



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

« ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΑΓΩΝΙΣΤΙΚΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ »

« Master of Science in Design and Manufacturing of Sports

Vehicle Systems »

« Μηχανική Ανάλυση Άξονα Μετάδοσης Κίνησης από Στρωματικά

Σύνθετα Υλικά Ενισχυμένα με Νανοδομές με τη Μέθοδο των

Πεπερασμένων Στοιχείων »

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Γενικό Τμήμα του Εθνικού και Καποδιστριακού
Πανεπιστημίου Αθηνών ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Σχεδίαση και Κατασκευή
Συστημάτων Αγωνιστικών Οχημάτων από τον

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Α. ΑΝΤΩΝΙΟΥ

Ψαχνά, Ιούνιος 2020

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
« ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΑΓΩΝΙΣΤΙΚΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ »

« Master of Science in Design and Manufacturing of Sports
Vehicle Systems »

« Μηχανική Ανάλυση Άξονα Μετάδοσης Κίνησης από Στρωματικά
Σύνθετα Υλικά Ενισχυμένα με Νανοδομές με τη Μέθοδο των
Πεπερασμένων Στοιχείων »

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Γενικό Τμήμα του Εθνικού και Καποδιστριακού
Πανεπιστημίου Αθηνών ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Σχεδίαση και Κατασκευή
Συστημάτων Αγωνιστικών Οχημάτων από τον

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Α. ΑΝΤΩΝΙΟΥ

Δήλωση Αυθεντικότητας, ζητήματα copyright

Ο μεταπτυχιακός φοιτητής που εκπόνησε την παρούσα διπλωματική εργασία φέρει ολόκληρη την ευθύνη προσδιορισμού της δίκαιης χρήσης του υλικού, η οποία ορίζεται στη βάση των εξής παραγόντων : του σκοπού και χαρακτήρα της χρήσης (μη εμπορικός, μη κερδοσκοπικός , αλλά εκπαιδευτικός-ερευνητικός), της φύσης του υλικού που χρησιμοποιεί (τμήμα του κειμένου, πίνακες, σχήματα, εικόνες κτλ), του ποσοστού και της σημαντικότητας του τμήματος που χρησιμοποιεί σε σχέση με το όλο κείμενο υπό copyright, και των πιθανών συνεπειών της χρήσης αυτής στην αγορά ή την γενικότερη αξία του υπό copyright κειμένου

(Υπογραφή)

.....

Ψαχνά, Ιούνιος 2020



« Μηχανική Ανάλυση Άξονα Μετάδοσης Κίνησης από
Στρωματικά Σύνθετα Υλικά Ενισχυμένα με Νανοδομές με τη
Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων »

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Α. ΑΝΤΩΝΙΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής : Δρ. Στυλιανός Γεωργαντζίνος

« Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την τριμελή εξεταστική επιτροπή η οποία ορίστηκε από την Γενική Συνέλευση του Γενικού Τμήματος του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, σύμφωνα με το νόμο και τον εγκεκριμένο οδηγό σπουδών του ΠΜΣ Σχεδίαση και Κατασκευή Συστημάτων Αγωνιστικών Οχημάτων. Τα μέλη της Επιτροπής ήταν ο κ. Στυλιανός Γεωργαντζίνος, ο κ. Αγαθοκλής Κριμπένης και ο κ. Στυλιανός Μαρκολέφας.

« Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Γενικό Τμήμα του ΕΚΠΑ δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα »

Εξεταστική Επιτροπή Διπλωματικής Εργασίας

(Υπογραφή)

.....

Στυλιανός Γεωργαντζίνος
Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

(Υπογραφή)

.....

Αγαθοκλής Κριμπένης
Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

(Υπογραφή)

.....

Στυλιανός Μαρκολέφας
Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Ψαχνά, Ιούνιος 2020

Περίληψη

Η σύγχρονη βιομηχανία σύνθετων υλικών έχει ιστορία μόλις 30 ετών και ξεκίνησε με την παραγωγή σύνθετων υλικών πολυμερούς μήτρας με ενίσχυση ινών γυαλιού (Glass Fiber Reinforced Polymers, GFRP) και ινών άνθρακα (Carbon Fiber Reinforced Polymers, CFRP). Η αυξανόμενη ερευνητική δραστηριότητα στον κλάδο των σύνθετων υλικών έχει δώσει πολλά υποσχόμενα αποτελέσματα και τα σύνθετα βρίσκουν ολοένα και μεγαλύτερη εφαρμογή στην αεροναυπηγική βιομηχανία και στην αυτοκινητοβιομηχανία. Η ταυτόχρονη ανάπτυξη της νανοτεχνολογίας έχει δώσει νέα προοπτική στη χρήση των σύνθετων υλικών, καθώς τα βελτιωμένα χαρακτηριστικά των νανοδομών μπορούν να αναβαθμίσουν αισθητά τις ήδη σημαντικές μηχανικές ιδιότητες των κλασικών σύνθετων υλικών.

Οι άξονες μετάδοσης κίνησης αποτελούν σημαντικό στοιχείο του συστήματος μετάδοσης ισχύος ενός αγωνιστικού οχήματος. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί άξονες από σύνθετα υλικά οι οποίοι μπορούν να ανταποκριθούν ικανοποιητικά στις λειτουργικές απαιτήσεις με χαμηλότερο βάρος.

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία θα αναπτυχθούν οι κατάλληλες υπολογιστικές διαδικασίες, βασισμένες στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς αξόνων μετάδοσης κίνησης από στρωματικά σύνθετα υλικά ενισχυμένα με νανοδομές.

Λέξεις Κλειδιά

Σύνθετα υλικά, Νανοτεχνολογία, Νανοδομές, Ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων.

Abstract

Contemporary composite materials industry has barely a 30-year history, started with the production of Glass Fiber Reinforced Polymers (GFRP) and Carbon Fiber Reinforced Polymers (CFRP). The dynamic growing research activity on composite materials has given many promising results and composites are on the increase application on areas such as aerospace and automotive industry. The simultaneously development of nanotechnology has given a new perspective on the use of composite materials, as the enhanced characteristics of nanostructures are able to upgrade significantly the already important mechanical properties of classic composite materials.

Drive shafts play an important role in the transmission vehicle system. Over the last years a rapid development has been observed concerning drive shafts developed from composite materials that are able to respond adequately to its functional demands in addition to its low weight.

It is the purpose of this thesis to develop suitable calculating procedures, based on finite element analysis, in order to predict the behavior of automotive drive shafts manufactured from laminated composite materials reinforced with nanostructures.

Keywords

Composite materials, Nanotechnology, Nanostructures, Finite Element Analysis

Πρόλογος

Κατά την ερευνητική δραστηριότητα των τελευταίων ετών στον κλάδο των σύνθετων υλικών, έχουν αναπτυχθεί αριθμητικά μοντέλα τα οποία περιγράφουν τη στρεπτική δυσκαμψία, τις φυσικές συχνότητες και το στρεπτικό λυγισμό αξόνων από σύνθετα υλικά. Στα μοντέλα αυτά η συμπεριφορά της δομής θεωρήθηκε γραμμική και ελαστική.

Παρόλα αυτά, δεν υπάρχει διαθέσιμη κάποια μελέτη θεωρητική ή πειραματική η οποία να αφορά στη χρήση σύνθετων υλικών ενισχυμένων με νανοδομές σε άξονες μετάδοσης κίνησης.

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία η μέθοδος που θα αναπτυχθεί θα λαμβάνει υπόψη, αρχικά τη συμπεριφορά των νανοδομών στη νανοκλίμακα, η οποία επηρεάζεται από το μέγεθος της εκάστοτε νανοδομής και στη συνέχεια θα αποτυπωθεί η μικρομηχανική συμπεριφορά υβριδικής μήτρας ενισχυμένης με νανοδομές. Οι μακροσκοπικές μηχανικές ιδιότητες της υβριδικής μήτρας θα χρησιμοποιηθούν για την μοντελοποίηση υβριδικού σύνθετου μονής διεύθυνσης με συνεχείς ίνες γυαλιού και άνθρακα. Χρησιμοποιώντας τη στρωματική θεωρία σύνθετων υλικών και τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, θα γίνει πρόβλεψη των μηχανικών ιδιοτήτων και της μηχανικής συμπεριφοράς αξόνων μετάδοσης κίνησης από στρωματικά σύνθετα υλικά ενισχυμένων με νανοδομές.

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο και με την ολοκλήρωση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Δρ. Στυλιανό Γεωργαντζίνο, Επίκουρο Καθηγητή του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών για την ευκαιρία που μου έδωσε να εκπονήσω την Παρούσα Μελέτη, καθώς επίσης και για την πολύτιμη συμπαράσταση και καθοδήγηση που μου παρείχε.

Περιεχόμενα

Περίληψη	v
Abstract.....	vi
Πρόλογος	vii
Ευχαριστίες	vii
Περιεχόμενα	viii
Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων	xiii
Κατάλογος Πινάκων/Διαγραμμάτων	xv
Συντομογραφίες & Ακρωνύμια	xvii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Εισαγωγικά Στοιχεία	1
1.1.1 Εισαγωγή στα Σύνθετα Υλικά - Ορισμός	1
1.1.2 Ιστορική Εξέλιξη Σύνθετων Υλικών	2
1.1.3 Ταξινόμηση Σύνθετων Υλικών.....	2
1.1.4 Ανθρακονήματα	3
1.1.5 Νανοςωλήνες Άνθρακα	4
1.1.6 Γραφένιο	5
1.1.7 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ).....	6
1.1.8 Άξονες Μετάδοσης Κίνησης.....	7
1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής Εργασίας	9
1.3 Βιβλιογραφική Επισκόπηση - Σύνθεση.....	9
1.3.1 Ενσωμάτωση Νανοδομών σε Σύνθετα Υλικά	9
1.3.2 Μοντέλα Πρόβλεψης Συμπεριφοράς Νανοςύνθετων Υλικών.....	10
1.3.3 Χρήση Σύνθετων Υλικών σε Άξονες Μετάδοσης Κίνησης	12

1.4	Πρωτότυπα Στοιχεία Διπλωματικής Εργασίας	14
1.5	Δομή Διπλωματικής Εργασίας	14
2	Βασικά Στοιχεία Μηχανικής Ορθοτροπικών Υλικών	15
2.1	Σύστημα Συντεταγμένων Στρώματος.....	16
2.2	Μετατοπίσεις.....	16
2.3	Παραμόρφωση	17
2.4	Τάση.....	18
2.5	Σημειογραφία	19
2.5.1	Εναλλακτική Σημειογραφία	21
2.6	Ισορροπία των Δυνάμεων.....	21
2.7	Συνοριακές Συνθήκες	22
2.7.1	Συνοριακές Συνθήκες Ελεύθερης Επιφανείας	23
2.8	Συνθήκες Συνέχειας.....	23
2.8.1	Συνέχεια Έλξης	23
2.8.2	Συνέχεια Μετατόπισης	24
2.9	Συμβατότητα.....	24
2.10	Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων	25
2.11	Μετασχηματισμός Τάσης.....	26
2.11.1	Μετασχηματισμός Παραμορφώσεων.....	27
2.12	Μετασχηματισμός Καταστατικών Εξισώσεων.....	28
2.13	Τρισδιάστατες Καταστατικές Εξισώσεις	30
2.13.1	Ανισοτροπικό Υλικό	32
2.13.2	Μονοκλινικό Υλικό	32
2.13.3	Ορθοτροπικό Υλικό	34
2.13.4	Εγκάρσιο Ισοτροπικό Υλικό	35
2.13.5	Ισότροπο Υλικό	37
2.14	Σταθερές Μηχανικής.....	38
2.14.1	Ελαστικές Σταθερές.....	42

2.15	Από τις 3D στις Εξισώσεις Τάσεων Επιπέδου	42
2.16	Φαινομενικές Ιδιότητες Στρωματικού Σύνθετου Υλικού	43
3	Στοιχεία Θεωρίας Πεπερασμένων Στοιχείων	45
3.1	Βασική Διαδικασία FEM	45
3.1.1	Διακριτοποίηση	46
3.1.2	Εξισώσεις Στοιχείων	46
3.1.3	Προσέγγιση ενός Στοιχείου	47
3.1.4	Συναρτήσεις Παρεμβολής	48
3.1.5	Εξισώσεις Στοιχείων για ένα Συγκεκριμένο Πρόβλημα	50
3.1.6	Συναρμολόγηση των Εξισώσεων των Στοιχείων	51
3.1.7	Συνοριακές Συνθήκες	52
3.1.8	Λύση των Εξισώσεων	52
3.1.9	Λύση Ενδιάμεσα των Στοιχείων	52
3.1.10	Παραγόμενα Αποτελέσματα	53
3.2	Γενική Διαδικασία Πεπερασμένων Στοιχείων	53
4	Παράμετροι Σχεδιασμού Αξόνων Μετάδοσης Κίνησης από Σύνθετα Υλικά	56
4.1	Λόγος Όγκου V Μήτρας και Ινών Σύνθετου Υλικού	56
4.2	Λόγος Μάζας W Σύνθετου Υλικού	57
4.3	Πυκνότητα ρ Σύνθετου Υλικού	58
4.4	Προσδιορισμός Μέτρων Ελαστικότητας (Κανόνας Ανάμειξης)	58
4.4.1	Προσδιορισμός Μέτρου Ελαστικότητας E_1	59
4.4.2	Προσδιορισμός Μέτρου Ελαστικότητας E_2	60
4.4.3	Προσδιορισμός Λόγου Poisson ν_{12}	62
4.4.4	Προσδιορισμός Μέτρου Διάτμησης G_{12}	63
4.5	Προσδιορισμός Μητρώου Δυσκαμψίας $[Q]$	64
4.6	Προσδιορισμός Μετασχηματισμένων Όρων Δυσκαμψίας $[Q_{ij}]$	65
4.7	Προσδιορισμός Μητρώου Μεμβρανικής Δυσκαμψίας $[A]$	68
4.8	Προσδιορισμός Μέτρων Ελαστικότητας E_x, E_h	69

4.9	Υπολογισμός Κρίσιμου Στρεπτικού Λυγισμού T_{cr}	69
4.10	Υπολογισμός Θεωρητικής Φυσικής Συχνότητας f_n	70
5	Υπολογισμός Μηχανικών Ιδιοτήτων Σύνθετων Υλικών Ενισχυμένων με Νανοδομές.....	70
5.1	Επιστημονικό Μοντέλο Halpin-Tsai.....	71
5.2	Εξίσωση Tsai-Pagano.....	72
5.3	Ημί-Εμπειρικό Μοντέλο Halpin-Tsai.....	72
5.3.1	Διαμήκης Μέτρο Ελαστικότητας E_1	73
5.3.2	Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας E_2	73
5.3.3	Λόγος Poisson ν_{12}	73
5.3.4	Λόγος Poisson ν_{23}	74
5.3.5	Μέτρο Διάτμησης G_{12}	74
5.3.6	Μέτρο Διάτμησης G_{23}	74
6	Μοντελοποίηση Άξονα Μετάδοσης Κίνησης από Σύνθετα Υλικά	75
6.1	Σχεδιαστικές Προδιαγραφές Άξονα.....	75
6.2	Διαστάσεις και Επιλογή Στρωματοποίησης.....	76
6.3	Ιδιότητες Σύνθετου Υλικού.....	77
6.4	Ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων FEA & Συνοριακές Συνθήκες.....	79
6.5	Γραμμική Ελαστική Ανάλυση Στρεπτικού Λυγισμού.....	80
6.6	Ανάλυση Φυσικών Συχνοτήτων.....	81
7	Αποτελέσματα Ανάλυσης Άξονα Μετάδοσης Κίνησης	84
7.1	Προσδιορισμός Ιδιοτήτων Σύνθετων Υλικών με την Προσθήκη Νανοδομών.....	84
7.2	Επαλήθευση Αποτελεσμάτων Μελέτης.....	85
7.2.1	Επαλήθευση Αποτελεσμάτων Φυσικών Συχνοτήτων.....	85
7.2.2	Επαλήθευση Αποτελεσμάτων Στρεπτικού Λυγισμού.....	87
7.3	Επίδραση Μεγέθους Στοιχείου Διακριτοποίησης.....	87
7.4	Επίδραση Προσανατολισμού Ινών Στρώματος στη Φυσική Συχνότητα.....	90
7.5	Επίδραση Προσανατολισμού Ινών Στρώματος στο Στρεπτικό Λυγισμό.....	93
7.6	Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στις Ελαστικές Ιδιότητες του Σύνθετου Υλικού.....	94

7.7	Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στη Φυσική Συχνότητα	94
7.8	Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στο Στρεπτικό Λυγισμό	99
8	Συμπεράσματα	100
8.1	Επίδραση Προσθήκης Νανοσωλήνων Άνθρακα στις Ελαστικές Ιδιότητες του Σύνθετου Υλικού ..	100
8.2	Επαλήθευση Αποτελεσμάτων Μελέτης	102
8.3	Επίδραση Μεγέθους Διακριτοποίησης στη Φυσική Συχνότητα και το Στρεπτικό Λυγισμό	103
8.4	Επίδραση Προσανατολισμού Ινών Στρώματος στη Φυσική Συχνότητα	103
8.5	Επίδραση Προσανατολισμού Ινών Στρώματος στο Στρεπτικό Λυγισμό	104
8.6	Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στη Φυσική Συχνότητα	105
8.7	Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στο Στρεπτικό Λυγισμό	105
	Βιβλιογραφία.....	106

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Σχήμα 2.1: Συνιστώσες μετατόπισης.....	16
Σχήμα 2.2: Ορθή παραμόρφωση.....	17
Σχήμα 2.3: Μηχανική διατμητική τάση.....	19
Σχήμα 2.4: Συνιστώσες τάσης.....	20
Σχήμα 2.5: Συνέχεια πρόσφυσης σε διεπιφάνεια.....	23
Σχήμα 2.6: Λυγισμός κυλινδρικού σωλήνα υπό εξωτερική πίεση.....	24
Σχήμα 2.7: Μετασχηματισμός συντεταγμένων.....	25
Σχήμα 2.8: Ανισοτροπικό υλικό.....	31
Σχήμα 2.9: Μονοκλινικό υλικό.....	32
Σχήμα 2.10: Ορθοτροπικό υλικό.....	33
Σχήμα 2.11: Τυχαία κατανεμημένες φιάλες από γυαλί τύπου E με $200mm$ μαγνητοποίηση.....	36
Σχήμα 2.12: Διαμήκης φόρτιση.....	39
Σχήμα 2.13: Διατμητική φόρτιση.....	40
Σχήμα 3.1: Φυσικό και μαθηματικό μοντέλο (προσέγγιση).....	45
Σχήμα 3.2: Διακριτοποίηση σε στοιχεία.....	46
Σχήμα 3.3: Λειτουργίες γραμμικής παρεμβολής για ράβδο στοιχείων δύο κόμβων.....	48
Σχήμα 3.4: Λειτουργίες παρεμβολής δύο διαστάσεων.....	49
Σχήμα 3.5: Σφάλμα εξακρίβωσης.....	49
Σχήμα 3.6: Συνδεσιμότητα μεταξύ τριών στοιχείων δύο κόμβων.....	50
Σχήμα 4.1: Παραμόρφωση μήτρας και ινών υπό αξονική φόρτιση.....	59
Σχήμα 4.2: Σχηματική απεικόνιση μήτρας και ινών ως παράλληλα ελατήρια.....	60
Σχήμα 4.3: Παραμόρφωση μήτρας και ινών υπό εγκάρσια φόρτιση.....	61

Σχήμα 4.4: Σχηματική απεικόνιση μήτρας και ινών ως ελατήρια σε σειρά.....	62
Σχήμα 4.5: Παραμόρφωση μήτρας και ινών υπό διατμητική φόρτιση.....	63
Σχήμα 4.6: Διάγραμμα μετασχηματισμού των όρων δυσκαμψίας $[Q_{ij}]$	65
Σχήμα 4.7: Γεωμετρία στρωματοποίησης για N στρώσεις.....	68
Σχήμα 4.8: Αξονική και εφαπτομενική διεύθυνση άξονα.....	69
Σχήμα 5.1: Απεικόνιση στρώματος σύνθετου υλικού ενισχυμένου με νανοσωλήνες ..	71
Σχήμα 6.1: Πολυστρωματικός άξονας σύνθετων υλικών και στρωματοποίηση.....	76
Σχήμα 6.2: Ιδιομορφή στρεπτικού λυγισμού άξονα σύνθετων υλικών.....	80
Σχήμα 6.3: Ιδιομορφή 1 ^{ης} καμπτικής φυσικής συχνότητας αμφιαρθρωτού άξονα.....	81

Κατάλογος Πινάκων/Διαγραμμάτων

Πίνακας 2.1: Συμβατική σύμβαση συμβολισμού χρησιμοποιούμενων από λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων FEA.....	20
Πίνακας 6.1: Ιδιότητες σύνθετου υλικού	77
Πίνακας 6.2: Ιδιότητες σύνθετου υλικού	78
Πίνακας 6.3: Ιδιότητες στρώματος μονής διεύθυνσης σύνθετου υλικού	78
Πίνακας 6.4: Ιδιότητες στρώματος μονής διεύθυνσης σύνθετου υλικού	78
Πίνακας 6.5: Ιδιότητες στοιχείων διακριτοποίησης κελύφους.....	79
Πίνακας 6.6: Ιδιομορφές πολυστρωματικού άξονα αμφίπακτης στήριξης	82
Πίνακας 6.7: Ιδιομορφές πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.....	83
Πίνακας 7.1: Ιδιότητες στρώματος μονής διεύθυνσης σύνθετου υλικού υαλονημάτων.....	84
Πίνακας 7.2: Ιδιότητες στρώματος μονής διεύθυνσης σύνθετου υλικού ανθρακονημάτων	85
Πίνακας 7.3: Σύγκριση ιδιοτιμών πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.....	86
Πίνακας 7.4: Σύγκριση ιδιοτιμών πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.....	86
Πίνακας 7.5: Σύγκριση ιδιοτιμών πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.....	86
Πίνακας 7.6: Σύγκριση ιδιοτιμών πολυστρωματικού άξονα αμφίπακτης στήριξης.....	87
Πίνακας 7.7: Σύγκριση ιδιοτιμών πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης	87
Πίνακας 7.8: Σύγκριση τιμών στρεπτικού λυγισμού μεταξύ αναλυτικής και FEA λύσης	87
Διάγραμμα 7.9: Επίδραση μεγέθους στοιχείου l^e (S4R) στη φυσική συχνότητα.....	88
Διάγραμμα 7.10: Επίδραση μεγέθους στοιχείου l^e (S4R) στη φυσική συχνότητα.....	89
Διάγραμμα 7.11: Επίδραση μεγέθους στοιχείου l^e (S4R) στο στρεπτικό λυγισμό.....	89
Πίνακας 7.12: Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στη φυσική συχνότητα.....	90
Διάγραμμα 7.13: Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στη φυσική συχνότητα.....	91
Πίνακας 7.14: Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στη φυσική συχνότητα	91
Διάγραμμα 7.15: Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στη φυσική συχνότητα.....	92
Πίνακας 7.16: Κρίσιμος στρεπτικός λυγισμός πολυστρωματικού άξονα.....	93
Διάγραμμα 7.17: Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στο στρεπτικό λυγισμό.....	94
Πίνακας 7.18: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα άξονα σύνθετων υλικών αμφίπακτης στήριξης.....	95

Διάγραμμα 7.19: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα άξονα σύνθετων υλικών αμφίπακτης στήριξης.....	95
Πίνακας 7.20: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.....	96
Διάγραμμα 7.21: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.....	96
Πίνακας 7.22: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα πολυστρωματικού άξονα.....	97
Διάγραμμα 7.23: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα.....	97
Πίνακας 7.24: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα πολυστρωματικού άξονα.....	98
Διάγραμμα 7.25: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα.....	98
Διάγραμμα 7.26: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στον κρίσιμο στρεπτικό λυγισμό πολυστρωματικού άξονα.....	99
Διάγραμμα 7.27: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στον Κρίσιμο στρεπτικό λυγισμό.....	99
Διάγραμμα 8.1: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στις μηχανικές σταθερές σύνθετου υλικού υαλονημάτων.....	101
Διάγραμμα 8.2: Επίδραση προσθήκης νανοδομών στις μηχανικές σταθερές σύνθετου υλικού ανθρακονημάτων.....	102

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

FEM	Finite Element Method
CAD	Computer-Aided Design

1 Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγικά Στοιχεία

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται βασικές θεωρητικές πληροφορίες για τους άξονες μετάδοσης κίνησης, τα πολυστρωματικά σύνθετα υλικά ανθρακονήματος καθώς επίσης και αναφορές για τις ενισχύσεις των σύνθετων υλικών

1.1.1 Εισαγωγή στα Σύνθετα Υλικά - Ορισμός

Ως σύνθετο υλικό (**composite material**), ορίζεται το υλικό το οποίο αποτελείται από δύο ή περισσότερα συστατικά και συνδυάζονται για να επιτευχθούν ειδικές ιδιότητες και χαρακτηριστικά, που κανένα από τα συμμετέχοντα συστατικά δεν μπορεί από μόνο του να επιτύχει. Τα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται από τη συνύπαρξη δύο τουλάχιστον μακροσκοπικά διακρινομένων συστατικών, από τα οποία το ένα χαρακτηριζόμενο ως **συστατικό ενίσχυσης**, προσδίδει στο σύνθετο βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες. Το δεύτερο συστατικό το οποίο καλείται **μήτρα** είναι χαμηλής πυκνότητας και η συμμετοχή του στο σύνθετο εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων της ενίσχυσης.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα σύνθετου υλικού που χρησιμοποιείται στην οικοδομική αποτελεί το οπλισμένο σκυρόδεμα, το οποίο είναι ενισχυμένο με χαλύβδινες ράβδους. Επίσης ένα άλλο παράδειγμα είναι το Fiberglass, όπου πολυεστερική ρητίνη ενισχύεται με ίνες γυαλιού. Το συγκεκριμένο σύνθετο χρησιμοποιείται στην κατασκευή σκαφών θαλάσσης και αεροσκαφών. Το συστατικό ενίσχυσης μπορεί να έχει τη μορφή ινών, σωματιδίων ή νιφάδων, ενώ το υλικό της μήτρας είναι συνήθως συνεχές. Τα σύνθετα υλικά καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα της βιομηχανίας σε εφαρμογές τεχνολογιών αιχμής και έχουν προσδώσει στους μηχανικούς εναλλακτικούς τρόπους σκέψης, ως προς τις διαδικασίες σχεδίασης, παραγωγής, ελέγχου και συντήρησης. Η χρήση σύνθετων υλικών τείνει να γίνει πιο αποδοτική στις περισσότερες κατασκευές με προεξάρχων παράδειγμα την αεροναυπηγική βιομηχανία, η οποία αναζητά συνεχώς νέους τρόπους μείωσης βάρους των αεροσκαφών με αντικατάσταση των μεταλλικών εξαρτημάτων από σύνθετα υλικά.[1]

1.1.2 Ιστορική Εξέλιξη Σύνθετων Υλικών

Η χρήση των σύνθετων υλικών εντοπίζεται στα βάθη των αιώνων (2000 π.χ.) με την τεχνική ενίσχυσης τούβλων λάσπης με πλέγμα άχυρων στην Αίγυπτο και την Μεσοποταμία. Το άχυρο επίσης χρησιμοποιούταν ως συστατικό ενίσχυσης στην κεραμοποιεία και αγγειοπλαστική. Τόξα σύνθετων υλικών βρέθηκαν στην αρχαία Μογγολία και σε άλλα μέρη στην ευρύτερη Ασία. Υπάρχουν επίσης στοιχεία για την χρήση στρωματικών σύνθετων μετάλλων στην αρχαία Ιαπωνία, όπου οι Σαμουράι κατασκεύαζαν τα φημισμένα ξίφη. Κατά τους ρωμαϊκούς χρόνους η οδοποιία στηρίχθηκε στην ενίσχυση του οδοστρώματος με τρίμματα κεραμιδιών.

Η ανάπτυξη της σύγχρονης βιομηχανίας σύνθετων υλικών έχει επηρεαστεί κατά πολύ από την εξέλιξη στον τομέα των πρώτων υλών. Οι πρώτες ίνες γυαλιού αναπτύχθηκαν το 1930 και περίπου την ίδια χρονιά οι πολυεστερικές ρητίνες. Τότε ξεκίνησε και η εμπορική χρήση του πρώτου σύνθετου υλικού πολυμερούς μήτρας με ενίσχυση ινών γυαλιού (Glass Fiber Reinforced Polymer) το οποίο αρχικά χρησιμοποιήθηκε στην ναυπηγική βιομηχανία 1940. Έκτοτε η εφαρμογή του αναπτύχθηκε ραγδαίως και σε άλλους κλάδους της βιομηχανίας όπως αυτοκινητοβιομηχανία και κατασκευή ηλεκτρικών εξαρτημάτων.

Η επόμενη φάση της εξέλιξης των σύνθετων υλικών σημειώνεται με την ανάπτυξη υψηλότερης αντοχής σύνθετων, με την χρήση ινών άνθρακα, βορίου και αραμιδίου. Την δεκαετία του 1960 έχουμε την ανάπτυξη υψηλής αντοχής ινών γυαλιού και των υψηλής δυσκαμψίας ινών βορίου, ενώ το 1964 διατέθηκαν στην αγορά αρχικά σε μικρές ποσότητες οι ίνες άνθρακα. Επίσης το 1971 διατίθενται στην αγορά οι ίνες αραμιδίου, οι οποίες βρίσκουν ευρύτατη εφαρμογή στα ελαστικά αυτοκινήτων καθώς και σε αεροδιαστημικές και ναυπηγικές κατασκευές.[2]

1.1.3 Ταξινόμηση Σύνθετων Υλικών

Ανάλογα με τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης τα σύνθετα υλικά κατατάσσονται σε:

- Σύνθετα υλικά με ενίσχυση ινών (Fibrous Composites)
- Σύνθετα υλικά με ενίσχυση σωματιδίων (Particulate Composites)
- Στρωματικά σύνθετα υλικά (Laminar Composites)

Ανάλογα με το υλικό της μήτρας τα σύνθετα υλικά κατηγοριοποιούνται σε :

- Οργανικές μήτρες (Polymer matrix composites PMCs)
- Μεταλλικές μήτρες (Metal matrix composites MMCs)
- Κεραμικές μήτρες (Ceramic matrix composites CMCs)
- Μήτρες άνθρακα (Carbon/Carbon composites C/C composites)

Στα σύνθετα υλικά με ενίσχυση ινών, ο προσανατολισμός και η διάταξη των ινών αποτελεί κριτήριο για την ταξινόμηση τους σε μονοδιευθυντικά και πολυδιευθυντικά. Τα πολυδιευθυντικά σύνθετα υλικά διακρίνονται με τη σειρά τους σε υλικά των οποίων οι ίνες είναι σε τυχαίες κατευθύνσεις, έχουν πλέξη ύφανσης, έχουν τρισορθογώνια ύφανση.

Τα σύνθετα υλικά στα οποία το υλικό ενίσχυσης έχει μορφή σωματιδίων σφαιρικού συνήθως σχήματος, μπορούν να καταταγούν σε δύο κατηγορίες με βάση το μέγεθος τους στα σύνθετα με ενίσχυση σωματιδίων μεγάλου μεγέθους (particulate composites) με διάμετρο λίγων μm σε ποσοστό μεγαλύτερο του 25% και η κατά όγκο συγκέντρωσή τους είναι 60-90% και στα σύνθετα με ενίσχυση μικρών σωματιδίων σε διασπορά (dispersion-strengthened metals) σε συγκεντρώσεις μικρότερες του 15%. Η διάμετρος των σωματιδίων ποικίλει μεταξύ 0,01 και 0,1 μm .

Τα στρωματικά σύνθετα υλικά περιλαμβάνουν μια μεγάλη ποικιλία συνδυασμού υλικών, τα οποία διατάσσονται σε διαδοχικές στρώσεις προκειμένου να συνθέσουν το τελικό προϊόν. Στα στρωματικά σύνθετα περιλαμβάνονται τα υλικά με μικρού και μεγάλου πάχους επιστρώματα (thin and thick coatings), τα διμεταλλικά (bimetallics) τα πολυστρωματικά (multilayers) και τα υλικά sandwich.[1][2]

1.1.4 Ανθρακονήματα

Οι ίνες γραφίτη (**Carbon Fibers**) είναι πολύ λεπτά νήματα διαμέτρου 5-15 μm τα οποία αποτελούνται κυρίως από άνθρακα σε ποσοστό 92% του βάρους του. Ο γραφίτης αποτελείται από ανισότροπους πολυκρυσταλλίτες των οποίων η ανισοτροπία εξαρτάται από τις συνθήκες παρασκευής τους.

Αποτέλεσμα του ισχυρού προσανατολισμού των κρυσταλλιτών παράλληλα στο διαμήκη άξονα των ανθρακονημάτων, είναι η υψηλή στιβαρότητα και αντοχή σε θραύση, καθώς και ο χαμηλός συντελεστής θερμικής διαστολής κατά την διεύθυνση αυτή.

Στην παραγωγή ανθρακονημάτων, ως πρώτη ύλη χρησιμοποιούνται ίνες πολυμερούς πολυακρυλονιτρίλιου (PAN). Η παραγωγή ινών γραφίτη από ίνες PAN πραγματοποιείται σε τρία στάδια.

- Οξειδωση υπό τάση, των ινών PAN, στον αέρα και σε χαμηλή θερμοκρασία (100-200°C). Η ταυτόχρονη εφαρμογή τάσης είναι απαραίτητη για την ευθυγράμμιση των αλυσίδων του πολυμερούς.
- Πυρόλυση υπό τάση, σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα και σε θερμοκρασία (1100-1500°C). Οι παραγόμενες ίνες από αυτό το στάδιο χαρακτηρίζονται ως ίνες άνθρακα υψηλής αντοχής με αντοχή που φτάνει τα 3000 MPa.
- Η θέρμανση σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα συνεχίζεται σε θερμοκρασίες (2500-3000°C). Στο στάδιο αυτό πραγματοποιείται γραφίτιωση με ταυτόχρονη ανακρυστάλλωση, η οποία οδηγεί σε ισχυρό προσανατολισμό των κρυσταλλιτών. Οι παραγόμενες ίνες σε αυτό το στάδιο χαρακτηρίζονται ως ίνες άνθρακα υψηλού μέτρου ελαστικότητας που φτάνει τα 400 GPa με διάμετρο 10 μm.

Όσον αφορά το κόστος παραγωγής των ινών γραφίτη είναι δέκα φορές υψηλότερο από το κόστος της παραγωγής των ινών γυαλιού.[1]

1.1.5 Νανοσωλήνες Άνθρακα

Οι νανοσωλήνες άνθρακα (**Carbon Nanotubes CNTs**) περιγράφονται ως επίπεδα γραφενίων, τα οποία τυλίγονται γύρω από έναν άξονα, ώστε να προκύψουν οι ομόκεντροι κύλινδροι γραφίτη ενός ή πολλαπλών τοιχωμάτων. Απομονώθηκαν για πρώτη φορά από τον Sumio Iijima το 1991. Οι νανοσωλήνες άνθρακα με αντοχή (~100-130 GPa) έχουν συγκεντρώσει το ενδιαφέρον των ερευνητών και των επενδυτών σε παγκόσμιο επίπεδο, λόγω των πολυάριθμων θεωρητικών εφαρμογών τους. Εμφανίζουν εξαιρετικά υψηλό μέτρο ελαστικότητας (~1TPa) το οποίο είναι πολύ κοντά σε αυτό του διαμαντιού και 3-4 φορές υψηλότερο από αυτό των ανθρακονημάτων.

Η θερμική αγωγιμότητα είναι περίπου διπλάσια από αυτή του διαμαντιού και η ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι 1000 φορές μεγαλύτερη από αυτή του χαλκού.

Οι νανοσωλήνες μπορεί να είναι μονού τοιχώματος ή πολλαπλών τοιχωμάτων. Οι μονού τοιχώματος έχουν μόνο ένα επίπεδο κυλίνδρου γραφενίων, ενώ οι πολλαπλών τοιχωμάτων έχουν πολλά επίπεδα.

