revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 10 ANOS

ASPECTOS DE COLABORAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.24.332-355

Flávia Maria Gonçalves[1]
Henrique Rizek Elias[2]

Resumo: Neste artigo, temos por objetivo analisar potencialidades de um trabalho com características colaborativas para o desenvolvimento/aprimoramento do conhecimento especializado do professor de matemática para ensinar frações. A fundamentação teórica assumida considera três aspectos característicos de um trabalho colaborativo – *confiança*, *diálogo* e *negociação* – e um dos subdomínios do quadro teórico do chamado *Conhecimento Especializado do Professor de Matemática*, o subdomínio do *Conhecimento dos Tópicos*. Os dados foram produzidos em um encontro presencial de um processo formativo, ocorrido em 2019, com professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foram analisados dois episódios relevantes que aconteceram enquanto os integrantes do grupo discutiam a respeito de uma tarefa matemática. Os resultados apontam que quando um grupo de professores desempenha um trabalho que manifesta aspectos da colaboração, seus integrantes podem expor suas formas de pensar sem medo de estarem errados ou não, possibilitando um repensar sobre seu *Conhecimento dos Tópicos*. Tal resultado nos permite concluir sobre a necessidade de se investigar com mais profundidade o papel do erro na aprendizagem dos professores ou dos professores formadores.
Palavras-chave: Desenvolvimento Profissional Docente. Conhecimento especializado do professor. Aspectos de colaboração. Frações.

ASPECTS OF COLLABORATION IN THE DEVELOPMENT OF SPECIALIZED KNOWLEDGE OF THE MATHEMATICS TEACHER

Abstract: In this paper, we aim to analyze the potential of a work with collaborative characteristics for the development/improvement of the specialized knowledge of the mathematics teacher to use fractions. The theoretical foundation assumed considers three characteristic aspects of a collaborative work - *trust*, *dialogue* and *negotiation* - and one of the subdomains of the theoretical framework of the so-called *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*, the *Knowledge of Topics* subdomain. The data were obtained in a face-to-face meeting of a training process, which took place in 2019, with teachers who teach Mathematics in the early years of elementary school. It took two relevant episodes that took place while group members were discussing a math task. The results show that when a group of teachers performs a work that manifests aspects of collaboration, its members can expose their ways of thinking without fear of being wrong or not, enabling a rethinking about their *Knowledge of Topics*. This result allows us to demand about the need to investigate in greater depth the role of error in the learning of teachers or trainers.
Keywords: Teacher professional development. Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. Aspects of collaboration. Fractions.

[1] Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Professora da Secretaria da Educação e do Esporte do Estado do Paraná (SEED/PR). E-mail: flavia_gcosta@hotmail.com - ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9170-1763.
[2] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR *campus* Londrina) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da UTFPR *campi* Cornélio Procópio e Londrina. E-mail: henriquerizek@hotmail.com - ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9660-7303.

Introdução

Pesquisas no campo da Educação Matemática (BEZERRA, 2017; MARTINS; CURI, 2020, MENEZES; PONTE, 2010) mencionam um predomínio do trabalho individualista do professor. Menezes e Ponte (2010), por exemplo, comentam que a cultura profissional do professor tem sido marcada pelo individualismo. Uma alternativa para superar esse aspecto tem sido a constituição de grupos de professores que visam trabalhar de forma colaborativa. Entre os benefícios a serem percebidos quando se trabalha em grupos colaborativos, "estão a possibilidade de diminuir a cultura individualista, através da prática compartilhada com os pares" (MARTINS; CURI, 2018, p. 7).

Neste trabalho, analisamos dados produzidos durante um processo formativo, ocorrido ao longo do ano de 2019, que envolveu professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, professores formadores e professoras-pesquisadoras que cursavam um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. O grupo buscou trabalhar em colaboração, manifestando características como *confiança*, *diálogo* e *negociação*. As pesquisas de Elias e Trevisan (2020), Gonçalves (2021) e Elias, Gonçalves e Rodrigues (2021) discutem aspectos relacionados às características colaborativas do trabalho desenvolvido no grupo.

Na presente pesquisa, focamos o trabalho colaborativo sob a perspectiva de suas contribuições para o conhecimento especializado do professor que ensina Matemática, tomando como embasamento teórico o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática[3] (MTSK) proposto por Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013) e Rojas, Flores e Carrillo (2015). De modo mais preciso, temos como objetivo de analisar potencialidades de um trabalho com características colaborativas para o desenvolvimento/aprimoramento do conhecimento especializado do professor que ensina matemática, em particular, o Conhecimento dos Tópicos[4] (KoT) para ensinar frações.

Para tanto, o texto está organizado da seguinte maneira: na próxima seção, apresentamos a fundamentação teórica da pesquisa, que envolve o desenvolvimento profissional docente, os subdomínios do MTSK, especialmente o KoT, e os aspectos de colaboração – *confiança*, *diálogo* e *negociação* – que sustentaram as análises. Em seguida, descrevemos o contexto da pesquisa, oferecendo mais detalhes sobre o processo formativo, e trazemos informações sobre os procedimentos para a produção e análise dos dados. Na seção

[3] No original: *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Por isso, neste texto, utilizamos a sigla MTSK.
[4] No original: *Knowledge of Topics*. Por isso, neste texto, utilizamos a sigla KoT.

seguinte, analisamos os dados, separados em dois episódios, buscando relacionar os aspectos da colaboração e seus potenciais benefícios para o desenvolvimento/aprimoramento do KoT para ensinar frações. Por fim, na última seção, apresentamos as considerações finais, destacando as conclusões e contribuições da pesquisa para a comunidade da Educação Matemática.

Fundamentação Teórica

Para Marcelo (2009), a denominação *desenvolvimento profissional* é adequada à concepção do professor enquanto profissional do ensino. O autor esclarece que o conceito de desenvolvimento tem uma conotação de evolução e continuidade, levando ao entendimento da superação dos entraves entre formação inicial e continuada dos professores.

Para Fiorentini (2008), o desenvolvimento profissional pode ser entendido

> [...] como um processo contínuo que tem início antes de ingressar na licenciatura, estende-se ao longo de toda sua vida profissional e acontece nos múltiplos espaços e momentos da vida de cada um, envolvendo aspectos pessoais, familiares, institucionais e socioculturais (FIORENTINI, 2008, p. 45, *apud* FIORENTINI; CRECCI, 2013, p. 13).

Essas e outras (por exemplo, Ponte (1998) e Day (2001)) compreensões sobre o desenvolvimento profissional docente evidenciam a complexidade do processo, que, como dizem Fiorentini e Crecci (2013, p. 13), é um processo de “vir a ser, de transformar-se ao longo do tempo ou a partir de uma ação formativa”, indicando que promover o desenvolvimento profissional dos professores vai muito além de oferecer cursos, palestras e workshops. Para Nacarato, Mengali e Passos (2017), há diversos fatores que potencializam o desenvolvimento profissional.

> Há, assim, uma multiplicidade de fatores que interferem no desenvolvimento profissional docente. Sabemos que há contextos de formação que potencializam o desenvolvimento profissional e outros que quase ou nada contribuem. Dentre os fatores favoráveis, destacamos: o trabalho compartilhado ou colaborativo; as práticas investigativas; as práticas coletivas e reflexivas; e a adoção de práticas de formação que possam desencadear a reflexão e, consequentemente, o desenvolvimento profissional (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2017, p. 124).

Na mesma direção, Fiorentini e Crecci (2013) indicam que há, pelo menos, três diferentes tipos de práticas consideradas potencialmente catalisadoras de desenvolvimento profissional: as práticas reflexivas, as práticas colaborativas e as práticas investigativas

(FIORENTINI; CRECCI, 2013).

Destacamos a prática colaborativa como potencialmente catalisadora do desenvolvimento profissional. Ponte e Serrazina (2003, p. 16) comentam que, "Para uns, todo o trabalho conjunto de diversas pessoas pode ser considerado colaboração; para outros tal termo deve ser reservado para formas de trabalho com certas características especiais". A depender da perspectiva adotada, essas características podem variar.

