revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM PARALELOGRAMOS E SUAS ÁREAS: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.796-820

Jailson Cavalcante de Araújo[1]
Anderson Douglas Pereira Rodrigues da Silva[2]
Paula Moreira Baltar Bellemain[3]

Resumo: Neste artigo analisa-se, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e seus colaboradores e do modelo de área como uma grandeza autônoma proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian, como licenciandos em matemática lidam com as situações que dão sentido à área de paralelogramos. Os procedimentos metodológicos consistiram na aplicação de um teste diagnóstico contendo questões de identificação de paralelogramos, comparação e medida de área e produção de superfícies bem como três questões didáticas sobre a atividade realizada. Os participantes da pesquisa foram estudantes do 4º período de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública federal. Como resultados, os licenciandos apresentaram um bom padrão de acertos em todas as questões, mas também alguns aspectos não plenamente dominados por eles. Na questão de identificação, observamos alguns equívocos como considerar que "todo losango também é quadrado". Verificamos a mobilização de teoremas em ação verdadeiros como a invariância da área por decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição. Nas questões complementares, apesar de não haver consenso entre os grupos em algumas respostas, notamos elementos importantes da formação docente, cuja identificação permite ao professor intervir de maneira a contribuir para a superação de concepções errôneas. Podemos concluir que a realização de pesquisas com licenciandos contribui para a identificação de pontos a serem melhorados tanto no ensino quanto na escolha dos conteúdos a serem vivenciados, contribuindo para o aprofundamento das discussões em educação matemática e para uma melhor formação dos participantes.
Palavras-chave: Identificação. Área. Paralelogramos. Licenciandos.

SITUATIONS INVOLVING PARALLELOGRAMS AND THEIR AREAS: A STUDY WITH UNDERGRADUATES IN MATHEMATICS

Abstract: This article analyses the perspective from The Theory of Conceptual Fields by Gérard Vergnaud and his collaborators of the area model, as an autonomous magnitude proposed by Régine Douady and Marie-Jeanne Perrin-Glorian. Besides that, how mathematics' graduates deal with situations that give meaning to the area of parallelograms. The methodological procedures consisted of applying a diagnostic test which containing identification questions of parallelograms, comparison and measurement of area and production of surfaces, and three learning questions about the activity performed. The research participants were students from the 4th period of a Mathematics Degree course at a federal public university. As a result, the graduates presented an excellent standard of correctness in all questions, and some aspects were not thoroughly dominated by them. In terms of identification, we observed some mistakes, such as considering that "every diamond is also square." We verified the theorems' mobilization in action, such as the invariance of the area by decomposition and recomposition without loss or overlap. In the complementary questions, although there is no consensus between the groups in some answers, we note essential elements of teacher training, whose identification allows the teacher to intervene to contribute to overcoming erroneous conceptions. We can conclude that researching with undergraduate students provides to identifying points to be

[1]Doutorando em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC/UFPE. E-mail: jailsoncavalcante1@hotmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5936-7072
[2]Professor doutor da Faculdade de Ciências e Tecnologia Professor Dirson Maciel de Barros-FADIMAB. E-mail: anderdouglasprs@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9382-3852
[3]Professora doutora do Centro de Educação da UFPE – PPG em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC/UFPE. E-mail: paula.bellemain@ufpe.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2864-8883

improved both in teaching and in the choice of content to be experienced, contributing to the deepening of discussions in mathematics education and better training of participants.
Keywords: Identification. Area. Parallelograms. Graduates.

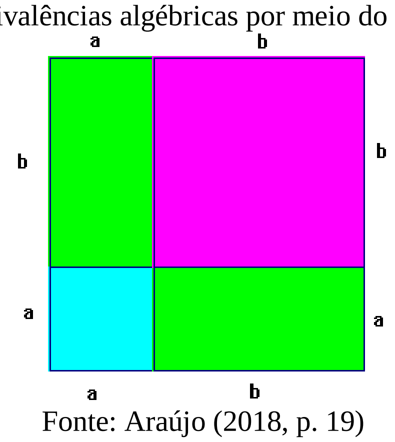
Introdução

Esse estudo, realizado com uma turma de licenciandos em matemática, trata de uma atividade sobre paralelogramos e suas áreas, situada na interface entre os campos conceituais da geometria e das grandezas e medidas.

No campo das grandezas e medidas encontram-se as grandezas geométricas: comprimento, área, volume e abertura de ângulo. É proposto nos Parâmetros na sala de aula (PERNAMBUCO, 2013) que “o trabalho com grandezas geométricas deve ser fortemente articulado com a geometria” (p. 151).

Entre tais grandezas, decidimos trabalhar com o conceito de área que é muito rico do ponto de vista da matemática escolar por algumas razões. É um conteúdo que tem relação com outras disciplinas, como em Geografia, no estudo de escalas e cartografia ou na Física, no estudo do conceito de pressão. O estudo da área permeia boa parte da educação básica e se insere no ensino superior, por exemplo, no estudo do conteúdo de Integral. Além disso, possui ligação e permite articulação com outros conceitos matemáticos como frações e ajuda na compreensão de assuntos como os produtos notáveis, como mostramos a seguir.

Figura 1: Equivalências algébricas por meio do cálculo de áreas



Fonte: Araújo (2018, p. 19)

Como podemos observar, por meio do cálculo das áreas das figuras coloridas pode-se visualizar a equivalência de expressões algébricas do tipo $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Observando o quadrado maior, sua área é dada por $(a + b)^2$ e ao focar nos quadrados e retângulos menores temos que a área do quadrado azul é a^2, a área de cada retângulo verde pode se expressar por ab e a área do quadrado rosa é dada por b^2.

A área e o reconhecimento de figuras planas são temas vivenciados desde a primeira etapa do Ensino Fundamental, conforme os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). Apesar de iniciados relativamente cedo na vida escolar dos estudantes, são temas que carregam dificuldades persistentes ao longo dos anos, manifestadas por estudantes do Ensino Fundamental, Ensino Médio e, até mesmo, professores. Pesquisas como as de Passos (2000), Diniz (2013), Costa (2016) apresentam resultados voltados para dificuldades na identificação de quadriláteros, pincipalmente quando se tratam de paralelogramos. Os trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Santos (2005), Souza (2013) e Araújo (2018) apontam dificuldades dos estudantes em situações envolvendo a área de paralelogramos, como realizar confusões entre as variações da área e do perímetro por considerarem que os paralelogramos são retângulos deformados, não reconhecer paralelogramos em posições menos usuais e empregar fórmulas erradas.

Adotamos a abordagem de área como uma grandeza autônoma, conforme o modelo proposto pelas pesquisadoras francesas Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), segundo o qual é preciso distinguir e articular três quadros: geométrico, numérico e o das grandezas. Ou seja, a área se dissocia da superfície, pois superfícies distintas podem ter áreas iguais; e também do número, que é a medida da área em determinada unidade, pois a área de uma superfície pode ter medidas diferentes se utilizarmos diferentes unidades de área. De acordo com essa abordagem, a área é uma grandeza e pode ser representada por um par (número, unidade de área) como indicam os exemplos $\sqrt{3}$ cm², 1,5 ha ou 26 km².

As situações que dão sentido ao conceito de área propostas por Baltar (1996), comparação de áreas, medida de áreas e produção de superfícies, também são utilizadas neste estudo. As situações de comparação, segundo Bellemain (2000, p. 7), estão situadas em torno do quadro das grandezas, pois “quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência”. Nas situações de medida, Bellemain e Lima (2002) afirmam que se destacam o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. As atividades de produção diferenciam-se das anteriores por geralmente haver várias respostas corretas para uma mesma situação. Além disso, mesmo se a resposta esperada para este tipo de atividade é uma figura (objeto geométrico), a presença dos demais quadros também tem grande importância.