Και οι δύο τύποι νανοσωλήνων είναι κλειστοί στα άκρα τους με πενταμελής δακτυλίους. Οι μονού τοιχώματος έχουν διάμετρο 1~1,4 nm και μήκος 50~100 μm. Οι πολλαπλών τοιχωμάτων έχουν διάμετρο που εξαρτάται από τον αριθμό των τοιχωμάτων και κυμαίνεται από 1,4~100 nm.

Γενικότερα οι μέθοδοι παραγωγής νανοσωλήνων άνθρακα είναι οι εξής : η τεχνική εκκένωσης ηλεκτρικού τόξου (**electric arc discharge**), η τεχνική απόσπασης με λέιζερ (**laser ablation**) και η χημική απόθεση ατμών (**chemical vapor deposition CVD**).

Στις εφαρμογές των νανοσωλήνων άνθρακα περιλαμβάνονται, η αποθήκευση ενέργεια και η δημιουργία συσκευών μετατροπής ενέργειας, τα σύνθετα υλικά υψηλής αντοχής, οι νανοαισθητήρες υψηλής ευαισθησίας, οι ηλεκτρικές διατάξεις, οι μετατροπείς σήματος, η αποθήκευση υδρογόνου, οι κβαντικοί υπολογιστές κ.α.[3]

1.1.6 Γραφένιο

Το γραφένιο (**Graphene**) το οποίο αποτελεί μία αλλοτροπική μορφή άνθρακα, είναι ένας δισδιάστατος κρύσταλλος αποτελούμενος αποκλειστικά από άτομα άνθρακα ισχυρώς συνδεδεμένα μεταξύ τους. Μέχρι το 2004, θεωρούσαμε ότι οι δισδιάστατοι κρύσταλλοι δεν μπορούν να υπάρξουν ελεύθεροι στη φύση λόγω θερμοδυναμικής αστάθειας. Το 2004, στο πανεπιστήμιο του Manchester οι Andre Geim και Kostya Novoselov κατάφεραν να απομονώσουν μονοατομικού στρώματος δισδιάστατο κρυσταλλίτη, ο οποίος φέρει το όνομα γραφένιο. Από τότε έχουν διεξαχθεί πολλές μελέτες επάνω στο υλικό και οι επιστήμονες κατέληξαν ότι το γραφένιο λόγω της μοναδικής του δομής και γεωμετρίας έχει εξαιρετικές φυσικές και χημικές ιδιότητες.

Εμφανίζει υψηλό μέτρο ελαστικότητας (~1TPa). Το σημείο θραύσης του γραφενίου κυμαίνεται στα 130 GPa ενώ του διαμαντιού και των νανοσωλήνων άνθρακα στα 2.8 και 11-63 GPa αντίστοιχα. Επίσης έχει τέλεια θερμική και ηλεκτρική αγωγιμότητα.

Στον δισδιάστατο αυτό κρύσταλλο, οι ισχυροί ενδοατομικοί δεσμοί δεν επιτρέπουν στις θερμικές διακυμάνσεις να μετατοπίσουν τα άτομα στο πλέγμα, ακόμα και σε υψηλές θερμοκρασίες. Το γραφένιο είναι το ιδανικό υλικό για την δημιουργία δομών μηδενικών διαστάσεων (φουλερένια), μονοδιάστατων δομών (νανοσωλήνες άνθρακα) και τρισδιάστατων δομών (γραφίτης).

Αυτές οι ιδιότητες καθιστούν το γραφένιο, να γίνει το υλικό του μέλλοντος, για εφαρμογές στην κβαντική φυσική, μικροηλεκτρονική, ενεργειακή έρευνα, χημική κατάλυση και μηχανική των νανοσύνθετων και βιολογικών.[4]

1.1.7 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ)

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (**Finite Element Method**) αποτελεί στις ημέρες μας ένα πολύ σημαντικό και αναγκαίο εργαλείο για την μηχανική ανάλυση και επίλυση προβλημάτων. Τα λογισμικά ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων όπως ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, χρησιμοποιούνται ευρέως σε όλους τους κλάδους της μηχανικής για την μελέτη συναρμοσμένων, στερεών σωμάτων και ρευστών. Θεωρίες προσαρμοσμένες στον H/Y υπό μορφή μητρώων ή σειρών καθώς και υπολογιστικές μέθοδοι, αναπτύχθηκαν για να επιλύουν προβλήματα που ήταν αδύνατον να λυθούν παλαιότερα.

Στις εφαρμογές της μεθόδου συμπεριλαμβάνονται η επίλυση προβλημάτων της Μηχανικής, Θερμοδυναμικής, Ρευστομηχανικής, Ηλεκτρομαγνητισμού και άλλων.

Για την ανάπτυξη της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων υπάρχουν διάφορες μέθοδοι, με κυριότερες αυτήν της **ενεργειακής μεθόδου**, η οποία βασίζεται στην ολική δυναμική ενέργεια του σώματος και χρησιμοποιείται στα προβλήματα της μεταφοράς θερμότητας, όταν γνωρίζουμε την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας. Σε διαφορετική περίπτωση χρησιμοποιούμε τη **μέθοδο του Galerkin**, η οποία ανήκει στη γενική κατηγορία των Σταθμικών Υπολοίπων και εφαρμόζεται απ' ευθείας στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.

Η λύση πρακτικών μηχανολογικών προβλημάτων, στην ουσία βασίζεται στον καθορισμό ενός συνόλου γραμμικών εξισώσεων, οι οποίες μέσω του ψηφιακού υπολογιστή επιλύονται με μητρικές μεθόδους. Τα φυσικά προβλήματα συνήθως περιλαμβάνουν ένα κατασκευαστικό συναρμολόγημα ή ένα δομικό εξάρτημα το οποίο υποβάλλεται σε συγκεκριμένα φορτία.

Η εξιδανίκευση του φυσικού προβλήματος σε ένα μαθηματικό μοντέλο απαιτεί συγκεκριμένες υποθέσεις, οι οποίες συνδυασμένες μεταξύ τους θα μας οδηγήσουν σε διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες διέπουν το μαθηματικό μοντέλο. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων επιλύει το μαθηματικό μοντέλο.

Ο τρόπος επιλύσεων προβλημάτων με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων περιλαμβάνει : αρχικά την σχεδίαση της κατασκευής και κατόπιν τον διαχωρισμό της σε μικρά γεωμετρικά σχήματα (πεπερασμένα στοιχεία). Οι ιδιότητες του υλικού και οι εξισώσεις του διέπουν το υλικό, εξετάζονται στα πεπερασμένα στοιχεία σαν συνάρτηση των αγνώστων μετατοπίσεων στις κορυφές του πεπερασμένου στοιχείου (μέθοδος μετατοπίσεων). Λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες καθώς και τα φορτία, καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής. Η λύση του συστήματος των εξισώσεων ως προς τους αγνώστους, οι οποίοι είναι οι κομβικές μετατοπίσεις, είναι η ζητούμενη προσεγγιστική λύση. Γνωστών των κομβικών μετατοπίσεων, υπολογίζονται οι τάσεις, οι παραμορφώσεις και οι αντιδράσεις στήριξης.[5]

1.1.8 Άξονες Μετάδοσης Κίνησης

Τα τελευταία χρόνια η έρευνα στον τομέα της τεχνολογίας αξόνων μετάδοσης κίνησης έχει βελτιώσει κατά πολύ την απόδοση των αγωνιστικών οχημάτων. Η σχεδιαστικές και κατασκευαστικές μέθοδοι των αξόνων συμβαδίζουν πλήρως με τις συνεχώς αυξανόμενες απαιτήσεις των κατασκευαστών. Ισχυρότερες μηχανές με υψηλότερη στρεπτική ροπή, νέα πεδία εφαρμογής με αυξημένες τάσεις λειτουργίας, όπως τα οχήματα εκτός δρόμου και οχήματα βαρέως τύπου, βελτιωμένα κατασκευαστικά υλικά, νέες κατασκευαστικές μέθοδοι και προχωρημένες θεωρητικές και πειραματικές μελέτες, έχουν επιφέρει εντελώς νέες κατασκευαστικές προδιαγραφές στους άξονες μετάδοσης κίνησης ως μηχανολογικό εξάρτημα.

Ο άξονας μετάδοσης κίνησης είναι ο συνδετικός κρίκος των κυριοτέρων τμημάτων του συστήματος κίνησης ενός οχήματος, τα οποία λόγω της απόστασης δεν μπορούν να συνεργαστούν. Χρησιμοποιείται για να μεταδώσει την στρεπτική ροπή που λαμβάνει από τον κινητήρα, στον εμπρόσθιο άξονα του εμπροσθοκίνητου οχήματος, ή στο διαφορικό του οπισθοκίνητου αυτοκινήτου.

Ο κινητήριος άξονας είναι στην πραγματικότητα ένα συναρμολόγημα που αποτελείται από έναν ή περισσότερους σωληνοειδής άξονες συνδεδεμένους με κατάλληλους συνδέσμου. Οι σύνδεσμοι μπορούν να είναι τύπου Cardan, σταθερής ταχύτητας ή εύκαμπτοι σύνδεσμοι. Ο αριθμός των αξόνων και των συνδέσμων εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ του κιβωτίου ταχυτήτων και του άξονα κίνησης ή από τον διαθέσιμο χώρο κάτω από την καμπίνα του οχήματος.

Στα οπισθοκίνητα οχήματα όπου η κινητήρια μηχανή βρίσκεται στο εμπρόσθιο μέρος, απαιτείται μία μεγάλου μήκους άτρακτος για να μεταφέρει την ισχύς κατά μήκος του οχήματος. Αυτή η κινητήρια άτρακτος μεταφέρει την ισχύς από το κιβώτιο ταχυτήτων στο διαφορικό και μέσω αυτού στα πίσω ημιαξόνια. Η άτρακτος μπορεί να είναι εμφανής ή να περικλείεται μέσα σε έναν κλειστό διάτρητο σωλήνα. Επειδή τα ημιαξόνια αναρτώνται από ελατήρια απόσβεσης, το πίσω μέρος του κινητήριου άξονα μετακινείται άνω και κάτω. Αυτή η γωνιακή μετατόπιση του άξονα, παραλαμβάνεται από έναν ή περισσότερους συνδέσμους Cardan.

Ο πιο ευρέως χρησιμοποιούμενος είναι αυτός με δύο ομφαλούς και έναν σταυρό. Αυτό ο τύπος σύνδεσμου μεταδίδει ισχύς μέσω μιας γωνίας 6 ή 8 μοιρών. Σε περιπτώσεις όπου ο άξονας μεταφοράς κίνησης δεν είναι εμφανής, ένας σύνδεσμος Cardan τοποθετείται μεταξύ του κύριου άξονα και του κιβωτίου ταχυτήτων. Όταν η άτρακτος είναι εμφανής, οι σύνδεσμοι τοποθετούνται σε κάθε άκρο του κινητήριου άξονα.

Τα εμπροσθοκίνητα αυτοκίνητα έχουν το κιβώτιο ταχυτήτων και τον κινητήρα τοποθετημένα εγκάρσια στο όχημα. Ο τελικός κινητήριος άξονας αποτελεί αναπόσπαστο μέρος του συστήματος μετάδοσης κίνησης, ο οποίος μέσω του συνδέσμου σταθερής ταχύτητας, μεταδίδει την κίνηση στους εμπρόσθιους τροχούς.

Συμπερασματικά, καταλαβαίνουμε ότι η ισχύς του κινητήρα υποβάλλει τον άξονα μετάδοσης κίνησης σε υψηλές στρεπτικές και διατμητικές τάσεις.[6][7]

1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής Εργασίας

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία θα αναπτυχθούν οι κατάλληλες υπολογιστικές διαδικασίες, βασισμένες στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, για την μηχανική ανάλυση και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς αξόνων μετάδοσης κίνησης από Στρωματικά Σύνθετα Υλικά Ενισχυμένα με Νανοδομές. Η αποσαφήνιση της συμπεριφοράς των αξόνων και η πρόβλεψη των μηχανικών ιδιοτήτων σύνθετων υλικών που περιέχουν νανοδομές χρήζουν σπουδαιότητας, καθώς μπορούν να αναβαθμίσουν τις ιδιότητες των κλασικών σύνθετων υλικών και κατά επέκταση να βελτιώσουν τα χαρακτηριστικά αξόνων μετάδοσης κίνησης για αγωνιστικά οχήματα.

Στην παρούσα εργασία αναλύουμε το μοντέλο διάτρητου άξονα κυκλικής διατομής, με ενισχυμένα πολυστρωματικά σύνθετα υλικά ανθρακονήματος και υαλονήματος, τα οποία διαφέρουν ως προς τον όγκο της νανοδομής που περιέχουν. Το μοντέλο ενισχύεται με νανοσωλήνες άνθρακα και οι σταθερές μηχανικής υπολογίζονται θεωρητικά με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η στρωματοποίηση του μοντέλου έχει την διάταξη [+45/-45/0/90]. Η αριθμητική ανάλυση (FEA) γίνεται στο Abaqus CAE.

1.3 Βιβλιογραφική Επισκόπηση - Σύνθεση

Σε αυτή την ενότητα πραγματοποιείται μία βιβλιογραφική επισκόπηση της πρόσφατης βιβλιογραφίας σε ότι αφορά την ενσωμάτωση νανοσωλήνων άνθρακα σε σύνθετα υλικά και τον προσδιορισμό των επιδράσεων στις ιδιότητες και την αντοχή τους.

1.3.1 Ενσωμάτωση Νανοδομών σε Σύνθετα Υλικά

Λόγω της υψηλής αντοχής και αναλογίας δυσκαμψίας προς βάρος, σύνθετα υλικά πολυμερών μητρών χρησιμοποιούνται σε πολλούς κλάδους όπως η αυτοκινητοβιομηχανία, η αεροδιαστημική, ο κατασκευαστικός τομέας, τα ιατρικά όργανα και ο στρατός. Για περαιτέρω βελτίωση της μηχανικής αντοχής των σύνθετων υλικών, νανοσωλήνες άνθρακα ενσωματώνονται στην μήτρα πολυμερών, δεδομένου ότι είναι θεωρητικά από τα πιο ισχυρά και δύσκαμπτα υλικά[10]. Ο Shahbaz μελέτησε την επίδραση των νανοσωλήνων άνθρακα σε υβριδικό σύνθετο υλικό από υαλονήματα και ανθρακονήματα.

Δυο διαφορετικές τεχνικές, μεταμόσχευση και διασκορπισμός χρησιμοποιήθηκαν για να εισάγουν τους νανοσωλήνες άνθρακα στο υβριδικό σύνθετο υλικό. Αξιοσημείωτη είναι η βελτίωση που παρατηρείται στην καμπτική αντοχή των σύνθετων υλικών με την ενσωμάτωση νανοσωλήνων άνθρακα με τις προαναφερθείσες τεχνικές. Ο Tüzemen κ.α. μελέτησαν την επίδραση της προσθήκης νάνο-αργίλου, νανοσωλήνων άνθρακα και ένα υβρίδιο των δύο, σε καμπτικές και εφελκυστικές αντοχές και αντοχή σε απορρόφηση ενέργειας σε πλάκες σύνθετου υλικού. Σε σύγκριση με το μη ενισχυμένο δείγμα, το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη και εφελκυσμό, βελτιώθηκαν κατά 35.7% και 15.1% αντίστοιχα, μετά την προσθήκη νανοσωλήνων άνθρακα κατά 0.3 wt%. Επιπροσθέτως, τα αποτελέσματα έδειξαν πως η προσθήκη 0.3 wt% νανοσωλήνων άνθρακα βελτίωσαν την αντοχή κάμψης και εφελκυσμού κατά 54% και 27.4% αντίστοιχως. Ο Eskizeybek κατασκεύασε νάνο-σύνθετο υλικό από υαλονήματα με εποξική ρητίνη, στο οποίο οι νανοσωλήνες άνθρακα είναι χημικά συνδεδεμένοι με τις ίνες γυαλιού. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, η αντοχή στον εφελκυσμό μειώνεται ελαχίστως, ενώ η αντοχή στην κάμψη αυξάνεται, στην περίπτωση που οι νανοσωλήνες άνθρακα είναι χημικά συνδεδεμένοι στις ίνες γυαλιού.

Ο Gouda κ.α. ανέπτυξαν ένα υβριδικό πολυμερές σύνθετο υλικό ενισχυμένο με ίνες γυαλιού, ίνες άνθρακα και πολυμερής εποξική ρητίνη σε αναλογία 9:12.5:78.5, 13.5:18.75:67.75 και 18:25:57% του όγκου, και χρησιμοποίησαν νανοσωλήνες άνθρακα (0.2 wt%) και γραφένιο (0.2 wt%) ως υλικά πλήρωσης. Τα αποτελέσματα των μηχανικών δοκιμών έδειξαν ότι τα νανοσωματίδια γραφενίου έχουν σημαντική επιρροή στην βελτίωση του μέτρου ελαστικότητας του εφελκυσμού, και της σκληρότητας του συστήματος του σύνθετου υλικού, ενώ οι πολύτοιχοι νανοσωλήνες άνθρακα έχουν σημαντική επίδραση στο μέτρο κάμψης και την συμπεριφορά κατά την κρούση της κατασκευής.[9]

1.3.2 Μοντέλα Πρόβλεψης Συμπεριφοράς Νανοςύνθετων Υλικών

Εκτός από τις προαναφερθείσες μελέτες που περιγράφηκαν προηγουμένως, μερικοί μελετητές διεξήγαγαν θεωρητικές και αριθμητικές μελέτες για τον προσδιορισμό της επίδρασης των νανοσωλήνων άνθρακα στις ιδιότητες και την αντοχή των σύνθετων υλικών. Ο Aghdam κ.α. πρότειναν μια νέα μικρομηχανική προσέγγιση για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας τυχαίου προσανατολισμού και κατανομής κυματιστών νανοσωλήνων άνθρακα ενισχυμένου πολυμερούς νανοςύνθετου υλικού.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προτεινόμενη μέθοδος για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας του νανოსύνθετου υλικού νανοσωλήνων άνθρακα και εποξικής ρητίνης έχει καλή ακρίβεια σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα που συγκρίθηκαν. Οι Thostenson και Chou, εστίασαν στην ανάπτυξη ενός τρόπου κατανόησης της επίδρασης των νανοσωλήνων άνθρακα στις ελαστικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών. Τροποποίησαν την μικρομηχανική προσέγγιση που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση σύνθετων υλικών μικρό-ινών, για να προβλέψουν το μέτρο ελαστικότητας του νανοσύνθετου υλικού. Τα αποτελέσματα απέδειξαν ότι η διάμετρος του νανοσωλήνα έχει την μεγαλύτερη επίδραση στις ελαστικές ιδιότητες των νανοσύνθετων υλικών. Ο Pan κ.α. ανέπτυξαν ένα νέο επιστημονικό μοντέλο στο οποίο οι κυματοειδείς νανοσωλήνες αντικαταστάθηκαν με δραστικές ίνες. Στην μελέτη, εξετάστηκε η επίδραση της κυματώδους μορφής και της συσσώρευσης των ινών, στο μέτρο ελαστικότητας του ενισχυμένου σύνθετου υλικού. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η κυμάτωση και η συσσώρευση των ινών, επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την δυσκαμψία των σύνθετων υλικών.

Οι Mehar και Panda μελέτησαν την παραμόρφωσης πλάκας σύνθετου υλικού ενισχυμένης με νανοσωλήνες άνθρακα με αριθμητική μέθοδο, πειραματικά και θεωρητικά. Οι συγγραφείς μελέτησαν επίσης την επίδραση διαφόρων παραμέτρων, όπως ο λόγος πλάτους-ύψους, η αναλογία πάχους και τους περιορισμούς των ακρών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του ελέγχου κάμψης, το μέτρο κάμψης αυξάνεται με την προσθήκη νανοσωλήνων άνθρακα στην δομή έως και 0.2 wt και μειώνεται για ανώτερους λόγους βάρους. Τα φαινόμενα αυτά συμβαίνουν λόγω της συσσώρευσης των νανοσωλήνων άνθρακα εντός της μήτρας του σύνθετου. Με την μέθοδο Mori-Tanaka, το μέτρο ελαστικότητας για τυχαίου προσανατολισμού πολύτοιχων νανοσωλήνων άνθρακα παρουσίασε αύξηση όσο το ποσοστό των νανοσωλήνων αυξανόταν.

Όπως δείξαμε προηγουμένως, μέχρι σήμερα έχει πραγματοποιηθεί ένας αρκετά μεγάλος αριθμός μελετών, πειραματικά, αναλυτικά και αριθμητικά για τον προσδιορισμό μηχανικών ιδιοτήτων σύνθετων υλικών, ενισχυμένων με νανοδομές. Ωστόσο, η συμφωνία των δεδομένων με τα αριθμητικά αποτελέσματα παραμένει ένα ζήτημα προς εξερεύνηση.[9]

1.3.3 Χρήση Σύνθετων Υλικών σε Άξονες Μετάδοσης Κίνησης

Η αυξανόμενη ερευνητική δραστηριότητα στον κλάδο των σύνθετων υλικών έχει δώσει πολλά υποσχόμενα αποτελέσματα και τα σύνθετα υλικά βρίσκουν ολοένα και μεγαλύτερη εφαρμογή στην αυτοκινητοβιομηχανία και ιδιαίτερος στους άξονες μετάδοσης κίνησης. Έχει αποδειχθεί ότι άτρακτοι από σύνθετα υλικά μπορούν να επιλύσουν πολλά από τα προβλήματα που δημιουργούνται στο σύστημα μετάδοσης κίνησης, από τη χρήση συμβατικών μεταλλικών αξόνων και τα οποία σχετίζονται με το αυξημένο βάρος, την χαμηλή ταχύτητα περιστροφής και τα δονητικά φαινόμενα που δημιουργούνται κατά την λειτουργία τους. Λύσεις όπως η χρήση τροχαλιών, αποσβεστήρων κραδασμών, πολλαπλών αξόνων με ρουλεμάν, συζευκτών και υποστηρίξεων κάτω από την καμπίνα του οχήματος, έχει αποδειχθεί ότι έχουν περιορισμένη επιτυχία στην αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων.

Επίσης, σε περιπτώσεις όπου το μήκος ενός μεταλλικού άξονα μετάδοσης κίνησης είναι μεγαλύτερο από 1500 mm, η κατασκευή του γίνεται από δύο τεμάχια, για να αυξηθεί η φυσική του συχνότητα.[7]

Η φύση των σύνθετων υλικών, με το υψηλό μέτρο ελαστικότητας, το οποίο στο carbon/epoxy είναι πάνω από τέσσερις φορές μεγαλύτερο από αυτό του αλουμινίου, μας επιτρέπει την αντικατάσταση των δύο τεμαχίων του μεταλλικού άξονα, από ένα μοναδικό εξάρτημα σύνθετου υλικού, το οποίο συντονίζεται σε μεγαλύτερη περιστροφική ταχύτητα και εν τέλει διατηρεί ένα υψηλότερο περιθώριο ασφάλειας.

Ένας σύνθετου υλικού άξονας προσφέρει τέλεια απόσβεση κραδασμών, άνεση στην καμπίνα κατά την οδήγηση, μειωμένες φθορές εξαρτημάτων του συστήματος κίνησης και αυξημένο κράτημα ελαστικών. Επιπλέον, η χρήση μοναδιαίου στρεπτικού σωλήνα, μειώνει κατά πολύ τον χρόνο συναρμολόγησης, καθώς επίσης τα έξοδα συντήρησης ενός οχήματος.

Τα σύνθετα υλικά είναι ευρέως διαδεδομένα στην αεροναυπηγική και στους μηχανολογικούς εξοπλισμούς. Την δεκαετία του 1960 εισήλθαν και στην αυτοκινητοβιομηχανία για την κατασκευή εξαρτημάτων κινητήρων οχημάτων κυρίως, λόγω του χαμηλού τους βάρους. Το 1985 οι Glaenzer Spicer, Uni-Cardan / GKN Lohmar και Nordiska Kardan AB (Sweden) ανέπτυξαν τους πρώτους άξονες μετάδοσης κίνησης για οχήματα, κατασκευασμένους από ίνες άνθρακα και γυαλιού σε συνδυασμό με ρητίνη.

Η στρεπτική τους ικανότητα έφτασε πάνω από τα 25.000 Nm, με την μέγιστη να φτάνει τα 32.500 Nm, για μήκη άξονα από 0,5 m έως 2,6 m και διάμετρο 190 mm. Ελέγχθηκαν σε περιστροφικές ταχύτητες από 2.500 έως 8.000 rpm και θερμοκρασίες από -50 έως +140 Celsius.

Η GKN Technology στην Αγγλία ανέπτυξε έναν περιστροφικό δίσκο σύνδεσης από ενισχυμένη ρητίνη πολυαμιδίου και ίνες γυαλιού, για να τον ενώσει με τα άκρα του άξονα και εν συνεχεία με τα υπόλοιπα συστήματα. Αυτού του είδους οι δίσκοι με διάμετρο 140 mm και πάχος 5mm ζυγίζουν περί τα 50 gr και σε συνδυασμό με τον σύνθετου υλικού άξονα, έχουμε ένα πολύ ελαφρύ μηχανολογικό κατασκεύασμα.

Στα πιο ευρέως ανεπτυγμένα σύνθετα υλικά συγκαταλέγονται οι ίνες γραφίτη, άνθρακα, Kevlar και γυαλιού, σε συνδυασμό με θερμοσκληρυνόμενες ρητίνες, λόγω της υψηλής ειδικής αντοχής (αντοχή / πυκνότητα) και της υψηλής ειδικής δυσκαμψίας (δυσκαμψία / πυκνότητα) και είναι κατάλληλα για την κατασκευή μεγάλου μήκους αξόνων μεταφοράς κίνησης.

Τα ανθρακονήματα χρησιμοποιούνται περισσότερο συχνά από τα Kevlar και τα υαλονήματα στους άξονες, λόγω της υψηλής ειδικής δυσκαμψίας και ειδικής αντοχής, της χαμηλής θερμικής διαστολής και της υψηλής αντοχής στην κόπωση, χαρακτηριστικά τα οποία κάνουν τα ανθρακονήματα ιδανικές ίνες για άξονες μετάδοσης κίνησης. Η εποξική και πολυεστερική ρητίνη χρησιμοποιείται στις περισσότερες περιπτώσεις όπου απαιτούνται καλύτερες μηχανικές ιδιότητες.

Ένας κινητήριος άξονας μπορεί να είναι μασίφ κύλινδρος ή κοίλος σωληνοειδής. Οι κοίλοι άξονες είναι διαδεδομένοι ως προς την χρήση τους διότι έχουν καλύτερη μηχανική αντοχή σε σχέση με το βάρος τους. Στους συμπαγείς άξονες η κατανομή της τάσης ξεκινάει από το κέντρο με τιμή μηδέν και μεγιστοποιείται στην εξωτερική διάμετρο. Στην περίπτωση ενός διάτρητου άξονα η διακύμανση της τάσης είναι πολύ μικρότερη. Το υλικό που βρίσκεται στο κέντρο του άξονα, δεν είναι πλήρως αξιοποιήσιμο στους μασίφ κυλίνδρους, για αυτό το λόγω οι κοίλοι άξονες θεωρούνται καλύτεροι.

Συνοψίζοντας, μπορούν να αναφερθούν τα εξής πλεονεκτήματα για τους άξονες μετάδοσης κίνησης από σύνθετα υλικά :

Δεν οξειδώνονται και δεν έχουν ευαισθησία από την επαφή τους με καύσιμα και λιπαντικά, δεν χρειάζονται συντήρηση, απορροφούν τους κραδασμούς του συστήματος κίνησης, έχουν πολύ καλή δυνατότητα φόρτισης, παραμένουν διαστασιολογικά σταθεροί κατά την λειτουργία τους και δεν δημιουργούν θόρυβο στην καμπίνα του οχήματος.[6]

1.4 Πρωτότυπα Στοιχεία Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα Διπλωματική εργασία προβαίνει στην ανάλυση του υπολογιστικού μοντέλου των (Mohamed A. Badie, E. Mahdi, A.M.S. Hamouda) [8] και στοχεύει στα ακόλουθα :

1. Ανάλυση του υπολογιστικού μοντέλου των (Mohamed A. Badie, E. Mahdi, A.M.S. Hamouda) και ανάπτυξη του στο λογισμικό Abaqus CAE.
2. Επαλήθευση αποτελεσμάτων μελέτης (Mohamed A. Badie, E. Mahdi, A.M.S. Hamouda) [8]
3. Εφαρμογή του υπολογιστικού μοντέλου των (Mohamed A. Badie, E. Mahdi, A.M.S. Hamouda) σε πολυστρωματικό άξονα σύνθετου υλικού, ενισχυμένου με νανοσωλήνων άνθρακα.
4. Μελέτη συμπεριφοράς φυσικής συχνότητας και στρεπτικού λυγισμού του πολυστρωματικό άξονα σύνθετου υλικού, με την χρήση των νανοδομών στη μήτρα του σύνθετου.

1.5 Δομή Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει δομηθεί ως ακολούθως:

1. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αρχικά το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται για την κατανόηση του θέματος που πραγματεύεται η Διπλωματική Εργασία. Επίσης πραγματοποιείται μια βιβλιογραφική επισκόπηση της πρόσφατης βιβλιογραφίας σε ότι αφορά την ενσωμάτωση νανοσωλήνων άνθρακα σε σύνθετα υλικά, τον προσδιορισμό των επιδράσεων στις ιδιότητες και την αντοχή τους και τις τεχνικές τροποποιήσεων των μηχανικών ιδιοτήτων τους.

2. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της μηχανικής, προσαρμοσμένες στα σύνθετα υλικά, όπου μέσα από την μηχανική του συνεχούς υλικού περιγράφεται η τάση και η παραμόρφωση σε ένα ορθοτροπικό υλικό.
3. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων (FEM), τα οποία είναι απαραίτητα για την αποτελεσματική χρήση των λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων.
4. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικοί παράμετροι σχεδιασμού αξόνων μετάδοσης κίνησης από σύνθετα υλικά. Γίνεται εκτενής αναφορά στον τρόπο προσδιορισμού των μηχανικών ιδιοτήτων, όπως μέτρο ελαστικότητας, λόγος poisson, μέτρο διάτμησης και αναλύεται η μέθοδος προσδιορισμού των μητρώων δυσκαμψίας. Επίσης γίνεται αναφορά στον τρόπο υπολογισμού του κρίσιμου στρεπτικού λυγισμού και της θεωρητικής φυσικής συχνότητας.
5. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού των μηχανικών ιδιοτήτων στρωματικών σύνθετων υλικών ενισχυμένων με νανοδομές με την μέθοδο Halpin-Tsai και Tsai-Pagano.
6. Στο κεφάλαιο 6 γίνεται η παρουσίαση του τρόπου μοντελοποίησης αξόνων μετάδοσης κίνησης από σύνθετα υλικά στο λογισμικό Abaqus CAE.
7. Στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης του άξονα μετάδοσης κίνησης, με τους θεωρητικούς υπολογισμούς και με τα αριθμητικά αποτελέσματα από το πρόγραμμα ανάλυσης των πεπερασμένων στοιχείων.
8. Στο κεφάλαιο 8 γίνεται αναφορά στα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την μελέτη του άξονα μετάδοσης κίνησης για τα φαινόμενα της φυσικής συχνότητας και του στρεπτικού λυγισμού.

2 Βασικά Στοιχεία Μηχανικής Ορθοτροπικών Υλικών

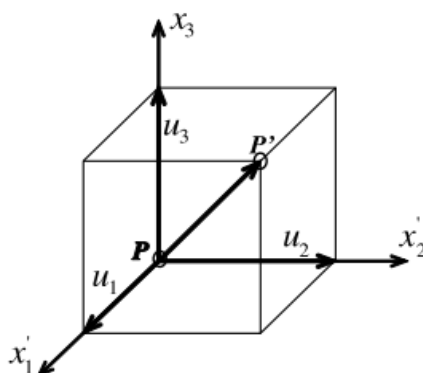
Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες της μηχανικής, προσαρμοσμένες στα σύνθετα υλικά, συμπεριλαμβανομένων των μετασχηματισμών συντεταγμένων, εξισώσεις κ.α. Η μηχανική του συνεχούς υλικού χρησιμοποιείται για να περιγράψει την παραμόρφωση (deformation) και την (τάση) stress σε ένα ορθοτροπικό υλικό. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων απαιτούνται για να εκφράσουν ποσότητες όπως τάση, παραμόρφωση (strain) και δυσκαμψία στις συντεταγμένες στρωμάτων.

2.1 Σύστημα Συντεταγμένων Στρώματος

Ένα ενιαίο στρώμα σύνθετου υλικού ενισχυμένο με ίνες συμπεριφέρεται ως ορθοτροπικό υλικό. Δηλαδή, το υλικό έχει τρία αμοιβαία κάθετα επίπεδα συμμετρίας. Η τομή αυτών των τριών επιπέδων ορίζει τρεις άξονες που συμπίπτουν με την ίνα κατεύθυνσης (x'_1), την συντεταγμένη πάχους (x'_3) και μία τρίτη κατεύθυνση $x'_2=x_3$ x'_1 κάθετα προς τα άλλα δύο.

2.2 Μετατοπίσεις

Κάθε σημείο ενός σώματος μπορεί να μετατοπιστεί και να περιστραφεί ως ένα άκαμπτο σώμα, καθώς επίσης και να παραμορφώνεται για να καταλάβει μια νέα θέση κάτω από τη δράση κάποιων δυνάμεων. Οι μετατοπίσεις u_i οποιουδήποτε σημείου P στο σώμα (Σχήμα 2.1) ορίζονται από τον φορέα u_i (σε ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων) υπό τον όρο των τριών συνιστωσών ως $u_i = (u_1, u_2, u_3)$.



Σχήμα 2.1: Συνιστώσες μετατόπισης.

Η εναλλακτική ένδειξη για τις μετατοπίσεις είναι $u_i = (u, v, w)$. Η μετατόπιση είναι ένα διάνυσμα ή ένας τανυστής ποσότητα πρώτης τάξης.

$$\mathbf{u} = u_i = (u_1, u_2, u_3) \quad : \quad i = 1 \dots 3 \quad (2.1)$$

όπου η έντονη γραφή (π.χ., \mathbf{u}) υποδηλώνει έναν τανυστή γραμμένο σε τεντωτική σημείωση, στην περίπτωση αυτή είναι ένα διάνυσμα.

2.3 Παραμόρφωση

Τα συστατικά τανυστή παραμόρφωσης Lagrange για γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση είναι:

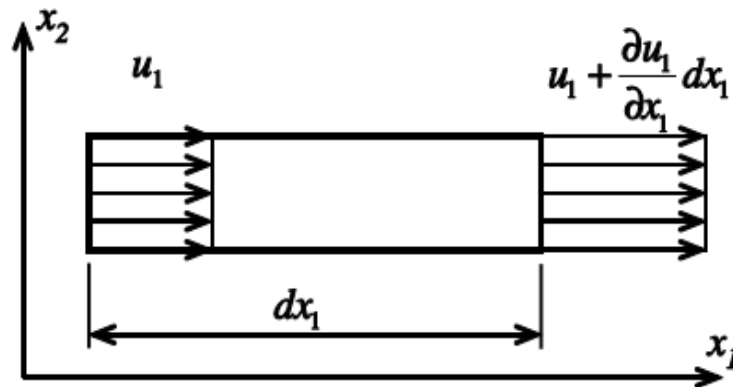
$$L_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{r,i}u_{r,j}) \quad (2.2)$$

όπου

$$u_{i,j} = \frac{du_i}{dx_j} \quad (2.3)$$

Αν οι διαβαθμίσεις των μετατοπίσεων είναι τόσο μικρές ώστε τα προϊόντα μερικών παραγώγων του u_i είναι αμελητέα σε σύγκριση με τους γραμμικούς (πρώτης τάξης) παράγωγους όρους, τότε ο τανυστής παραμόρφωσης ε_{ij} δίνεται από:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.2: Ορθή παραμόρφωση

Η έντονη γραφή υποδηλώνει έναν τανυστή, η σειρά του οποίου εμπεριέχεται στα συμφραζόμενα. Για παράδειγμα το ε είναι μία μονοδιάστατη παραμόρφωση και το ε είναι ο τανυστής παραμόρφωσης δεύτερης τάξης. Η ένδειξη ευρετηρίου (π.χ., $\varepsilon_{i,j}$) χρησιμοποιείτε ευρέως και η ονομασία του τανυστή των μεταβλητών (κλιμακωτός, διάνυσμα, δεύτερη σειρά κ.ο.κ.) είναι εύκολα κατανοητός από τα συμφραζόμενα.