Costa e Fiorentini (2007) consideram que são muitas as formas de trabalho coletivo, a colaboração é uma dessas formas. No entanto, os autores sinalizam que o simples fato de estar reunido em uma mesma ação não quer dizer que se está em um trabalho colaborativo. Para que se configure um trabalho coletivo, que seja colaborativo, tudo depende dos objetivos, das relações estabelecidas, do contexto, da prática.

Neste artigo, não temos a intenção de caracterizar o grupo aqui analisado como sendo ou não um grupo colaborativo. Para fazer isso, seria necessário investigar a longo prazo as ações do grupo em questão para compreender sua dinâmica e, então, tentar caracterizá-lo como um grupo colaborativo. Ser colaborativo não é dado *a priori*, o grupo se constitui colaborativo. No entanto, com os passar dos encontros, foi possível perceber alguns aspectos característicos de um trabalho colaborativo (BOAVIDA; PONTE, 2002). Assim, o propósito aqui é investigar como alguns desses aspectos característicos de um trabalho colaborativo podem favorecer o desenvolvimento profissional, mais especificamente, o conhecimento matemático do professor[5].

Boavida e Ponte (2002) apontam esses aspectos que constituem um grupo de pessoas que visa trabalhar em colaboração. Destacamos a *confiança*, o *diálogo* e a *negociação*. A *confiança* estabelecida na relação entre seus membros é um primeiro passo para o real alcance da colaboração e pode ser observada em um clima de respeito e cuidado, seja em nível pessoal ou profissional. Ter *confiança* implica expor ideias abertamente, questionar valores e ações uns dos outros, respeitando e sendo respeitado. O *diálogo* é considerado um instrumento fundamental, sendo importante aceitar a voz de cada sujeito e ter noção de que nenhuma ideia é definitiva. Deve-se perceber que esse aspecto é mais que um instrumento consensual, ele pode revogar contradições e renovar compreensões. A *negociação* também é um aspecto que permeia o processo colaborativo do princípio ao fim. De acordo com Boavida e Ponte (2002, p. 7), "[...] é preciso ser capaz de negociar objetivos, modos de trabalho, modos de

[5] De acordo com Ponte e Oliveira (2002), o desenvolvimento profissional do professor se dá em dois campos estreitamente relacionados: (i) crescimento do conhecimento e competências profissionais e (ii) formação e afirmação de sua identidade profissional. Nesta pesquisa, focamos somente o conhecimento profissional docente.

relacionamento, prioridades e até significados de conceitos fundamentais". Esse aspecto visa enfrentar as ambiguidades que possam surgir na trajetória do processo do trabalho colaborativo.

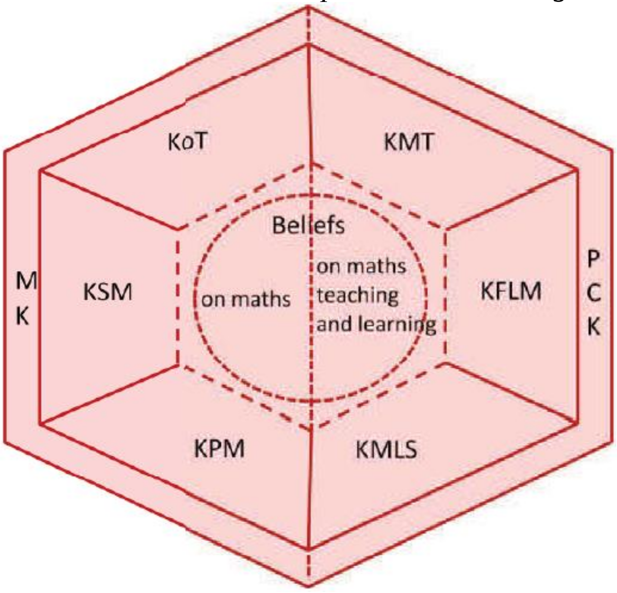
Sobre o conhecimento matemático do professor, aspecto central neste trabalho, assumimos o modelo teórico do MTSK. O MTSK "focaliza a especificidade do conhecimento do professor de matemática em relação ao ensino do conteúdo, considera também as crenças dos professores em relação à matemática e ao ensino da matemática" (ROJAS; FLORES; CARRILLO, 2015, p. 147, tradução nossa).

Como apontam Almeida e Ribeiro (2019) quando abordam o MTSK, enxergar o conhecimento de professores que ensinam matemática como especializado significa assumir essa especialização tanto no âmbito do conhecimento matemático quanto do conhecimento pedagógico.

Assim como outros modelos teóricos (por exemplo, o *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT – apresentado por Ball, Thames e Phelps (2008)), o MTSK parte da categoria do *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* (*Pedagogical Content Knowledge* - PCK) de Shulman (1987) para explorar subdomínios do conhecimento especializado do professor. Como apontam Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013) e Rojas, Flores e Carrillo (2015), o MTSK possui dois domínios: o do Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge* - MK) e do PCK. O MK pode ser dividido em três subdomínios: Conhecimento dos Tópicos (*Knowledge of Topics* – KoT), Conhecimento da Estrutura da Matemática (*Knowledge of the Mathematical Structure* – KSM) e Conhecimento da Prática da Matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics* – KPM). Já o PCK pode ser dividido em outros três subdomínios: Conhecimento do Ensino de Matemática (*Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT), Conhecimento das Características da Aprendizagem de Matemática (*Knowledge of Features of Learning* – KFLM), Conhecimento dos Padrões de aprendizagem de Matemática (*Knowledge of Mathematics Learning Standards* – KMLS).

A Figura 1 ilustra os domínios e subdomínios do MTSK.

Figura 1: *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK



Fonte: Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013).

Neste artigo, focamos apenas o KoT. De acordo com Rojas, Flores e Carrillo (2015), o KoT, um dos subdomínios do MK, abrange o conhecimento de conceitos e de procedimentos matemáticos com seus respectivos fundamentos. Envolve conhecer os aspectos fenomenológicos associados ao assunto, conhecer os diferentes significados do tema; conhecer exemplos específicos em aspectos concretos de um tópico matemático etc.

Especificamente sobre frações, Almeida e Ribeiro (2019) exemplificam aspectos do KoT, a saber: um conhecimento que permita compreender os diferentes significados das frações (parte-todo, razão, operador, quociente e medida); reconhecer que as frações podem representar números ou uma relações entre números; conhecer as partes e o todo em uma representação do tipo 1/3, em representação pictórica ou outra, observando significados distintos e diferentes tipos de unidades (contínuas e discretas); comparar quantidades de diferentes ordens de grandeza; conhecer conceitos como frações equivalentes; frações próprias, impróprias e aparentes; identificar os números racionais na reta numérica; operar com frações, considerando diferentes representações; decompor o todo em partes e recompor o todo a partir das partes; o conhecimento de contextos que aparecem diversas situações em que se aplicam as frações, como meio quilo ou dois terços dos alunos.

No caso desta pesquisa, estamos interessados em analisar as potencialidades de um trabalho com aspectos de colaboração (*confiança*, *diálogo*, *negociação*) para o desenvolvimento/aprimoramento do conhecimento especializado do professor, em particular, o KoT para ensinar frações.

Metodologia

Ao longo do ano de 2019, foi desenvolvido, nas dependências da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – *campus* Londrina, um projeto[6] de formação continuada em Matemática destinado a professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. De abril a novembro daquele ano foram realizados oito encontros presenciais, um por mês, de 4 horas cada.

Os quatro primeiros encontros, ocorridos no primeiro semestre, contaram com a participação de 14 professoras[7] que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental em diferentes escolas do município de Londrina/PR, duas professoras e mestrandas[8] do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) e dois professores formadores[9]. No segundo semestre, o grupo aumentou, passando a contar com 24 professoras dos anos iniciais (seis delas já participavam desde o primeiro semestre)[10].

