ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελετώντας την εισαγωγή της άλγεβρας στην Α' γυμνασίου: Διδακτικοί σχεδιασμοί, υλικά και διδακτικές πρακτικές εκπαιδευτικών

Πισκοπάνη – Καραΐσκου Όλγα

Δ201605

Επιβλέπον Συμβουλευτικής Επιτροπής:

Ψυχάρης Γεώργιος

Σεπτέμβριος, 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 27η Σεπτεμβρίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Π. Κυνηγό	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επικ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Επικ. Καθηγητή
▪ Μ. Πιττάλη	Εξωτ. Συνεργάτης Παν. Κύπρου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- τον κ.Ψυχάρη για τις συμβουλές και την σημαντική βοήθεια που μου προσέφερε τόσο κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας όσο και κατά την διάρκεια των σπουδών μου σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο, καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της συμβουλευτικής και εξεταστικής επιτροπής.
- τους εκπαιδευτικούς Ελισάβετ Καλογερία και Χρήστο Μάλλιαρη για την αποδοχή τους να είναι το αντικείμενο μελέτης της συγκεκριμένης εργασίας, για τις χρήσιμες συμβουλές και συζητήσεις που είχαμε καθ' όλη την διάρκεια της άψογης συνεργασίας μας
- όλους τους εκπαιδευτικούς και την Αγγελική που συμμετείχαν στην ομάδα PreMaTT για την συνεργασία και τις ενδιαφέρουσες συζητήσεις που είχαμε κατά την διάρκεια των συναντήσεων στο Πανεπιστήμιο
- τον συμφοιτητή μου Σωτήρη για την παραχώρηση μεγάλου μέρους των απομαγνητοφωνημένων διαλόγων, δουλειά εξαιρετικά επίπονη.
- την συμφοιτήτρια και φίλη μου Θωμαΐς Καράβη για την πολύτιμη βοήθεια της, τις κρίσιμες παρατηρήσεις της και την ψυχολογική υποστήριξη της σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου και κυρίως στην συγγραφή της διπλωματικής μου εργασίας
- την φίλη μου Αφροδίτη Μοσχοβίτη για την άψογη συνεργασία μας και την στήριξη της αλλά και τους υπόλοιπους συμφοιτητές και φίλους που έκανα κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος
- την Ευαγγελία και τον Γρηγόρη για την αμέριστη συμπαράσταση και στήριξη τους σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου
- την κα. Κλη για την άποψη εξυπηρέτηση των φοιτητών.
- Την οικογένεια μου που με στηρίζει όλα αυτά τα χρόνια

Αφιερώνεται στους γονείς μου

Αιμίλιο και Αλίκη

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η εισαγωγή των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην άλγεβρα αποτελεί βασικό ζήτημα μελέτης στην κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών. Μέσα από την συνεργασία δυο εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι οποίοι σχεδίασαν και εφάρμοσαν από κοινού δραστηριότητες στο πλαίσιο της συμμετοχής τους στο Ευρωπαϊκό πρόγραμμα PreMaTT, στην παρούσα έρευνα μελετάται ο διδακτικός σχεδιασμός και η πρακτική τους καθώς συνεργάζονται για την ανάπτυξη διδακτικών υλικών που αξιοποιούν ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εργαλεία. Χρησιμοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο που βασίζεται στην εργασία δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας των δυο εκπαιδευτικών, η έρευνα επικεντρώνεται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των εκπαιδευτικών και των πηγών που τους επηρεάζουν στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων. Η ανάλυση της δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας ανέδειξε πτυχές της εξέλιξης των δυο εκπαιδευτικών στο επίπεδο γνώσης και του διδακτικού σχεδιασμού. Οι μετατοπίσεις των διδακτικών προσεγγίσεων και πρακτικών των δυο εκπαιδευτικών αποτέλεσαν γεγονότα που εξέλιξαν την επαγγελματική τους μάθηση. Επιπλέον, κομβικό σημείο αναφοράς και για τους δυο εκπαιδευτικούς έδειξε να αποτελεί η έτερο-παρατήρηση ως κομμάτι της μεταξύ τους συνεργασίας. Τέλος, προσδιορίστηκαν οι παράγοντες από τους οποίους επηρεάζεται η εξέλιξη της δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας των δυο εκπαιδευτικών αναφορικά με την εισαγωγή της άλγεβρας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση κατά την εμπλοκή τους σε κύκλους διδακτικού σχεδιασμού, εφαρμογής στην τάξη και αποτίμησης.

Λέξεις κλειδιά: εισαγωγή στην άλγεβρα, εργασία μονάδων διδασκαλίας, κοινότητα ομάδας, συνεργασία εκπαιδευτικών

Abstract

The introduction of secondary school students into algebra is a key issue of study in the mathematics teaching community. Through the collaboration of two secondary school teachers who jointly designed and implemented activities in the framework of their participation in the European program PreMaTT, the present study studies their teaching design and practice as they collaborate on the development of teaching materials using specially designed digital tools. Using the theoretical framework based on the documentational work of the two teachers, the research focuses on the interactions between teachers and resources that influence them in planning activities. Analysis of the genesis of documentational work highlighted aspects of the evolution of the two teachers at the level of knowledge and didactic design. The shifts in the teaching approaches and practices of the two teachers were facts that developed their professional learning. Moreover, a critical point for both teachers has been shown to be the other-observation as a part of their cooperation. Finally, there were identified the factors that influence the genesis of documentational work regarding the introduction of algebra in secondary education during their involvement in teaching, classroom and evaluation cycles.

Keywords: introduction into algebra, documentational work, community of practice, cooperation of teachers

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα έρευνα μελετάται η εργασία δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας (documentational work) των εκπαιδευτικών όταν αλληλοεπιδρούν και συνεργάζονται ως ομάδα στο πλαίσιο του ερευνητικού προγράμματος PreMaTT (Penser les Ressources de l'Enseignement des Mathématiques dans un Temps de Transition) που απαρτίζεται από εκπαιδευτικούς Μαθηματικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο συγκεκριμένο πλαίσιο οι εκπαιδευτικοί δουλεύουν συνεργατικά με σκοπό να εντοπίσουν περιοχές που περιέχεται εισαγωγή της Άλγεβρας και να σχεδιάσουν ομαδικά δραστηριότητες με χρήση ψηφιακών και χειραπτικών εργαλείων. Η έρευνα εστιάζει στις μονάδες διδασκαλίας που ανέπτυξαν αρχικά οι εκπαιδευτικοί της έρευνας, στο πώς τις χρησιμοποίησαν στην τάξη, στον ρόλο της ετεροπαρατήρησης μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών και στο αν και από ποιους παράγοντες επηρεάστηκε περαιτέρω η γνώση τους αλλά και η εξέλιξη του διδακτικού σχεδιασμού τους στην επόμενη εφαρμογή. Επιπλέον, η συγκεκριμένη έρευνα έχει σκοπό να αναδείξει τις διαφορετικές πηγές που χρησιμοποιεί ο κάθε εκπαιδευτικός κατά τον διδακτικό του σχεδιασμό, τα αντίστοιχα υλικά και τη διδασκαλία του στο πλαίσιο της εισαγωγής της άλγεβρας στην Α Γυμνασίου. Τέλος, επιχειρείται η μελέτη των διαφόρων τρόπων που οι εκπαιδευτικοί ενσωματώνουν τις πηγές στην πρακτική τους μέσα από τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων και των ζητημάτων που ανακύπτουν κατά την εφαρμογή στην τάξη.

Την τελευταία δεκαετία σημειώνεται αυξανόμενο ενδιαφέρον από την πλευρά των ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών για τις πηγές (resources) που σχετίζονται με τους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών (Remillard, J. T.,2013, Adler, 2000, Trouche και Pepin, 2013, Gueudet & Trouche, 2012, Gueudet & Trouche, 2011). Ένα βασικό ζήτημα που είναι στο επίκεντρο των μελετητών εστιάζει στον τρόπο που εισάγεται η άλγεβρα στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα σε ότι αφορά τα είδη των πηγών οι Pepin, Gueudet, Trouche (2017) ισχυρίζονται ότι οι ψηφιακές πηγές (digital resources) προσφέρουν ιδίως κίνητρα και αυξανόμενες ευκαιρίες για το σχεδιασμό των εκπαιδευτικών των μαθηματικών, τόσο ατομικά όσο και σε συλλογικότητες. Αρκετές έρευνες εστιάζουν το ερευνητικό τους ενδιαφέρον στο πως θα αναδειχτούν διαφορετικοί τρόποι που έρχεται η άλγεβρα στην Α Γυμνασίου είτε μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας, είτε μέσω της χρήσης ψηφιακών εργαλείων από την στιγμή που κάθε εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί διαφορετικές πηγές για να σχεδιάσει το διδακτικό του υλικό. Κεντρικό ζήτημα της ερευνητικής κοινότητας αποτελεί ο τρόπος και ο βαθμός που λαμβάνονται υπόψιν οι μέχρι εκείνη την στιγμή γνώσεις των μαθητών στον κομμάτι της άλγεβρας αλλά και ο τρόπος που οι εκπαιδευτικοί διαμορφώνουν κατάλληλα το υλικό τους προσαρμοσμένο στις ανάγκες των μαθητών. Είναι κοινά αποδεκτό από το σύνολο των ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών ότι υπάρχει έντονο ενδιαφέρον για εστίαση του ερευνητικού φακού στον διδακτικό σχεδιασμό των εκπαιδευτικών, στην διδασκαλία τους και στα υλικά που χρησιμοποιούν είτε μέσα σε ένα πλαίσιο χρήσης φύλλων εργασίας είτε μέσω χρήσης ψηφιακών εργαλείων (Guedet& Trouche, 2013). Πιο συγκεκριμένα έρευνες των Guedet & Trouche (2013) εστιάζουν κυρίως στις αλληλεπιδράσεις των εκπαιδευτικών και των πηγών αναλύοντας μια αμφίδρομη διαδικασία: οι πρακτικές και οι πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού διαμορφώνουν τη χρήση των πηγών που σχετίζονται με το κομμάτι της διδασκαλίας, ενώ ταυτόχρονα τα χαρακτηριστικά των ίδιων των πηγών που είναι ενσωματωμένα στην διδασκαλία συμβάλλουν στην ανάπτυξη του εκπαιδευτικού, και έτσι «παράγουν» μια εξέλιξη στις πεποιθήσεις και τις πρακτικές του ίδιου.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Ιστορική αναδρομή και επιστημολογική προσέγγιση για την έρευνα στην περιοχή της άλγεβρας

Η άλγεβρα ως περιοχή των μαθηματικών είναι πολύ σημαντική σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης και για αυτό το λόγο πολλές ερευνητικές εργασίες έχουν προσπαθήσει να ρίξουν φως στις πτυχές της. Στην συγκεκριμένη ιστορική αναδρομή και λαμβάνοντας υπόψιν την εργασία της Kieran (2007) παρατίθενται σημαντικοί σταθμοί στην εξέλιξη της έρευνας σε αυτή την περιοχή.

Σύμφωνα με την εργασία της Kieran (2007) η άλγεβρα από το 1800 έως το 1900 αφορούσε διαδικασίες και σύμβολα. Η άλγεβρα εμφανιζόταν ως εργαλείο για τον χειρισμό συμβόλων και την επίλυση προβλημάτων στο πρόγραμμα μαθημάτων των σχολείων. Έτσι, κατά το πρώτο μισό του 20ου αιώνα διάφοροι ερευνητές, μέσα σε αυτούς ο Hotz, ο Thorndikeetal, ο Breslico, εστίασαν το ερευνητικό τους ενδιαφέρον στην εκμάθηση της άλγεβρας και επικεντρώθηκαν κυρίως στις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές στην επίλυση διαφόρων ειδών γραμμικών εξισώσεων, στον ρόλο της εξάσκησης και στα λάθη που κάνουν οι μαθητές κατά την εφαρμογή αλγορίθμων.

Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1950 και στις αρχές της δεκαετίας του 1960, η έρευνα που αφορούσε την εκμάθηση της άλγεβρας πραγματοποιήθηκε κυρίως από ψυχολόγους μελετητές με συμπεριφοριστικό προσανατολισμό που χρησιμοποίησαν την άλγεβρα ως μέσο για τη μελέτη ζητημάτων που σχετίζονται με την ανάπτυξη δεξιοτήτων, τη μνήμη κ.α. Αντίθετα, κατά τα τέλη της δεκαετίας του 1970 σύμφωνα με τους Wagner και Kieran (1989), οι έρευνες που πραγματοποιήθηκαν τείνουν να επικεντρώνονται αφενός στην κατασκευή και το είδος των νοημάτων που κάνουν οι μαθητές αφετέρου στους διάφορους τρόπους με τους οποίους γίνεται εκμάθηση της άλγεβρας. Την δεκαετία αυτή η Kieran (2007) αναφέρει ότι η έρευνα που αφορούσε την εκμάθηση της άλγεβρας διεξήχθη κυρίως από μελετητές με κονστρουκτιβιστικό προσανατολισμό έχοντας έντονες επιρροές από τις θεωρίες του Piaget. Το θεωρητικό πλαίσιο του κονστρουκτιβισμού με το βασικό του δόγμα ότι η γνώση είναι ενεργά κατασκευασμένη από το γνωστικό αντικείμενο είχε οδηγήσει τους ερευνητές της άλγεβρας να στρέψουν την προσοχή τους στους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές κατασκευάζουν τις αντιλήψεις τους για τις αλγεβρικές έννοιες και διαδικασίες.

Από την δεκαετία του 1980 και μετά η έρευνα για τη μάθηση της άλγεβρας επηρεάστηκε από κοινωνικό-πολιτιστικές δυνάμεις, όπως για παράδειγμα το κίνημα "Άλγεβρα για όλους" στις Ηνωμένες Πολιτείες (Chazan, 1996, Edwards, 1990). Την περίοδο εκείνη έρευνα του Kaput (1995) έφερε στην επιφάνεια συζητήσεις πάνω στην ιδέα ότι η εισαγωγή της αλγεβρικής δραστηριότητας στο δημοτικό σχολείο θα μπορούσε να βοηθήσει στην άρση ορισμένων εμποδίων που σχετίζονται με την άλγεβρα στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Έτσι στη δεκαετία του 1980, άρχισαν να ανθίζουν νέες σκέψεις για το περιεχόμενο της σχολικής άλγεβρας από το Δημοτικό μέχρι την δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στη συνέχεια, στη δεκαετία του 1990, άρχισε να γίνεται αισθητή η κοινωνικό-πολιτιστική προοπτική που αναπτύχθηκε εκτός της μαθηματικής ερευνητικής κοινότητας. Ο πρώην εποικοδομητικός γνωσιολογικός προσανατολισμός μετατοπίστηκε για μεγάλο αριθμό ερευνητών της άλγεβρας σε αναλύσεις κοινωνικών παραγόντων που επηρεάζουν την αλγεβρική μάθηση (Meira, 1998). Αυτή η μετατόπιση οδήγησε επίσης στην κατακόρυφη αύξηση των μελετών που βασίζονται στην τάξη, με έμφαση στην επικοινωνία μαθητή-καθηγητή και μαθητή με μαθητή (π.χ. Bartolini Bussi,1995, Sfard,2001). Την δεκαετία αυτή, η Kieran (2007) αναφέρει ότι η αυξανόμενη χρήση ψηφιακών εργαλείων και η ενσωμάτωση τους στη διαδικασία της μάθησης σε συνδυασμό με τον κοινωνικό-πολιτισμικό φακό που εφαρμόζεται τόσο στο σχεδιασμό των μελετών μάθησης όσο και στην ανάλυση των δεδομένων που προκύπτουν οδήγησε σε νέες αναζητήσεις σχετικά με τη φύση της μάθησης με αυτά τα εργαλεία. Τα δυναμικά περιβάλλοντα μάθησης προκάλεσαν την ανάπτυξη νέων θεωρητικών προοπτικών, όπου η σωματική εμπειρία θεωρήθηκε ότι παίζει ρόλο στη δημιουργία νοήματος για αλγεβρικά αντικείμενα.

2.2 η προβληματική γύρω από την μάθηση της άλγεβρας

Στην παρούσα ενότητα μας απασχολούν οι δυσκολίες και τα εμπόδια που συναντούν εκπαιδευτικοί και μαθητές στην διδασκαλία και την μάθηση της άλγεβρας αντίστοιχα. Η συγκεκριμένη εργασία προσπαθεί να δώσει φως σε σημαντικά κρίσιμα ζητήματα που έρχονται στην επιφάνεια ως προβλήματα και εμπόδια κατά την διαδικασία εισαγωγής των μαθητών στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης.

2.2.1 Σύνδεση πρώιμης άλγεβρας με άλγεβρα

Στο βιβλίο Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching του 2016 οι C.Kieran, J.Pang, D.Schifter και Swee Fong Ng ισχυρίζονται ότι οι μαθηματικές σχέσεις, τα μοτίβα και οι αριθμητικές δομές βρίσκονται στην καρδιά της πρώιμης αλγεβρικής δραστηριότητας, με διαδικασίες όπως η παρατήρηση, η εικασία, η γενίκευση, η δικαιολόγηση και η επικοινωνία, που είναι κεντρικά χαρακτηριστικά για την εμπλοκή των μαθητών με τις αλγεβρικές δομές. Επιπλέον, ο ρόλος της φυσικής γλώσσας στην ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης θεωρείται θεμελιώδης. Ο Radford (2006) υποστηρίζει περαιτέρω ότι "η χρησιμοποίηση γραμμάτων δεν σημαίνει ότι οπωσδήποτε κάνουμε άλγεβρα" (σελ. 3). Επιμένει ότι, κάτ 'αρχήν, η αλγεβρική σκέψη είναι μια συγκεκριμένη μορφή που αντικατοπτρίζει τα μαθηματικά και ότι η χρήση αλφαριθμητικών συμβόλων δεν είναι απαραίτητη από την στιγμή που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες σημειωτικές αναπαραστάσεις. Στον ίδιο τόμο, αναφέρεται η έρευνα του Kaput (σελ. 19) έχει δηλώσει ότι τρία σκέλη περιεχομένου περιλαμβάνουν αλγεβρική σκέψη στο Δημοτικό: η άλγεβρα ως μελέτη δομών και σχέσεων που προκύπτουν στην αριθμητική, η άλγεβρα ως μελέτη συναρτήσεων και η άλγεβρα ως ένα σύνολο γλωσσών μοντελοποίησης. Σημειώνεται ότι το πρώτο σκέλος του Kaput, αυτό της μελέτης των δομών και των σχέσεων που προκύπτουν από την αριθμητική, έχει αναφερθεί μερικές φορές πρόσφατα ως γενικευμένη αριθμητική.

Στην πρώιμη άλγεβρα, η γενικευμένη αριθμητική περιλαμβάνει όχι μόνο αριθμούς και ποσότητες, συναρτήσεις, ιδιότητες, σχέση ισότητας και διαγράμματα, αλλά μπορεί επίσης να περιλαμβάνει μεταβλητές, εκφράσεις και εξισώσεις ανάλογα με το εάν τα αλφαριθμητικά σύμβολα έχουν ενσωματωθεί στο μαθησιακό περιβάλλον. Οι Britt and Irwin (2011) και Radford (2014) στηρίζουν την άποψη ότι ο αλγεβρικός συμβολισμός δεν υποδεικνύει κατ 'ανάγκη την αλγεβρική σκέψη, και η αλγεβρική σκέψη δεν συνεπάγεται απαραίτητα συνηθισμένη χρήση γραμμάτων. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν εικόνες, χειρονομίες ή φυσική γλώσσα για να γνωστοποιήσουν μια γενίκευση. Παράλληλα, στο προαναφερθέν βιβλίο των C.Kieran, J.Pang, D.Schifter και Swee Fong Ng (2016), αναφέρεται η έρευνα των Blanton και άλλοι (σελ.21) που υπογράμμισαν ότι αρκετοί μαθητές της πρώτης τάξης του Δημοτικού ήταν σε θέση να γενικεύσουν διάφορες συναρτησιακές σχέσεις και ισχυρίζονται ότι τα αρχικά επίπεδα κατανόησης τους θα μπορούσαν να εξελιχθούν περαιτέρω με την υποστήριξη μιας καλά σχεδιασμένης διδασκαλίας. Στο πλαίσιο της ίδιας μελέτης, η Blanton και οι συνάδελφοί της ανέπτυξαν μια πορεία μάθησης για να περιγράψουν την πρώτη βαθμίδα παιδιών (ηλικίας 6 ετών) που σκέφτονταν να γενικεύσουν συναρτησιακές σχέσεις. Για την ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης των μικρών παιδιών, οι παραπάνω ερευνητές διαμόρφωσαν ένα πλαίσιο που περιλαμβάνει διαφορετικά επίπεδα πολυπλοκότητας γενικεύοντας τις συναρτησιακές σχέσεις και καθορίζοντας εάν τα παιδιά μπορούν (α) να παρατηρήσουν τα μαθηματικά χαρακτηριστικά σε μια δραστηριότητα, (β) να παρατηρήσουν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων μέσω της επαναλαμβανόμενης σκέψης ή της συναρτησιακής σκέψης γ) να παρατηρήσουν τις κανονικότητα σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ή με κάθε άλλο τρόπο σε όλες τις περιπτώσεις δ) να περιγράφουν μια συναρτησιακή σχέση σε γενικευμένη μορφή ε) να αναπτύσσουν δύο συγκρίσιμες ποσότητες και τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ τους, και (στ) να αντιμετωπίζουν τη συνάρτηση ως αντικείμενο ενώ κατανοούν τα όρια της γενικότητας. Η κατανόηση των χαρακτηριστικών αυτών των επιπέδων είναι σημαντική σε όλες τις επόμενες σχολικές βαθμίδες διότι φανερώνει τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά κατανοούν και επεξεργάζονται τις συναρτησιακές σχέσεις. Παράλληλη έρευνα των Carraher και Schliemann (2015) έδειξε ότι οι μαθητές ηλικίας 8-9 ετών όταν έχουν περάσει από τα παραπάνω επίπεδα μπορούν να χρησιμοποιήσουν δεδομένες σχέσεις και μεταβλητές και να τις ενσωματώνουν σε άλλες συναρτησιακές σχέσεις για να αντλήσουν νέες.

Τέλος, οι C.Kieran, J.Pang, D.Schifter και Swee Fong Ng (2016, σελ.29) υποστηρίζουν ότι μέσω της γνώσης και της εμπλοκής των μαθητών με την πρώιμη άλγεβρα, οι μαθητές κατανοούν βαθύτερα της έννοιες της άλγεβρας, τις ιδιότητες της, την έννοια της δομής και την κανονικότητα. Έρευνες που διεξήχθησαν έδειξαν πως η τυπική συμβολική προσέγγιση της άλγεβρας υπέστη διαρκή και έντονη κριτική από τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών για την έλλειψη νοήματος και θεωρείται ως πηγή των δυσκολιών ιδιαίτερα για τους μαθητές οι οποίοι εισάγονται για πρώτη φορά στην άλγεβρα (Thompson, 2013, Wittmann και άλλοι, 2013). Σύμφωνα με την Kieran (2007) η έλλειψη του νοήματος στη Σχολική Άλγεβρα που αναφέρθηκε παραπάνω σχετίζεται με το νόημα που πηγάζει από την ίδια την αλγεβρική δομή, συμπεριλαμβανομένης της συμβολικής μορφής (letter- symbolic form), το νόημα που πηγάζει από άλλες μαθηματικές αναπαραστάσεις, συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλών αναπαραστάσεων, το νόημα που πηγάζει από το πλαίσιο προβλήματος (problem context) και πηγές νοήματος εξωτερικές του μαθηματικού πλαισίου.

2.2.2 Εισαγωγή στην άλγεβρα μέσω διαφόρων ειδών δραστηριοτήτων

Οι εκπαιδευτικοί της συγκεκριμένης έρευνας αποφάσισαν να επέμβουν στην διδασκαλία τους μέσω ειδικά διαμορφωμένων δραστηριοτήτων με σκοπό να μπορέσουν να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν ορισμένα προβλήματα που αντιμετωπίζουν στην κατανόηση της μεταβλητής και στην χρήση της σε ρεαλιστικά προβλήματα. Μέσα από τους παρακάτω τύπους δραστηριοτήτων (tasks) στην άλγεβρα, εστιασμένοι σε ηλικίες από 11 έως 15 χρονών, αναδεικνύονται αρκετές προβληματικές γύρω από την εισαγωγή της άλγεβρας. Στις ηλικίες των μαθητών από 11 έως 15 ετών επικεντρώνεται το μεγαλύτερο πλήθος ερευνών για την μάθηση και τις δυσκολίες γύρω από την περιοχή της άλγεβρας.

Σύμφωνα με την Kieran (2007) οι τύποι δραστηριοτήτων στην άλγεβρα περιλαμβάνουν την Παραγωγική Δραστηριότητα (Generational Activity), την Μετασχηματιστική Δραστηριότητα (Transformational Activity) και την Ολική/ Μετά- Επιπέδου Δραστηριότητα (Global/ meta-Level Activity). Αρχικά, σύμφωνα με τον Radford (2001) την παραγωγική Δραστηριότητα εστιασμένη στον Συμβολικό

Σχηματισμό (Letter Symbolic Form) χαρακτηρίζουν οι μεταβλητές, οι εκφράσεις και οι εξισώσεις. Σύμφωνα με τον Fujii (2003) η εισαγωγή στους μαθητές Δημοτικού στον αλγεβρικό συμβολισμό πρέπει να γίνεται μέσα από την γενίκευση αριθμητικών εκφράσεων με στόχο την γεφύρωση του αριθμητικού και του αλγεβρικού συλλογισμού. Ένα χάσμα επικρατεί στην δευτεροβάθμια βαθμίδα φέρνοντας στην επιφάνεια την έννοια της παραμέτρου με σκοπό την κατανόηση της στον ήδη αναπτυγμένο αλγεβρικό συλλογισμό δημιουργώντας σημαντικές δυσκολίες σύμφωνα με τους Bloedy και Vinner (1994, 2001). Πιο συγκεκριμένα, οι παραπάνω ερευνητές ισχυρίζονται πως οι μαθητές δυσκολεύονται να καταλάβουν ποια γράμματα χρησιμοποιούνται ως παράμετροι. Επιπλέον θεωρούν πως οι μαθητές δυσκολεύονται να καταλάβουν ότι το νόημα ενός γράμματος που εκφράζει παράμετρο μπορεί να αλλάξει κατά την διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος.

Έπειτα στο ίδιο μέρος του παραπάνω μοντέλου βρίσκεται το σύμβολο του μείον και οι αρνητικοί αριθμοί σύμφωνα με τον (Vlassis, 2004) ο οποίος ισχυρίζεται πως οι διάφορες χρήσεις του μείον δυσκολεύουν τους μαθητές και αποτελούν εννοιολογικό εμπόδιο στο σχηματισμό νοήματος σε αλγεβρικά σύμβολα και διαδικασίες. Σύμφωνα με έρευνες των Linchevski και Linveh (1999) οι μαθητές βρίσκουν δυσκολίες στην δομή της άλγεβρας εξαιτίας των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν στην δομή της αριθμητικής. Παράλληλα, οι Carpenter και Franke και Levi (2003) εντοπίζουν δυσκολίες των μαθητών στον τρόπο που δικαιολογούν με βάση τις ιδιότητες που χρησιμοποιούν όταν κάνουν αριθμητικούς υπολογισμούς. Οι δραστηριότητες που εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί στην συγκεκριμένη έρευνα εστιάζουν αρκετά σε αριθμητικές μεθόδους με σκοπό την ανάπτυξη αλγεβρικών δεξιοτήτων μέσω συμπλήρωσης πινάκων. Η παραγωγική Δραστηριότητα εστιασμένη στις πολλαπλές αναπαραστάσεις αφορά κυρίως αναπαραστάσεις πινάκων και τύπων, γραφημάτων και τύπων, συνδέσεις ανάμεσα σε αναπαραστάσεις. Πάνω σε αυτό οι Filloy, Rojano και Rubio (2001) θεωρούν πως οι πίνακες τιμών βοηθούν τους μαθητές στη δημιουργία εννοιολογικού νοήματος για τα αλγεβρικά αντικείμενα και τις διαδικασίες και τους διευκολύνουν από την μετακίνηση από συγκεκριμένα παραδείγματα στην περιγραφή γενικών σχέσεων.

Σύμφωνα με την Kieran (2007) η Παραγωγική Δραστηριότητα στο πλαίσιο προβλημάτων είναι εστιασμένη κυρίως στην παραγωγή πολλαπλών αναπαραστάσεων και στην παραγωγή εξισώσεων κατά την επίλυση προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, η ίδια αναφέρει πως οι μαθητές επιχειρηματολογούν χρησιμοποιώντας αριθμητική αλλά δυσκολεύονται στη χρήση εξισώσεων. Παράλληλα, θεωρεί πως όταν οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν ρεαλιστικά προβλήματα ενδέχεται να κατευθυνθούν μακριά από τις βαθύτερες μαθηματικές δομές του προβλήματος. Οι εκπαιδευτικοί της συγκεκριμένης έρευνας επιλέγουν να τοποθετήσουν ρεαλιστικά προβλήματα στις δραστηριότητες τους με ερωτήματα που απαιτούν αιτιολόγηση και επιχειρηματολογία. Οι Lee και Wheeler (1987) αναφέρουν πως οι μαθητές καλούνται να αιτιολογούν περιπτώσεις για τις οποίες είναι δυνατόν να συναχθούν ευλόγως περισσότεροι από ένας κανόνας υποδεικνύοντας ότι είναι σπάνιο για εκείνους τους μαθητές που παράγουν αλγεβρικές αναπαραστάσεις να ελέγξουν αυτές τις εκφράσεις ακόμα και εμπειρικά, υποκαθιστώντας συγκεκριμένα παραδείγματα. Ο Stacey (1989) σχετικά με αυτή την θέση διαπίστωσε ότι μόνο ένα μικρό ποσοστό των μαθητών ανταποκρίνεται σε ερωτήματα για επεξήγηση παρέχοντας μαθηματική αιτιολόγηση και, κατά τον ίδιο τρόπο, ο Arzarello (1991) επεσήμανε τις δυσκολίες των μαθητών να παρέχουν μαθηματικά έγκυρη αιτιολόγηση των αλγεβρικών κανόνων. Επιπλέον, οι Nathan και άλλοι (2003) ισχυρίζονται πως οι μαθητές μπορούν να επιλύσουν προβλήματα χρησιμοποιώντας μια δεδομένη αναπαράσταση αλλά δυσκολεύονται να μεταφράσουν τα αποτελέσματα σε διάφορες αναπαραστάσεις.

Η Μετασχηματιστική Δραστηριότητα με βάση την Kieran (1996) διαχωρίζεται στα θεωρητικά στοιχεία (ισοδυναμία και θεωρητικός έλεγχος), στα τεχνικά στοιχεία (εκφράσεις εξισώσεις και επίλυση εξισώσεων) και στην χρήση χειραπτικών υλικών. Στην συγκεκριμένη εργασία, οι εκπαιδευτικοί επέλεξαν να εισάγουν την έννοια της μεταβλητής μέσω μοτίβων και γενικευμένων σχέσεων με σκοπό την καλλιέργεια αλγεβρικής σκέψης. Ο τελευταίος τύπος δραστηριότητας αφορά την Ολική/ Μετά-Επιπέδου Δραστηριότητα η οποία σχετίζεται με την γενίκευση, την απόδειξη και την μοντελοποίηση. Σύμφωνα με τους Healy και Hoyles (1999) τα μοτίβα βοηθούν στην αλγεβρική αναπαράσταση ακολουθιών αλλά χρειάζεται πολύς χρόνος για να συνδεθούν οι παρατηρήσεις με τη συμβολική μορφή. Οι μαθητές όταν εμπλέκονται με διαδικασίες επίλυσης δραστηριοτήτων με μοτίβα αντιμετωπίζουν τουλάχιστον δύο σημαντικές δυσκολίες, ως εξής (F.Rivera, 2013, p.15). Πρώτον, αντιλαμβάνονται με διαφορετικούς μαθηματικούς τρόπους τα μοτίβα. Για παράδειγμα, μπορούν να επικεντρωθούν σε στοιχεία του μοτίβου που πιστεύουν ότι μπορεί είτε να αλλάξουν είτε να παραμείνουν αμετάβλητα για την συνέχιση του επαναλαμβανόμενου μοτίβου. Κάνοντας αυτό μπορεί να τους βοηθήσει να αντιληφθούν πιθανές διαφορές και ομοιότητες με τα δοθέντα αρχικά στάδια του μοτίβου. Όμως, τα πράγματα είναι πολύ πιο πολύπλοκα λόγω της ανθρώπινης προδιάθεσης ή της φυσικής τάσης των μαθητών να δίνουν προτεραιότητα σε αυτό που θεωρούν οι ίδιοι σημαντικό, ένα φαινόμενο που αναφέρεται ως αντιληπτική ποικιλομορφία. Δηλαδή, ειδικά στις δραστηριότητες με μοτίβα, αυτό που θεωρεί κάποιος ότι είναι αμετάβλητο ή / και μεταβάλλεται πιθανόν να είναι μη αναγνωρίσιμο ή ασήμαντο σε κάποιο άλλο. Δεύτερον, ειδικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, είναι δύσκολο και χρονοβόρο οι μαθητές να αποκτήσουν τη μαθηματική λογική ότι ένα μοτίβο με λίγα γνωστά στάδια θα συμπεριφέρεται κατά πάσα πιθανότητα σύμφωνα με μια συγκεκριμένη γενική έκφραση που προέρχεται από μια δομή, η οποία στη συνέχεια προβάλλεται τόσο στα άγνωστα όσο και στα μακρινά στάδια του μοτίβου. Η ίδια αναφέρεται σε αυτή την συγκεκριμένη μαθηματική λογική ως ανάγκη για μια ολοκληρωμένη επεξήγηση της κανονικότητας σε σχέση την δομή που ακολουθεί το μοτίβο. Εξάλλου, δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι πολλοί εκπαιδευτικοί μαθηματικών έχουν διαπιστώσει ότι μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να περάσουν οι μαθητές από τα μοτίβα στην άλγεβρα και στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2001, Mason, 1996, Moss, Beatty, McNab, & Eisenband, 2006).

Ο Sasman και άλλοι ερευνητές (1999) ισχυρίζονται ότι οι αναπαραστάσεις με πίνακες δεν βοηθούν σημαντικά τις επιδόσεις των μαθητών στη δημιουργία γενικεύσεων. Η παραπάνω θέση βρίσκει αντίθετους τους Nathan και άλλους (2002) οι οποίοι ισχυρίζονται πως οι μαθητές προτιμούν να δουλεύουν με πίνακες τιμών φέρνοντας καλύτερες επιδόσεις. Οι εκπαιδευτικοί της συγκεκριμένης έρευνας φαίνεται να επιλέγουν να ενσωματώσουν πίνακες τιμών μέσα σε ρεαλιστικά προβλήματα στις δραστηριότητες τους. Οι Lesh και Doerr (2003) πιστεύουν ότι οι μαθητές από ένα δεδομένο πρόβλημα δημιουργούν ένα σύστημα σχέσεων γενικεύσιμο και επαναχρησιμοποιήσιμο.

2.3 ο ρόλος των μοτίβων στην σχολική άλγεβρα

Η γενίκευση (generalization) και τα μοτίβα είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και μια έμφυτη, φυσική ικανότητα που φέρνουν τα μικρά παιδιά στην τάξη (Mason 2008). Χαρακτηριστική είναι η θέση της NCTM αναφέροντας ότι «η κατανόηση των μοτίβων, των σχέσεων και των συναρτήσεων» είναι ένα συνεχές θέμα της Άλγεβρας για τα σχολικά μαθηματικά (NCTM, 2000) σε όλες τις βαθμίδες. Οι Clements και Sarama (2009, όπως αναφέρεται στο Rivera, 2013), θεωρούν πως η γενίκευση περιλαμβάνει την κατασκευή και την προδιάθεση για την καθιέρωση μαθηματικών κανονικοτήτων και δομών σε ανοργάνωτα δεδομένα. Χαρακτηριστικός θεωρείται ο εξής ορισμός: «μοτίβο είναι η αναζήτηση μαθηματικών κανονικοτήτων και δομών. Ο εντοπισμός και η εφαρμογή μοτίβων συμβάλλουν στην επίτευξη της τάξης, της συνοχής και της προβλεψιμότητας σε φαινομενικά μη οργανωμένες καταστάσεις και μας επιτρέπει να κάνουμε γενικεύσεις πέρα από τις πληροφορίες που βρίσκονται μπροστά μας. Αν και μπορεί να θεωρηθεί ως "περιοχή περιεχομένου" (content area), η γενίκευση είναι κάτι περισσότερο από μια περιοχή περιεχομένου. Είναι μια διαδικασία, ένας τομέας μελέτης και μια συνήθεια του νου.» (Clements & Sarama, 2009, σελ. 190).