Enfatizamos ainda um outro tipo de situação, a de identificação de paralelogramos, que se situa no quadro geométrico e consiste em identificar em meio a várias figuras, quais são paralelogramos e dizer, entre os paralelogramos identificados, quais são quadrados, retângulos e losangos.

Como estamos tratando de situações e da ação de indivíduos ao lidar com tais situações, achamos conveniente a escolha da Teoria dos Campos Conceituais, porque acreditamos que para o estudante atribuir sentido ao conceito de área de paralelogramos ele deve vivenciar diversas situações. A sua ação perante as tarefas fornece elementos importantes dos esquemas utilizados e possibilita a identificação de regras de ação e invariantes mobilizados.

Esse estudo foi realizado com estudantes da Licenciatura em Matemática, por considerarmos que é preciso que tenham um conhecimento robusto tanto conceitual como didático para que possam atuar adequadamente no sentido de propiciar a superação das dificuldades dos estudantes da educação básica sobre a área de paralelogramos. Diante disso, temos por objetivo analisar como licenciandos em matemática lidam com situações sobre os paralelogramos e suas áreas.

Breve estudo sobre os paralelogramos

O campo conceitual das grandezas e medidas, mais especificamente, o das grandezas geométricas, possui fortes vínculos com o campo da geometria. De acordo com Lima e Carvalho (2010, p. 137), "é consenso que o estudo das grandezas geométricas é uma maneira privilegiada de se promover a ligação entre esses dois importantes campos da matemática escolar".

Antes de irmos diretamente para os paralelogramos, precisamos definir quadrilátero e quadrilátero notável. Segundo Lima e Carvalho (2010, p. 154),

> Consideremos quatro pontos arbitrários em um plano, por exemplo, A, B, C, D, com a condição de que três quaisquer deles não estão em uma mesma reta. Chamamos quadrilátero ABCD ao conjunto de pontos que estão nos segmentos de reta AB, BC, CD e DA. [...] podemos também designar este quadrilátero por outras sequências apropriadas dos símbolos A, B, C e D.

Em relação aos quadriláteros notáveis, Costa (2016) aponta que

> No campo da Geometria, podemos encontrar duas famílias de quadriláteros, a dos quadriláteros notáveis e a dos quadriláteros não notáveis. Os notáveis são formados pelos paralelogramos e pelos trapézios, enquanto que os não notáveis, são constituídos pelos quadriláteros que não pertencem às famílias dos paralelogramos e dos trapézios. Nesse sentido, fazem parte do grupo dos quadriláteros não notáveis, os quadriláteros não convexos (COSTA, 2016, p. 53).

No livro Geometria Euclidiana Plana[4], Barbosa (2006) define paralelogramo como "um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos" (p. 91). Seguem-se algumas proposições, com suas respectivas provas[5]:

P1: "em um paralelogramo lados e ângulos opostos são congruentes" (p. 91);

P2: "se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é paralelogramo" (p. 91);

Em relação ao retângulo, esse autor afirma que é um quadrilátero que tem todos os ângulos retos; o losango, também chamado de rombo, é um paralelogramo que tem todos os seus lados congruentes; e o quadrado é um retângulo que também é um losango. Acrescenta que "se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e se cortam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um retângulo. Se, além disso, as diagonais são perpendiculares uma a outra, então o quadrilátero é um quadrado" (BARBOSA, 2006, p. 98).

Consideramos, como Machado (2012), que o trapézio possui apenas um par de lados opostos paralelos e, portanto, o paralelogramo não é um trapézio. A priori, seria possível definir os quadriláteros notáveis de outras maneiras, mantendo a coerência interna, levando a relações distintas entre paralelogramos, retângulos, quadrados, losangos e trapézios. Por exemplo, se definíssemos os trapézios como quadriláteros que tem um par de lados paralelos, todo paralelogramo seria um trapézio. Se considerássemos que um retângulo é um quadrilátero que possui os quatro ângulos congruentes e seus lados adjacentes têm comprimentos diferentes, um quadrado não seria retângulo (por possuir lados congruentes). Ao longo da história da matemática diferentes classificações foram tomadas e consideramos que isso também pode ocorrer em diferentes momentos da escolaridade, desde que a coerência interna seja respeitada e haja clareza de propósito em relação às escolhas conceituais e didáticas feitas.

No caso do estudo em foco nesse texto, adotamos a classificação predominante tanto na matemática acadêmica atual como nas pesquisas em educação matemática, segundo a qual o quadrado, o retângulo e o losango pertencem à família dos paralelogramos e as classes dos trapézios e dos paralelogramos são disjuntas. Além disso, no que diz respeito às relações entre o quadrado, o retângulo e o losango, Costa (2016) destaca que "quadrado é todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo" (p. 58).

---

[4] Esse livro, cuja primeira edição data de 1985 e a mais recente é de 2012, é parte da Coleção do Professor de Matemática, da Sociedade Brasileira de Matemática. Há mais de 30 anos tem sido utilizada nos cursos de licenciatura em matemática brasileiros e, portanto, fornece indícios do modo como esse conteúdo é abordado na formação inicial dos professores de matemática.

[5] As respectivas provas podem ser encontradas na obra do autor nas páginas indicadas neste texto.

Área como grandeza

Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) relatam que ora os estudantes consideram a área como sendo a superfície (concepção forma ou geométrica), ora consideram-na como sendo o número (concepção número ou numérica). Ou que eles poderiam também desenvolver ambas as concepções, mas de forma independente, o que provocaria certos problemas no tratamento de situações envolvendo esse conceito.

Ao mobilizar uma concepção geométrica, o estudante entende que se mudar a forma de uma figura, sua área também se altera. Como consequência, em uma determinada tarefa, ao decompor uma figura e recompor em outra diferente, sem perda nem sobreposição, ele compreende que essa nova figura possui área diferente da anterior.

Nas situações em que se constatam as concepções numéricas, os estudantes consideram apenas os aspectos pertinentes para o cálculo, levando-os a fazer extensões incorretas de fórmulas, omissão e/ou utilização inadequada das unidades de medida.

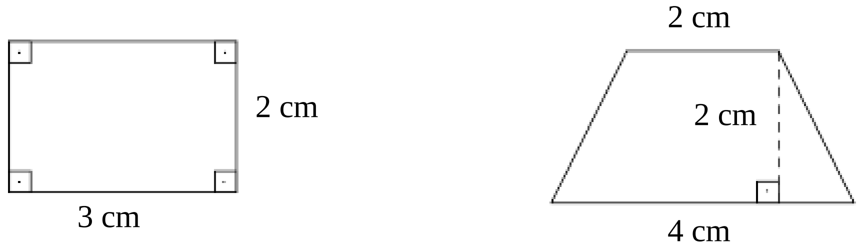
Diante de tais problemas, Douady e Perrin-Glorian (1989) propuseram uma abordagem que traz como exigência a diferenciação nítida dos conceitos de área e superfície, da mesma maneira que entre área e número, o que corresponde a distinguir e articular três quadros[6]: o quadro geométrico, o quadro numérico e o das grandezas. Mais especificamente, temos:

> - Quadro Geométrico: constituído por superfícies planas. Exemplos: as figuras planas, triângulos, quadriláteros, dentre outros.
> - Quadro Numérico: consistindo nas medidas da área das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos. Exemplos: 2; 4; 7,5; dentre outros.
> - Quadro das grandezas: contexto próprio da noção de área, que integra os dois primeiros e é caracterizado formalmente como classes de equivalência de superfícies de mesma área. Exemplos: expressões compostas de um número e de uma unidade de medida como $2m^2$, dentre outros (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 28 e 29).