O objetivo do processo formativo era contribuir para o desenvolvimento profissional das professoras participantes a partir das demandas de suas práticas, fazendo uso dos Estudos de Aula (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016) como uma abordagem de trabalho colaborativo, estreitamente conectada à prática docente. No Estudo de Aula, os

> [...] professores trabalham em conjunto, procurando identificar dificuldades dos alunos, e reparam em detalhe uma aula que depois observam e analisam em profundidade. No fundo, realizam uma pequena investigação sobre a sua própria prática profissional, em contexto colaborativo, informada pelas orientações curriculares e pelos resultados da investigação relevante (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016, p. 869).

Um ciclo de Estudo de Aula é composto por: (i) planejamento coletivo de uma aula; (ii) desenvolvimento dessa aula por uma professora participante do grupo; e (iii) análise coletiva da aula desenvolvida. Para este artigo, analisamos somente o quarto encontro presencial (ocorrido no dia 4 de julho de 2019), destinado ao planejamento coletivo da aula.

---

[6] Trata-se de um Projeto de Extensão desenvolvido na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – *campus* Londrina durante os anos de 2018 e 2019, cujo título era *Formação Continuada em Matemática para docentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Os dados analisados neste artigo são referentes ao ano de 2019.

[7] Para a divulgação e convite das professoras envolvidas, o Projeto contou com a colaboração da Secretaria Municipal de Educação de Londrina que disparou *e-mail* a todas as professoras do 4º e do 5º anos do Ensino Fundamental do município. Não houve critério de seleção específico, a inscrição era feita pelo preenchimento de um formulário enviado no *e-mail*-convite.

[8] Uma dessas estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) é autora deste artigo e, no processo formativo, atuou como observadora participante.

[9] Um dos professores formadores é coautor deste artigo.

[10] Os detalhes desse processo formativo são apresentados por Elias e Trevisan (2020).

Antes desse encontro presencial, os professores formadores solicitaram às professoras que encaminhassem, por *e-mail* ou pelo grupo no *WhatsApp*, uma tarefa matemática (poderia ser mais do que uma), que abordasse o conteúdo “frações”, para ser discutida no encontro presencial. A proposta era que as professoras enviassem tarefas que costumavam utilizar em suas práticas. Dentre as várias tarefas encaminhadas, duas foram selecionadas pelos professores formadores e levadas para o quarto encontro.

O planejamento dos professores formadores para esse encontro envolvia planejar coletivamente uma aula pautada em uma dessas tarefas matemáticas. Além disso, havia a sugestão dos formadores de que, no desenvolvimento da aula a ser realizada por uma participante do grupo, fossem assumidas as práticas para orquestrar discussões matemáticas produtivas, propostas por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), abordagem que já vinha sendo trabalhada em encontros anteriores do grupo. Tais práticas são: antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões. Os professores formadores conduziram o quarto encontro de forma a trabalhar essas cinco práticas para que as professoras vivenciassem essa dinâmica que, posteriormente, seria utilizada em sala de aula na escola.

Uma das tarefas selecionadas e enviadas por uma das professoras foi a chamada *Tarefa dos Arremessos de Basquete*, apresentada no Quadro 1. Essa tarefa traz como principais ideias matemáticas a comparação e a equivalência de frações. As análises realizadas neste artigo são decorrentes das discussões coletivas geradas por essa tarefa.

Quadro 1: Tarefa dos Arremessos de Basquete

Num treino de basquetebol, dois jogadores estiveram a fazer lançamentos ao cesto e Henrique conseguiu marcar 4 dos 6 lançamentos, enquanto Tomé conseguiu marcar 7 dos 12 lançamentos. a) Represente, sob a forma de fração, os lançamentos concretizados por cada um deles. b) Indique quem deveria ser escolhido para representar a equipe e por quê.

Fonte: adaptado de Ponte e Quaresma (2012)

Tal tarefa foi levada para o quarto encontro e desencadeou diversas discussões entre os participantes, sendo selecionada para ser adaptada e utilizada na aula que foi desenvolvida por uma das professoras com sua turma de 5º ano do Ensino Fundamental. Neste artigo, não analisamos a aula desenvolvida pela professora, focamos apenas em dois episódios (aqui chamados de episódios relevantes) que ocorreram durante o quarto encontro, destinado ao planejamento da aula.

A escolha por apresentar e analisar dois episódios relevantes ocorridos no quarto encontro se justifica pelo fato de se tratarem de “eventos críticos” (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004). Segundo Powell, Francisco e Maher (2004, p. 22), um “evento é crítico em sua relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa”. Em nosso caso, entendemos que os eventos críticos (aqui chamados de episódios relevantes) selecionados são elucidativos no que dizem respeito à mobilização de subdomínio KoT do MTSK, isto é, são episódios que explicitam a importância dos aspectos da colaboração no desenvolvimento/refinamento do KoT para ensinar frações.

A pesquisa faz uso de gravações em áudio e vídeo que registraram este quarto encontro. As gravações foram transcritas e os diálogos foram submetidos a procedimentos analíticos, com base nas categorias *a priori* dadas pelos aspectos da colaboração (*confiança*, *diálogo* e *negociação*) e o subdomínio KoT do MTSK de Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013) e Rojas, Flores e Carrillo (2015). Os nomes que aparecem nas análises são todos fictícios, visando preservar o anonimato das participantes.

No dia do encontro analisado, além dos dois professores formadores, estavam presentes 9 professoras participantes. A dinâmica para a realização das discussões matemáticas proporcionadas pela tarefa matemática foi a seguinte: houve o primeiro momento em que as professoras resolveram as duas tarefas individualmente para, em seguida, a discussão passar a ser feita em dois pequenos grupos e, depois, em plenária (grande grupo), o que permitiu o compartilhamento de diferentes formas de resolução.

Como também atuou como professora participante, a autora deste artigo integrou um pequeno grupo e, do mesmo modo, participou das discussões nas plenárias. Com base nisso, os dados analisados foram produzidos em dois momentos: i) discussões realizadas no pequeno grupo em que a pesquisadora era integrante, formado por quatro professoras, cujos nomes fictícios são Deise, Maria, Ely e Ângela; ii) na plenária, com a participação de todas as professoras, não apenas as integrantes do grupo da pesquisadora. Dessa forma, além de Deise, Maria, Ely e Ângela, as professoras Márcia, Ana, Tina e Carla também aparecem em nossas análises (as falas da professora Selma não aparecem nos trechos utilizados neste artigo).

Para fins de organização, cada fala do diálogo apresentado nas análises possui um código composto por uma letra e um número. A letra “A” indica que o trecho faz parte do Episódio 1, aqui chamado de *As oportunidades de arremessos*, e a letra “B” indica que o trecho faz parte do Episódio 2, aqui chamado de *O empate*. O número que aparece após a letra apenas estabelece a sequência de cada fala transcrita.

Análises

Episódio 1 - As oportunidades de arremessos

Logo após resolverem individualmente às duas tarefas matemáticas, o pequeno grupo formado por Deise, Maria, Ely e Ângela inicia a conversa. Maria puxa o tema, perguntando sobre a segunda tarefa, que foi a *Tarefa dos Arremessos de Basquete*.

> **A1 – Maria**: *E no segundo? No treino de basquetebol.*
> **A2 – Ely**: *Sobre forma de fração, 4/6 e 7/12* [Aqui, Ely respondeu o item a) da tarefa]. *E, no meu ver, foi o Henrique, porque de todos os lançamentos que ele fez, dos 6, ele acertou a maioria, né?*
> **A3 – Maria**: *Ele acertou a maioria!*
> **A4 – Ely**: *É, ele acertou mais com relação a Tomé.*
> **A5 – Deise**: *Eu não! Eu coloquei assim, que o Henrique acertou mais com relação aos lançamentos possíveis que ele conseguiu. Então, ele conseguiu, de 6 que ele conseguiu fazer, ele acertou 4. Então, ele conseguiu mais em relação ao que ele conseguiu fazer. Mas, se eu fosse escolher, eu escolheria o Tomé, acho que ele deveria ser escolhido, porque ele conseguiu o dobro de lançamentos, que foi 12, né? E ele marcou mais que o Henrique, sete. Do que ele conseguiu, ele ainda marcou, o Henrique conseguiu só 4 e ele conseguiu 7, então pra mim eu escolheria o Tomé. Porque aqui fala que é num jogo de basquete ...então num jogo de basquete é quem consegue lançar, não é, assim... não é um jogo onde todos tinham a mesma quantidade de lançamentos. Não! Então, eu escolheria o Tomé, porque ele conseguiu 12, o dobro de lançamentos de Henrique e o Henrique fez 4 pontos nesse jogo e ele fez 7. Eu escolheria o Tomé.*
> **A6 – Maria**: *Mas, não foi dado a oportunidade, a mesma oportunidade para o Henrique.*
> **A7 – Ely**: *Não foi colocado nada.*
> **A8 – Deise**: *Não, mas olha, num treino, tá? Dois jogadores estiveram a fazer lançamento ao cesto e Henrique conseguiu, os dois conseguiram fazer* (lançamentos).