Ωστόσο, σε αντίθεση με την επίλυση των εξισώσεων ή τον χειρισμό ακέραιων αριθμών, η εξερεύνηση των μοτίβων δεν είναι πάντοτε από μόνη της ως θέμα διδασκαλίας ή δραστηριότητας. Οι γενικεύσεις στα Μαθηματικά, μπορούν να γίνουν αντικείμενα μαθηματικής συλλογιστικής καθώς οι μαθητές γίνονται πιο εξειδικευμένοι αποκτώντας αλγεβρική σκέψη (Blanton 2008, Blanton και Kaput

2000). Θεωρείται ότι "η άλγεβρα, και μάλιστα όλα τα μαθηματικά, είναι μια γενίκευση μοτίβων" (Lee, 1996, σελ. 103). Υπάρχουν διάφορες προσπάθειες για την ανάπτυξη μεθόδων και στρατηγικών εύρεσης μοτίβων στα διάφορα επίπεδα, από το νηπιαγωγείο έως το γυμνάσιο (Iwasaki και Yamaguchi, 1997, Orton and Orton, 1999, Radford, 2000). Παρόλο που η έννοια της γενίκευσης όπως φαίνεται βρίσκεται στην καρδιά της άλγεβρας, οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντική δυσκολία στην αναγνώριση και έκφραση γενικευμένων μοτίβων (Gutierrez et al, 2008). Ο Stacey (1989) εστίασε την εξερεύνησή του σε γραμμικά μοτίβα, που παρουσιάστηκαν εικονογραφικά ως αναπτυσσόμενες σκάλες ή δέντρα. Η ιδιότητα σταθερής διαφοράς αναγνωρίστηκε σε μεγάλο βαθμό και επέτρεψε στους μαθητές να βρουν το ν-στο στοιχείο ενός σχεδίου από το (ν-1) στοιχείο. Ωστόσο, σε μια προσπάθεια γενίκευσης, ένας σημαντικός αριθμός μαθητών χρησιμοποίησε μια λανθασμένη μέθοδο άμεσης αναλογίας, δηλαδή, προσδιορίζοντας το ν-οστό στοιχείο ως το ν-οστό πολλαπλάσιο της διαφοράς. Ο Stacey ανέφερε επίσης ασυνέπειες στις μεθόδους που επέλεξαν οι μαθητές για να αιτιολογήσουν την γενίκευση μικρών όρων (π.χ., εύρεση του εικοστού όρου) αλλά και μεγάλων όρων (π.χ., εύρεση του χιλιοστού όρου). Παρόμοια αποτελέσματα ανέφεραν οι Zazkis και Liljedahl (2001, 2002) στις έρευνές τους για αριθμητικά μοτίβα και γενικεύσεις με καθηγητές δημοτικού σχολείου. Σύμφωνα με τον Lee (1996) , το σημαντικό πρόβλημα για τους μαθητές δεν ήταν να «βλέπουν ένα μοτίβο» αλλά να αντιλαμβάνονται ένα «αλγεβρικά χρήσιμο μοτίβο» (σελ. 95). Έρευνες αναφέρουν ότι μόλις οι μαθητές αντιληφθούν ένα μοτίβο με κάποιο τρόπο, ήταν δύσκολο για αυτούς να εγκαταλείψουν την αρχική τους αντίληψη. Θα πρέπει να αναπτυχθεί μια ευέλικτη εικόνα των μοτίβων προκειμένου να βοηθηθούν οι μαθητές να βρουν αυτά τα μοτίβα που μπορούν να οδηγήσουν σε αλγεβρικό συμβολισμό (Lee, 1996). Υπάρχει ένα κενό μεταξύ της ικανότητας των μαθητών να εκφράζουν προφορικά τη γενίκευση και την ικανότητά τους να χρησιμοποιούν αλγεβρικό συμβολισμό με ευελιξία. Διάφοροι συμμετέχοντες εξέφρασαν ρητή ανησυχία ότι οι λύσεις τους ήταν ελλιπείς επειδή δεν είχαν «τύπο». Σε έρευνα τους οι F.Rivera και J.Becker (2005) παρατήρησαν ότι οι μαθητές που δεν κατάφεραν να φτάσουν στην γενίκευση, είχαν ξεκινήσει από αριθμητικά μοτίβα, χωρίς όμως να αντιλαμβάνονται την σύνδεση τους με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Έτσι εμφανίστηκε η ανάγκη κατηγοριοποίησης των μεθόδων των μαθητών στην γενίκευση μοτίβων, κυρίως με βάση την ομοιότητα που αναγνώριζαν οι μαθητές στα αντικείμενα, σε εικονικές, αριθμητικές και πρακτικές (F.Rivera, J.Becker, 2005). Στη συνέχεια, ο Rivera ισχυρίζεται ότι η γενίκευση των μοτίβων από τους μαθητές προϋποθέτει αμοιβαίο συγχρονισμό στις αντιληπτικές και συμβολικές τους ικανότητες, έτσι ώστε να μπορούν να κατασκευάσουν και να δικαιολογήσουν μια ορθή και αλγεβρικά χρήσιμη δομή που είναι σε θέση να μεταφερθεί με τη μορφή άμεσης φόρμουλας (τύπος) (Rivera, 2010, σελ. 147).

Τα προβλήματα με μοτίβα χρησιμοποιούνται και θεωρούνται ανοιχτά προβλήματα από τους εκπαιδευτικούς της παρούσας έρευνας τα οποία προσφέρουν στους μαθητές μία πληθώρα πλεονεκτημάτων. Σύμφωνα με τον Sawada (1997, όπως αναφέρεται στο Kwon et al., 2006) υπάρχουν πέντε πλεονεκτήματα στη χρήση των ανοικτών προβλημάτων. Αρχικά, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να συμμετέχουν ενεργά στην τάξη και να εκφράζουν ελεύθερα τις ιδέες τους. Δεύτερον, έχουν ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν στο σύνολο της την μαθηματική τους γνώση. Τρίτον, οι μαθητές μπορούν να δίνουν τις απαντήσεις στο πρόβλημα βάση της προσωπικής τους νοηματοδότησης. Τέταρτον, προσφέρεται στους μαθητές ορθολογική εμπειρία. Τέλος, οι μαθητές νιώθουν ικανοποίηση από την ανακάλυψη της γνώσης και την εμπλοκή τους στην επίλυση του προβλήματος. Ωστόσο τα προβλήματα μοτίβων είναι σύμμαχοι της δημιουργικής σκέψης στα μαθηματικά. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να επιλέγει, να αναθεωρεί και να αναπτύσσει δραστηριότητες που είναι πιθανό να οδηγήσουν τους μαθητές στην απόκτηση νέων ικανοτήτων επίλυσης , αιτιολόγησης και επικοινωνίας (NCTM, 1991) με στόχο να γίνουν δημιουργικοί στα μαθηματικά.

2.4 Ψηφιακές τεχνολογίες και άλγεβρα

2.4.1 Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην σχολική άλγεβρα

Οι νέες τεχνολογίες είναι γεγονός ότι έχουν διευρύνει τις πηγές που διατίθεται για την υποστήριξη των σχολικών μαθηματικών. Σύμφωνα με έρευνα των F.Ferrara, D. Pratt, O. Robutti (2006) τα τελευταία τριάντα χρόνια η τεχνολογία έχει διαμορφώσει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αντιληπτή η άλγεβρα. Οι ίδιοι υποστηρίζουν πως η άλγεβρα συνεχίζει να θεωρείται ως επέκταση της αριθμητικής, με την τεχνολογία να επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν τη συμβολική γλώσσα ως υπολογιστικό εργαλείο και να χειριστούν τις κύριες έννοιες του λογισμικού. Ταυτόχρονα, το σύστημα συμβόλων της άλγεβρας συνδέεται ισχυρότερα με τα γραφικά και γεωμετρικά πλαίσια. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, οι κεντρικές έννοιες της άλγεβρας, όπως αυτές της μεταβλητής και της συνάρτησης να μπορούν να αντιμετωπιστούν δυναμικά σε αντίθεση με τη συμβατική τεχνολογία χαρτιού και μολυβιού όπου περιορίζονται σε μια στατική ύπαρξη. Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί η θέση της C.Kieran (1996) η οποία υποστηρίζει ότι η τεχνολογία δεν πρέπει να αντικαθιστά την εργασία με μολύβι και χαρτί αλλά μέσω αυτής να δίνεται η δυνατότητα στον μαθητή να εμπλακεί κατασκευαστικά και κριτικά με τις μαθηματικές καταστάσεις.

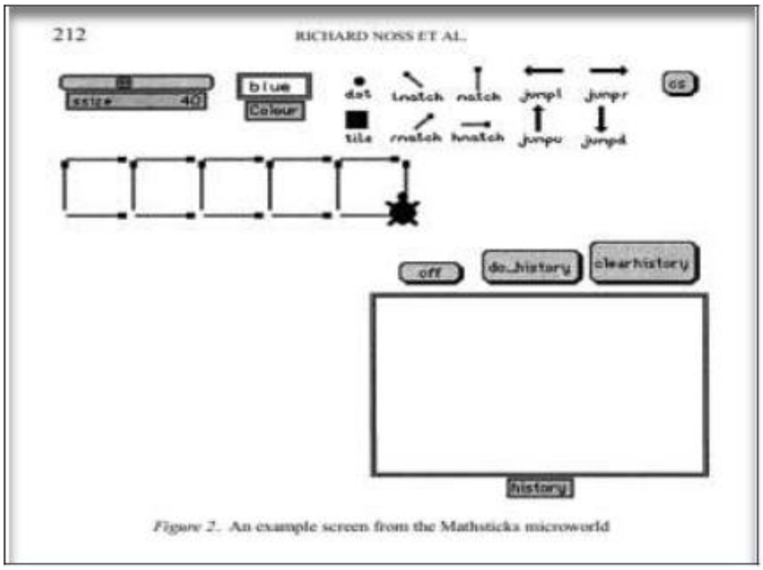
Λίγα χρόνια αργότερα, η C.Kieran (2006) υποστηρίζει πως η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην σχολική Άλγεβρα αλλάζει ολοκληρωτικά τον τρόπο διδασκαλίας και προσέγγισης των Μαθηματικών. Η εμφάνιση από τη δεκαετία του 80 και η χρήση υπολογιστικών εργαλείων στη μάθηση της Άλγεβρας άσκησε κυρίως δυο επιρροές. Αρχικά, παρατηρήθηκε αύξηση των μελετών σχετικά με την έννοια της συνάρτησης μέσω των πολλαπλών αναπαραστάσεων της στο πλαίσιο της σχολικής Άλγεβρας. Επιπλέον, δόθηκε περισσότερη έμφαση στη διεύρυνση των πηγών κατασκευής νοημάτων για τα αντικείμενα της Άλγεβρας. Παράλληλα οι C.Laborde, C. Kynigos, K. Hollebrands, και R. Strasse (2006) εστίασαν το ερευνητικό τους ενδιαφέρον σε δύο θεωρητικές προσεγγίσεις σύμφωνα με τις οποίες αναπτύσσεται η μάθηση μέσα από την χρήση της τεχνολογίας. Στην πρώτη, τα εργαλεία, και ειδικότερα οι τεχνολογίες, προσφέρουν ευκαιρίες μάθησης. Το θέμα βρίσκεται αντιμέτωπο με τους περιορισμούς και τα εμπόδια που υπάρχουν στα ψηφιακά εργαλεία και με τις νέες δυνατότητες των εργαλείων που πρέπει να εντοπιστούν και να κατανοηθούν. Στη δεύτερη προσέγγιση, ακολουθώντας μια θεώρηση του Vygotsky, οι λειτουργίες που εκτελούνται με την τεχνολογία μπορούν να υποβληθούν σε μια διαδικασία εσωτερικοποίησης με την καθοδήγηση του διδακτικού προσωπικού και της διαπροσωπικής ανταλλαγής ιδεών μέσα στην τάξη με τη μορφή συλλογικών συζητήσεων (Bartolini Bussi, 1998, Mariotti & Bartolini Bussi , 1998).

Οι παρεμβάσεις του δασκάλου είναι απαραίτητες για να καταστεί δυνατή η κατασκευή μιας αντιστοιχίας μεταξύ των μαθηματικών γνώσεων και της γνώσης που κατασκευάζονται από τις αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον του υπολογιστή. Πάνω σε αυτή την θέση έχει πραγματοποιηθεί μια ευρεία μελέτη από ορισμένους Ιταλούς ερευνητές όπως οι Mariotti και Cerulli (2001) για τη διδασκαλία και εκμάθηση της άλγεβρας. Πιο συγκεκριμένα επικεντρώθηκαν στην ιδέα ότι ένα τεχνολογικό εργαλείο θεωρείται ως τρόπος διαμεσολάβησης που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο δάσκαλος για να εισαγάγει τους μαθητές σε μια θεωρία. Το διδακτικό πρόβλημα που εξετάζεται κάθε φορά, αφορά τους τρόπους πραγματοποίησης μιας θεωρίας στον συμβολικό χειρισμό της άλγεβρας. Λαμβάνοντας υπόψη τη δυσκολία γεφύρωσης του χάσματος μεταξύ άλγεβρας ως εκτεταμένης αριθμητικής και άλγεβρας ως ενός συστήματος συμβόλων, οι ερευνητές F.Ferrara, D. Pratt, O. Robutti (2006) άρχισαν να σχεδιάζουν καινοτόμες δραστηριότητες μέσω της χρήσης νέων μικρόκοσμων και ψηφιακών λογισμικών που παρέχουν πρόσβαση σε πολλαπλές αναπαραστάσεις. Στο πλαίσιο της προηγούμενης προοπτικής, αναπτύχθηκε μια δυναμική άποψη της άλγεβρας όπου πολλά λογισμικά και παιχνίδια σχεδιάστηκαν για να το ευνοήσουν, γεγονός που καθιστά την ‘δυναμικότητα’ να είναι ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό των νέων αναπτυσσόμενων ψηφιακών μέσων.

2.4.2 Μικρόκοσμοι και κατασκευές

Σύμφωνα με τους E. Filloy, et. al (2001) ένα είδος τεχνολογικών εργαλείων που ενσωματώνεται στην διδασκαλία της άλγεβρας είναι το λογιστικό φύλλο το οποίο χρησιμεύει ως ένα εργαλείο γεφύρωσης με την Άλγεβρα επειδή βοηθά τους μαθητές να δημιουργήσουν νοήματα για τα αλγεβρικά αντικείμενα και τις διαδικασίες και να μετακινηθούν από την εστίαση από ένα συγκεκριμένο παράδειγμα στην περιγραφή γενικών σχέσεων. Πιο συγκεκριμένα η αξιοποίηση του λογιστικού φύλλου έφερε στην επιφάνεια ένα νέο τρόπο εισαγωγής της άλγεβρας. Αρχικά, το λογιστικό φύλλο είναι κατάλληλο εργαλείο για δημιουργία εικασιών για τις τάσεις των συναρτησιακών μεταβολών. Έπειτα, η χρήση λογιστικών φύλλων ενισχύει τόσο τις στρατηγικές στη βάση της «δοκιμής –ελέγχου» όσο και την κατασκευή και διατύπωση σχέσεων με τρόπο που δίνεται βαρύτητα στην αλγεβρική έκφραση. Επιπλέον, οι άγνωστοι και οι μεταβλητές απουσιάζουν ενώ γίνονται αντιληπτές μόνο νοερά. Τέλος, οι πίνακες και τα γραφήματα είναι άμεσα συνδεδεμένοι και δυναμικά μεταβαλλόμενοι πράγμα αδύνατο να υπάρξει στα χειραπτικά εργαλεία.

Η εισαγωγή της Άλγεβρας επιλέγεται αρκετές φορές από τους εκπαιδευτικούς να γίνεται σε Logo περιβάλλον. Ο Clement, J. (1982) ισχυρίζεται πως με την αξιοποίηση του προγραμματισμού οι μαθητές διευκολύνονται να εκφράσουν σχέσεις επειδή τους επιτρέπεται να σκεφτούν για αυτές διαδικαστικά παρά δομικά. Συμπληρωματικά, ο Kynigos, C. (1995) υπογραμμίζει ότι ο προγραμματισμός "υποχρεώνει" τους μαθητές να τυποποιούν τις διαισθητικές τους ιδέες με το να τις εκφράζουν με τη χρήση συμβόλων, να τις εκτελούν στον υπολογιστή και να παρατηρούν την επίδρασής τους, συγκρίνοντας τες με αυτήν που σκόπευαν πριν από την εκτέλεση. Στη συνέχεια, ένα νέο λογισμικό γραμμένο σε μια γλώσσα παραλλαγής της Logo κατασκευάστηκε από τους Noss. R., Lulu H., Hoyles C. (1997) οι οποίοι εξειδικεύτηκαν στον μικρόκοσμο των Mathsticks, το λεγόμενο πρόβλημα με τα σπιρτόξυλα, ένα νέο προγραμματισμένο περιβάλλον κατασκευής καθιερώνοντας τον όρο του Ψηφιακού Αλγεβρικού Συστήματος (Digital Algebraic System). Πρόκειται για ένα αυτοεκφραζόμενο υπολογιστικό περιβάλλον στο οποίο κανείς μπορεί τα χειριστεί και να αναδημιουργήσει αντικείμενα εκφράζοντας ρητά τις σχέσεις μεταξύ τους. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές αναζητούν τον αριθμό των σπιρτόξυλων που θα χρειαστούν για να φτιάξουν 1,2,3,4 τετράγωνα με σκοπό να γενικεύσουν στο ν-οστό τετράγωνο. Συγκεκριμένα η ακολουθία που παράγεται είναι 4,7,11,.... αλλά στη συμβολική έκφραση 3ν+1 εμφανίζεται ως δυσκολία για ένα μαθητής.



Εικόνα 2.4.2: Μικρόκοσμος Mathstics

Ένα από τα ζητούμενα κατά την εμπλοκή με αριθμητικές σχέσεις που προκύπτουν από χωρικά ή πρακτικά μοτίβα είναι η κατασκευή και έκφραση γενικεύσεων. Το χάσμα μεταξύ δράσης και έκφρασης φαίνεται να αυξάνεται από την στιγμή που από την σύλληψη των 'μοτίβων' μέχρι την κατασκευή των αλγεβρικών εκφράσεων εμφανίζεται η Άλγεβρα στο τέλος της διαδικασίας και ίσως αυτή να είναι μια από τις αιτίες που δυσκολεύουν τους μαθητές. Οι Noss. R., Lulu H., Hoyles C. (1997) θεωρούν πως οι μαθητές μέσα από την εμπλοκή τους με τον μικρόκοσμο 'Mathstics' μπορούν να προσδιορίσουν σχέσεις μέσα σε αριθμητικά μοτίβα που προέρχονται από χωρικές ή πρακτικές καταστάσεις, αρχικά εκφράζοντας τα στη φυσική γλώσσα και τελικά σε μια συμβολική γενίκευση. Οι παραπάνω ερευνητές υποστηρίζουν ότι με αυτή τη διαδικασία θα δημιουργήσουν αλγεβρικές έννοιες για τη συμβολική γενίκευση.

Η ομάδα των ερευνητών Geraniou E., Mavrikis M., Hoyles C. & Noss R (2011) στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος MiGen συνέχισαν το έργο και την έρευνα τους πάνω στον μικρόκοσμο eXpresser ο οποίος ανήκει στα κονστραξιονιστικά (Constructionist) περιβάλλοντα. Στην παρούσα εργασία γίνεται λόγος για το συγκεκριμένο λογισμικό γιατί έπαιξε καθοριστικό ρόλο κατά την διάρκεια του διδακτικού σχεδιασμού από ορισμένους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς του προγράμματος. Οι Pearce & Poulovassilis (2009) αναφέρουν πως το λογισμικό eXpresser δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν με τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και να δημιουργήσουν μεταβλητές, σταθερές και σύνθετες εκφράσεις χρησιμοποιώντας σχήματα από έγχρωμα τετράγωνα.

Ένα άλλο σημαντικό σημείο του λογισμικού είναι ότι ενθαρρύνει τους μαθητές να αυτενεργούν, να πειραματίζονται και να επιχειρηματολογούν μέσα από τις κατασκευές τους. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι μαθητές μέσω της εμπλοκής τους με τις εικονικές μεταβλητές, μπορούν να μεταβούν από τους αριθμούς σε γενικές σχέσεις. Πιο συγκεκριμένα οι ισοδυναμίες των λειτουργιών του λογισμικού με τις αλγεβρικές έννοιες είναι οι εξής: η εντολή 'Unlocked Number' ισοδυναμεί με την μεταβλητή, η εντολή 'Locked Number' ισοδυναμεί με την σταθερά, η εντολή 'Building Blog' ισοδυναμεί με το επαναλαμβανόμενο στοιχείο μοτίβου και η εντολή 'Model Rule' ισοδυναμεί με την συμβολική έκφραση. Οι μαθητές από την μια κατασκευάζουν εικονικά μοτίβα από χρωματιστά πλακάκια για την μετάβαση από το ειδικό στη γενίκευση από την άλλη κατασκευάζουν κανόνες για να περιγράψουν τα μοντέλα που δημιούργησαν (Gutierrez, Pearce, Geraniou, & Mavrikis, 2008). Ο eXpresser ενθαρρύνει την δομημένη αλγεβρική σκέψη από την στιγμή που συνδέει την οπτική με την αλγεβρική αναπαράσταση. Από την άλλη μεριά, το συγκεκριμένο εργαλείο, εκτός από την πληθώρα δυνατοτήτων και ευκαιριών που παρέχει στους μαθητές, βοηθάει τον εκπαιδευτικό να μπορεί να κατανοήσει τις δυσκολίες των μαθητών του να φτάσουν στην συμβολική έκφραση κανονικοτήτων μέσα από μοτίβα που κατασκεύαζαν στο λογισμικό.

Κατά την διάρκεια των συναντήσεων στην ομάδα του Πανεπιστημίου, δημιουργήθηκαν και συζητήθηκαν δραστηριότητες βασισμένες στη λογική του ψηφιακού λογισμικού eXpresser με σκοπό την εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το συγκεκριμένο λογισμικό επιλέχθηκε από την ομάδα του Πανεπιστημίου αφενός για να συνεχίσει ομοιόμορφα την γαλλική έρευνα και το αντίστοιχο πρόγραμμα Prematt στα Ελληνικά δεδομένα αφετέρου γιατί ενθαρρύνει τους μαθητές να χειριστούν με μεγαλύτερη ευκολία δραστηριότητες βασισμένες στην μαθηματική γενίκευση. Παρ'όλ'αυτά οι δυο εκπαιδευτικοί που μελετώνται στην συγκεκριμένη έρευνα επέλεξαν το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας 'GeoGebra' με σκοπό να ενισχύσουν την δραστηριότητα τους με κάποιο κατάλληλο ψηφιακό εργαλείο.

2.5 Εκπαιδευτικοί και άλγεβρα (teaching education context)

Οι Ponte και Chapman (2015) εστιάζουν το ερευνητικό τους ενδιαφέρον στις γνώσεις που χαρακτηρίζουν έναν εκπαιδευτικό των μαθηματικών και στον τρόπο που τις ενσωματώνουν στην τάξη. Οι Artigue και άλλοι (2001) ισχυρίζονται πως η γνώση έχει τρεις διαστάσεις. Η πρώτη διάσταση είναι η «Επιστημολογική» που σχετίζεται με το περιεχόμενο και την δομή της άλγεβρας, με τον ρόλο της δομής στα Μαθηματικά, με την σχέση ανάμεσα στην άλγεβρα και σε άλλες περιοχές των

Μαθηματικών και της Φυσικής. Η δεύτερη διάσταση είναι η «γνωστική» που σχετίζεται με την ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού από τους μαθητές, με τις ερμηνείες που δίνουν οι μαθητές στις αλγεβρικές έννοιες, με τις παρανοήσεις και τις δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα, με τους τρόπους παρακίνησης των παιδιών και τις θεωρίες μάθησης. Τέλος, η τρίτη διάσταση είναι η «διδακτική» που αφορά την γνώση του προγράμματος σπουδών, των πηγών, τις διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις και τις πρακτικές που χρησιμοποιούν άλλοι εκπαιδευτικοί.

Μια πτυχή της διδακτικής ικανότητας είναι η επαγγελματική παρατήρηση του καθηγητή για τη μαθηματική σκέψη των μαθητών. Αυτό το χαρακτηριστικό της ικανότητας του εκπαιδευτικού περιλαμβάνει τη γνωστική ικανότητα να εντοπίζει και να ερμηνεύει τα κύρια χαρακτηριστικά της παραγωγικής σκέψης των μαθητών προκειμένου να λαμβάνει τεκμηριωμένες αποφάσεις (Jacobs και άλλοι, 2010, Mason, 2002, Sherin και άλλοι, 2011). Πιο συγκεκριμένα θα μπορούσαμε να πούμε πως η ικανότητα κατανόησης και ανάλυσης των μαθηματικών συλλογισμών των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς περιλαμβάνει την «ανακατασκευή και εξαγωγή συμπερασμάτων» από την κατανόηση των μαθητών μέσω του τι γράφει, τι λέει ή τι κάνει ο μαθητής. Όμως, αρκετές μελέτες υποδεικνύουν ότι παρόλο που υπάρχουν δραστηριότητες με μοτίβα στις τάξεις του Δημοτικού και του Γυμνασίου, οι εκπαιδευτικοί μπορεί να αποτυγχάνουν να εκτιμήσουν πλήρως την αλγεβρική τους όψη, δεδομένων των αδυναμιών που εντοπίζονται στην κατανόηση των χαρακτηριστικών της άλγεβρας (Bishop & Stump, 2000 αναφέρεται στο Kieran, 2007, Jacobs et al. 2007, Stephens, 2008). Πιο συγκεκριμένα, μεταξύ των παλαιότερων μελετών, ο Bishop and Stump (2000, όπως αναφέρεται στο Kieran, 2007) έδειξε ότι πολλοί εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατανοούν την άλγεβρα όσον αφορά τις διαδικαστικές πτυχές που σχετίζονται με τη χρήση συμβόλων, ακόμη και όταν αναλύουν μια δραστηριότητα μοτίβων. Αρκετοί εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και ορισμένοι της δευτεροβάθμιας δεν αντιλαμβάνονται τη δραστηριότητα γενίκευσης που απαιτείται για να παραχθεί η αλγεβρική έκφραση ως αλγεβρική και όχι αριθμητική. Αυτή η τάση φαίνεται λιγότερο αξιοσημείωτη μεταξύ των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, μια μελέτη από τους Menzel και Clarke (1998, αναφερόμενη από το Kieran, 2007) διαπίστωσε ότι οι εκπαιδευτικοί χωρίστηκαν για το αν μια λεκτική περιγραφή μιας μαθηματικής σχέσης μπορεί να θεωρηθεί αλγεβρική ή όχι. Σε αυτό το σημείο κρίνεται αναγκαίο να αναφερθεί η έρευνα των I. Demonty et. al (2018), όπου στην πραγματικότητα περιλαμβάνει τα δυο άκρα του φάσματος των εκπαιδευτικών σε ότι αφορά τον χειρισμό των γνώσεων τους στον τομέα της άλγεβρας. Από την μια μεριά, ορισμένοι εκπαιδευτικοί δεν αντιλήφθηκαν καθόλου την αλγεβρική φύση των προβλημάτων με μοτίβα που είχαν να διαχειριστούν και έτσι αποτύγχαναν να αναγνωρίσουν την ορθότητα των αποτελεσμάτων που έδωσαν δυο μαθητές της συγκεκριμένης έρευνας με κίνδυνο η «βοήθεια» τους σε συγκεκριμένα σημεία, να παρεμπόδιζε τους μαθητές στην ανάπτυξη αλγεβρικής σκέψη. Στο πλαίσιο αυτό φάνηκε να επεμβαίνουν με αποτυχημένα σχόλια και συμβουλές στις αλγεβρικές προσεγγίσεις ενός μαθητή που θα μπορούσε να τον οδηγήσει σε έναν εντελώς εσφαλμένο τύπο γενίκευσης. Από την άλλη πλευρά, υπήρξαν αρκετοί εκπαιδευτικοί (69%) που αντιμετώπισαν τις δραστηριότητες με μοτίβα ως συμβατές με την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης αφού γνώριζαν τη συνάφεια τους με τη γενίκευση και αναγνώρισαν ότι μπορεί να υπάρχουν πολλές σωστές προσεγγίσεις, δείχνοντας έτσι ένα δυνητικό άνοιγμα στην ποικιλία των προσεγγίσεων που είναι ένα βασικό στοιχείο για την ανάπτυξη της σχεσιακής σκέψης (relational thinking). Αντίστοιχα οι Cai et al., (2011) και Kieran (2007) υποστηρίζουν με την σειρά τους ότι η διαχείριση δραστηριοτήτων με μοτίβα παίζει καθοριστικό ρόλο από πλευράς εκπαιδευτικών με τον εξής τρόπο: για να παραχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα της γενίκευσης από τους μαθητές, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να αναλύουν λεπτομερώς όλες τις πιθανές προσεγγίσεις επίλυσης τέτοιων προβλημάτων, προκειμένου να συμβάλουν στην ορθή αλγεβρική σκέψη.

Ενώ οι δραστηριότητες μοτίβων είναι δυνητικά χρήσιμες για την ενθάρρυνση της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να επικεντρώνονται σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση, αυτή της τελικής διαμόρφωσης τύπων (γενίκευση) (Radford, 2014, Rivera, 2013) και της συναρτησιακής σκέψης (Warren et al., 2016). Ο Rivera (2013) υποστηρίζει ότι για να δώσουν μια τέτοια κατεύθυνση, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει συχνά να αποφύγουν τη δική τους προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων και να αναλύσουν λεπτομερώς τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές δικαιολογούν την σκέψη τους, ώστε να μπορούν να προσφέρουν σχετική υποστήριξη. Αυτό απαιτεί τη γνώση του καθηγητή σχετικά με τις απαραίτητες γνώσεις που σχετίζονται με τη διδασκαλία, ιδιαίτερα (α) τη γνώση που σχετίζεται με τον προσδιορισμό του γιατί είναι σημαντική η κάθε δραστηριότητα, (β) την ανάλυση των προσεγγίσεων επίλυσης προβλημάτων των μαθητών και (γ) τους τύπους παρέμβασης που μπορούν να βοηθήσουν την αλγεβρική τους σκέψη (I. Demonty et. al., 2018). Αυτή η γνώση είναι εν μέρει γνώση περιεχομένου (όταν πρόκειται για την αναγνώριση μιας ποικιλίας σωστών προσεγγίσεων) και εν μέρει παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου.

Η βασική εστίαση της συγκεκριμένης εργασίας βρίσκεται στον διδακτικό σχεδιασμό που αναπτύχθηκε από εκπαιδευτικούς εξειδικευμένους στην διδακτική των Μαθηματικών, τοποθετώντας τους στο δεύτερο φάσμα εκπαιδευτικών όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα το αντικείμενο μελέτης της, ήταν κατασκευάσματα με κυρίαρχο θέμα τα μοτίβα και την γενίκευση που παράχθηκαν από εκπαιδευτικούς στα πλαίσια μιας ομάδας για την εισαγωγή της άλγεβρας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην παρούσα εργασία προσεγγίζουμε τις πεποιθήσεις και της πηγές που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός κυρίως μέσα από μια εστίαση στις σχεδιαστικές τους επιλογές και στον τρόπο που οι ίδιοι επιλέγουν να εισάγουν την άλγεβρα.

2.6 Κοινότητες εκπαιδευτικών

Οι παρακάτω θεωρίες αποτέλεσαν σημαντικό έναυσμα για περαιτέρω έρευνα της συγκεκριμένης διπλωματικής και εργαλείο για την ερμηνεία των δεδομένων που παράχθηκαν από την αλληλεπίδραση των εκπαιδευτικών με την ακαδημαϊκή ομάδα PREMATT αλλά και με υποομάδες στο πλαίσιο της επικοινωνίας και συνεργασίας μεταξύ τους.

Τις τελευταίες δεκαετίες αυτό που παρατηρείται είναι η αλλαγή της εστίασης του ενδιαφέροντος της εκπαιδευτικής έρευνας από την ατομική μάθηση, στη συλλογική μάθηση μέσω ομάδων, καθώς και στον ρόλο της κοινότητας σε μια τέτοια διαδικασία. Είναι χαρακτηριστική η διαπίστωση ότι η διδασκαλία σήμερα έχει ανάγκη από εκπαιδευτικούς υψηλού μορφωτικού επιπέδου οι οποίοι αναπτύσσουν την επαγγελματική τους γνώση, όπως και το επάγγελμά τους (Schleicher, 2012). Χαρακτηριστική είναι και η αναφορά για τους καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Μεγάλη Βρετανία ότι η συνεργασία με τους συναδέλφους και η υποστηρικτική ανατροφοδότηση βοηθούν στην θετική αλλαγή συμπεριφορών (Micklewright, και συν., 2014). Έτσι με αφορμή πλήθος σύγχρονων ερευνών που έφεραν στο επίκεντρο την έννοια της κοινότητας, υιοθετούνται στην παρούσα εργασία κοινωνικές θεωρίες μάθησης που βλέπουν την μάθηση αναπόσπαστα κομμάτι με την συμμετοχή σε κοινότητες εκπαιδευτικών. Οι Lave και Wenger (1991) εισήγαγαν τον όρο «κοινότητα πρακτικής», για να περιγράψουν ένα σύνολο ατόμων που μοιράζονται ένα ενδιαφέρον, μια τέχνη, ένα επάγγελμα και μέσα από την διαδικασία ανταλλαγής πληροφοριών, εμπειριών και κοινών εγχειρημάτων, τα μέλη μαθαίνουν το ένα από το άλλο και έχουν την δυνατότητα προσωπικής και επαγγελματικής ανάπτυξης. Με βάση την παραπάνω οπτική, αποτελέσματα ερευνών του Wendger (1998) αναφέρουν ότι η κοινωνική συμμετοχή αποτελεί μια διαδικασία μάθησης όταν συνυπάρχουν τέσσερα απαραίτητα συστατικά: α) νόημα μέσω του οποίου η μάθηση βιώνεται εμπειρικά, β) πρακτική, μέσω της οποίας η μάθηση αποκτά χειροπιαστό χαρακτήρα, γ) κοινότητα, μέσω της οποίας η μάθηση συνδέεται με το «ανήκειν» σε ένα σύνολο και δ) ταυτότητα, που διαμορφώνεται μέσα από την συμμετοχή στο σύνολο αυτό. Επιπλέον, οι Barab και άλλοι (2001) ορίζουν την κοινωνική πρακτική ως διαρκές δίκτυο ατόμων που μοιράζονται και αναπτύσσουν μια επικαλυπτόμενη γνωστική βάση, σύνολα πεποιθήσεων, αξιών, ιστοριών και εμπειριών εστιασμένα σε μια κοινή πρακτική και σε ένα αμοιβαίο εγχείρημα.

2.7 Θεωρία «documentational genesis»

Την τελευταία δεκαετία σημειώνεται αυξανόμενο ενδιαφέρον από την πλευρά των ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών για την έννοια των «πηγών (resources) που σχετίζονται με τους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών». Η εξέλιξη του σχεδιασμού των εκπαιδευτικών μέσα στον χρόνο αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την συγγραφή της συγκεκριμένης έρευνας. Οι Gueudet & Trouche (2009) ανέπτυξαν την θεωρία της «δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας» (documentational genesis) κατ' αντιστοιχία με την «δημιουργία εργαλείων» (instrumental genesis) των Verillon & Rabardel (1995), διαχωρίζοντας τις πηγές και τις μονάδες διδασκαλίας, παραλληλίζοντας τις πηγές ως τεχνήματα και τις μονάδες διδασκαλίας ως εργαλεία. Τα τεχνήματα είναι προϊόν ανθρώπινης δραστηριότητας ενώ τα εργαλεία είναι κυρίως ατομικές κατασκευές, ανάμικτες οντότητες, φτιαγμένες από τεχνήματα και σχήματα χρήσης τους (schemes). Σύμφωνα με τον Vergnaud (1998), ο όρος «δημιουργία ή γένεση εργαλείου» περιγράφει μια διαδικασία μέσω της οποίας ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα εξελίσσεται σε εργαλείο μέσω δύο εσωτερικών διαδικασιών : (α) την δημιουργία (instrumentation) και (β) την αλλοίωση εργαλείου (instrumentalization). Η δημιουργία σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο το ίδιο το εργαλείο με τους περιορισμούς και τις δυνατότητες του διαμορφώνει τη δραστηριότητα του χρήστη. Η αλλοίωση του εργαλείου αναφέρεται στον τρόπο που ο χρήστης παρεμβαίνει στο εργαλείο και ορίζει τρόπους χρήσης του.