Baseando-nos na citação anterior, observamos no exemplo a seguir, duas figuras geométricas, um retângulo e um trapézio, que têm a mesma área.

[6] Para Douady e Perrin-Glorian (1989) um quadro é constituído por objetos de um ramo da matemática, de suas formulações eventualmente diversas, das relações entre esses objetos, e das imagens mentais que o sujeito associa em um dado momento aos objetos e suas relações.

Figura 2: Exemplo de superfícies diferentes com áreas iguais



Fonte: elaborada pelos autores

É possível observar que as figuras são diferentes e as áreas são ambas iguais a 6 cm^2. A medida de área, isto é, o número (6) mudaria se quiséssemos expressar a área em metros quadrados – 0,0006 m^2 – ou qualquer outra unidade de área, mas a área das figuras permaneceria invariante. Ou seja, poderíamos ter diferentes pares (nº, unidade de medida), porém equivalentes, que designariam a mesma área. De acordo com Araújo (2018, p. 30), "[...] no modelo de Douady e Perrin-Glorian a medida é o número, mas alguns utilizam medida designando o par número e unidade".

Diante dessas ideias, podemos considerar a área como sendo um atributo da figura, que se distingue dela pelo fato de que figuras diferentes podem ter mesma área e se diferencia do número associado a ela porque podemos ter diferentes números de acordo com a unidade escolhida, mas que a mudança de unidade não provoca alterações na área.

Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais construída por Gérard Vergnaud (1986, 1990) e seus colaboradores tem por objetivo discutir o comportamento cognitivo do sujeito diante de situações de aprendizagem, pois são elas que dão sentido aos conceitos.

Na Teoria dos Campos Conceituais, o conceito *(C)* não se resume a definições. Vergnaud (1990) considera-o como um tripé indissociável: $C = (S, IO, R)$, no qual *(S)* é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito; (*IO)* o conjunto dos Invariantes Operatórios, teoremas em ação (verdadeiros ou falsos) e conceitos em ação (pertinentes ou não); e *(R)* o conjunto das representações simbólicas do conceito, das propriedades, das situações.

Em relação à área do paralelogramo, não basta apenas defini-la, mas considerar um conjunto de situações por meio das quais os sujeitos atribuem sentido a esse conceito (identificação, comparação, medida e produção), de invariantes operatórios, que são os teoremas em ação e conceitos em ação mobilizados no enfrentamento das tarefas sobre área e um conjunto de representações simbólicas utilizadas no tratamento das situações que envolvem esse conceito.

De acordo com Vergnaud (1986, p. 81) “[...] um invariante é uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre um certo conjunto de transformações”. Entre os invariantes operatórios, destacamos os teoremas em ação e os conceitos em ação. O primeiro tipo pode ser entendido como proposições que são consideradas como verdadeiras pelo sujeito, mas que podem ser falsas para o domínio da matemática. Já os conceitos em ação ou função proposicional, não são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, podem ser apenas pertinentes ou não ao lidar com uma determinada situação.

Por exemplo, quando o estudante considera que superfícies diferentes devem necessariamente ter áreas diferentes, ele está usando um teorema em ação falso para justificar determinada operação, nos quais estão presentes os conceitos de superfície e área. Embora uma parte dos invariantes operatórios permaneça implícita no tratamento das situações, a identificação dos teoremas em ação falsos mobilizados pelos estudantes ajuda a compreender os erros cometidos por eles. É nesse cenário que o docente entra como mediador, na tentativa de trazer à tona os teoremas em ação falsos para poder invalidá-los, e trazer para o nível consciente os teoremas em ação verdadeiros a fim de transformá-los em verdadeiros teoremas e conceitos científicos, passíveis de serem mobilizados voluntariamente nas mais diversas situações. Para tanto, é imprescindível que o professor proponha tarefas que façam com que os estudantes percebam o domínio da validade de seus invariantes. Nessa perspectiva, consideramos que a formação inicial de professores deve levar os licenciandos a revisitarem os conteúdos que serão trabalhados na educação básica, com um olhar crítico, incorporando articuladamente os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos desses conteúdos.

Percurso metodológico

O universo da pesquisa foi uma universidade pública federal situada na cidade do Recife/PE e os participantes foram os estudantes do quarto período do curso de Licenciatura em Matemática dessa instituição. A escolha por esse público se deve ao fato de que as questões sobre o ensino e a aprendizagem dos campos da geometria e das grandezas e medidas são estudadas nessa etapa do curso.

Aplicamos um teste com seis grupos de estudantes, sendo quatro grupos de três, um com cinco e um estudante realizou a atividade individualmente, totalizando 18 participantes. Eles dispuseram de quatro aulas para realizar a atividade proposta. Distribuímos primeiramente as questões matemáticas para que resolvessem e depois as didáticas para discutirmos coletivamente na aula da semana seguinte. Não fornecemos nenhum material, além dos tipos de papel que acompanham a atividade, deixando-os à vontade para utilizar os que achassem necessários e dispusessem no momento. A maioria deles recorreu à régua.

Buscando preservar a identidade de cada sujeito pesquisado, os grupos de estudantes serão representados por uma letra e um número, isto é, G1 a G5 para os estudantes que realizaram em grupos e I para o estudante que fez a atividade individualmente.

O teste é composto de questões de dois tipos. O primeiro são tarefas extraídas da dissertação de Araújo (2018), que correspondem a quatro tipos de situação sobre os quais se apoia a conceituação da área do paralelogramo: a identificação de paralelogramos, a comparação de áreas, a medida de áreas e a produção de superfícies. O segundo tipo, que chamamos de questões complementares, situa os participantes na posição de futuros professores, ao colocar em foco a discussão sobre a aprendizagem e o ensino da área de paralelogramos:

1) A alunos de que nível (ano, ensino fundamental, médio...) vocês aplicariam essa atividade?

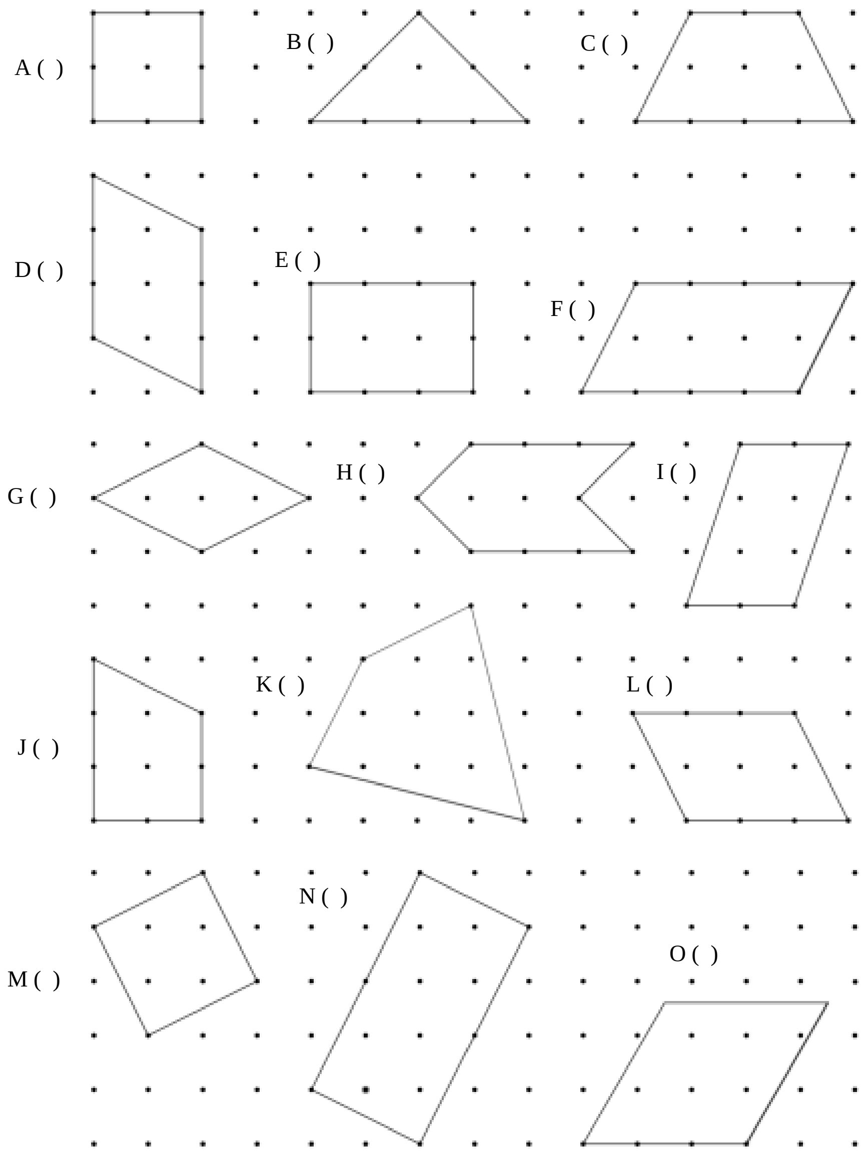
2) Quais dificuldades esses alunos encontrariam ao resolver cada questão?