Nesse trecho, percebemos que a professora Deise apresentou duas ideias para a tarefa. Na primeira ideia, ela diz que Henrique acertou mais com relação aos arremessos possíveis que ele conseguiu. Em A5, ainda não é possível identificar, com clareza, qual é o pensamento de Deise. Por exemplo, a professora poderia estar pensando por meio da comparação de frações (isto é, comparando 4/6 e 7/12) para dizer que "ele conseguiu mais em relação ao que ele conseguiu fazer" ou, de outro modo, Deise poderia estar se referindo ao número de erros, considerando que Henrique errou apenas dois lançamentos enquanto Tomé errou cinco. Essa segunda interpretação é possível, pois Deise está considerando a quantidade de acertos em relação à quantidade de arremessos que os jogadores conseguiram.

A segunda ideia apresentada pela professora parece levar em conta essa mesma interpretação, considerando as oportunidades de arremessos criadas pelos jogadores. Assim, sua escolha é pelo Tomé, uma vez que a quantidade de arremessos foi maior e a quantidade de acertos também (A5). Nesse caso, a tomada de decisão de Deise está pautada na quantidade de oportunidades criadas pelo jogador e na comparação entre os acertos. Deise não faz uma comparação entre as frações.

A primeira ideia da professora Deise (A5) pode estar na mesma direção do que a professora Ely diz em A2. No entanto, a segunda forma de pensamento colocada por Deise (A5) evidencia uma divergência de ideias que promovem e estimula o *diálogo* entre os envolvidos. Em A6 e A7, as professoras Maria e Ely contestam a segunda ideia apresentada por Deise, o que a leva a justificar sua forma de pensar em A8. Em A6, A7 e A8, parece estar havendo uma *negociação* entre as professoras.

Em um momento posterior, ainda no pequeno grupo, o professor formador A se aproximou para ouvir e discutir junto com as professoras. Nessa conversa entre o formador e as integrantes do grupo, foi possível compreender melhor a forma de pensar de Deise. Após a professora Maria apresentar ao professor formador A as diferentes formas de pensar que surgiram no grupo, a discussão se inicia com a resolução proposta por Deise.

> **A9 – Professor formador A**: *Na sua interpretação* [Deise], *o que você tem a mais de diferente das outras interpretações?*
> **A10 – Deise**: *Não, eu só, eu fui por assim, acho que um jogador para ser considerado bom, ele tem que ser... Então, um no jogo de basquete não tinha limite, não está falando que os dois estão a arremessar 6 cestas. Falou, um teve 6 oportunidades e conseguiu 4 e o outro teve 12, o dobro, e acertou 7.*
> **A11 – Professor formador A**: *Você está levando em consideração a quantidade de tentativas que ele fez?*
> **A12 – Ely**: *A quantidade de arremessos.*
> **A13 – Deise**: *As tentativas e acertos. De 4 e 7 em um jogo, quem fez mais? Quem fez 7. Num jogo, se você acertou 4 e eu acertei 7, eu fiz mais que você, então eu também tenho qualidade na quantidade de arremessos e eu consegui mais*.
> **A14 – Maria**: *Sem levar em consideração a quantidade de arremessos, as possibilidades serem diferentes...*
> **A15 – Deise**: *A diferença do... a diferença de possibilidades e acerto. Que daí aqui dá 2, o Henrique foi melhor. Dos 6, ele arremessou 4, o outro errou mais. Mas, no jogo, quem fez mais? Entendeu?*

No trecho anterior, Deise torna suas ideias um pouco mais claras, permitindo-nos compreender suas falas em A5. Em A15, Deise evidencia que o Henrique poderia ser o escolhido se considerássemos a diferença entre a quantidade de arremessos realizados e a quantidade de acertos. Ainda em A15, Deise parece se equivocar ao dizer que “Dos 6, ele arremessou 4”, quando, possivelmente, queria dizer que, dos seis arremessos, Henrique acertou 4. A professora manifesta uma possibilidade de resolução da tarefa pautada na comparação entre os números de erros (dois e cinco). Apesar de cogitar essa possibilidade, para sua tomada de decisão, Deise prefere considerar o fato de que, por se tratar de um jogo de basquete, quem fez mais pontos merece ser o escolhido, ou seja, Tomé.

Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, PR, Brasil,
v.11, n.24, p.332-355, jan.-abr. 2022.

O professor formador A e as professoras Ely e Maria parecem querer compreender o pensamento de Deise, que se sente à vontade para buscar explicar sua forma de pensar.

A resolução proposta por Deise parece ter colocado outras professoras para refletirem e repensarem suas resoluções. No trecho a seguir, quando o professor formador A tenta entender como as outras integrantes do grupo resolveram a tarefa, Ely manifesta sua reflexão sobre as falas de Deise.

> **A16 – Professor formador A**: *Como é que você fez, Ely?*
> **A17 – Ely**: *Eu pensei o mesmo que ela* [Maria]. *Nós consideramos os lançamentos e acertos, daí o Henrique por ter lançado 6 e acertado 4, seria escolhido*.
> **A18 – Professor formador A**: *Como é que você fez essa comparação para saber que é maior?*
> **A19 – Ely**: *Comparando 4 acertos de 6 lançamentos e 7 de 12, aí montei a fração dos dois, e comparei. Foi o que aí ela* [Deise] *colocou: mas, de 12 lançamentos ele acertou 7, então a gente tem de levar em consideração a questão dos lançamentos. Mas, eu montei as frações e considerei que ele* [Henrique] *acertou mais, teve mais acertos do que o outro* [Tomé] *que lançou mais*.

Em A19, Ely parece ponderar sua forma de resolver a tarefa, quando “aceita a voz do outro”, característica do *diálogo* proporcionado pela colaboração entre as participantes. Ely parece não ter abandonado sua forma de pensar, que era semelhante à de Maria (A17), mas a ampliou, incorporando as considerações feitas por Deise.

Na *Tarefa dos Arremessos de Basquete*, a proposta central era abordar as ideias de comparação e de equivalência de frações, mas a professora Deise (em A5) trouxe outra abordagem que também pode ser problematizada na tomada de decisão. A tarefa matemática permitiu o surgimento de diferentes significados, que de algum modo, não estão livres de ambiguidades ou de um eventual erro ou engano. No entanto, a participação ativa da professora Deise foi fundamental para que essa forma de resolver a tarefa emergisse e proporcionasse discussões matemáticas pertinentes.

Na sequência da conversa entre o professor formador A e as professoras, notamos outro aspecto essencial do trabalho colaborativo: a mutualidade. Esse aspecto fica evidente quando há uma interação entre o Professor formador A e as professoras – principalmente Deise – e há a partilha de conhecimentos.