Έρευνες των Gueudet & Trouche (2013) εστιάζουν κυρίως στις αλληλεπιδράσεις εκπαιδευτικών και πηγών αναλύοντας μια αμφίδρομη διαδικασία: οι πρακτικές και οι πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού διαμορφώνουν τον τρόπο χρήσης των πηγών που σχετίζονται με το κομμάτι της διδασκαλίας, ενώ παράλληλα τα χαρακτηριστικά των ίδιων των πηγών που είναι ενσωματωμένα στην διδασκαλία συμβάλλουν στην ανάπτυξη του εκπαιδευτικού παράγοντας μια εξέλιξη στις πεποιθήσεις και τις πρακτικές του ίδιου. Η «θεωρία των μονάδων διδασκαλίας» (documentational approach) (Gueudet και άλλοι, 2011) περιγράφει αυτή τη διπλή διαδικασία. Ένα δεδομένο σύνολο πηγών πυροδοτεί μια αρχική μορφή δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας από μέρος του εκπαιδευτικού. Παράλληλα, η εφαρμογή του υλικού στην πράξη, κατά τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων είτε κατά την εφαρμογή του στην διδακτική τάξη, και οι αλληλεπιδράσεις που προκύπτουν μέσα από αυτήν, αναπτύσσουν σχήματα χρήσης του για συγκεκριμένες καταστάσεις και πλαίσιο όπως φαίνεται παρακάτω:

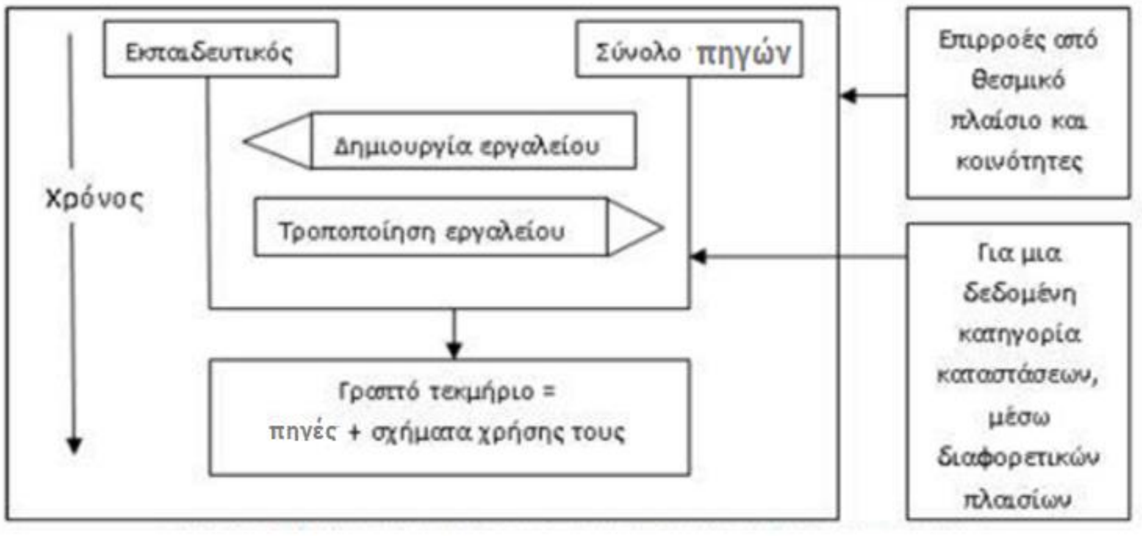
Μονάδα διδασκαλίας = υπάρχουσες πηγές + σχήματα χρήσης του.

Τα σχήματα χρήσης των πηγών ενσωματώνουν (α) την πρακτική (practice), δηλαδή πως να χρησιμοποιηθούν επιλεγμένες πηγές για την διδασκαλία ενός συγκεκριμένου θέματος και (β) την γνώση (knowledge) για τα μαθηματικά, για την διδασκαλία των μαθηματικών, για τους μαθητές και για την τεχνολογία. Οι Gueudet και Trouche (2011) θεωρούν ότι τα σχήματα συνδυάζουν στοιχεία σταθερότητας για παράδειγμα (‘για την διδασκαλία του μαθήματος συνηθίζω να χρησιμοποιώ περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας. Ένας βασικός λόγος είναι ότι αν μια εικασία επαληθεύεται κατά τη μεταφορά (dragging) ενός διαγράμματος, τότε είναι πάντα αληθής με αποτέλεσμα οι μαθητές να μπορούν να αυτενεργούν και να πειραματίζονται μέχρι να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα" ’) και εξέλιξης όπως για παράδειγμα (‘για την προσαρμογή νέου περιβάλλοντος, νέων πηγών, νέων προγραμμάτων σπουδών ενημερώνομαι από πλατφόρμες που προσφέρουν πηγές και δυνατότητες δικτύωσης.’). Πιο αναλυτικά, τα σχήματα χρήσης των πηγών περιέχουν τους ‘τρόπους χρήσης’ (usages) και τις ‘λειτουργικές σταθερές’ (operational invariants) (Gueudet & Trouche 2009, p. 208). Οι Gueudet & Trouche ισχυρίζονται ότι οι ‘λειτουργικές σταθερές’ είναι οι γνωστικές δομές που καθοδηγούν μια δράση δηλαδή η μη ευθέως εκφραζόμενη γνώση του εκπαιδευτικού (πχ. για τα μαθηματικά, τη διδασκαλία, την τεχνολογία, τους μαθητές). Οι ίδιοι καλούν ‘τρόπους χρήσης’ τις συνήθεις δράσεις και ενέργειες του εκπαιδευτικού (δηλαδή στο πως χρησιμοποιεί μια πηγή στη διδασκαλία) για την ίδιες καταστάσεις σε διαφορετικά πλαίσια. Έτσι ο σχεσιακός τύπος που αντιπροσωπεύει τη διαδικασία της δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας επαν- εκφράζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια από τους Gueudet & Trouche ως εξής:

> Μονάδα διδασκαλίας = υπάρχουσες πηγές + τρόποι χρήσης + λειτουργικές σταθερές

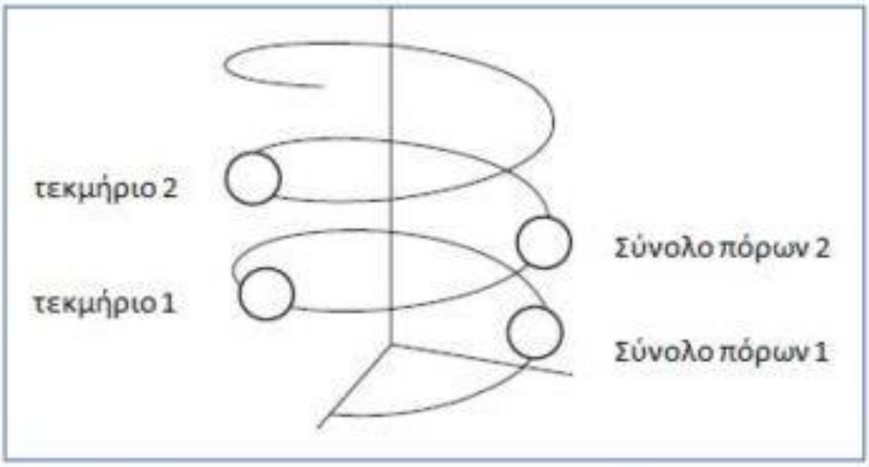
Οι Gueudet και Trouche (2009) από την μια πλευρά θεωρούν ως πηγές αυτές που έχουν υλική υπόσταση, όπως το σχολικό βιβλίο, λογισμικά, το γραπτό ενός μαθητή, συζητήσεις με συνάδελφους, συμμετοχή σε ερευνητικά προγράμματα διδασκαλίας. Από την άλλη θεωρούν επίσης πηγές τα πνευματικά ερεθίσματα που αφορούν τον σχεδιασμό του μαθήματος από τους εκπαιδευτικούς. Επιπλέον, Gueudet & Trouche (2011) υπογραμμίζουν το διαφορετικό είδος των αλληλεπιδράσεων μέσω των οποίων αναπτύσσεται η δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας: αλληλεπιδράσεις μεταξύ δασκάλων και πηγών, μεταξύ καθηγητή και μαθητών, μεταξύ δασκάλου και συναδέλφων, που μπορούν να υποστηριχθούν από την χρήση ψηφιακών πηγών (λίστες ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, ιστότοποι κ.λπ.) για την επικοινωνία και την ανταλλαγή πηγών με συναδέλφους. Συνεπώς το σύνολο μονάδων διδασκαλίας που δομεί και επαναδομεί ένας εκπαιδευτικός μέσα στον χρόνο προσφέρεται ως πεδίο μελέτης του σχεδιασμού και της πρακτικής του. Στη συνέχεια, οι Trouche και Pepin (2013) αναφέρουν, ότι για την επίτευξη ενός σχεδιασμού μαθήματος ή διδακτικής δραστηριότητας (teaching task), οι εκπαιδευτικοί αναζητούν πηγές, τις επιλέγουν, τις τροποποιούν και τις τοποθετούν στην τάξη μοιράζοντας τες με τους συναδέλφους τους. Πιο συγκεκριμένα, οι Gueudet & Trouche (2009) αναφέρουν ότι μια πηγή δεν είναι ποτέ μεμονωμένη, με αποτέλεσμα να αντικαθιστούν τον όρο πηγή με τον όρο «σύνολο πηγών» (set of resources). Με την χρήση αυτού του όρου περιγράφονται όλα όσα εμφανίζονται στην «εργασία μονάδων διδασκαλίας» (documentational work) των εκπαιδευτικών: συζητήσεις μεταξύ καθηγητών, φύλλα εργασίας των μαθητών, εγχειρίδιο, λογισμικό ή «πράγματα» που «παρεμβαίνουν» στη διδακτική δραστηριότητα, όπως η αντίδραση του μαθητή (Gueudet & Trouche, 2012).

Στο συγκεκριμένο σημείο πρέπει να τονιστεί ότι σημαντικός παράγοντας για την ανάπτυξη μιας μονάδας διδασκαλίας αποτελεί ο ρόλος των πεποιθήσεων και των εμπειριών των εκπαιδευτικών. Η εφαρμογή μιας μονάδας διδασκαλίας σε νέα πλαίσια και καταστάσεις οδηγεί σε πιθανό μετασχηματισμό της αρχικής της μορφής. Ο επανασχεδιασμός της συμπεριλαμβάνει νέες πηγές και εξάγει μια καινούριο μονάδα διδασκαλίας. Οι Gueudet & Trouche (σ.206) παριστάνουν αυτή την εξελικτική διαδικασία μέσα στο χρόνο στην οποία η γένεση νέων μονάδων διδασκαλίας είναι μια διαλεκτική διαδικασία ανάμεσα στον σχεδιασμό κάποιων πηγών και την εξεύρεση σχημάτων χρήσης τους με την μορφή της έλικας (διάγραμμα 2.2). Οι απόψεις τους για τη δημιουργία μονάδων διδασκαλίας υποδεικνύουν αυτή την διαδικασία ως μια δυναμική και συνεχιζόμενη και όχι στατική, όπου οι αναλύσεις που παρουσιάζουν δεν επικεντρώνονται μόνο την περιγραφή της ενσωμάτωσης των νέων πηγών αλλά και σε επεξηγήσεις σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι πηγές.



`Διάγραμμα 2.1 Διαδικασία «γένεσης μονάδας διδασκαλίας» κατά Gueudet & Trouche

Σε αντιστοιχία με την παραπάνω θεωρία η Adler (2000) παραλληλίζει τον όρο πηγή ως «re-source» και το ερμηνεύει ως «στις πηγές και πάλι». Η Adler (2000) ισχυρίστηκε ότι οι πηγές στην πρακτική (practice) και στο πλαίσιο (context) πρέπει να θεωρηθούν ως ένα σημαντικό θέμα στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά και να βρίσκονται στο επίκεντρο της προσοχής. Η ίδια θεωρεί ότι η λειτουργία μιας πηγής στα σχολικά μαθηματικά έγκειται στη χρήση της στο πλαίσιο, και όχι στην απλή παρουσία της πηγής. Περιγράφει τον «εκπαιδευτικό που αξιοποιεί πηγές» (resourced teacher) ως εκπαιδευτικό που ενεργεί με υλικές και κοινωνικοπολιτιστικές πηγές και όχι απλώς ως εκπαιδευτικός που περιβάλλεται από υλικές πηγές. Επιπλέον ισχυρίζεται ότι οι υλικές πηγές περιλαμβάνουν τεχνολογίες (πίνακας, αριθμομηχανή, ηλεκτρονικό υπολογιστή), τα σχολικά υλικά μαθηματικών (εγχειρίδια, γεωπίνακες λογισμικό ηλεκτρονικών υπολογιστών), τα μαθηματικά αντικείμενα (αποδείξεις, μαγικά τετράγωνα) και τα καθημερινά αντικείμενα. Αντίθετα οι ανθρώπινες πηγές αναφέρονται σε άτομα (γνώσεις - πεποιθήσεις εκπαιδευτικών, γονέων) και διαδικασίες, όπως οι συλλογικότητες.



Διάγραμμα 2.2: Εξέλιξη της δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας μέσα στον χρόνο, κατά Gueudet & Trouche

Οι θεωρίες των Gueudet και Trouche αναφέρουν τους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί έχουν αντλήσει από διάφορες πηγές, συμπεριλαμβανομένων των αντιδράσεων των μαθητών τους, και έχουν διαμορφώσει αυτές τις πηγές με την πάροδο του χρόνου. Έτσι, οι θέσεις τους επικεντρώνονται άμεσα σε διάφορους γύρους της εξελικτικής έλικας, όπου για παράδειγμα οι αντιδράσεις των μαθητών και οι συνεισφορές των συναδέλφων τους χρησίμευαν ως πηγές για διάφορους κύκλους διαμόρφωσης και αναδιαμόρφωσης των πηγών αυτών. Με άλλα λόγια, ενώ μια δεδομένη συνέντευξη στην τάξη ή μια συνέντευξη καθηγητή συμβαίνει σε μια στιγμιαία στιγμή της εξελικτικής έλικας, η δημιουργία μονάδων διδασκαλίας που εξετάζεται είναι αυτή που έχουν λάβει χώρα σε διάφορους κύκλους ή γύρους της έλικας.

Εν κατακλείδι, η προβληματική που εμφανίζεται στις μέρες μας σχετικά με τις πηγές που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός, με τις σχεδιαστικές του επιλογές και τον τρόπο που ο ίδιος αντιμετωπίζει κρίσιμα ζητήματα που προκύπτουν μέσα στην τάξη οδήγησαν στην εύρεση ερευνητικών ερωτημάτων της συγκεκριμένης εργασίας. Πιο συγκεκριμένα γίνεται προσπάθεια για απάντηση ζητημάτων που εστιάζουν στο τι είδους υλικά/εργαλεία επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί, πως εξελίσσεται η χρήση αυτών των υλικών μέσα στην τάξη, τι είδους ζητήματα προκύπτουν κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων και ποια είναι η μάθηση που οι ίδιοι αποκομίζουν στο επίπεδο επαγγελματικής τους ανάπτυξης όταν συνεργάζονται σε μια ομάδα στο πλαίσιο ενός ερευνητικού προγράμματος που μελετάει την εισαγωγή της Άλγεβρας.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Στόχοι της έρευνας- ερευνητικά ερωτήματα

Έμφαση δόθηκε στην διερεύνηση του διδακτικού σχεδιασμού και της πρακτικής μιας ομάδων δυο εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης καθώς συνεργάστηκαν για την ανάπτυξη διδακτικών υλικών που αξιοποιούν ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εργαλεία. Εκπαιδευτικοί και ερευνητές συγκρότησαν ομάδα συνεργασίας, σχεδίασαν διδασκαλίες στη βάση δραστηριοτήτων που εφάρμοσαν σε σχολικές τάξεις και αξιολογήθηκαν τα αποτελέσματα τους.

Με την παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρείται η (α) ανάλυση του διδακτικού σχεδιασμού των εκπαιδευτικών και των αντίστοιχων υλικών (αποφάσεις, αιτιολογήσεις εκπαιδευτικών), (β) η διερεύνηση ζητημάτων που ανακύπτουν κατά την εφαρμογή των υλικών αυτών στη διδασκαλία σε πραγματικές σχολικές συνθήκες και (γ) πώς η εφαρμογή επηρεάζει την περαιτέρω εξέλιξη του διδακτικού σχεδιασμού. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι δίνεται έμφαση στην αναζήτηση των στοιχείων που συντελούν στην μάθηση που αποκομίζουν οι εκπαιδευτικοί στο επίπεδο της επαγγελματικής τους ανάπτυξης.

Ερευνητικά ερωτήματα

Ερευνητικό ερώτημα 1: Ποια ζητήματα ήρθαν στην επιφάνεια μέσα από τις επαγγελματικές συναντήσεις στο Πανεπιστήμιο αναφορικά με την εισαγωγή της άλγεβρας;

Ερευνητικό Ερώτημα 2: Από ποιους παράγοντες επηρεάζεται η εξέλιξη της δημιουργίας τεκμηρίων των εκπαιδευτικών αναφορικά με την εισαγωγή της άλγεβρας στην Α' γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε κύκλους διδακτικού σχεδιασμού-εφαρμογής στην τάξη-αποτίμησης; Ποια είναι τα στοιχεία που συνιστούν την επαγγελματική μάθηση των εκπαιδευτικών σε αυτό το πλαίσιο;

Ερευνητικό ερώτημα 3: Ποιες είναι οι πηγές που επηρεάζουν τους διδάσκοντες της έρευνας στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων;

Η συγκεκριμένη έρευνα εντάσσεται στον τομέα των ποιοτικών ερευνών, καθώς στοχεύει στην διερεύνηση και στην σε βάθος κατανόηση των παραπάνω ερευνητικών ερωτημάτων.

3.2 Πλαίσιο έρευνας – Συμμετέχοντες

Η σχεδιαζόμενη διπλωματική εργασία έλαβε χώρα στο πλαίσιο ενός Ευρωπαϊκού προγράμματος που είχε σκοπό να διερευνήσει τρόπους εισαγωγής των μαθητών στην άλγεβρα στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση μέσα από την συνεργασία ερευνητών και εκπαιδευτικών και των δυο προηγούμενων βαθμίδων. Πιο συγκεκριμένα, βασικός στόχος του συγκεκριμένου προγράμματος ήταν η συνεργατική ανάπτυξη πηγών και υλικών για την εισαγωγή στην άλγεβρα και την αλγοριθμική σκέψη, η σύνδεση με τα αναλυτικά προγράμματα και τη διδασκαλία σε πραγματικές σχολικές συνθήκες και η συνεισφορά στην δημιουργία μεθοδολογίας συνεργατικής δημιουργίας πηγών και υλικών για την εισαγωγή στην άλγεβρα. Συνολικά στην ομάδα συμμετείχαν εννέα εκπαιδευτικοί εκ των οποίων όλοι ήταν μαθηματικοί, τρεις ερευνητές και ένας καθηγητής Πανεπιστημίου. Ο καθηγητής Πανεπιστημίου συντόνιζε όλες τις συναντήσεις, βοηθούσε να μην αποκλίνει η ομάδα από τον στόχο της και ενίσχυε τις συζητήσεις με τις γνώσεις του μέσα από τον τομέα της έρευνας. Η μια ερευνήτρια βοήθησε το σύνολο της ομάδας στην μάθηση του ψηφιακού εργαλείου «expresser» καθώς επίσης παρέμβαινε με τις γνώσεις της όποτε αυτό ήταν απαραίτητο σε θέματα που αφορούσαν την έρευνα στον τομέα της άλγεβρας. Οι άλλοι δυο ερευνητές, είχαν περισσότερο ρόλο παρατηρητή και ενίσχυαν την συζήτηση με θεωρητικές γνώσεις από τον τομέα της έρευνας όποτε αυτό ήταν αναγκαίο. Οι εκπαιδευτικοί συμμετέχοντες του προγράμματος κλήθηκαν να διαμορφώσουν διδακτικό σχεδιασμό με βάση πηγές και υλικά για παρεμβάσεις στις σχολικές τους τάξεις είτε συνεργατικά με άλλους συναδέλφους του προγράμματος είτε ατομικά. Έπειτα κλήθηκαν να παρουσιάσουν και να συζητήσουν με τα υπόλοιπα μέλη τον διδακτικό τους σχεδιασμό στις συναντήσεις του πανεπιστημίου πριν την εφαρμογή τους. Στις τελευταίες δυο συναντήσεις μετά το πέρας των εφαρμογών στις σχολικές τάξεις πραγματοποιήθηκε η αποτίμηση από μεριάς τους με σκοπό να αναδειχθούν ζητήματα που ήρθαν στην επιφάνεια.

Στην παρούσα εργασία έγινε ανάλυση του σχεδιασμού, της εφαρμογής και της αποτίμησης δραστηριοτήτων που σχεδιάστηκαν από τα μέλη μιας ομάδας εκπαιδευτικών του προγράμματος PREMATT. Στο πλαίσιο λοιπόν των συναντήσεων αυτής της ομάδας μελετήθηκε κάθε εκπαιδευτικός (α) ξεχωριστά (β)στο σύνολο της ομάδας αλλά και στο (γ) χώρο του σχολείου κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων.

Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης (case study) (Yin, 1994, 2003), αφού εξετάστηκαν δυο άτομα στο πλαίσιο μιας ομάδας, με στόχο να πραγματοποιηθεί ανάλυση σε βάθος. Η μελέτη περίπτωσης αφορά στη συλλογή και παρουσίαση λεπτομερών πληροφοριών που αφορούν ένα άτομο ή μια ομάδα ατόμων για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων που αναφέρονται στο συγκεκριμένο άτομο ή στη συγκεκριμένη ομάδα και αποκλειστικά για το συγκεκριμένο πλαίσιο που πραγματοποιείται η έρευνα. Πρέπει να τονιστεί ότι τα συμπεράσματα που προκύπτουν αφορούν αποκλειστικά και μόνο το άτομο ή την ομάδα ατόμων που μελετήθηκε και δεν προσφέρονται για γενικεύσεις.

Η ομάδα Prematt υπήρξε ο κεντρικός πυρήνας του σεμιναρίου επαγγελματικής ανάπτυξης δράσης έρευνας μέσα στην οποία συμμετείχαν οι εκπαιδευτικοί και μέσα στην οποία οργανώθηκε ένα πρόγραμμα διδασκαλιών όπου επιλέχθηκε και η έτερο-παρατήρηση σαν μια μεθοδολογική επιλογή στο πλαίσιο του ερευνητικού προγράμματος.

Οι συναντήσεις και οι εφαρμογές των δραστηριοτήτων είχαν χρονική διάρκεια από τον Νοέμβριο μέχρι τον Μάϊο του σχολικού και ακαδημαϊκού έτους 2017-2018. Συνολικά, στην συγκεκριμένη έρευνα συμμετείχαν δυο εκπαιδευτικοί Μαθηματικών. Σημαντικό είναι να τονιστεί ότι οι συμμετέχοντες της έρευνας δεν είναι ο μέσος όρος του εκπαιδευτικού. Ο πρώτος εκπαιδευτικός είναι κάτοχος μεταπτυχιακού και διδακτορικού τίτλου με πλήρη εξειδίκευση στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών και διδάσκει στο Γενικό Γυμνάσιο της Αργυρούπολης ενώ ο δεύτερος εκπαιδευτικός είναι κάτοχος μεταπτυχιακού τίτλου και διδάσκει στο Πρότυπο Πειραματικό Γυμνάσιο της Αθήνας. Στην προκειμένη όμως περίπτωση στόχος ήταν μια τεταμένη μελέτη στο πως εκπαιδευτικοί απαρτισμένοι από εξειδικευμένες ικανότητες στην διδακτική των Μαθηματικών συνεργάζονται και αλληλοεπιδρούν για την διαμόρφωση δραστηριοτήτων στην άλγεβρα και δεύτερον τι είδους ζητήματα φέρνουν γύρω από την άλγεβρα σε σχέση με την εφαρμογή.

Κατά την σχολική χρονιά πραγματοποιήθηκαν έξι συναντήσεις της ομάδας Prematt που διήρκησαν συνολικά 10 (δέκα) ώρες και συνολικά 3 εφαρμογές/ διδασκαλίες των δραστηριοτήτων με διάρκεια 6 (έξι) διδακτικών ωρών.

Για λόγους ερευνητικής δεοντολογίας και συνέπειας στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί προσφωνούνται με ψευδώνυμα.

3.3 Συλλογή δεδομένων

Κατά το σχολικό και ακαδημαϊκό έτος 2017-2018 πραγματοποιήθηκαν έξι συναντήσεις της συγκεκριμένης ομάδας και συνολικά τρεις εφαρμογές/ διδασκαλίες των δραστηριοτήτων που σχεδιάστηκαν από τα δύο μέλη της έρευνας. Οι συναντήσεις αλλά και οι παρεμβάσεις στο χώρο των σχολείων ηχογραφήθηκαν. Στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής αναλύονται ο σχεδιασμός, η εφαρμογή στην σχολική αίθουσα και η αποτίμηση των δραστηριοτήτων. Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν οι έξι απομαγνητοφωνημένες συναντήσεις τις ομάδας (κάθε συνάντηση διήρκησε κατά μέσο όρο μια μισή ώρα), οι πέντε απομαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις που έγιναν στους δυο εκπαιδευτικούς της έρευνας (κάθε συνέντευξη διήρκησε κατά μέσο όρο δεκαπέντε λεπτά) καθώς και κρίσιμα κομμάτια από τις τρεις διδασκαλίες-εφαρμογές των δυο εκπαιδευτικών (συνολικά έξι διδακτικές ώρες χωρισμένες σε τρία δίωρα). Σε ότι αφορά την μελέτη του σχεδιασμού για τον κάθε συμμετέχοντα πραγματοποιήθηκε συνέντευξη πριν την παρέμβαση στην σχολική αίθουσα με σκοπό να αναδειχθούν διάφορα ζητήματα της άλγεβρας καθώς επίσης και ζητήματα που αντιμετώπισαν οι εκπαιδευτικοί όταν σχεδίαζαν τις δραστηριότητες, όταν χρειάστηκε να κάνουν αλλαγές και όταν συνεργάστηκαν με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Έπειτα, πραγματοποιήθηκε από τους συμμετέχοντες συνέντευξη μετά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων στην σχολική αίθουσα με σκοπό μέσα από τον αναστοχασμό και την αποτίμηση της διδακτικής τους πρακτικής να εντοπιστεί και να ερμηνευτεί ο βαθμός επίτευξης των αρχικών στόχων, οι πιθανές αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν στον αρχικό σχεδιασμό πριν την υλοποίηση στην τάξη αλλά και μετά την έτερο-παρατήρηση μεταξύ των εκπαιδευτικών στο πλαίσιο της τάξης του καθενός. Πιο συγκεκριμένα, σε ότι αφορά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων στα σχολεία, μελετήθηκε ο εκπαιδευτικός σε θέματα που αφορούν την διαχείριση αξιοσημείωτων περιστατικών, την επιλογή των εργαλείων/υλικών (ψηφιακά μέσα ή μη) και το χρονικό πλαίσιο που ακολούθησε.

3.4 Διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων

Για την ανάλυση των παραπάνω πραγματοποιήθηκε απομαγνητοφώνηση όλων των συναντήσεων της ομάδας, των συνεντεύξεων που έγιναν σε κάθε εκπαιδευτικό ξεχωριστά πριν και μετά τις εφαρμογές στην σχολική αίθουσα αλλά και κρίσιμων σημείων που προέκυψαν κατά τις εφαρμογές μέσα στις σχολικές τάξεις. Για την ανάλυση των δραστηριοτήτων πραγματοποιήθηκε διαχωρισμός σε φάσεις με βάση την χρονική σειρά που διαμορφώθηκε, εφαρμόστηκε και ανά-σχεδιάστηκε η δραστηριότητα από τους δυο εκπαιδευτικούς της έρευνας.

Σε πρώτη φάση απομαγνητοφωνήθηκαν οι διάλογοι των συναντήσεων και συνεντεύξεων ακολουθώντας ανάλυση δεδομένων με τεχνικές μεθόδων θεμελίωσης ανάλυσης (Grounded Theory) (Strauss & Corbin, 1998). Στη συνέχεια τα δεδομένα διαβάστηκαν αρκετές φορές μέχρις ότου να φέρουν στην επιφάνεια επαναλαμβανόμενους κώδικες. Η ανάλυση έφερε στο προσκήνιο τον σχηματισμό ενός επαναλαμβανόμενου μοτίβου πηγών όπου χρησιμοποιήθηκε για την απάντηση του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος διαμορφώνοντας το σχεδιάγραμμα 4.3 με βάση τους άξονες που σχηματίστηκαν από την παραπάνω μέθοδο ανάλυσης. Πιο αναλυτικά, κατά την διαδικασία της επεξεργασίας των δεδομένων, στην υπάρχουσα κατηγορία 'Πηγές' της βιβλιογραφίας των (πχ. Guedet & Trouche 2009, 2012), δημιουργήθηκε ένα ΄Μοτίβο πηγών' δηλαδή οι υποκατηγορίες όπως αναφέρονται παρακάτω:

I. Μαθητής

II. Υλικά

III. Διδακτική εμπειρία εκπαιδευτικού

IV. Συνεργασία

Σε δεύτερη φάση, οι διάλογοι των απομαγνητοφωνήσεων συναντήσεων και συνεντεύξεων διαχωρίστηκαν σε μέρη που εμφανιζόντουσαν οι 'τρόποι χρήσης' και οι 'Λειτουργικές σταθερές' των δυο εκπαιδευτικών της έρευνας όπως γίνεται και στην βιβλιογραφία. Τα δεδομένα αναλύθηκαν με τεχνικές grounded (Strauss & Cubin, 1998). Κάθε μέρος από αυτά που επιλέχθηκαν κωδικοποιήθηκε με δύο είδη κωδικών όπως και στην βιβλιογραφία (πχ. Guedet & Trouche 2009, 2012). Ο πρώτος κώδικας ονομάστηκε 'τρόποι χρήσης' και προσδιόρισε τις διδακτικές πρακτικές/επιλογές των εκπαιδευτικών, τι κάνει δηλαδή ο κάθε εκπαιδευτικός σε ζητήματα που προκύπτουν κατά την διάρκεια της διδασκαλίας του. Ο δεύτερος κώδικας ονομάστηκε 'Λειτουργικές σταθερές' και ανέδειξε τους λόγους για τους οποίους οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν τις παραπάνω διδακτικές τακτικές/επιλογές. Αυτό που επιτεύχθηκε από την δεύτερη φάση της ανάλυσης σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της πρώτης φάσης ήταν η απάντηση του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος δηλαδή η εύρεση των παραγόντων που εξελίσσεται η δημιουργία τεκμηρίων στο τρίπτυχο διδακτικός σχεδιασμός-εφαρμογή στο χώρο της τάξης-αποτίμηση. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε ο σχεσιακός τύπος από την υπάρχουσα βιβλιογραφία που αντιπροσωπεύει τη διαδικασία της δημιουργίας τεκμηρίωσης Τεκμήριο = υπάρχουσες πηγές + τρόποι χρήσης + λειτουργικές σταθερές όπως αναφέρθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο.

Οι κώδικες που προσδιορίστηκαν αναδύθηκαν από τα δεδομένα ή προέκυψαν από την συνεχή ανάγνωση των δεδομένων και σύγκριση τους με την υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Αυτές οι φάσεις ήταν καθοριστικές για την διεξαγωγή των παρακάτω αποτελεσμάτων.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης

Από τις έξι συναντήσεις ήρθαν στην επιφάνεια ζητήματα που αφορούσαν κυρίως (α) τι ονομάζεται άλγεβρα και που πρωτό- εμφανίζεται στα σχολικά Μαθηματικά (β) τον τρόπο που εισάγεται η έννοια της μεταβλητής και στις δυο βαθμίδες (γ) την φύση των υλικών και των πηγών για την διδασκαλία της άλγεβρας

Οι συναντήσεις αυτές είχαν πρωτίστως σαν στόχο την εξέλιξη της ερευνητικής πορείας του προγράμματος PreMatt σχετικά με την εισαγωγή της Άλγεβρας στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Κάθε μέλος τροφοδοτούσε την ομάδα κάνοντας κριτική και σχολιασμούς στους διδακτικούς σχεδιασμούς που παρουσίαζαν οι συνάδελφοι αλλά και τροφοδοτούνταν από αυτή δεχόμενο κριτική και σχόλια για τον δικό του διδακτικό σχεδιασμό. Οι κύριες μαθηματικές ενότητες που συζητήθηκαν αρχικά ήταν: Κλάσματα, ποσοστά, εκφράσεις με μεταβλητές, θετικοί και αρνητικοί αριθμοί, εξισώσεις και προβλήματα. Τελικώς, όλα τα μέλη της ομάδας αποφάσισαν να σχεδιάσουν δραστηριότητες γύρω από την έννοια των μοτίβων με σκοπό την εισαγωγή της μεταβλητής.

Ένα σημαντικό ζήτημα που αναδύθηκε στην ομάδα σχετίζεται με το τι **ονομάζεται άλγεβρα και που πρωτό- εμφανίζεται στα σχολικά Μαθηματικά.** Για το κάθε εκπαιδευτικό της ομάδας η άλγεβρα σηματοδοτεί διαφορετικές έννοιες και καταστάσεις και εμφανίζεται σε διαφορετικά πλαίσια. Είναι ενδιαφέρον το ότι ακούστηκαν ποικίλες απόψεις για την έννοια και τον ορισμό της άλγεβρας γεγονός που δείχνει την διαφορετικότητα των πεποιθήσεων για τα Μαθηματικά.

Το παρακάτω απόσπασμα επιλέχθηκε για να δείξει την άποψη μιας δασκάλες της ομάδας σχετικά με το που πρωτό εμφανίζεται η άλγεβρα και τι μορφή έχει στο Δημοτικό. Φαίνεται να πιστεύει ότι η άλγεβρα εμφανίζεται όταν υπάρχει συμβολική μορφή:

> «Η αναφορά στην λέξη άλγεβρα δεν υπάρχει πουθενά. Εδώ βλέπουμε, από την Ε δημοτικού, πώς βρίσκουμε την διάμετρο από δύο ακτίνες. Αρχίζουμε, παρότι δεν μιλήσαμε για την έννοια της μεταβλητής ούτε για τους συμβολισμούς, βλέπουμε στην ουσία οι δύο ακτίνες δίνονται με έναν τελείως συμβολικό τρόπο. 2α=δ. Οπότε αρχίζουμε και μπαίνουμε σε τύπους που έχουν κάποια σύμβολα και με πιο γενικευμένη έννοια»

Σε μια από τις συναντήσεις της ομάδας τέθηκε ως πρόβλημα να ζητείται η συμπλήρωση των κενών κουτιών δεξιά και αριστερά από τα κουτιά που περιλαμβάνουν στη σειρά τους εξής αριθμούς: 8, 12, 16, 20. Η άποψη που στηρίχτηκε από ένα μέρος της ομάδας αναφέρει την άλγεβρα ως αναπόσπαστο κομμάτι της αριθμητικής. Οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν ότι η άλγεβρα δεν συνδέεται απαραίτητα με τις μεταβλητές. Αρκετοί λένε είναι αριθμητική, όμως στο επίπεδο που γίνεται εστίαση στη φόρμα, εμβαθύνουμε στην έννοια της δομής και των σχέσεων, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται κανονικότητες. Το παρακάτω απόσπασμα επιβεβαιώνει την θέση ότι η εμπλοκή των μαθητών με αριθμητικές πράξεις σηματοδοτεί την επαφή τους με την ίδια την άλγεβρα:

> «Κατ εμένα, οτιδήποτε απαιτεί αλγεβρική σκέψη, αμέσως εντάσσεται στην άλγεβρα. Τώρα, ακόμα και στο επίπεδο αυτό των αριθμών, απαιτείται αλγεβρική σκέψη. Για τον λόγο ότι έχω ένα αριθμό και τον έχω γράψει σε μορφή, που δεν είναι η κανονική μορφή στην οποία γράφονται οι αριθμοί. Άρα πρέπει εδώ να αναζητηθούν διάφορες σχέσεις»

Η άλγεβρα εντοπίζεται από τον κάθε εκπαιδευτικό σε διαφορετικές μαθηματικές έννοιες. Για ορισμένους η άλγεβρα προσεγγίζεται μέσω της ανάγκης για αιτιολόγηση μιας μαθηματικής πράξης. Πιο συγκεκριμένα, για τον παρακάτω εκπαιδευτικό φαίνεται η άλγεβρα να εμφανίζεται σε αλγεβρικές παραστάσεις και συναρτήσεις που να περιλαμβάνουν έναν άγνωστο και απαιτείται η αντικατάσταση του:

> «Για μένα άλγεβρα είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις, οι συναρτήσεις, οι κανονικότητες […] Αναζητώ σχέσεις. Αναζητώντας σχέσεις, ο μαθητής αναπτύσσει αλγεβρική συλλογιστική. Πρέπει να αιτιολογήσει, γιατί αυτό διαιρείται ή όχι με το 14. Άρα, είναι η άλγεβρα που αναπτύσσεις.»