Από τον ορισμό (2.4), η παραμόρφωση είναι δεύτερης τάξης, με συμμετρικό τανυστή (δηλ. $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{j,i}$). Σε εκτεταμένη μορφή οι παραμορφώσεις καθορίζονται από:

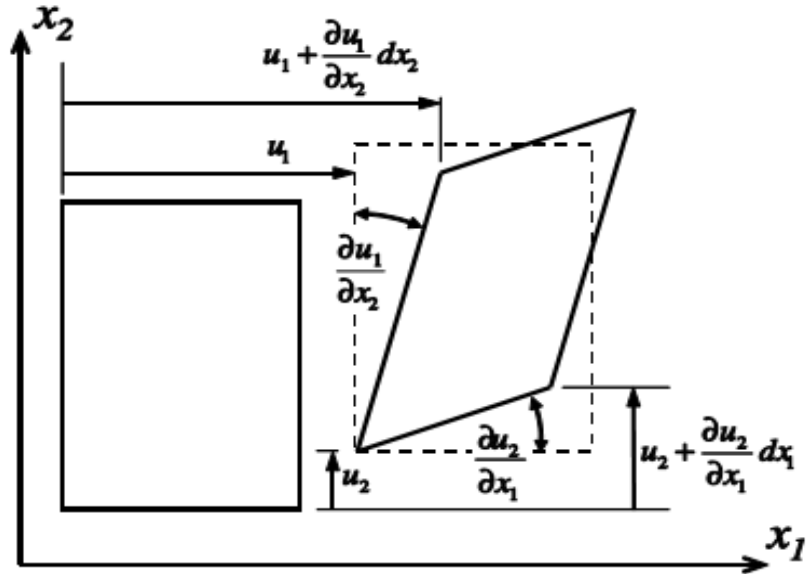
$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_1 ; & 2\varepsilon_{12} &= 2\varepsilon_{21} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \gamma_6 = \varepsilon_6 \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_2 ; & 2\varepsilon_{13} &= 2\varepsilon_{31} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \gamma_5 = \varepsilon_5 \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \varepsilon_3 ; & 2\varepsilon_{23} &= 2\varepsilon_{32} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \gamma_4 = \varepsilon_4\end{aligned}\quad (2.5)$$

Τα στοιχεία της παραμόρφωσης ($i = j$) αντιπροσωπεύουν τη μεταβολή του μήκους ανά μονάδα μήκους (Σχήμα 2.2). Τα διατμητικά στοιχεία της παραμόρφωσης ($i \neq j$) αντιπροσωπεύουν το μισό της μεταβολής σε μια ορθή γωνία (Σχήμα 2.3). Η μηχανική διατμητική παραμόρφωση $\gamma_\alpha = 2\varepsilon_{i,j}$, για $i \neq j$, χρησιμοποιείται συχνά αντί του διάνυσματος της διατμητικής παραμόρφωσης, επειδή το μέτρο διάτμησης G ορίζεται ως $\tau = G\gamma$ στη μηχανική των υλικών. Το διάνυσμα παραμόρφωσης, δεύτερης τάξης, μπορεί να εμφανιστεί ως μητρώο:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6/2 & \varepsilon_5/2 \\ \varepsilon_6/2 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4/2 \\ \varepsilon_5/2 & \varepsilon_4/2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}\quad (2.6)$$

2.4 Τάση

Το διάνυσμα τάσης που συνδέεται με ένα επίπεδο που διέρχεται από ένα σημείο, είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που ενεργεί πάνω στο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο. Ένας τανυστής δεύτερης τάξης, που ονομάζεται τανυστής τάσης, περιγράφει πλήρως την κατάσταση της πίεσης σε ένα σημείο.



Σχήμα 2.3: Μηχανική διατμητική τάση

Ο τανυστής τάσης μπορεί να εκφραστεί με όρους που δρουν σε τρία αμοιβαία κάθετα επίπεδα ευθυγραμμισμένα με τις ορθογωνικές κατευθύνσεις των συντεταγμένων όπως υποδεικνύεται στο [Σχήμα 2.4](#). Η ένδειξη του τανυστή τάσης είναι $\sigma_{i,j}$ με $(i, j = 1, 2, 3)$, όπου ο πρώτος δείκτης αντιστοιχεί στην κατεύθυνση προς το επίπεδο και ο δεύτερος δείκτης αντιστοιχεί στην κατεύθυνση της τάσης. Οι τάσεις εφελκυσμού ($i = j$) ορίζονται ως θετικές όταν οι κατευθύνσεις προς το επίπεδο και την συνιστώσα τάσης είναι είτε θετικές είτε και οι δύο αρνητικές. Όλα τα στοιχεία της τάσης που απεικονίζονται στο [Σχήμα 2.4](#) έχουν θετική έννοια. Η ισορροπία δύναμης και ροπής του στοιχείου στο [Σχήμα 2.4](#) απαιτεί ότι ο τανυστής τάσης είναι συμμετρικός (δηλ. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). Ο τανυστής τάσης που είναι δεύτερης τάξης, μπορεί να εμφανιστεί ως μητρώο :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

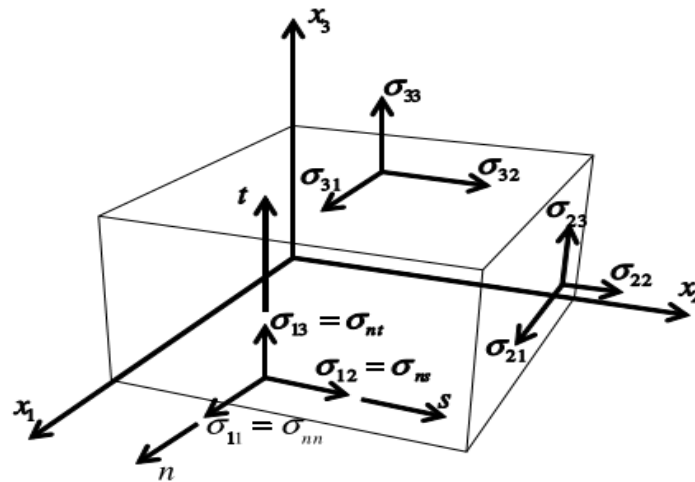
2.5 Σημειογραφία

Δεδομένου ότι η τάση είναι συμμετρική, μπορεί να γραφτεί κατά Voigt ως:

$$\sigma_\alpha = \sigma_j \quad i = \sigma_{ij} \quad (2.8)$$

με τον κανόνα σύμπτυξης ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha &= i, & \text{αν } i=j \\ \alpha &= 9 - i - j & \text{αν } i \neq j \end{aligned} \quad (2.9)$$



Σχήμα 2.4: Συνιστώσες τάσης

Πίνακας 2.1. Κανόνας συμβολισμών που χρησιμοποιείται από λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων FEA

Standard convention	Abaqus/Standard	LS-DYNA and Abaqus/Explicit	ANSYS/Mechanical
11→1	11→1	11→1	11→1
22→2	22→2	22→2	22→2
33→3	33→3	33→3	33→3
23→4	12→4	12→4	12→4
13→5	13→5	23→5	23→5
12→6	23→6	13→6	13→6

Το ίδιο ισχύει και για τον τανυστή παραμόρφωσης, το αποτέλεσμα του οποίου παρουσιάζεται στο (2.6). Παρατηρούμε ότι οι έξι συνιστώσες της τάσης σ_α με $\alpha = 1 \dots 6$ μπορούν να διευθετηθούν σε μια συστοιχία στήλης, η οποία υποδηλώνεται με αγκύλες $\{ \}$, όμως το $\{ \sigma \}$ δεν είναι διάνυσμα, αλλά ένας χρήσιμος τρόπος για τη διευθέτηση των έξι μοναδικών συνιστωσών ενός συμμετρικού τανυστή δεύτερης τάξης.

2.5.1 Εναλλακτική Σημειογραφία

Ορισμένα λογισμικά FEA χρησιμοποιούν διαφορετικές συμβολισμούς, όπως φαίνεται στον (2.1). Για παράδειγμα, για να μετασχηματιστούν τάσεις ή παραμορφώσεις για την σημειογραφία του Abaqus, το μητρώο μετασχηματισμού πρέπει να γραφεί ως εξής :

$$\{\sigma_A\}=[T]\{\sigma\} \quad (2.10)$$

όπου ο δείκτης $()_A$ υποδηλώνει μια ποσότητα στη σημειογραφία του ABAQUS. Επίσης, σημειώστε ότι $\{\}$ δηλώνει μια στήλη, στην περίπτωση έξι στοιχείων, και $[]$ δηλώνει ένα μητρώο, στην περίπτωση μας ένα μητρώο 6×6 που δίνεται από:

$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$[C_A]=[T]^T[C][T] \quad (2.12)$$

Για το LS-DYNA και το ANSYS, το μητρώο μετασχηματισμού είναι:

$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

2.6 Ισορροπία των Δυνάμεων

Οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας σε κάθε σημείο του σώματος γράφονται με συμβολισμό τανυστή ως :

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0 \quad (2.14)$$

Όπου f_i είναι η δύναμη του σώματος ανά μονάδα όγκου και $(), j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Όταν οι δυνάμεις του σώματος είναι αμελητέες, η διευρυμένη μορφή των εξισώσεων ισορροπίας, γραμμένη στο σύστημα συντεταγμένων πολυστρωματικού στρώματος x-y-z, είναι :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (2.15)$$

Η θεμελιώδης αρχή της εικονικής εργασίας (PVW) παρέχει μια εναλλακτική επιλογή στις εξισώσεις ισορροπίας. Δεδομένου ότι η (PVW) είναι σε έκφραση ολοκληρώματος, είναι πιο βολικό από την σχέση (2.14), για τη διαμόρφωση των πεπερασμένων στοιχείων. Η PVW διαβάσει

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_S t_i \delta u_i dS - \int_V f_i \delta u_i dV = 0 \quad (2.16)$$

Όπου t_i είναι οι επιφανειακές προσφύσεις ανά μονάδα επιφάνειας που δρουν στην επιφάνεια S . Το αρνητικό σύμβολο σημαίνει ότι η εργασία γίνεται πάνω στο σώμα από εξωτερικές δυνάμεις (t_i, f_i). Οι δυνάμεις και οι μετατοπίσεις ακολουθούν συμβολισμό. δηλαδή, ένα στοιχείο είναι θετικό όταν δείχνει προς τη θετική κατεύθυνση του αντίστοιχου άξονα. Ο πρώτος όρος στη (2.16) είναι το εικονικό έργο που εκτελείται από τις εσωτερικές τάσεις και είναι θετικό ακολουθώντας την ίδια σημειολογία.

2.7 Συνοριακές Συνθήκες

Η επίλυση προβλημάτων της μηχανικής των στερεών, απαιτεί ότι οι συνοριακές συνθήκες έχουν προσδιοριστεί. Οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να προσδιοριστούν ως προς τις μετατοπίσεις, τις τάσεις ή ενός συνδυασμού και των δύο. Για οποιοδήποτε σημείο σε μια αυθαίρετη επιφάνεια, η έλξη T_i ορίζεται ως ο φορέας που αποτελείται από τρεις συνιστώσες της τάσης, που δρουν στην επιφάνεια του σημείου ενδιαφέροντος. Όπως υποδεικνύεται στο Σχήμα 2.4, το διάνυσμα αποτελείται από μία συνιστώσα τάσης, σ_{nn} , και δύο συνιστώσες διατμητικής τάσης, σ_{nt} και σ_{ns} . Το διάνυσμα έλξης μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας το νόμο του Cauchy

$$T_i = \sigma_{ji} n_j = \sum_j^3 \sigma_{ji} n_j \quad (2.17)$$

Όπου n_j είναι η μονάδα προς την επιφάνεια στο σημείο που εξετάζεται. Για ένα κάθετο επίπεδο προς τον άξονα x_1 $n_i = (1, 0, 0)$ και οι ελκτικές συνιστώσες είναι $T_1 = \sigma_{11}$, $T_2 = \sigma_{12}$ και $T_3 = \sigma_{13}$.

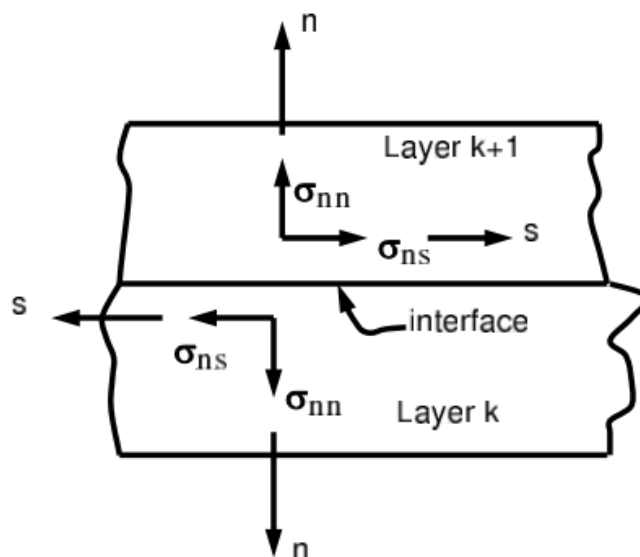
2.7.1 Συνοριακές Συνθήκες Ελεύθερης Επιφανείας

Για να είναι μια επιφάνεια είναι ελεύθερη από τάσεις, θα πρέπει οι συνιστώσες της πρόσφυσης να είναι μηδέν, δηλ. $T_n = \sigma_{nn} = 0$, $T_t = \sigma_{nt} = 0$ και $T_s = \sigma_{ns} = 0$.

2.8 Συνθήκες Συνέχειας

2.8.1 Συνέχεια Έλξης

Η ισορροπία (δράση - αντίδραση) απαιτεί ότι οι συνιστώσες της έλξης T_i θα είναι συνεχείς σε οποιαδήποτε επιφάνεια. Μαθηματικά αυτό προσδιορίζεται ως $T_i^+ - T_i^- = 0$. Χρησιμοποιώντας την (2.17), $T_i^+ = \sigma_{ji}^+ n_j$. επειδή $n_j^+ = -n_j^-$, έχουμε $\sigma_{ji}^+ = \sigma_{ji}^-$. Από την άποψη των μεμονωμένων συνιστωσών τάσης, $\sigma_{nn}^+ = \sigma_{nn}^-$, $\sigma_{nt}^+ = \sigma_{nt}^-$, και $\sigma_{ns}^+ = \sigma_{ns}^-$ (2.5). Έτσι, οι κανονικές και διατμητικές συνιστώσες της τάσης που δρουν σε μια επιφάνεια πρέπει να είναι συνεχείς κατά μήκος αυτής της επιφάνειας. Δεν υπάρχουν απαιτήσεις συνέχειας στις άλλες τρεις συνιστώσες τάσης. Δηλαδή, είναι πιθανό ότι $\sigma_{tt}^+ \neq \sigma_{tt}^-$, $\sigma_{ss}^+ \neq \sigma_{ss}^-$ και $\sigma_{ts}^+ \neq \sigma_{ts}^-$. Η έλλειψη συνέχειας των δύο κανονικών και μιας διατμητικής συνιστώσας της τάσης είναι σύνηθες, επειδή οι ιδιότητες του υλικού είναι ασυνεχείς μεταξύ των ορίων του στρώματος.



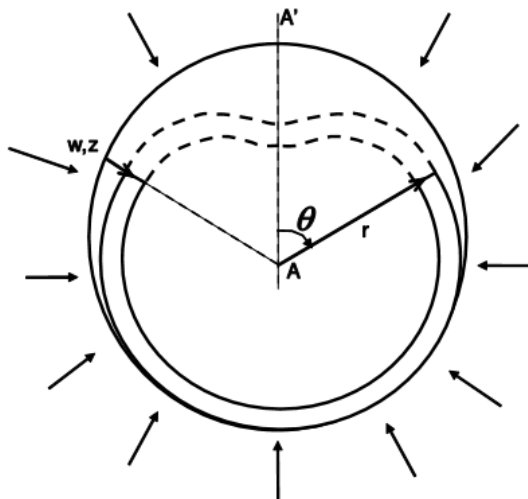
Σχήμα 2.5: Συνέχεια πρόσφυσης σε διεπιφάνεια

2.8.2 Συνέχεια Μετατόπισης

Σε ένα τέλεια συνδεδεμένο συνεχές, ορισμένες συνθήκες επάνω στις μετατοπίσεις, πρέπει να ικανοποιούνται κατά μήκος οποιασδήποτε επιφάνειας. Για παράδειγμα, στο λυγισμό ενός κυλίνδρου υπό εξωτερική πίεση (2.6) οι μετατοπίσεις που σχετίζονται με το υλικό από κάθε πλευρά της τομής $A-A$ πρέπει να είναι ίδιες $u_i^+ = u_i^-$. Οι συνθήκες συνέχειας πρέπει να ικανοποιούνται σε κάθε σημείο. Ωστόσο, η συνέχιση δεν απαιτείται σε περίπτωση ολίσθησης μεταξύ των περιοχών του υλικού. Στο παράδειγμα που παρουσιάζεται, η συνέχεια της κλίσης ($\frac{\partial w^+}{\partial \theta} = \frac{\partial w^-}{\partial \theta}$), πρέπει να ικανοποιηθεί, όπου w είναι η ακτινική μετατόπιση.

2.9 Συμβατότητα

Οι εξισώσεις των παραμορφώσεων (2.5) παρέχουν έξι εξισώσεις για μόνο τρεις άγνωστες μετατοπίσεις u_i . Επομένως, η ολοκλήρωση των εξισώσεων (2.5) για τον προσδιορισμό των άγνωστων μετατοπίσεων, δεν θα έχει μοναδική λύση, εκτός εάν οι παραμορφώσεις ϵ_{ij} πληρούν συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Ο τυχαίος καθορισμός των ϵ_{ij} θα μπορούσε να οδηγήσει σε ασυνέχειες στο υλικό, συμπεριλαμβανομένων των κενών και των υπερκαλύψεων σε περιοχές. Οι συνθήκες συμβατότητας, είναι οι απαραίτητες συνθήκες για την εξεύρεση μοναδιαίας λύσης στο σύστημα μας, χρησιμοποιώντας το PVW (2.16).



Σχήμα 2.6: Λυγισμός κυλινδρικού σωλήνα υπό εξωτερική πίεση

2.10 Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων

Οι συντεταγμένες του σημείου P στο πρωτεύον σύστημα συντεταγμένων, μπορούν να βρεθούν από τις συντεταγμένες του μη πρωτεύοντος συστήματος. Από το (2.7), οι συντεταγμένες του σημείου P είναι:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\x'_3 &= x_3\end{aligned}\tag{2.18}$$

η

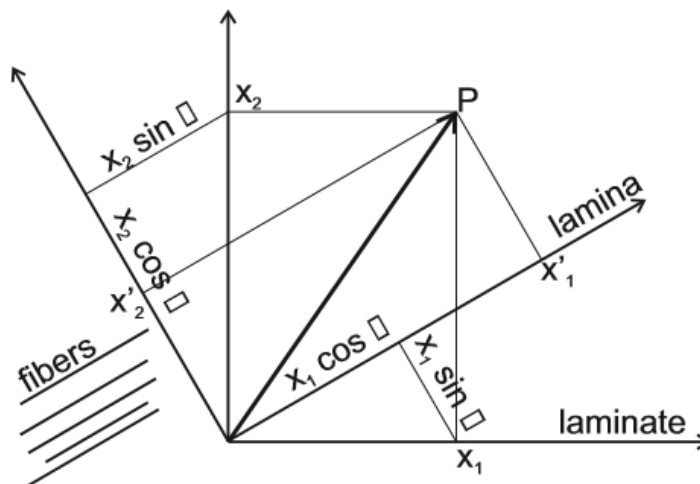
$$x'_i = a_{ij}x_j\tag{2.19}$$

η σε συμβολισμό μητρώου

$$\{x'\} = [a]\{x\}\tag{2.20}$$

όπου a_{ij} είναι οι συνιστώσες των μοναδιαίων διανυσμάτων του αρχικού συστήματος e'_i επάνω στο μη προκαθορισμένο σύστημα e_j , με σειρές

$$a_{ij} = \cos(e'_i, e_j) = \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ e_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ e_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array}\tag{2.21}$$



Σχήμα 2.7: Μετασχηματισμός συντεταγμένων

Αν οι αρχικές συντεταγμένες υποδηλώνουν τις συντεταγμένες του στρώματος (lamina) και οι μη προκαθορισμένες υποδηλώνουν τις συντεταγμένες του πολυστρωματικού (laminata), τότε η (2.19) μετασχηματίζει τα διανύσματα από τις συντεταγμένες του πολυστρωματικού (laminata) στο στρώμα (lamina). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός χρησιμοποιεί το μητρώο των μετατοπίσεων.

$$\{x\} = [a]^T \{x'\} \quad (2.22)$$

2.11 Μετασχηματισμός Τάσης

Ο τανυστής δεύτερης τάξεως σ_{pq} μπορεί να καθοριστεί ως το εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων V_p και V_q

$$\sigma_{pq} = V_p \otimes V_q \quad (2.23)$$

καθένα από τα οποία μετασχηματίζεται ως (2.19)

$$\sigma'_{ij} = a_{ip} V_p \otimes a_{jq} V_q \quad (2.24)$$

Επομένως ,

$$\sigma'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq} \quad (2.25)$$

Η ως συμβολισμό μητρώου

$$\{\sigma'\} = [a]\{\sigma\}[a]^T \quad (2.26)$$

Παραδείγματος χάριν, επεκτείνουμε σ'_{11} σε συμβολισμό

$$\sigma'_{11} = \alpha_{11}^2 \sigma_1 + \alpha_{12}^2 \sigma_2 + \alpha_{13}^2 \sigma_3 + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_6 + 2\alpha_{11}\alpha_{13}\sigma_5 + 2\alpha_{12}\alpha_{13}\sigma_4 \quad (2.27)$$

Επεκτείνοντας το σ'_{12} σε συμβολισμό

$$\sigma'_{12} = \alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_1 + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_2 + \alpha_{13}\alpha_{23}\sigma_3 + (\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21})\sigma_6 + (\alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21})\sigma_5 + (\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{22})\sigma_4 \quad (2.28)$$

Ο ακόλουθος αλγόριθμος χρησιμοποιείται για την δημιουργία του μετασχηματισμένου μητρώου $6 \times 6 [T]$ έτσι ώστε το (2.25) να ξαναγραφεί ως

$$\sigma'_\alpha = T_{\alpha\beta} \sigma_\beta \quad (2.29)$$

Εάν $\alpha \leq 3$ και $\beta \leq 3$ τότε $i = j$ και $p = q$, έτσι ώστε

$$T_{\alpha\beta} = \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \alpha_{ip}^2 \text{ κανένα άθροισμα για το } i, p \quad (2.30)$$

Εάν $\alpha \leq 3$ και $\beta > 3$ τότε $i = j$, αλλά $p \neq q$, και λαμβάνοντας υπόψη ότι η εναλλαγή p σε q δίνει την ίδια τιμή $\beta = 9 - p - q$ ως (2.9) έχουμε:

$$T_{\alpha\beta} = a_{ip}a_{iq} + a_{iq}a_{ip} = 2a_{ip}a_{iq} \text{ κανένα άθροισμα για το } i, p \quad (2.31)$$

Αν $\alpha > 3$, τότε $i \neq j$, αλλά θέλουμε μόνο μία τάση, ας πούμε σ_{ij} , όχι σ_{ji} επειδή είναι αριθμητικά ίσοι. Στην πραγματικότητα, $\sigma = \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ με $\alpha = 9 - i - j$. Αν επιπλέον $\beta \leq 3$ τότε $p = q$ και παίρνουμε

$$T_{\alpha\beta} = a_{ip}a_{jp} \text{ κανένα άθροισμα για το } i, p \quad (2.32)$$

Όταν $\alpha > 3$ και $\beta > 3$, $i \neq j$ και $p \neq q$ παίρνουμε

$$T_{\alpha\beta} = a_{ip}a_{jp} + a_{iq}a_{jp} \quad (2.33)$$

Το οποίο ολοκληρώνει την παραγωγή του $T_{\alpha\beta}$. Επεκτείνουμε (1.30-1.33) και χρησιμοποιούμε (2.21) παίρνουμε

$[T] =$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & & & & & \\ & a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & & & & \\ & a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & & & & \\ a_{21}a_{31} & a_{22}a_{32} & a_{23}a_{33} & a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} & a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31} & & \\ a_{11}a_{31} & a_{12}a_{32} & a_{13}a_{33} & a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{11}a_{33} + a_{13}a_{31} & a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} & & \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} & a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & & \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

2.11.1 Μετασχηματισμός Παραμορφώσεων

Οι συνιστώσες του ταυσθή της παραμόρφωσης ϵ_{ij} μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως οι συνιστώσες τάσης

$$\epsilon'_{ij} = a_{ip}a_{jq}\epsilon_{pq} \quad (2.35)$$

η

$$\epsilon'_\alpha = T_{\alpha\beta}\epsilon_\beta \quad (2.36)$$

με το $T_{\alpha\beta}$ να δίνεται από (2.34). με την διαφορά ότι χρησιμοποιούνται οι τρεις διατμητικές παραμορφώσεις γ_{xz} , γ_{yz} , γ_{xy} , αντί των ταυστών των διατμητικών παραμορφώσεων ϵ_{xz} , ϵ_{yz} , ϵ_{xy} .

Οι μηχανικές παραμορφώσεις (ε αντί για ε) ορίζονται στο (2.5). Μπορούν να ληφθούν από τις συνιστώσες του ταυστή από την ακόλουθη σχέση:

$$\varepsilon_\delta = R_{\gamma\delta}\varepsilon_\gamma \quad (2.37)$$

με το μητρώο Reuter που δίνεται από:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός συντεταγμένων των μηχανικών παραμορφώσεων προκύπτουν από (2.36) και (2.37) ως:

$$\varepsilon'_\alpha = \bar{T}_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta \quad (2.39)$$

με

$$[\bar{T}] = [R][T][R]^{-1} \quad (2.40)$$

χρησιμοποιείται μόνο για να μετασχηματίσει τις μηχανικές παραμορφώσεις. Δηλαδή έχουμε:

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^2 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{13}^2 & \alpha_{12}\alpha_{13} & \alpha_{11}\alpha_{13} & \alpha_{11}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{23}^2 & \alpha_{22}\alpha_{23} & \alpha_{21}\alpha_{23} & \alpha_{21}\alpha_{22} \\ \alpha_{31}^2 & \alpha_{32}^2 & \alpha_{33}^2 & \alpha_{32}\alpha_{33} & \alpha_{31}\alpha_{33} & \alpha_{31}\alpha_{32} \\ 2\alpha_{21}\alpha_{31} & 2\alpha_{22}\alpha_{32} & 2\alpha_{23}\alpha_{33} & \alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{23}\alpha_{32} & \alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{23}\alpha_{31} & \alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{22}\alpha_{31} \\ 2\alpha_{11}\alpha_{31} & 2\alpha_{12}\alpha_{32} & 2\alpha_{13}\alpha_{33} & \alpha_{12}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{32} & \alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{31} & \alpha_{11}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{31} \\ 2\alpha_{11}\alpha_{21} & 2\alpha_{12}\alpha_{22} & 2\alpha_{13}\alpha_{23} & \alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

2.12 Μετασχηματισμός Καταστατικών Εξισώσεων

Οι καταστατικές εξισώσεις που σχετίζουν την τάση σ με την παραμόρφωση ε προσδιορίζονται με τη ταυστή παραμόρφωσης (ε , όχι ε), ως:

$$\begin{aligned} \sigma' &= C': \varepsilon' \\ \sigma'_{ij} &= C'_{ijkl}\varepsilon'_{kl} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ένα υλικό ορθοτροπικό (2.12.3). Εν συνεχεία, είναι γράψουμε σ'_{11} , και σ'_{12} ως

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= C'_{1111}\varepsilon'_{11} + C'_{1122}\varepsilon'_{22} + C'_{1133}\varepsilon'_{33} \\ \sigma'_{12} &= C'_{1212}\varepsilon'_{12} + C'_{1221}\varepsilon'_{21} = 2C'_{1212}\varepsilon'_{12}\end{aligned}\quad (2.43)$$

Ξανά γράφοντας την (2.43) με συμβολική σημειογραφία, γίνεται σαφές ότι σε συμβολισμένη σημειογραφία όλες οι διατμητικές παραμορφώσεις εμφανίζονται δύο φορές, ως εξής:

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 \\ \sigma'_6 &= 2C'_{66}\varepsilon'_6\end{aligned}\quad (2.44)$$

Ο παράγοντας 2 μπροστά από τους τανυστές διατμητικής παραμόρφωσης προκαλείται από δύο γεγονότα. Τη μικρή συμμετρία των τανυστών C και ε (1.5),(1.55-1.56) και τη συστολή των δύο τελευταίων δεικτών του C_{ijkl} με την παραμόρφωση ε_{kl} (2.43). Επομένως, οποιαδήποτε διπλή συστολή των τανυστήρων με μικρή συμμετρία, χρειάζεται να διορθωθεί από ένα μητρώο Reuter (2.38) όταν είναι γραμμένο στη συμβολική σημειογραφία. Στη συνέχεια, το (2.42) μπορεί να γραφτεί ως

$$\sigma'_\alpha = C'_{\alpha\beta} R_{\beta\delta} \varepsilon'_\delta \quad (2.45)$$

Σημειώνουμε ότι το μητρώο Reuter στο (2.45) μπορεί να συνδυαστεί με τανυστές παραμόρφωσης χρησιμοποιώντας (1.37), και γράφεται

$$\sigma'_\alpha = C'_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta \quad (2.46)$$

από την άποψη των μηχανικών παραμορφώσεων. Για να ληφθεί το μητρώο δυσκαμψίας $[C]$ στο σύστημα συντεταγμένων των πολυστρωμάτων, εισαγάγουμε τις (2.29) και (2.39) στην (2.46) έτσι ώστε

$$T_{\alpha\beta} \sigma_\delta = C'_{\alpha\beta} \bar{T}_{\beta\gamma} \varepsilon_\gamma \quad (2.47)$$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί

$$[T]^{-1} = [T]^{-T} \quad (2.48)$$

Επομένως

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.49)$$

Με

$$[C] = [\bar{T}]^T [C'] [\bar{T}] \quad (2.50)$$

Και

$$[C'] = [\bar{T}]^{-T} [C] [\bar{T}]^{-1} = [T][C][T]^T \quad (2.51)$$

Το μητρώο ευκαμψίας είναι το αντίστροφο του μητρώου δυσκαμψίας, και όχι το αντίστροφο του τέταρτου τανυστή C_{ijkl} . Επομένως,

$$[S'] = [C']^{-1} \quad (2.52)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.48) και (2.50), το μητρώο ευκαμψίας μετατρέπεται ως

$$[S] = [T]^T [S'] [T] \quad (2.53)$$

$$[S'] = [T]^{-T} [S] [T]^{-1} = [\bar{T}] [S] [\bar{T}]^T \quad (2.54)$$

2.13 Τρισδιάστατες Καταστατικές Εξισώσεις

Ο νόμος του Hooke σε τρεις διαστάσεις (3D) έχει τη μορφή (2.42). Ο τρισδιάστατος τανυστής δυσκαμψίας C_{ijkl} είναι ένας τανυστής τέταρτης τάξης με 81 συνιστώσες. Για τα ανισότροπα υλικά μόνο 21 συνιστώσες είναι ανεξάρτητες. Δηλαδή, οι υπόλοιπες 60 συνιστώσες μπορούν να γραφτούν σε σχέση με τις άλλες 21 συνιστώσες. Η μονοδιάστατη περίπτωση (1D), που μελετείται στη μηχανική των υλικών, ανακτάται όταν όλες οι συνιστώσες τάσης είναι μηδενικές, εκτός της σ_{11} . Μόνο για την περίπτωση 1D, $\sigma_{11} = \sigma$, $\epsilon_{11} = \epsilon$, $C_{1111} = E$, και $\sigma = E\epsilon$.

Στη (2.42), ανταλλάσοντας τους δείκτες i από j , και k από l έχουμε:

$$\sigma_{ji} = C_{jilk} \epsilon_{lk} \quad (2.55)$$

Εφόσον οι τανυστές τάση παραμόρφωσης είναι συμμετρικοί, δηλαδή, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ και $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$, προκύπτει ότι:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (2.56)$$

Το οποίο αποτελεσματικά που μειώνει τον αριθμό των ανεξάρτητων συνιστωσών από 81 σε 36. Για παράδειγμα, $C_{1213} = C_{2131}$ κ.ο.κ. Στη συνέχεια, οι 36 ανεξάρτητες συνιστώσες μπορούν να γραφτούν ως μητρώο 6×6 .

Επιπλέον, ένα ελαστικό υλικό δεν σπαταλά ενέργεια. Όλη η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται κατά τη φόρτωση, ανακτάται κατά την εκφόρτωση. Επομένως, η ελαστική ενέργεια σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης τάσης-παραμόρφωση είναι ανεξάρτητη από την διαδρομή που ακολουθήθηκε για να φθάσει στο σημείο αυτό. Μια τέτοια ανεξάρτητη από τη διαδρομή ονομάζεται δυναμική λειτουργία.

Σε αυτή την περίπτωση, το δυναμικό είναι η πυκνότητα ενεργειακής παραμόρφωσης \tilde{u} (ϵ_{ij}). Επέκταση της πυκνότητας ενεργειακής παραμόρφωσης σε η σειρά ισχύος Taylor

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \epsilon_{ij}} \Big|_{\epsilon_{ij}} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \tilde{u}}{d \epsilon_{ij} d \epsilon_{kl}} \Big|_{\epsilon_{ij} \epsilon_{kl}} + \dots \quad (2.57)$$

Παράγωγο σε σχέση με ϵ_{ij}

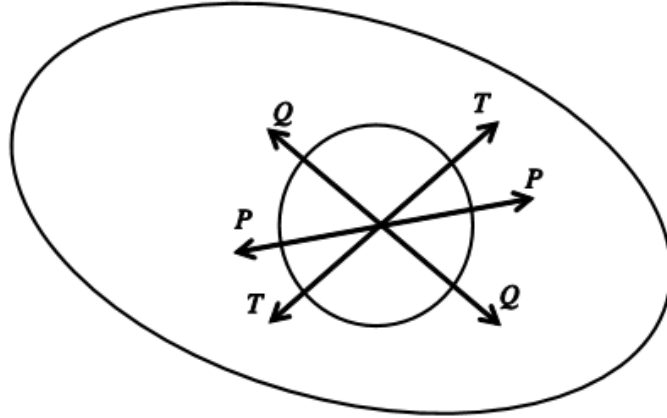
$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \epsilon_{ij}} = 0 + \beta_{ij} + \frac{1}{2} (\alpha_{ijkl} \epsilon_{kl} + \alpha_{klij} \epsilon_{ij}) \quad (2.58)$$

Όπου β_{ij} και α_{ijkl} είναι σταθερές. Από εδώ μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij} = \sigma_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.59)$$

Όπου $\sigma^0_{ij} = \beta_{ij}$ είναι η υπολειπόμενη τάση και $\alpha_{ijkl} = 1/2 (C_{ijkl} + C_{klij}) = C_{ijkl}$ είναι ο συμμετρικός τανυστής δυσκαμψίας (βλέπε (2.56)). Η εξίσωση (2.59) είναι μια γενίκευση της (2.55) που περιλαμβάνει υπολειπόμενες τάσεις.

Χρησιμοποιώντας συμβολική σημειογραφία, ο γενικευμένος νόμος του Hooke γίνεται:



Σχήμα 2.8: Ανισοτροπικό υλικό

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

η περίπτωση 1D καλύπτεται όταν η είναι $\sigma_\alpha = 0$ αν $\alpha \neq 1$. Τότε , $\sigma_1 = \sigma$, $\epsilon_1 = \epsilon$, $C_{11}=E$.