> **A20 – Ely**: [essa tarefa] *dá margem para muita coisa, né? Se nós, como professoras, já quebramos um pouco a cabeça, imagina um aluno. Vai do direcionamento do que você quer que o aluno... onde você quer que o aluno chegue*.
> **A21 – Deise**: *Ou uma fração, duas frações, que você consiga chegar em uma equivalência, para você poder comparar. Pode até dar duas frações com denominadores diferentes, não tem problema. Mas, que tenha alguma forma de ele fazer uma comparação, achar um* [denominador] *comum e desenhar e ver..., sabe?*
> **A22 – Professor formador A**: *Mas, nesse caso não daria para fazer isso? Com essas*

frações?
A23 – Deise: *É, não! Eu acho que não. Não por causa do 7.*
A24 – Professor formador A: *Por quê? O 7 é...*
A25 – Deise: *Porque aqui* [nessas frações] *eu não vou conseguir, por exemplo, nem simplificar e nem ir... ah, aqui dá, mas...* [referindo-se à fração 4/6, que é possível simplificar].
A26 – Professor formador A: *Uma você consegue simplificar, a outra não?*
A27 – Deise: *Ah, não! É... aqui também dá para chegar no 12* [referindo-se ao denominador da fração 4/6], *se eu fizer por 2.*

O tom da fala de Deise é de quem estava descobrindo, naquele exato momento, que é, sim, possível usar frações equivalentes para fazer a comparação de frações. Enquanto falava, a professora fazia as contas, multiplicando numerador e denominador por 2 e conclui:

A28 – Deise: *Duas vezes seis, doze. Duas vezes quatro, oito. Oito doze avos. Aí eu vou... ah, aí vai ser o Henrique*. [contrariando sua primeira resposta dada anteriormente, que considerava o Tomé como o escolhido]
A29 – Ely: *É verdade, já dá, sim!*
A30 – Professor formador A: *Aí essa comparação de frações agora você fez como?*
A31 – Deise: *Aí essa comparação... É! Não, eu queria achar um denominador comum. Então, eu achei agora, com a multiplicação. Deu oito doze avos para o Henrique e sete doze avos para o Tomé. Então, aí o Henrique, nessa comparação, teve mais ... Eu consigo mostrar para meu aluno, ele consegue ver que o Henrique foi melhor. Mas, na situação do jogo... Por exemplo, eu estava escrevendo isso* [referindo-se à tentativa de fazer comparação de frações], *mas aí eu apaguei tudo e falei: Não, mas é jogo. Se o jogador lançou mais e fez mais, é ele*. [esse era o argumento inicial da professora para escolher o Tomé e não o Henrique]
A32 – Professor formador A: *Sim, é uma forma de pensar. Em um jogo, quem consegue mais oportunidades de fazer gol, pensando no futebol, eu prefiro esse jogador que consegue gerar mais oportunidades do que alguém que gera menos*.
A33 – Deise: *Sim, então, mas agora que eu achei uma equivalente... eu não estava conseguindo achar um jeito por causa do 7, eu fiquei parada no 7. Mas, agora, comparando, o Henrique está melhor*.
A34 – Professor formador A: *Porque aí, quando você fez essa fração equivalente, você chegou em frações de mesmo denominador...*
A35 – Deise: *Sim! Posso comparar.*
A36 – Ely: *Agora dá para comparar.*
A37 – Deise: *Porque oito doze avos é maior do que sete doze avos. Agora eu consigo comparar, mas, eu ainda acho que na situação de basquete, quem arremessa e faz mais, ganha*.

A partilha de conhecimentos, a *negociação*, manifesta-se no diálogo acima. O professor formador A questiona Deise (A22, A24, A26 e A30) de tal modo que a coloca para refletir sobre algo que parecia estar impedindo-a (A21, A23 e A25) de pensar a resolução da tarefa de modo diferente. Esses questionamentos fizeram a própria Deise chegar a uma conclusão (A28, A31 e A33) diferente daquela a que tinha chegado inicialmente. No entanto, mesmo ampliando sua compreensão da resolução da tarefa, em A31 e A37, Deise ainda destaca que, por se tratar de um jogo, se um jogador lançou mais vezes, ele deve ser o escolhido. Em A32, o Professor formador A concorda com a forma de pensar de Deise, reconhecendo-a como uma tomada de decisão possível para a escolha do jogador e, de algum modo, estabelecendo uma relação de *confiança* com a professora, na medida em que valoriza sua forma de pensar. Ao não invalidar a resposta da professora Deise, o professor formador a deixa com outras possibilidades e não apenas aquela que era a esperada por ele (utilizando frações equivalentes para comparar as frações).

As diferentes formas de pensar a *Tarefa dos Arremessos de Basquete* também geraram discussão na plenária.

A38 – Professor formador B: *E o treino de basquete?*

O Professor formador A iniciou a discussão questionando como a professora Márcia, que estava no outro pequeno grupo (não estava no grupo de Deise), havia resolvido.

A39 – Professor formador A: *Como você resolveu?*
A40 – Márcia: *Olha, eu coloquei aqui a fração, comparação as frações.*
A41 – Professor formador B: *Como é que você comparou as frações?*
A42 – Márcia: *É, primeiro representei na forma de fração, eu coloquei quatro sextos e sete doze avos. Agora tem que comparar, agora é mais difícil*. [risos]
A43 – Professor formador B: *Você comparou pensando de que maneira?*
A44 – Márcia: *Eu pensei que o Tomé fez mais pontos, ele fez 7 de 12 jogadas e o outro fez 4 de 6, aí entrou aquela discussão, quem fez mais? Quem fez menos? Aí vai do tempo. Quanto teve ele teve tempo? O mesmo tempo para jogar 12 e outro 6?*
A45 – Professor formador A: *Depende do tempo. A sua maneira de pensar e comparar essas duas frações, depende do tempo, e a sua conclusão foi...*
A46 – Márcia: *Olha, no primeiro pensamento eu pensei que o Tomé tinha feito mais, mas quando você vai pensar muito, simplificar fração, eu não lembro como simplifica fração*.
A47 – Professor formador A: *Nessa sua maneira, você escolheria o Tomé?*
A48 – Márcia: *É, eu escolheria o Tomé.*
A49 – Professor formador A: *Você escolheria o Tomé, por conta de?*
A50 – Márcia: *Mais lançamentos*.
A51 – Professor formador B: *Mais lançamentos. Você está querendo dizer, mais lançamentos ou mais acertos?*
A52 – Márcia: *Ele teve mais lançamentos. Ele teve 12 lançamentos que é o dobro de 6*.
A53 – Professor formador A: *No mesmo tempo, ele teve mais lançamento?*
A54 – Márcia: *É no mesmo tempo!*
A55 – Professor formador B: *Mesmo que ele tivesse acertado 5, ele continuaria sendo o melhor?*
A56 – Márcia: *Então, se você for pensar no tempo, teria sido mais. Pensando assim, rapidamente. Mas, se você for pensar na comparação e dobrar o tempo do 6* [arremessos] *lá e tivesse* [acertado] *8, seria 8 de 12. Assim o outro teria feito mais, o Henrique, se fosse para dobrar a jogada do Henrique, né? Aí fiquei perdida, aí eu não sei mais.*

Nesse diálogo, a professora Márcia expõe sua ideia, considerando inicialmente que se deve fazer a comparação entre frações (A40). Márcia, porém, não tinha facilidades em realizar essa comparação (A42), o que exigiu dela buscar outra forma de tomar a decisão. Foi então que Márcia apresentou uma ideia semelhante à da professora Deise, considerando as oportunidades de lançamentos realizados em um determinado intervalo de tempo.

É interessante notar que, em A46, Márcia evidencia que sua dificuldade em simplificar frações a levou a escolher o jogador Tomé (A46 e A48), já que Tomé tinha acertado mais cestas do que Henrique. A dificuldade em lidar com frações equivalentes também parece ter sido um problema para Deise, como discutimos anteriormente.

Ainda nesse diálogo, percebemos a reflexão feita por Márcia nos trechos A44, A46 e A56, decorrente dos questionamentos dos professores formadores. Márcia apresenta sua interpretação, reflete e conclui dizendo que não sabe fazer a simplificação de frações (A46). A professora se sentiu à vontade para expor abertamente suas ideias, sem medo de ser questionada pela divergência de pensamentos, manifestando algum nível de confiança com o grupo.

Antes de finalizarmos este episódio, consideramos ser relevante tornar mais explícita a forma de pensar de Deise apresentada em A5 e em A15. No diálogo a seguir, Deise manifesta sua ideia inicial de que a comparação poderia ser feita pelo número de erros de cada jogador.