Τέλος, το παρακάτω απόσπασμα επιλέχθηκε για να αναδείξει μια διαφορετική άποψη σε σχέση με το τι είναι η άλγεβρα. Ο εκπαιδευτικός βλέπει την άλγεβρα με δυο οπτικές δίνοντας της σημασιολογικό και συμβολικό χαρακτήρα. Θεωρεί πως για να εμφανιστεί ολοκληρωμένα η άλγεβρα σε οποιοδήποτε μαθηματική έννοια, πρέπει οι μαθητές να εμπλακούν με το σημασιολογικό κομμάτι της:

> «Όταν πρέπει να χρησιμοποιήσω αριθμούς, παρενθέσεις είναι άλγεβρα. Έχουμε μπει σε συμβολισμό[…] Κάνουμε άλγεβρα τυφλά, δουλεύει πάνω στο συντακτικό της άλγεβρας. Αλλά στη σημασία της άλγεβρας πρέπει να κάνουμε δουλειά. Πως αυτά θα αποκτήσουν υπόσταση και σημασία για τα παιδιά. Μέχρι ένα σημείο δεν είναι δύσκολο να μάθεις τις τεχνικές. Το θέμα είναι πώς αυτά δένουνε με σημασίες […] Δηλαδή, τι;! Το παιδί θα μπορέσει να πάρει ένα 2 ένα 3 να πει το 6 πολλαπλασιάζεται με αυτό και αυτό. Δεν έχουν σημασίες εδώ.»

Επιπλέον, στο πλαίσιο των συζητήσεων αναδύθηκε η σύνδεση των δυο βαθμίδων πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η άμεση ανταλλαγή απόψεων των δυο βαθμίδων κάτω από το ίδιο πλαίσιο αποτελεί ένα καινοτόμο και πρωτότυπο τρόπο συνεργασίας. Στο παρακάτω απόσπασμα η δασκάλα του Δημοτικού παρουσιάζει στην ομάδα **τον τρόπο που εισάγει την έννοια της μεταβλητής** μέσω μοτίβων. Η ίδια αναφέρει πως στο Δημοτικό προηγείται η διαισθητική και εικονική προσέγγιση μιας έννοιας και έπειτα ακολουθεί η γραφική αναπαράσταση. Συνεπώς οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης τροφοδοτούνται από τις δασκάλες της ομάδας λαμβάνοντας άμεση γνώση για το επίπεδο και τον τρόπο που οι μαθητές του Δημοτικού μπορούν να επεξεργαστούν την μεταβλητή:

> «Θα καταλάβουν ότι ένα γράμμα μπορεί να συμβολίζει έναν αριθμό. Μέχρι τώρα αυτό είναι τελείως άγνωστο στα παιδία στην έκτη δημοτικού. Δεν θα είναι ξεκάθαρο ότι αυτός ο άγνωστος μπορεί να πάρει διάφορες τιμές.[…] θέλω να φτιάξει το παιδί τη μια, τη δεύτερη, την τρίτη επανάληψη. Στην αρχή χειροκίνητα, σαν να ζωγράφιζαν τετραγωνάκια σε ένα τετραγωνισμένο χαρτί. Γιατί μη νομίζεις, στο να περάσουν από το οπτικό στο να το σχεδιάσουν, δηλαδή ακόμα και να έχουν σε εικόνα, η μεταφορά από την εικόνα στο χαρτί είναι δύσκολη για τα παιδία.»

Η δεύτερη δασκάλα της ομάδας φαίνεται να ακολουθεί πρωτίστως την εικονική προσέγγιση για την εισαγωγή της μεταβλητής και να επιλέγει οπτικά μέσα και τρόπους για να εμπλέξει τους μαθητές της σε μαθηματικά προβλήματα. Στο παρακάτω απόσπασμα περιγράφεται ο τρόπος εισαγωγής της μεταβλητής στην Α δημοτικού:

> «[…]σκέφτηκα ότι δεν μπορώ να παίξω με δυο πλευρές ταυτόχρονα θα παίξω μόνο με το μήκος και επειδή κάναμε τα μισά και τα διπλάσια τότε είμασταν μέχρι το 10 να δώσουμε τιμές 2,4,8 και πάει λέγοντας. Διπλασιάζοντας ή Υποδιπλασιάζοντας. Για να δοθεί το κατάλληλο περιβάλλον είπα ότι θα τους ζητήσω να μου ζωγραφίσουν σε Α4 χαρτί μια εικόνα, όποια θα ήθελαν να δουν στον τοίχο της τάξης τους ζωγραφισμένη. Μετά [..] θα την μεγεθύνω είχα σκεφτεί εγώ αρχικά θα την περάσω στον τοίχο, εγώ θα τους πω ότι δεν χωράνε και θα το χωρίσουμε το μήκος σε πιο μικρό, θα το υποδιπλασιάσουν θα το ξανά κάνουν μέχρι να φτάσει στο 1 έχοντας δώσει μια συμβατή μονάδα μέτρησης στην οποία θα την έβαζαν μέσα θα ψάχναμε δηλαδή πόσες φορές χωράει έτσι ώστε να χωράει 8 ακριβώς μονάδες.»

Παρακάτω επιλέχθηκε ένα απόσπασμα από τα σχόλια ενός εκπαιδευτικού που παρουσιάζει τον διδακτικό του σχεδιασμό με βάση τον τρόπο που εισάγει την μεταβλητή, επιδιώκοντας μέσα από μια ειδική εξίσωση οι μαθητές να μεταβούν στην γενικευμένη μορφή της. Συνεπώς, φαίνεται να διαφέρει αισθητά ο τρόπος προσέγγισης της άλγεβρας από πρωτοβάθμια σε δευτεροβάθμια εκπαίδευση:

> «Ο σχεδιασμός έχει να κάνει με το να δοθεί έμφαση σε αυτή την εξίσωση $\chi+4=10$ η οποία μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής να γεφυρωθεί η

> διακριτή σχέση χ+6 με την συνεχόμενη μεταβλητή χ να περάσουμε από την συγκεκριμένη εξίσωση σε γενικευμένη χ+α=β να λύσουν αυτή την εξίσωση κάτω από τους περιορισμούς του α και του β και υπό περιορισμούς του ίδιου του χ. καθώς ο σχεδιασμός περιλαμβάνει και την συμμεταβολή. Το χ με το χ+4»

Ένα τρίτο σημαντικό ζήτημα που ήρθε στην επιφάνεια των συζητήσεων είναι η **φύση των υλικών και των πηγών για τη διδασκαλία της άλγεβρας**. Οι εκπαιδευτικοί της ομάδας φάνηκε να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν μια ποικιλία ψηφιακών και χειραπτικών υλικών μέσω των οποίων εισάγουν μαθηματικές έννοιες και στις δυο βαθμίδες. Μάλιστα πολλά υλικά που συζητήθηκαν δεν ήταν γνωστά σε μεγάλο μέρος της ομάδας, με αποτέλεσμα να γίνουν νέες απόπειρες χρήσης υλικών στις σχολικές αίθουσες.

Το πρόγραμμα αφορούσε κυρίως δραστηριότητες με βάση το λογισμικό eXpresser. Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (μαζί και οι δυο εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας) τροφοδοτήθηκαν από το πλαίσιο της ομάδας μαθαίνοντας τη χρήση του συγκεκριμένου εργαλείου και μάλιστα αρκετοί από αυτούς επέλεξαν να σχεδιάσουν δραστηριότητες δομημένες με βάση το εργαλείο αυτό. Αποτελεί γεγονός πως οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί επέλεξαν να ενσωματώσουν μια εισαγωγική δραστηριότητα στον eXpresser με απλές μαθηματικές έννοιες για πρώτη εξοικείωση των μαθητών τους με το νέο ψηφιακό εργαλείο και στη συνέχεια να μεταβούν σε βαθύτερες μαθηματικές έννοιες.

Παρ'όλο που οι περισσότερες δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν από την ομάδα περιλάμβαναν ψηφιακά εργαλεία, παρατηρήθηκε ένα μέρος της να κάνει στροφή στην χρήση χειραπτικών εργαλείων. Πιο συγκεκριμένα ένας εκπαιδευτικός παρουσίασε τον διδακτικό του σχεδιασμό βασισμένο στην χρήση των εργαλείων 'κυκλικοί δίσκοι' και 'ράβδοι Cuisenaire'. Για την υπόλοιπη ομάδα τα εργαλεία αυτα ήταν παντελώς άγνωστα και φάνηκε να εντυπωσιάζουν με τον τρόπο εφαρμογής τους. Ένα άλλο μέλος της ομάδας επέλεξε να ενσωματώσει στην διδασκαλία του συνδυαστικά χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία. Επινόησε ένα χειραπτικό εργαλείο που το ονόμασε 'εξισωτήρα΄ με σκοπό να λύνει όλες τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις σε συνδυασμό με το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας Sketchpad και μιας ρομποτικής κατασκευής. Ο ίδιος τροφοδοτεί με πλούσιο υλικό την ομάδα η οποία φάνηκε να δείχνει ενδιαφέρον βρίσκοντας το πρωτότυπο και καινοτόμο. Παρακάτω αναλύει συνοπτικά τον σχεδιασμό του:

> «Στην αρχή σκέφτομαι να κάνω έναν εξισωτήρα που θα λύνει την χ+4=10. [...]Αυτό που σκέφτομαι να κάνω είναι να βάλω το ρομπότ να βάλω έναν αισθητήρα απόστασης και ένα πάνελ. Το πάνελ πχ αν είναι χ+4=10 να είναι στο 10. Το ρομπότ θα σταματήσει 4 μονάδες πριν το 10. Και εδώ να έχει μια

αριθμομηχανή που θα είναι ακριβώς η μεταβλητή. Είναι προσομοίωση του εξισωτήρα. Λύνει όλες τις εξισώσεις.»

Οι εκπαιδευτικοί της ομάδας προβληματίστηκαν για το είδος των δραστηριοτήτων και των υλικών που παραδίδουν στους μαθητές. Η ποικιλία των πηγών του κάθε εκπαιδευτικού φαίνεται να φέρνει διαφορές στον τρόπο οπτικής και επιλογής εργαλείων. Η εκπαιδευτικός της παρούσας έρευνας τροφοδοτεί την ομάδα με βάση τις πηγές που την διακατέχουν σχετικά με τον τρόπο επιλογής και σχεδίασης ερωτημάτων:

«Εκπ1: Αυτά λοιπόν τα περιβάλλοντα όπως ο eXpresser είναι όλα κλειστού τύπου δεν σου αφήνουν να επέμβεις σε αυτά.

Μαρία: έχει να κάνει πιο πολύ με το πως θα θέσεις τα ερωτήματα, δηλαδή έχει να κάνει πιο πολύ με τον εκπαιδευτικό. Το περιβάλλον μπορεί να είναι κλειστό, αν εσύ όμως φτιάξεις κάποιες δραστηριότητες που να έχουν λίγο πιο ανοιχτό χαρακτήρα και ένα μέρος τους μπορεί μόνο να εκτελείται με αυτό.»

Συνοψίζοντας, για τον κάθε εκπαιδευτικό της ομάδας παρατηρήθηκε το γεγονός η άλγεβρα να έχει διαφορετική ερμηνεία και να βρίσκεται σε διαφορετικές έννοιες καθώς επίσης φάνηκε να διαφέρει αισθητά ο τρόπος προσέγγισης της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επιπλέον, στις συναντήσεις της ομάδας ήρθε στο προσκήνιο μια ποικιλία ψηφιακών και χειραπτικών εργαλείων μέσω των οποίων οι εκπαιδευτικοί επιδίωκαν την εισαγωγή της μεταβλητής τροφοδοτώντας την ομάδα με πλούσιο υλικό και προβληματισμούς για το είδος των δραστηριοτήτων και των υλικών που παραδίδουν στους μαθητές τους.

4.2 Στάδια σχεδιασμού - εφαρμογής - αποτίμησης των δραστηριοτήτων

Ο παρακάτω διαχωρισμός σε στάδια πραγματοποιήθηκε με βάση την χρονική σειρά που διαμορφώθηκε, εφαρμόστηκε και ανά-σχεδιάστηκε η δραστηριότητα από τους δυο εκπαιδευτικούς της έρευνας. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο οι ‘τρόποι χρήσης’ που έχουν στην διάθεση τους οι δυο εκπαιδευτικοί για την διδασκαλία τους αλλά και οι ‘λειτουργικές σταθερές’ τους σχετικά με τις διδακτικές προσεγγίσεις και επιλογές τους. Γίνεται μια προσπάθεια ερμηνείας των παραγόντων που επηρεάζεται η εξέλιξη της δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας των εκπαιδευτικών αναφορικά με την εισαγωγή της άλγεβρας στην Α γυμνασίου.

4.2.1. Στάδιο 1: Πρώτος διδακτικός σχεδιασμός Μαρία- Νίκου πριν την παρέμβαση στην τάξη

Οι δυο δραστηριότητες που επέλεξαν να εφαρμόσουν οι εκπαιδευτικοί ήταν από τον διαγωνισμό της Pisa. Οι εκπαιδευτικοί δημιούργησαν δυο νέες μονάδες διδασκαλίας (document) με την προσθήκη ερωτημάτων στις υπάρχουσες δραστηριότητες του διαγωνισμού. Η πρώτη δραστηριότητα (Δέντρα σε σχηματισμούς) εφαρμόστηκε επισήμως και από τους δυο εκπαιδευτικούς της έρευνας. Η δεύτερη δραστηριότητα (Τετράγωνα σε σχηματισμούς) εφαρμόστηκε επισήμως από το ένα μέλος ενώ από άλλο εφαρμόστηκε άτυπα εκτός του πλαισίου της έρευνας (δεν γίνεται ανάλυση πάνω στην συγκεκριμένη παρέμβαση).

4.2.1.1 Παρουσίαση της μονάδας διδασκαλίας 'Δέντρα σε σχηματισμούς' – Ενσωμάτωση πίνακα για εισαγωγή της μεταβλητής

Στη παράγραφο αυτή έρχεται στο προσκήνιο ως κεντρικό ζήτημα η ενσωμάτωση του πίνακα από τους δυο εκπαιδευτικούς δείχνοντας τον τρόπο χρήσης και την λειτουργική σταθερά του. Ο βασικός τρόπος χρήσης της ενσωμάτωσης του πίνακα είναι ότι επιλέχθηκε για την εισαγωγή της μεταβλητής μέσα από την παρατήρηση των αριθμητικών τιμών του και η βασική λειτουργική σταθερά των δυο εκπαιδευτικών είναι ότι θεωρούν πως οι μαθητές έχουν ανεπτυγμένη αριθμητική σκέψη και στρατηγικές.

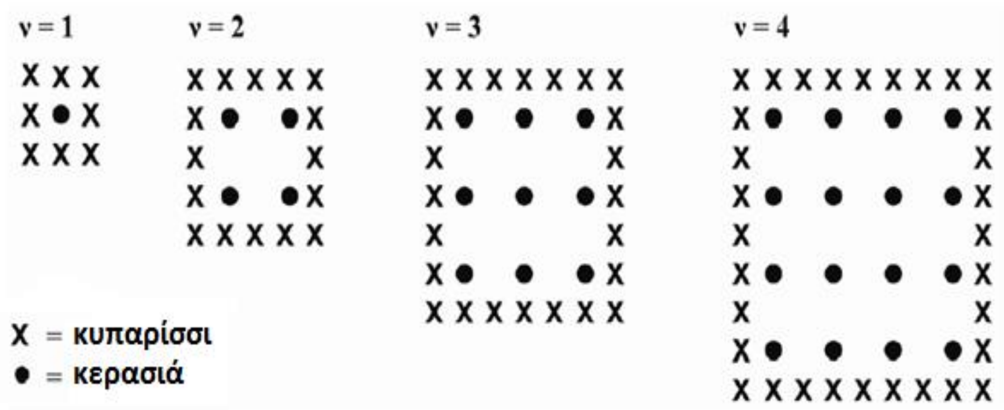
Πιο συγκεκριμένα, τροποποίησαν την δραστηριότητα στο εξής σημείο: ενσωμάτωσαν το $1^{ο}$ ερώτημα (πίνακας). Η επιλογή αυτή ήρθε από την αίσθηση τους ότι οι μαθητές αυτής της ηλικίας έχουν αναπτύξει αριθμητική σκέψη με αποτέλεσμα να φτάνουν ευκολότερα στην γενίκευση του μοτίβου μέσα από παρατήρηση αριθμητικών δεδομένων.

<u>Δέντρα σε σχηματισμούς</u>

Ένας αγρότης θέλει να φυτέψει κερασιές σε σειρές και σε τετράγωνο σχήμα. Για να προστατέψει τις κερασιές από τον αέρα σκέφτεται να τις περιφράξει με κυπαρίσσια.

Στα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε τη διάταξη των δέντρων, όπως τα φαντάζεται ο αγρότης. Κάθε διάγραμμα περιλαμβάνει διαφορετικές σειρές από κερασιές.

(ν = σειρές από κερασιές)



1. Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

ν (σειρές από κερασιές)	Πλήθος κερασιών	Πλήθος κυπαρισσιών
1	**1**	**8**
2	**4**	
3		
4		
5		
6		

2. Παρατηρώντας προσεκτικά τον παραπάνω πίνακα βρείτε:
   A. Πως συνδέεται το ν με το πλήθος των κερασιών.
   B. Πως συνδέεται το ν με το πλήθος των κυπαρισσιών.
3. Μπορείτε να βρείτε κάποια τιμή του ν για την οποία το πλήθος των κυπαρισσιών θα είναι ίσο με το πλήθος των κερασιών. Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο το υπολογίσατε

Οι εκπαιδευτικοί επέλεξαν να επικεντρωθούν στο κομμάτι της άλγεβρας που αφορά την εισαγωγή της μεταβλητής. Φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν πως με την καταγραφή και την παρατήρηση του πίνακα, ο οποίος αποτελεί ‘τρόπο χρήσης’ για την εισαγωγή της μεταβλητής, οι μαθητές θα μεταβούν από το αριθμητικό στο αλγεβρικό κομμάτι. Από τα παρακάτω αποσπάσματα εμφανίζεται η ‘λειτουργική σταθερά’ της συγκεκριμένης παρέμβασης και γίνεται εμφανές ότι και οι δυο εκπαιδευτικοί είναι έντονα επηρεασμένοι από την διδακτική τους εμπειρία με βάση την τάση των μαθητών να επεξεργάζονται αριθμούς από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο:

> Νίκος: «Λοιπόν για εμένα είναι πρόκληση αυτή η υλοποίηση γιατί θέλουμε καταρχήν να δούμε πως έρχονται οι μαθητές από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο δουλεμένοι στο αλγεβρικό κομμάτι. Εμένα η αίσθηση μου είναι ότι είναι αδούλευτα τα παιδιά και δεν μπορούν στο Δημοτικό να δουλέψουν με την άλγεβρα […] μπορούνε εύκολα να αναγνωρίσουν μοτίβα, δυσκολεύονται όμως να τα περιγράψουν.»

Στόχος των εκπαιδευτικών με αυτή τους την παρέμβαση είναι η ανάπτυξη δεξιοτήτων γενίκευσης και αλγεβρικής σκέψης από τους μαθητές τους. Αυτό παρατηρήθηκε από αποσπάσματα συνεντεύξεων που έδωσαν οι ίδιοι όπως ενδεικτικά φαίνεται παρακάτω από τα σχόλια του εκπαιδευτικού:

> Νίκος: «έχουν αριθμητική σκέψη δηλαδή τα πάντα τα βλέπουν με αριθμούς στη φάση που βρίσκονται τώρα. Μετά τις δραστηριότητες αυτές θα δούμε αν έχουν αλλάξει απόψεις ή αντιδράσεις πάνω σε αυτό»

Αντίστοιχα σχόλια κάνει και η εκπαιδευτικός στο επόμενο παράδειγμα, η οποία φαίνεται να επιζητά από τους μαθητές της μορφές γενίκευσης μέσω των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων:

> Μαρία: «εμείς θέλαμε να δούμε πως σχηματίζεται κάθε μοτίβο με βάση το προηγούμενο αλλά θέλαμε και έναν τύπο που με βάση το πρώτο να μπορούν να βρούνε το ν-οστό για παράδειγμα 1000-οστό χωρίς να έχουν βρει τα 999, άρα αυτό έχει μέσα μια μορφή γενίκευσης….»

Το επόμενο παράδειγμα επιλέχθηκε αφενός για να αναδείξει την άποψη του εκπαιδευτικού για τον τρόπο κατανόησης της μεταβλητής από τους μαθητές του, αφετέρου για να γίνει πιο λεπτομερής ο λόγος για τον οποίο επέλεξε να εισάγει τον πίνακα στην δραστηριότητα. Το συγκεκριμένο απόσπασμα μπορούμε να το "τοποθετήσουμε" στις 'λειτουργικές σταθερές' που διέπουν τον εκπαιδευτικό για τον τρόπο που επιδιώκει να διδάξει την έννοια της μεταβλητής:

> Νίκος: «βασικά τα σχέδια είναι ίδια, εμείς προσθέσαμε τον πίνακα και τα ερωτήματα που αφορούν τον πίνακα. Εγώ ήθελα να τον προσθέσω με σκοπό τα παιδιά να παίξουν με αριθμούς. Να το δουν σαν αριθμητική. Να το καταγράψουν, να το συμπληρώσουν και στη συνέχεια μέσω των αριθμητικών δεδομένων να προσπαθήσουν να γενικεύσουν. Γιατί εδώ εστιάζουν η αδυναμία που έχουν οι μαθητές είναι να μετασχηματίσουν σε τύπο μια σχέση που μπορούν και την περιγράφουν και την αναγνωρίζουν.»

Η παρακάτω αναφορά των δυο εκπαιδευτικών αναδεικνύει απρόσμενα ζητήματα χρόνου που έρχονται στην επιφάνεια και επηρεάζουν τις διδακτικές τους επιλογές. Παρατηρείται πως η σωστή διαχείριση του χρόνου είναι καθοριστική για την ομαλή διεξαγωγή της δραστηριότητας και την επίτευξη των επιδιωκόμενων στόχων. Το παρακάτω παράδειγμα αποτελεί τον ‘τρόπο χρήσης’ του καθηγητή σε σχέση με τον στόχο που έθεσε για τα επιθυμητά χρονικά πλαίσια:

> Νίκος: «Στον σχεδιασμό εγώ ο ίδιος ήθελα να κάνουμε τις δυο δραστηριότητες σε μια ώρα»

Παράλληλα, στο παρακάτω απόσπασμα ο εκπαιδευτικός παραθέτει τον λόγο για το οποίο εφάρμοσε την μια από τις δυο δραστηριότητες ώστε να ανταπεξέλθει στα χρονικά όρια που είχε στην διάθεση του. Επομένως τα συγκεκριμένα σχόλια τοποθετούνται στις ‘λειτουργικές σταθερές’ του εκπαιδευτικού σε ζητήματα που αφορούν την διαχείριση του χρόνου:

> Νίκος: «έκανα μια δοκιμαστική άτυπα και κατάλαβα ότι δεν φτάνει ο χρόνος και με αποτέλεσμα να εφαρμόσω την μια από τις δυο δραστηριότητες την μια ώρα που είχα στην διάθεση μου.[…] Ξεκίνησα δοκιμαστικά σε ένα τμήμα την μια και είδα ότι δεν έφτανε ο χρόνος και αποφάσισα να χρησιμοποιήσω την δεύτερη δραστηριότητα που μας έφτασε για μια ώρα.»

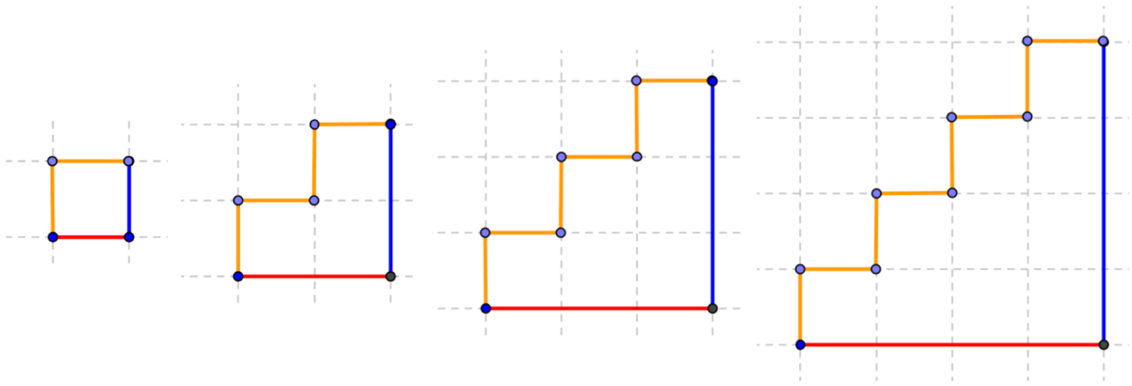
Συνοψίζοντας, στην παραπάνω ενότητα ήρθαν στην επιφάνεια ζητήματα διαχείρισης χρόνου και διδακτικής προσέγγισης της μεταβλητής. Οι εκπαιδευτικοί δημιούργησαν μια μονάδα διδασκαλίας με την ενσωμάτωση ενός αριθμητικού πίνακα με σκοπό την ανάπτυξη δεξιοτήτων γενίκευσης και καλλιέργεια αλγεβρικής σκέψης στους μαθητές τους.

4.2.1.2 Παρουσίαση της μονάδας διδασκαλίας ‘Τετράγωνα σε σχηματισμούς’ – διερευνητικά ερωτήματα για την εισαγωγή της μεταβλητής μέσω διαιρετότητας

Στην παράγραφο αυτή δίνεται σημασία στην τοποθέτηση δυο διερευνητικών ερωτημάτων από την εκπαιδευτικό. Με αυτόν τον τρόπο επιδιώκει μια ανοιχτή διερεύνηση μετατρέποντας την μονάδα διδασκαλίας σε πιο διερευνητική. Επομένως, το κρίσιμο ζήτημα της συγκεκριμένης ενότητας είναι η ανάγκη της εκπαιδευτικού για προσθήκη περισσότερων ανοιχτών ερωτημάτων στις δραστηριότητες με σκοπό την σταδιακή κατανόηση της μεταβλητής από την μεριά των μαθητών της.

Η μοναδική εκπαιδευτικός που εφάρμοσε την συγκεκριμένη δραστηριότητα, στα πλαίσια της έρευνας τροποποίησε την αρχική δραστηριότητα ενσωματώνοντας της δυο ερωτήματα, δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο μια πιο κλιμακωτή από άποψη δυσκολίας δραστηριότητα με τελικό στόχο την γενίκευση του μοτίβου. Παρακάτω παρουσιάζεται ολοκληρωμένο η μονάδα διδασκαλίας:

<u>Τετράγωνα σε σχηματισμούς</u>



Σχήμα 1 **Σχήμα 2** **Σχήμα 3** **Σχήμα 4**

Τα τετράγωνα που αποτελούν τους «δομικούς λίθους» με τους οποίους σχηματίζουμε τα παραπάνω σχήματα έχουν πλευρά 1 cm.

1. Περίγραψε τον τρόπο που σχηματίζεται κάθε επόμενο σχήμα με βάση το προηγούμενο.
2. Βρες την περίμετρο του πέμπτου σχήματος.
3. Βρες την περίμετρο του δωδέκατου σχήματος και εξήγησε πως έφτασες στην απάντησή σου.
4. Γράψε έναν τύπο, με τη βοήθεια του οποίου θα μπορείς να υπολογίσεις την περίμετρο κάθε σχήματος που θα προκύπτει. Στη συνέχεια έλεγξε αν ο τύπος που βρήκες επαληθεύεται στα σχήματα 1, 2, 3 και 4.
5. Ποια είναι η σειρά του σχήματος που θα έχει περίμετρο 128 cm;
6. Υπάρχει σχήμα με περίμετρο 50cm;

Κατ' επέκταση το επόμενο παράδειγμα λειτουργεί ως 'τρόπος χρήσης' για την εκπαιδευτικό δείχνοντας τον τρόπο και την μέθοδο που θέλει η ίδια να διδάξει την μεταβλητή μέσω της διαιρετότητας:

> Μαρία: «Ναι έβαλα κάτω κάτω μια ερώτηση: "ποια είναι η σειρά του σχήματος που θα έχει περίμετρο 128" και την ερώτηση 6 αν υπάρχει σχήμα με

περίμετρο 50". Ουσιαστικά είναι μια διαιρετότητα και βλέπουμε ότι δεν διαιρείται με το 4.»

Η συγκεκριμένη εκπαιδευτικός έχει παρατηρηθεί να αναζητά και να θέτει πιο ανοιχτά προβλήματα με σκοπό την ανάδειξη μη αναμενόμενων λύσεων από τους μαθητές της. Το παρακάτω απόσπασμα χρησιμοποιείται ως 'λειτουργική σταθερά' αφού αναφέρεται ο λόγος για τον οποίο εισήγαγε το 6^{ο} ερώτημα στην δραστηριότητα:

> Μαρία: «τελικά όταν είναι πολύ ανοικτά τα ερωτήματα, όπως το ερώτημα 6 πάντα υπάρχουν απρόβλεπτες απαντήσεις, όπως αυτό που είδα από του Νίκου σε άλλα ερωτήματα, από τους μαθητές του Νίκου και ελπίζω να δω και από τους δικούς μου γι' αυτό και την έβαλα»

Συνοψίζοντας, το κύριο σημείο που αναδείχτηκε στην ανάλυση που προηγήθηκε είναι η διερευνητική προσέγγιση που επιλέγει να ακολουθήσει η εκπαιδευτικός για την εισαγωγή της μεταβλητής μέσω της ενσωμάτωσης δυο ανοιχτών ερωτημάτων. Επόμενο κεντρικό ζήτημα αποτέλεσε ο ρόλος της συνεργασίας μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών και η επίδραση που έχει ο ένας στο άλλον.

4.2.2 Στάδιο 2: εφαρμογή δραστηριότητας (Δέντρα σε σχηματισμούς) Νίκου στη σχολική αίθουσα- ρόλος ετεροπαρατήρησης

Κύριο ρόλο στην συγκεκριμένο στάδιο αποτέλεσε ο ρόλος της έτερο-παρατήρησης. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται έμφαση στον τρόπο διαχείρισης της τάξης καθώς και στον τρόπο συνεργασίας των δυο εκπαιδευτικών οι οποίοι μέσω της μέχρι τώρα συνεργασίας τους είναι σε θέση να αλληλοσυμπληρώνουν τις γνώσεις και τις πεποιθήσεις τους σε θέματα διδακτικής και διδασκαλίας.

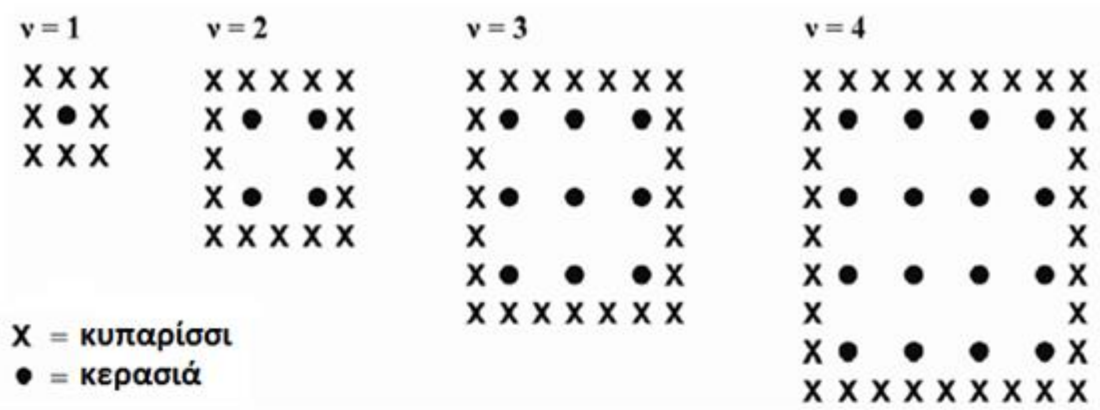
Οι δυο εκπαιδευτικοί παρατήρησαν ο ένας το μάθημα του άλλου. Η Μαρία στο στάδιο αυτό, είχε ρόλο παρατηρητή και βοηθού όποτε αυτό χρειαζόταν για λόγους καλύτερης διαχείρισης όλων των μαθητών. Κατά την διάρκεια διεξαγωγής της εφαρμογής, οι δυο εκπαιδευτικοί φάνηκε να συνεργάζονται για την διαχείριση των ομάδων και σε περιπτώσεις που υπήρχαν αναπάντεχες λύσεις, ο ένας καλούσε τον άλλον να τις συζητήσουν σε συνεργασία με τους μαθητές. Σε όλη την διάρκεια της εφαρμογής της δραστηριότητας κυριάρχησε η διερευνητική μάθηση όπου οι μαθητές με ελάχιστη καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό οδηγήθηκαν τελικά στην απόκτηση νέων γνώσεων. Πιο συγκεκριμένα ο ρόλος του εκπαιδευτικού ήταν καθοδηγητικός, ανά τακτά χρονικά διαστήματα ενημέρωνε για το απομένων χρόνο λήξης της δραστηριότητας και προς το τέλος της διδακτικής ώρας επικοινώνησε με όλους τους μαθητές τις λύσεις των ομάδων στον πίνακα. Αυτό από την μια είχε ως αποτέλεσμα την ανατροφοδότηση από μεριάς μαθητών, από την στιγμή που σημειώθηκαν πολλαπλές λύσεις και ακούστηκαν διαφορετικές απόψεις, από την άλλη οι εκπαιδευτικοί κατανόησαν καλύτερα το τρόπο σκέψης των μαθητών. Επομένως, τα λάθη και τα εμπόδια που συνάντησαν οι δυο εκπαιδευτικοί σε αυτό το στάδιο λειτούργησαν ως αφετηρία για αναστοχασμό με σκοπό την βελτίωση των δραστηριοτήτων.

4.2.3 Στάδιο 3: ανά-σχεδιασμός Μαρία

4.2.3.1 Ανα-σχεδιασμός της μονάδας διδασκαλίας ‘δέντρα σε σχηματισμούς’- εισαγωγή εμβόλιμου ανοιχτού ερωτήματος

Η σημασία του συγκεκριμένου σταδίου είναι κομβική για την επαγγελματική εξέλιξη της εκπαιδευτικού αλλά και για τον ρόλο της έτερο-παρατήρησης. Η εκπαιδευτικός μετά την παρατήρηση της στην εφαρμογή του Νίκου, αλλάζει την θέση του πίνακα και εισάγει ένα νέο πιο διερευνητικό ερώτημα με σκοπό να παρακινήσει τους μαθητές να εστιάσουν την προσοχή τους στα σχήματα και να σκεφτούν γεωμετρικά. Ο λόγος που την ενδιαφέρει να τοποθετήσει το ερώτημα είναι ότι βλέπει την γεωμετρική προσέγγιση περισσότερο διερευνητική. Η βασική λειτουργική της σταθερά είναι ότι έστρεψε την διαδικασία σε πιο διερευνητικές μορφές από αυτές που είχαν αρχικά σκοπό με κύρια έμφαση στην γεωμετρική ερμηνεία.

Πιο συγκεκριμένα η μονάδα διδασκαλίας παραμένει ίδιο όπως παρουσιάζεται στην παράγραφο 4.2.1.1 με μόνη διαφορά την ενσωμάτωση ενός εμβόλιμου ερωτήματος πριν την τοποθέτηση του πίνακα που διαμορφώνεται ως εξής:



1.Πώς προκύπτει κάθε διάγραμμα σε σχέση με το προηγούμενο;

Το παρακάτω απόσπασμα χρησιμοποιείται ως ‘Λειτουργική σταθερά’ και επιλέχθηκε για να αναδείξει τον λόγο για τον οποίο η εκπαιδευτικός επιδιώκει να εισάγει την μεταβλητή μέσω ενός ανοιχτού ερωτήματος εστιασμένο σε γεωμετρική ερμηνεία.