3) Qual questão seria considerada mais difícil por esses alunos e por quê?

A seguir apresentamos as questões sobre o paralelogramo e sua área que compuseram o teste, e suas respectivas análises a priori. Ressaltamos que nas questões aplicadas aos estudantes, todas as figuras estavam em verdadeira grandeza (isto é, em tamanho real), embora para exposição nesse artigo tenhamos realizado uma redução das mesmas.

Figura 3: Questão sobre identificação de paralelogramos

<u>Questão 1</u>: Entre as figuras abaixo, assinale o(s) paralelogramo(s).



Qual(is) das figuras acima é(são) quadrado(s)? ____________________________________

Qual(is) das figuras acima é(são) retângulo(s)? ____________________________________

Qual(is) das figuras acima é(são) losango(s)? ____________________________________

Fonte: Araújo (2018, p. 69)

Acreditamos que a utilização de questões que envolvam a identificação traz implicações sobre o cálculo da área, o uso da fórmula e a maneira como os estudantes lidam com os paralelogramos em suas diferentes representações. O tipo de papel presente na questão é o pontilhado, que pode contribuir para a sua identificação, uma vez que ficam mais evidentes aspectos característicos de cada figura.

Em relação ao tipo de figura, quanto à quantidade de lados, duas das 15 figuras não são quadriláteros (B e H), sendo que (B) trata-se de um triângulo isósceles e (H) é a única figura não convexa, possuindo os lados dois a dois paralelos. Dos 13 quadriláteros, há um não notável, o trapezoide (K) e dois trapézios (C e J).

Temos 10 paralelogramos: (A e M) são quadrados, (E e N) são retângulos não quadrados e (G e O) são losangos não quadrados, no qual o primeiro está em posição prototípica[7]. Temos quatro paralelogramos que não são nem retângulos nem losangos (D, F, I e L) – nesse caso (F) é o mais encaixado no modelo prototípico.

Como resposta correta, esperamos que eles identifiquem as figuras (A, D, E, F, G, I, L, M, N e O) como sendo paralelogramos. Porém, algumas respostas poderão conduzir ao acerto parcial, tais como assinalar só os paralelogramos não retângulos e não losangos (D, F, I e L); ou apenas o paralelogramo em posição prototípica (F). A influência da posição das figuras pode conduzir os estudantes a descartarem as que não estão em posição habitual, como observado nos estudos de Passos (2000) e Diniz (2013). Outra possibilidade seria marcar as figuras que possuem lados dois a dois paralelos (A, D, E, F, G, H, I, L, M, N e O) - nesse caso, a figura (H) também seria marcada, mesmo não sendo paralelogramo – ou as figuras que têm pelo menos um par de lados paralelos (A, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N e O) – o que incluiria os trapézios (C e J) e o hexágono (H), que não são paralelogramos.

Como possibilidade de erro, poderiam assinalar apenas os trapézios (C e J), ou seja, aquela em que confundem paralelogramos e trapézios, conforme observado por Costa (2016).

Em relação à identificação de quadrados, temos duas possibilidades: a correta que seria classificar todos os quadrados, ou seja, as figuras (A e M). A outra seria considerar apenas o quadrado prototípico da figura (A), que conduziria a um acerto parcial.

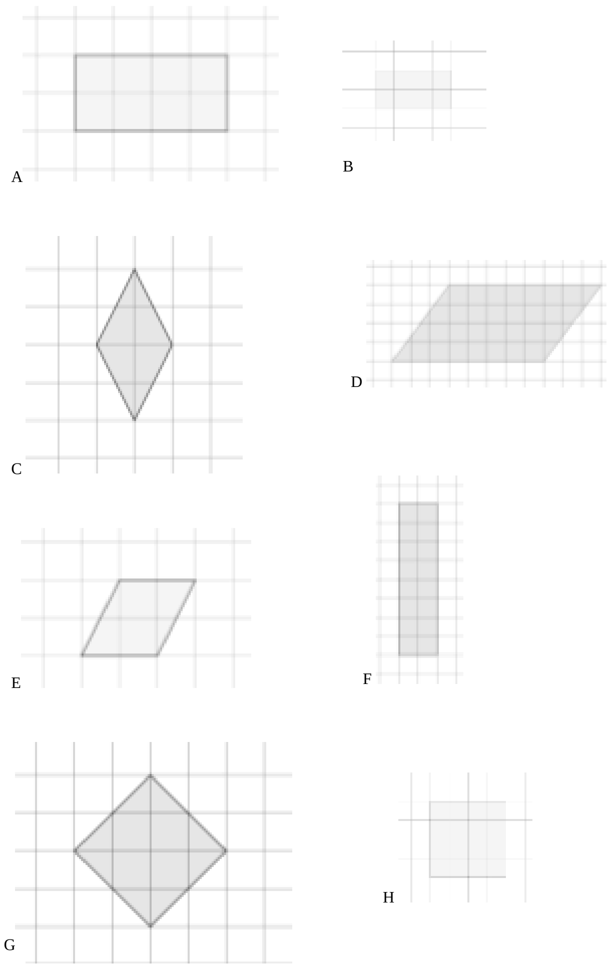
As possíveis respostas relacionadas à classificação de retângulos, podem incluir: todos os retângulos (A, E, M e N), que conduz à resposta correta esperada; apenas os retângulos não quadrados (E e N); só os retângulos prototípicos (A e E); apenas os retângulos não quadrados em posição prototípica, conforme a figura (E) acima.

Para o losango temos: todos os losangos (A, G, M e O), resposta correta; só os losangos não quadrados (G e O); apenas os losangos em posição prototípica (A e G); só os losangos não quadrados em posição prototípica (G).

[7] Consideramos como figuras prototípicas aquelas que correspondem a configurações e posições usuais, geralmente mais frequentes nos livros didáticos e/ou mais utilizadas pelo professor. Por exemplo, o quadrado com lados paralelos às bordas do papel, o paralelogramo não retângulo e não losango com o lado de maior comprimento na horizontal.