2.13.1 Ανισοτροπικό Υλικό

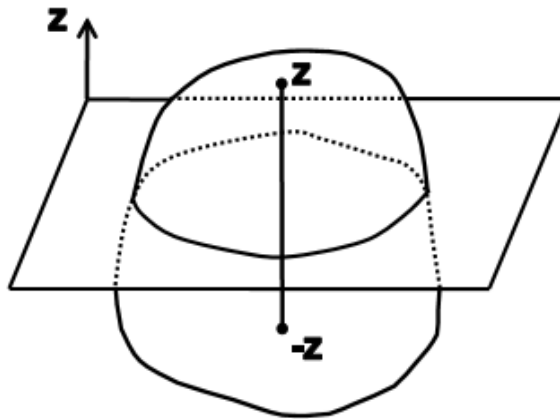
Η εξίσωση (2.60) αντιπροσωπεύει ένα πλήρως ανισότροπο υλικό. Ένα τέτοιο υλικό έχει ιδιότητες που αλλάζουν με τον προσανατολισμό. Για παράδειγμα, το σώμα του υλικού που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.8 παραμορφώνεται διαφορετικά στις κατευθύνσεις P , T και Q , ακόμη και αν οι δυνάμεις που εφαρμόζονται κατά μήκος των διευθύνσεων P , T και Q είναι ίσες. Ο αριθμός των σταθερών που απαιτούνται για την περιγραφή των ανισότροπων υλικών είναι 21.

Ο αντίστροφος πίνακας του μητρώου δυσκαμψίας είναι το μητρώο ευκαμψίας $[S] = [C]^{-1}$.

Η συντακτική εξίσωση (νόμος του 3D Hooke) γράφεται με όρους ευκαμψίας ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

Ο πίνακας $[S]$ είναι επίσης συμμετρικός και έχει 21 ανεξάρτητες σταθερές. Για την περίπτωση 1D, $\sigma = 0$ αν $p \neq l$. Στη συνέχεια, $\sigma_1 = \sigma$, $\alpha_1 = \delta$, $S_{11} = 1/E$.



Σχήμα 2.9: Μονοκλινικό υλικό

2.13.2 Μονοκλινικό Υλικό

Αν ένα υλικό έχει ένα επίπεδο συμμετρίας (Σχήμα 2.9) ονομάζεται μονοκλινικό και απαιτούνται 13 σταθερές για να το περιγράψουμε. Ένα επίπεδο συμμετρίας σημαίνει ότι οι ιδιότητες είναι ίδιες στα συμμετρικά σημεία (z και $-z$ όπως στο Σχήμα 2.9).

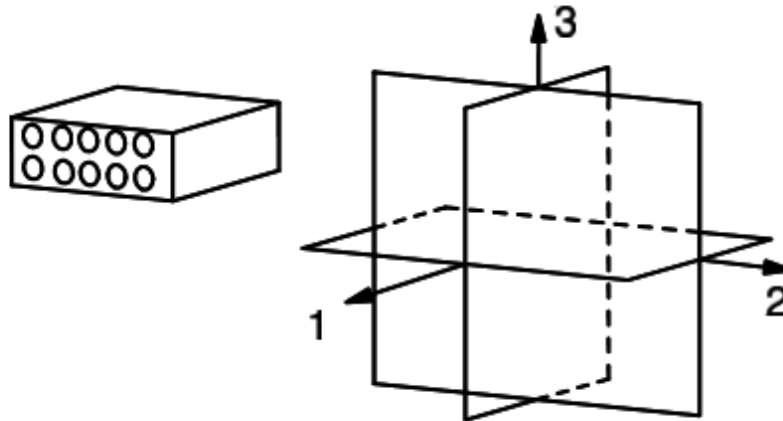
Όταν το υλικό είναι συμμετρικό γύρω από το επίπεδο 1-2, οι ιδιότητες του υλικού είναι ίδιες κατά την ανάκλαση τους όσον αφορά το επίπεδο 1-2. Για μια τέτοια περίπτωση ο πίνακα (2.21) είναι :

$$\begin{matrix} e''_1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ e''_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.62)$$

Από (2.40) παίρνουμε

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Το αποτέλεσμα $[\bar{T}]$ είναι να πολλαπλασιάσουμε τις σειρές και τις στήλες 4 και 5 στο $[C]$ κατά -1 . Οι διαγώνιοι όροι C_{44} και C_{55} παραμένουν θετικοί διότι πολλαπλασιάζονται δύο φορές. Ως εκ τούτου, $C''_{i4} = -C_{i4}$ με $i \neq 4, 5$, $C''_{i5} = -C_{i5}$ με $i \neq 4, 5$, με όλα τα υπόλοιπα αμετάβλητα. Δεδομένου ότι οι ιδιότητες του υλικού σε ένα μονοκλινικό υλικό δεν μπορούν να αλλάξουν με την ανάκλαση, πρέπει να είναι $C_{4i} = C_{14} = 0$ με $i \neq 4, 5$, $C_{5i} = C_{i5} = 0$ με $i \neq 4, 5$.



Σχήμα 2.10: Ορθοτροπικό υλικό.

Δηλαδή, ο νόμος του 3D Hooke μειώνεται :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

και ως μητρώο ευκαμψίας :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

2.13.3 Ορθοτροπικό Υλικό

Ένα ορθοτροπικό υλικό έχει τρία επίπεδα συμμετρίας που συμπίπτουν με τις συντεταγμένες των επιπέδων. Εάν υπάρχουν δύο ορθογώνια επίπεδα συμμετρίας, υπάρχει πάντα και ένα τρίτο ορθογώνιο επίπεδο συμμετρίας. Απαιτούνται 9 σταθερές για να περιγράψουν αυτόν τον τύπο υλικού.

Τα επίπεδα συμμετρίας μπορούν να είναι καρτεσιανά, όπως απεικονίζεται στο [Σχήμα 2.10](#), ή μπορούν να αντιστοιχούν σε οποιαδήποτε άλλη παράσταση συντεταγμένων (κυλινδρική, σφαιρική κ.λπ.). Για παράδειγμα, ο κορμός ενός δέντρου έχει κυλινδρική ορθοτροπία λόγω των δακτυλίων ανάπτυξης. Ωστόσο, τα περισσότερα πρακτικά υλικά παρουσιάζουν Καρτεσιανή ορθοτροπία. Ένα σύνθετο υλικό μονής κατεύθυνσης ενισχυμένο με ίνες, μπορεί να θεωρηθεί ως ορθοτροπικό. Ένα επίπεδο συμμετρίας είναι κάθετο προς την κατεύθυνση των ινών, και τα άλλα δύο είναι παράλληλα προς την κατεύθυνση των ινών και ορθογωνικά μεταξύ τους.

Εκτός από την αναπαράσταση των επιπέδων 1-2 που συζητήθηκε στην ενότητα 2.12.2, η δεύτερη αναπαράσταση του επίπεδο 1-3, δεν θα πρέπει να επηρεάζει τις ιδιότητες των ορθοτροπικών υλικών. Σε αυτή την περίπτωση ο α -πίνακα είναι:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Ο πίνακας \bar{T} από (2.40) είναι $[\bar{T}] =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Αυτό θα καταστήσει $C_{i6} = -C_{i6}$, $i \neq 4,6$ και $C_{i4} = -C_{i4}$, $i \neq 4,6$. Δεδομένου ότι το υλικό έχει συμμετρία γύρω από το επίπεδο 1-3, αυτό σημαίνει ότι $C_{i6} = C_{6i} = 0$, $i \neq 6$. Σε αυτή την περίπτωση, ο 3D νόμος του Hooke μειώνεται στο

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

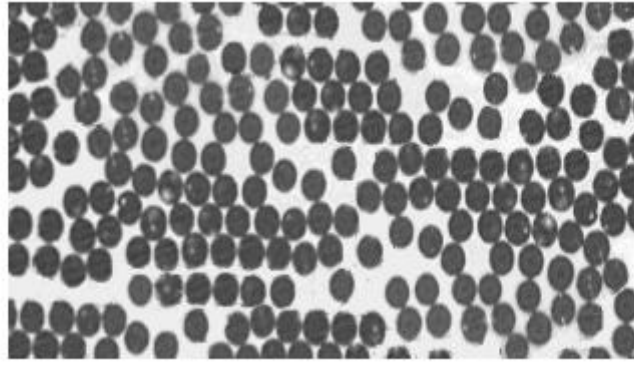
και ως μητρώο ευκαμψίας

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

Σημειώνουμε ότι αν το υλικό έχει δύο επίπεδα συμμετρίας, αυτομάτως έχει τρία επίπεδα, διότι εφαρμόζοντας την διαδικασία επιπλέον για ένα τρίτο επίπεδο (το επίπεδο 2-3) δεν θα αλλάξει τις σχέσεις (2.68-2.69).

2.13.4 Εγκάρσιο Ισοτροπικό Υλικό

Ένα εγκάρσια ισότροπο υλικό έχει έναν άξονα συμμετρίας. Παραδείγματος χάριν, η κατεύθυνση των ινών ενός σύνθετου υλικού ενισχυμένου με ίνες μονής κατεύθυνσης, μπορεί να θεωρηθεί ένας άξονας συμμετρίας, εάν οι ίνες κατανεμηθούν τυχαία στην διατομή (Σχήμα 2.11). Σε αυτήν την περίπτωση, κάθε επίπεδο που περιέχει την κατεύθυνση των ινών είναι ένα επίπεδο συμμετρίας. Ένα εγκάρσια ισότροπο υλικό περιγράφεται από 5 σταθερές. Όταν ο άξονας συμμετρίας είναι η κατεύθυνση των ινών (1 κατεύθυνση), ο 3D νόμος του Hooke μειώνεται.



Σχήμα 2.11: Τυχαία κατανεμημένες φιάλες από γυαλί τύπου E με 200mm μαγνητοποίηση

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} - C_{23}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

και ως μητρώο ευκαμψίας

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

Σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις θα ήταν διαφορετικές αν ο άξονας συμμετρίας δεν είναι η κατεύθυνση των ινών. Όσον αφορά τις ιδιότητες της μηχανικής (Κεφάλαιο 2.13) και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι κατευθύνσεις 2 και 3 είναι πανομοιότυπες, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις για ένα εγκάρσια ισότροπο υλικό:

$$E_2 = E_3 \quad \nu_{12} = \nu_{13} \quad G_{12} = G_{13} \quad (2.72)$$

Επιπλέον, οποιοσδήποτε δύο κάθετες κατευθύνσεις στο επίπεδο 2-3 μπορούν να ληφθούν ως άξονες. Με άλλα λόγια, το επίπεδο 2-3 είναι ισότροπο. Επομένως, ισχύουν τα παρακάτω για το επίπεδο 2-3.

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \quad (2.73)$$

2.13.5 Ισότροπο Υλικό

Τα πιο συνηθισμένα υλικά βιομηχανικής χρήσης είναι ισότροπα, όπως το αλουμίνιο, ο χάλυβας κλπ. Τα ισότροπα υλικά έχουν έναν περιορισμένο αριθμό συμμετρικών επιπέδων, πράγμα που σημαίνει ότι οι ιδιότητες είναι ανεξάρτητες από τον προσανατολισμό. Απαιτούνται μόνο δύο σταθερές για να αντιπροσωπεύσουν τις ελαστικές ιδιότητες. Αυτές οι δύο ιδιότητες είναι το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν , αλλά και πολλά άλλα ζεύγη σταθερών χρησιμοποιούνται όποτε είναι βολικό. Ωστόσο, κάθε ζευγάρι ιδιοτήτων πρέπει να σχετίζεται με οποιοδήποτε άλλο ζεύγος. Για παράδειγμα, θα μπορούσατε να περιγράψετε ισοτροπικά υλικά με E και G , αλλά το μέτρο διάτμησης των ισοτροπικών υλικών σχετίζεται με το E και το ν με

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.74)$$

Επίσης, οι σταθερές Lamé χρησιμοποιούνται για ευκολία. Στην περίπτωση αυτή οι δύο σταθερές είναι

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G \quad (2.75)$$

Για να σχηματίσουμε ένα ακόμη ζεύγος, οποιαδήποτε από τις παραπάνω ιδιότητες θα μπορούσε να αντικατασταθεί από το μέτρο k , ως εξής

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.76)$$

Το οποίο σχετίζει την υδροστατική πίεση p στην ογκομετρική παραμόρφωση ως

$$p = k(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \quad (2.77)$$

Για ισότροπα υλικά, ο 3D νόμος του Hooke γράφεται μόνο με δύο σταθερές C_{11} και C_{12} ως:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

Όσον αφορά το μητρώο ευκαμψίας, χρησιμοποιούνται δύο σταθερές, S_{11} και S_{12} , ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

$$s = S_{11} - S_{12}$$

Δεδομένου ότι το μέτρο ελαστικότητας και το μέτρο διάτμησης πρέπει πάντα να είναι θετικά, ο λόγος Poisson πρέπει να είναι $\nu > -1$. Επιπλέον, δεδομένου ότι ο συντελεστής όγκου πρέπει να είναι θετικός, έχουμε $\nu < \frac{1}{2}$. Τέλος, ο λόγος Poisson ισοτροπικών υλικών περιορίζεται $-1 < \nu < \frac{1}{2}$.

2.14 Σταθερές Μηχανικής

Το επόμενο βήμα είναι να γράψουμε τις συνιστώσες των πινάκων ευκαμψίας και δυσκαμψίας ως σταθερές μηχανικής για ορθοτροπικά υλικά. Για το σκοπό αυτό, είναι ευκολότερο να εργαστούμε με το μητρώο ευκαμψίας, το οποίο ορίζεται ως το αντίστροφο του μητρώου δυσκαμψίας. Σε συντεταγμένες στρώματος $[S]' = [C]'^{-1}$. Το μητρώο ευκαμψίας χρησιμοποιείται για να γράψουμε τη σχέση μεταξύ παραμορφώσεων και τάσεων στο (2.69) για ένα ορθοτροπικό υλικό. Ξαναγράψουμε την πρώτη σχέση (2.69), η οποία αντιστοιχεί στην παραμόρφωση κατά την κατεύθυνση 1 (διεύθυνση ινών).

$$\epsilon'_1 = S'_{11}\sigma'_1 + S'_{12}\sigma'_2 + S'_{13}\sigma'_3 \quad (2.80)$$

Πειραματικά αρχικά, εφαρμόζουμε τάση εφελκυσμού κατά μήκος της κατεύθυνσης 1 (διεύθυνση ινών) όπως στο σχήμα 2.12, με όλες τις άλλες τάσεις ίσες με το μηδέν, υπολογίζουμε την παραμόρφωση που παράγεται κατά την κατεύθυνση 1, η οποία είναι

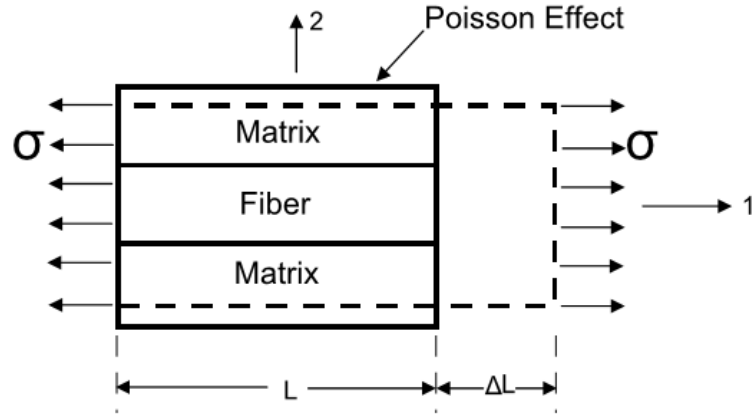
$$\epsilon'_1 = \frac{\sigma'_1}{E_1} \quad (2.81)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε μια τάση μόνο στην 2-κατεύθυνση και υπολογίζουμε την παραμόρφωση στην 1 κατεύθυνση χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο λόγο Poisson

$$\epsilon'_1 = -\nu_{21} \frac{\sigma'_2}{E_2} \quad (2.82)$$

Εν συνεχεία, εφαρμόζουμε μια τάση μόνο στην 3 κατεύθυνση και υπολογίζουμε την παραμόρφωση στην 1 κατεύθυνση χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο λόγο Poisson

$$\epsilon'_1 = -\nu_{31} \frac{\sigma'_3}{E_3} \quad (2.83)$$



Σχήμα 2.12: Διαμήκης φόρτιση

Η συνολική παραμόρφωση ϵ' είναι το άθροισμα των εξισώσεων (2.81), (2.82) και (2.83)

$$\epsilon'_1 = \frac{1}{E_1} \sigma'_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma'_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma'_3 \quad (2.84)$$

Συγκρίνοντας (2.84) με (2.80) συμπεραίνουμε ότι:

$$S'_{11} = \frac{1}{E_1}; S'_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}; S'_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \quad (2.85)$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στο ϵ'_2 και ϵ'_3 για να ληφθούν οι συντελεστές στη δεύτερη και στην τρίτη σειρά του μητρώου ευκαμψίας (2.69).

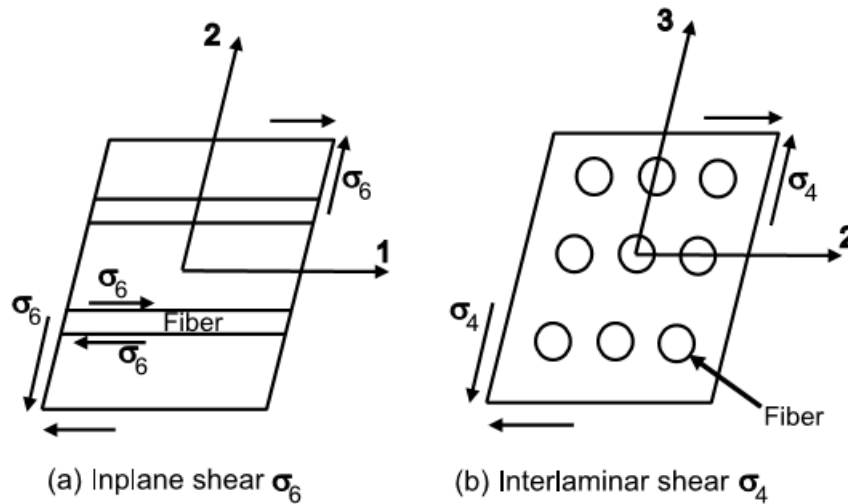
Για τους όρους διάτμησης χρησιμοποιούμε την 4η, 5η και 6η σειρά του μητρώου ευκαμψίας (2.69). Για παράδειγμα, από το Σχήμα 2.13 γράφουμε:

$$\sigma'_6 = \epsilon'_6 G_{12} = 2\epsilon'_6 G_{12} \quad (2.86)$$

που σε σύγκριση με την 6η σειρά του (2.69) οδηγεί σε $S_{66} = 1 / G_{12}$

Για ένα ορθοτροπικό υλικό, το μητρώο ευκαμψίας $[S']$ ορίζεται στο σύστημα συντεταγμένων στρώματος ως:

$$[S'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$



Σχήμα 2.13: Διατμητική φόρτιση

όπου E_i , G_{ij} και ν_{ij} είναι το μέτρο ελαστικότητας, το μέτρο διάτμησης και ο λόγος Poisson, αντίστοιχα. Επιπλέον, οι δείκτες υποδεικνύουν τις κατευθύνσεις του στρώματος

$$\nu_{ij} = \nu_{x'ix'j} \text{ και } E_{ii} = E_{x'i} \quad (2.88)$$

Δεδομένου ότι το $[S']$ είναι συμμετρικό, πρέπει να ικανοποιηθούν τα ακόλουθα:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ji}}{E_{jj}}, i, j = 1 \dots 3 \quad (2.89)$$

Επιπλέον, οι λόγοι Poisson καθορίζονται έτσι ώστε να δίνεται η πλευρική καταπόνηση

$$\nu_j = -\nu_{ij}\epsilon_i \quad (2.90)$$

Στο λογισμικό ANSYS, οι λόγοι Poisson καθορίζονται διαφορετικά. Στην πραγματικότητα, τα ν_{xy} , ν_{xz} , ν_{yz} σημαίνονται PRXY, PRXZ και PRYZ, ενώ τα ν_{yx} , ν_{zx} , ν_{zy} υποδηλώνονται με NUXY, NUXZ και NUYZ. Αντίθετα, το Abaqus χρησιμοποιεί την τυπική σημειογραφία που χρησιμοποιείται σε αυτήν την μελέτη. Δηλαδή, τα σύμβολα NU12, NU13, NU23 ακολουθούν τη σύμβαση που περιγράφουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Μετά από τον υπολογισμό του S_{ij} , τα διανύσματα της τάσης υπολογίζονται κάνοντας χρήση (2.46) ή (2.49). Αυτή η διατύπωση προβλέπει την ρεαλιστική συμπεριφορά για πεπερασμένη μετατόπιση εφ' όσον οι παραμορφώσεις είναι μικρές. Αυτή η διατύπωση είναι επίπονη στη χρήση της, επειδή χρειάζεται 18 μεταβλητές : 12 συνιστώσες της παραμόρφωσης από το μητρώο των μετατοπίσεων υπολογίζονται αρχικά ($u_{i,j}$ και $u_{r,i}$ $u_{r,j}$) συν 6 συνημίτονα κατεύθυνσης $[a]$ για να υπολογίσουν τις τελικές περιστροφές.

Ωστόσο, από την (2.87) μόνο εννέα σταθερές είναι ανεξάρτητες επειδή το μητρώο $[S']$ πρέπει να είναι συμμετρικό (βλέπε 2.93), έτσι:

$$[S'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Έτσι το μητρώο δυσκαμψίας μπορεί να υπολογιστεί και από τις μηχανικές σταθερές, αντιστρέφοντας την παραπάνω εξίσωση έτσι ώστε $[C'] = [S']^{-1}$

$$\begin{aligned} C'_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C'_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\ C'_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C'_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\ C'_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C'_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C'_{44} &= G_{23} \\ C'_{55} &= G_{13} \\ C'_{66} &= G_{12} \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Και τα δύο $[S']$ και $[C']$ είναι μητρώα 6×6 με 9 ανεξάρτητες σταθερές για την περίπτωση ορθοτροπικών υλικών.

Αν το υλικό είναι εγκάρσια ισότροπο $G_{13} = G_{12}$, $\nu_{13} = \nu_{12}$, $E_3 = E_2$.

2.14.1 Ελαστικές Σταθερές

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι λόγω της συμμετρίας του μητρώου εύκαμψιας (2.91) ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί στις σταθερές μηχανικής:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}; i, j = 1 \dots 3; i \neq j \quad (2.93)$$

Περαιτέρω περιορισμούς στις τιμές των ελαστικών σταθερών μπορούν να προκύψουν από το γεγονός ότι όλοι οι διαγώνιοι όροι τόσο στο μητρώο δυσκαμψίας όσο και στο μητρώο εύκαμψιας πρέπει να είναι θετικοί. Δεδομένου ότι όλες οι ελαστικές σταθερές μηχανικής πρέπει να είναι θετικές ($E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{31} > 0$), όλοι οι διαγώνιοι όροι του πίνακα (2.92) θα είναι θετικοί εάν πληρούνται οι ακόλουθες δύο προϋποθέσεις. Η πρώτη προϋπόθεση είναι ότι $(1 - \nu_{ij}\nu_{ji}) > 0$ για $i, j = 1 \dots 3$ και $i \neq j$, η οποία οδηγεί στον ακόλουθο περιορισμό στις τιμές των σταθερών μηχανικής:

$$0 < \nu_{ij} < \sqrt{\frac{E_i}{E_j}}; i, j = 1 \dots 3; i \neq j \quad (2.94)$$

Η δεύτερη προϋπόθεση είναι ότι:

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0 \quad (2.95)$$

Αυτοί οι περιορισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο των πειραματικών δεδομένων.

2.15 Από τις 3D στις Εξισώσεις Τάσεων Επιπέδου

Ρυθμίζοντας την $\sigma_3 = 0$ στις εξισώσεις ευκαμψίας (2.69) ενός ορθοτροπικού υλικού συνεπάγεται ότι δεν χρησιμοποιούμε την τρίτη σειρά και την τρίτη στήλη του μητρώου ευκαμψίας

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \gamma'_4 \\ \gamma'_5 \\ \gamma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 = 0 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} \quad (2.96)$$

Έτσι, οι πρώτες δύο εξισώσεις συν την τελευταία, μπορούν να γραφτούν ξεχωριστά από το υπόλοιπο, σε έναν 3×3 μειωμένου πίνακα ευκαμψίας $[S]$ και χρησιμοποιώντας $\gamma = 2\varepsilon$, προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \gamma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & 0 \\ S'_{12} & S'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

Η τρίτη εξίσωση χρησιμοποιείται σπανίως

$$\varepsilon'_3 = S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 \quad (2.98)$$

και οι υπόλοιπες δύο εξισώσεις μπορούν να γραφτούν ξεχωριστά ως

$$\begin{Bmatrix} \gamma'_4 \\ \gamma'_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{44} & 0 \\ 0 & S'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{Bmatrix} \quad (2.99)$$

Για τον υπολογισμό των συνιστωσών παραμόρφωσης, η σχέση (2.97) μπορεί να αντιστραφεί για να προκύψει $\{\sigma\} = [Q] \{\varepsilon\}$ η

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \gamma'_6 \end{Bmatrix} \quad (2.100)$$

όπου ο πίνακας $[Q'] = [S'_{3 \times 3}]^{-1}$ είναι ο μειωμένος πίνακας ευκρίνειας για την επίπεδη τάση.

Το σύνολο των εξισώσεων ολοκληρώνεται με :

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & 0 \\ 0 & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma'_4 \\ \gamma'_6 \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

όπου οι συντελεστές C'_{44} και C'_{55} είναι αριθμητικά ίσες με τις αντίστοιχες καταχωρήσεις στο μητρώο δυσκαμψίας 6×6 επειδή ο πίνακας 2×2 στο (2.101) είναι διαγώνια.

2.16 Φαινομενικές Ιδιότητες Στρωματικού Σύνθετου Υλικού

Το μητρώο δυσκαμψίας $[C]$ ενός ισορροπημένου, συμμετρικού στρωματικού σύνθετου υλικού με N στρώσεις, δημιουργείται προσθέτοντας τα μητρώα των στρωμάτων στο σύστημα συντεταγμένων του σύνθετου υλικού και πολλαπλασιάζοντας το με το λόγο t_k / t κάθε στρώματος, όπου t είναι το συνολικό πάχος του πολυστρωματικού σύνθετου υλικού και t_k το πάχος το k -th κάθε στρώμα.

$$[C] = \sum_{k=1}^N \frac{t_k}{t} [C_k] \quad (2.102)$$

Σημειώνουμε ότι οι ευκαμψίες δεν μπορούν να προστεθούν ούτε να γίνουν μέσοι όροι. Η ευκαμψία του πολυστρωματικού σύνθετου υλικού επιτυγχάνεται με την αναστροφή του πίνακα 6×6 δυσκαμψίας, ως

$$[S] = [C]^{-1} \quad (2.103)$$

Ένα πολυστρωματικό υλικό ονομάζεται ισορροπημένο αν το συνολικό πάχος των στρωμάτων προσανατολισμένο σε σχέση με την κατεύθυνση του φύλλου στα $+\theta$ και $-\theta$ είναι το ίδιο. Ένα τέτοιο πολυστρωματικό υλικό έχει ορθοτροπική δυσκαμψία $[C]$ και ευκαμψία $[S]$. Όσον αφορά τις φαινομενικές μηχανικές ιδιότητες του πολυστρωματικού υλικού, οι ευκαμψίες είναι

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-v_{yx}}{E_y} & \frac{-v_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{-v_{xy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{xy}}{E_x} & \frac{-v_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Δεδομένου ότι η ευκαμψία πρέπει να είναι συμμετρική, πρέπει να ικανοποιεί την (2.93) με $i, j = x, y, z$. Ως εκ τούτου, είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι φαινομενικές μηχανικές ιδιότητες του πολυστρωματικού σύνθετου υλικού ως ακολούθως

$$E_x = 1/S_{11} \quad v_{xy} = -S_{21}/S_{11}$$

$$E_y = 1/S_{22} \quad v_{xz} = -S_{31}/S_{11}$$

$$E_z = 1/S_{33} \quad v_{yz} = -S_{32}/S_{22}$$

$$G_{yz} = 1/S_{44}$$

$$G_{xz} = 1/S_{55}$$

$$G_{xy} = 1/S_{66} \quad (2.105)$$

3 Στοιχεία Θεωρίας Πεπερασμένων Στοιχείων

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM) χρησιμοποιείται για την επίλυση πρακτικών μηχανολογικών προβλημάτων. Βασικές γνώσεις της μεθόδου θα μας βοηθήσουν στην αποτελεσματική χρήση οποιουδήποτε λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων.

3.1 Βασική Διαδικασία FEM

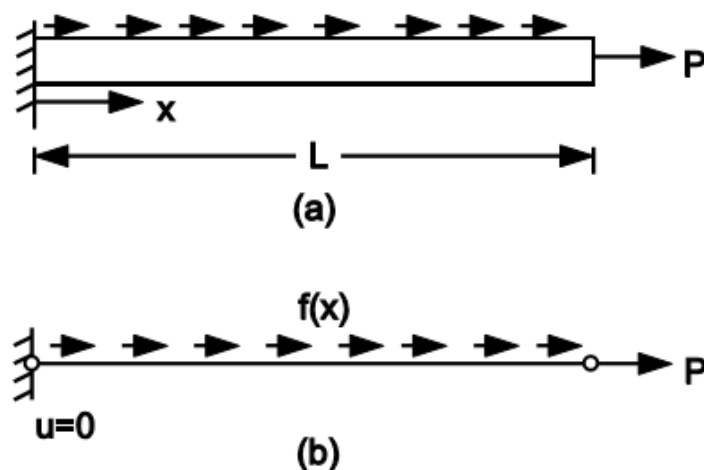
Εξετάζουμε την αξονική παραμόρφωση μιας ράβδου. Η συνήθης διαφορική εξίσωση που περιγράφει την παραμόρφωση της ράβδου είναι

$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) - f = 0; \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.1)$$

όπου E , το μέτρο ελαστικότητας, A η διατομή της ράβδου και f η κατανεμημένη δύναμη. Οι οριακές συνθήκες για την περίπτωση που απεικονίζεται στο [Σχήμα 3.1](#) είναι

$$\left[\left(EA\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=L}^{u(0)=0} = P \quad (3.2)$$

Όπως είναι συνηθισμένο στη επιστήμη της μηχανικής των υλικών, η πραγματική ράβδος που φαίνεται στο [Σχήμα 3.1 \(a\)](#) είναι μαθηματικά μοντελοποιημένη ως γραμμή στο [Σχήμα 3.1 \(b\)](#). Η ράβδος καταλαμβάνει την περιοχή $[0, L]$ κατά μήκος του πραγματικού άξονα x .



Σχήμα 3.1: Φυσικό και μαθηματικό μοντέλο (προσέγγιση).

3.1.1 Διακριτοποίηση

Το επόμενο βήμα είναι να χωρίσουμε τον τομέα σε διακριτά στοιχεία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.

3.1.2 Εξισώσεις Στοιχείων

Για να βρούμε τις εξισώσεις των στοιχείων, χρησιμοποιούμε μια ακέραια μορφή της κοινής διαφορικής εξίσωσης (ODE), η οποία προκύπτει από την ενσωμάτωση του περιεχομένου της ODE, πολλαπλασιασμένη επί την συνάρτηση βάρους u ως εξής.

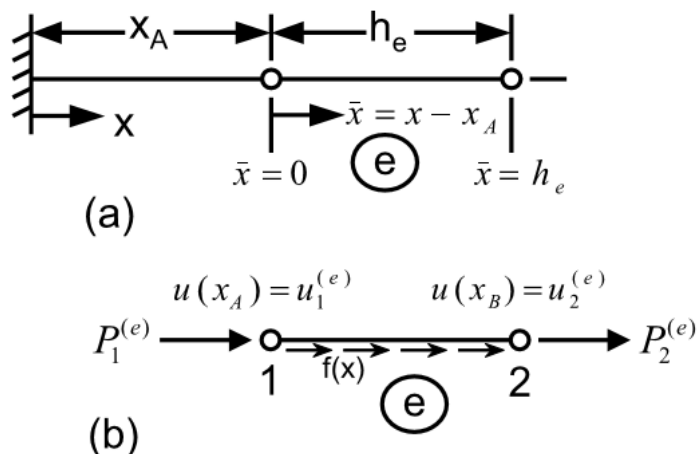
$$0 = \int_{x_A}^{x_B} u \left[-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) - f \right] dx \quad (3.3)$$

Αυτό ονομάζεται αδύναμη μορφή επειδή η λύση $u(x)$ δεν χρειάζεται να ικανοποιήσει την ODE (3.1) για όλες τις τιμές του x στο $[0, L]$. Αντί για αυτό, η λύση $u(x)$ πρέπει μόνο να ικανοποιήσει την ODE στο (3.3). Επομένως, είναι ευκολότερο να βρεθεί μια αδύναμη λύση από μια ισχυρή λύση. Αν και για την περίπτωση της ράβδου, η ισχυρή (ακριβής) λύση είναι γνωστή, τα περισσότερα προβλήματα της σύνθετης μηχανικής δεν έχουν ακριβείς λύσεις. Η ισχύουσα εξίσωση επιτυγχάνεται ενσωματώνοντας την (3.3) ανά τμήματα ως εξής:

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} EA \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} dx - \int_{x_A}^{x_B} u f dx - \left[u \left(EA \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_A}^{x_B} \quad (3.4)$$

όπου $v(x)$ είναι μια συνάρτηση βάρους, η οποία συνήθως είναι ίση με την πρωτεύουσα μεταβλητή $u(x)$. Από τον συνοριακό όρο, συμπεραίνεται ότι:

- ο προσδιορισμός $v(x)$ σε x_A ή x_B είναι μια βασική οριακή συνθήκη
- προσδιορίζοντας $EA \frac{du}{dx}$ σε κάθε άκρο είναι η φυσική οριακή συνθήκη



Σχήμα 3.2: Διακριτοποίηση σε στοιχεία

Ενώ το $u(x)$ είναι η πρωτεύουσα μεταβλητή, $(EA \frac{du}{dx}) = EA\epsilon x = A\sigma_x$ είναι η δευτερεύουσα μεταβλητή.

$$\begin{aligned} u(x_A) &= u_1^e \\ u(x_B) &= u_2^e \\ -\left[EA \frac{du}{dx}\right]_{x_A} &= P_1^e \\ \left[EA \frac{du}{dx}\right]_{x_B} &= P_2^e \end{aligned} \quad (3.5)$$

Στη συνέχεια, η κύρια εξίσωση γίνεται:

$$0 = \int_{x_B}^{x_A} \left(EA \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} - uf\right) dx - P_1^e v(x_A) - P_2^e v(x_B) = B(v, u) - l(v) \quad (3.6)$$

Με

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{x_A}^{x_B} EA \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \\ l(v) &= \int_{x_A}^{x_B} v f dx + P_1^e v(x_A) + P_2^e v(x_B) \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.1.3 Προσέγγιση ενός Στοιχείου

Το άγνωστο $u(x)$ προσεγγίζεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός (επέκταση σειράς) γνωστών συναρτήσεων $N_i^e(x)$ και άγνωστων συντελεστών a_j^e , ως:

$$u_e(x) = \sum_{j=1}^n a_j^e N_j^e(x)$$

όπου a_j^e είναι οι συντελεστές που πρέπει να βρεθούν και $N_j^e(x)$ είναι οι συναρτήσεις παρεμβολής. Για τη συνάρτηση βάρους $v(x)$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Ritz, στην οποία $v(x) = N_j^e(x)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.6) παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{x_A}^{x_B} EA \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} dx \right) a_j^e = \int_{x_A}^{x_B} N_i^e f dx + P_1^e N_i^e(x_A) + P_2^e N_i^e(x_B) \quad (3.8)$$

που μπορεί να γραφτεί ως:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^e a_j^e = F_j^e \quad (3.9)$$

ή σε μορφή πίνακα

$$[K^e] \{a^e\} = \{F^e\} \quad (3.10)$$

Όπου $[K^e]$ είναι το μητρώο στοιχείων δυσκαμψίας, η $\{F^e\}$ είναι η ισοδύναμη δύναμη διανυσματικού στοιχείου και τα $\{a^e\}$ είναι οι παράμετροι άγνωστου στοιχείου.