Φαίνεται ξεκάθαρα ο βαθμός που η εκπαιδευτικός επηρεάζεται από το επίπεδο των μαθητών της σε σχέση με το επίπεδο των μαθητών του Νίκου. Τροποποίησε το φύλλο εργασίας «Δέντρα σε σχηματισμούς» με σκοπό οι μαθητές της να μπορέσουν να ανταποκριθούν όσο το δυνατόν καλύτερα στις απαιτήσεις των δραστηριοτήτων. Φαίνεται να εμφανίζονται εντονότερα οι πηγές που σχετίζονται με την συνεργασία, με την διδακτική της εμπειρία, τις απαντήσεις των μαθητών του Νίκου και το επίπεδο των μαθητών της. Αξίζει να αναφερθεί ότι για ακόμη μια φορά στα σχόλια της εκπαιδευτικού εμφανίζεται η καθοριστική σημασία της **έτερο-παρατήρησης** για την διαμόρφωση της τελικής δραστηριότητας:

> Μαρία: «Ουσιαστικά σπρώχναμε τα παιδιά με τον πίνακα να βρούνε μια σχέση ανάμεσα στα νούμερα. Όμως εγώ επειδή είδα στο μάθημα του Νίκου ότι υπήρξε μια ομάδα παιδιών όπου βρήκε μια πάρα πολύ ωραία γεωμετρική λύση δηλαδή έβαλε στην άκρη τον πίνακα και κοίταξε πολύ προσεκτικά τα σχήματα και μου άρεσε πάρα πολύ η σκέψη που έκανε, σκέφτηκα τον πίνακα να τον βάλω παρακάτω, να μην ξεκινάω από τον πίνακα να βάλω τα παιδιά να εστιάσουν πρώτα στα σχήματα αυτά για να δούμε τι θα βγει. Έτσι πρόσθεσα ένα πρώτο ερώτημα πριν το ερώτημα που αφορούσε τον πίνακα το οποίο Ερώτημα 1 είναι : Πώς προκύπτει κάθε διάγραμμα σε σχέση με το προηγούμενο; »

Από το επόμενο απόσπασμα φαίνεται για ακόμα μια φορά πως η εκπαιδευτικός επηρεασμένη από την παρουσία της στο μάθημα του Νίκου, διέκρινε κομβικά σημεία που υπήρξαν λάθη σε ότι αφορά την διαχείριση του χρόνου διεξαγωγής της δραστηριότητας και της τελικής ανακεφαλαίωσης των λύσεων. Το παρακάτω απόσπασμα χρησιμοποιείται ως ‘Λειτουργική σταθερά’ και μας δίνει τον λόγο για τον οποίο η εκπαιδευτικός διαχειρίστηκε διαφορετικά τον χρόνο σε σχέση με τον συνάδελφο. Σε δεύτερο χρόνο φαίνεται η επιρροή της και η αλλαγή του σχεδιασμού της από την **έτερο-παρατήρηση** του μαθήματος του συναδέλφου:

> Μαρία: «με βάση αυτά που είπε ο Νίκος πάλι έκανα μια αλλαγή στην διαχείριση του χρόνου .Στο μάθημα του Νίκου είδα ότι έδωσε τα θέματα στα παιδιά τα διαπραγματεύτηκαν τους τα πήρε και την ανακεφαλαίωση για το τι κάναν τα παιδιά το έκανε σε επίπεδο ολομέλειας τάξης και την έκανε κανένα 5λεπτο προς το τέλος ουσιαστικά δεν φάνηκαν οι προσεγγίσεις των παιδιών έγινε πολύ γρήγορα αυτό.»

Συνοψίζοντας, ο ρόλος της ετεροπαρατήρησης φάνηκε να παίζει καθοριστικό ρόλο για τις διδακτικές αλλαγές που πραγματοποίησε η εκπαιδευτικός στα φύλλα εργασίας. Με αυτό τον τρόπο, έδωσε στην διδασκαλία μια περισσότερο διερευνητική μορφή μέσω της ενσωμάτωσης ενός ανοιχτού ερωτήματος αναζητώντας γεωμετρικές ερμηνείες από τους μαθητές της.

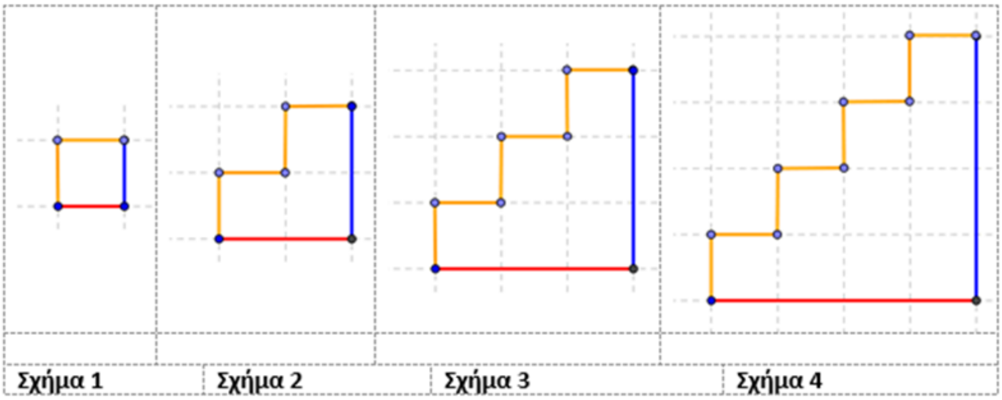
4.2.3.2 Ανα-σχεδιασμός της μονάδας διδασκαλίας ‘Τετράγωνα σε σχηματισμούς’ – απλοποίηση γλωσσικών εκφράσεων

Στην παράγραφο αυτή δόθηκε έμφαση στις γλωσσικές παρεμβάσεις που πραγματοποίησε στην δραστηριότητα η εκπαιδευτικός. Ο λόγος που η Μαρία αλλάζει το γλωσσικό επίπεδο σε πιο απλό είναι αφενός το χαμηλότερο επίπεδο των μαθητών της συγκριτικά με του Νίκου αφετέρου τα αποτελέσματα από την δραστηριότητα ‘δέντρα σε σχηματισμούς΄ τα οποία έδειξαν οι μαθητές να δυσκολεύονται σε ορισμένες γλωσσικές εκφράσεις.

Η εκπαιδευτικός αποφάσισε να κάνει ορισμένες αλλαγές στο αρχικό φύλλο εργασίας που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4.2.1.2. Από την μια μεριά, οι αλλαγές που έκανε προέρχονται από το αρνητικό κλίμα που υπήρξε κατά την άτυπη εφαρμογή της συγκεκριμένης δραστηριότητας από τον Νίκο έχοντας ως αναφορά την κακή ανταπόκριση των μαθητών του και την μη ολοκλήρωση της εφαρμογής του. Από την άλλη μεριά, μετά την εφαρμογή της δραστηριότητας ‘Δέντρα σε σχηματισμούς’ από τον Νίκο, η ίδια έκρινε σκόπιμο τον ανασχεδιασμό της δραστηριότητας σε γλωσσικό επίπεδο. Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται η ‘λειτουργική σταθερά’ που η εκπαιδευτικός αποφάσισε να αλλάξει γλωσσικά στοιχεία στη δραστηριότητα:

> Μαρία: «δεν έκανα μεγάλες αλλαγές την γλώσσα άλλαξα γιατί σκέφτηκα μήπως τα μπλοκάρει την έκανα λίγο πιο απλή, γιατί είχα μια ανασφάλεια γι’ αυτό. Επειδή απευθύνομαι σε τμήμα πιο καλό μεν αλλά όχι τόσο καλό όσο τα παιδιά του πειραματικού του Νίκου έκανα και μια απλούστευση στην γλώσσα δηλαδή προσπάθησα να είναι και γλωσσικά πολύ απλό »

Γίνεται αντιληπτό πως οι δυο εκπαιδευτικοί μέσω της συνεργασίας τους είναι σε θέση να μετατοπίζουν τις διδακτικές τους επιλογές και να μετασχηματίζουν τις δραστηριότητες για την βελτίωση της διδασκαλίας τους όποτε αυτό είναι αναγκαίο. Παρακάτω λοιπόν παρουσιάζεται οι αλλαγές στον αρχικό διδακτικό σχεδιασμό στην δραστηριότητα «τετράγωνα σε σχηματισμούς» με βάση τον τρόπο έκφρασης ορισμένων ερωτημάτων:



Δραστηριότητα Μαρία:(Εισαγωγή) Τα τέσσερα σχήματα που βλέπουμε παραπάνω, αποτελούνται από τετράγωνα τα οποία έχουν πλευρά 1 cm

Δραστηριότητα Νίκου:(Εισαγωγή) Τα τετράγωνα που αποτελούν τους «δομικούς λίθους» με τους οποίους σχηματίζουμε τα παραπάνω σχήματα έχουν πλευρά 1 cm.»

Δραστηριότητα Μαρία: (ερώτημα 4) Μπορείς να βρεις έναν τύπο, με τον οποίο θα μπορείς να υπολογίζεις την περίμετρο οποιουδήποτε σχήματος που προκύπτει με τον τρόπο αυτό; Στη συνέχεια έλεγξε αν ο τύπος που βρήκες επαληθεύεται στα σχήματα 1, 2,3 και 4

Δραστηριότητα Νίκου: (ερώτημα 4) Γράψε έναν τύπο, με τη βοήθεια του οποίου θα μπορείς να υπολογίσεις την περίμετρο κάθε σχήματος που θα προκύπτει. Στη συνέχεια έλεγξε αν ο τύπος που βρήκες επαληθεύεται στα σχήματα 1, 2, 3 και 4.

Συνοψίζοντας, σημαντικό ρόλο για τις λεκτικές αλλαγές των ερωτημάτων έπαιξε αφενός το χαμηλό επίπεδο των μαθητών της Μαρίαςς αφετέρου τα προβλήματα σχετικά με τον τρόπο διατύπωσης των ερωτημάτων που συνάντησαν ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές του στην άτυπη εφαρμογή της δραστηριότητας.

4.2.4 Στάδιο 4: εφαρμογή δραστηριοτήτων Μαρία- ρόλος ετεροπαρατήρησης

Στην συγκεκριμένη παράγραφο έρχονται στο προσκήνιο αναπάντεχα κρίσιμα ζητήματα που εμφανίστηκαν κατά την πρακτική της εκπαιδευτικού. Αυτά αφορούν τον περιορισμένο διδακτικό χρόνο, τις γεωμετρικές ερμηνείες από τους μαθητές και την τάση τους να στηρίζουν τις απαντήσεις τους στην αναδρομικότητα. Να σημειωθεί ότι η παρέμβαση της εκπαιδευτικού φάνηκε να είναι πιο οργανωμένη από άποψη διαχείρισης χρόνου και τάξης και να ξεπερνάει τα εμπόδια που συνάντησε ο Νίκος στην δική του παρέμβαση. Επομένως είναι εύλογο να συμπεράνουμε ότι η έτερο-παρατήρηση βοήθησε την εκπαιδευτικό να βελτιώσει σημαντικά τις δραστηριότητες.

Η διαδικασία διεξαγωγής των δραστηριοτήτων φαίνεται να μοιάζει αρκετά με την εκείνη του δεύτερου εκπαιδευτικού. Ο ρόλος και των δυο τους ήταν καθοδηγητικός, οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες επιλύαν τις δραστηριότητες στους χρόνους που είχε ορίσει η εκπαιδευτικός. Σε ότι αφορά την μεταξύ τους συνεργασία κατά την πρακτική, οι δυο εκπαιδευτικοί φαίνεται να έχουν προ-σχεδιάσει τον καταμερισμό της εργασίας που εφαρμόζει ο καθένας, με αποτέλεσμα αυτό να γίνεται εμφανές σε όλη την διάρκεια της εφαρμογής της δραστηριότητας. Ανά τακτά χρονικά διαστήματα γινόταν αναφορά του χρόνου από την εκπαιδευτικό.

Η εκπαιδευτικός από πριν ξεκινήσει την δραστηριότητα ‘σχήματα με τετράγωνα’ φαίνεται να θέλει να καλλιεργήσει ένα πνεύμα συνεργασίας στους μαθητές της. Η ίδια εξάλλου έχει δείξει την συνεργατική της πτυχή με τον Νίκο αλλά και με την συμμετοχή της σε ομαδικά ερευνητικά προγράμματα. Το επόμενο απόσπασμα επιβεβαιώνει την παραπάνω θέση:

> Μαρία: «αυτά που σκέφτεστε μεταξύ σας και συζητάτε τα γράφετε στο ένα φύλλο και στο δεύτερο είναι αυτό που θα μου δώσετε ως τελικό, γιατί το ένα μπορεί να έχει δυο απόψεις θα πρέπει να καταλήξετε σε μια»

Από το παρακάτω συμβάν γίνεται εμφανής η σταθερότητα που διακατέχει την εκπαιδευτικό σχετικά με τις διδακτικές της επιλογές. Η ίδια έχουμε δει συχνά να αναφέρει την επιθυμία της για την ενσωμάτωση ανοιχτών ερωτημάτων με πολλαπλές λύσεις στις δραστηριότητες της, πράγμα που εντοπίζεται και στην πρακτική της:

> Μαρία: «παιδιά το πρώτο ερώτημα κάποιοι από εσάς το έχετε ζωγραφίσει, κάποιοι το έχετε πει με λόγια ότι ιδέα και να σκεφτείτε είναι δεκτή»

Στο παρακάτω παράδειγμα εμφανίζεται ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η μεταβλητή μέσω της δραστηριότητας ‘τετράγωνα σε σχηματισμούς’ στην τάξη. Φαίνεται η παρακάτω ομάδα να ανταποκρίνεται θετικά στην κατανόηση της μεταβλητής με αποτέλεσμα η εκπαιδευτικός να δείχνει τον ενθουσιασμό της:

> Μαρία: «τι κάνατε εδώ;
>
> Ομάδα: πολλαπλασιάζουμε τις σειρές του σχήματος επί 4
>
> Μαρία: Αυτό μπορείς να το εκφράσεις λίγο πιο μαθηματικά
>
> Ομάδα: 4*χ
>
> Μαρία: Μπράβο τι μας δείχνει αυτή η μεταβλητή;
>
> Ομάδα : Την σειρά

Μαρία: Μπράβο μας δείχνει την σειρά του σχήματος. Στο ν-οστό σχήμα ή μάλλον επειδή σας αρέσει το χ, στο χ σχήμα ποια θα είναι η περίμετρος του;

Ομάδα: 4*χ»

Η εκπαιδευτικός παρατηρείτε να περνάει από κάθε ομάδα ανά τακτά χρονικά διαστήματα και να ζητά αιτιολογήσεις σχετικά με τις απαντήσεις των ερωτημάτων. Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται να εμφανίζεται ένα κρίσιμο ζήτημα γύρω από την έννοια της αναδρομικότητας από την στιγμή που οι μαθητές για να απαντήσουν στα ερωτήματα φαίνεται να αναζητούν πάντα πληροφορίες σχετικά με το προηγούμενο σχήμα. Η παραπάνω προβληματική κατάσταση φαίνεται να μην ικανοποιεί την εκπαιδευτικό η οποία προσπαθεί να αποτρέψει τους μαθητές της να σκέφτονται με βάση το προηγούμενο σχήμα χωρίς όμως να τους αποκαλύπτει τον τρόπο με τον οποίο θα καταλήξουν στην γενίκευση:

Μαρία: «Το ερώτημα 4 πως το βρήκατε που λέει ‘να βρεις ένα τύπο που θα υπολογίζει την περίμετρο οποιουδήποτε σχήματος’

Ομάδα: αυξημένο κατά 4 σε σχέση με το πριν.

Μαρία: Βρείτε ένα γενικότερο τύπο όχι να κοιτάτε συνέχεια το προηγούμενο. Στο 1000 πως θα είναι;

Ομάδα: Θα δούμε το 999»

Ακριβώς το ίδιο περιστατικό φαίνεται να εμφανίζεται στο παρακάτω συμβάν. Οι μαθητές δυσκολεύονται να δώσουν μια σωστή ερμηνεία στην μεταβλητή με αποτέλεσμα να μην μπορούν εύκολα να καταλήξουν σε γενικούς τύπους. Από την άλλη μεριά, φαίνεται η προσπάθεια της καθηγήτριας να εισάγει την μεταβλητή χωρίς να την αποκαλύψει προσέχοντας ιδιαίτερα την γλώσσα που χρησιμοποιεί:

Μαρία: «Δηλαδή ο τύπος δεν πρέπει να έχει μόνο αριθμούς σωστά; τι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

Ομάδα: Πώς να το πω τώρα να είναι γενικά όχι κάτι πολύ συγκεκριμένο

Μαρία: Όταν θέλουμε να πούμε κάτι με πολύ γενικό τρόπο χρησιμοποιούμε κάτι συγκεκριμένο το οποίο μπορούμε να το εφαρμόσουμε για κάθε περίπτωση, ο τύπος πρέπει να είναι γραμμένος με έναν γενικό τρόπο. Άρα τι πρέπει να περιέχει ο τύπος;

Ομάδα :Δεν ξέρω πως να το πω. Κάθε φορά έχει ένα τετράγωνο περισσότερο στη βάση και ένα ακόμα στο ύψος σε σχέση με το προηγούμενο σχήμα. Δεν γίνεται να το εξηγήσουμε αλλιώς

Μαρία: τον τύπο τον γενικό τον βρήκατε

Ομάδα: Κάθε φορά θα προσθέτουμε 4

Μαρία: Μα είναι γενικός τύπος αυτός; Δηλαδή κάθε φορά θα πρέπει να βρίσκω το προηγούμενο για να βρω το επόμενο; Δηλαδή στο 1000ο σχήμα θα πρέπει να βρω το $999^{ο}$; προσπαθήστε το»

Το επόμενο περιστατικό παρατηρήθηκε κατά την εφαρμογή της δραστηριότητας 'Δέντρα σε σχηματισμούς' και δείχνει πως η δημιουργία συνεργασίας μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών φαίνεται να λειτουργεί άριστα. Σε όλη την παρέμβαση παρατηρείται μια προσπάθεια ενσωμάτωσης του εκπαιδευτικού από την καθηγήτρια γεγονός που δείχνει την στενή τους συνεργασία και την εύρεση κοινών τόπων:

«Νίκο έλα εδώ γρήγορα. Φτιάξανε ισοδύναμα κλάσματα. Είδανε μια κανονικότητα και την δώσανε σε κλάσματα. Εγώ έτσι το κατάλαβα»

Συνοψίζοντας, κεντρικά ζητήματα κατά την παρέμβαση υπήρξαν ο τρόπος εισαγωγής και κατανόησης της μεταβλητής μέσω της γενίκευσης του μοτίβου, ο περιορισμένος διδακτικός χρόνος και η άψογη συνεργασία μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών σε θέματα διαχείρισης της τάξης.

4.2.5 Στάδιο 5: Ομαδική αποτίμηση και αναστοχασμός – αποτελεσματικότερη η γεωμετρική προσέγγιση και η επιλογή ανοιχτών ερωτημάτων- καθοριστικός ο ρόλος της ετεροπαρατήρησης

Το συγκεκριμένο στάδιο αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα στάδια αυτής της έρευνας αφού η ίδια η διδασκαλία ενημερώνει ακριβώς μετά το πέρας της για το τι είδους ζητήματα βγαίνουν στην επιφάνεια καθώς δείχνει την δυναμική που έχουν οι δραστηριότητες. Συγκεκριμένα στην παράγραφο αυτή φαίνεται η σημασία της έτερο-παρατήρηση μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών η οποία πρόσφερε σημαντικά στην αναθεώρηση των διδακτικών επιλογών τους. Οι διδακτικές αλλαγές της Μαρίας επιβεβαιώνονται ως αποτελεσματικότερες με βάση τις απαντήσεις των μαθητών τους οι οποίοι δίνουν και στις δυο δραστηριότητες αναπάντεχες ερμηνείες με γεωμετρικό χαρακτήρα σε αντίθεση με του Νίκου που εγκλωβίζονται στις αριθμητικές πράξεις του πίνακα. Επόμενο ζήτημα που δόθηκε έμφαση αποτελεί η σημασία και ο ρόλος του κάθε ερωτήματος στην δραστηριότητα παρουσιάζοντας τον λόγους αμφισβήτησης ενός ερωτήματος ως αποτέλεσμα της αναζήτησης αναδρομικών τύπων από τους μαθητές.

Οι εκπαιδευτικοί επικεντρώθηκαν στην κακή διαχείριση του χρόνου. Παρατηρήθηκε μια ταύτιση και των δυο εκπαιδευτικών αναφορικά με το επίπεδο δυσκολίας της δραστηριότητας εξαιτίας των χρονικών περιορισμών που ήρθαν στην επιφάνεια κατά την διαδικασία της παρέμβασης. Στη συνέχεια, φαίνεται να αιτιολογούν τον λόγο που επιζητούν περισσότερο χρόνο για την διεξαγωγή των δραστηριοτήτων. Έτσι τα παρακάτω αποσπάσματα τοποθετούνται στις ‘Λειτουργικές σταθερές’ για τους δυο εκπαιδευτικούς της έρευνας:

> Νίκος: «Δεν είχε ίσως ληφθεί, δεν είχαμε δώσει ιδιαίτερη προσοχή στον χρόνο που θα χρειαστούν οι μαθητές να λύσουν τις δραστηριότητες θεωρώντας ότι ήταν προετοιμασμένοι για τέτοιες δραστηριότητες πράγμα το οποίο αποδείχτηκε ότι θέλαν αρκετό χρόνο τα παιδιά της Α Γυμνασίου για να εμπλακούν με τις δραστηριότητες που έχουν αρκετή άλγεβρα μέσα τους.»

Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται η εκπαιδευτικός να αναδεικνύει ζητήματα διαχείρισης της τάξης. Πρώτα αναδεικνύεται ο ‘τρόπος χρήσης’ της δείχνοντας τον στόχο της για περισσότερη ζύμωση από την μεριά των μαθητών της:

> Μαρία: «απλώς μου έλειπε αυτό το πράγμα της ανακεφαλαίωσης που ήθελα να παιδιά να δουν πολύ καλά η μια ομάδα τι έκανε η άλλη»

Στο επόμενο απόσπασμα εμφανίζονται οι λόγοι ή αλλιώς οι ‘Λειτουργικές σταθερές’ για τους οποίους η εκπαιδευτικός επιζητά την ανάδειξη όλων των λύσεων των ομάδων σε ολομέλεια τάξης με απώτερο σκοπό την δημιουργία ομαδικών συζητήσεων. Σύμφωνα με το παρακάτω απόσπασμα η εκπαιδευτικός συνεχίζει να κινείται στο ίδιο κλίμα αναστοχασμού αποτιμώντας με αρνητική διάθεση τον τρόπο διαχείρισης της τάξης της:

> Μαρία: «είναι πολύ δύσκολο ένας άνθρωπος να διαχειριστεί 12 ομάδες και να μπορέσει να έχει και αυτόν τον υποστηρικτικό ρόλο. Στην πραγματικότητα ήθελε τα μισά παιδιά για να μπορεί να γίνει η δουλεία. Για παράδειγμα ας πούμε πάρα πολλά παιδιά όταν έλεγε βρες την περίμετρο του 5ου σχήματος τα τετράγωνα πήγαιναν και ζωγράφιζαν το 5ο σχήμα .Εκεί λοιπόν έπρεπε να περάσεις από τις ομάδες και να ενθαρρύνεις τα παιδιά να το φανταστούν να προσπαθήσουν να βρουν το 6ο το 7ο»

Ο τρόπος με τον οποίο εκφράζονται παρακάτω οι δυο εκπαιδευτικοί δείχνει τις πεποιθήσεις τους σε θέματα διδακτικής των μαθηματικών. Τα παρακάτω αποσπάσματα λειτουργούν ως ‘τρόποι χρήσης’ για τις απόψεις των δυο εκπαιδευτικών πάνω σε ζητήματα που σχετίζονται με την διαφοροποίηση τους στην διδακτική προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα, η ίδια φαίνεται να στηρίζει έντονα την διδακτική της επιλογή για ενσωμάτωση ανοιχτών ερωτημάτων με σκοπό την ανάδειξη γεωμετρικών λύσεων από τους μαθητές της. Παρατηρείται να θεωρεί αναγκαία μια τέτοια πρώτη γεωμετρική προσέγγιση για την επίτευξη των δικών της στόχων:

> Μαρία: «τα παιδιά ήθελα να λειτουργήσουν όσο πιο ελεύθερα γίνεται. Δεν ήθελα να τα κατευθύνω υποχρεωτικά στο αλγεβρικό. Ναι μεν ζητούσα να μου

> βρουν κάποιες σχέσεις πιο γενικευτικές αλλά ακόμα και αυτό είναι γεωμετρικό το να μπορείς να το δεις αυτό το πράγμα. […] ήταν γεωμετρικά σχήματα και θέλω να έχω και μια γεωμετρική ερμηνεία. Μου άρεσε που την είχα.»

Από το παραπάνω απόσπασμα φαίνεται η ίδια να αναζητά γεωμετρικές ερμηνείες παράλληλα με τις αλγεβρικές, πράγμα που δεν έκανε ο Νίκος με την επιλογή των δικών του ερωτημάτων. Αποτέλεσμα αυτού ήταν να φανεί η αδυναμία γενίκευσης από την μεριά των μαθητών του Νίκου σε σχέση με της Μαρίας λόγω της διαφορετικότητας των διδακτικών τους επιλογών. Το παρακάτω παράδειγμα επιβεβαιώνει αυτή την διαπίστωση:

> Νίκος: «Απρόσμενο αλλά αναμενόμενο ήταν ότι οι μαθητές δεν μπορούσαν να εκφράσουν αλγεβρικό τρόπο αυτά τα οποία μπορούσαν να κοιτάξουν. Ήταν απρόσμενο για κάποιον που δεν γνωρίζει το επίπεδο των μαθητών, για εμένα αναμενόμενο»

Οι διδακτικές αλλαγές της Μαρίας επιβεβαιώνονται ως αποτελεσματικότερες με βάση τι απαντήσεις των μαθητών της. Φαίνεται οι μαθητές της να δίνουν και στις δυο δραστηριότητες αναπάντεχες λύσεις και ερμηνείες με γεωμετρικό χαρακτήρα. Επιπλέον παρατηρήθηκε να μην επηρεάζονται από τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα και να διερευνούν περισσότερο τα σχήματα, δημιουργώντας νέα, ανασχηματίζοντας τα ήδη υπάρχοντα, στρίβοντας τα στο χώρο. Η ίδια φαίνεται να αποτιμάει τις αλλαγές της με βάση τον αρχικό της σχεδιασμό με θετικό πρόσημο και να είναι ιδιαίτερα ευχαριστημένη με τις αντιδράσεις των μαθητών της και τις διδακτικές της επιλογές:

> Μαρία: «Κάνανε καταπληκτικές λύσεις. Λοιπόν στο ερώτημα με τα τετράγωνα, μια καταπληκτική λύση είναι ότι πάω σε μια ομάδα και τους λέω τι έχετε βρει εδώ πέρα και λένε το ένα σχήμα ολοκληρώνει το άλλο και τους λέω τι πάει να πει ολοκληρώνει; Λένε λοιπόν τα παιδιά ότι <<ολοκληρώνεις>> σημαίνει ότι αν πάρουμε το σχήμα και το βάλουμε το ένα μέσα στο επόμενο του τότε μας βγαίνει ένα τετράγωνο. Ο Νίκος ρωτάει τους μαθητές ‘ωραία το πρώτο κουτάκι αν το βάλεις το δεύτερο σχήμα βγαίνει τετράγωνο, το δεύτερο σχήμα πώς θα το βάλεις στο τρίτο; …Άμα το στρίψουμε λέει. […] Δεν ξέρω αν ήταν αλγεβρική σκέψη όμως είχε μέσα στροφή στον χώρο. Δεν ήταν αλγεβρικό τόσο πολύ εδώ αλλά μου άρεσε πάρα πολύ ως γεωμετρική απάντηση. Εγώ ήθελα και τις γεωμετρικές απαντήσεις.»

Από το παρακάτω απόσπασμα γίνεται φανερός ο ενθουσιασμός και η ικανοποίηση της εκπαιδευτικού με το εύρος διαφορετικών απαντήσεων που έλαβε από τους μαθητές της:

> Μαρία: «Τώρα το πιο καταπληκτικό παράδειγμα ήταν στο σχήμα με τις κερασιές όπου τα παιδιά πήραν σε κάθε σχήμα τον λόγο. Φτιάξανε ένα κλάσμα, στον αριθμητή είχαν τις σειρές από κερασιές και στον παρονομαστή είχα το πλήθος από τα κυπαρίσσια και παρατηρήσαν ότι αυτά τα κλάσματα είναι ισοδύναμα. Αυτό ήταν μεγάλη έκπληξη για εμένα. Μου άρεσε που μπορέσανε και σκεφτήκανε να φτιάξουν αυτά τα κλάσματα. Είδαν μια αλληλοσυσχέτιση που μου άρεσε πάρα πολύ. Δεν είδαν το καθένα από αυτά πως αυξάνεται, δηλαδή εδώ περιμένεις να κοιτάξουν τον πίνακα και να σου πουν το ένα είναι ν ^2 και το άλλο είναι 8ν»

Παρ' όλ' αυτά διακρίνεται μια αμφιβολία σε ότι αφορά το ερώτημα που ζητάει να βρουν την περίμετρο του αμέσως επόμενου σχήματος από τα τέσσερα που υπάρχουν ήδη στο φύλλο εργασίας. Η αμφισβήτηση τίθεται με αφορμή τις απαντήσεις των μαθητών στα επόμενα ερωτήματα της δραστηριότητας, όπου παρατηρήθηκε το γεγονός οι μαθητές να εγκλωβίζονται στην αναδρομικότητα:

> «Εδώ ρωτάμε <<να βρεις την περίμετρο του 5ου σχήματος>> εδώ ας πούμε τα περισσότερα παιδιά κάνανε το 5ο σχήμα απαντάνε <<θα είναι 20 γιατί έχει αυξηθεί κατά 4>>. Το ερώτημα 4 που λέει <<να βρεις ένα τύπο που θα υπολογίζει την περίμετρο οποιουδήποτε σχήματος>> και λέει αυξημένο κατά 4. Το βλέπουν σε σχέση με το προηγούμενο ενώ προσπάθησα να τους πω να βρουν ένα γενικότερο τύπο. Να του λέω ωραία το 1000 πως θα είναι και δίνανε πάντα αναδρομικό σε σχέση με το προηγούμενο. Άρα έχουμε προσθετικές ιδιότητες και αναδρομικότητα. Και εδώ έρχομαι και αναρωτιέμαι εγώ αν το ερώτημα που μπήκε στην αρχή αυτό τους έδωσε την ελευθερία να σκεφτούν και αλγεβρικά και γεωμετρικά, τις επόμενες απαντήσεις τις έπνιξε. Άρα ένα θέμα είναι αν η διατύπωση αναπέμπει μόνο στην αναδρομικότητα, αυτό είναι ένα θέμα»

Αντίθετα, ο Νίκος φαίνεται να μην έχει επιτύχει τον αρχικό του στόχο και να προβληματίζεται πάνω στις απαντήσεις των μαθητών του:

> Νίκος: «οι μαθητές μου δεν δουλέψαν όπως περίμενα πάνω στην κατανόηση των εννοιών της άλγεβρας σωστά, εγκλωβίστηκαν στους αριθμούς και στις πράξεις. […] Δεν έμεινα απόλυτα ικανοποιημένος . Περίμενα μέσα από αυτές τις δραστηριότητες να δω περισσότερες αλγεβρικές έννοιες ή τέλος πάντων να αναδειχθεί περισσότερο ο ρόλος της άλγεβρας»

Στα παρακάτω αποσπάσματα ο ένας εκ των δυο εκπαιδευτικών καταθέτει μια εμπειρία του σχετικά με τα αξιοσημείωτα περιστατικά που παρατήρησε σε ορισμένες ομάδες. Όπως τονίζει ο ίδιος, η μειοψηφία της τάξης κατάφερε να δώσει μια ερμηνεία που περιείχε αλγεβρική σκέψη. Οι περισσότεροι μαθητές του, σύμφωνα με τα σχόλια του, εγκλωβίστηκαν στους αριθμούς και στις αριθμητικές πράξεις που απαιτούσε ο πίνακας του πρώτου ερωτήματος :

> Νίκος: «Τώρα αξιοσημείωτα περιστατικά θα έλεγα ότι ήταν μια απάντηση από μαθήτρια που προσπάθησε με αλγεβρικό τρόπο, αρκετά ενδιαφέρουσα πως αντιλήφθηκαν το σχήμα και ένα δεύτερο ότι όλοι οι μαθητές λίγο πολύ περιέγραφαν την σχέση που περιγράφαμε εμείς ως ν^2 ως πολλαπλασιασμό του αριθμού με τον εαυτό του.»

Στο παρακάτω συμβάν ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει την πιο αξιοσημείωτη απάντηση που έλαβε από τους μαθητές του:

> Νίκος: «Κάνανε κάτι που δεν το περιμέναμε. Ξεκινάνε κοιτάζουν τον πίνακα που έπρεπε να συμπληρώσουν και αρχίζουν να βλέπουν <<από εδώ εδώ είναι 3, από εδώ εδώ είναι 5,από εδώ εδώ είναι 9>. Για να δούνε τις διαφορές στην ουσία. Φτιάξανε τις διαφορές […] Η δεύτερη στήλη λέει πάει στον επόμενο μονό αριθμό. Δηλαδή εδώ έχει συν 3 μετά έχεις συν 5 συν 7, άκου παρατήρηση αυτό που προσθέτεις κάθε φορά δηλαδή στην ουσία είναι μια ακολουθία των μονών»

Ένα ενδιαφέρον περιστατικό υπήρξε όταν μια από τις ομάδες έδωσε γεωμετρική ερμηνεία. Παραπάνω είδαμε ότι αυτό υπήρξε αφορμή για την άλλη εκπαιδευτικό που παρακολουθούσε το μάθημα, να επέμβει και να μετασχηματίσει την δραστηριότητα της:

> Νίκος: «Πάμε τώρα στις κουκκίδες. Εμείς θεωρούσαμε δεδομένα 1,4,9. Και τι λένε. Ότι σε κάθε μια βάζεις μια γωνία από κάτω. Πολύ ωραία. Και λέει προσθέτεις 3 προσθέτεις 5. Στην επόμενη βάζεις αυτή την γωνία, στην επόμενη αυτή την γωνία το οποίο δεν μπορούσανε να το εκφράσουνε με λόγια. […] Ναι αυτές οι δυο ομάδες που περιγράψαμε πριν ανέπτυξαν στρατηγικές γεωμετρικού χαρακτήρα, είχαν περισσότερο γεωμετρία η μια η ομάδα , δεν το περίμενα κάτι τέτοιο και εγώ. Αυτό δηλαδή δεν το περιμέναμε. Όπως επίσης δεν περίμενα την τόση εμμονή τους με τα νούμερα, με τους αριθμούς.»

Το παρακάτω απόσπασμα καθιστά σαφές πως η συνεργασία και κατ' επέκταση η **έτερο-παρατήρηση** μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών παίζει σπουδαίο ρόλο στην διαμόρφωση των διδακτικών τους επιλογών. Λόγου χάριν, εδώ φαίνεται ο εκπαιδευτικός να αλλάζει στάση σε σχέση με την αρχική του, να αναθεωρεί τον τρόπο τοποθέτησης των ερωτημάτων στο φύλλο εργασίας και να εκτιμά ως ορθότερη την επιλογή ενός πρώτου πιο ανοιχτού ερωτήματος από την μεριά της συναδέλφου, που φάνηκε να λειτουργεί αποτελεσματικότερα στην καλλιέργεια αλγεβρικής σκέψης των μαθητών τους:

> Νίκος: «Μετά την υλοποίηση της δραστηριότητας την δικιά μου, διαπιστώνοντας ότι κάποια ερωτήματα εγκλώβιζαν τους μαθητές σε συγκεκριμένους τρόπους σκέψης , πχ υπολογισμοί μόνο με αριθμούς αυτό μας έκανε με την Μαρία στην δραστηριότητα την δική της να συμπεριλάβει ένα νέο ερώτημα πριν το πρώτο δικό μου ερώτημα πιο γενικό και από ότι φάνηκε στα αποτελέσματα που κάναμε τώρα δούλεψε καλά.»

Από τα παρακάτω σχόλια του εκπαιδευτικού, έμμεσα, αναγνωρίζεται ο αποτελεσματικός ρόλος της συνεργασίας μεταξύ των εκπαιδευτικών από την στιγμή που μέσω της συνεργασίας τους οι εκπαιδευτικοί βελτιώνουν τις προβληματικές καταστάσεις στις διδακτικές τους επιλογές:

> Νίκος: «Θα άλλαζα το πρώτο μου ερώτημα, θα προτιμούσα να μπει ένα ερώτημα πιο ελεύθερο δηλαδή να αφήσω τους μαθητές να ψαχτούν και να χαθούν μέχρι να καταλήξουν σε κάτι ,να είναι δηλαδή πιο ανοιχτό ερώτημα το οποίο αυτό θα έρθει με αφορμή για να συνεχίσουν πιο κάτω .Εγώ το φοβήθηκα αυτό και δεν το έβαλα στον σχεδιασμό ,και τους κατεύθυνα λίγο στο πρώτο ερώτημα με αποτέλεσμα αυτή η πορεία που είχα χαράξει τους εγκλώβισε.»

Συνοψίζοντας, η ετεροπαρατήρηση υπήρξε βασικός παράγοντας για την διαμόρφωση αποτελεσματικότερων δραστηριοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, η ενσωμάτωση ανοιχτών ερωτημάτων από την Μαρία αποτιμήθηκε ως καλύτερη φέρνοντας στην επιφάνεια ποικιλία γεωμετρικών απαντήσεων από τους μαθητές της σε αντίθεση με τους μαθητές του Νίκου οι οποίοι εστίασαν την προσοχή τους στις αριθμητικές πράξεις που απαιτούσε ο πίνακας. Επιπλέον, κεντρικό ζήτημα υπήρξε η προβληματική εστίαση των μαθητών στην αναδρομικότητα για την γενίκευση του μοτίβου.