Figura 4: Questão sobre comparação de áreas

<u>Questão 2</u>: Observe as figuras abaixo:



Assinale (V) para verdadeiro e (F) para falso nas seguintes afirmações. Explique como você pensou.

( ) As figuras A e B possuem mesma área

Explicação________________________________

( ) As figuras A e G possuem mesma área

Explicação________________________________

( ) As figuras A e C possuem mesma área

Explicação________________________________

( ) As figuras E e F possuem mesma área

Explicação________________________________

( ) As figuras F e H possuem mesma área

Explicação________________________________

( ) As figuras A e D possuem mesma área

Explicação________________________________

Fonte: Araújo (2018, p. 77-78)

Esta é uma situação de comparação de áreas em que os dados numéricos não são fornecidos, cuja ênfase está na relação de equivalência (ter mesma área). Optamos pela utilização de figuras em malhas diferentes (com comprimentos dos lados do quadrado elementar de um centímetro e meio centímetro, respectivamente) para propiciar a exploração da distinção entre a grandeza e o número, levando em conta o aspecto numérico e o geométrico.

As figuras que estão na malha quadriculada de 1 cm por 1 cm possuem as seguintes características: as figuras (A e G) têm áreas de 8 cm^2 cada, sendo a primeira um retângulo prototípico e a segunda um quadrado em posição não prototípica; as figuras (C e E) ambas possuem áreas de 4 cm^2, sendo a (C) um losango não prototípico e a outra um paralelogramo não retângulo e não losango com inclinação para a direita.

Em relação às figuras que estão na malha quadriculada de 0,5 cm por 0,5 cm, temos: a figura (B) é um retângulo semelhante ao da figura (A), que possui área de 2 cm^2; a (D) trata-se de um paralelogramo não retângulo e não losango prototípico e tem uma área de 8 cm^2; as figuras (F e H) possuem áreas iguais a 4 cm^2 cada, em que a primeira é um retângulo não prototípico e a segunda um quadrado prototípico.

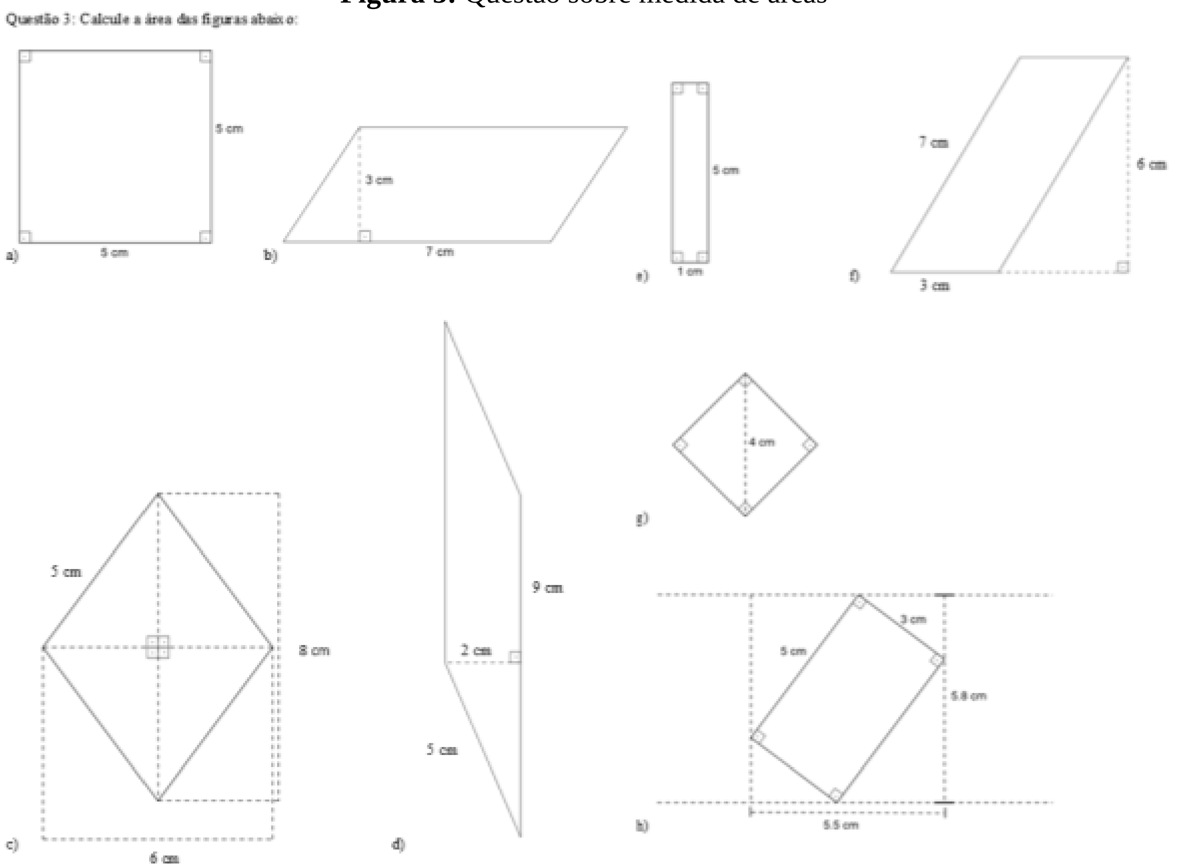
As respostas corretas esperadas seriam aquelas em que o estudante assinala (V) verdadeiro nas afirmações que apontam as figuras (A e G), (E e F), (F e H), e (A e D) como tendo mesma área. Nas demais afirmações deve assinalar (F) falso, ou seja, as figuras (A e B) e (A e C) não possuem mesma área. Muitas das possibilidades elencadas a seguir são observadas entre os estudantes da educação básica, mas tem baixíssima chance de emergir entre os licenciandos. Entretanto, discutimos essas resoluções para refletir se os estudantes da licenciatura, participantes da pesquisa, consideram esses erros nas questões sobre o ensino e a aprendizagem da área do paralelogramo.

De modo geral, a mobilização de uma concepção geométrica pode levar a considerar que não há figuras com áreas iguais, o que interpretamos como manifestação do teorema em ação falso segundo o qual superfícies diferentes devem necessariamente ter áreas diferentes. Já a mobilização de concepções numéricas pode levar à extensão indevida ou uso incorreto de fórmulas de área ou à comparação dos valores numéricos, desconsiderando as unidades de área induzidas pelas malhas. Vejamos algumas comparações:

Ao comparar as figuras (A e B), se o estudante leva em consideração exclusivamente o aspecto numérico irá dizer que elas possuem mesma área, pois ambas têm oito quadradinhos elementares das respectivas malhas em seu interior. Por serem retângulos semelhantes, a mobilização de uma concepção geométrica pode também conduzir ao erro de considerar que as figuras têm mesma área por terem mesma forma. A consideração simultânea e articulada dos aspectos geométricos e numéricos (correspondente à consideração da área como uma grandeza), seja imaginando a sobreposição das figuras ou considerando os comprimentos de seus lados, leva a concluir que os retângulos A e B possuem áreas diferentes.

Em relação às figuras (E e F), trata-se de figuras com formas distintas e considerando que as unidades de medida induzidas pelas malhas são diferentes, os valores numéricos das áreas são diferentes (a área de E é de quatro quadrados da malha de 1 cm por 1 cm, enquanto que F possui 16 quadrados da malha de 0,5 cm por 0,5 cm em seu interior). A mobilização de uma concepção numérica ou de uma concepção geométrica levaria, portanto, a concluir erradamente que as figuras E e F possuem áreas diferentes, embora essas áreas sejam iguais.