3.1.4 Συναρτήσεις Παρεμβολής

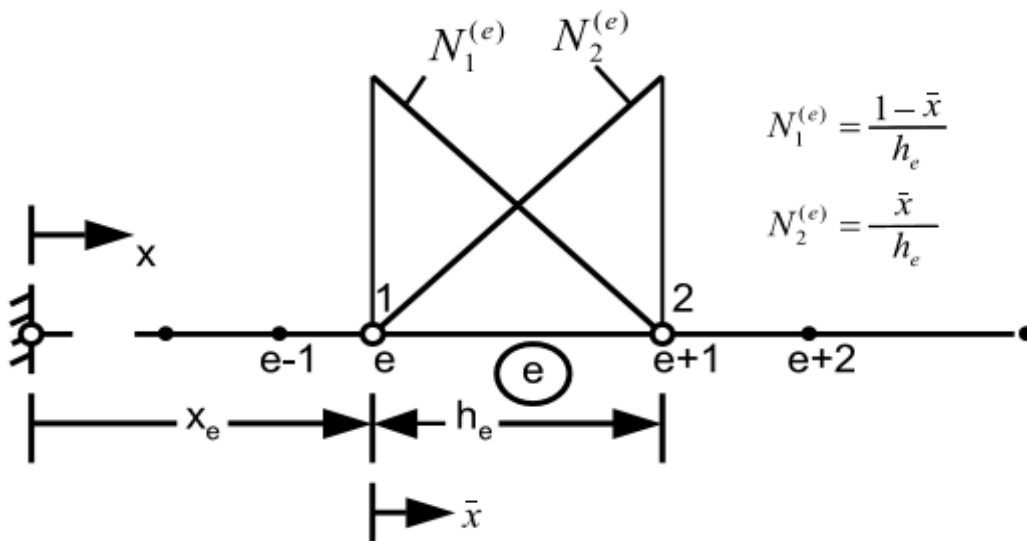
Παρόλο που οποιαδήποτε σειρά από τις ανεξάρτητες γραμμικές συναρτήσεις θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση παρεμβολής, είναι βολικό να επιλέξουμε τη συνάρτηση με τέτοιο τρόπο, ώστε οι άγνωστοι συντελεστές να αντιπροσωπεύουν τις μετατοπίσεις κόμβων, δηλαδή $a_i = u_i$. Για ένα στοιχείο δύο κόμβων που καλύπτει το διάστημα $x_e \leq x \leq x_{e+1}$, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες γραμμικές συναρτήσεις παρεμβολής (Σχήμα 3.3)

$$\begin{aligned} N_1^e &= \frac{x_{e+1} - x}{h_e} \\ N_2^e &= \frac{x - x_e}{h_e} \end{aligned} \quad (3.11)$$

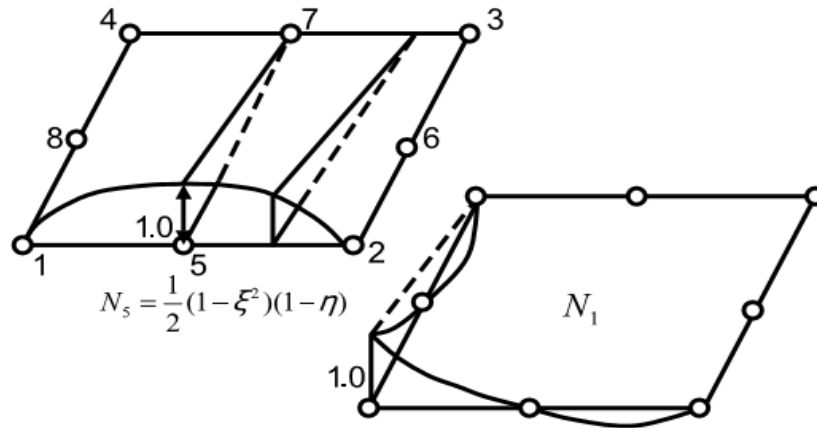
όπου $h_e = x_{e+1} - x_e$ είναι το μήκος του στοιχείου. Αυτές οι γραμμικές συναρτήσεις παρεμβολής πληρούν τις ακόλουθες συνθήκες:

$$N_i^e(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \neq j \\ 1 & \text{αν } i = j \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=1}^2 N_i^e(x) = 1 \quad (3.13)$$



Σχήμα 3.3: Λειτουργίες γραμμικής παρεμβολής για στοιχείο ράβδου δύο κόμβων

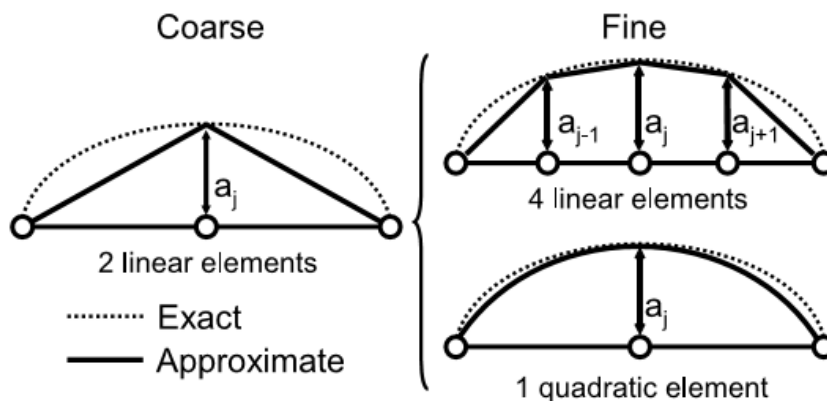


Σχήμα 3.4: Λειτουργίες παρεμβολής δύο διαστάσεων.

που εγγυώνται ότι οι άγνωστοι συντελεστές αντιπροσωπεύουν τις μετατοπίσεις κόμβων, δηλ. $a_i = u_i$.

Θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν πολλές άλλες συναρτήσεις παρεμβολής, κάθε μία με τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Οι συναρτήσεις παρεμβολής σχετίζονται στενά με τον αριθμό των κόμβων του στοιχείου. Το Σχήμα 3.4 απεικονίζει το σχήμα των συναρτήσεων παρεμβολής N_1 και N_5 (που αντιστοιχούν στους κόμβους 1 και 5) σε ένα στοιχείο κελύφους οκτώ κόμβων.

Σε γενικές γραμμές, περισσότεροι κόμβοι ανά στοιχείο συνεπάγονται μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα, αλλά συνεπάγονται επίσης υψηλότερο κόστος από πλευράς χρόνου υπολογιστή. Το Σχήμα 3.5 απεικονίζει πως η προσεγγιστική λύση, συγκλίνει προς την ακριβή λύση, όσο ο αριθμός των στοιχείων αυξάνεται από 2 σε 4 ή καθώς ο αριθμός των κόμβων ανά στοιχείο αυξάνεται από 2 για το γραμμικό στοιχείο σε 3 για το τετραγωνικό στοιχείο.



Σχήμα 3.5: Σφάλμα εξακρίβωσης

3.1.5 Εξισώσεις Στοιχείων για ένα Συγκεκριμένο Πρόβλημα

Με τις συναρτήσεις παρεμβολής που πληρούν τις συνθήκες στις (3.12-3.13), είναι δυνατόν να ξαναγραφούν ως (3.10)

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\} \quad (3.14)$$

όπου $\{u^e\}$ είναι οι μετατοπίσεις κόμβων, $[K^e]$ είναι ο πίνακας στοιχείων δυσκαμψιάς που δίνεται από

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \int_{x_A}^{x_B} EA \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_1^e}{dx} dx & \int_{x_A}^{x_B} EA \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} dx \\ \int_{x_A}^{x_B} EA \frac{dN_2^e}{dx} \frac{dN_1^e}{dx} dx & \int_{x_A}^{x_B} EA \frac{dN_2^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} dx \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

και $\{F^e\}$ είναι το διάνυσμα δύναμης

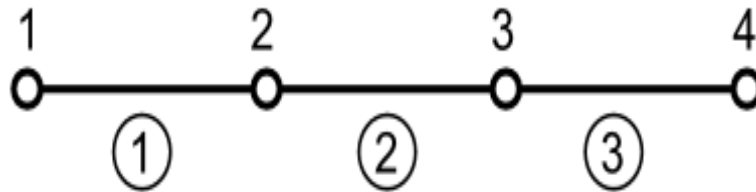
$$\{F_i^e\} = \begin{Bmatrix} \int_{x_A}^{x_B} N_1^e f dx + P_1^e \\ \int_{x_A}^{x_B} N_2^e f dx + P_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Για έναν αριθμό στοιχείων ράβδου δύο κόμβων e , η περιοχή διατομής A_e , το μήκος του στοιχείου και το μέτρο ελαστικότητας E παραμένουν σταθερά. Αυτές οι τιμές ορίζουν το στοιχείο δυσκαμψιάς εφελκυσμού-θλίψης ως :

$$k^e = \frac{EA_e}{h_e} \quad (3.17)$$

Τα εξωτερικά φορτία πάνω στο στοιχείο είναι η κατανεμημένη δύναμη f_e , η δύναμη στο άκρο 1, P_1^e και η δύναμη στο άλλο άκρο 2, P_2^e . Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές, οι γραμμικής συνάρτηση παρεμβολής (3.11) καθώς και τις (3.15)(3.16), το στοιχείο του μητρώου δυσκαμψιάς και οι αντίστοιχες κομβικές δυνάμεις προκύπτει :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} = \frac{EA_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$



Σχήμα 3.6: Συνδεσιμότητα μεταξύ τριών στοιχείων δύο κόμβων

$$\{F^e\} = \frac{f_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

3.1.6 Συναρμολόγηση των Εξισώσεων των Στοιχείων

Οι άγνωστοι παράμετροι του στοιχείου, αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις στους κόμβους των στοιχείων. Δεδομένου ότι ένας κόμβος πρέπει να έχει την ίδια μετατόπιση και στα δύο παρακείμενα στοιχεία, η τιμή είναι μοναδική. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τη συνδεσιμότητα των στοιχείων που φαίνονται στο [Σχήμα 3.6](#), οι μοναδικές ενδείξεις αποδίδονται στις μετατοπίσεις, χρησιμοποιώντας κεφαλαία γράμματα. Ενώ ένας δείκτης υποδηλώνει τον αριθμό του στοιχείου, ένας δείκτης υποδεικνύει έναν αριθμό κόμβου, ως εξής:

$$\begin{aligned} u_1^1 &= U_1 \\ u_2^1 &= U_2 = u_1^2 \\ u_1^2 &= U_3 = u_1^3 \\ u_2^3 &= U_4 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Οι εξισώσεις των στοιχείων μπορούν να συναρμολογηθούν στο καθολικό σύστημα. Πρώτον, η συμβολή του στοιχείου # 1 είναι:

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 h_1 / 2 \\ f_1 h_1 / 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Προσθέτουμε τη συμβολή του στοιχείου # 2, ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 & 0 \\ 0 & -k^2 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 h_1 / 2 \\ f_1 h_1 / 2 + f_2 h_2 / 2 \\ f_2 h_2 / 2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_1^2 \\ P_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Τέλος, προσθέτουμε το στοιχείο # 3 για να βρούμε το πλήρως συναρμολογημένο σύστημα, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 & 0 \\ -k^1 & k^1 + k^2 & -k^2 & 0 \\ 0 & -k^2 & k^2 + k^3 & -k^3 \\ 0 & 0 & -k^3 & k^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} f_1 h_1 \\ f_1 h_1 + f_2 h_2 \\ f_2 h_2 + f_3 h_3 \\ f_3 h_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 + P_1^2 \\ P_2^2 + P_1^3 \\ P_2^3 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

3.1.7 Συνοριακές Συνθήκες

Για λόγους ισορροπίας (βλέπε Σχήμα 2.2), τα εσωτερικά φορτία ακυρώνονται κάθε φορά που δύο στοιχεία μοιράζονται έναν κόμβο, ή

$$\begin{aligned} P_2^1 + P_1^2 &= 0 \\ P_2^2 + P_1^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Τα υπόλοιπα P_1^1 και P_3^2 είναι οι δυνάμεις στο άκρο της ράβδου. Εάν τα άκρα της ράβδου είναι πακτωμένα, τότε η μετατόπιση πρέπει να είναι μηδενική σε αυτά τα άκρα. υποθέτουμε ότι το άκρο στο $x = 0$, τότε $U_1 = 0$. Εάν το άκρο στο $x = L$ είναι ελεύθερο, τότε το P_3^2 πρέπει να προσδιοριστεί, αφού το $U_4 \neq 0$. Εάν δεν είναι καθορισμένη, τότε υποτίθεται ότι η δύναμη είναι μηδέν.

3.1.8 Λύση των Εξισώσεων

Δεδομένου ότι το $U_1 = 0$, εξαλείφοντας την πρώτη σειρά και πρώτη στήλη του μητρώου δυσκαμψίας, προκύπτει ένα σύστημα 3×3 αλγεβρικών εξισώσεων και λύνεται για 3 άγνωστα: U_2, U_3, U_4 . Μόλις βρεθεί μια λύση για το U_2 , η αντίδραση P_1^1 υπολογίζεται από την πρώτη εξίσωση του (3.23), ως εξής:

$$-k^1 U_2 = \frac{f_1 h_1}{2} + P_1^1 \quad (3.25)$$

3.1.9 Λύση Ενδιάμεσα των Στοιχείων

Η λύση U_i για τα 4 σημεία κατά μήκος της ράβδου είναι διαθέσιμη. Στη συνέχεια, η λύση σε οποιαδήποτε θέση x μπορεί να υπολογιστεί με συναρτήσεις παρεμβολής ως εξής:

$$U^e(x) = \sum_{j=1}^2 U_j^e N_j^e(x) \quad (3.26)$$

Η

$$u(x) = \begin{cases} U_1 N_1^1(x) + U_2 N_2^1(x) & \text{αν } 0 \leq x \leq h_1 \\ U_2 N_1^2(x) + U_3 N_2^2(x) & \text{αν } h_1 \leq x \leq h_1 + h_2 \\ U_3 N_1^3(x) + U_4 N_2^3(x) & \text{αν } h_1 + h_2 \leq x \leq h_1 + h_2 + h_3 \end{cases} \quad (3.27)$$

3.1.10 Παραγόμενα Αποτελέσματα

Παραμορφώσεις

Οι παραμορφώσεις υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την (2.5) απευθείας από τις γνωστές μετατοπίσεις ενδιάμεσα του στοιχείου. Για παράδειγμα,

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^2 U_j^e \frac{dN_j^e}{dx} \quad (3.28)$$

Σημειώστε ότι εάν το $N_j^e(x)$ είναι γραμμικές λειτουργίες, τα στελέχη είναι σταθερά πάνω στο στοιχείο. Γενικά η ποιότητα των στελεχών είναι μία τάξη μεγέθους φτωχότερη από την πρωτεύουσα μεταβλητή (μετατοπίσεις).

Τάσεις

Οι τιμές των τάσεων υπολογίζονται από τις παραμορφώσεις μέσω των καταστατικών εξισώσεων. Σε αυτό το παράδειγμα, με μονοδιάστατη συμπεριφορά τάσης παραμόρφωσης

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (3.29)$$

Σημειώνουμε ότι η ποιότητα των τάσεων είναι ίδια με αυτή των πιέσεων.

3.2 Γενική Διαδικασία Πεπερασμένων Στοιχείων

Η πηγή των στοιχείων των εξισώσεων, η συναρμολόγηση και η λύση, για οποιοδήποτε τύπο στοιχείου, είναι παρόμοια με εκείνη του μονοδιάστατου στοιχείου ράβδου που περιγράφεται στην Ενότητα 3.1, με τη διαφορά ότι χρησιμοποιείται η αρχή της εικονικής εργασίας (PVW, 2.16), αντί για την αρχική εξίσωση (3.1). Το PVW παρέχει μια αδύνατη μορφή παρόμοια με αυτή του (3.4). Η επέκταση της (3.16) για πλήρη 3D κατάσταση παραμόρφωσης, είναι η εσωτερική εικονική εργασία:

$$\delta W_1 = \int (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV = \int_V \underline{\sigma}^T \underline{\delta \epsilon} dV \quad (3.30)$$

Όπου

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^T &= \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy} \} \\ \underline{\delta \epsilon}^T &= \{ \delta \epsilon_{xx}, \delta \epsilon_{yy}, \delta \epsilon_{zz}, \delta \epsilon_{yz}, \delta \epsilon_{xz}, \delta \epsilon_{xy} \} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Στη συνέχεια, η εξωτερική εργασία είναι:

$$\delta W_E = \int_V \underline{f}^T \underline{\delta u} dV + \int_S \underline{t}^T \underline{\delta u} dS \quad (3.32)$$

Όπου οι δυνάμεις όγκου ανά μονάδα όγκου και οι επιφανειακές δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας είναι:

$$\underline{f}^T = \{ f_x, f_y, f_z \} \quad \underline{t}^T = \{ t_x, t_y, t_z \} \quad (3.33)$$

Εδώ, η υπογράμμιση ($\underline{\quad}$) υποδηλώνει έναν μονοδιάστατο πίνακα, όχι απαραίτητα ένα διάνυσμα. Για παράδειγμα, \underline{u} είναι ένα διάνυσμα, αλλά $\underline{\sigma}$ είναι τα έξι συνιστώσες της τάσης που είναι διατεταγμένες σε έναν πίνακα έξι στοιχείων. Τα εικονικές παραμορφώσεις είναι παραμορφώσεις που θα προκύψουν από εικονικές μετατοπίσεις \underline{du} (x). Επομένως, εικονικές παραμορφώσεις υπολογίζονται από εικονικές μετατοπίσεις χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης (2.5). Σε διάταξη μητρώου

$$\begin{aligned}\underline{\epsilon} &= \underline{du} \\ \underline{\delta\epsilon} &= \underline{d\delta u}\end{aligned}\quad (3.34)$$

Όπου

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (3.35)$$

Στη συνέχεια, το PVW γράφεται σε μορφή μητρώου ως:

$$\int_V \underline{\sigma}^T \underline{d\delta u} dV = \int_V \underline{f}^T \underline{\delta u} dV + \int_S \underline{t}^T \underline{\delta u} dS \quad (3.36)$$

Τα ολοκληρώματα πάνω από τον όγκο V και την επιφάνεια S του σώματος, μπορούν να χωριστούν ανά στοιχείο, επί των στοιχείων m , ως:

$$\sum_{e=1}^m \left[\int_{V_e} \underline{\sigma}^T \underline{d\delta u} dV \right] = \sum_{e=1}^m \left[\int_{V_e} \underline{f}^T \underline{\delta u} dV + \int_{S_e} \underline{t}^T \underline{\delta u} dS \right] \quad (3.37)$$

Κάθε φορά που δύο στοιχεία μοιράζονται μια επιφάνεια, η συμβολή του δεύτερου ολοκληρώματος ακυρώνεται, ακριβώς όπως ακυρώνονται τα εσωτερικά φορτία στην ενότητα 3.1.7. Οι συνιστώσες της τάσης δίδονται από τις θεμελιώδεις εξισώσεις. Για γραμμικό υλικό

$$\underline{\sigma} = \underline{C}\underline{\epsilon} \quad (3.38)$$

με το \underline{C} να δίνεται από την (1.68). Η εσωτερική εικονική εργασία πάνω από κάθε στοιχείο γίνεται:

$$\delta W_l^e = \int_{V_e} \underline{\sigma}^T \underline{\delta\epsilon} dV = \int_{V_e} \underline{\epsilon}^T \underline{C} \underline{\delta\epsilon} dV \quad (3.39)$$

Η επέκταση των μετατοπίσεων μπορεί να γραφτεί σε μορφή πίνακα ως:

$$\underline{u} = \underline{N}\underline{a} \quad (3.40)$$

Όπου \underline{N} περιέχει τις συναρτήσεις παρεμβολής στοιχείου και τις κομβικές μετατοπίσεις του στοιχείου, όπως και στην Ενότητα 3.1.4. Επομένως, οι παραμορφώσεις είναι:

$$\underline{\epsilon} = \underline{d}\underline{u} = \underline{d}\underline{N}\underline{a} = \underline{B}\underline{a} \quad (3.41)$$

όπου $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{dN}}$ είναι ο πίνακας παραμορφώσεων-μετατοπίσεων. Η διακριτοποιημένη μορφή της εσωτερικής εικονικής εργασίας πάνω σε ένα στοιχείο μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\delta W_l^e = \int_{V_e} \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{CB}} \delta \alpha dV = \underline{\underline{a}}^T \int_{V_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{CB}} dV \delta \alpha = \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{K}}^e \delta \alpha \quad (3.42)$$

όπου το στοιχείο του μητρώου δυσκαμψίας K^e είναι:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{V_e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{CB}} dV \quad (3.43)$$

Η εξωτερική εικονική εργασία γίνεται:

$$\delta W_E^e = \int_{V_e} \underline{\underline{f}}^T \delta \underline{\underline{u}} dV + \int_{S_e} \underline{\underline{t}}^T \delta \underline{\underline{u}} dS = (\int_{V_e} \underline{\underline{f}}^T \underline{\underline{N}} dV + \int_{S_e} \underline{\underline{t}}^T \underline{\underline{N}} dS) \delta \alpha = (\underline{\underline{P}}^e)^T \delta \alpha \quad (3.44)$$

Όπου το διάνυσμα του στοιχείου δύναμης είναι :

$$\underline{\underline{P}}^e = \int_{V_e} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{f}} dV + \int_{S_e} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{t}} dS \quad (3.45)$$

Τα ολοκληρώματα πάνω από τον όγκο του στοιχείου V_e και την επιφάνεια του στοιχείου S_e συνήθως προσδιορίζονται αριθμητικά με τη διαδικασία Gauss. Για το ολοκλήρωμα όγκου, μια τέτοια διαδικασία χρειάζεται έλεγχο σε μερικά σημεία μέσα στον όγκο. Αυτά τα σημεία, τα οποία ονομάζονται σημεία Gauss, είναι σημαντικά για δύο λόγους. Πρώτον, ο πίνακας C αξιολογείται σε αυτές τις θέσεις. Δεύτερον, οι πιο ακριβείς τιμές των παραμορφώσεων (και των τάσεων) λαμβάνονται επίσης σε αυτές τις θέσεις.

Η συναρμογή των εξισώσεων στοιχείων δW_l^e και δW_E^e στο PVW για ολόκληρο το σώμα γίνεται με τον ίδιο τρόπο με τη διαδικασία στην Ενότητα 3.1.6. Προφανώς η διαδικασία είναι πιο πολύπλοκη από ότι για τα στοιχεία ράβδου. Οι λεπτομέρειες αυτής της διαδικασίας και ο προγραμματισμός της στον υπολογιστή είναι μέρος της τεχνολογίας των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία δεν εμπίπτει στο πεδίο εφαρμογής του παρόντος εγχειριδίου. Τέλος, όλοι οι πίνακες στοιχείων δυσκαμψίας K^e και οι φορείς δύναμης P^e είναι συγκεντρωμένοι σε ένα καθολικό σύστημα για ολόκληρο το σώμα:

$$\underline{\underline{Ka}} = \underline{\underline{P}} \quad (3.46)$$

Οι συνοριακές συνθήκες εφαρμόζονται στο σύστημα (3.46) με ένα συστηματικό τρόπο που μοιάζει με τη διαδικασία του κεφαλαίου 3.1.6. Ακολούθως, το αλγεβρικό σύστημα των εξισώσεων (3.46) επιλύεται για να βρεθεί ο πίνακας των κομβικών μετατοπίσεων $\underline{\underline{a}}$ σε ολόκληρο το σώμα. Δεδομένου ότι τα αποτελέσματα των μετατοπίσεων των κόμβων για κάθε στοιχείο, μπορούν να βρεθούν κάπου στο $\underline{\underline{a}}$, είναι δυνατόν να επιστρέψουμε στη (3.34) και στη (3.38) για να υπολογίσουμε τις παραμορφώσεις και τις τάσεις μέσα στα στοιχεία.

4 Παράμετροι Σχεδιασμού Αξόνων Μετάδοσης Κίνησης από Σύνθετα Υλικά

Πριν διαμορφώσουμε τις παραμέτρους σχεδίασης σύνθετων υλικών πολυμερούς μήτρας ενισχυμένης με ίνες μονής κατεύθυνσης, είναι απαραίτητο να καθορίσουμε τον λόγο όγκο, της μάζας των ινών και της μήτρας στο σύνθετο υλικό. Αυτές οι μαθηματικές έννοιες είναι κρίσιμες στη μηχανική των σύνθετων υλικών, καθώς οι θεωρητικοί τύποι προσδιορισμού της δυσκαμψίας και της αντοχής σύνθετων υλικών είναι συναρτήσει αυτών των λόγων. Σημαντικό είναι επίσης να προσδιορίσουμε και την πυκνότητα του σύνθετου υλικού, καθώς η τιμή της χρησιμοποιείται στον πειραματικό προσδιορισμό της μάζας του σύνθετου υλικού.

4.1 Λόγος Όγκου V Μήτρας και Ινών Σύνθετου Υλικού

Θεωρούμε ότι ένα σύνθετο υλικό αποτελείται πολυμερή μήτρα ενισχυμένη με ίνες όπου :

$u_{c,f,m}$ = όγκος σύνθετου, ινών και μήτρας αντίστοιχα

$\rho_{c,f,m}$ = πυκνότητα σύνθετου, ινών και μήτρας αντίστοιχα

Τότε ο λόγος του όγκου των ινών και της μήτρας καθορίζεται ως [14] :

$$V_f = \frac{u_f}{u_c} \quad (4.1)$$

και

$$V_m = \frac{u_m}{u_c} \quad (4.2)$$

Ισχύει :

$$V_f + V_m = 1$$

Καθώς

$$u_f + u_m = u_c$$

4.2 Λόγος Μάζας W Σύνθετου Υλικού

Θεωρούμε ότι ένα σύνθετο υλικό αποτελείται από πολυμερή μήτρα ενισχυμένη με ίνες όπου :

$w_{c,f,m}$ = μάζα σύνθετου, ινών και μήτρας αντίστοιχα

Τότε ο λόγος της μάζας των ινών και της μήτρας καθορίζεται ως [14] :

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} \quad (4.3)$$

Και

$$W_m = \frac{w_m}{w_c} \quad (4.4)$$

Ισχύει :

$$W_f + W_m = 1$$

Καθώς

$$w_f + w_m = w_c$$

Από τον ορισμό της πυκνότητας της ύλης για ένα υλικό προκύπτει

$$w_c = r_c u_c \quad , \quad w_f = r_f u_f \quad , \quad w_m = r_m u_m \quad (4.5-4.7)$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει [14]

$$W_f = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f \quad (4.8)$$

$$W_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} V_m \quad (4.9)$$

$$W_f = \frac{\frac{\rho_f}{\rho_m}}{\frac{\rho_f}{\rho_m} V_f + V_m} V_f \quad (4.10)$$

$$W_m = \frac{1}{\frac{\rho_f}{\rho_m}(1-V_m) + V_m} V_m \quad (4.11)$$

4.3 Πυκνότητα ρ Σύνθετου Υλικού

Η πυκνότητα ενός σύνθετου υλικού καθορίζεται ως εξής :

Η μάζα του σύνθετου είναι το άθροισμα της μάζας των ινών και της μάζας της μήτρας.

$$w_c = w_f + w_m \quad (4.12)$$

Προκύπτει
$$\rho_c u_c = \rho_f u_f + \rho_m u_m$$

Και
$$\rho_c = \rho_f \frac{u_f}{u_c} + \rho_m \frac{u_m}{u_c} \quad (4.13)$$

Από τους προηγούμενους ορισμούς προκύπτει[14]

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (4.14)$$

Και
$$u_c = u_f + u_m \quad (4.15)$$

Τελικά
$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{W_f}{\rho_f} + \frac{W_m}{\rho_m} \quad (4.16)$$

4.4 Προσδιορισμός Μέτρων Ελαστικότητας (Κανόνας Ανάμειξης)

Ένα σύνθετο υλικό ενισχυμένο με ίνες μονής κατεύθυνσης είναι ένα ορθοτροπικό υλικό. Ο γενικευμένος νόμος ελαστικότητας του Hooke συνδέει τάσεις και παραμορφώσεις και περιέχει 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

Για μια λεπτή πλάκα, όπως μια στρώση ενός σύνθετου υλικού σε επίπεδη εντατική κατάσταση, δηλαδή $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$, οι 9 ελαστικές σταθερές μπορούν να περιοριστούν σε 4 και να γραφούν ως ακολούθως :

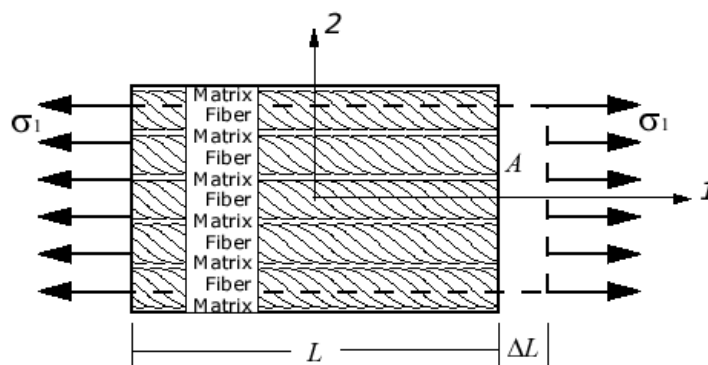
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

- Διαμήκης μέτρο ελαστικότητας E_1
- Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_2
- Λόγος Poisson ν_{12} και ν_{21}
- Μέτρο διάτμησης G_{12}

$$\text{και ισχύει } \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (4.18)$$

4.4.1 Προσδιορισμός Μέτρου Ελαστικότητας E_1

Υποθέτουμε ότι οι δεσμοί μεταξύ των ινών και της μήτρας είναι τέλει και ότι η παραμόρφωση της μήτρας είναι ίδια κατά την διεύθυνση των ινών, όταν το στρώμα υπόκειται σε αξονική φόρτιση όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 4.1: Παραμόρφωση μήτρας και ινών υπό αξονική φόρτιση

Η συνολική δύναμη που εφαρμόζεται στο στρώμα του σύνθετου είναι :

$$P_1 = \sigma_1 A_1 = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (4.19)$$

Όπου A_f και A_m είναι η διατομή επιφανείας των ινών και της μήτρας αντίστοιχα. Το διαμήκη μέτρο ελαστικότητας E_1 μπορεί να γραφεί [14]:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \quad (4.20)$$

$$E_1 = \frac{P_1/A_1}{\varepsilon_1} \quad (4.21)$$

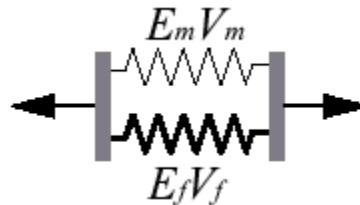
$$E_1 = \frac{\sigma_f A_f + \sigma_m A_m}{A_1 \varepsilon_1} \quad (4.22)$$

$$E_1 = \frac{\sigma_f A_f}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{\sigma_m A_m}{\varepsilon_1 A_1} \quad (4.23)$$

$$E_1 = \frac{\sigma_f L A_f}{\varepsilon_1 L A_1} + \frac{\sigma_m L A_m}{\varepsilon_1 L A_1} \quad (4.24)$$

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (4.25)$$

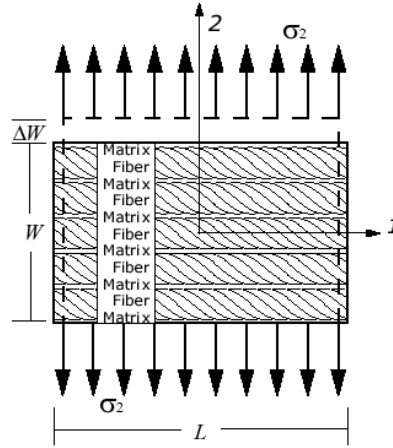
Όπου V και L είναι ο όγκος και το μήκος του στρώματος αντίστοιχα. Μπορούμε να απεικονίσουμε τις ίνες και την μήτρα σαν δύο παράλληλα ελατήρια όπως φαίνονται στην εικόνα :



Σχήμα 4.2: Σχηματική απεικόνιση μήτρας και ινών ως παράλληλα ελατήρια

4.4.2 Προσδιορισμός Μέτρου Ελαστικότητας E_2

Υποθέτουμε ξανά τέλειους δεσμούς μεταξύ των ινών και μήτρας και ότι η παραμόρφωση της μήτρας είναι ίδια κατά την εγκάρσια διεύθυνση ως προς τις ίνες όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 4.3: Παραμόρφωση μήτρας και ινών υπό εγκάρσια φόρτιση

$$\text{Η εγκάρσια παραμόρφωση είναι } \varepsilon_2 = V_f \varepsilon_f + V_m \varepsilon_m \quad (4.26)$$

Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_2 μπορεί να υπολογιστεί από το μοντέλο των ελατηρίων σε σειρά [14]:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \quad (4.27)$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{V_f \varepsilon_f + V_m \varepsilon_m} \quad (4.28)$$

$$E_2 = \frac{1}{\frac{V_f \varepsilon_f + V_m \varepsilon_m}{\sigma_2}} \quad (4.29)$$

$$E_2 = \frac{1}{\frac{V_f \varepsilon_f}{E_f \varepsilon_f} + \frac{V_m \varepsilon_m}{E_m \varepsilon_m}} \quad (4.30)$$

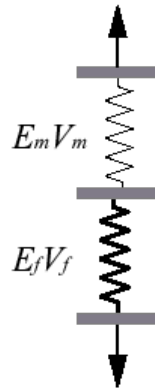
$$E_2 = \frac{1}{\frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}} \quad (4.31)$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + V_m E_f} \quad (4.32)$$

$$\eta$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (4.33)$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι ίνες και η μήτρα δρουν ως δύο ελατήρια σε σειρά :



Σχήμα 4.4: Σχηματική απεικόνιση μήτρας και ινών ως ελατήρια σε σειρά

4.4.3 Προσδιορισμός Λόγου Poisson ν_{12}

Ο λόγος Poisson ν_{12} ορίζεται ως
$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (4.34)$$

Από τον καθορισμό του E_1 έχουμε
$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1 \quad (4.35)$$

και
$$\varepsilon_2 = V_f \nu_f \varepsilon_f + V_m \nu_m \varepsilon_m \quad (4.36)$$

$$\varepsilon_2 = -(V_f \nu_f \varepsilon_f + V_m \nu_m \varepsilon_m) \quad (4.37)$$

Οπότε ο λόγος Poisson ν_{12} μπορεί να γραφεί ως [14]

$$\nu_{12} = \frac{V_f \nu_f \varepsilon_f}{\varepsilon_f} + \frac{V_m \nu_m \varepsilon_m}{\varepsilon_m} \quad (4.38)$$

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + V_m \nu_m \quad (4.39)$$

4.4.4 Προσδιορισμός Μέτρου Διάτμησης G_{12}

Βασισμένοι στο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στη διαδικασία προσδιορισμού του μέτρου ελαστικότητας E_2 , υποθέτουμε ότι η διατμητική τάση τ των ινών και της μήτρας είναι ίδια.

$$\tau = G_f \gamma_f = G_m \gamma_m \quad (4.40)$$

Η διατμητική παραμόρφωση είναι $\gamma = V_f \gamma_f + V_m \gamma_m$ (4.41)

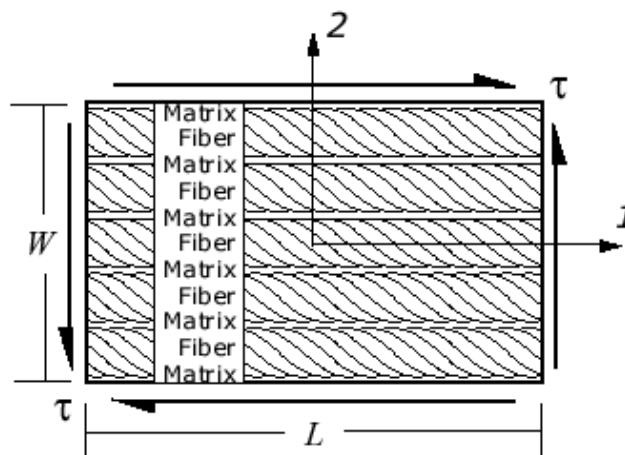
Το μέτρο διάτμησης G_{12} μπορεί να υπολογιστεί από το μοντέλο των ελατηρίων σε σειρά [14]:

$$G_{12} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{1}{\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m}} \quad (4.42)$$

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + V_m G_f} \quad (4.43)$$

η

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (4.44)$$



Σχήμα 4.5: Παραμόρφωση μήτρας και ινών υπό διατμητική φόρτιση

4.5 Προσδιορισμός Μητρώου Δυσκαμψίας [Q]

Από τις ιδιότητες των σύνθετων υλικών και με δεδομένες τις γωνίες των ινών, μπορούμε να κατασκευάσουμε το μητρώο δυσκαμψίας [Q].

$$[\sigma] = [Q][\varepsilon] \quad (4.45)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

Οι συντελεστές του μητρώου είναι οι ακόλουθοι :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}$$

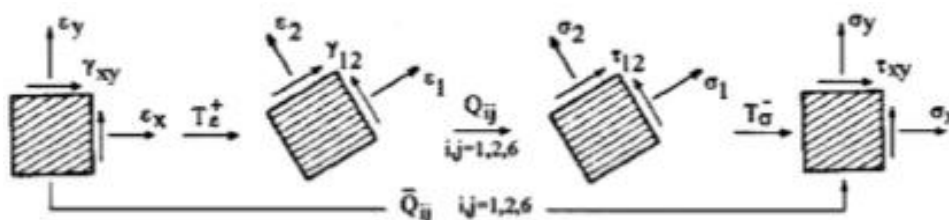
Όπου οι όροι $Q_{16} = Q_{26} = Q_{61} = Q_{62} = 0$.