4.2.6 Στάδιο 6: Νέος διδακτικός σχεδιασμός Νίκου

4.2.6.1 Νέα δραστηριότητα - διερεύνηση ανοιχτών ερωτημάτων - εισαγωγή δεύτερης μεταβλητής

Στην παράγραφο αυτή φαίνονται τα αποτελέσματα της έτερο-παρατήρησης και της αποτίμησης των προηγούμενων δραστηριοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται έμφαση στην δημιουργία μιας διερευνητικής μονάδας διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό αναζητώντας την αποτελεσματικότερη προσέγγιση της μεταβλητής ενσωματώνοντας στην δραστηριότητα αρκετά διερευνητικά ερωτήματα. Επιπλέον, κρίσιμο ζήτημα της συγκεκριμένης ενότητας αποτελεί για πρώτη φορά η εμφάνιση δεύτερης μεταβλητής με τέτοιο τρόπο που κάνει την μονάδα διδασκαλίας να είναι πιο απαιτητική. Τέλος, η βασική λειτουργική σταθερά που εμφανίζεται για τον εκπαιδευτικό είναι ότι ο επικεντρώνεται διδακτικά στην εύρεση γενικευμένων τύπων, εργαζόμενος καθαρά σε πλαίσιο ρεαλιστικών προβλημάτων.

Ο εκπαιδευτικός με αφορμή πλέον την προηγούμενη διδασκαλία του αλλά και την διδασκαλία της Μαρίας αποφάσισε να σχεδιάσει μια νέα δραστηριότητα ως επέκταση με ίδιους άξονες με αυτούς της προηγούμενης. Πιο συγκεκριμένα από το παρακάτω απόσπασμα παρατηρείται η επιθυμία του να συνδέσει την νέα δραστηριότητα με την προηγούμενη με σκοπό να βελτιώσει λάθη που υπήρξαν κατά την προηγούμενη εφαρμογή. Έτσι, επιδιώκει οι μαθητές του να καταφέρουν να μεταβούν από αριθμητικά παραδείγματα στην γενίκευση. Αυτό επιβεβαιώνεται από το παρακάτω απόσπασμα:

> «η σύνδεση είναι στο κομμάτι το ότι προσπαθούμε να φτιάχνουμε μέσα από παραδείγματα σχέσεις αλγεβρικές που κρύβονται στις δραστηριότητες. Αριθμητικά παραδείγματα στην αρχή και προσπαθούμε μέσω αυτού να καταλήξουμε σε γενικεύσεις, τύπους»

Ο ίδιος θεωρεί πιο βελτιωμένη την συγκεκριμένη δραστηριότητα αφού από τα παρακάτω του λόγια παρατηρείται ο σχεδιασμός να βασίζεται στις ανάγκες των μαθητών του:

> «Σχέση με την προηγούμενη δραστηριότητα είναι ότι είναι πιο κοντά στην καθημερινή τους ζωή από τα παραδείγματα που χρησιμοποιούμε»

Στο παρακάτω παράδειγμα εμφανίζεται η ‘λειτουργική σταθερά’ για την επιλογή των πρώτων δυο ερωτημάτων. Φαίνεται να επιμένει στην επιλογή μιας αριθμητικής προσέγγισης όπως άλλωστε είχε πράξει και στις παλαιότερες δραστηριότητες:

> «Προσπάθησα με τα δυο πρώτα ερωτήματα ‘ Η μητέρα του Κώστα, του δίνει 2 ευρώ κάθε μέρα για το σχολείο. Ο Κώστας ξοδεύει μόνο 0,50 ευρώ και τα υπόλοιπα τα βάζει στον κουμπαρά του. 1) Σε πόσες ημέρες ο Κώστας θα έχει μαζέψει 6 ευρώ; 2) Σε πόσες ημέρες ο Κώστας θα έχει μαζέψει 22,5 ευρώ’ να πάρω κάποιες απαντήσεις έτσι ώστε να τους βάλουμε στην διαδικασία του υπολογισμού, των μετρήσεων και στη συνέχεια έρχεται το τρίτο ερώτημα που ζητάω να συμπληρωθεί ο πίνακας, και η επιλογή των αριθμών έχει γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να αντιληφθούν ότι υπάρχει ένα μοτίβο, το οποίο ζητάμε στο επόμενο ερώτημα να μας το περιγράψουν: Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες	**3**	**7**	**10**	**20**	**200**	**350**		
Χρήματα που αποταμίευσε							**46,5**	**165**

> »

Το απόσπασμα κλείνει με τον εκπαιδευτικό να επεξηγεί την προσθήκη ενός νέου ερωτήματος που περιέχει αλλαγή μεταβλητής, κάτι που δεν είχε ξανά εμφανιστεί στις παλιότερες δραστηριότητες. Ο ίδιος φαίνεται να πειραματίζεται και να ανεβάζει το επίπεδο δυσκολίας στο συγκεκριμένο ερώτημα:

> « […] μετά αλλάζουμε παραμέτρους δηλαδή ενώ στο πρώτο ερώτημα ψάχνουμε να βρούμε μια γενίκευση σε ότι αφορά τα χρήματα σε σχέση με τις ημέρες ‘Μπορείτε να βρείτε μια σχέση που να μας δίνει τα χρήματα που έχει αποταμιεύσει ο Κώστας μετά από κ ημέρες;‘, μετά ζητάμε το ίδιο σε σχέση με τις εβδομάδες ‘Μπορείτε να βρείτε μια σχέση που να μας δίνει τα χρήματα που έχει αποταμιεύσει ο Κώστας μετά από μ εβδομάδες;. Άρα αλλάζει η μεταβλητή. Εδώ όπως φαίνεται μπαίνω κατευθείαν στην γενίκευση. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Εβδομάδες	**5**	**10**	**30**	
Χρήματα που αποταμίευσε				**165**

> »

Και σε αυτό το στάδιο φαίνεται να είναι έντονα επηρεασμένος από την τοποθέτηση του πίνακα στην δραστηριότητα «δέντρα σε σχηματισμούς» και έτσι επιλέγει και τους δυο τρόπους εισαγωγής του, πριν τα εισαγωγικά ερωτήματα και μετά από αυτά, για να δει ο ίδιος αυτή την φορά με ποιόν τρόπο φτάνουν οι μαθητές του ευκολότερα στην γενίκευση:

> «Ζητάω να εκφράσουν πρώτα την γενίκευση και στη συνέχεια να συμπληρώσουν το πίνακα, την αντίστροφη διαδικασία για να δω ποιο θα δουλέψει καλύτερα.»

Ο εκπαιδευτικός στο παρακάτω παράδειγμα φαίνεται να τοποθετεί την δραστηριότητα στα ρεαλιστικά προβλήματα και να ενστερνίζεται την άποψη πως τα συγκεκριμένα προβλήματα είναι ευκολότερα επιλύσιμα από τους μαθητές. Από το παρακάτω απόσπασμα παρουσιάζεται ο εκπαιδευτικός να επικεντρώνεται διδακτικά στην εύρεση γενικευμένων τύπων, εργαζόμενος καθαρά σε πλαίσιο ρεαλιστικών προβλημάτων:

> «Δεν θα τους δυσκολέψει να την κατανοήσουν από την στιγμή που είναι ένα ρεαλιστικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουν καθημερινά […]Στη μία με βάση τις ημέρες και στην άλλη με βάση τις εβδομάδες. Ουσιαστικά εκεί θα προκύψει το ένα να είναι πολλαπλάσιο του πέντε του άλλου. Πέντε μέρες είναι η μία εβδομάδα. Ζητάω να ερμηνεύσουν αυτή την κανονικότητα. Αυτό το διαφορετικό αποτέλεσμα, με αυτό κλείνει δηλαδή η πρώτη δραστηριότητα, να περιγράψουν, να ερμηνεύσουν να δικαιολογήσουν ή να μας πουν πως

> αντιλαμβάνονται αυτή την κανονικότητα[…] Είναι πιο ανοιχτό ερώτημα θα έχουμε απαντήσεις που θα μας εκπλήξουν.»

Ο εκπαιδευτικός φαίνεται να έχει επηρεαστεί για ακόμη μια φορά από την επιλογή της Μαρίας να τοποθετήσει πιο ανοιχτά ερωτήματα στις παλαιότερες δραστηριότητες. Η αποτίμηση που έδωσαν σε αυτή την επιλογή της είχε θετικό πρόσημο, με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να αναθεωρεί και να δοκιμάζει και ο ίδιος την ενσωμάτωση ενός πιο ανοιχτού ερωτήματος 'Μπορείτε να δικαιολογήσετε τα «διαφορετικά» αποτελέσματα της τελευταίας στήλης στους 2 παραπάνω πίνακες;' .

Η πρώτη δραστηριότητα δημιουργήθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθητές να καταλήξουν μέσω των ερωτημάτων σταδιακά στην γενίκευση. Φαίνεται ότι σημαντικό ρόλο στον σχεδιασμό της πρώτης δραστηριότητας έπαιξαν τα αποτελέσματα της δραστηριότητας «Δέντρα σε σχηματισμούς» που σύλλεξε ο ίδιος και η συνάδελφος. Πιο συγκεκριμένα, οι δυο δραστηριότητες μοιάζουν στον τρόπο που είναι δομημένη η συγκεκριμένη δραστηριότητα, δηλαδή 'κομμένη' σε επιμέρους ερωτήματα, σε σχέση με την μορφή της δεύτερης δραστηριότητας που περιλαμβάνει το ψηφιακό εργαλείο. Το παρακάτω απόσπασμα παρουσιάζει τον 'τρόπο χρήσης' για την επιλογή του πίνακα:

> «Όσον αφορά τους στόχους της δραστηριότητας μέσα από παραδείγματα της καθημερινής τους ζωής ειδικά με την πρώτη δραστηριότητα να καταλήξουνε μέσα από αριθμητικά παραδείγματα στις γενικεύσεις. Ουσιαστικά εδώ πέρα υπάρχουν δυο άξονες. Είτε συμπληρώνοντας τον πίνακα και βλέποντας την σχέση του μοτίβου που υπάρχει στα νούμερα[…] ή μέσω παραδειγμάτων να πάρεις έναν πίνακα και από τον πίνακα να προσπαθήσουν να βγάλουν την αριθμητική παράσταση, δηλαδή την σχέση»

Έτσι διαφαίνεται ακόμη μια φορά η σημασία της συνεργασίας **και ετερο-παρατήρησης** μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών. Παρακάτω ο εκπαιδευτικός δίνει τον λόγο για τον οποίο θέλησε να επιχειρήσει την εφαρμογή μια νέας βελτιωμένης δραστηριότητας:

> «Από την δικιά μου παλιά δραστηριότητα υπήρχαν κάποια άστοχα ερωτήματα ως προς την θέση τους στο φύλλο εργασίας πράγμα που βελτίωσε η Μαρία όταν είδε την διδασκαλία μου με αποτέλεσμα εγώ να έχω επηρεαστεί από την παρέμβαση της Μαρίας.»

Σε αυτό το σημείο κρίνεται αναγκαίο να αναδειχτεί ο σημαντικός ρόλος της συνεργασίας με τα υπόλοιπα μέλη της κοινότητας. Ενώ ο εκπαιδευτικός παρατηρείται να έχει μια πιο στενή συνεργασία με την Μαρία, φαίνεται να επηρεάζεται ως ένα βαθμό από τις απόψεις των συναδέλφων του. Αυτό επιβεβαιώνεται στο παρακάτω απόσπασμα:

«Καταρχήν από την ομάδα επηρεάστηκα από τις προτάσεις όλων των άλλων συναδέλφων. Θέλησα να κινηθώ στο ίδιο πνεύμα με τους άλλους, αλλά με κάποιες διαφορετικές δραστηριότητες. Συνεπώς από το υλικό που ανέβηκε στην κοινότητα που είχε δημιουργηθεί και από εκεί και πέρα το άλλο ήταν ότι θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε κάτι ψηφιακό και γι' αυτό επέλεξα αυτή την δεύτερη δραστηριότητα.»

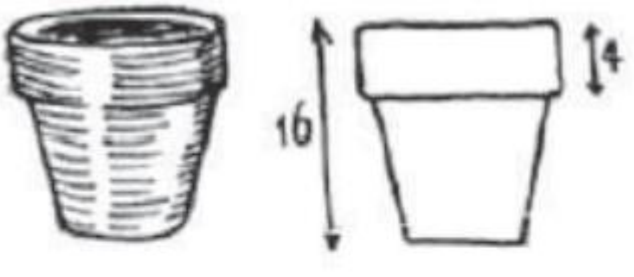
Συνοψίζοντας, ο εκπαιδευτικός έστρεψε την νέα μονάδα διδασκαλίας σε διερευνητική ενσωματώνοντας ανοιχτά ερωτήματα και για πρώτη φορά δεύτερη μεταβλητή εργαζόμενος στο πλαίσιο ρεαλιστικών προβλημάτων. Επιπλέον, ο ρόλος της συνεργασίας και κυρίως της ετεροπαρατήρησης έπαιξαν καθοριστικό ρόλο για τις διδακτικές επιλογές του εκπαιδευτικού από την στιγμή που ο εκπαιδευτικός φάνηκε να αποτιμάει με θετικό πρόσημο την διδακτική προσέγγιση της Μαρίας.

4.2.6.2 νέα δραστηριότητα με ψηφιακό εργαλείο

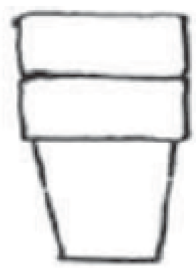
Στην παρούσα ενότητα κύριο ζήτημα αποτελεί η ενσωμάτωση ψηφιακών εργαλείων. Ο βασικός λόγος που ενδιαφέρει τον εκπαιδευτικό να σχεδιάσει δραστηριότητα με βάση το ψηφιακό εργαλείο είναι γιατί αξιοποιεί τα βοηθητικά μέσα που του παρέχουν τα ψηφιακά εργαλεία μέσω ανοιχτής διερεύνησης απαλείφοντας ερωτήματα που τα καλύπτουν οι δυνατότητες του ίδιου του λογισμικού. Στη νέα κατάσταση που διαμορφώνεται ο εκπαιδευτικός αλλάζει ρόλο: παύει να αποτελεί τη μοναδική πηγή γνώσης και γίνεται καθοδηγητής. Ο ίδιος θεωρεί ότι τα Μαθηματικά μετατρέπονται σε «Δυναμικά Μαθηματικά» με την ενσωμάτωση της τεχνολογίας δηλαδή από κατασκευές που γίνονταν με μολύβι και χαρτί τελικά να μετασχηματίζονται σε εικόνα και κίνηση.

Στο επόμενο απόσπασμα παρουσιάζεται η δεύτερη δραστηριότητα με το ψηφιακό εργαλείο. Το απόσπασμα επιλέχθηκε με στόχο να γίνει αντιληπτό πώς αλλάζει ο τρόπος που ο εκπαιδευτικός επιλέγει τον τρόπο δόμηση της δραστηριότητας σε σχέση με την προηγούμενη. Οι πολλαπλές δυνατότητες του λογισμικού φαίνεται να επηρεάζουν σημαντικά τον εκπαιδευτικό αφού ισχυρίζεται ότι πολλά από τα ερωτήματα που θα έβαζε αν η δραστηριότητα ήταν με χειραπτικά εργαλεία, καλύπτονται από τις λειτουργίες του λογισμικού. Έτσι λοιπόν στην συγκεκριμένη περίπτωση φαίνεται να ενθαρρύνεται η διερευνητική μάθηση και να ενισχύεται η πειραματική διδασκαλία:

«Τώρα στην δεύτερη δραστηριότητα που είναι αυτή που δεν έχει ερωτήματα. Αν την έστηνα αυτή την δραστηριότητα πρώτη και ήταν η μια γλάστρα μέσα στην άλλη και κάθε επόμενη με ύψος συν τέσσερα, όχι συν δεκαέξι γιατί πάει και μπαίνει η μια μέσα στην άλλη. Το πρόβλημα λέει :‘Η Νεφέλη αγόρασε γλάστρες για να φυτέψει λουλούδια. Κάθε γλάστρα έχει **16 εκατοστά ύψος** και το επάνω μέρος της –που είναι λίγο πιο χοντρό –είναι **4 εκατοστά** (σχήμα 1).



Ώσπου να φυτέψει τα λουλούδια θέλει να βάλει τις γλάστρες τη μία μέσα στην



άλλη όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα 2.

«Αν λοιπόν αυτή την έκανα πρώτη δραστηριότητα θα την έσπαγα σε επιμέρους ερωτήματα. Επειδή όμως χρησιμοποιώ το ψηφιακό μέσο, έχω φτιάξει δηλαδή ένα δόμημα με ένα δρομέα που ανεβοκατεβαίνει το ύψος σε αυτές τις γλάστρες δεν βάζω ερωτήματα, θα καλυφθούν από το λογισμικό. Έτσι τοποθετώ το παρακάτω ένα και μοναδικό ερώτημα: ‘Αν τις γλάστρες τις τοποθέτησε –προσωρινά – σε ντουλάπι ύψους 80 εκατοστών και χωρέσουν χωρίς να περισσέψει καθόλου χώρος από την πάνω μεριά, μπορείτε να βρείτε πόσες γλάστρες τοποθέτησε η Νεφέλη μέσα στο ντουλάπι;’»

Στη συνέχεια παρατηρείται ο εκπαιδευτικός μέσω της επιλογής ενός προβλήματος χωρίς επιμέρους ερωτήματα να επιδιώκει την πλήρη διερεύνηση από τους μαθητές του και η γνώση να κατασκευάζεται από τους ίδιους αφήνοντας πίσω τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας που αφορούσε την μεταφορά κανόνων και γνώσεων από τον καθηγητή στο μαθητή:

«Οπότε θέλω οι μαθητές να παίξουν με τον δρομέα χωρίς να το σπάω σε ερωτήματα και πάω κατευθείαν δίνοντας ένα πρόβλημα να βρουν την απάντηση, τον τύπο. Δηλαδή στην δεύτερη δραστηριότητα θα το δώσω στους

> μαθητές να παίξουν με το ψηφιακό εργαλείο και να διαισθανθούν τα επιμέρους ερωτήματα. Θα δούμε πως θα πάει αυτό. Θέλω να έχει νόημα ο σχεδιασμός, δηλαδή αν δεν το κάνουμε σε δύο ώρες έστω να το προσπαθήσουμε σε μια ομάδα. Να μπορέσει η ομάδα να χειριστεί το ψηφιακό δόμημα.»

Θα γίνει αναφορά σε δύο αποσπάσματα που χρησιμοποιούνται τα ψηφιακά εργαλεία ως βοηθητικό μέσο στην διδασκαλία του εκπαιδευτικού. Το πρώτο απόσπασμα σχετίζεται με τον λόγο όπου στην συγκεκριμένη επέκταση της δραστηριότητας βρίσκονται ενσωματωμένα ψηφιακά εργαλεία:

> «Η σχεδίαση του ψηφιακού δομήματος που έκανα ήταν να βοηθήσει τους μαθητές να καταλάβουνε καλύτερα το πρόβλημα για την δεύτερη δραστηριότητα και παίζοντας με το δόμημα με το εργαλείο το ψηφιακό να αντιληφθούν την εναλλαγή που θα έχουν στο μυαλό τους από την πρώτη δραστηριότητα στην δεύτερη δραστηριότητα.»

Το δεύτερο απόσπασμα σχετίζεται κυρίως με την βασική αλλαγή που υπήρξε από τον αρχικό σχεδιασμό ο οποίος περιλάμβανε μόνο χειραπτικά εργαλεία, με αυτόν που τελικά εφάρμοσε:

> «Στην πρώτη δραστηριότητα που θα κάνουμε με το ψηφιακό δόμημα έκοψα πολλά ερωτήματα. Την είχα αρχικά στο μυαλό μου με κάποια ερωτήματα, χωρίς ψηφιακό υλικό. Βάζοντας όμως το ψηφιακό υλικό που σχεδίασα έκοψα κάποια ερωτήματα τα οποία πιστεύω ότι θα καλυφθούν από τον χειρισμό του λογισμικού»

Το συγκεκριμένο ψηφιακό εργαλείο φαίνεται να το χρησιμοποιείται με τρόπο ενισχυτικό στην παραδοσιακή διδασκαλία του για να πετύχει τους στόχους του και να οδηγήσει τους μαθητές στην ανακάλυψη της γνώσης. Ο λόγος επιλογής και ενσωμάτωσης του συγκεκριμένου ψηφιακού εργαλείου στη διδασκαλία του εντάσσεται στις ‘λειτουργικές σταθερές’:

> « […] με την χρήση του εργαλείου, να ξεπεράσουμε κάποια εύκολα ερωτήματα της πρώτης δραστηριότητας και να πάνε κατευθείαν στην γενίκευση. Αυτός είναι ο στόχος»

Συνοψίζοντας, οι πολλαπλές δυνατότητες του ψηφιακού εργαλείου έκαναν τον εκπαιδευτικό να διαμορφώσει μια μονάδας διδασκαλίας με αρκετά απλή δομή. Ο εκπαιδευτικός επέλεξε να αφήσει τον μαθητή να ανακαλύψει πολλά από τα στοιχεία του προβλήματος μέσω του πειραματισμού του με το συγκεκριμένο εργαλείο.

4.2.7 Στάδιο 7: Εφαρμογή νέων δραστηριοτήτων Νίκου- κακή διατύπωση ερωτήματος-ρόλος ετεροπαρατήρησης

Το βασικότερο διδακτικό ζήτημα που έρχεται στην επιφάνεια στην συγκεκριμένη παράγραφο σχετίζεται με τον τρόπο έκφρασης και διατύπωσης στα ερωτήματα. Η ‘κακή’ επιλογή συγκεκριμένων λέξεων έφερε στην επιφάνεια αρκετές παρερμηνείες στους μαθητές με αποτέλεσμα η διδασκαλία να γίνει περισσότερο παρεμβατική από την πλευρά του εκπαιδευτικού. Επιπλέον, η ενσωμάτωση του ψηφιακού εργαλείου ως βοηθητικό μέσο μετέτρεψε την διδασκαλία σε διερευνητική.

Από τα δεδομένα, φαίνεται ο εκπαιδευτικός να έχει ένα υποστηρικτικό ρόλο κατά την διεξαγωγή της δραστηριότητας και η συνάδελφος έναν βοηθητικό ρόλο με το να παρεμβαίνει όπου της ζητείται είτε από τους μαθητές είτε από τον εκπαιδευτικό. Από τα παρακάτω σχόλια ο εκπαιδευτικός παρατηρείται να θέλει να μεταφέρει το συνεργατικό του πνεύμα και στους μαθητές του προσπαθώντας να διαμορφώσει κλίμα συνεργασίας μεταξύ των ομάδων:

> «Εκπ: πάμε να απαντήσουμε στο δεύτερο ερώτημα: …..Να συνεργάζεστε στην ομάδα όχι να απαντάει ο ένας […] απαντήσαμε την δεύτερη ερώτηση να την πούμε; θέλετε λίγο χρόνο ακόμα;»

Στη συνέχεια, καθώς η διαδικασία διδασκαλίας εξελίσσεται φαίνεται να εμφανίζεται ένα σημαντικό διδακτικό ζήτημα σχετικά με ένα ερώτημα που δυσκόλεψε την πλειοψηφία των μαθητών. Μάλλον, η διατύπωση που επέλεξε να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός στο πρώτο ερώτημα «σε πόσες ημέρες ο Κώστας θα έχει μαζέψει 6 ευρώ», έφεραν στην επιφάνεια αρκετές παρερμηνείες. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές θεώρησαν ότι οι μέρες της εβδομάδας είναι εφτά ενώ στην πραγματικότητα ο εκπαιδευτικός έμμεσα αναφερόταν στις πέντε μέρες που οι μαθητές πάνε στο σχολείο. Το παρακάτω απόσπασμα δείχνει αυτή την προβληματική που προέκυψε κατά την διάρκεια της διδασκαλίας:

> « ομάδα: από ποια μέρα θα ξεκινήσουμε; Γιατί αν είναι Παρασκευή τότε μετά τι θα κάνουμε με το Σάββατο και την Κυριακή;
>
> Εκπ: Επισημαίνω εδώ ότι το Σάββατο και την Κυριακή η μαμά δεν του δίνει του Κώστα 2 ευρώ αφού δεν πάει αυτές τις μέρες σχολείο όπως και εσείς άρα η μια εβδομάδα είναι 5 μέρες προσοχή»

Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται για ακόμη μια φορά ο βοηθητικός ρόλος που επιλέγει να έχει ο εκπαιδευτικός απέναντι στους μαθητές του. Ο ίδιος σταδιακά περνάει για μικρό χρονικό διάστημα από κάθε μια ομάδα και διορθώνει προφορικά τις απαντήσεις συζητώντας μαζί τους λάθη και παρερμηνείες. Φαίνεται να ανάδιοργανώνει την ροή της παρέμβασης αφού συχνά τους προκαλεί να προχωρήσουν στις επόμενες ερωτήσεις:

> «Εκπ: λοιπόν είμαστε σε σημείο φαντάζομαι που ολοκληρώνουμε τον πίνακα του τρίτου ερωτήματος. Αν υπάρχει κάποια δυσκολία από κάποιον να ρωτήσει να τον βοηθήσουμε γιατί έχουμε και συνέχεια»

Στο παρακάτω συμβάν ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να εισάγεται την μεταβλητή με την μέθοδο της αντικατάστασης τιμών στο άγνωστο γράμμα:

> «Εκπ: Στο ερώτημα 4: Μπορείτε να βρείτε μια σχέση που να μας δίνει τα χρήματα που έχει αποταμιεύσει ο Κώστας μετά από κ ημέρες; Στο Κ ο καθένας μας αργότερα θα μπορεί να βάλει έναν οποιονδήποτε φυσικό αριθμό. Μπορούμε να γράψουμε έναν τύπο εκεί μια σχέση;»

Στην συνέχεια, το παρακάτω συμβάν επιλέχθηκε για να δείξει πως έρχεται η μεταβλητή στην τάξη για δεύτερη φορά. Πιο συγκεκριμένα από την μια μεριά φαίνεται πως ο μαθητής προσπαθεί να κατανοήσει την μεταβλητή και από την άλλη πως ο εκπαιδευτικός προσπαθεί σταδιακά να φέρει τον μαθητή να καταλάβει και να διαισθανθεί ότι στην μεταβλητή ‘μ’ μπορεί να βάλει όποιον αριθμό επιθυμεί:

> «Εκπ: Μπορείτε να βρείτε μια σχέση που να μας δίνει τα χρήματα που έχει αποταμιεύσει ο Κώστας μετά από μ εβδομάδες;
>
> Ομάδα: Δεν μας νοιάζει πόσο είναι το μ. Ωραία 7,5 ευρώ
>
> Εκπ: για κάθε εβδομάδα ναι. Άρα τις μ εβδομάδες?
>
> Ομάδα: 7,5*2
>
> Εκπ: αυτό είναι για τις δυο εβδομάδες
>
> Ομάδα: Μέχρι πόσο πρέπει να πάει;
>
> Εκπ: Όσες θέλεις. Μ εβδομάδες
>
> Ομάδα: Ωραία εγώ θα κάνω για 1 εβδομάδες
>
> Εκπ: Όχι δεν θέλει για 1 εβδομάδα. Λοιπόν απάντησε μου. Αν έλεγε για 1 εβδομάδα πόσα είναι τα χρήματα
>
> Ομάδα: 7,5
>
> Εκπ: Για 2;
>
> Ομάδα: 15
>
> Εκπ: Πως το βρήκες το 15
>
> Ομάδα: 7,5*2=15

Εκπ: 3 εβδομάδες;

Ομάδα: 10 εβδομάδες 75

Εκπ: Μ εβδομάδες

Ομάδα: 7,5*μ .Είναι από το α, β ,γ δ της αλφαβήτου;

Εκπ: Όχι όχι όχι δεν είναι αυτό»

Προς το τέλος της διαδικασίας εντοπίζεται ένα σημαντικό συμβάν που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Σε αυτή τη φάση ο εκπαιδευτικός κάνει χρήση του ψηφιακού εργαλείου για πρώτη φορά. Ο ρόλος του φαίνεται να είναι συμβουλευτικός παρατηρώντας τον να παροτρύνει την ομάδα να πειραματιστεί με το ψηφιακό εργαλείο:

> «Εκπ: πάρε το ποντίκι. Πείραξε το έλα έλα σιγά σιγά. Αυτό που περιέγραφες πριν με τα χέρια σου είναι αυτό που κάνει εδώ το λογισμικό. Κοιτάξτε το σχήμα. Η κάθε γλάστρα έχει ύψος 16 εκ. Παίξε με το σχήμα στην οθόνη.»

Συνοψίζοντας, παρατηρήθηκε να κυριαρχούσε η διερευνητική μάθηση και η συνεργατική διδασκαλία. Η εκπαιδευτικός παρατηρούσε το μάθημα και με ελάχιστη παρέμβαση καθοδήγησε μια ομάδα ενώ ο εκπαιδευτικός της τάξης είχε καθοδηγητικό ρόλο προσπαθώντας από την μια να κρατάει τα χρονικά πλαίσια που είχε σχεδιάσει και από την άλλη να ξεπεραστεί οποιοδήποτε μαθησιακό εμπόδιο πρόκυπτε. Τα κύρια ζητήματα που ήρθαν στην επιφάνεια ήταν η ύπαρξη παρερμηνειών λόγω κρίσιμων γλωσσικών εκφράσεων και ο τρόπος εισαγωγής και κατανόησης της δεύτερης μεταβλητής από τους μαθητές.

4.2.8 Επαγγελματική εξέλιξη εκπαιδευτικών

Η επαγγελματική ανάπτυξη (professional learning) και εξέλιξη (evolution) των δυο εκπαιδευτικών φάνηκε σε τρία σημεία και αφορούσε **(α)** τις πεποιθήσεις σχετικά με τον τρόπο εισαγωγής της μεταβλητής **(β)** τον τρόπο που οι αναπαραστάσεις επηρεάζουν την μαθησιακή διαδικασία **(γ)** την διατύπωση και τον ρόλο των ερωτημάτων

Σε πρώτο στάδιο οι αλλαγές στις πεποιθήσεις των δυο εκπαιδευτικών σχετικά **με τον τρόπο εισαγωγής της μεταβλητής** φαίνεται να τους αναπτύσσουν επαγγελματικά. Η εκπαιδευτικός αναθεωρεί τον τρόπο που θέλει να εισάγει την μεταβλητή στους μαθητές της και επιλέγει να έχει κάνει ήδη μια προεργασία ενός μαθήματος στους μαθητές της, αντί να την ενσωματώσει σε πρώτο στάδιο στις συγκεκριμένες εφαρμογές όπως είχε αποφασιστεί εξαρχής. Η εκπαιδευτικός, φαίνεται να διακατέχεται από γρήγορα αντανακλαστικά αφού οι αδυναμίες των μαθητών που παρατήρησε στην παρέμβαση του Νίκου την έκαναν να ενσωματώσει ένα εμβόλιμο εισαγωγικό μάθημα που προηγήθηκε των εφαρμογών των δραστηριοτήτων για την έννοια της μεταβλητής ώστε οι μαθητές να είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με την μεταβλητή. Το παρακάτω απόσπασμα επιλέχθηκε αφενός για να αναδείξει την συμβολή της συνεργασίας στην ανάπτυξη αποτελεσματικότερων δραστηριοτήτων αφετέρου για να φέρει στην επιφάνεια ζητήματα επαγγελματικής εξέλιξης:

> Μαρία: «Τους έκανα λοιπόν ένα μάθημα μιας ώρας για την έννοια της μεταβλητής για περιπτώσεις που χρειάζεται να βάλουμε μεταβλητές και για το πώς μεταφράζουμε μια πρόταση από την καθημερινή μας ζωή σε μια μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα ώστε να μπορούν να παριστάνουν κάποια πράγματα με μεταβλητές ευκολότερα σε αυτές τις δραστηριότητες.»

Σε προηγούμενο κεφάλαιο στην ανάλυση της μονάδας διδασκαλίας 'Δέντρα σε σχηματισμούς' είδαμε ότι αρχικά οι δυο εκπαιδευτικοί αποφάσισαν να προσεγγίσουν διδακτικά την έννοια της μεταβλητής μέσω αριθμητικής σκέψης συμπληρώνοντας αριθμητικά στοιχεία του πίνακα με σκοπό να καταλήξουν από την παρατήρηση αυτών των αριθμητικών τιμών στην γενίκευση του μοτίβου. Όμως, μετά την παρατήρηση της εκπαιδευτικού στην παρέμβαση του Νίκου, η ίδια φαίνεται να αναζητά γεωμετρικές απαντήσεις και ερμηνείες από τους μαθητές μετατρέποντας την μονάδα διδασκαλίας σε περισσότερο διερευνητική γεγονός που την διαφοροποιεί από την στάση του συναδέλφου. Συνεπώς, η νέα προσέγγιση της μεταβλητής μέσω ανοιχτών ερωτημάτων που θέλησε να έχει εκ των υστέρων δείχνει στοιχεία επαγγελματικής ανάπτυξης και εξέλιξης.

Η ευελιξία και η ικανότητα των εκπαιδευτικών να αναγνωρίζουν τα λάθη τους και να επιδιώκουν με μετατροπές των ερωτημάτων να τα ξεπεράσουν μπορούμε να πούμε πως θεωρείται επαγγελματική εξέλιξη. Συνεπώς, η παραδοχή του εκπαιδευτικού ότι η διδακτική προσέγγιση της Μαρίας για την εισαγωγή της μεταβλητής δούλεψε καλύτερα στους μαθητές δείχνει στοιχεία επαγγελματικής ανάπτυξης.:

> Νίκος: «Μετά την υλοποίηση της δραστηριότητας την δικιά μου, διαπιστώνοντας ότι κάποια ερωτήματα εγκλώβιζαν τους μαθητές σε συγκεκριμένους τρόπους σκέψης , πχ υπολογισμοί μόνο με αριθμούς αυτό μας έκανε με την Μαρία στην δραστηριότητα την δική της να συμπεριλάβει ένα νέο ερώτημα πριν το πρώτο δικό μου ερώτημα πιο γενικό και από ότι φάνηκε στα αποτελέσματα που κάναμε τώρα δούλεψε καλά»

Η ικανότητα και η άνεση αυτή των δυο εκπαιδευτικών να μετατοπίζουν τις διδακτικές τους επιλογές και πρακτικές ανάλογα με τους στόχους που έχουν θέσει μπορεί να θεωρηθεί ως μια επαγγελματική εξέλιξη των ίδιων. Πιο συγκεκριμένα, η στροφή του Νίκου στην ενσωμάτωση περισσότερο ανοιχτών ερωτημάτων εστιασμένων σε γεωμετρικές ερμηνείες αποτελεί στοιχείο ανάπτυξης :

«Θα άλλαζα το πρώτο μου ερώτημα, θα προτιμούσα να μπει ένα ερώτημα πιο ελεύθερο δηλαδή να αφήσω τους μαθητές να ψαχτούν και να χαθούν μέχρι να καταλήξουν σε κάτι ,να είναι δηλαδή πιο ανοιχτό ερώτημα το οποίο αυτό θα έρθει με αφορμή για να συνεχίσουν πιο κάτω. Εγώ το φοβήθηκα αυτό και δεν το έβαλα στον σχεδιασμό ,και τους κατεύθυνα λίγο στο πρώτο ερώτημα με αποτέλεσμα αυτή η πορεία που είχα χαράξει τους εγκλώβισε.»

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων είναι κομβικός για την επαγγελματική εξέλιξη των δυο εκπαιδευτικών. Η τοποθέτηση του πίνακα στον σχεδιασμό αλλά και στην αποτίμηση είναι ένα από τα κεντρικότερα ζητήματα στις δραστηριότητες. Οι δυο εκπαιδευτικοί της έρευνας άρχισαν να νοηματοδοτούν και να κατανοούν μέσα από την πρακτική ποιος είναι ο ρόλος των αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα η Μαρία μέσα από την πρακτική του Νίκου θεώρησε λανθασμένη την χρήση του πίνακα ως βοηθητικό μέσο για την γενίκευση. Συνεπώς, η συνεργασία έμμεσα ευνοεί την ανάπτυξη δεξιοτήτων προσαρμογής και εναλλαγής διδακτικών επιλογών εκ μέρους των εκπαιδευτικών για την καλύτερη δυνατή διδασκαλία της άλγεβρας:

> «Σκέφτηκα ότι μπλοκάρουμε πάρα πολύ τα παιδιά να τα πάμε κατευθείαν στον πίνακα, δηλαδή μπλοκάρουμε την δημιουργικότητα τους ,τα ωθούμε σε κάποια λύση αλλά είναι μάλλον η λύση που θέλουμε εμείς να βρούνε. Αυτό που είπε μια ομάδα του Νίκου ήταν κάτι που δεν το είχε σκεφτεί κανένας από εμάς να το πει έτσι. Έτσι έβαλα μια πρώτη ερώτηση 'πως προκύπτει κάποιο διάγραμμα σε σχέση με το προηγούμενο' με την λογική να ενθαρρύνω τα παιδιά που μπορεί να το σκεφτούν γεωμετρικά να σκεφτούν και αυτά διαφορετικές λύσεις.»