A57 – Ana: *Eu pensei assim: ele lançou 6 vezes, não foi? E acertou 4, ou seja, só errou duas. O outro jogou 12 e acertou 7, então ele errou cinco. Eu pensei assim!*
A58 – Professor formador A: *Então, por esse motivo?*
A59 – Ana: *Eu escolho o Henrique, ele acertou mais e errou menos.*
A60 – Deise: *É, o meu pensamento primeiro foi esse, acertou mais do que os lances que ele teria, mas daí eu achei que estava muito fácil e apaguei ...*
A61 – Carla: *Eu também, eu apaguei o Henrique e coloquei o Tomé.*

Em A57, Ana argumenta que Henrique só errou dois arremessos, enquanto Tomé errou cinco. Nessa comparação, em A59, Ana conclui que o Henrique deve ser escolhido, uma vez que “errou menos”. As professoras Deise e Carla (A60 e A61) comentam que tiveram a mesma ideia de Ana, mas, sem confiança em suas respostas, ambas apagaram suas resoluções.

Esse episódio relevante, denominado *As oportunidades de arremesso*, chama a atenção sob alguns aspectos do KoT. Em diferentes momentos, as professoras manifestaram dificuldades em resolver a tarefa realizando a comparação entre as frações. Como podemos ver em A33, a dificuldade se deu pela presença do número 7 no numerador de uma das frações, fazendo com que a fração $\frac{7}{12}$ não pudesse ser simplificada para se chegar a uma fração de denominador 6, o que facilitaria a comparação com a fração $\frac{4}{6}$. Ao não conseguir simplificar e não pensar em encontrar a fração $\frac{8}{12}$ (fração equivalente à fração $\frac{4}{6}$), as professoras buscaram outros caminhos para responder à tarefa. Um deles (ilustrado em A57) está matematicamente incorreto, pois essa comparação feita a partir da comparação entre o número de acertos e de arremessos não permite tirar essas conclusões. O outro caminho (ilustrado em A5 e A44) extrapola as informações presentes no enunciado da tarefa, quando consideram se tratar de um jogo (uma partida) de basquete (A5) ou que havia um tempo para a realização dos arremessos (A44).

Se, por um lado, a *confiança* estabelecida no grupo permitiu que as professoras manifestassem suas formas de pensar sem medo de estarem erradas, por outro, o *diálogo* e a *negociação* permitiram que as professoras chegassem a formas matematicamente corretas de resolver a tarefa (A33 e A35 ilustram isso), aprimorando o KoT a respeito das frações. Formas matematicamente incorretas (como a apresentada em A57) foram debatidas durante o encontro. Por questão de limitação de espaço, não analisamos todas elas. O Episódio 2, apresentado na sequência, apresenta um caso desses.

Episódio 2 – O empate

Esse episódio se inicia no pequeno grupo, quando se discutia quem deveria ser escolhido no contexto da *Tarefa dos Arremessos de Basquete*, Henrique ou Tomé. Dentre as possibilidades levantadas pelas professoras (mencionadas no episódio anterior), a professora Ângela apresenta uma forma de pensar diferente das demais: o empate entre os jogadores. O argumento dessa professora foi que Henrique, ao acertar 4 de 6 arremessos, acertou a metade mais 1 (50% mais 1), já que acertou 3+1 arremessos; e Tomé, que acertou 7 de 12 arremessos, também acertou a metade mais 1 (50% mais 1), uma vez que acertou 6+1 arremessos. Portanto, para essa professora, Henrique e Tomé empataram. Vejamos a conversa no pequeno grupo.

B1 – Ângela: *Se for ver, olha... o 7 em relação ao 12 é metade mais 1, aqui também* [referindo-se ao fato de que 4 é a metade de 6 mais 1], *os dois fizeram igual, então*.
B2 – Deise: *Como assim?*
B3 – Ângela: *Porque olha... 7 é a metade mais 1, ele fez. Aqui também, a metade desse* [6] *mais 1. Se for ver, os dois*.
B4 – Deise: *Não, mas a metade aqui é 3. Ah, entendi. Metade do quê?*
B5 – Ângela: *Metade dos lançamentos, 3 mais1 aqui também 6 mais 1*.
B6 – Deise: *É, também.*
B7 – Maria: *Se você for pensar... só que se você for fazer a divisão das frações? Pensando... Não dá, não dá o decimal certo. Dá 0,6 e o outro dá 0,58...*
B8 – Deise: *Não dá pra achar, pela equivalência não dá pra achar*.

A colocação de Ângela leva a professora Deise a fazer questionamentos (B2 e B4) para que tentar compreender a ideia. Percebe-se, em um primeiro instante, que há por parte de Deise um estranhamento quanto à forma de pensar de Ângela. No entanto, Deise ouve a explicação de Ângela e não se opõe, aceita como mais uma forma de pensamento (B6). Já a professora Maria questiona que, em B7, se essa comparação fosse feita usando os números em suas representações decimais ($\frac{4}{6} = 0,\overline{6}$ e $\frac{7}{12} = 0,58\overline{3}$), não daria empate. Em B8, Deise concorda.

As professoras continuam apresentando suas ideias para resolver a tarefa quando retomam a forma de pensar de Ângela.

> **B9 – Ely**: *É, eu acho que esse problema tinha que ser reformulado.*
> **B10 – Deise**: *Não, eu acho que ele é pra isso mesmo.*
> **B11 – Maria**: *Para gerar essa discussão, porque se você for pensar o que a...*
> **B12 – Deise**: *Agora, o que ela falou, é legal*. [referindo-se à fala de Ângela]
> **B13 – Maria**: *Tem sentido também. Tem sentido.*
> **B14 – Deise**: *Se for olhar pelo que ela falou, está empatado. Mas, deixa eu entender de novo. Doze, metade. Tá.*
> **B15 – Ângela**: *Metade de 6 é 3. Ele fez mais 1. Metade de 12 é 6, ele fez mais 1. Só que é igual você falou, se ele teve mais oportunidades, se ele foi melhor no jogo, teria que ser escolhido ele* [referindo-se ao Tomé].

Em B12 e B13, Deise e Maria parecem validar a maneira de pensar de Ângela. Em B14, Deise pede novas explicações para Ângela, pois quer compreender. Ângela explica novamente seu pensamento, mas parece estar mudando sua escolha a partir do que Deise havia sugerido anteriormente (B15).

Quando o Professor formador A está com o grupo, após as professoras apresentarem suas resoluções para a tarefa, ele busca entender o raciocínio apresentado por Ângela e faz questionamentos.

> **B16 – Professor formador A**: *E a dela* [referindo-se à Ângela], *foi assim: um acertou 50% mais 1 e o outro 50% mais 1, está empatado. A questão é: 50% de quê?*
> **B17 – Maria**: *Das bolas.*
> **B18 – Ely**: *Dos lançamentos.*
> **B19 – Ângela**: *Das cestas.*
> **B20 – Professor formador A**: *Mas, se a gente pensar em porcentagem, o que significa essa porcentagem e essa...?*
> **B21 – Deise**: *Dá diferença.*
> **B22 – Maria**: *Dá diferença.*
> **B23 – Professor formador A**: *Mas é uma forma de se pensar, os alunos poderiam chegar nessa forma.*

Em B16, o professor formador A tenta levar as professoras a refletirem sobre a validade da resposta apresentada por Ângela. No entanto, analisamos que a abordagem do professor também não foi a mais apropriada, uma vez que o problema não está no 50% e, sim, no "mais 1", uma vez que esse 1 representa porcentagens diferentes em cada caso. Para o todo igual a 6, o 1 representa $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6} \cong 16,6\%$ e para o todo igual a 12, o 1 representa $\frac{1}{12} = 0,08\overline{3} \cong 8,3\%$. Mesmo assim, as professoras Deise e Maria reconhecem (B21 e B22) que a comparação feita por Ângela não é adequada.

Em B23, o professor formador A deixa claro que, apesar de não ser a forma adequada, a resposta dada por Ângela é importante para que haja discussões matemáticas que favoreçam a construção de conhecimentos.