4.6 Προσδιορισμός Μετασχηματισμένων Όρων Δυσκαμψίας [Q_{ij}]

Στο σύστημα υλικού 1-2 η σχέση τάσεων παραμορφώσεων είναι :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{vmatrix} \quad (4.47)$$

Στο σύστημα x-y στραμμένο κατά γωνία θ σε σχέση με το σύστημα υλικού, προσδιορίζουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις σ_x , σ_y , και τ_{xy} με τις παραμορφώσεις ε_x , ε_y , και γ_{xy} στο στραμμένο σύστημα x-y. Δηλαδή εκφράζουμε τους όρους δυσκαμψίας Q_{ij} στο σύστημα x-y.



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα μετασχηματισμού των όρων δυσκαμψίας [Q_{ij}]

Αρχικά εκφράζουμε τις παραμορφώσεις ε_1 , ε_2 , και γ_{12} ως προς τις παραμορφώσεις ε_x , ε_y , και γ_{xy} στο σύστημα x-y μέσω του θετικού μετασχηματισμού τάσεων [T_e^+].

$$\varepsilon_1 = c^2 \varepsilon_x + s^2 \varepsilon_y + cs \gamma_{xy} \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_2 = s^2 \varepsilon_x + c^2 \varepsilon_y - cs \gamma_{xy} \quad (4.49)$$

$$\gamma_{12} = -2cs \varepsilon_x + 2cs \varepsilon_y + (c^2 - s^2) \gamma_{xy} \quad (4.50)$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε τις τάσεις σ_1 , σ_2 , τ_{12} ως προς τις παραμορφώσεις ε_x , ε_y , και γ_{xy} .

$$\sigma_1 = (c^2 Q_{11} + s^2 Q_{12})\varepsilon_x + (s^2 Q_{11} + c^2 Q_{12})\varepsilon_y + (Q_N - Q_{12})cs\gamma_{xy} \quad (4.51)$$

$$\sigma_2 = (c^2 Q_{12} + s^2 Q_{22})\varepsilon_x + (s^2 Q_{12} + c^2 Q_{22})\varepsilon_y + (Q_{12} - Q_{22})cs\gamma_{xy} \quad (4.52)$$

$$\tau_{12} = -2csQ_{66}\varepsilon_x + 2csQ_{66}\varepsilon_y + (c^2 - s^2)Q_{66}\gamma_{xy} \quad (4.53)$$

Έπειτα εκφράζουμε τις τάσεις σ_1 , σ_2 , τ_{12} ως προς τις παραμορφώσεις ε_x , ε_y , και γ_{xy} στο σύστημα x-y μέσω του αρνητικού μετασχηματισμού τάσεων $[T_y]$.

$$\sigma_x = c^2\sigma_1 + s^2\sigma_2 - 2cs\tau_{12} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = & c^2[(c^2 Q_{11} + s^2 Q_{12})\varepsilon_x + (s^2 Q_{11} + c^2 Q_{12})\varepsilon_y + sc(Q_{11} - Q_{12})\gamma_{xy}] + s^2[(c^2 Q_{12} + \\ & s^2 Q_{22})\varepsilon_x + (s^2 Q_{12} + c^2 Q_{22})\varepsilon_y + sc(Q_{12} - Q_{22})\gamma_{xy}] - 2cs^2[-2csQ_{66}\varepsilon_x + 2csQ_{66}\varepsilon_y + \\ & (c^2 - s^2)Q_{66}\gamma_{xy}] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Αντικαθιστώντας :

$$\begin{aligned} \sigma_x = & [c^4 Q_{11} + s^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 Q_{12} + 4c^2 s^2 Q_{66}]\varepsilon_x + \\ & + [c^2 s^2 Q_{11} + c^2 s^2 Q_{22} + (c^4 + s^4)Q_{12} - 4c^2 s^2 Q_{66}]\varepsilon_y + \\ & + [c^3 s Q_{11} - c s^3 Q_{22} + (c s^3 - c^3 s)Q_{12} + 2(c s^3 - c^3 s)Q_{66}] \gamma_{xy} = \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\sigma_x = \overline{Q}_{11}\varepsilon_x + \overline{Q}_{12}\varepsilon_y + \overline{Q}_{16}\gamma_{xy} \quad (4.57)$$

Ομοίως αναπτύσσουμε και τα σ_y , τ_{xy} και καταλήγουμε στις εκφράσεις :

$$\sigma_y = \overline{Q}_{12}\varepsilon_x + \overline{Q}_{22}\varepsilon_y + \overline{Q}_{26}\gamma_{xy} \quad (4.58)$$

$$\tau_{xy} = \overline{Q}_{16}\varepsilon_x + \overline{Q}_{26}\varepsilon_y + \overline{Q}_{66}\gamma_{xy} \quad (4.59)$$

Οι μετασχηματισμένοι όροι υπολογίζονται συναρτήσει των Q_{ij} ως ακολούθως :

$$\begin{vmatrix} \overline{Q}_{11} \\ \overline{Q}_{22} \\ \overline{Q}_{12} \\ \overline{Q}_{66} \\ \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{26} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3 - c^3s & 2(cs^3 - c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s - cs^3 & 2(c^3s - cs^3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ \end{vmatrix} \quad (4.60)$$

Ισχύει ότι $Q_{16} = 0$, $Q_{26} = 0$

Τελικά η σχέση τάσεων παραμορφώσεων στο σύστημα x-y παίρνει την μορφή του ακόλουθου μητρώου :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} \quad (4.61)$$

Αναλυτικά μπορούν να γραφούν ως [15]:

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \quad (4.62)$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \quad (4.63)$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \quad (4.64)$$

$$\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \quad (4.65)$$

$$\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \quad (4.66)$$

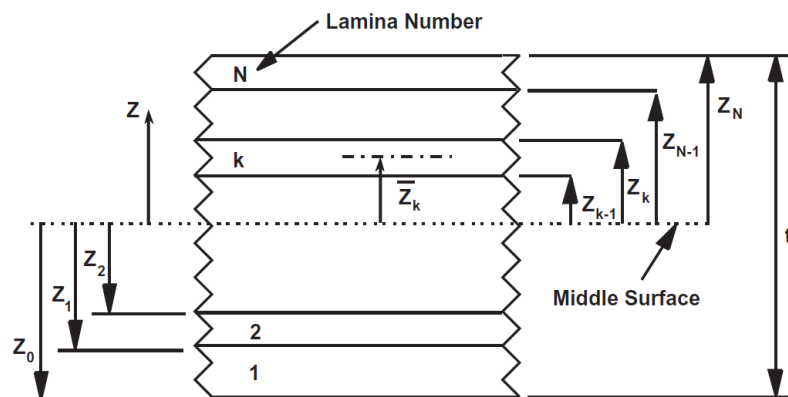
$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \quad (4.67)$$

4.7 Προσδιορισμός Μητρώου Μεμβρανικής Δυσκαμψίας [A]

Το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή του μητρώου μεμβρανικής δυσκαμψίας το οποίο είναι το άθροισμα των μετασχηματισμένων όρων δυσκαμψίας $[Q_{ij}]_n$ για κάθε στρώμα επί το αντίστοιχο πάχους του στρώματος[15].

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \{Q_{ij}\}_n (z_k - z_{k-1}) \quad (4.68)$$

Το μητρώο $[A]$ έχει μονάδες $\text{Pa} \cdot \text{m}$ και τα πάχη των στρώσεων υπολογίζονται σύμφωνα με σύστημα συντεταγμένων της στρωματομορφής[15]:



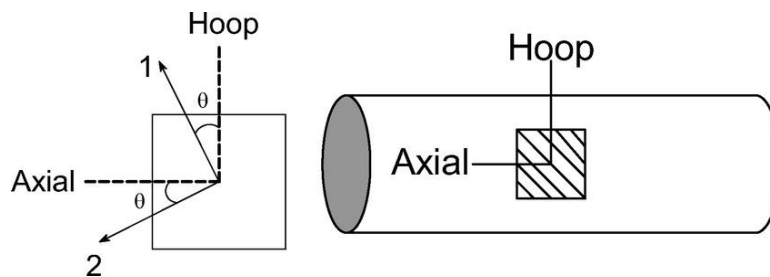
Σχήμα 4.7: Γεωμετρία στρωματοποίησης για N στρώσεις

4.8 Προσδιορισμός Μέτρων Ελαστικότητας E_x , E_h

Ο προσδιορισμός του μητρώου μεμβρανικής δυσκαμψίας $[A]$ χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των μέτρων ελαστικότητας E_x , E_h τα οποία είναι ο μέσος όρος των μέτρων ελαστικότητας κατά την αξονική και την εφαπτομενική διεύθυνση αντιστοίχως[15].

$$E_x = \frac{1}{t} \left[A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right] \quad (4.69)$$

$$E_h = \frac{1}{t} \left[A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right] \quad (4.70)$$



Σχήμα 4.8: αξονική και εφαπτομενική διεύθυνση άξονα

4.9 Υπολογισμός Κρίσιμου Στρεπτικού Λυγισμού T_{cr}

Εφόσον ο άξονας μετάδοσης κίνησης είναι αρκετά μακρύς, κοίλος και λεπτότοιχος, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα ότι κατά την διάρκεια της λειτουργίας του θα υποστεί λυγισμό. Η εξίσωση του κρίσιμου στρεπτικού λυγισμού για λεπτότοιχους ορθοτροπικούς κυλίνδρους δίνεται από την σχέση [8]:

$$T_{cr} = (2\pi r^2 t)(0.272) [E_x E_h^3]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{t}{r} \right)^{3/2} \quad (4.71)$$

Όπου r είναι η μέση ακτίνα, t είναι το συνολικό πάχος τοιχώματος.

4.10 Υπολογισμός Θεωρητικής Φυσικής Συχνότητας f_n

Η εξίσωση για την χαμηλότερη φυσική συχνότητα δίνεται από την σχέση [8]:

$$f_n = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{gE_x I}{WL^4}} \quad (4.72)$$

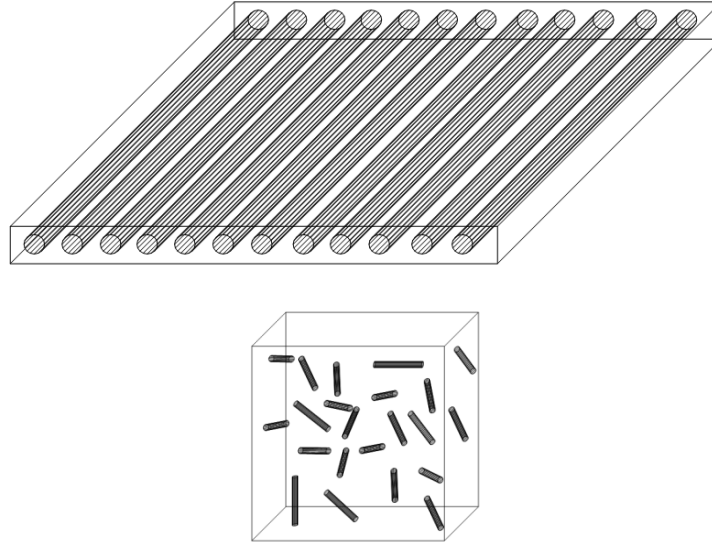
Όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, W είναι το βάρος ανά μονάδα μήκους, L είναι το μήκος του άξονα και I είναι η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας για λεπτότοιχους κυλίνδρους.

$$I_x = \frac{\pi}{4} (r_o^4 - r_i^4) \quad (4.73)$$

Όπου r_o είναι η εξωτερική ακτίνα και r_i η εσωτερική ακτίνα του άξονα.

5 Υπολογισμός Μηχανικών Ιδιοτήτων Σύνθετων Υλικών Ενισχυμένων με Νανοδομές

Για να προσδιοριστεί η μηχανική συμπεριφορά ενισχυμένων σύνθετων υλικών πολυμερούς μήτρας με πολύτοιχους νανοσωλήνες άνθρακα υπό καμπτικό φορτίο, πρέπει να είναι γνωστά ιδιότητες του υλικού όπως το μέτρο ελαστικότητας, ο λόγος Poisson και το μέτρο διάτμησης. Αυτές οι ιδιότητες υλικών μπορούν να προσδιοριστούν θεωρητικά και πειραματικά. Στην παρούσα μελέτη, χρησιμοποιήθηκε το θεωρητικό μοντέλο για να βρεθούν οι μηχανικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού. Οι μηχανικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού πολυμερούς μήτρας ενισχυμένου με πολύτοιχους νανοσωλήνες άνθρακα προσδιορίστηκαν κάνοντας κάποιες υποθέσεις. Οι νανοσωλήνες είναι ομογενώς και τυχαία προσανατολισμένοι στην μήτρα. Επίσης, η μήτρα συμπεριφέρεται ισοτροπικά και θεωρείται ως ανεξάρτητη δομή στο σύνθετο υλικό στους θεωρητικούς υπολογισμούς[9]. Στρώμα σύνθετου υλικού ινών άνθρακα μονής κατεύθυνσης (Σχήμα 5.1)



Σχήμα 5.1: Απεικόνιση στρώματος σύνθετου υλικού ενισχυμένου με νανοσωλήνες

5.1 Επιστημονικό Μοντέλο Halpin-Tsai

Το επιστημονικό μοντέλο Halpin-Tsai, για την ασυνέχεια στρωμάτων ενισχυμένων με ίνες, χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας με τους νανοσωλήνες άνθρακα που προστέθηκαν. Σε αυτό το μοντέλο, οι νανοσωλήνες άνθρακα θεωρήθηκαν ως τυχαίου προσανατολισμού με ασυνεχείς ίνες.

Το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση[9]:

$$E_{m-cnt} = \frac{3}{8} \frac{1+2\left(\frac{l_{NT}}{d_{NT}}\right)\left(\frac{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)+2\left(\frac{l_{NT}}{d_{NT}}\right)}\right)V_{nt}}{1-\left(\frac{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)+2\left(\frac{l_{NT}}{d_{NT}}\right)}\right)V_{nt}} E_m + \frac{5}{8} \frac{1+2\left(\frac{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)+2}\right)V_{nt}}{1-\left(\frac{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)+2}\right)V_{nt}} E_m \quad (5.1)$$

όπου το E_m είναι το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας, V_{NT} είναι ο περιεχόμενος όγκος νανοσωλήνων άνθρακα, και τα l_{NT} και d_{NT} είναι μήκος και διάμετρος του νανοσωλήνα αντίστοιχα. E_{eq} είναι το ισοδύναμο μέτρο του νανοσωλήνα, λαμβάνοντας ότι ο διάτρητος εσωτερικά κύλινδρος είναι μασίφ κύλινδρο και μπορεί να εκφραστεί ως:

$$E_{eq} = \left(\frac{2t}{r}\right) E_{nt} \quad (5.2)$$

όπου t, r και E_{nt} είναι πάχος τοιχώματος, ακτίνα και μέτρο ελαστικότητας του νανοσωλήνα αντίστοιχα.

5.2 Εξίσωση Tsai-Pagano

Η εξίσωση που αναπτύχθηκε από τους Tsai-Pagano μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του μέτρου διάτμησης της μήτρας, ενισχυμένη με νανοσωλήνες άνθρακα[9].

$$G_{m-cnt} = \frac{1}{8} \frac{1+2\left(\frac{l_{nt}}{d_{nt}}\right) \left(\frac{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)^{-1}}{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)+2\left(\frac{l_{nt}}{d_{nt}}\right)}\right) V_{nt}}{1-\left(\frac{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)^{-1}}{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)+2\left(\frac{l_{nt}}{d_{nt}}\right)}\right) V_{nt}} E_m + \frac{1}{4} \frac{1+2\left(\frac{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)^{-1}}{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)+2}\right) V_{nt}}{1-\left(\frac{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)^{-1}}{\left(\frac{E_{eq}}{E_m}\right)+2}\right) V_{nt}} E_m \quad (5.3)$$

Ο λόγος Poisson για μήτρα ενισχυμένη με νανοσωλήνες άνθρακα, η οποία έχει ισότροπη συμπεριφορά μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω εξίσωση:

$$\Theta_{m-cnt} = \frac{E_{m-cnt}}{2G_{m-cnt}} - 1 \quad (5.4)$$

5.3 Ημί-Εμπειρικό Μοντέλο Halpin-Tsai

Οι τιμές που προκύπτουν από τον προσδιορισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_2 και του μέτρου διάτμησης G_{12} από τον κανόνα της ανάμειξης, δεν συμφωνούν απόλυτα με τα πειραματικά αποτελέσματα. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη εύρεσης μιας καλύτερης τεχνικής πρόβλεψης αυτών των ιδιοτήτων. Τέτοιες τεχνικές περιλαμβάνουν αριθμητικές μεθόδους όπως, πεπερασμένα στοιχεία, πεπερασμένες διαφορές, μεθόδους οριακών πεπερασμένων στοιχείων κ.α. Δυστυχώς όμως αυτά τα μοντέλα είναι διαθέσιμα ως πολύπλοκες εξισώσεις ή σε μορφή διαγραμμάτων.

Εξαιτίας αυτών των δυσκολιών, αναπτύχθηκαν ημί-εμπειρικά μοντέλα για αυτόν τον σκοπό. Ένα από τα πιο εύχρηστα είναι αυτό των Halpin-Tsai το οποίο χρησιμοποιείται σε μια ευρεία γκάμα ελαστικών ιδιοτήτων και λόγω όγκου των ινών.

5.3.1 Διαμήκης Μέτρο Ελαστικότητας E_1

Η εξίσωση των Halpin-Tsai για το διαμήκης μέτρο ελαστικότητας E_1 είναι η ίδια με αυτή που προκύπτει από την προσέγγιση του κανόνα ανάμειξης[14]

$$E_1 = E_f V_f + E_{m-cnt} V_m \quad (5.5)$$

5.3.2 Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας E_2

Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας, E_2 δίνεται από την σχέση

$$\frac{E_2}{E_{m-cnt}} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (5.6)$$

Όπου

$$\eta = \frac{\frac{E_{f22}}{E_{m-cnt}} - 1}{\frac{E_{f22}}{E_{m-cnt}} + \xi} \quad (5.7)$$

Το παράγοντας ξ ονομάζεται ενισχυτικός παράγοντας και εξαρτάται από τη γεωμετρία ινών και τις συνθήκες φόρτισης. Για τον υπολογισμό του E_2 το $\xi=2$ [14]

5.3.3 Λόγος Poisson ν_{12}

Η εξίσωση των Halpin-Tsai για τον λόγο Poisson ν_{12} είναι η ίδια με αυτή που προκύπτει από την προσέγγιση του κανόνα ανάμειξης[14].

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \theta_{m-cnt} V_m \quad (5.8)$$

5.3.4 Λόγος Poisson ν_{23}

Η εξίσωση των Halpin-Tsai για τον λόγο Poisson ν_{23} προκύπτει από την σχέση

$$\frac{u_{23}}{\theta_{m-cnt}} = \frac{1+\xi\eta V_f}{1-\eta V_f} \quad (5.9)$$

όπου

$$\eta = \frac{\frac{\nu_{f23}}{\theta_{m-cnt}} - 1}{\frac{\nu_{f23}}{\theta_{m-cnt}} + \xi} \quad (5.10)$$

Για τον υπολογισμό του ν_{23} ο παράγοντας $\xi = I[14]$

5.3.5 Μέτρο Διάτμησης G_{12}

Το μέτρο διάτμησης G_{12} δίνεται από την σχέση

$$\frac{G_{12}}{G_{m-cnt}} = \frac{1+\xi\eta V_f}{1-\eta V_f} \quad (5.11)$$

Όπου

$$\eta = \frac{\frac{G_{f12}}{G_{m-cnt}} - 1}{\frac{G_{f12}}{G_{m-cnt}} + \xi} \quad (5.12)$$

Για τον υπολογισμό του G_{12} ο παράγοντας $\xi = I[14]$

5.3.6 Μέτρο Διάτμησης G_{23}

Το μέτρο διάτμησης G_{23} δίνεται από την σχέση

$$\frac{G_{23}}{G_{m-cnt}} = \frac{1+\xi\eta V_f}{1-\eta V_f} \quad (5.13)$$

Όπου

$$\eta = \frac{\frac{G_{f23}}{G_{m-cnt}} - 1}{\frac{G_{f23}}{G_{m-cnt}} + \xi} \quad (5.14)$$

Για τον υπολογισμό του G_{23} ο παράγοντας $\xi=I[14]$

6 Μοντελοποίηση Άξονα Μετάδοσης Κίνησης από Σύνθετα Υλικά

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων η οποία μετατρέπει μια φυσική κατασκευή σε ένα πολυσύνθετο σύστημα σημείων, είναι μια αριθμητική τεχνική που μας βοηθάει να προσεγγίσουμε την λύση ενός προβλήματος. Για τον σχεδιασμό και την ανάλυση του άξονα μετάδοσης κίνησης από σύνθετα υλικά, χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Abaqus CAE, μέσω του οποίου θα προβλέψουμε την συμπεριφορά του πολυστρωματικού άξονα υπό την επίδραση συγκεκριμένων φορτίσεων.

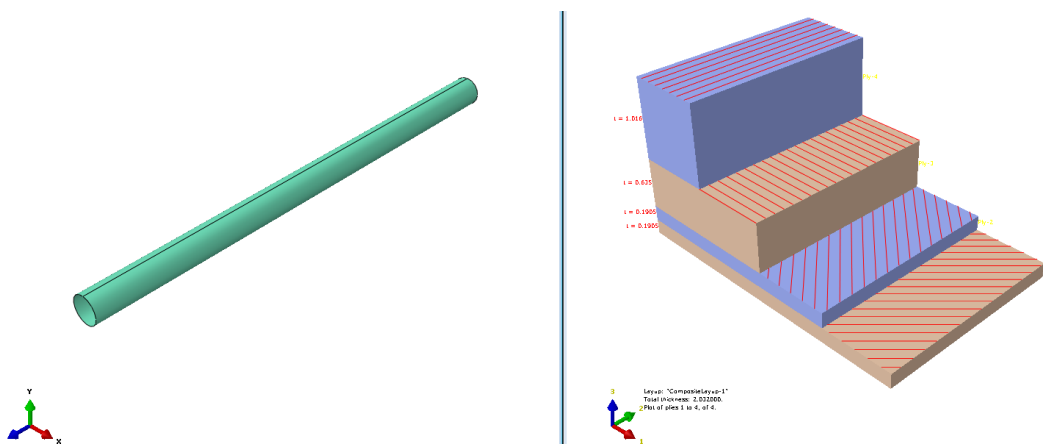
6.1 Σχεδιαστικές Προδιαγραφές Άξονα

Ο άξονας μετάδοσης κίνησης πρέπει να σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να μεταφέρει στρεπτική ροπή με επιτυχία. Ο βασικός λόγος αποτυχίας μιας κατασκευής σύνθετων υλικών, προέρχεται κυρίως από την θραύση των ινών εντός της μήτρας.

Γι' αυτό το λόγο ο προσανατολισμός των ινών είναι πολύ σημαντικός παράγοντας για να αυξήσουμε την ικανότητα φόρτισης του πολυστρωματικού άξονα. Για λεπτότοιχους άξονες μετάδοσης κίνησης, όπως αυτός που θα μελετήσουμε, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να υποστεί στρεπτικό λυγισμό. Η πλευρική δυσκαμψία του άξονα, η οποία είναι αποτέλεσμα του μέσου όρου των μέτρων ελαστικότητας των στρωμάτων κατά την αξονική του διεύθυνση (E_x) και της δευτεροβάθμιας ροπής αδρανείας (I), πρέπει να μεγιστοποιηθεί, διότι αυξάνει κατευθείαν την πλευρική φυσική συχνότητα του άξονα.

6.2 Διαστάσεις και Επιλογή Στρωματοποίησης

Σαν παράδειγμα μοντέλου σχεδίασης χρησιμοποιήθηκε αυτό του Swanson. Ένας υβριδικός άξονας σύνθετων υλικών, μήκους 1730 mm και μέσης ακτίνας 50,8 mm. Η διαμόρφωση της στρωματοποίησης του, αποτελείται από τέσσερα στρώματα μονής κατεύθυνσης σύνθετου υλικού, τοποθετημένα ως $[+45^{\circ}_{\text{glass}}/-45^{\circ}_{\text{glass}}/0^{\circ}_{\text{carbon}}/90^{\circ}_{\text{glass}}]$, όπου ‘glass’ σύνθετο υλικό εποξικής ρητίνης από υαλονήματα και ‘carbon’ σύνθετο υλικό εποξικής ρητίνης από ίνες άνθρακα. Τα πάχη των στρωμάτων είναι τα ακόλουθα : $(\pm 45^{\circ}_{\text{glass/epoxy}} = 0,1905 \text{ mm})$, $(0^{\circ}_{\text{carbon/epoxy}} = 0,635 \text{ mm})$, $(90^{\circ}_{\text{glass/epoxy}} = 1,016 \text{ mm})$.



Σχήμα 6.1 : Πολυστρωματικός άξονας σύνθετων υλικών και στρωματοποίηση

Είναι ευρέως γνωστό ότι το μέτρο διάτμησης πολλών σύνθετων υλικών ενισχυμένων με ίνες, είναι χαμηλότερο από αυτό του χάλυβα. Συνεπώς για να έχουμε παρόμοια στρεπτική δυσκαμψία με τον μεταλλικό, θα πρέπει ο άξονας σύνθετου υλικού, είτε να έχει μεγαλύτερη διάμετρο, είτε μεγαλύτερου πάχους τοιχώματος από τον χαλύβδινο άξονα.

Μεταξύ των διαφόρων διατάξεων στρωματοποίησης, το $[\pm 45^{\circ}]_S$ έχει το μεγαλύτερο μέτρο διάτμησης και είναι ο βασικότερος τύπος προσανατολισμού που χρησιμοποιείται σε αποκλειστικά στρεπτικού τύπου εφαρμογές. Για να επιτευχθεί μικρός συντονισμός συχνότητας (resonance frequency) ο άξονας θα πρέπει να έχει επαρκές αξονικό μέτρο ελαστικότητας και εφόσον το αξονικό μέτρο στην $[\pm 45^{\circ}]$ στρωμάτωση είναι αρκετά χαμηλό, πρέπει να προστεθεί στρώμα στην κατεύθυνσης $[0^{\circ}]$ για να βελτιωθεί ο συντονισμός της συχνότητας.

Ο ευκολότερος τρόπος για να αυξήσουμε την τιμή του κρίσιμου στρεπτικού λυγισμού σε έναν άξονα, είναι μέσω της αύξησης του παράγοντα D_{22} , ο οποίος μεγαλώνει προσθέτοντας ένα ή περισσότερα στρώματα στην κατεύθυνση $[90^\circ]$. Γι' αυτόν τον λόγο καταλήξαμε στην στρωματοποίηση $[+45^\circ \text{ υαλόνημα}/-45^\circ \text{ υαλόνημα}/0^\circ \text{ ανθρακόνημα}/90^\circ \text{ υαλόνημα}]$.

6.3 Ιδιότητες Σύνθετου Υλικού

Είναι πολύ σημαντικό να κάνουμε την σωστή επιλογή μεταξύ των στρωμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε, διότι αυτό θα επηρεάσει τα χαρακτηριστικά του σύνθετου πολυστρωματικού άξονα. Στην παρούσα μελέτη έχουν χρησιμοποιηθεί δύο τύποι στρωμάτων. Από υαλονήματα με εποξική ρητίνη (πίνακας 6.1), τα οποία έχουν το χαμηλότερο κόστος αγοράς από τα διαθέσιμα στο εμπόριο και από ανθρακονήματα με εποξική ρητίνη (πίνακας 6.2), που είναι σαφώς ακριβότερα. Η ενίσχυση των σύνθετων θα γίνει με πολύτοιχους νανοσωλήνες άνθρακα των οποίων οι ιδιότητες παρουσιάζονται στους ακόλουθους πίνακες. Επίσης παρουσιάζονται οι προκύπτουσες ιδιότητες των στρωμάτων ινών μονής διεύθυνσης (πίνακες 6.3 & 6.4).

Πίνακας 6.1

Ιδιότητες σύνθετου υλικού

Υαλόνημα[11]	Εποξική Ρητίνη[3]		Πολύτοιχος Νανοσωλήνας Άνθρακα[12][13]		
E_{f11} (MPa)	74000	E_m (MPa)	3450	E_{NT} (MPa)	450000
E_{f22} (MPa)	74000	ν_m	0,36	l_{NT} (nm)	20000
ν_{f12} (MPa)	0,25	G_m (MPa)	1268	d_{NT} (nm)	20
ν_{f23} (MPa)	0,25			t_{NT} (nm)	1,5
G_{f12}	30000			d_{iNT} (nm)	17
G_{f23}	30000			ρ_{NT} (g/cm ³)	0,6244

Πίνακας 6.2

Ιδιότητες σύνθετου υλικού

Ανθρακόνημα[9]	Εποξική Ρητίνη[3]	Πολύτοιχος Νανοςωλήνας Άνθρακα[12][13]			
E_{f11} (MPa)	230000	E_m (MPa)	3450	E_{NT} (MPa)	450000
E_{f22} (MPa)	15410	ν_m	0,36	l_{NT} (nm)	20000
ν_{f12} (MPa)	0,29	G_m (MPa)	1268	d_{NT} (nm)	20
ν_{f23} (MPa)	0,46			t_{NT} (nm)	1,5
G_{f12}	10040			d_{iNT} (nm)	17
G_{f23}	5287			ρ_{NT} (g/cm ³)	0,6244

Πίνακας 6.3

Ιδιότητες στρώματος μονής διεύθυνσης σύνθετου υλικού

	Υαλόνημα-Εποξική Ρητίνη[8]	Ανθρακόνημα-Εποξική Ρητίνη[8]
E_1 (MPa)	40300	126900
E_2 (MPa)	6210	11000
G_{12} (MPa)	3070	6600
G_{23} (MPa)	2218	3929
ν_{12}	0,3027	0,3000
ν_{23}	0,4080	0,4100

Πίνακας 6.4

Ιδιότητες στρώματος μονής διεύθυνσης σύνθετου υλικού

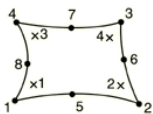
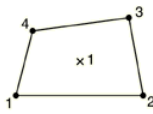
	Υαλόνημα-Εποξική Ρητίνη[3]	Ανθρακόνημα-Εποξική Ρητίνη[9]
E_1 (MPa)	40312	134056
E_2 (MPa)	6874	8079
G_{12} (MPa)	2538	3319
G_{23} (MPa)	2435	2654
ν_{12}	0,3027	0,3198
ν_{23}	0,4117	0,4147

6.4 Ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων FEA & Συνοριακές Συνθήκες

Η αριθμητική ανάλυση του υβριδικού σύνθετου άξονα πραγματοποιείται στο Abaqus CAE. Υποθέτουμε ότι ο άξονας είναι σε πλήρη ισορροπία και η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων γραμμική και ελαστική. Στην παρούσα μελέτη επιλέχθηκε ένα τρισδιάστατο στοιχείο διακριτοποίησης (S4R) (πίνακας 6.5). Για την αξιολόγηση της επίδρασης των διαφόρων τύπων στρωματοποίησης στις αναλύσεις, επιλέχθηκε ανάλυση (eigenvalue) σε μορφή γραμμικού λυγισμού, έτσι ώστε να προσδιορισθεί ο κρίσιμος στρεπτικός λυγισμός. Το ένα άκρο του άξονα είναι πλήρως πακτωμένο και στο άλλο εφαρμόστηκε στρεπτικό φορτίο, το οποίο εκτελέστηκε στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μοντέλου, για την ανάλυση στρεπτικού λυγισμού, ενώ στη (Modal analysis) για την εύρεση της φυσικής συχνότητας, μελετούμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, αμφίπακτης και αμφιαρθρωτής στήριξης.

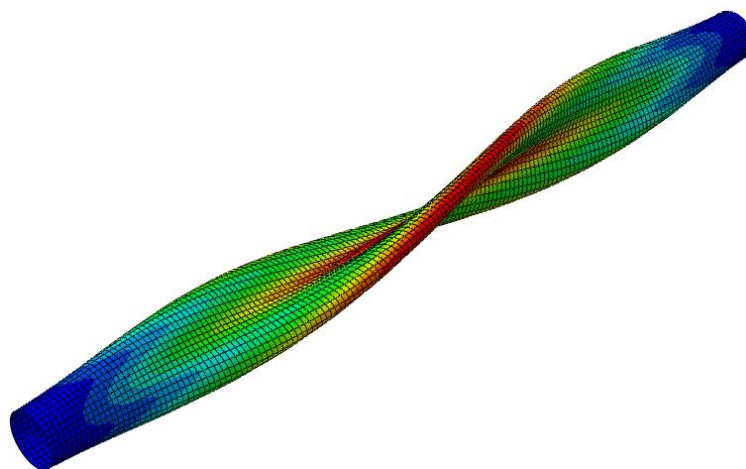
Πίνακας 6.5

Ιδιότητες στοιχείων διακριτοποίησης Κελύφους συμβατικής τάσης/μετατόπισης

Ονομασία	QTS8	S4R
Απεικόνιση		
Γεωμετρικό Σχήμα	Τετράπλευρο	Τετράπλευρο
Τύπος	Τρισδιάστατο	Τρισδιάστατο
Κατηγορία	Κέλυφος	Κέλυφος
Γεωμετρική διάταξη	Τετραγωνική	Γραμμική
Υποκατηγορία	Πυκνό κέλυφος	Αραιό ή πυκνό κέλυφος
Αριθμός κόμβων	8	4

6.5 Γραμμική Ελαστική Ανάλυση Στρεπτικού Λυγισμού

Ο σκοπός της γραμμικής ανάλυσης στρεπτικού λυγισμού είναι να εξάγει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και επιτυγχάνεται λύνοντας τις εξισώσεις που σχετίζονται με το πρόβλημα. Είναι της ίδιας μορφής με το πρόβλημα ταλαντώσεων, με τη διαφορά ότι το μητρώο των μαζών αντικαθίσταται από το μητρώο δυσκαμψίας των τάσεων. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται για την προσέγγιση του μεγαλύτερου στρεπτικού φορτίου που μπορεί να αντέξει ο άξονας, πριν παρουσιάσει δομική αστάθεια, βασίζεται στις υποθέσεις ότι το γραμμικό μητρώο της δυσκαμψίας δεν μεταβάλλεται πριν τον λυγισμό και ότι το μητρώο δυσκαμψίας των τάσεων είναι ένας ποσοτικός προσδιορισμός των μετατοπίσεων.