Επιπλέον, στοιχείο εξέλιξης είναι και η διερεύνηση του εκπαιδευτικού για τον ρόλο του πίνακα μέσα στην νέα δραστηριότητα. Ο ίδιος επιλέγει και τους δυο τρόπους εισαγωγής του πίνακα, πριν τα εισαγωγικά ερωτήματα και μετά από αυτά, για να παρατηρήσει αυτή την φορά με ποιόν τρόπο φτάνουν οι μαθητές του ευκολότερα στην γενίκευση:

> Νίκος: «Ζητάω να εκφράσουν πρώτα την γενίκευση και στη συνέχεια να συμπληρώσουν το πίνακα, την αντίστροφη διαδικασία για να δω ποιο θα δουλέψει καλύτερα»

Η αλλαγή διδακτικής προσέγγισης του Νίκου στον σχεδιασμό νέων δραστηριοτήτων ακολουθώντας την διδακτική προσέγγιση της Μαρίας για ενσωμάτωση διερευνητικών ερωτημάτων με σκοπό να μην εγκλωβίσει τους μαθητές του σε αριθμητικές πράξεις θεωρείτε επαγγελματική ανάπτυξη.

Ο ρόλος του ψηφιακού εργαλείου φαίνεται να είναι σημαντικός στην διαδικασία σχεδιασμού της νέας δραστηριότητας. Η αλλαγή του αρχικού σχεδιασμού του Νίκου εξαιτίας της κατανόησης των πολλαπλών δυνατοτήτων του ψηφιακού εργαλείου δείχνει στοιχεία επαγγελματικής εξέλιξης:

> Νίκος: «Στην πρώτη δραστηριότητα που θα κάνουμε με το ψηφιακό δόμημα έκοψα πολλά ερωτήματα. Την είχα αρχικά στο μυαλό μου με κάποια ερωτήματα, χωρίς ψηφιακό υλικό. Βάζοντας όμως το ψηφιακό υλικό που σχεδίασα έκοψα κάποια ερωτήματα τα οποία πιστεύω ότι θα καλυφθούν από τον χειρισμό του λογισμικού»

Η διατύπωση και ο ρόλος των ερωτημάτων που θα χρησιμοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό για να μην αποκαλυφθεί η απάντηση ή να μην γίνουν παρερμηνείες από τους μαθητές φαίνεται να αποτελεί βασικό παράγοντα για την εξέλιξη των δυο εκπαιδευτικών. Από την μια μεριά η εκπαιδευτικός της έρευνας φαίνεται να εξελίχθηκε επαγγελματικά από την στιγμή που στο στάδιο του αναστοχασμού φάνηκε να αμφισβητεί την θέση αλλά και τον τρόπο έκφρασης ενός ερωτήματος που παρέπεμπε και εγκλώβισε τους μαθητές να σκεφτούν αναδρομικά. Συνεπώς, κεντρικό ζήτημα για την εκπαιδευτικό είναι αν η διατύπωση αναπέμπει μόνο στην αναδρομικότητα:

> Μαρία: «Και εδώ έρχομαι και αναρωτιέμαι εγώ αν το ερώτημα που μπήκε στην αρχή αυτό τους έδωσε την ελευθερία να σκεφτούν και αλγεβρικά και γεωμετρικά, τις επόμενες απαντήσεις τις έπνιξε. Άρα ένα θέμα είναι αν η διατύπωση αναπέμπει μόνο στην αναδρομικότητα, αυτό είναι ένα θέμα»

Επιπλέον, οι γλωσσικές αλλαγές που πραγματοποίησε η εκπαιδευτικός δείχνουν εξέλιξη για την ίδια από την στιγμή που κατανοεί και ανταποκρίνεται άμεσα στις αδυναμίες και ανάγκες των μαθητών της:

> Μαρία: «κάποιες αλλαγές λεκτικές και τους τίτλους άλλαξα θεωρώντας ότι τα παιδιά μου υπολείπονται των παιδιών του Νίκου του πειραματικού. Έβαλα όσο πιο εύκολες λέξεις γινότανε»

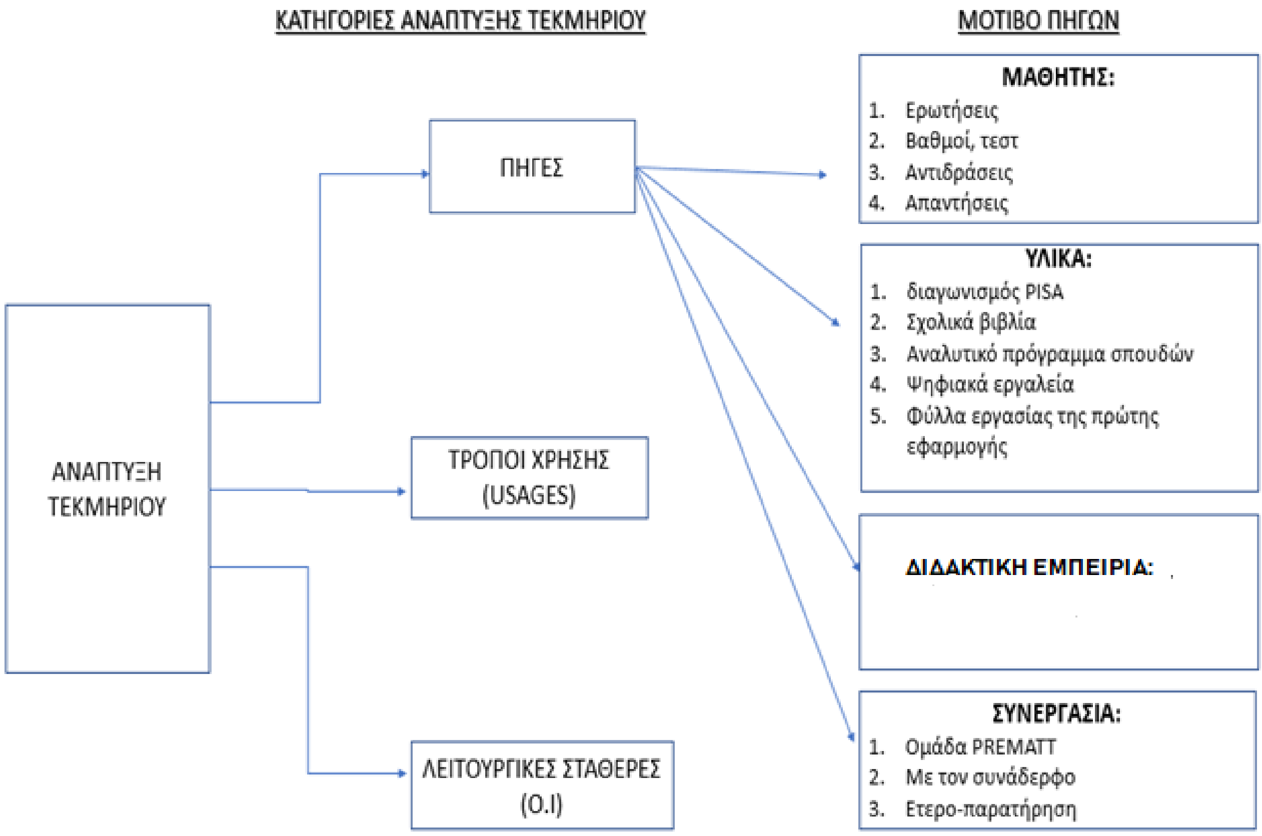
Στο ακόλουθο παράδειγμα ο εκπαιδευτικός δείχνει να αναπτύσσεται επαγγελματικά μέσα από την διαδικασία ανά σχεδιασμού των δραστηριοτήτων αλλά και την αποτίμηση της παλαιότερης παρέμβασης. Φαίνεται πως οι αλλαγές στον τρόπο διατύπωσης και τοποθέτησης των ερωτημάτων έδωσαν καλύτερα αποτελέσματα συνολικά:

> «[…]Δηλαδή ουσιαστικά, για εμένα όλο το πλαίσιο είναι στο να σχεδιάζουμε πετυχημένες από άποψη διατύπωσης δραστηριότητες. Σε αυτές εδώ, αυτή η δουλειά γίνεται πολύ καλύτερα σε σχέση με τις παλιές μου»

Συνοψίζοντας, οι δυο εκπαιδευτικοί της έρευνας καταλήγουμε ότι εξελίχθηκαν επαγγελματικά από την μεταξύ τους συνεργασία. Οι συνεχείς αλλαγές των διδακτικών προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών για τον καλύτερο τρόπο εισαγωγής της μεταβλητής, ο διαφορετικός ρόλος των αναπαραστάσεων που επέλεξε να χρησιμοποιήσει ο καθένας στις δραστηριότητες του καθώς επίσης και ο τρόπος διατύπωσης και δομής των ερωτημάτων έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην επαγγελματική ανάπτυξη των δυο εκπαιδευτικών.

4.3 Το μοτίβο πηγών των δυο εκπαιδευτικών

Οι κεντρικές πηγές που επηρεάζουν τους εκπαιδευτικούς της έρευνας στον σχεδιασμό δραστηριοτήτων ήταν τέσσερις (μαθητής, υλικά, γνώσεις εκπαιδευτικού, συνεργασία). Στη συνέχεια, προέκυψαν υποκατηγορίες για την κάθε παραπάνω πηγή. Έτσι διαμορφώθηκε ένα μοτίβου πηγών που εμφανίζει ο κάθε εκπαιδευτικός μέσα και έξω από την τάξη όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3. Να σημειωθεί ότι οι πηγές αποτελούν κομμάτι της βιβλιογραφίας στην θεωρία δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας και οι υποκατηγορίες διαμορφώθηκαν από την Θεωρία που θεμελιώνεται στα δεδομένα (Grounded theory):



ΣΧΗΜΑ 4.3

Στη συνέχεια με βάση το σχήμα 4.3 παρουσιάζεται αναλυτικά η κάθε κατηγορία πηγών και οι αντίστοιχες υποκατηγορίες μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα από τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί σε όλες τις φάσεις της έρευνας.

ΜΑΘΗΤΗΣ ΩΣ ΠΗΓΗ

Κατά την διάρκεια σχεδιασμού των δραστηριοτήτων εντοπίστηκαν τέσσερεις πηγές που απασχόλησαν τους εκπαιδευτικούς σε σχέση με τους μαθητές: οι ερωτήσεις προς τους μαθητές, οι βαθμοί και οι επιδόσεις τους, οι απαντήσεις και οι αντιδράσεις τους. Παρακάτω αναλύονται κάθε ένα ξεχωριστά.

Στο επόμενο απόσπασμα η εκπαιδευτικός φαίνεται να χρησιμοποιεί γενικές **ερωτήσεις** προς τους μαθητές της για να εκλάβει την γνώση και τις αδυναμίες των μαθητών της:

> Μαρία: «δεν έχουν αυτού του επιπέδου την ωρίμανση της γενίκευσης και το έχω διαπιστώσει από πολλές ερωτήσεις που έχουν έναν γενικευτικό χαρακτήρα»

Στο παρακάτω απόσπασμα παρατίθεται ένα παράδειγμα από την συνολική προσπάθεια της καθηγήτριας να παρουσιάσει ολοκληρωμένα το επίπεδο των μαθητών της. Για την συγκεκριμένη εκπαιδευτικό φαίνεται να επιδρούν ως πηγή οι **βαθμοί τα τεστ και οι επιδόσεις** των μαθητών της για το τρόπο με τον οποίο θα σχεδιάσει τις δραστηριότητες:

> Μαρία: «το τμήμα μέσα έχει αρκετά καλούς μαθητές με πολύ λίγα κενά από το δημοτικό έως καθόλου γιατί τους δίνουμε ένα διαγνωστικό τεστ με το που ξεκινάνε και μπορούμε να διαγνώσουμε από το δημοτικό τι προβλήματα κομίζουν. […] Επειδή και οι φιλόλογοι λένε ότι τα παιδιά έχουν πολύ χαμηλό επίπεδο είπα και εγώ να κάνω λεκτικές παρεμβάσεις εδώ μέσα.»

Στο παράδειγμα που ακολουθεί φαίνεται πως και ο δεύτερος εκπαιδευτικός της έρευνας λαμβάνει υπόψιν του το επίπεδο των μαθητών του πριν τον σχεδιασμό της δραστηριότητας. :

> Νίκος: «η σχέση είναι καλή. Είναι σχέση συνεργασίας η οποία έχει αναπτυχθεί σταδιακά , μικρά παιδιά είναι α γυμνασίου που είναι πολύ καλοί μαθητές. […] Η εικόνα ήταν ίδια από τον διαγωνισμό, εμείς προσθέσαμε τον πίνακα αφού προσαρμοστήκαμε πάνω στις ανάγκες των μαθητών μας»

Μια ακόμη υποκατηγορία της πηγής αυτής που επηρεάζει τον τρόπο διαμόρφωσης και δημιουργίας των δραστηριοτήτων είναι οι **απαντήσεις των μαθητών**. Ο εκπαιδευτικός φαίνεται να εστιάζει την προσοχή του στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές του αντιλαμβάνονται την άλγεβρα και προσπαθεί να χτίσει την δραστηριότητα με βάση το συγκεκριμένο κριτήριο:

> Νίκος: «Άλγεβρα όταν τους πεις λένε αριθμητική, έχουν αριθμητική σκέψη δηλαδή τα πάντα τα βλέπουν με αριθμούς. […] Κυρίαρχο ζήτημα λοιπόν είναι ότι προσπαθούσα για να σχεδιάσω να φανταστώ πως τα παιδιά θα τις προσεγγίσουν και γι' αυτό έκρινα σκόπιμο να ξεκινήσω με αριθμούς»

Από την άλλη μεριά, το παρακάτω παράδειγμα επιλέχθηκε για να αναδείξει την σημασία που έδωσε ο εκπαιδευτικός στα προβλήματα που συνάντησαν οι μαθητές του κατά την διάρκεια διεξαγωγής της δραστηριότητας. Σε αυτό το σημείο, ο ίδιος αναφέρει την εμμονή τον μαθητών του με τους αριθμούς ως ένα από τα βασικότερα προβλήματα που κλήθηκε να αντιμετωπίσει. Από την τελευταία πρόταση του παρακάτω αποσπάσματος διαφαίνεται η αλλαγή διδακτικής προσέγγισης σε πιθανή μελλοντική παρέμβαση έχοντας ως κύρια πηγή της στάση των μαθητών στα ερωτήματα:

> Νίκος: «Εγκλωβίστηκαν στους αριθμούς και στις πράξεις. […] Η πορεία που είχα χαράξει τους εγκλώβισε. Άρα λοιπόν η αλλαγή που θα έκανα θα ήταν να ξεκινήσω με ένα ή δυο ερωτήματα πιο ανοικτά για να αρχίσει να υπάρχει μια μεγαλύτερη διερεύνηση.»

Ομοίως, μέσα από την αποτίμηση των αποτελεσμάτων της εκπαιδευτικού φαίνεται να την επηρέασε η τάση των μαθητών της να απαντούν μόνο με βάση αναδρομικούς τύπους. Έμμεσα η παραδοχή αυτή οδηγεί στην ανάγκη για ανά-σχηματισμό των ερωτημάτων με τέτοια μορφή ώστε να αντιμετωπιστεί αυτή η εμμονή των μαθητών να εξάγουν σχέσεις πάντα σε σχέση με το προηγούμενο σχήμα:

> Μαρία: «δίνανε πάντα αναδρομικό σε σχέση με το προηγούμενο. Αυτό . άρα έχουμε προσθετικές ιδιότητες και αναδρομικότητα. Και εδώ έρχομαι και αναρωτιέμαι εγώ αν το ερώτημα που μπήκε στην αρχή αυτό τους έδωσε την ελευθερία να σκεφτούν και αλγεβρικά και γεωμετρικά, τις επόμενες απαντήσεις τις έπνιξε. Αυτό είναι ένα στοιχείο που εμένα με προβλημάτισε πάρα πολύ.»

Οι αντιδράσεις των μαθητών είναι η τελευταία υποκατηγορία που διαμορφώθηκε στα πλαίσια της πηγής 'μαθητής'. Στα παρακάτω δυο αποσπάσματα γίνεται εμφανής ο ενθουσιασμός που διακατέχει την εκπαιδευτικό για τον τρόπο που οι μαθητές της ανταπεξήλθαν στις απαιτήσεις της εφαρμογής. Η ίδια φαίνεται να απολαμβάνει την θετική ανταπόκριση και αντίδραση των μαθητών της, γεγονός που στην πορεία φαίνεται να επηρεάζει τον σχεδιασμό της νέας δραστηριότητας του συναδέλφου:

> Μαρία: «το μάθημα πήγε πολύ καλά γιατί άρεσε πάρα πολύ στα παιδιά, το ευχαριστήθηκαν τόσο πολύ δεν θέλανε ούτε διάλειμμα να βγουν. […] Σε κάποιες ομάδες που τα δυο παιδιά ήταν διαφορετικών ικανοτήτων δούλεψε

κυρίως ο ένας, αλλά στις περισσότερες ομάδες πήγε πολύ καλά το πράγμα δηλαδή τα παιδιά αλληλοσυμπληρώνονται»

Αντίθετα, στο παρακάτω απόσπασμα διαφαίνεται η απογοήτευση του καθηγητή για την κακή ανταπόκριση των μαθητών του στις απαιτήσεις της δραστηριότητας. Ο ίδιος, μετά την δοκιμαστική παρέμβαση που έκανε, αναγκάστηκε να αναπροσαρμόσει την δραστηριότητα εξαιτίας της αδυναμίας των μαθητών του να καταλήξουν σε γενικεύσεις, γεγονός που φαίνεται να τον προβληματίζει:

> Νίκος: «Τώρα κατά την διάρκεια της δραστηριότητας οι μαθητές δεν μπορούσαν να εμπλακούν σε μεγάλο βαθμό σε πράγματα που περιείχαν γενικεύσεις . Αυτό με δυσκόλεψε. Έπρεπε να αναπροσαρμόσω τον σχεδιασμό για να μπορέσουν να συμμετάσχουν όλες οι ομάδες. Αυτό ήταν κάτι που δεν το περίμενα και έτσι ανέτρεψε λίγο τον σχεδιασμό μου.»

Συνοψίζοντας, γίνεται αντιληπτό πως οι δυο εκπαιδευτικοί λαμβάνουν με παρόμοιο τρόπο υπόψιν τους τις απαντήσεις και αντιδράσεις των μαθητών τους και υπάρχει από κοινού η άποψη ότι οι μαθητές τους έχουν ανεπτυγμένη αριθμητική σκέψη και στρατηγικές.

ΥΛΙΚΑ ΩΣ ΠΗΓΗ

Μέσα από την ανάλυση των δεδομένων διαχωρίστηκαν τα υλικά στις παρακάτω υπό-κατηγορίες: Διαγωνισμός PISA, σχολικά βιβλία, αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, ψηφιακά εργαλεία, φύλλα εργασίας της πρώτης εφαρμογής.

Πιο συγκεκριμένα, οι δυο εκπαιδευτικοί επιλέγουν δυο δραστηριότητες από τον **διαγωνισμός της PISA** και ο κάθε ένας κάνει ορισμένες μετατροπές που αναλύονται στο κεφάλαιο 4.2. Από την στιγμή που οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν δραστηριότητες από ένα Διεθνές Πρόγραμμα φαίνεται να τους διακατέχει ένα ευρύ φάσμα γνώσεων για την Εκπαιδευτική Έρευνα:

> Μαρία :«τα προβλήματα ήταν σχετικά πρωτότυπα δεν τα βγάλαμε εμείς είναι από κάποιο διαγωνισμό της Pisa»
>
> Νίκος: «Τα σχέδια ήταν ίδια από κάποιο ερώτημα του διαγωνισμού»

Ταυτόχρονα όπως θα ήταν πιθανώς αναμενόμενο, προκύπτει ως κυρίαρχο υλικό το **σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών:**

> Μαρία: «προσπάθησα να το εντάξω στην ενότητα της εισαγωγής μεταβλητών στις εξισώσεις είναι ποιο κεφάλαιο στου σχολικού βιβλίου, το 4^{ο}»

Το **Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών** φαίνεται να επηρεάζει την εκπαιδευτικό στον τρόπο διαμόρφωσης της διδασκαλίας της και κατ' επέκταση τον διδακτικό της σχεδιασμό. Η ίδια δείχνει να βάζει στην άκρη τις οδηγίες του Αναλυτικού

Προγράμματος και να πρωτοπορεί αλλάζοντας τα κεφάλαια και δημιουργώντας δικές τις συνδέσεις:

> Μαρία: «είπα να κάνω τα ποσοστά μετά δηλαδή να το κάνω με την σειρά του βιβλίου ενώ οι οδηγίες που έχουμε από το υπουργείο φέτος είναι να τα κάνουμε μαζί κλάσματα και ποσοστά και δεκαδικούς φέτος»

Από τα παρακάτω δυο αποσπάσματα γίνεται σαφής η θέση των δυο εκπαιδευτικών να χρησιμοποιήσουν μόνο χειραπτικά εργαλεία στην πρώτη εφαρμογή και σε μια δεύτερη μελλοντική εφαρμογή **ψηφιακά εργαλεία.** Επιπλέον, παρατηρείται συνεργατικό πνεύμα αφού επιδεικνύουν προθυμία για συνέχιση της συνεργασίας στο μέλλον:

> Μαρία: «δεν βάλαμε τεχνολογία σε αυτή την φάση, έχουμε στο μυαλό μας να το κάνουμε με τον Νίκο σε δυο φάσεις, σε μια φάση να είναι αναγνώριση των υλικών και η άλλη φάση σε επόμενο μάθημα δηλαδή να πάμε σε θέματα που να αφορούν την τεχνολογία.»

Ομοίως τα παραπάνω στοιχεία φαίνονται στο επόμενο απόσπασμα:

> Νίκος: «Ήθελα να είναι καθαρά ο σχεδιασμός μέσα στην τάξη με χειραπτικά μέσα και τίποτα άλλο. […] Στην επόμενη παρέμβαση μας σχεδιάζουμε με την Μαρία να κάνουμε μια ίσως και δυο. Θα πάμε λοιπόν σε ένα επόμενο βήμα με ψηφιακά μέσα»

Στη συνέχεια μέσω της αναφοράς του καθηγητή για την ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην εφαρμογή της νέας δραστηριότητας, φαίνεται με σχετική ευκολία να εμπλουτίζει τα υλικά που χρησιμοποιεί ακολουθώντας το παραπάνω διδακτικό του πλάνο:

> Νίκος: «Η σχεδίαση του ψηφιακού δομήματος που έκανα, ο σχεδιασμός ήταν να βοηθήσει τους μαθητές να καταλάβουνε καλύτερα το πρόβλημα.[…] Κάποια ερωτήματα τα οποία πιστεύω ότι θα καλυφθούν από τον χειρισμό του λογισμικού»

Τα **φύλλα εργασίας της πρώτης εφαρμογής** φαίνεται να παίζουν τον δικό τους σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των νέων δραστηριοτήτων. Ο εκπαιδευτικός φαίνεται ξεκάθαρα να λαμβάνει υπόψιν του την δομή, τα αποτελέσματα και τα προβλήματα που συνάντησε στην προηγούμενη εφαρμογή της δραστηριότητας:

> «Οι ιδέες ποιες είναι. Εδώ ακολουθώ δυο διαφορετικές τακτικές στην αρχή ακολουθώ αυτό που κάναμε στην δραστηριότητα του Ιανουαρίου δηλαδή κάποια παραδείγματα μετά την τοποθέτηση του πίνακα, ενώ στο δεύτερο κομμάτι της δραστηριότητας ξεκινάω και βάζω τον πίνακα πρώτα και στη συνέχεια ζητάω κάποιες ερμηνείες πιστεύοντας ότι οι συμπεριφορές θα είναι

> διαφορετικές.[…] Από την δικιά μου παλιά δραστηριότητα υπήρχαν κάποια άστοχα ερωτήματα ως προς την θέση τους στο φύλλο εργασίας πράγμα που βελτίωσε η Μαρία όταν είδε την διδασκαλία μου»

Συνοψίζοντας, παρατηρήθηκε η κοινή επιλογή των εκπαιδευτικών για αποκλειστική χρήση χειραπτικών εργαλείων στην πρώτη εφαρμογή και ενσωμάτωση ψηφιακών σε επόμενη. Φάνηκε και οι δυο εκπαιδευτικοί να γνωρίζουν τον διαγωνισμό Pisa και το Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Τέλος, ο πρώτος κύκλος εφαρμογών αποτέλεσε κεντρική πηγή για τον εκπαιδευτικό της έρευνας και την διαμόρφωση του νέου υλικού του.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΩΣ ΠΗΓΗ

Οι γνώσεις και η διδακτική εμπειρία των εκπαιδευτικών είναι αναμενόμενο να διαφέρουν και να ποικίλουν με αποτέλεσμα να επηρεάζουν τον καθένα ξεχωριστά για τις διδακτικές τους επιλογές.

Στο ακόλουθο απόσπασμα η εκπαιδευτικός περιγράφει με βάση την εμπειρία της την προβληματική που υπάρχει γύρω από την έννοια της μεταβλητής, η οποία φαίνεται να αποτελεί αφορμή για την συγκεκριμένη παρέμβαση:

> Μαρία: «από άλγεβρα τι ξέρουνε. Αυτά με τα χ τους τα λένε από το δημοτικό σαν κάτι έτσι λίγο μεταφυσικό ας πούμε ας βάλουμε τώρα ένα χ στην ζωή μας ε, είναι σίγουρο ότι δεν έχουνε την ικανότητα να γενικεύουν όλα τα παιδιά, μερικά παιδιά και σε ορισμένα σημεία και ανάλογα με τον χρόνο μπορούν να γενικεύουν από αυτά.»

Παρόμοια, ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί αντίστοιχα σχόλια για να περιγράψει την δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση της μεταβλητής και στην μετάβαση τους από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη. Από την τελευταία του φράση φαίνεται ξεκάθαρα ο λόγος που επιλέγει το περιεχόμενο της δραστηριότητας να σχετίζεται με το κομμάτι των μεταβλητών:

> Νίκος: «Άλγεβρα όταν τους πεις λένε αριθμητική […] Έχουν αριθμητική σκέψη δηλαδή τα πάντα τα βλέπουν με αριθμούς στη φάση που βρίσκονται τώρα. Γενικά μπορούνε εύκολα να αναγνωρίσουν μοτίβα ,δυσκολεύονται όμως να τα περιγράψουν […] και να μετασχηματίσουν σε τύπο μια σχέση που μπορούν να την αναγνωρίζουν. Μετά τις δραστηριότητες αυτές θα δούμε αν έχουν αλλάξει απόψεις ή αντιδράσεις πάνω σε αυτό.»

Συνοψίζοντας, αποτελεί κοινή πεποίθηση των δυο εκπαιδευτικών η δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν την μεταβλητή και να αποκτήσουν αλγεβρική σκέψη. Επομένως, η διδακτική εμπειρία τους φαίνεται να έχει τα ίδια θεμέλια και να αποτελεί βασική πηγή για τον τρόπο διαμόρφωσης των φύλλων εργασίας. Η διαφορά είναι ότι η μια εκπαιδευτικός επιδίωξε την εισαγωγή της μεταβλητής μέσω γεωμετρικής προσέγγισης ενώ ο δεύτερος εκπαιδευτικός μέσω αριθμητικής προσέγγισης.

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΩΣ ΠΗΓΗ

Κατά την διάρκεια σχεδιασμού των δραστηριοτήτων η πηγή που λειτούργησε με εντονότερη συχνότητα ήταν η συνεργασία μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών αλλά και η συνεργασία που αναπτύχθηκε μέσα στην ομάδα Prematt. Έτσι η παραπάνω πηγή διαχωρίστηκε σε δυο υποκατηγορίες, την συνεργασία με τον συνάδελφο και την συνεργασία μέσω της ομάδας Prematt. Επιπρόσθετα, δημιουργήθηκε άλλη μια υπό-κατηγορία, η έτερο-παρατήρηση που φαίνεται να αποτελεί μια από τις βασικότερες πηγές για τους εκπαιδευτικούς:

Στα παρακάτω δυο απόσπασμα βλέπουμε να εμφανίζεται το κλίμα συνεργασίας που υπάρχει στην **ομάδα PREMATT**. Το κλίμα ανταλλαγής ιδεών και απόψεων που έχει καλλιεργηθεί φαίνεται να επηρεάζει την κρίση και τις διδακτικές επιλογές των δυο εκπαιδευτικών. Πιο συγκεκριμένα ο εκπαιδευτικός της έρευνας αναφέρει:

> Νίκος: «όταν εγώ σε πρώιμο στάδιο πρότεινα τι είχα σκοπό να κάνω με […] οι γνώμες και οι προτάσεις που ακούστηκαν από τους συναδέρφους ήταν ενδιαφέρουσες και μπορώ να πω ότι λήφθηκαν υπόψιν για το πώς θα στηθεί η δραστηριότητα»

Με αφορμή την "τοποθέτηση" των εκπαιδευτικών σε ένα πιο ερευνητικό κλίμα αναδεικνύονται η δυναμική των κοινοτήτων πρακτικής και η προσφορά ανταλλαγής απόψεων και υλικού μεταξύ εκπαιδευτικών, μέσω συνεργασίας:

> Μαρία: «είναι πράγματα που αν δεν υπήρχε η παρακίνηση από την ομάδα πιθανό και να ην τα κάναμε. Το να συμμετέχεις σε μια ομάδα με αυτήν την ατζέντα σε βάζει και εσένα στην λογική του να σκεφτείς πράγματα είτε να επινοήσεις είτε να πάρεις κάποιο υλικό έτοιμο και να το δοκιμάσεις. […] Το κάνουμε πολύ συχνά αυτό με τον Νίκο αλλά για την άλγεβρα δεν ξανά είχαμε κάνει κάτι άρα σαφώς το ότι συμμετέχουμε στην ομάδα είναι πολύ σημαντικό»

Στη συνέχεια γίνεται έντονα αντιληπτό το κλίμα συνεργασίας που υπάρχει **μεταξύ των δυο συναδέλφων**. Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται η αλλαγή διδακτικών επιλογών από την εκπαιδευτικό εξαιτίας της στάσης του Νίκου. Επομένως, η επιρροή της από τον συνάδελφο είναι φανερή και αδιαπραγμάτευτη:

> Μαρία: «Εγώ λοιπόν παρακολούθησα μόνο τα κεράσια. Εδώ λοιπόν δεν είχα εικόνα απλώς είχα την απογοήτευση του Νίκου ότι δεν πήγε τίποτα καλά [..]

την γλώσσα άλλαξα γιατί σκέφτηκα μήπως τα μπλοκάρει την έκανα λίγο πιο απλή την γλώσσα.»

Παρόμοιο κλίμα επικρατεί και στα λόγια του εκπαιδευτικού, ο οποίος χρησιμοποιεί συνεχώς στα σχόλια του τον α' πληθυντικό δείχνοντας με αυτό τον τρόπο την κοινή συνεργασία του με την Μαρία:

Νίκος: «Εμείς λοιπόν και με την Μαρία που σχεδιάσαμε αυτήν την παρέμβαση θέλαμε να δούμε σε πρώτη φάση τις αντιδράσεις τους σε κάποια πράγματα τα οποία φαίνονται ναι μεν αριθμοί άλλα έχουν πολλή άλγεβρα από πίσω. [...] Δούλεψα με την Μαρία κάποια κομμάτια που αλλάξαμε μαζί.»

Παρακάτω παρατηρείται η **έτερο-παρατήρηση** να λειτουργεί ως βασική πηγή για τον ανά-σχεδιασμό των δραστηριοτήτων και για τους δυο εκπαιδευτικούς της έρευνας. Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζεται η εκπαιδευτικός να δέχεται μεγάλη επιρροή από την παρακολούθηση της στην παρέμβαση του συναδέλφου της. Η ίδια, φαίνεται να εντόπισε αδυναμίες των μαθητών μέσω της έτερο-παρατήρησης με αποτέλεσμα να ανασκευάζει ορισμένα ερωτήματα για την βελτίωση των δραστηριοτήτων:

Μαρία: «Λοιπόν οι αλλαγές έγιναν με βάση το μάθημα του Νίκου. Τώρα σε επίπεδο αρχικού σχεδιασμού δεν έκανα από την αρχή είχα ξεκαθαρίσει τι ήθελα να βάλω βέβαια ο ατομικός σχεδιασμός άλλαξε όταν είδα τον Νίκο δηλαδή από μόνη μου αν δεν έβλεπα τον Νίκο μπορεί να μην έκανα τις αλλαγές αυτές επειδή όμως υπήρξε η ετερο-παρατήρηση στην κάθε δραστηριότητα έκανα άλλες αλλαγές»

Στο παρακάτω απόσπασμα, φαίνεται για ακόμη μια φορά φαίνεται η σπουδαιότητα της έτερο-παρατήρησης από την στιγμή που αποτελεί αφορμή για βελτίωση των δραστηριοτήτων:

Μαρία :«Υπήρξε μια ομάδα παιδιών όπου βρήκε μια πάρα πολύ ωραία γεωμετρική λύση δηλαδή έβαλε στην άκρη τον πίνακα και κοίταξε πολύ προσεκτικά τα σχήματα και μου άρεσε πάρα πολύ. Με αυτή λοιπόν την παρατήρηση, όταν είδα ότι μόνο μια ομάδα το είδε γεωμετρικά[...] να μην ξεκινάω από τον πίνακα να βάλω τα παιδιά να εστιάσουν πρώτα στα σχήματα αυτά για να δούμε τι θα βγει.»

Στο παράδειγμα που ακολουθεί βλέπουμε τον εκπαιδευτικό να αναφέρει την θετική επίδραση που είχε η συνεργασία του με την Μαρία στην βελτίωση του περιεχομένου της νέας δραστηριότητας. Πιο συγκεκριμένα φαίνεται να έχει επηρεαστεί από τις αλλαγές τις εκπαιδευτικού στις δραστηριότητες και να έχει εντοπίσει τα λάθη του μέσα από αποτίμηση σε συνεργατικό πλαίσιο με την Μαρία:

> Νίκος: «Από την δικιά μου παλιά δραστηριότητα υπήρχαν κάποια άστοχα ερωτήματα ως προς την θέση τους στο φύλλο εργασίας πράγμα που βελτίωσε η Μαρία όταν είδε την διδασκαλία μου με αποτέλεσμα εγώ να έχω επηρεαστεί από την παρέμβαση της Μαρίας.»

Συνοψίζοντας, οι δυο εκπαιδευτικοί θεωρούν αφενός ότι η ομάδα PreMaTT υπήρξε βασική πηγή για το ξεκίνημα και την εξέλιξη της δραστηριότητας αφετέρου ότι η μεταξύ τους συνεργασία ήταν καθοριστική για τον σχεδιασμό και τον ανά-σχεδιασμό όλων των δραστηριοτήτων και παρεμβάσεων.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

I. Συμπεράσματα σύμφωνα με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα

Κατά την διάρκεια διεξαγωγής των συναντήσεων της ομάδας στο Πανεπιστήμιο, τα κύρια ζητήματα που ήρθαν στο προσκήνιο ήταν η έννοια της άλγεβρας και η εμφάνιση της στα σχολικά Μαθηματικά, ο τρόπος που εισάγεται η έννοια της μεταβλητής και στις δυο βαθμίδες και η φύση των υλικών και των πηγών. Για το κάθε εκπαιδευτικό της ομάδας η άλγεβρα σηματοδοτεί διαφορετική ερμηνεία και καταστάσεις και εμφανίζεται σε διαφορετικά πλαίσια. Στις συναντήσεις ακούστηκαν ποικίλες απόψεις για την έννοια και τον ορισμό της άλγεβρας γεγονός που δείχνει την διαφορετικότητα των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, ορισμένοι εκπαιδευτικοί βλέπουν την άλγεβρα ως αναπόσπαστο κομμάτι της αριθμητικής, επιβεβαιώνοντας έρευνες των (Kaput, 2008) όπου επικρατεί η άποψη ότι η μελέτη των δομών και των σχέσεων που προκύπτουν από την αριθμητική αναφέρεται ως γενικευμένη αριθμητική. Μια άλλη άποψη αναφέρει πως η άλγεβρα προσεγγίζεται μέσω της ανάγκης για αιτιολόγηση μιας μαθηματικής πράξης σε συμφωνία με έρευνα των (C.Kieran, J.Pang, D.Schifter και Swee Fong Ng, 2016) όπου αναφέρουν την δικαιολόγηση ως μέρος των αλγεβρικών δραστηριοτήτων. Τέλος, στο προσκήνιο έρχεται η θέση όπου στηρίζει πως η άλγεβρα βρίσκεται σε μια έννοια ή πράξη όταν δοθει σημασιολογικός και συμβολικό χαρακτήρας.