Professor formador A e professoras continuam dialogando. O próximo diálogo mostra a professora Ângela sentindo-se à vontade e mostrando *confiança* para retomar sua forma de pensar. Mesmo após Deise dizer que Henrique foi melhor, Ângela reafirma que ainda considera que Henrique e Tomé estavam empatados nos arremessos.

> **B24 – Deise**: *É, eu queria achar um denominador comum. Então, eu achei. Agora, com a multiplicação, deu 8/12 para o Henrique e 7/12 para o Tomé. Então, o Henrique nessa comparação teve mais. Eu consigo mostrar para o meu aluno e ele consegue ver que o Henrique foi melhor.*
> **B25 – Ângela**: *Eu ainda acho que eles estão empatados*.
> **B26 – Professor formador A**: *Você acha que eles estão empatados por quê?*
> **B27 – Ângela**: *Pelo mesmo tanto...ele teve 6, e acertou 3 mais 1. Ele teve 12, 6 mais 1*.
> [...]
> **B28 – Ângela**: *Ele poderia ter errado se ele tivesse 12*. [referindo-se à possibilidade de Henrique ter arremessado 12 vezes ao invés de 6]
> **B29 – Professor formador A**: *Como que é? Ele poderia ter? Desculpa*.
> **B30 – Ângela**: *Não, daí vai ficar meio confuso. Se ele tivesse 12, seria a mesma quantidade, não seria?*
> **B31 – Professor formador A**: *Se esse cara aqui tivesse 12 oportunidades, se a gente considerar...*
> **B32 – Ângela**: *Não, ia ser 8*. [interrompendo o Professor formador 2].
> **B33 – Professor formador A**: *Ia ser 8?*
> **B34 – Ângela**: *Teria acertado mais.*
> **B35 – Professor formador A**: *Mais. Aham! Então, quer dizer, não estaria empatado?*
> **B36 – Ângela**: *Não, é o Henrique.*
> **B37 – Professor formador A**: *Se o Henrique tiver a mesma quantidade de arremessos que o Tomé teve....*
> **B38 – Ângela**: *Teria acertado 8*.

Em B25, Ângela reforça sua conclusão e o Professor formador A tenta entendê-la. Em B28, Ângela tenta explicar seu pensamento, mas não dá sequência. A professora parecia estar pensando em voz alta quando, em B30, coloca-se em dúvida. O professor formador A tenta colaborar, mas a própria Ângela parece chegar a uma conclusão (B32). Por mais que a professora tenha percebido sozinha (em B32) que, mantendo-se o aproveitamento, Henrique acertaria 8 de 12 arremessos, entendemos que foi o *diálogo* entre os envolvidos que proporcionou sua reflexão. Em B34 e B36, fica evidente que Ângela modificou sua conclusão a respeito da tomada de decisão: não houve empate!

O diálogo com o professor formador A contribuiu para essa nova forma de pensar. No entanto, o grupo ainda não tinha proporcionado à professora Ângela o motivo de “metade

Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, PR, Brasil,
v.11, n.24, p.332-355, jan.-abr. 2022.

mais 1" não ser adequado. Ao menos de forma explícita, isso ainda não estava dito. Somente na plenária é que a professora Tina tocou no ponto central.

> **B39 – Professor formador B**: *Alguém pensou nessa ideia de metade mais 1, como é que é isso?*
> **B40 – Deise**: *Aqui* [apontou para Ângela].
> **B41 – Carla**: *Porque aquele lá fez metade e jogou mais um e o outro também jogou metade mais 1.*
> **B42 – Tina**: *É metade mais 1, só que esse mais 1 não é igual para o Henrique e para o Tomé. Por isso que eu voltei atrás* [inicialmente, Tina estava pensando da mesma maneira que Ângela] *e eu acho que o Henrique é o que fez mais. Porque dois terços é um pouco maior do que meio, um pouco mais do que meio.*
> [...]
> **B43 – Professor formador A**: *Assim dava empate?* [o professor pergunta, pois estava registrando na lousa todas as resoluções e conclusões]
> **B44 – Todas as professoras**: *É, dava empate.* [colaborando com o professor formador A, para que ele escrevesse na lousa a conclusão daquela forma de pensar]
> **B45 – Tina**: *Só que eu acho que esse mais 1 não é igual*.

Nesse diálogo, a professora Ângela não se manifestou em relação ao questionamento, talvez porque outras professoras (Carla e Tina) tenham tomado a frente. A professora Tina externalizou, em B42 e B45, que o "mais 1" não é o mesmo para as duas situações. Em B42, ela esboçou a explicação: "porque dois terços é um pouco maior do que 1". Minutos depois, em outro momento da plenária, Tina deixou isso mais claro, afirmando que o $\frac{7}{12}$ também era maior do que a metade: "*eu não sei dizer o quanto mais, mas eu sei que é menos do que* $\frac{2}{3}$".

Não temos condições de analisar se Ângela compreendeu qual era o problema da resposta "metade mais 1". Nossos dados não nos permitem tirar essa conclusão, pois a professora não se manifestou mais a esse respeito. Sabemos, sim, que ela repensou sua tomada de decisão (B36), mas não sabemos se ela compreendeu o erro de se considerar a "metade mais 1" no caso da *Tarefa dos Arremessos de Basquete*. Apesar disso, entendemos que o ambiente com características colaborativas deu oportunidades para que Ângela pudesse ter essa compreensão, uma vez que a professora Tina, por duas vezes, comentou o motivo. Os professores formadores parecem não ter aproveitado a participação de Tina para explorar esse ponto com Ângela e as demais professoras. Esse episódio revela a imprevisibilidade, em que os professores formadores se depararam com um raciocínio que não esperavam, daí a importância de se antecipar possíveis formas de pensar.

Do ponto de vista do KoT, a professora manifestou um equívoco que, em nossa análise, está relacionado à ideia de proporção[11]. Ao considerar que um acerto de Henrique (que fez 6 lançamentos) é equivalente a um acerto de Tomé (que fez 12 lançamentos), de uma maneira implícita, é o mesmo que considerar equivalentes as frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{12}$. No entanto, consideramos que o trabalho em grupo ofereceu oportunidades para a professora rever e refinar seu KoT sobre frações, uma vez que, em B36, mudou sua conclusão e, em B42 e B45, teve a possibilidade de compreender o motivo do erro.

É interessante notar que o professor formador A parecia não estar preparado para o raciocínio manifestado por Ângela, uma vez que não ofereceu um caminho produtivo (B16 e B20) para que a professora se questionasse sobre a comparação “metade mais 1”. Esse fato pode ser evidenciado pela persistência de Ângela, em B25, em considerar o empate entre Henrique e Tomé, ou seja, ela não se convenceu de que havia algo errado em sua forma de pensar. Entretanto, o fato de Ângela estar em um grupo envolvendo pessoas com diferentes experiências e todas elas com abertura para o *diálogo* e *negociação*, permitiu que outra pessoa, diferente do professor formador A, tivesse oferecesse a oportunidade para ela compreender seu equívoco.

Considerações Finais

Neste artigo, tivemos o objetivo de analisar potencialidades de um trabalho com características colaborativas para o desenvolvimento/aprimoramento do conhecimento especializado do professor que ensina matemática, em particular, o KoT para ensinar frações.

As conclusões apontam que quando um grupo de professores desempenha um trabalho que manifesta aspectos da colaboração como a *confiança*, o *diálogo* e a *negociação,* seus integrantes podem expor suas formas de pensar sem medo de estarem errados ou não, possibilitando um repensar sobre seus conhecimentos matemáticos. Esse resultado corrobora e se junta às pesquisas que apontam o trabalho colaborativo (ou, em nosso caso, com características de colaboração) como uma forma de promover o desenvolvimento profissional docente (SARAIVA; PONTE, 2003; BRUM; SANTOS-WAGNER, 2020) ou, de maneira mais específica, o conhecimento matemático do professor (RANGEL; GIRALDO; MACULAN FILHO, 2015).