Figura 5: Questão sobre medida de áreas



Fonte: Araújo (2018, p. 84-85)

Nesta questão temos uma situação de medida de área, em que entram em jogo o quadro algébrico funcional, a área como uma grandeza bidimensional em relação ao comprimento e o uso das fórmulas de área para cada figura.

Na figura (a) tem-se um quadrado prototípico com lados medindo 5 cm e área 25 cm^2; (b) é um paralelogramo não retângulo e não losango, com altura interna e inclinação para a direita, cujo lado tomado como base mede 7 cm e a altura relativa a ele tem 3 cm, correspondendo a uma área de 21 cm^2. No item (c) tem-se um losango que parece "um balão" como o habitual, contendo dados extras para o cálculo da área, com diagonais medindo 6 cm e

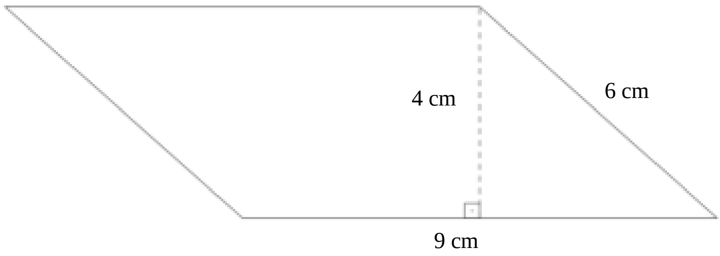
8 cm, com uma área de 24 cm^2; no (d) temos um paralelogramo não retângulo e não losango, com inclinação para a esquerda e com dados extras para o cálculo, de base de 9 cm e altura relativa a ela de 2 cm, dando área igual a 18 cm^2; o item (e) contém um retângulo com o lado de maior comprimento na vertical medindo 5 cm, a outra dimensão é 1 cm e a área é 5 cm^2; a figura do item (f) é um paralelogramo não retângulo e não losango em posição não prototípica, com dados extras e altura externa medindo 6 cm e base de 3 cm, de área 18 cm^2; na figura do item (g) temos um quadrado não prototípico contendo apenas a medida da diagonal de 4 cm e sua área é de 8 cm^2; o item (h) traz um retângulo não prototípico, com dados extras para o cálculo da área, no qual devem ser considerados os comprimentos 5 cm e 3 cm para se obter uma área de 15 cm^2.

As respostas corretas esperadas são 25 cm^2 para o item (a), 21 cm^2 para o (b), 24 cm^2 para o (c), 18 cm^2 para o item (d), 5 cm^2 para o (e), 18 cm^2 para o item (f), 8 cm^2 para o (g) e, finalmente, 15 cm^2 para o item (h).

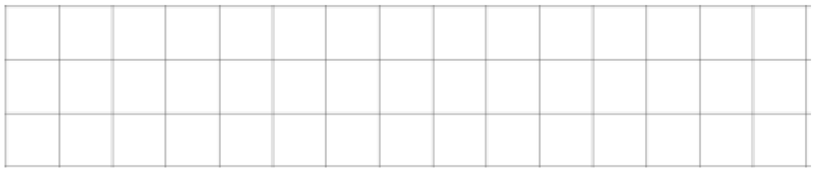
Acreditamos que os itens (c), (d), (f), (g) e (h) são os que concentram maiores dificuldades. No caso do item (c), a dificuldade consiste em decidir a escolha dos dados para o cálculo da área. Nos itens (d) e (f), o lado de maior comprimento não se encontra na posição horizontal. Outro fator é a escolha da altura em relação ao lado tomado como base. De acordo com Baltar (1996), poderão considerar a área do paralelogramo como o produto dos comprimentos de seus lados. Podem fazer confusão entre área e perímetro, como observado por Santos (2005). No item (g), é dada apenas a medida da diagonal do quadrado. Uma possibilidade de procedimento para resolução dessa tarefa seria o estudante considerar que todo quadrado é losango e aplicar a fórmula para o cálculo da área do losango. A dificuldade do item (h) consiste na identificação dos dados necessários e suficientes para o cálculo da área, considerando que possui dados extras. Se o estudante relaciona a base com a ideia de “chão”, pode considerar erroneamente 5,5 cm como sendo a base da figura e calcular a área.

Figura 6: Questão sobre produção de superfícies

<u>Questão 4</u>: Observe a figura a seguir e faça o que se pede:



a) Desenhe um retângulo R com área igual à da figura acima.
b) Desenhe um losango L com área igual à da figura acima.
c) Desenhe um quadrado Q com área igual à da figura acima.



Fonte: Araújo (2018, p. 92)

Temos nesta questão[8] uma situação de produção de figuras com área igual à de uma figura dada. Como vimos na parte introdutória deste estudo, esse tipo de situação se diferencia das anteriores por admitir uma grande variedade de respostas corretas para uma mesma tarefa. Como a área do paralelogramo dado é de 36 cm^2, algumas possibilidades de respostas corretas seriam o estudante desenhar:

Item (a) – retângulos de dimensões: 2 cm x 18 cm; 3 cm x 12 cm; 4 cm x 9 cm; 1 cm x 36 cm (esta última não pode estar em verdadeira grandeza devido à limitação da folha fornecida). Se o estudante considerar que todo quadrado é retângulo, poderá desenhar um quadrado com área igual à do paralelogramo dado.

Item (b) – losangos de diagonais medindo: 3 cm x 24 cm; 4 cm x 18 cm; 6 cm x 12 cm; 8 cm x 9 cm; 2 cm x 36 cm; 1 cm x 72 cm (estas duas últimas não estarão em verdadeira grandeza pelo mesmo motivo anterior). Assim como para o retângulo, o estudante poderá também fazer um quadrado nesse item, considerando que todo quadrado é losango.

Item (c) – Quadrado de lado medindo 6 cm. Como já mencionado, essa mesma produção poderia ser feita unicamente e responderia aos três itens da questão, desde que sinalizado adequadamente.

Algumas dificuldades podem estar relacionadas: à identificação dos dados necessários e suficientes; à classificação inadequada das figuras, levando a confundi-las ou não as

[8] O teste continha, além dessa malha quadriculada apresentada acima, uma folha completa desse tipo de papel disponível. Embora tenhamos fornecido esse tipo de malha, o estudante poderia produzir as figuras solicitadas em outro papel, como o branco ou pontilhado.

desenhar. Outra possibilidade de dificuldade seria relacionar as medidas de comprimento dos lados da figura e sua área, como apresentado na pesquisa de Bernardes, Souza e Zandonade (2014).

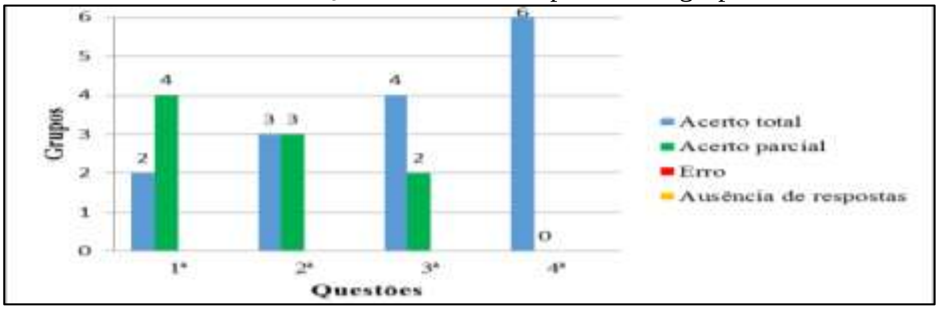
Em relação à inclusão de classes, quando apontamos como possibilidade de resposta fazer quadrados ao ser solicitado a produzir retângulos e/ou losangos, apoiamo-nos no fato de que a questão pede apenas retângulo e losango, e não especifica que eles devem ser retângulos não quadrados e losangos não quadrados.