Η άμεση ανταλλαγή απόψεων εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αποτελεί πρωτοπόρο τρόπο συνεργασίας. Μέσω της συνεργασίας δασκάλων και εκπαιδευτικών παρατηρήθηκε η διαφορετική διδακτική προσέγγιση της άλγεβρας για τις δυο βαθμίδες. Οι δάσκαλοι επιλέγουν μια εικονική και διαισθητική προσέγγιση για να εισάγουν την μεταβλητή μέσω μοτίβων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση επιβεβαιώνοντας έρευνες των (Britt & Irwin ,2011) και (Radford ,2014) οι οποίες ισχυρίζονται ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν εικόνες, χειρονομίες ή φυσική γλώσσα για να γνωστοποιήσουν μια γενίκευση. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί επιδιώκουν είτε με αριθμητική είτε με αλγεβρική προσέγγιση να εμπλέξουν τους μαθητές με την έννοια της μεταβλητής.

Τέλος, κεντρικό ζήτημα στην ομάδα υπήρξε η φύση των υλικών και των πηγών για την διδασκαλία της άλγεβρας. Τα μέλη της ομάδας φάνηκε να είναι ιδιαίτερα δημιουργικά και επινοητικά φέρνοντας στην επιφάνεια διαφορετικές και πρωτοπόρες ιδέες σχετικά με την χρήση των υλικών. Πιο συγκεκριμένα η πλειοψηφία επέλεξε να σχεδιάσει δραστηριότητες στον eXpresser μιας και το εργαλείο αυτό αξιοποιήθηκε στην έρευνα Prematt και επιλέχθηκε ως κατάλληλο για εισαγωγή της μεταβλητής επιβεβαιώνοντας έρευνες των (Gutierrez, Pearce, Geraniou, & Mavrikis, 2008) όπου αναφέρουν ότι η εμπλοκή των μαθητών με τον eXpresser, ενθαρρύνει την δομημένη αλγεβρική σκέψη από την στιγμή που συνδέει την οπτική με την αλγεβρική αναπαράσταση. Ορισμένοι εκπαιδευτικοί δημιούργησαν διδακτικούς σχεδιασμούς που απαιτούσαν χρήση περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας (GeoGebra, Sketchpad) σε συνδυασμό με το εργαλείο eXpresser. Παρ'όλο που η βιβλιογραφία (F.Ferrara, D. Pratt, O. Robutti, 2006) αναδεικνύει τον σπουδαίο ρόλο της ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στην διδασκαλία της άλγεβρας, τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας έδειξαν πως οι ορισμένοι εκπαιδευτικοί κάνουν στροφή στην χρήση χειραπτικών εργαλείων, είτε συνδυαστικά με τα ψηφιακά είτε μεμονωμένα. Συνεπώς, η διαφοροποίηση σχετικά με το είδος και τον τρόπο ενσωμάτωσης των υλικών έφερε σημαντικές αντιθέσεις στην ομάδα.

II. Συμπεράσματα σύμφωνα με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα

Αναφορικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και τους παράγοντες που διαμορφώνουν τη διδασκαλία των εκπαιδευτικών παρατηρήθηκε ότι στοιχεία της συνεργασίας και κυρίως της έτερο-παρατήρησης είναι κομβικά. Η εμπλοκή των εκπαιδευτικών με την δημιουργία δραστηριοτήτων σε μια ομάδα στα πλαίσια της συνεργασίας δημιουργεί μια σειρά από προϋποθέσεις για μετασχηματισμό των παρεμβάσεων σε μια 'καλή' διδασκαλία Μαθηματικών, αφού οι εκπαιδευτικοί αναγκάστηκαν να σκεφτούν και να περιγράψουν όλες τις πτυχές, επιχειρηματολογώντας κάθε φορά για τις επιλογές τους. Επομένως, αναδείχτηκε η σημασία της συνεργασίας και της έτερο-παρατήρησης από την στιγμή που υπήρξε ο βασικός λόγος για συνολική βελτίωση της δραστηριότητας και αναστοχασμό. Πιο συγκεκριμένα η έτερο-παρατήρηση υπήρξε σημαντικός παράγοντας για την εξέλιξη της δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας των εκπαιδευτικών αφού μέσω αυτής οι εκπαιδευτικοί επιχείρησαν τον ανά-σχεδιασμό των δραστηριοτήτων και την βελτίωση της δομής και των ερωτημάτων. Παράλληλα, κατά την διάρκεια του κύκλου εφαρμογών έγινε σαφές πως οι δυο εκπαιδευτικοί μέσω της μέχρι τώρα συνεργασίας τους είναι σε θέση να αλληλοσυμπληρώνουν τις γνώσεις και τις πεποιθήσεις τους σε θέματα διδακτικής και διδασκαλίας όπως επιβεβαιώνεται και από έρευνες των (Micklewright και άλλων, 2014). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι διδακτικές δράσεις και προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών να παίξουν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας των εκπαιδευτικών. Από την μια μεριά η εκπαιδευτικός τοποθετεί διερευνητικά ανοιχτά ερωτήματα που προσφέρουν στους μαθητές της μία πληθώρα πλεονεκτημάτων σε ταύτιση με έρευνες του (Sawada, 1997) και αναζητά γεωμετρικές ερμηνείες από τους μαθητές της γεγονός που την διαφοροποιεί από την στάση του δεύτερου εκπαιδευτικού της έρευνας ο οποίος επικεντρώνεται κυρίως σε αριθμητικές πράξεις και μεθόδους. Σύμφωνα με τις έρευνες των (Artigue και άλλων, 2001) η διαφοροποίηση των διδακτικών προσεγγίσεων, πεποιθήσεων και πρακτικών των εκπαιδευτικών της έρευνας έρχεται σε συμφωνία με την τρίτη διάσταση της γνώσης, την «διδακτική» όπου διαφέρει από εκπαιδευτικό σε εκπαιδευτικό. Κοινή πεποίθηση και των δυο εκπαιδευτικών είναι η διδακτική επιλογή ρεαλιστικών προβλημάτων μέσω των οποίων επιδιώκουν την εισαγωγή της μεταβλητής. Τα θετικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ως ορθές τις επιλογές των εκπαιδευτικών και έδειξαν πως οι μαθητές τους ανταποκρίθηκαν καλύτερα στις δραστηριότητες που περιείχαν ρεαλιστικά προβλήματα σε αντίθεση με έρευνα της (Kieran, 2007) που στηρίζει πως οι μαθητές όταν καλούνται να αντιμετωπίσουν ρεαλιστικά προβλήματα ενδέχεται να κατευθυνθούν μακριά από τις βαθύτερες μαθηματικές δομές του προβλήματος.

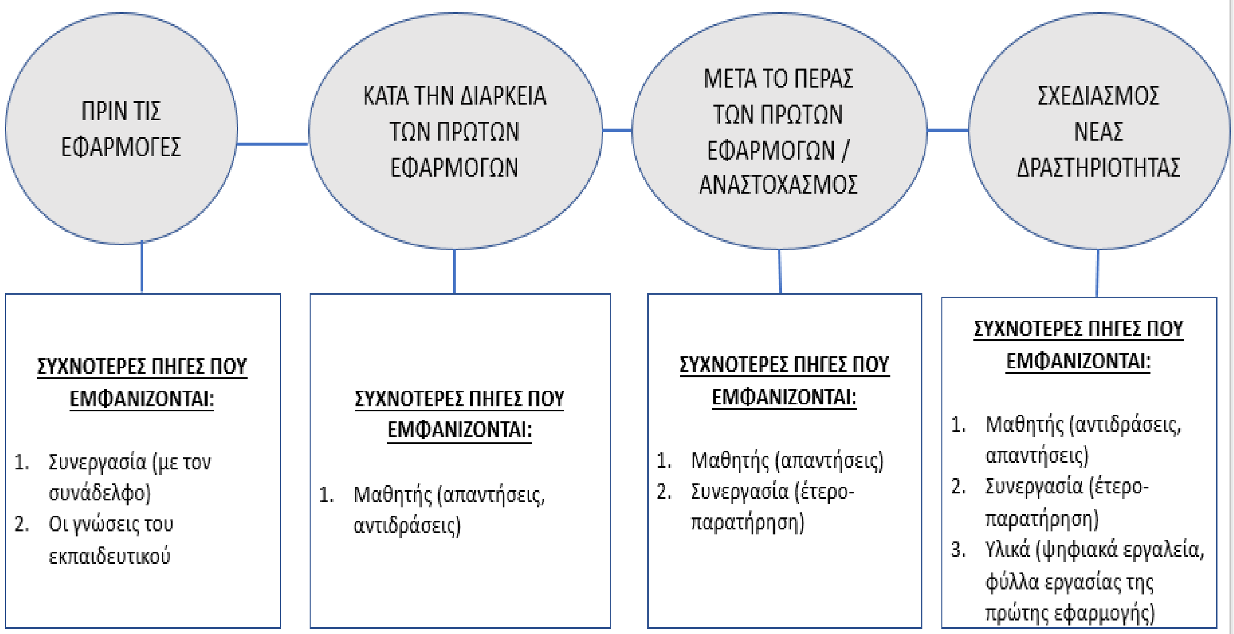
Οι δυο εκπαιδευτικοί επέλεξαν να «δημιουργήσουν» μια παρέμβαση γύρω από τους μαθητές λαμβάνοντας υπόψιν το επίπεδο, τις γνώσεις τους αλλά και τις πιθανές δυσκολίες που θα αντιμετώπιζαν, σε ταύτιση με έρευνες των (Gueudet και Trouche, 2012) που εστιάζουν κυρίως σε ζητήματα που αφορούν τις αντιδράσεις των μαθητών σε απαιτήσεις μαθηματικού περιεχομένου. Επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν διαφορετική «γλώσσα» μέσα στα ερωτήματα, ο κάθε ένας με βάση τις ανάγκες των μαθητών του και επιπλέον να προσθέσουν ερωτήματα στα ήδη έτοιμα φύλλα εργασίας του διαγωνισμού για την καλύτερη απόδοση των μαθητών τους. Μέσα από την διαδικασία αποτίμησης των αποτελεσμάτων φάνηκε η προσέγγιση της Μαρίας να έχει πιο πολλές θετικές αντιδράσεις από τους μαθητές των δυο εκπαιδευτικών αφού οι μαθητές της καθηγήτριας ανταποκρίθηκαν καλύτερα στην σταδιακή αλγεβρική και γεωμετρική σκέψη ενώ οι μαθητές του Νίκου εγκλωβίστηκαν περισσότερο στην αριθμητική σκέψη. Ένα επόμενο ζήτημα που ήρθε στην επιφάνεια αφορά την διαχείριση του χρόνου. Σε κάθε μια παρέμβαση ο περιορισμένος διδακτικός χρόνος φάνηκε να επηρεάζει τις διδακτικές επιλογές των εκπαιδευτικών. Η αρχική παρέμβαση του Νίκου έφερε τα πρώτα ζητήματα διαχείρισης χρόνου. Επιπλέον, μετά τον αναστοχασμό του πρώτου κύκλου εφαρμογών, οι δυο εκπαιδευτικοί κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η πίεση χρόνου ήταν βασικός παράγοντας που έπαιξε ρόλο στις διαδικασία σχεδιασμού και εφαρμογών αφού και οι δυο επιζητούσαν περισσότερη ζύμωση και ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών σε μορφή συζήτησης στο τέλος των παρεμβάσεων. Όπως παρατηρήθηκε, οι δυο εκπαιδευτικοί είχαν σχεδιάσει την διδασκαλία τους χρησιμοποιώντας αποκλειστικά χειραπτικά μέσα με το σκεπτικό η πρώτη εξοικείωση με την έννοια της μεταβλητής και της γενίκευσης να είναι πιο οικεία στους μαθητές τους. Παρ'όλ'αυτά η γνώση της τεχνολογίας από τους εκπαιδευτικούς φαίνεται να αποτελεί έναν σημαντικό πόλο, στην ανάπτυξη και υλοποίηση του διδακτικού σχεδιασμού που την συμπεριλαμβάνει. Η βιβλιογραφία (F.Ferrara, D. Pratt, O. Robutti , 2006) αναδεικνύει την σημασία της ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στην διδασκαλία της άλγεβρας διαμορφώνοντας 'δυναμικές' και καινοτόμες δραστηριότητες μέσω της χρήσης νέων μικρόκοσμων και ψηφιακών λογισμικών που παρέχουν πρόσβαση σε πολλαπλές αναπαραστάσεις φέρνοντας στην επιφάνεια θετικά αποτελέσματα. Ο εκπαιδευτικός που μελετήθηκε έρχεται σε ταύτιση με τις παρατηρήσεις των ερευνών από την στιγμή που ο ίδιος ισχυρίζεται ότι οι πολλαπλές δυνατότητες του λογισμικού επηρέασαν σημαντικά τον σχεδιασμό του με αποτέλεσμα πολλά από τα ερωτήματα που θα έβαζε στην δραστηριότητα με χειραπτικά εργαλεία να καλυφθούν από τις λειτουργίες του λογισμικού.

Η σημαντικότερη συνεισφορά της συνεργασίας μεταξύ των εκπαιδευτικών είναι η επαγγελματική τους ανάπτυξη. Η δημιουργία γέννησης μονάδων διδασκαλίας συνεπάγεται επαγγελματική εξέλιξη πολλών τύπων. Μια εξέλιξη είναι οι αξιοσημείωτες αλλαγές και η μετατόπιση στάσεων των εκπαιδευτικών σε ζητήματα επιλογής εργαλείων και διδακτικών προσεγγίσεων όπως και σε παλαιότερες έρευνες (Schleicher, 2012). Στη μεν πρώτη δραστηριότητα η συνεργασία και η έτερο-παρατήρηση συνέβαλαν στην επαγγελματική μάθηση της Μαρίας από την στιγμή που η ίδια έδειξε να διαθέτει αντανακλαστικά να ξεπεράσει εμπόδια μέσα από την μετατόπιση και την αλλαγή του αρχικού διδακτικού σχεδιασμού. Κατά την διάρκεια της αποτίμησης η διδακτική επιλογή της Μαρίας να τοποθετήσει ένα πιο ανοιχτό ερώτημα όπως και σε έρευνες των (Kwon και άλλων, 2006) πριν από την τοποθέτηση του πίνακα αποτιμήθηκε αποτελεσματικότερη με βάση τις απαντήσεις των μαθητών από την διδακτική επιλογή του Νίκου να ξεκινήσει την δραστηριότητα ζητώντας την συμπλήρωση του πίνακα. Έτσι, στον δεύτερο κύκλο εφαρμογών, ο ίδιος με αφορμή τα θετικά αποτελέσματα από τους μαθητές της Μαρίας φαίνεται να «χτίζει» την νέα δραστηριότητα τοποθετώντας ερωτήματα παρόμοιας φύσεως με την δομή της δραστηριότητας της Μαρίας. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ευελιξία και η ικανότητα των εκπαιδευτικών να αναγνωρίζουν τα λάθη τους και να επιδιώκουν με μετατροπές των ερωτημάτων να τα ξεπεράσουν λειτουργεί εξελικτικά για τους δυο εκπαιδευτικούς. Επιπλέον η δυναμική των κοινοτήτων πρακτικής και η προσφορά ανταλλαγής απόψεων και υλικού μεταξύ εκπαιδευτικών αποτελεί βασικό στοιχείο επαγγελματικής εξέλιξης των δυο εκπαιδευτικών της έρευνας όπως αναφέρεται και από τους (Barab και άλλοι, 2001) από την στιγμή που η συνεργασία με την ομάδα PreMaTT έμμεσα ευνοεί την ανάπτυξη δεξιοτήτων προσαρμογής και εναλλαγής διδακτικών επιλογών εκ μέρους των εκπαιδευτικών για την καλύτερη δυνατή διδασκαλία της άλγεβρας.

III. Συμπεράσματα σύμφωνα με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα

Αναφορικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα η ανάλυση των δεδομένων έφερε στο επιφάνεια την δημιουργία ενός μοτίβου πηγών. Το μοτίβο πηγών αποτελείται από τέσσερις βασικές πηγές που χρησιμοποιούν και συχνά αναφέρουν οι δυο εκπαιδευτικοί της έρευνας για να σχεδιάσουν δραστηριότητες εκ των οποίων κάθε πηγή διαχωρίζεται σε υποκατηγορίες. Παρατηρήθηκε ότι οι εκπαιδευτικοί όταν αναφέρουν τον μαθητή ως πηγή επικεντρώνονται κυρίως στις ερωτήσεις που του κάνουν, στους βαθμούς και στις επιδόσεις του, στις αντιδράσεις και τις απαντήσεις του. Όταν παρουσιάζουν ως πηγή τα υλικά για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων φάνηκε να εμβαθύνουν κυρίως σε υλικά που αφορούν τον διαγωνισμός PISA, τα σχολικά βιβλία, το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, τα ψηφιακά εργαλεία και τα φύλλα εργασίας της πρώτης εφαρμογής. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να λαμβάνουν σοβαρά υπόψιν την συνεργασία μεταξύ τους αλλά και το πλαίσιο συνεργασίας μεταξύ της ομάδας PREMATT. Κομβικό σημείο αναφοράς και για τους δυο εκπαιδευτικούς έδειξε να αποτελεί η έτερο-παρατήρηση ως κομμάτι της μεταξύ τους συνεργασίας. Τέλος, η βασική πηγή και για τους δυο καθηγητές που έπαιξε δραματικό ρόλο στην διαμόρφωση των δραστηριοτήτων αποτελούν οι γνώσεις και η διδακτική τους εμπειρία.

Συνοπτικά καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα όπως φαίνονται στο σχήμα 6.1



Σχήμα 6.1 : Συνοπτικός πίνακας αποτελεσμάτων του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος

Κατά την διάρκεια σχεδιασμού των δραστηριοτήτων πριν την εφαρμογή των δραστηριοτήτων στην σχολική τάξη, οι πηγές που λειτούργησαν για τους εκπαιδευτικούς ήταν οι μαθητές, τα υλικά, η συνεργασία και οι γνώσεις τους με εντονότερη συχνότητα αυτή της συνεργασίας. Η συνεργασία σε αυτό το στάδιο φαίνεται να αποτελεί βασικό παράγοντα για τις διδακτικές επιλογές των δυο εκπαιδευτικών επιβεβαιώνοντας τα ευρήματα των (Gueudet & Trouche, 2009). Η σύμπλευση και η ανάπτυξη συνεργασίας μεταξύ των δυο εκπαιδευτικών είναι πιο έντονη σε αυτό το στάδιο φέρνοντας στην επιφάνεια την αξία της συνεργασίας και των θετικών αποτελεσμάτων της σε ταύτιση με τις έρευνες των (Barab, S., MaKinster, J., Scheckler, R. 2001). Ταυτόχρονα με την συνεργασία, εμφανίστηκε με έντονη συχνότητα η πηγή που συνδέεται με τις γνώσεις των δυο εκπαιδευτικών επιβεβαιώνοντας παλαιότερες έρευνες (Leinhardt, Putnam, Stein & Baxter, 1991). Πιο συγκεκριμένα, η διδακτική εμπειρία του καθενός έφερε στην επιφάνεια ζητήματα διδακτικής- επιστημολογικής φύσεως. Κοινός στόχος των δυο εκπαιδευτικών αποτέλεσε αφενός η σταδιακή μετάβαση των μαθητών από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη αφετέρου η ανάπτυξη δεξιοτήτων γενίκευσης. Οι δυο εκπαιδευτικοί είναι έντονα επηρεασμένοι από την διδακτική τους εμπειρία αναγνωρίζοντας την μέχρι τώρα προβληματική που υπάρχει γύρω από την εισαγωγή της μεταβλητής και την διαδικασία γενίκευσης μέσω μοτίβων όπως συμφωνούν και έρευνες των (Threlfall, 1999, Orton & Orton, 1999, Stacey, 1989). Έτσι, οι δυο εκπαιδευτικοί ακολουθώντας μια προσέγγιση μέσω μοτίβων για την εισαγωγή της μεταβλητής όπως φαίνεται και σε έρευνες (Warren και άλλων, 1998), παρατηρήθηκε να διαφοροποιούνται στις διδακτικές τους επιλογές για την διαμόρφωση των φύλλων εργασίας.

Κατά την διάρκεια των πρώτων εφαρμογών από τους δυο εκπαιδευτικούς η πηγή που λειτούργησε με μεγαλύτερη συχνότητα ήταν 'ο μαθητής'. Οι δυο εκπαιδευτικοί επηρεάστηκαν ιδιαίτερα από τις απαντήσεις και τις αντιδράσεις των μαθητών τους. Πιο συγκεκριμένα μέσω των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές και στα δυο τμήματα, από την μία μεριά φάνηκε η αδυναμία τους να διατυπώσουν ένα γενικό μοτίβο σε σχέση με την φυσική γλώσσα επιβεβαιώνοντας έρευνα των (Lee, 1996) και από την άλλη οι περισσότεροι μαθητές εγκλωβίστηκαν στην αναδρομικότητα όπως επιβεβαιώνουν και έρευνες των (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2001, Lee, 1996, Mason, 1996). Οι παραπάνω προβληματικές καταστάσεις οδήγησαν τους δυο εκπαιδευτικούς στην ανάγκη αναστοχασμού και αποτίμησης των αποτελεσμάτων.

Μετά το πέρας των πρώτων παρεμβάσεων υπήρξε διαδικασία ανά-στοχασμού. Κύρια πηγή αποτέλεσε η 'έτερο-παρατήρηση' των δυο εκπαιδευτικών στα πλαίσια της μεταξύ τους συνεργασίας. Από την μια πλευρά, η Μαρία μέσω της παρατήρησης της στην παρέμβαση του Νίκου μετασχημάτισε με αποτελεσματικότερο τρόπο τις δραστηριότητες και τους χρόνους της εφαρμογής. Οι απαντήσεις ορισμένων μαθητών του Νίκου λειτούργησαν ως νέα πηγή για την καθηγήτρια επιβεβαιώνοντας έρευνες των (Jacobs και άλλων, 2010, Mason, 2002) όπου παρόμοια εντοπίζεται η γνωστική ικανότητα της εκπαιδευτικού να ερμηνεύει τα κύρια χαρακτηριστικά της παραγωγικής σκέψης των μαθητών και να πράττει με βάση αυτά.

Έτσι με αφορμή μια γεωμετρική απάντηση μιας ομάδας η Μαρία άλλαξε μέρος των δραστηριοτήτων με σκοπό την δημιουργία πιο ανοιχτών ερωτημάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι συγκεκριμένες διδακτικές επιλογές ήταν καθοριστικές για την καλύτερη ανταπόκριση που είχαν οι μαθητές της σε αντίθεση με του συναδέλφου σε ταύτιση με έρευνες των (Sawada, 1997). Επίσης, η έτερο-παρατήρηση βοήθησε την Μαρία να διαχειριστεί αποτελεσματικότερα την τάξη και τον χρόνο παρέμβασης της. Από την άλλη, η παρατήρηση του Νίκου στο μάθημα της συναδέλφου αποτέλεσε καθοριστική πηγή για την δημιουργία νέων δραστηριοτήτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως ο εκπαιδευτικός εντόπισε τα λάθη του μετά από την επιτυχημένη παρέμβαση της Μαρίας. Ο ίδιος επηρεάστηκε από απαντήσεις ορισμένων παιδιών μέσα στην τάξη της καθηγήτριας που περιείχαν γεωμετρικές ερμηνείες. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να βελτιώσει το περιεχόμενο των νέων δραστηριοτήτων και να διαμορφώσει ένα νέο ψηφιακό δόμημα με σκοπό την διερευνητική μάθηση που ακολουθούσε η Μαρία γεγονός που δείχνουν έρευνες των (F.Ferrara, D. Pratt, O. Robutti, 2006) μέσω της στάσης τους ότι τα σύστημα συμβόλων της άλγεβρας συνδέονται ισχυρότερα με τα γραφικά και γεωμετρικά πλαίσια.

Κατά την διαδικασία του σχεδιασμού των νέων δραστηριοτήτων, σημαντική πηγή για τον εκπαιδευτικό υπήρξαν οι απαντήσεις των μαθητών του στον πρώτο κύκλο εφαρμογών και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν στην διαδικασία της γενίκευσης. Επιπλέον πηγή υπήρξαν και οι απαντήσεις των μαθητών της Μαρίας και η θετική αντίδραση και ανταπόκριση τους στα ερωτήματα εξαιτίας εκείνου του εμβόλιμου πρώτου ερωτήματος πριν την συμπλήρωση του πίνακα σε συμφωνία με έρευνες των (Sasman και άλλων ερευνητών ,1999) που ισχυρίζονται ότι οι αναπαραστάσεις με πίνακες δεν βοηθούν σημαντικά τις επιδόσεις των μαθητών στη δημιουργία γενικεύσεων.

Έτσι ο σχεδιασμός του ήταν βασισμένος πάνω στις ανάγκες των μαθητών και των δυο τμημάτων. Πιο συγκεκριμένα ο ίδιος έλαβε υπόψιν του την αδυναμία όλων των μαθητών να εκφράσουν αλγεβρικές σχέσεις και εκφράσεις όπως επίσης να ερμηνεύσουν και να αιτιολογήσουν τύπους ακριβώς όπως στις έρευνες των Stacey (1989) και Arzarello (1991). Επιπλέον η συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών και κατ' επέκταση η έτερο -παρατήρηση υπήρξε βασική πηγή για τον εκπαιδευτικό. Παρατηρήθηκε να δομεί την δραστηριότητα με επιμέρους διερευνητικά ερωτήματα, στοιχείο που προήλθε από την αποτίμηση των φύλλων εργασίας της πρώτης εφαρμογής «Δέντρα σε σχηματισμούς». Σε ταύτιση με έρευνες των (Kaput και Blanton 2005) αξίζει να σημειωθεί ότι οι δυνατότητες και οι πολλαπλές επιλογές του ψηφιακού εργαλείου επηρέασαν σημαντικά τον εκπαιδευτικό και υπήρξαν πηγή για τον σχεδιασμό των φύλλων εργασίας και την ενσωμάτωση του λογισμικού στην παρέμβαση του όπως και σε έρευνες των (F.Ferrara, D. Pratt, O. Robutti, 2006).

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adler, J. (2000). Conceptualizing resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 3*: 205-224

Arzarello, F.: 1991, 'Pre-algebraic problem solving', in J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos and D. Fernandes (eds), *Mathematical problem solving and new information technologies* (NATO ASI Series F, Vol. 89, 155-166), Springer-Verlag, Berlin.

Barab, S., MaKinster, J., Scheckler, R. (2001). Designing System Dualities: Building Online Community, Educational Technology Research and Development, 49(4), 71–96

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. In H. Steinbring et al. (Eds.), Language and communication in mathematics classroom. (pp. 65–84). Reston, USA: NCTM.

Bartolini Bussi, M. G. (1995). Analysis of classroom interaction discourse from a Vygotskian perspective. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), Proceedings of the 19th Conference of the International Grout) for the Psychology of Mathematics Education (Vol. I, pp. 95-101). Recife, Brazil.

Blanton, M. (2008). Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice. Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2000). Generalizing and progressively formalizing in a third grade mathematics classroom: Conversations about even and odd numbers. In M. Fernández (Ed.), Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH, ERIC Clearinghouse (pp. 115–119).

Bloedy-Vinner, H. (1994). The analgebraic mode of thinking: The case of parameter. In J. P. da Ponte &]. F. Matos (Eds.), Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 88-95). Lisbon, Portugal.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. In R Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R Lins (Eds.), Perspectives on school algebra (pp. 177-189). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cai, J., Wang, N., Moyer, J. C., Wang, C., & Nie, B. (2011). Longitudinal investigation of the curricular effect: An analysis of student learning outcomes from the LieCal Project in the United States. International Journal of Educational Research, 50(2), 117–136.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school Portsmouth, NH: Heinemann.

Chazan, D. (1996). "Algebra for all students?" Journal of Mathematical Behavior, 15, 455-477.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. Journal for Research in Mathematics Education, 13,16-30.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. New York, NY: Erlbaum.

Demonty, I., Vlassis, J. & Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. Educational Studies in Mathematics, 99(1), 1-19

Edwards, E. 1. (Ed.). (1990). Algebra for everyone. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus: ideas discussed at PME over the last 30 years. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 237–273). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Filloy, E., Rojano, T., & Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. In R. Sutherland, T Rojano. A. Bell, & R. Lins (Eds.), Perspectives on school algebra (pp. 155-176). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Filloy, E., Rojano, T., & Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical algebraic problems. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), Perspectives on school algebra (pp. 155–176). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Fujii, T. (2003): Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B.]. Dougherty, & J. 1'. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 4965). Honolulu, HI.

Geraniou, E., Mavrikis, M., Hoyles, C., & Noss, R. (2011). Students' justification strategies on the equivalence of quasi-algebraic expressions. Proceedings of PME 35, 2, 393–400.

Gueudet, G., Sacristan, A., Soury-Lavergne, S., Trouche, L. (2012). Online paths in mathematics teacher training: new resources and new skills for teacher educators. ZDM, 44:717–731

Gueudet, G., Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? Educational Studies in Mathematics, 71: 199-218

Gueudet, G., Trouche, L. (2011). Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. ZDM, 43(3), 399-411

Gutierrez, S. Pearce, D. Geraniou, E. and Mavrikis, M. (2008). Supporting Reasoning and Problem-Solving in Mathematical Generalization with Dependency Graphs, London Knowledge Lab

Gutierrez, S. Mavrikis, M. Pearce, D. (2008) A Learning Environment for Promoting Structured Algebraic Thinking in Children, London Knowledge Lab, Birbeck College, Institute of Education

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers? Mathematical Thinking and Learning, 1, 59-84.

Iwasaki, H. and Yamaguchi, T.: 1997, 'The cognitive and symbolic analysis of the generalization process: The comparison of algebraic signs with geometric figures', in E. Pehkonen (ed.), Proceedings of the 21st International Conference for Psychology of Mathematics Education. Lahti, Finland, pp. 105–112.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. Journal for Research in Mathematics Education, 38(3),258–288.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 41(2), 169–202.

Kaput, J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), Proceedings of the Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 71-94). Columbus, OR: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. (ERlC Document Reproduction Service No. ED 389 539)

Kieran C. (2006). Research on the learning and teaching of Algebra, in Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future, Gutiurrez, P. Boero (eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. Sense Publishers.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A.Perez (Eds.), Eighth International Congress on Mathematical Education: Selected lectures (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (Vol. 2, pp. 707–762). Greenwich, CT: Information Age Publishing

Kieran, C. (2009). Some Remarks on the Documentational Approach Carolyn Kieran, 1–3.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching. New York: Springer.

Kwon, O.-N., Park, J.-S., & Park, J.-H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. Asia Pacific Education Review, 7, 51–61.

Kynigos, C. (1995). Programming as a means of expressing and exploring ideas in a directive educational system: three case studies. In A. diSessa, C. Hoyles, and R. Noss (Eds.), Computers and Exploratory Learning (NATO ASI Series, 399-420)

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Sträßer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.

Lave, J., Wenger, E. (1991). Situating learning: Legitimate peripheral participation. Cambridge University Press

Lee, L.. & Wheeler, D. (1987). Algebraic thinking in high school students: Their conceptions of generalization and justification (Research report). Montreal, Quebec: Concordia University, Mathematics Department.

Lee, L.: (1996). ‘An initiation into algebraic culture through generalization activities’, in N. Bednarz, C. Kieran and Lee, L. (eds.), Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 87–106.

Lesh, R.A., Cramer, K., Doerr, H.M., Post, T. and Zawojewski, J.S.: 2003, ‘Model development sequences’, in R.A. Lesh and H.M. Doerr (eds.), Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Teaching and Learning, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, pp. 35–58.

Linchevski, L., & Livneh. D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. Educational Studies in Mathematics, 40, 173-196.

Mariotti, M. A., &Bartolini Bussi, M. G. (1998). From drawing to construction: Teachers mediation within the Cabri environment. In A. Olivier and K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd PME International Conference, 1, 180–95.

Mariotti, M. A., & Cerulli, M. (2001). Semiotic mediation for algebra teaching and learning. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th PME International Conference, 3, 343–349.

Mason, J. (2002). Researching your own practice. The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/ Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics

Mason. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 121-142.

Micklewright, J., Jerrim, J., Vignoles, A., Jenkins, A., Allen, R., Llie, S., Bellarbre, E., Barrera, F., & Hein, C. (2014). Teachers in secondary schools: Evidence from TALIS 2013 (Department for Education Research Report DFE-RR302). London: Department for Education.

Moss, J., Beatty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2006). The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in mathematics. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco (April).

Nathan, M. j., Stephens, A. C., Masarik, K, Alibali, M. W., & Koedinger, K R. (2002). Representational fluency in middle school: A classroom study. In D. S. Mewborn et al. (Eds.), Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 464-472). Athens, GA.

Nathan, M.J., & Petrosino, A. (2003). Expert blind spot among preservice teachers. American Educational Research Journal, 40, 905-928.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston, VA: Author

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Orton, A., & Orton J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), Patterns in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 104–120). London: Cassell.

Pearce, D., Poulovassilis, A. (2009). “The Conceptual and Architectur-al Design of a System Supporting Exploratory Learning of Mathematics Generalisation” Proc. Fourth European Conf. Technol-ogy Enhanced Learning (EC-TEL), pp. 22-36.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers’ work and interactions: A collective perspective on resources, their use and transformation. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 45(7), 929–943.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers’ interactions with digital curriculum resources. ZDM - Mathematics Education, 49(5), 799–812.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2015). Prospective mathematics teachers’ learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), Handbook of international research in mathematics education (3rd ed.). Routledge/Taylor & Francis: New York, NY.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), Perspectives on school algebra (pp. 13-36). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics Education Research Journal, 26, 257–277.

Radford, L.: 2000, ‘Signs and meanings in students’ emergent algebraic thinking: A semiotic analysis’, Educational Studies in Mathematics 42, 237–268.

Remillard, J. T. (2013). Examining resources and re-sourcing as insights into teaching. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 45(7), 925–927

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Dordrecht: Springer.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 7(3),* 297 –328

Rivera, F. D. and Becker, J. R. (2005), Figural and Numerical in Algebra, Mathematics teaching in the middle school

Sasman, M. C., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 161-168). Haifa, Israel.

Schleicher, A. (2012). Preparing Teachers and Developing School Leaders for the 21st Century.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. & Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables. In M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 4, pp. 145–152). Utrecht: Freudenthal Institute

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communication to learn more about mathematical thinking. Educational Studies in Mathematics, 46, 13-57.

Stacey, K.: 1989, 'Finding and using patterns in linear generalizing problems', Educational Studies in Mathematics 20, 147–164.

Stacey, K.: 1989, 'Finding and using patterns in linear generalizing problems', Educational Studies in Mathematics 20, 147–164.

Stephens, A. C. (2008). What 'counts' as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? The Journal of Mathematical Behavior, 27(1), 33–47.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). Basics of Qualitative Research. Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory. (Second Edition). London, United Kingdom: SAGE.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning. In K. Leatham (Ed.), Vital directions for research in mathematics education (pp. 57–93). New York: Springer.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education, Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 167-181, Ablex Publishing Corp

Vérillon, P. and Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology of Education 10(1): 77–101.

Vlassis. (2004). Sens et symboles en mathematiques: Etude de l'utilisation du signe a "moins" dans les reductions polynomiales et la resolution d 'equations du premier degre a une inconnue [Sense and symbols in mathematics: A study of the use of the "simplification" sign in polynomial simplifications and the solving of first-degree equations in one unknown]. Liege, Belgium: Universite de Liege, Faculte de Psychologie et des Sciences de l'Education.

Wagner, S., & Kieran, C. (Eds.). (1989). Research issues in the learning and teaching of algebra (Vol. 4 of Research agenda for mathematics education). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues (pp. 73–108). Rotterdam: Sense.

Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning, meaning and identity. Cambridge: Cambridge University Press

Wittmann, M., Flood, V., Black, K. (2013). Algebraic manipulation as motion within a landscape. Educational Studies in Mathematics, 82(2), 169-181.

Yin, R. K. (2003). Case study research: Design and methods (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Yin,R. K. (1994). Case Study Research. Design and Methods (Third Edition). London, United Kingdom: SAGE

Zazkis, R. and Liljedahl, P.: 2001, ‘Exploring multiplicative and additive structure of arithmetic sequence’, in M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), Proceedings of the 25th International Conference for Psychology of Mathematics Education, Utrecht, Netherlands, pp. 439–446.

Zazkis, R. and Liljedahl, P.: 2002, ‘Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields’, Canadian Journal of Mathematics, Science and Technology Education 2(1), 93–120.