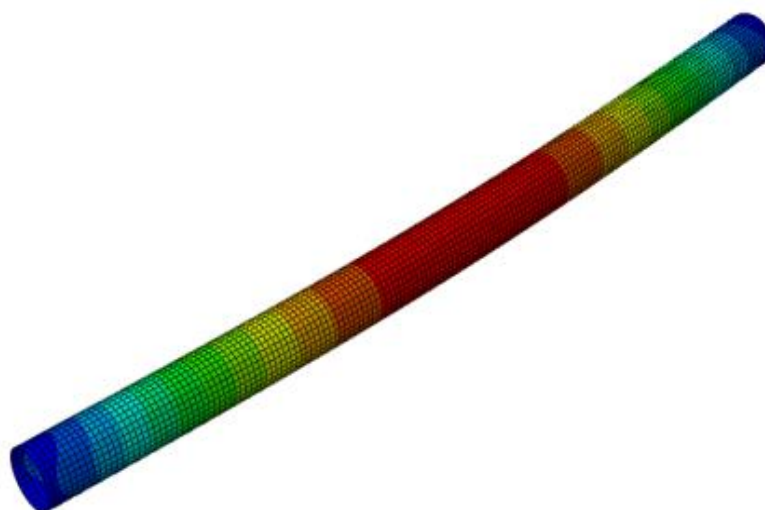
Σχήμα 6.2 Ιδιομορφή στρεπτικού λυγισμού άξονα σύνθετων υλικών

6.6 Ανάλυση Φυσικών Συχνοτήτων

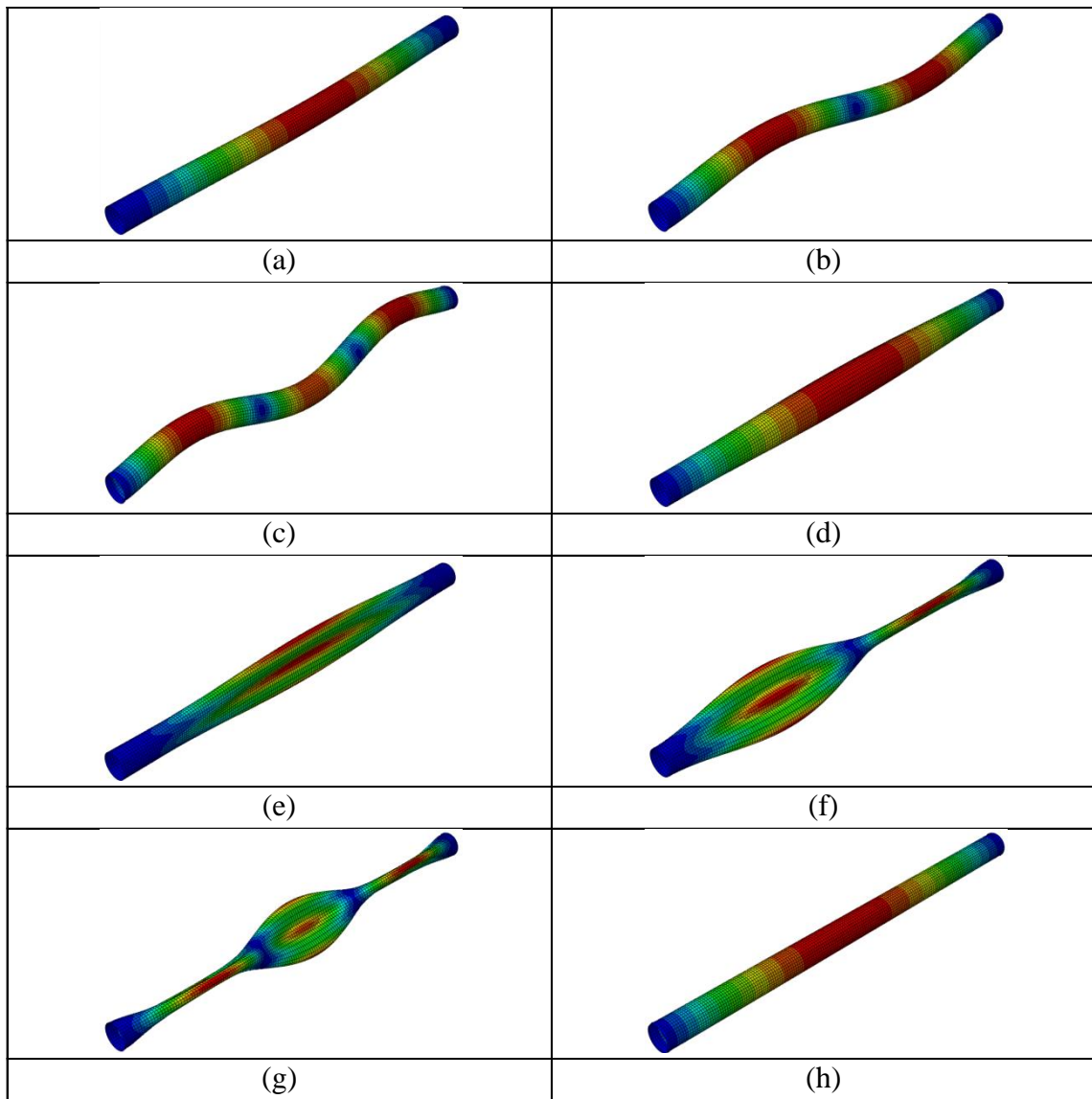
Η ανάλυση φυσικών συχνοτήτων (modal analysis) είναι μια τεχνική που εφαρμόζεται για να λύσουμε μια σειρά εξισώσεων, έτσι ώστε να βρούμε τις άγνωστες μετατοπίσεις των κόμβων από κάθε εξίσωση. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται για να βρούμε τη φυσική συχνότητα στα προβλήματα ταλαντώσεων μιας κατασκευής, η οποία επηρεάζεται από καθολικές μετατοπίσεις, σε αντίθεση με τα προβλήματα κρουστικών φορτίων που επηρεάζουν την κατασκευή με τοπικές μετατοπίσεις.

Για να βρούμε την φυσική συχνότητα, οι βαθμοί ελευθερίας που χρησιμοποιούμε είναι μειωμένοι και λύνουμε τις εξισώσεις σε συνάρτηση του χρόνου. Με αυτήν την ανάλυση οι δυναμικές εξισώσεις διαχωρίζονται και δεν υπάρχει ανάγκη για πυκνό πλέγμα διακριτοποίησης, διότι δεν απαιτείται η εύρεση των τάσεων. Επίσης δεν χρειάζεται να εφαρμόσουμε κανένα φορτίο στον άξονα, αφού το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι η φυσική συχνότητα του άξονα μετάδοσης κίνησης.

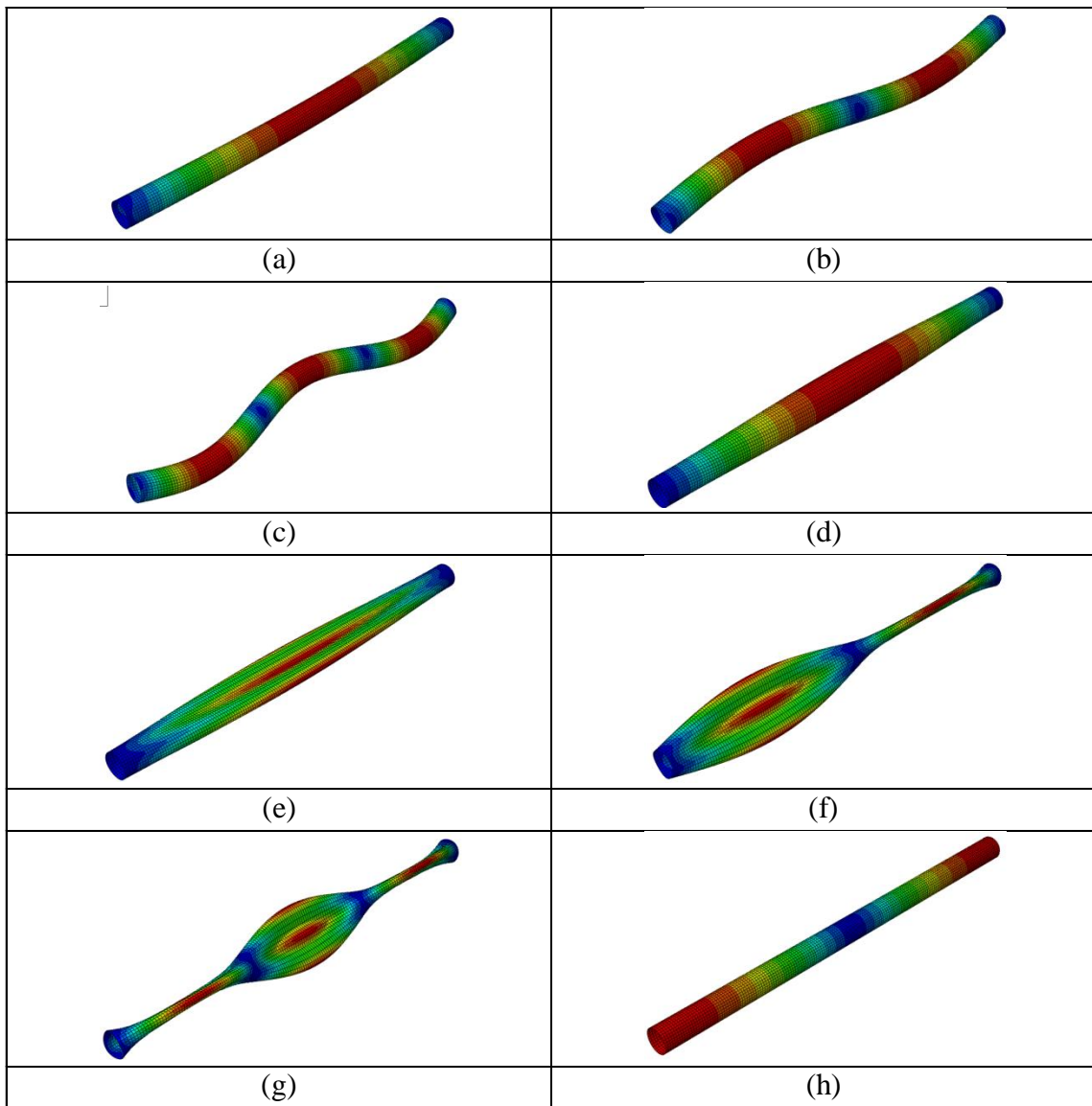
Στην παρούσα μελέτη εφαρμόσαμε δύο τύπους στηρίξεων. Για άξονα σύνθετων υλικών αμφίπακτης στήριξης και αμφιαρθρωτής στήριξης. Οι ιδιομορφές τους παρουσιάζονται στους ακόλουθους πίνακες.



Σχήμα 6.3 Ιδιομορφή 1^{ης} καμπτικής φυσικής συχνότητας αμφιαρθρωτού άξονα



Πίνακας 6.6 Ιδιομορφές πολυστρωματικού άξονα σύνθετων υλικών αμφίπακτης στήριξης (a) 1^η καμπτική, (b) 2^η καμπτική, (c) 3^η καμπτική, (d) 1^η στρεπτική, (e) 1^η αναπνέουσα, (f) 2^η αναπνέουσα, (g) 3^η αναπνέουσα, (h) 1^η αξονική.



Πίνακας 6.7 Ιδιομορφές πολυστρωματικού άξονα σύνθετων υλικών αμφιαρθρωτής στήριξης (a) 1^η καμπτική, (b) 2^η καμπτική, (c) 3^η καμπτική, (d) 1^η στρεπτική, (e) 1^η αναπνέουσα, (f) 2^η αναπνέουσα, (g) 3^η αναπνέουσα, (h) 1^η αξονική.

7 Αποτελέσματα Ανάλυσης Άξονα Μετάδοσης Κίνησης

Για την πρόβλεψη της φυσικής συμπεριφοράς του άξονα μετάδοσης κίνησης, η ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων, απαιτεί μια αξιόπιστη εισαγωγή δεδομένων. Στοιχεία όπως η γεωμετρία, το στοιχείο διακριτοποίησης, τα φορτία, οι συνοριακές συνθήκες και οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών είναι μια πηγή αβεβαιότητας, όσον αφορά την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της μεθόδου ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία.

7.1 Προσδιορισμός Ιδιοτήτων Σύνθετων Υλικών με την Προσθήκη Νανοδομών

Στην παρούσα μελέτη για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων σύνθετων υλικών από στρώματα με ίνες μονής διεύθυνσης, επιλέξαμε την πολυεστερική ρητίνη, τα υαλονήματα και τα ανθρακονήματα και για υλικό ενίσχυσης της μήτρας, τους πολύτοιχους νανοσωλήνες άνθρακα. Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών φαίνονται στους Πίνακες (6.1)(6.2)(6.3)(6.4). Οι ιδιότητες των ενισχυμένων σύνθετων υλικών με νανοσωλήνες άνθρακα υπολογίστηκαν με 2 τρόπους. Με την προσέγγιση Halpin-Tsai (Κεφάλαιο 5) και με τον κανόνα της ανάμειξης (Κεφάλαιο 4). Το περιεχόμενο των νανοσωλήνες άνθρακα καθορίστηκε ως 0,00, 0,05, 0,1, 0,2, 0,35 και 0,5 vol %. Οι ιδιότητες των στρωμάτων υπολογίστηκαν θεωρητικά και φαίνονται στους Πίνακες (7.1)(7.2).

Πίνακας 7.1

Ιδιότητες στρώματος μονής διεύθυνσης σύνθετου υλικού (Υαλονήματος-Εποξικής ρητίνης-Νανοδομών)

Προσέγγιση Halpin-Tsai & Rule of Mixtures						
V_{NT} (vol%)	0,00	0,05	0,10	0,20	0,35	0,50
E_1 (MPa)	40312	41619	42943	45655	49939	54647
E_2 (MPa)	6874	11871	16570	25204	36651	46890
G_{12} (MPa)	2538	4313	5958	9038	13245	17146
G_{23} (MPa)	2434	4176	5815	8928	13231	17212
ν_{12}	0,3027	0,3164	0,3270	0,3355	0,3388	0,3377
ν_{23}	0,4117	0,4211	0,4246	0,4115	0,3850	0,3621
ρ (g/cm ³)	1,9100	1,8457	1,7814	1,6529	1,4600	1,2672

Πίνακας 7.2

Ιδιότητες στρώματος μονής διεύθυνσης σύνθετου υλικού (Ανθρακονήματος-Εποξικής ρητίνης-Νανοδομών)

Προσέγγιση Halpin-Tsai						
V_{NT} (vol%)	0,00	0,05	0,10	0,20	0,35	0,50
E_1 (MPa)	134056	135215	136389	138795	142594	146770
E_2 (MPa)	8079	10579	12335	15080	18639	22200
G_{12} (MPa)	3319	4811	5889	7478	9222	10703
G_{23} (MPa)	2654	3593	4242	5216	6391	7509
ν_{12}	0,3198	0,3320	0,3414	0,3489	0,3518	0,3508
ν_{23}	0,4147	0,4284	0,4387	0,4467	0,4497	0,4486
ρ (g/cm ³)	1,6100	1,5607	1,5114	1,4129	1,2650	1,1172

7.2 Επαλήθευση Αποτελεσμάτων Μελέτης

Στην παρούσα μελέτη, έγινε σύγκριση της αναλυτικής λύσης, με τα αριθμητικά αποτελέσματα που εξάγαμε από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων, για την φυσικής συχνότητας f (Hz) και τον στρεπτικό λυγισμό T_{cr} (Nm). Επιπροσθέτως, για την απόλυτη επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων, έγινε σύγκριση και με μελέτες της ανοιχτής βιβλιογραφίας.

7.2.1 Επαλήθευση Αποτελεσμάτων Φυσικών Συχνοτήτων

Σύγκριση ιδιοτιμών φυσικών συχνοτήτων f (Hz) της παρούσας μελέτης (FEA) με αντίστοιχες αριθμητικές της ανοιχτής βιβλιογραφίας, πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.

Πίνακας 7.3

Σύγκριση ιδιοτιμών f (Hz) πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης

Ιδιομορφές	Παρούσα μελέτη (FEA) (Πίνακας 6.3)	Παρούσα μελέτη (FEA) (Πίνακας 6.4)	Αριθμητικά Αποτελέσματα (FEA) μελέτης[8]
1 ^η Καμπτική	90,28	91,65	90,46
2 ^η Καμπτική	330,25	326,88	331,19
3 ^η Καμπτική	659,43	635,73	663,35

Σύγκριση ιδιοτιμών φυσικών συχνοτήτων f (Hz) της παρούσας μελέτης (Analytical) με αντίστοιχες αναλυτικές της ανοιχτής βιβλιογραφίας, πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.

Πίνακας 7.4

Σύγκριση ιδιοτιμών f (Hz) πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης

Ιδιομορφές	Αναλυτικά	Αναλυτικά	Αναλυτικά	Απόκλιση (%)
	Αποτελέσματα Παρούσα μελέτη	αποτελέσματα εξισώσεων[10]	Αποτελέσματα μελέτης[8]	
1 ^η Καμπτική	96,33	96,33	91,17	5,36

Σύγκριση ιδιοτιμών φυσικών συχνοτήτων f (Hz) της παρούσας μελέτης (FEA) με αντίστοιχες αναλυτικές και αριθμητικές της ανοιχτής βιβλιογραφίας, πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.

Πίνακας 7.5

Σύγκριση ιδιοτιμών f (Hz) πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης

Ιδιομορφές	Παρούσα μελέτη	Αναλυτικά	Αριθμητικά
	(FEA) (Πίνακας 6.4)	αποτελέσματα εξισώσεων[10]	Αποτελέσματα (FEA) μελέτης[8]
1 ^η Καμπτική	91,65	96,33	90,46
2 ^η Καμπτική	326,88	385,33	331,19
3 ^η Καμπτική	635,73	866,99	663,35

Σύγκριση ιδιοτιμών φυσικών συχνοτήτων f (Hz) της παρούσας μελέτης (FEA) με αντίστοιχες αναλυτικές της ανοιχτής βιβλιογραφίας, πολυστρωματικού άξονα αμφίπακτης στήριξης.

Πίνακας 7.6

Σύγκριση ιδιοτιμών f (Hz) πολυστρωματικού άξονα αμφίπακτης στήριξης

Ιδιομορφές	Παρούσα μελέτη	Παρούσα μελέτη	Αναλυτικά
	(FEA) (Πίνακας 6.3)	(FEA) (Πίνακας 6.4)	αποτελέσματα Εξισώσεων[10]
1 ^η Καμπτική	182,68	179,46	218,62
2 ^η Καμπτική	439,81	420,36	602,62
3 ^η Καμπτική	756,33	710,21	1181,38

Σύγκριση ιδιοτιμών φυσικών συχνοτήτων f (Hz) της παρούσας μελέτης (FEA) με αντίστοιχες αριθμητικές (FEA) της ανοιχτής βιβλιογραφίας, για πανομοιότυπη διακριτοποίηση και ιδιότητες στρωμάτων σύνθετου υλικού, πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.

Πίνακας 7.7

Σύγκριση ιδιοτιμών f (Hz) πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης			
Ιδιομορφές	Παρούσα μελέτη (FEA)	Αριθμητικά Αποτελέσματα (FEA) μελέτης[8]	Απόκλιση (%)
1 ^η Καμπτική	90,69	90,46	0,26
2 ^η Καμπτική	331,74	331,19	0,17
1 ^η Αναπνέουσα	337,89	409,36	17,46
2 ^η Αναπνέουσα	348,77	418,22	16,61
3 ^η Αναπνέουσα	413,94	471,62	12,24
3 ^η Καμπτική	663,10	663,35	0,04

7.2.2 Επαλήθευση Αποτελεσμάτων Στρεπτικού Λυγισμού

Σύγκριση τιμών στρεπτικού λυγισμού (N.m) της παρούσας μελέτης με αντίστοιχες θεωρητικές και αριθμητικές της ανοιχτής βιβλιογραφίας, για σύνθετο άξονα μήκους 1730 mm, μέσης διαμέτρου 101,6 mm και πάχους τοιχώματος 2,032 mm.

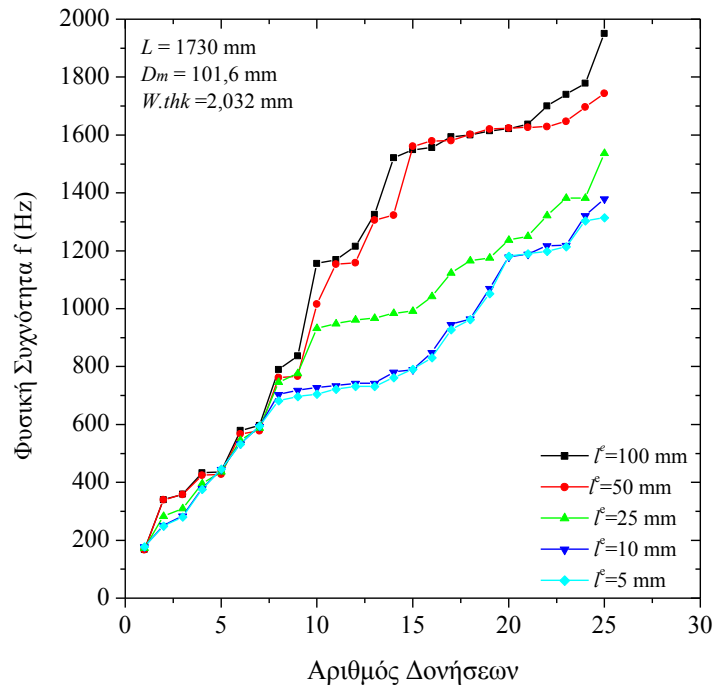
Πίνακας 7.8

Σύγκριση τιμών στρεπτικού λυγισμού T_{cr} (N.m) μεταξύ αναλυτικής και FEA λύσης			
	Αναλυτικά	FEA	Απόκλιση (%)
Παρούσα μελέτη (Πίνακας 6.3)	2178	1801	17,31
Παρούσα μελέτη (Πίνακας 6.4)	2149,8	1730	19,53
Μελέτη[8]	2030	1830,9	9,81

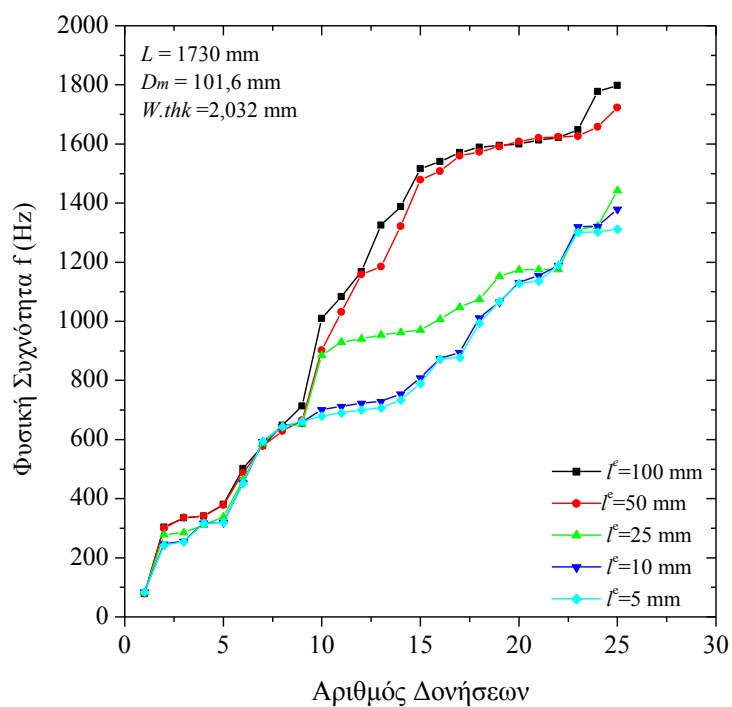
7.3 Επίδραση Μεγέθους Στοιχείου Διακριτοποίησης

Η βασική γεωμετρία της φυσικής κατασκευής του μοντέλου, δημιουργείται από τον καθορισμό των πεπερασμένων στοιχείων και των κόμβων. Κάθε στοιχείο του μοντέλου αναπαριστά ένα διακριτό τμήμα της φυσικής κατασκευής, το οποίο με την σειρά του αντιπροσωπεύεται από πολλά διασυνδεδεμένα στοιχεία. Τα στοιχεία είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με κόμβους.

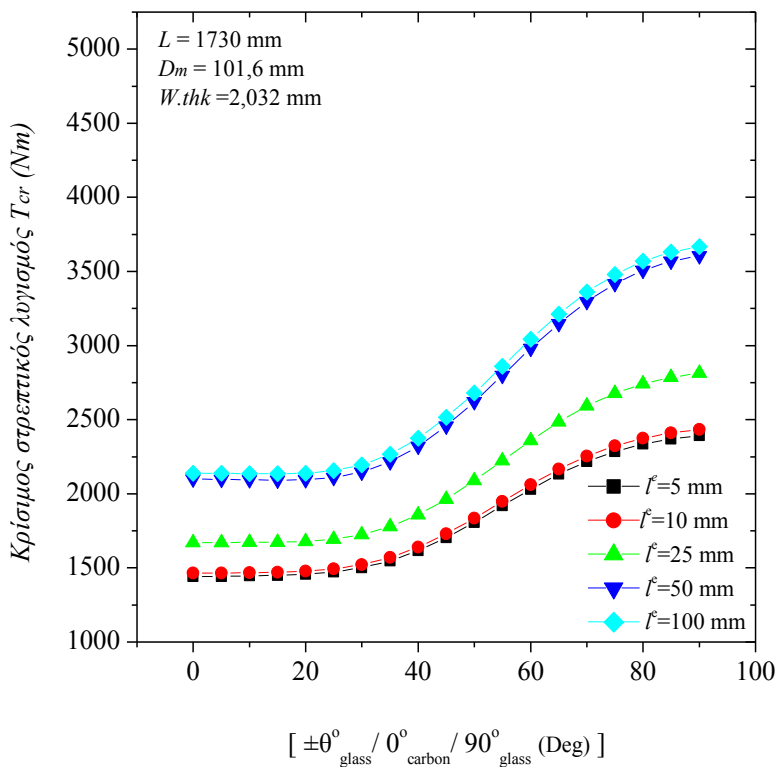
Οι συντεταγμένες των κόμβων και η συνοχή των στοιχείων αποτελούν τη γεωμετρία του μοντέλου. Η συλλογή των στοιχείων και των κόμβων στο μοντέλο καλείτε πλέγμα διακριτοποίησης. Στα παρακάτω διαγράμματα παρατηρούμε την επίδραση του μεγέθους διακριτοποίησης στη φυσική συχνότητα και τον στρεπτικό λυγισμό.



Διάγραμμα 7.9 Επίδραση μεγέθους στοιχείου l^e (S4R) στη φυσική συχνότητα f (Hz) αμφίπακτου άξονα



Διάγραμμα 7.10 Επίδραση μεγέθους στοιχείου l^e (S4R) στη φυσική συχνότητα f (Hz) αμφιαρθρωτού άξονα



Διάγραμμα 7.11 Επίδραση μεγέθους στοιχείου l^e (S4R) στον Κρίσιμο στρεπτικό λυγισμό T_{cr} (Nm)

7.4 Επίδραση Προσανατολισμού Ινών Στρώματος στη Φυσική Συχνότητα

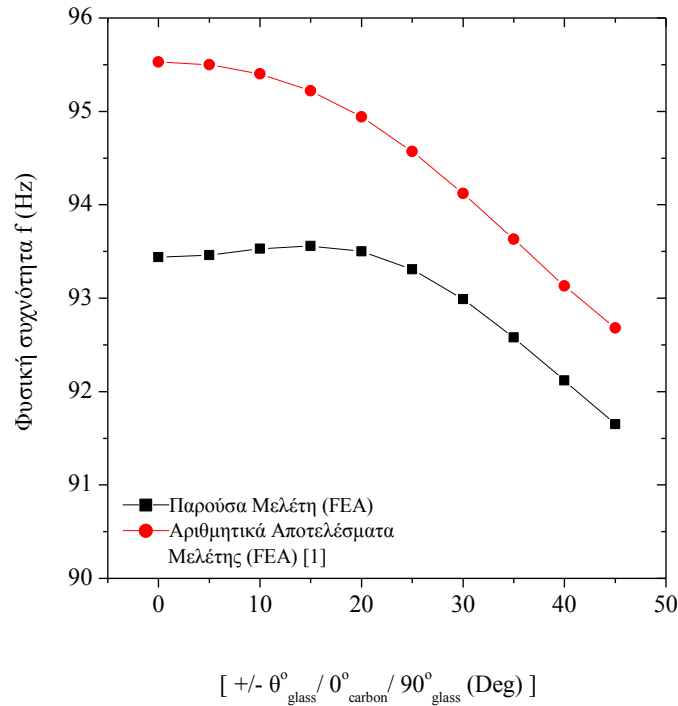
Σε κάθε δομική σχεδίαση που αφορά την μελέτη του φαινομένου της ταλάντωσης, στις μηχανολογικές εφαρμογές μας ενδιαφέρει μόνο η πρώτη ιδιομορφή της φυσικής συχνότητας (σχήμα 6.3). Από την άλλη μεριά, σε μερικές δομές που επηρεάζονται τοπικά, από υψηλής ενέργειας κρουστικά φορτία, χρειάζεται να γνωρίζουμε όλες τις ιδιομορφές των φυσικών συχνοτήτων, με σκοπό την μελέτη της διάδοσης του κύματος της συχνότητας (πίνακας 6.6).

Η στρωματοποίηση του άξονα είναι $[+45^{\circ}_{\text{υαλόνημα}}/45^{\circ}_{\text{υαλόνημα}}/0^{\circ}_{\text{ανθρακόνημα}}/90^{\circ}_{\text{υαλόνημα}}]$ και γίνεται σύγκριση των ιδιοτιμών της 1^{ης} καμπτικής φυσικής συχνότητας της παρούσας μελέτης (FEA) με αντίστοιχες αριθμητικές (FEA) της ανοιχτής βιβλιογραφίας για πολυστρωματικό άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης, για συγκεκριμένους προσανατολισμούς των δύο πρώτων στρωμάτων από υαλόνημα.

Πίνακας 7.12

Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στη φυσική συχνότητα

Προσανατολισμός στρώσεων	Παρούσα μελέτη (FEA) (Πίνακας 6.4)	Αριθμητικά Αποτελέσματα (FEA) μελέτης
[0,0,0,90]	93,44	95,53
[5,-5,0,90]	93,46	95,50
[10,-10,0,90]	93,53	95,40
[15,-15,0,90]	93,56	95,22
[20,-20,0,90]	93,50	94,94
[25,-25,0,90]	93,31	94,57
[30,-30,0,90]	92,99	94,12
[35,-35,0,90]	92,58	93,63
[40,-40,0,90]	92,12	93,13
[45,-45,0,90]	91,65	92,68



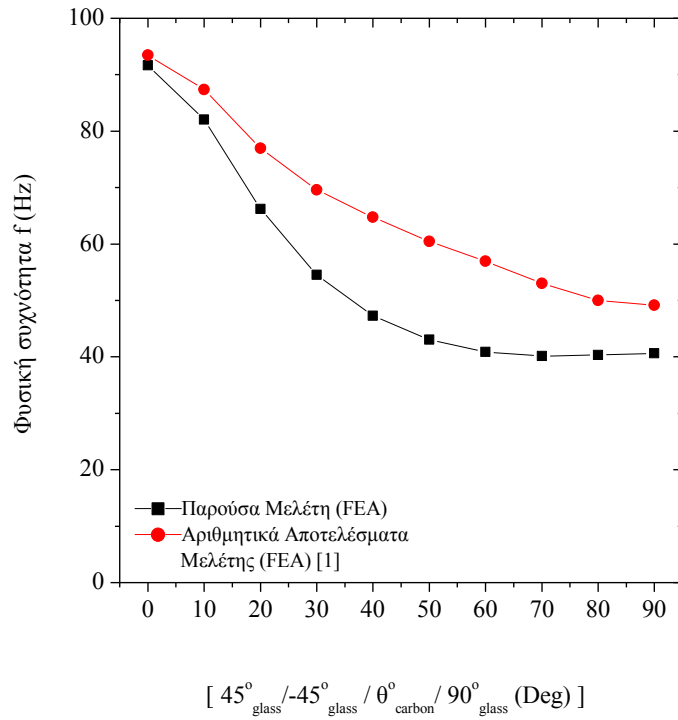
Διάγραμμα 7.13 Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στη φυσική συχνότητα f (Hz)

Σύγκριση ιδιοτιμών 1^{ης} καμπτικής φυσικής συχνότητας της παρούσας μελέτης (FEA) με αντίστοιχες αριθμητικές (FEA) της ανοιχτής βιβλιογραφίας για πολυστρωματικό άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης, για συγκεκριμένους προσανατολισμούς του τρίτου στρώματος ινών άνθρακα.

Πίνακας 7.14

Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στη φυσική συχνότητα f (Hz)

Προσανατολισμός στρώσεων	Παρούσα μελέτη (FEA) (Πίνακας 6.4)	Αριθμητικά Αποτελέσματα (FEA) μελέτης
[45,-45,0,90]	91,65	93,47
[45,-45,10,90]	82,03	87,39
[45,-45,20,90]	66,20	76,95
[45,-45,30,90]	54,55	69,56
[45,-45,40,90]	47,30	64,78
[45,-45,50,90]	43,04	60,43
[45,-45,60,90]	40,86	56,95
[45,-45,70,90]	40,16	53,04
[45,-45,80,90]	40,35	50,00
[45,-45,90,90]	40,60	49,13



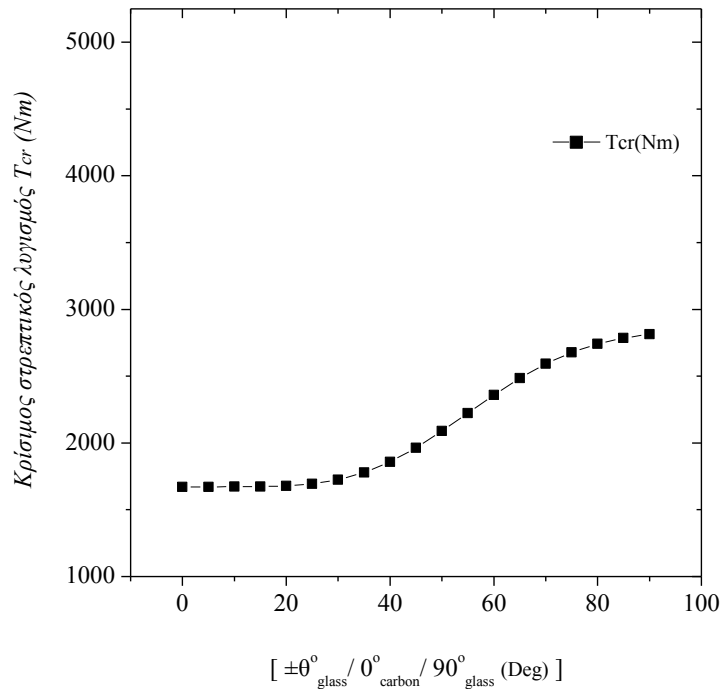
Διάγραμμα 7.15 Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στη φυσική συχνότητα f (Hz)

7.5 Επίδραση Προσανατολισμού Ινών Στρώματος στο Στρεπτικό Λυγισμό

Πίνακας 7.16

Κρίσιμος στρεπτικός λυγισμός T_{cr} (Nm) πολυστρωματικού άξονα
Ιδιοτήτων πίνακα 6.4, διακριτοποίησης στοιχείου 25 mm (S4R)

Στρωματοποίηση [$\pm\theta, 0, 90$]	T_{cr} (Nm)
0	1671
5	1671
10	1672
15	1673
20	1678
25	1693
30	1724
35	1779
40	1859
45	1964
50	2089
55	2224
60	2359
65	2484
70	2592
75	2678
80	2742
85	2786
90	2814



Διάγραμμα 7.17 Επίδραση προσανατολισμού ινών στρωμάτων στο στρεπτικό λυγισμό T_{cr} (Nm)

7.6 Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στις Ελαστικές Ιδιότητες του Σύνθετου Υλικού

Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με νανοσωλήνες άνθρακα υπολογίστηκαν θεωρητικά, Πίνακες (7.1)(7.2) με 2 τρόπους. Με την προσέγγιση Halpin-Tsai και με τον κανόνα της ανάμειξης. Το ποσοστό των νανοσωλήνες άνθρακα ορίστηκε ως 0,00, 0,05, 0,1, 0,2, 0,35 και 0,5 vol %. Ως αποτέλεσμα των υπολογισμών, οι όροι E_1 , E_2 , G_{12} και G_{23} βρέθηκαν να αυξάνονται όσο ο όγκος των νανοσωλήνων αυξανόταν.

