is Old Faithfull? Statistical Thinking: A Story of Variation and Prediction. *Mathematics Teacher, Vol. 95, No. 4*, 252-259.
- [108] Stohl, H. (2005). Probability in Teacher Education and Development. In G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 345-366). New York: Springer.
- [109] Tuckey, J. W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Addison - Wesley.

- [110] Utts, J. (2003). What Educated Citizens Should Know About Statistics and Probability. *The American Statistician*, Vol. 57, No. 2, 74-79.
- [111] Utts, J. (2005). *Seeing Through Statistics* (3 ed.). Belmont, CA, USA: Thomson Brooks/Cole.
- [112] Vere-Jones, D. (1995). The Coming of Age of Statistical Education. *International Statistical Review*, 63(1), 3-23.
- [113] Watson, J. (1997). Assessing Statistical Thinking Using the Media. In I. G. Gal (Ed.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 107-121). Amsterdam: IOS Press and The International Statistical Institute.
- [114] Watson, J. M., & Callingham, R. A. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal*, 2(2), 3-46.
- [115] Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A., & Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34, 1-29.
- [116] Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, Volume 67(3), 223-248.
Retrieved from <https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/isr/99.Wild.Pfannkuch.pdf>