[11] Para a forma de pensar da professora Ângela estar correta, o enunciado da tarefa matemática deveria considerar que Henrique fez 6 lançamentos e acertou 4, enquanto Tomé fez 12 lançamentos e acertou 8. Nesse caso, a professora poderia afirmar que Henrique acertou a metade de seus lançamentos mais um e Tomé acertou a metade de seus lançamentos mais dois, mantendo a proporção entre $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{12}$.

Diversas pesquisas científicas apontam para o papel do erro na aprendizagem dos estudantes, mas pouco se fala do papel do erro na aprendizagem dos professores ou dos professores formadores. O que a presente pesquisa evidenciou – por meio da participação, principalmente, das professoras Deise, Ângela, Tina e do professor formador A – foi que quando há colaboração entre os envolvidos, manifestar uma ideia equivocada faz parte do processo e pode propiciar momentos ricos para o desenvolvimento/aprimorando do KoT (como foi o caso da participação do professor formador A no Episódio 1 - *As oportunidades de arremessos*). Quando esses momentos não são bem aproveitados por um determinado integrante (como foi o caso da participação do professor formador A no Episódio 2 - *O empate*), há a possibilidade de serem mais bem aproveitados por outro integrante (como foi o caso da participação da professora Tina no Episódio 2 - *O empate*).

Nenhum profissional sente-se confortável em ter seus conhecimentos contestados. Com professores e formadores de professores isso não é diferente e, talvez, justamente por esse desconforto é que predomina uma cultura de trabalho individualista do professor. No entanto, precisamos reconhecer que esses profissionais também podem manifestar compreensões equivocadas ou dificuldades sobre os temas matemáticos que ensinam e que, se houver espaço para que esses erros sejam externalizados, podem servir de apoio para o aprimoramento de conhecimentos matemáticos, favorecendo o desenvolvimento do KoT (e, de um modo mais geral, do MTSK). Nossa crença é a de que um professor só se sente à vontade para manifestar abertamente suas formas de pensar, sem medo de estar equivocado, se estiver em um ambiente de *confiança*, com *diálogo* aberto e que permita *negociação* de conceitos fundamentais sem medo de julgamentos.

Assim, para além de corroborar com outras pesquisas a respeito das potencialidades do trabalho colaborativo para o desenvolvimento profissional, consideramos que uma contribuição dos resultados apresentados neste artigo para a Educação Matemática encontra-se na discussão sobre o papel do erro na aprendizagem dos professores ou dos professores formadores e em como esse erro pode ser explorado quando o trabalho é feito em conjunto, com outros professores. Essa é uma agenda de pesquisa ainda pouco explorada e que precisa ser investigada.

Referências

ALMEIDA, A; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado Do Professor Que Ensina Matemática No Tópico Das Frações: Discutindo Quantidades Discretas. **Trilhas Pedagógicas**, v. 9, n. 11, p. 126-143, 2019. Disponível em:

https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/7370. Acessado em 5 jul. 2021.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BEZERRA, R. C. **Aprendizagens e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto da Lesson Study**. 2017. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, São Paulo.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (Org.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p. 43-55.

BRUM, J.; SANTOS-WAGNER, V. Experiências de aprendizagens e conhecimentos de professores que ensinam matemática em grupo de estudo. **Revista Paranaense De Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 32-59, 2020. Disponível em: http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/645. Acessado em 25 fev. 2022.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N; CONTRERAS, L. C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. In: UBUZ, B.; HASER, C. et al. (Ed.). **VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education** (CERME 8). 8. Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara, p. 2985-2994, 2013. Disponível em: http://cerme8.metu.edu/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf. Acessado em 5 jul. 2021.

COSTA, G.L.M; FIORENTINI, D. Mudança da cultura docente em um contexto de trabalho colaborativo de introdução das tecnologias de informação e comunicação na prática escolar. **Bolema**, Rio Claro, SP, v.20, n. 27, p. 1-19, 2007. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1245. Acessado em 5 jul. 2021.

DAY, C. **Desenvolvimento Profissional de Professores**: Os desafios da aprendizagem permanente. Lisboa: Porto Editora, 2001.

ELIAS, H. R.; TREVISAN, A. L. Desafios à constituição de grupos colaborativos com professoras de anos iniciais para a realização de estudos de aula. **VIDYA** (Santa Maria - online), v. 40, p. 183-202, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/3233. Acessado em 23 fev. 2022.

ELIAS, H. R; GONÇALVES, F. M.; RODRIGUES, S. R. Desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino favorecido pelo trabalho colaborativo. **ACERVO**: Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP, São Paulo, v. 3, p. 1-20, 2021. Disponível em: https://ojs.ghemat-brasil.com.br/index.php/ACERVO/article/view/30 . Acessado em 23 fev. 2022.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. Desenvolvimento profissional docente: um termo guarda-chuva ou um novo sentido à formação?. **Formação Docente – Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação de Professores**, v. 5, n. 8, p. 11-23, 30 jun. 2013. Disponível em: https://revformacaodocente.com.br/index.php/rbpfp/article/view/74. Acessado em 5 jul. 2021.

GONÇALVES, F. M. **Aspectos de colaboração entre professores que ensinam Matemática durante o planejamento de uma aula**. 2021. 158 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

MARCELO, C. Desenvolvimento profissional docente: passado e futuro. Sísifo: **Revista de Ciências da Educação**, Lisboa, n. 8, p. 7-22, jan./abr. 2009. Disponível em: http://sisifo.ie.ulisboa.pt/index.php/sisifo/article/view/130. Acessado em 5 jul. 2021.

MARTINS, P. B.; CURI, E. Grupos colaborativos: um olhar reflexivo para o desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Research, Society and Development**, v. 7, n. 1, p. 01-09, 2018. Disponível em: https://www.rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/166. Acessado em 5 jul. 2021.

MENEZES, L.; PONTE, J.P. Investigação colaborativa de professores e ensino da Matemática: caminhos para o desenvolvimento profissional. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 1-32, out. 2009/abr. 2010. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3966. Acessado em 5 jul. 2021.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

PEREIRA, E. M. A. Professor como pesquisador: o enfoque da pesquisa-ação na prática docente. In: Geraldi, C.; Fiorentini, D.; Pereira, E. M. A. (Orgs.). **Cartografias do trabalho docente**. Campinas: Mercado de Letras, p. 153-182, 1998.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional**. Conferência Plenária apresentada no Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat- 1998**, realizado em Guimarães. In Actas do ProfMat 98. Lisboa: APM. p. 27 -44, 1998.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. O Papel do Contexto nas tarefas matemáticas. **Interacções**. n. 22, 2012, pp. 196-216. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/1542. Acessado em 5 jul. 2021.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 868 - 891, dez. 2016. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/KDpjQXZsJz8DyHhd9CCLq9R/abstract/?lang=pt. Acessado em 5 jul. 2021.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. **Revista de Educação,** v.11, n.2, p.145-163, 2002. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3167. Acessado em 5 jul. 2021.

PONTE, J.P.; SERRAZINA, L. Professores e formadores investigam a sua própria prática: o papel da colaboração. **Zetetiké**, v. 11, n. 20, p. 51-84, 2003. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646956. Acessado em 5 jul. 2021.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento das Idéias Matemáticas e do Raciocínio de Estudantes. **Bolema**, Rio Claro, v. 17, n. 21, maio 2004. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10538. Acessado em 5 jul. 2021.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN FILHO, N. M. Conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v.8, n. 2, 2015. Disponível em: https://seer.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/283. Acessado em 26 fev. 2022.

ROJAS, N.; FLORES, P.; CARRILLO, J. Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 143-167, abr. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/4KFcfZbDTHFvcQNQTvfsk7d/abstract/?lang=es. Acessado em 5 jul. 2021.

SARAIVA, M. J.; PONTE, J. P. O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. **Quadrante**, v. 12, n. 2, 2003. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22767/16833. Acessado em 25 fev. 2022.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Harvard, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. **Mathematical Thinking and Learning**, v.10, n.4, p. 313-340, 2008.

Recebido em: 05 de julho de 2021
Aprovado em: 21 de fevereiro de 2022