Análise e discussão dos resultados

Iniciaremos essa parte pelo quantitativo de acertos totais, parciais, erros, seguidos de protocolos para exemplificação das respostas. Vale ressaltar que consideramos como acerto, a resolução correta de toda a questão bem como dos seus itens; o acerto parcial é considerado quando é feita corretamente parte da questão ou de alguns de seus itens; consideramos como erro, a resolução totalmente incorreta da questão; a ausência de respostas ocorre quando a questão não é respondida, ou seja, deixada em branco.

As explicações dadas na segunda questão servirão apenas para entendimento da resposta e também para identificação de possíveis teoremas em ação mobilizados, não implicando no acerto ou erro da comparação.

Gráfico 1: Quantitativo das respostas dos grupos

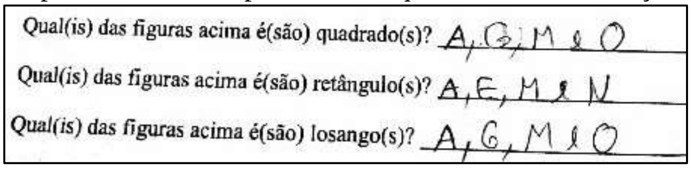


Fonte: dados da pesquisa

Como percebemos, não foram observados erros ou ausência de respostas. Os cinco grupos e o estudante que realizou a atividade individualmente responderam corretamente a quarta questão e foram observados alguns acertos parciais nas questões de identificação de paralelogramos, comparação e medida de área. A seguir, vamos discutir em que consistiram esses acertos parciais.

Na questão 1, todos os grupos acertaram plenamente a identificação dos paralelogramos, porém foram observados equívocos no que se refere aos quadrados, retângulos e losangos. Vejamos alguns protocolos:

Figura 7: Exemplo de um acerto parcial na 1ª questão na identificação de quadrados


Qual(is) das figuras acima é(são) quadrado(s)? A, G, M e O
Qual(is) das figuras acima é(são) retângulo(s)? A, E, M e N
Qual(is) das figuras acima é(são) losango(s)? A, G, M e O

Fonte: Protocolo G3

Percebemos que os estudantes do grupo 3, fato também observado nas respostas do grupo 5, consideraram que todo quadrado é losango e que todo losango também é quadrado, fato que os levou a identificar os losangos não quadrados como quadrados.

Figura 8: Exemplo de um acerto parcial na 1ª questão na identificação de retângulos

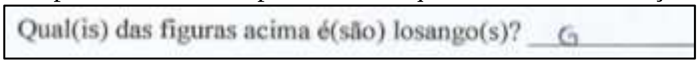

Qual(is) das figuras acima é(são) retângulo(s)? Figuras E e N

Fonte: Protocolo G4

Observamos no protocolo acima que o grupo considerou apenas os retângulos não quadrados na identificação de retângulos, conforme antecipado na nossa análise a priori.

Alguns paralelogramos não retângulos (D, F, I, L) foram identificados como retângulo pelo grupo 1 e também o losango não prototípico (O). O grupo 5 também identificou as figuras (D, F, I) como retângulos.

Figura 9: Exemplo de um acerto parcial na 1ª questão na identificação de losangos


Qual(is) das figuras acima é(são) losango(s)? G

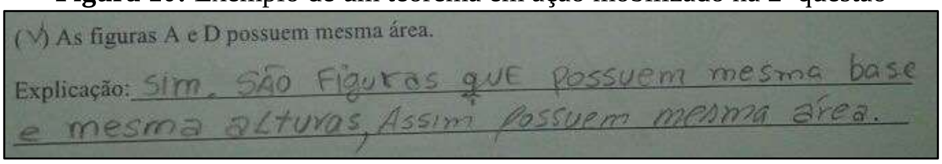
Fonte: Protocolo G1

Neste exemplo, o grupo identificou apenas o losango prototípico como losango, também previsto na análise a priori e nas pesquisas de Passos (2000) e Diniz (2013) sobre a influência da posição das figuras nas respostas.

Nas comparações da segunda questão, alguns procedimentos foram verificados, tais como: decomposição e recomposição, contagem de quadradinhos, sobreposição (inclusão), visual, e outros colocaram "depende".

Em relação aos teoremas em ação mobilizados, vejamos o protocolo a seguir:

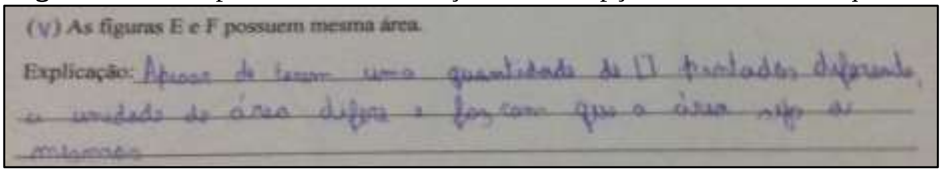
Figura 10: Exemplo de um teorema em ação mobilizado na 2ª questão


(V) As figuras A e D possuem mesma área.
Explicação: Sim, São Figuras que possuem mesma base e mesma alturas, Assim possuem mesma área.

Fonte: Protocolo G5

Podemos notar que o grupo, ao comparar as áreas das figuras A e D, mobiliza o teorema em ação verdadeiro para esta tarefa de que retângulos e paralelogramos com bases iguais e alturas relativas a essas bases também iguais, possuem mesma área.

Figura 11: Exemplo da não mobilização de concepção numérica na 2ª questão

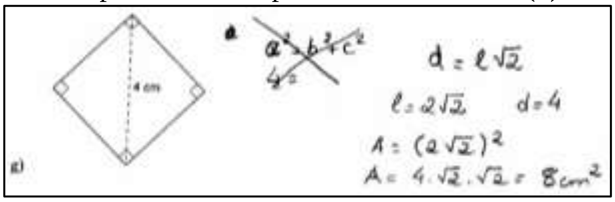


Fonte: Protocolo I

Observamos no protocolo acima que o estudante não associa a área ao número e entende que os números podem ser diferentes e as áreas iguais, o que mostra uma não mobilização das concepções numéricas e contribui para a construção do conceito de área como grandeza autônoma.

Na terceira questão alguns utilizaram a fórmula, outros o Teorema de Pitágoras, alguns apenas colocaram diretamente as respostas. Vejamos:

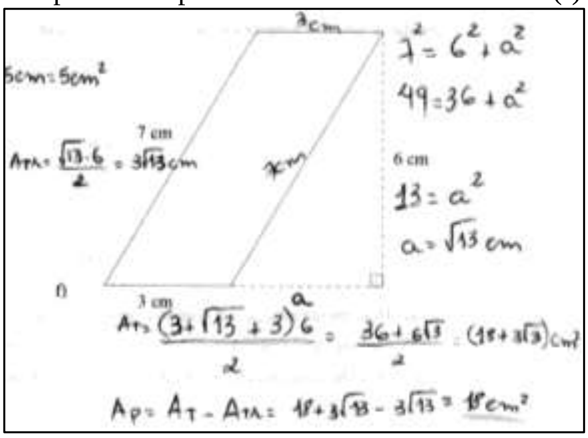
Figura 12: Exemplo de uma resposta correta no item (b) da 3ª questão



Fonte: Protocolo G3

Neste item percebemos que o estudante tenta utilizar o teorema de Pitágoras, mas desiste e usa a fórmula da diagonal do quadrado, procedimento esperado na análise a priori.