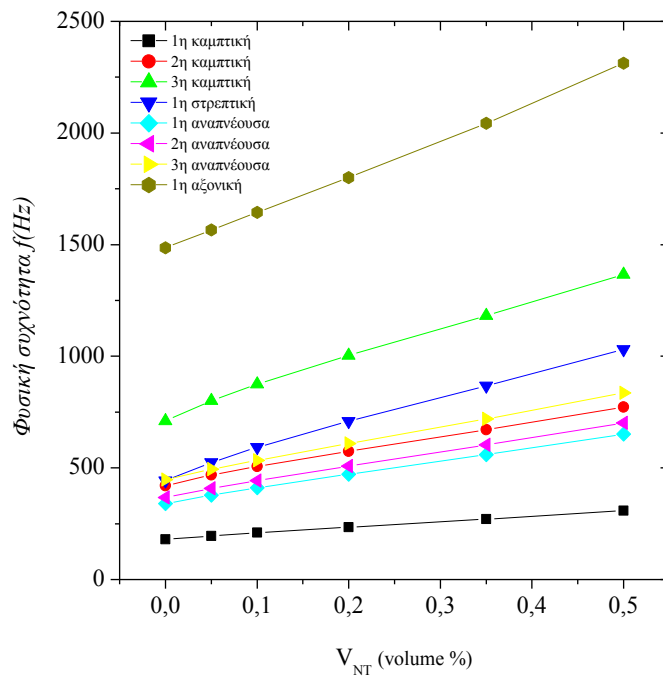
7.7 Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στη Φυσική Συχνότητα

Σύγκριση ιδιοτιμών φυσικών συχνοτήτων f (Hz) της παρούσας μελέτης, πολυστρωματικού άξονα αμφίπακτης στήριξης, ενισχυμένου με νανοσωλήνες άνθρακα.

Πίνακας 7.18

Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα άξονα σύνθετων υλικών αμφίπακτης στήριξης

V_{NT} (vol%)	0,00	0,05	0,10	0,20	0,35	0,50
1 ^η καμπτική	179,45	195,7	209,36	234,12	270,06	308,47
2 ^η καμπτική	420,35	467,98	506,75	574,93	671,00	771,87
3 ^η καμπτική	710,18	801,15	874,82	1003,20	1181,60	1367,10
1 ^η στρεπτική	442,44	524,61	591,84	708,60	868,02	1030,70
1 ^η αναπνέουσα	339,53	377,61	410,99	471,85	559,37	651,60
2 ^η αναπνέουσα	367,72	407,61	442,98	508,18	602,54	702,05
3 ^η αναπνέουσα	447,90	493,55	534,13	609,54	719,53	835,97
1 ^η αξονική	1485,80	1565,6	1644,10	1800,70	2044,10	2313,20

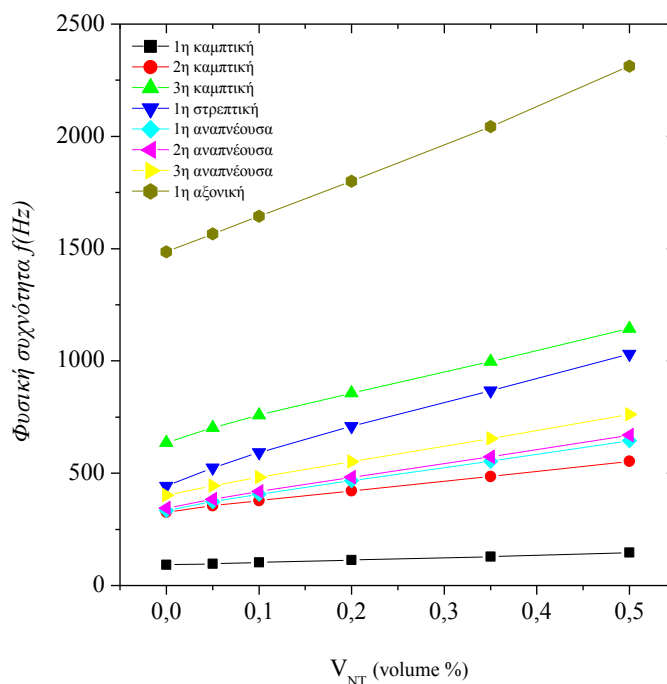
**Διάγραμμα 7.19** Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα άξονα σύνθετων υλικών αμφίπακτης στήριξης.

Σύγκριση ιδιοτιμών φυσικών συχνοτήτων f (Hz) της παρούσας μελέτης, πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης, ενισχυμένου με νανοσωλήνες άνθρακα.

Πίνακας 7.20

Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης

V_{NT} (vol%)	0,00	0,05	0,10	0,20	0,35	0,50
1 ^η καμπτική	91,65	97,49	102,90	113,33	129,22	146,60
2 ^η καμπτική	326,88	354,54	378,16	421,47	484,91	553,04
3 ^η καμπτική	635,73	703,48	759,03	857,47	997,27	1144,70
1 ^η στρεπτική	442,34	524,55	591,79	708,55	867,97	1030,70
1 ^η αναπνέουσα	334,69	372,75	406,00	466,49	553,34	644,80
2 ^η αναπνέουσα	344,91	384,04	418,61	482,02	573,37	669,39
3 ^η αναπνέουσα	402,28	444,04	481,66	551,87	654,28	762,38
1 ^η αξονική	1485,60	1565,40	1643,80	1800,10	2043,10	2311,90



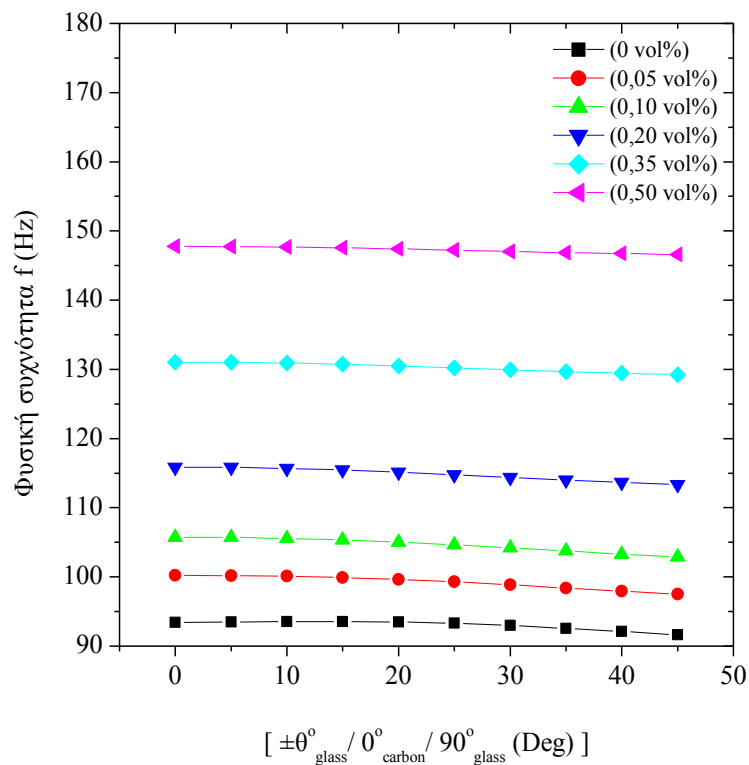
Διάγραμμα 7.21 Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα πολυστρωματικού άξονα αμφιαρθρωτής στήριξης.

Σύγκριση ιδιοτιμών 1^{ης} καμπτικής φυσικής συχνότητας της παρούσας μελέτης (FEA) για πολυστρωματικό άξονα ενισχυμένο με νανοσωλήνες, για συγκεκριμένους προσανατολισμούς των δύο πρώτων στρωμάτων ινών υαλονήματος.

Πίνακας 7.22

Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στη φυσική συχνότητα πολυστρωματικού άξονα.

Προσανατολισμός στρώσεων	(0 vol%)	(0,05 vol%)	(0,10 vol%)	(0,20 vol%)	(0,35 vol%)	(0,50 vol%)
[0,0,0,90]	93,44	100,23	105,75	115,87	131,05	147,77
[5,-5,0,90]	93,46	100,20	105,70	115,82	131,02	147,74
[10,-10,0,90]	93,53	100,10	105,56	115,68	130,90	147,67
[15,-15,0,90]	93,56	99,92	105,33	115,45	130,73	147,55
[20,-20,0,90]	93,50	99,65	105,01	115,14	130,49	147,40
[25,-25,0,90]	93,31	99,29	104,63	114,78	130,23	147,23
[30,-30,0,90]	92,99	98,86	104,19	114,40	129,95	147,05
[35,-35,0,90]	92,58	98,40	103,74	114,01	129,68	146,88
[40,-40,0,90]	92,12	97,93	103,30	113,65	129,43	146,73
[45,-45,0,90]	91,65	97,49	102,90	113,33	129,22	146,60



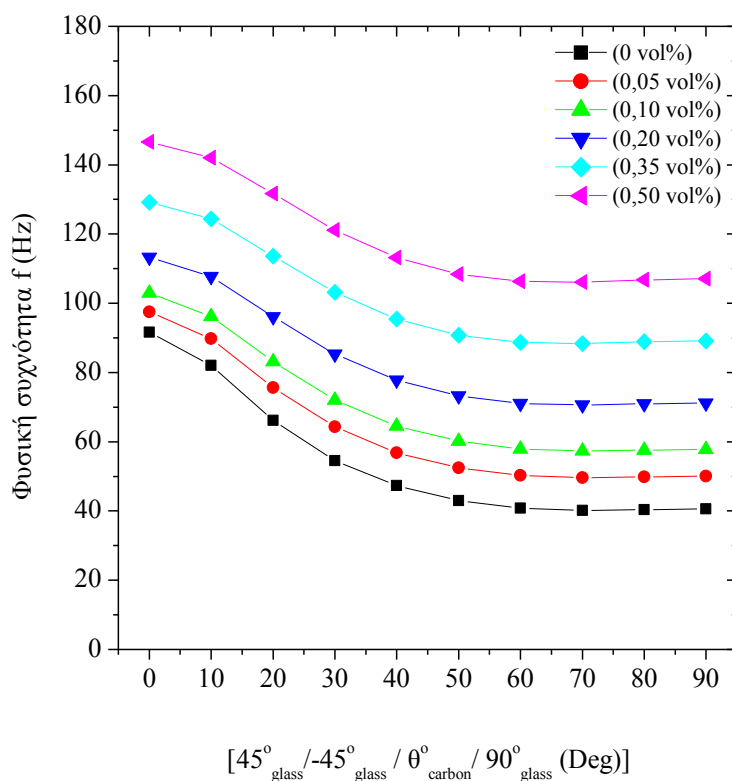
Διάγραμμα 7.23 Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα f (Hz)

Σύγκριση ιδιοτιμών 1^{ης} καμπτικής φυσικής συχνότητας της παρούσας μελέτης (FEA) για πολυστρωματικό άξονα ενισχυμένο με νανοσωλήνες, για συγκεκριμένους προσανατολισμούς του τρίτου στρώματος ινών άνθρακα.

Πίνακας 7.24

Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στη φυσική συχνότητα f (Hz) πολυστρωματικό άξονα

Προσανατολισμός στρώσεων	(0 vol%)	(0,05 vol%)	(0,10 vol%)	(0,20 vol%)	(0,35 vol%)	(0,50 vol%)
[45,-45,0,90]	91,65	97,49	102,90	113,33	129,22	146,60
[45,-45,10,90]	82,03	89,74	96,17	107,71	124,34	142,03
[45,-45,20,90]	66,20	75,64	83,19	96,07	113,65	131,69
[45,-45,30,90]	54,55	64,27	72,07	85,33	103,13	121,11
[45,-45,40,90]	47,30	56,85	64,58	77,76	95,42	113,16
[45,-45,50,90]	43,04	52,47	60,13	73,23	90,79	108,37
[45,-45,60,90]	40,86	50,27	57,94	71,09	88,71	106,31
[45,-45,70,90]	40,16	49,61	57,35	70,61	88,40	106,11
[45,-45,80,90]	40,35	49,82	57,59	70,94	88,87	106,71
[45,-45,90,90]	40,60	50,04	57,81	71,19	89,17	107,07



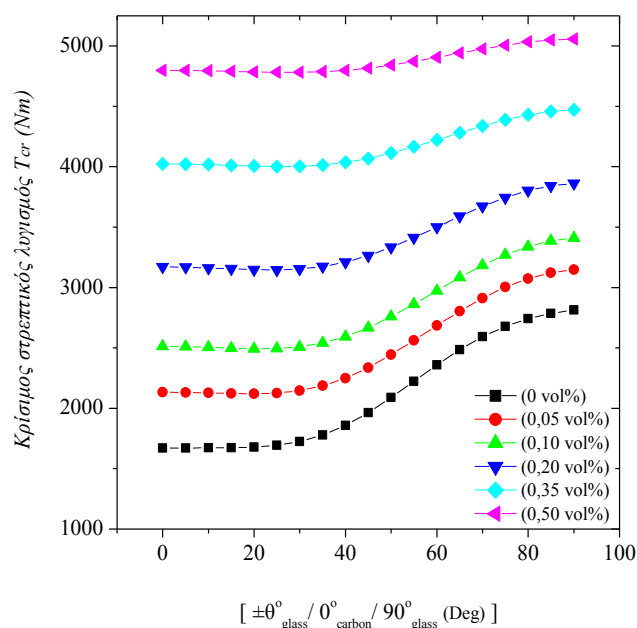
Διάγραμμα 7.25 Επίδραση προσθήκης νανοδομών στη φυσική συχνότητα f (Hz)

7.8 Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στο Στρεπτικό Λυγισμό

Πίνακας 7.26

Επίδραση προσθήκης νανοδομών στον Κρίσιμο στρεπτικός λυγισμός T_{cr} (Nm) πολυστρωματικού άξονα Ιδιοτήτων πίνακα 3.2, διακριτοποίησης στοιχείου 25 mm (S4R)

Στρωματοποίηση [$\pm\theta,0,90$]	(0 vol%)	(0,05 vol%)	(0,10 vol%)	(0,20 vol%)	(0,35 vol%)	(0,50 vol%)
0	1671	2133	2513	3170	4025	4799
5	1671	2131	2510	3168	4023	4797
10	1672	2127	2505	3162	4018	4794
15	1673	2122	2499	3155	4012	4789
20	1678	2120	2493	3148	4006	4785
25	1693	2125	2495	3146	4002	4782
30	1724	2146	2509	3153	4005	4782
35	1779	2186	2541	3174	4015	4787
40	1859	2250	2593	3211	4037	4798
45	1964	2337	2667	3264	4069	4816
50	2089	2443	2759	3333	4113	4841
55	2224	2562	2863	3413	4165	4871
60	2359	2685	2974	3501	4222	4906
65	2484	2805	3083	3589	4282	4941
70	2592	2912	3184	3672	4339	4976
75	2678	3003	3271	3745	4390	5007
80	2742	3073	3339	3803	4431	5033
85	2786	3122	3386	3843	4459	5050
90	2814	3148	3410	3862	4472	5058



Διάγραμμα 7.27 Επίδραση προσθήκης νανοδομών στον Κρίσιμο στρεπτικό λυγισμό T_{cr} (Nm)

8 Συμπεράσματα

Η όλο και αυξανόμενη χρήση της νανοτεχνολογίας στα σύνθετα υλικά, κάνει ακόμη πιο επιτακτική την ανάγκη του ακριβούς προσδιορισμού των ελαστικών ιδιοτήτων, ειδικά του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διάτμησης και του λόγου Poisson.

Ο υπολογισμός των ελαστικών ιδιοτήτων για συγκεκριμένο όγκο νανοδομών γίνεται με το επιστημονικό μοντέλο Halpin-Tsai και τις εξισώσεις Tsai-Pagano. Επίσης γίνεται χρήση και του ημί-εμπειρικού μοντέλου Halpin-Tsai.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία προβαίνει στην ανάλυση και σύγκριση του υπολογιστικού μοντέλου των (Mohamed A. Badie, E. Mahdi, A.M.S. Hamouda) [8]. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την σχεδίαση και ανάπτυξη αξόνων μετάδοσης κίνησης από Στρωματικά σύνθετα υλικά στους τομείς της αεροδιαστημικής, των κατασκευών και της αυτοκινητοβιομηχανίας.

Ο πολυστρωματικός άξονας σύνθετου υλικού που αναπτύχθηκε στο Abaqus CAE υποβλήθηκε σε ανάλυση φυσικών συχνοτήτων και ανάλυσης στρεπτικού λυγισμού.

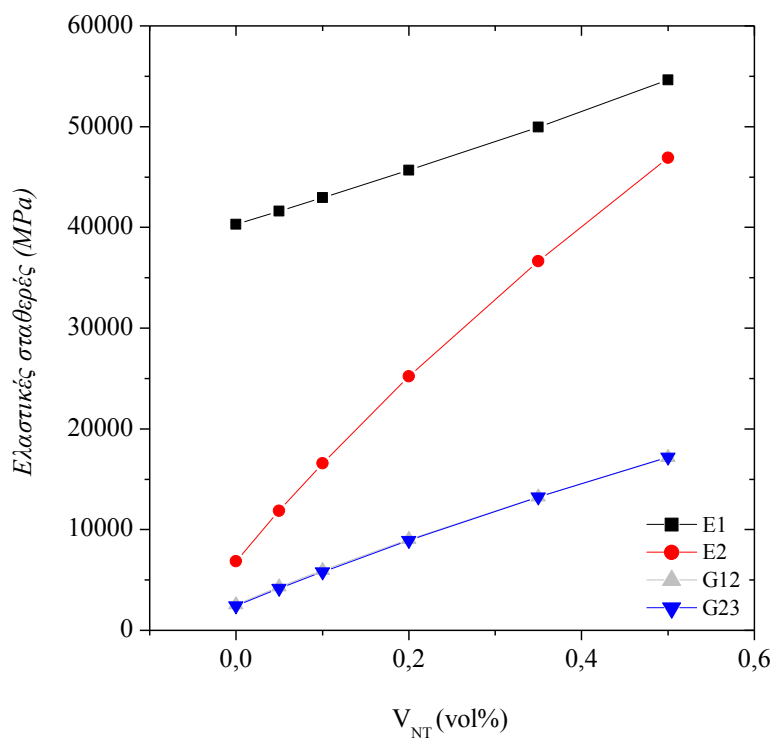
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα συμπεραίνονται τα ακόλουθα :

8.1 Επίδραση Προσθήκης Νανοςωλήνων Άνθρακα στις Ελαστικές Ιδιότητες του Σύνθετου Υλικού

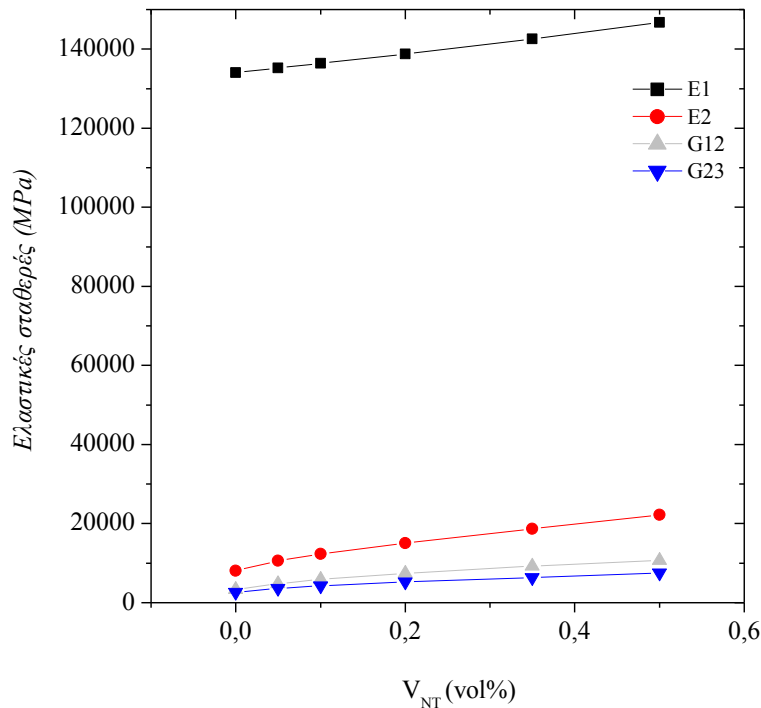
Τα αποτελέσματα των υπολογισμών που έγιναν για τις ιδιότητες του στρώματος από **υαλόνημα-εποξική ρητίνη-νανοδομές**, με τις προσεγγίσεις Halpin-Tsai και του κανόνα ανάμειξης για τις ελαστικές σταθερές E_1 , E_2 , G_{12} και G_{23} έδειξαν αυξητική τάση, καθώς ο όγκος των νανοςωλήνων άνθρακα στη μήτρα του σύνθετου υλικού αυξανόταν. Συγκεκριμένα, από τον πίνακα 7.1 παρατηρούμε αύξηση τιμών κατά **35,56%**, **582,13%**, **575,57%**, **607,14%** για το E_1 , E_2 , G_{12} και G_{23} αντίστοιχα. Ο λόγος poisson ν_{12} αυξάνεται μέχρι την τιμή V_{NT} (0,35 vol%) και μετά παραμένει σταθερός. Ο λόγος poisson ν_{23} αυξάνεται μέχρι την τιμή V_{NT} (0,10 vol%) και μετά παρουσιάζει πτωτική τάση.

Τα αποτελέσματα των υπολογισμών που έγιναν για τις ιδιότητες του στρώματος από ανθρακόνημα-εποξική ρητίνη-νανοδομές, με την προσέγγιση Halpin-Tsai για τις ελαστικές σταθερές E_1 , E_2 , G_{12} και G_{23} έδειξαν αυξητική τάση, όσο ο όγκος των νανοσωλήνων άνθρακα στη μήτρα του σύνθετου υλικού αυξανόταν. Συγκεκριμένα, από τον πίνακα 7.2 παρατηρούμε αύξηση τιμών κατά 9,48%, 174,78%, 222,47%, 182,93% για το E_1 , E_2 , G_{12} και G_{23} αντίστοιχα. Ο λόγος poisson ν_{12} αυξάνεται μέχρι την τιμή V_{NT} (0,20 vol%) και μετά παραμένει σταθερός. Ο λόγος poisson ν_{23} παρουσιάζει πτωτική τάση.

Η μεταβολή των μηχανικών σταθερών του σύνθετου υλικού σύμφωνα με την αύξηση του όγκου προσθήκης νανοδομών στη μήτρα του σύνθετου παρουσιάζεται στα διαγράμματα 8.1 και 8.2. Στο διάγραμμα 8.1 οι καμπύλες G_{12} και G_{23} συμπίπτουν λόγω πανομοιότυπων τιμών.



Διάγραμμα 8.1 Επίδραση προσθήκης νανοδομών στις μηχανικές σταθερές σύνθετου υλικού (υαλονήματος-εποξικής ρητίνης-νανοσωλήνων άνθρακα)



Διάγραμμα 8.2 Επίδραση προσθήκης νανοδομών στις μηχανικές σταθερές σύνθετου υλικού (άνθρακονήματος-εποξικής ρητίνης-νανοσωλήνων άνθρακα)

8.2 Επαλήθευση Αποτελεσμάτων Μελέτης

Για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων της παρούσας μελέτη έγινε σύγκριση της αναλυτικής λύσης, με τα αριθμητικά αποτελέσματα (FEA) που εξάγαμε από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης έγινε σύγκριση και με την μελέτη των (Mohamed A. Badie, E. Mahdi, A.M.S. Hamouda) [8].

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης του πολυστρωματικού άξονα **αμφιαρθρωτής στήριξης**, για την πρώτη καμπτική φυσική συχνότητα f (Hz) έχουμε :

Παρούσα μελέτη FEA **91,65 Hz** – μελέτη FEA [8] **90,46 Hz** (απόκλιση 1,31 %).

Παρούσα μελέτη (Αναλυτικά) **96,33 Hz** – μελέτη (Αναλυτικά) [8] **91,17 Hz** (απόκλιση 5,65 %).

Επίσης από τον (πίνακα 7.7) παρατηρούμε μηδενικές αποκλίσεις στις τρεις πρώτες καμπτικές ιδιομορφές, ενώ παρατηρούμε ένα μέσο όρο 15% απόκλιση των τριών αναπνευσών ιδιομορφών.

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης του πολυστρωματικού άξονα στον κρίσιμο στρεπτικό λυγισμό (πίνακας 7.8), παρατηρούμε αποκλίσεις της τάξεως του 17,31% και 19,53% μεταξύ αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων. Σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της μελέτης [8] έχουμε μία απόκλιση της τάξεως του 7,29% αναλυτικά και 1,63% FEA. Συμπερασματικά, παρατηρούμε πολύ καλή ταύτιση των αποτελεσμάτων της παρούσας μελέτης με την αντίστοιχη [8], κάτι που είναι απαραίτητο για την περαιτέρω μελέτη της επίδρασης των νανοδομών, στη φυσική συχνότητα και στον στρεπτικό λυγισμό.

8.3 Επίδραση Μεγέθους Διακριτοποίησης στη Φυσική Συχνότητα και το Στρεπτικό Λυγισμό

Γενικά το πλέγμα αποτελεί μία προσέγγιση της πραγματικής γεωμετρίας της κατασκευής. Ο συνολικός αριθμός και ο τύπος των στοιχείων που χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίησης επηρεάζουν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης. Όσο πιο πυκνό είναι το πλέγμα, τόσο πιο ακριβή είναι τα αποτελέσματα, τα οποία συγκλίνουν προς μια μοναδική λύση. Ο χρόνος που απαιτείται για την ανάλυση αυξάνεται όσο αυξάνεται και ο αριθμός των στοιχείων προς ανάλυση.

Στα διαγράμματα (7.1)(7.2)(7.3) βλέπουμε πως επηρεάζει το μέγεθος του στοιχείου τα αποτελέσματα των αναλύσεων, για σύνθετο άξονα μήκους 1730 mm, μέσης διαμέτρου 101,6 mm και πάχους τοιχώματος 2,032 mm.

8.4 Επίδραση Προσανατολισμού Ινών Στρώματος στη Φυσική Συχνότητα

Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε από τον Swanson, ένας υβριδικός άξονας σύνθετων υλικών, μήκους 1730 mm και μέσης ακτίνας 50,8 mm, χρησιμοποιήθηκε για την διερεύνηση της επίδρασης του προσανατολισμού των ινών στη φυσική συχνότητα. Η διαμόρφωση της στρωματοποίησης του, αποτελείται από τέσσερα στρώματα μονής κατεύθυνσης σύνθετου υλικού, τοποθετημένα ως $[+45^{\circ}_{\text{glass}}/-45^{\circ}_{\text{glass}}/0^{\circ}_{\text{carbon}}/90^{\circ}_{\text{glass}}]$ (6.1).

Από τα διαγράμματα (7.4)(7.5) γίνεται φανερό ότι οι ίνες πρέπει να στρέφονται κατά την διεύθυνση των 0° μοιρών, για να υπάρξει αύξηση της φυσικής συχνότητας, ουσιαστικά αυξάνοντας το μέτρο ελαστικότητας E_x κατά τον διαμήκη άξονα του μοντέλου.

Αυτό εξηγεί και τον λόγο για τον οποίον τοποθετήθηκε το στρώμα ανθρακονήματος, με το μεγάλο μέτρο ελαστικότητας, προς την κατεύθυνση των 0° μοιρών.

Στο διάγραμμα (7.4), παρόλο που η διαμόρφωση $[0,0,90,0]$ παρουσιάζει υψηλή τιμή φυσικής συχνότητας, δεν ενδείκνυται σε περιπτώσεις που απαιτείται βελτιστοποίηση παραμέτρων, όπως για αντοχή στην κόπωση και για αντίσταση στον λυγισμό.

Από το διάγραμμα (7.5) παρατηρούμε ότι ο άξονας χάνει ένα ποσοστό της τάξεως του 55% από την φυσική του συχνότητα, όταν οι ίνες του ανθρακονήματος στρέφονται στις 90° μοίρες αντί στις 0° μοίρες.

8.5 Επίδραση Προσανατολισμού Ινών Στρώματος στο Στρεπτικό Λυγισμό

Η γραμμική ανάλυση στρεπτικού λυγισμού που διεξήχθη στην παρούσα μελέτη, μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την μεγαλύτερη στρεπτική ροπή που μπορεί να αντέξει ο άξονας, πριν αρχίσει και χάνει την ευστάθεια του.

Από το διάγραμμα (7.6) παρατηρούμε ότι ο καλύτερος προσανατολισμός ινών για υψηλή τιμή κρίσιμου στρεπτικού λυγισμού είναι στις 90° μοίρες. Σε αυτήν την γωνία οι ίνες κατευθύνονται προς την εφαπτομενική διεύθυνση και με αυτόν τον τρόπο αυξάνεται το εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας E_h .

Το διάγραμμα (7.6) παρουσιάζει την επίδραση που έχει η αλλαγής γωνίας των ινών των δύο πρώτων στρωμάτων από υαλόνημα, στον στρεπτικό λυγισμό.

Συμπερασματικά, η διεύθυνση των ινών των στρωμάτων, έχει επίδραση τον στρεπτικό λυγισμό. Επίσης για να αυξήσουμε την αντοχή του άξονα σε στρεπτικό λυγισμό, πρέπει να αυξήσουμε το μέτρο ελαστικότητας E_h στην εφαπτομενική διεύθυνση, προσθέτοντας στρώσεις κατά την διεύθυνση των 90° μοιρών.

8.6 Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στη Φυσική Συχνότητα

Συγκριτικά με τον άξονα μετάδοσης κίνησης που δεν περιέχει νανοσωλήνες άνθρακα, η φυσική συχνότητα παρουσιάζει αυξητική τάση, όσο αυξάνεται ο όγκος των νανοδομών στη μήτρα του σύνθετου υλικού.

Συγκεκριμένα, από τον (πίνακα 7.6) παρατηρούμε αύξηση τιμών κατά 59,95% 69,18% 80,06% 133,01% 92,65% 94,07% 89,51% 55,62% για την 1^η 2^η 3^η καμπτική, 1^η στρεπτική, 1^η 2^η 3^η αναπνέουσα και 1^η αξονική αντίστοιχα.

Από τον (πίνακα 7.8) παρατηρούμε αύξηση τιμών της 1^{ης} καμπτικής [0,0,0,90] κατά 7,26%, 13,17% 24,00%, 40,25%, 58,14%, για 0,05 0,10 0,20 0,35 0,50 (vol%), αντίστοιχα.

Από τον (πίνακα 7.9) παρατηρούμε αύξηση τιμών της 1^{ης} καμπτικής [45,-45,0,90] κατά 6,37% 12,27% 23,65% 40,99% 59,95% για 0,05 0,10 0,20 0,35 0,50 (vol%), αντίστοιχα.

Η αξιοσημείωτη βελτίωση των τιμών της φυσικής συχνότητας του άξονα μετάδοσης κίνησης, μας επιτρέπει την λειτουργία του άξονα σε υψηλότερες στροφές, και είναι επακόλουθο της προσθήκης νανοδομών στην οργανική μήτρα του σύνθετου υλικού.

8.7 Επίδραση Προσθήκης Νανοδομών στο Στρεπτικό Λυγισμό.

Συγκριτικά με τον άξονα μετάδοσης κίνησης που δεν περιέχει νανοσωλήνες άνθρακα, ο κρίσιμος στρεπτικός λυγισμός παρουσιάζει αυξητική τάση, όσο αυξάνεται ο όγκος των νανοδομών στη μήτρα του σύνθετου υλικού.

Συγκεκριμένα από τον (πίνακα 7.10) παρατηρούμε αύξηση τιμών ως ακολούθως :

Στρωματοποίησης [$\pm 0,0,90$] κατά 27,64% 50,38% 89,70% 140,87% 187 για 0,05 0,10 0,20 0,35 0,50 (vol%) αντίστοιχα.

Στρωματοποίησης [$\pm 45,0,90$] κατά 18,99% 35,79% 66,19% 107,17% 145,21% για 0,05 0,10 0,20 0,35 0,50 (vol%) αντίστοιχα.

Στρωματοποίησης [$\pm 90,0,90$] κατά 11,86% 21,17% 37,24% 58,91% 79,74% για 0,05 0,10 0,20 0,35 0,50 (vol%) αντίστοιχα.

Η αξιοσημείωτη βελτίωση του κρίσιμου στρεπτικού λυγισμού σε άξονα μετάδοσης κίνησης, μας επιτρέπει την αντοχή του άξονα σε μεγαλύτερα στρεπτικά φορτία και είναι επακόλουθο της προσθήκης νανοδομών στην οργανική μήτρα του σύνθετου υλικού.

Βιβλιογραφία

- [1] Δημήτρης Ι. Παντελής “*Μη Μεταλλικά Υλικά*”, (1996), Εκδόσεις Παπασωτηρίου
- [2] Manoj Kumar Buragohain “*Composite Structures-Design, Mechanics, Analysis, Manufacturing and Testing*”, (2017). CRC Press.
- [3] P.K. Mallick “*Fiber-Reinforced Composites-Materials, Manufacturing and Design*”, (2007), CRC Press.
- [4] K.Tanaka , S.Iijima “*Carbon Nanotubes and Graphene*”, 2nd Edition, (2014) Elsevier Ltd
- [5] Πασχάλης Κ. Γκότσης “*Πεπερασμένα Στοιχεία*”. (2004). Εκδόσεις ΖΗΤΗ
- [6] H.Chr.Seherr ,Thoss F.Schmelz ,E.Aucktor “*Universal Joints and Driveshafts*” (2005)
- [7] Shoaib Nadeem SK, G Giridhara, H K Rangavittal “*A review on the design and analysis of composite drive shaft*” (2018)
- [8] Mohamed A. Badie, E. Mahdi, A.M.S. Hamouda “*An investigation into hybrid carbon/glass fiber reinforced epoxy composite automotive drive shaft*” *Materials and Design* 32 (2011) 1485-1500
- [9] Hamza Taş, Ibrahim Fadil Soykok “*Effects of carbon nanotube inclusion into the carbon fiber reinforced laminated composites on flexural stiffness: A numerical and theoretical study*” *Composites Part B* 159 (2019)
- [10] S. Talukdar “*Vibration of continuous systems*” Indian Institute of Technology Guwahati-781039
- [11] Daniel Gay, “*Composite Material-Design and Applications*” Third Edition, (2015), 12, Table 1.3, CRC Press
- [12] Rafiee MA, Rafie J, Wang Z, Song H, Yu ZZ, Koratkar N. “*Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low Graphene content*”. *ACS Nano* (2009) Volume 3, No12, 3884–3890.
- [13] Thostenson, E. T Chou, T.-W. “*On the Elastic Properties of Carbon Nanotube-Based Composites: Modelling and Characterization*” *J. Phys. D: Appl. Phys.* (2003), 36, 573–582.
- [14] Kaw A.K., “*Mechanics of Composite Materials*” Second Edition, Chapter 3, (2006) CRC Press,
- [15] Ever J. Barbero, “*Introduction to Composite Materials Design*” Third Edition, Chapter 5 & 6, (2018) CRC Press,