Figura 13: Exemplo de um procedimento utilizado no item (f) da 3ª questão

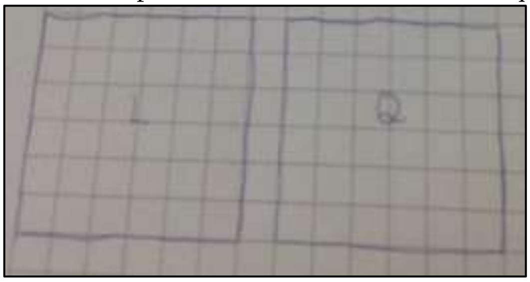


Fonte: Protocolo G4

O grupo usou o teorema de Pitágoras para encontrar o comprimento da base do triângulo formado pelos traçados auxiliares do paralelogramo, depois calcula a área do triângulo. Considera o trapézio formado pelo paralelogramo e os traçados auxiliares, calcula a sua área e subtrai pela do triângulo, encontrando a do paralelogramo. Apesar de pouco econômico, obtiveram êxito no procedimento utilizado.

Em relação à questão de produção, supomos que as dificuldades na primeira questão tenham contribuído para a não consideração da inclusão de classes ao produzir as figuras. Em nenhum momento foi dito na questão que o retângulo e o losango a serem produzidos teriam que ser não quadrados, ou seja, poderia ser considerado que o quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo e a sua produção com área igual à do paralelogramo dado já responderia à questão. Apenas um grupo, nas alternativas (b) e (c), levou em conta a inclusão.

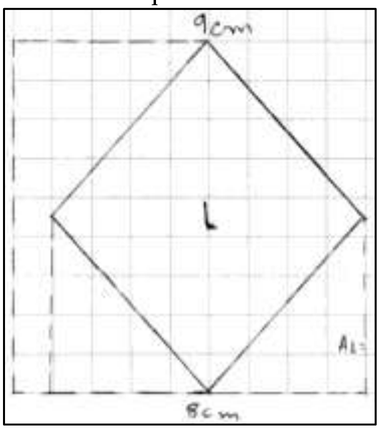
Figura 14: Exemplo de inclusão de classes na 4ª questão



Fonte: Protocolo I

Como podemos notar, ele desenha corretamente um quadrado quando solicitado a produzir um losango, porém a recíproca estaria incorreta.

Figura 15: Exemplo de relação correta entre a malha e as diagonais do losango no item (b) na 4ª questão



Fonte: Protocolo G4

Percebemos no protocolo acima que o grupo associa corretamente as diagonais do losango e a malha para que a figura produzida fique com área igual à da figura dada.

Passaremos agora à análise das questões complementares, que foram respondidas por três dos seis grupos.

1) A alunos de que nível (ano, ensino fundamental, médio...) vocês aplicariam essa atividade?

Tabela 1: Respostas apresentadas na questão complementar 1

<table>
<tr><th colspan="3"><u>Nível escolar</u></th></tr>
<tr><th colspan="2">Ensino Fundamental II</th><th>Ensino Médio</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ano</td><td>Anos iniciais</td><td rowspan="2">2º</td></tr>
<tr><td>7º ou 8º</td></tr>
</table>

Fonte: dados da pesquisa

Os estudantes do grupo G2 falaram que a atividade poderia ser aplicada nos anos iniciais do Ensino Fundamental II, pois afirmam que é onde começa a ser introduzida a geometria plana. Embora a abordagem dada aqui não seja compatível com os anos iniciais, vimos na parte introdutória deste trabalho que este conceito e assuntos de geometria iniciam-se no Ensino Fundamental I. Essa observação traz um alerta sobre a necessidade, durante o curso de Licenciatura em Matemática, de discutir não apenas a abordagem dos conteúdos nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, mas também em estudar o que deve e como esses assuntos devem ser trabalhados nas etapas iniciais da educação básica. Cabe também observar que não houve consenso entre os três grupos acerca do nível de escolaridade mais conveniente para a atividade trabalhada.

O grupo que responde Ensino Médio justifica da seguinte maneira:

Figura 16: Exemplo de resposta dada a questão complementar 1

R= Essa atividade seria ideal para alunos do segundo ano do ensino médio onde estão trabalhando com áreas, vértices arestas e etc.

Fonte: Protocolo G5

2) Quais dificuldades esses alunos encontrariam ao resolver cada questão?

As principais dificuldades citadas pelos grupos são comuns em algumas pesquisas anteriores: posição das figuras – Passos (2000) e Diniz (2013) –, inclusão de classes, entender que figuras iguais podem possuir áreas diferentes e reciprocamente, relacionar a área com as diagonais do losango – Bernardes, Souza e Zandonade (2014) –, comparação em malhas diferentes, aplicar a fórmula em figuras nas quais não estão familiarizados etc. Vejamos um exemplo:

Figura 17: Exemplo de resposta dada a questão complementar 2


Para a primeira questão, eles poderiam ter alguma dificuldade ao descobrirem que as figuras nem sempre vem como estão acostumados a ver. Nessa questão, algumas figuras vieram transladadas.
Para a segunda questão, a dificuldade seria em comparar as figuras que estão em malhas com quadradinhos de tamanhos diferentes.
Para a terceira questão, eles poderiam ter dificuldade ao tentar utilizar a fórmula da área de algumas figuras e tentar achar a área de algumas figuras que eles não estão muito familiarizados, onde seria necessário um raciocínio um pouco mais complexo.
Já para a quarta questão, a dificuldade seria em decompor a figura e entender como funciona a fórmula da área do losango.

Fonte: Protocolo G4

Embora haja alguns aspectos não plenamente dominados pelos estudantes quanto à classificação de quadriláteros e à área de paralelogramos, as respostas deles mostram que vislumbram focos de dificuldades na resolução das tarefas propostas que correspondem àqueles estudados na literatura em educação matemática. Esse é um elemento importante de sua formação profissional, pois permite subsidiar a interpretação das respostas dos estudantes e a tomada de decisões sobre como ajudá-los a invalidar os teoremas em ação falsos e a superar os erros no tratamento de questões sobre o paralelogramo e sua área.

3) Qual questão seria considerada mais difícil por esses alunos e por quê?

Tabela 2: Respostas da questão complementar 3

Grupo	**Questão**	**Justificativa**
G2	2	Teriam que relacionar a área de diferentes figuras.
G4	3	Muitas figuras estão “fora do padrão”.
G5	4	Exige mais raciocínio para encontrar área igual a figura inicial.

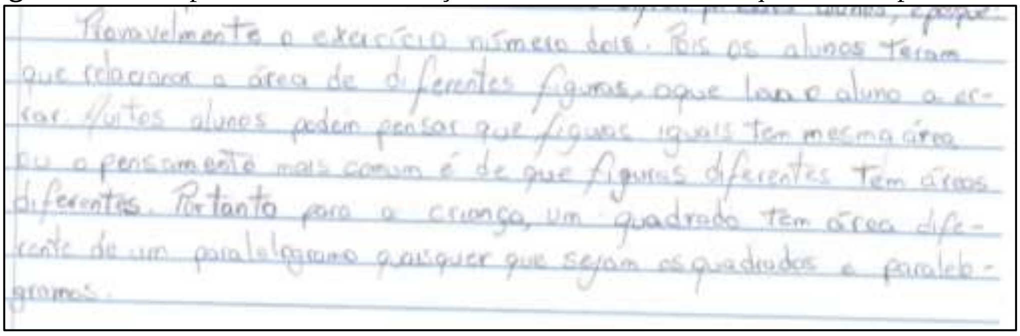
Fonte: dados da pesquisa

Como vemos, embora a questão 1, de identificação, tenha sido aquela em que houve menor quantidade de acertos totais, nenhum dos grupos a considerou como a mais difícil.

Como na primeira questão da parte complementar, aqui não houve consenso entre as equipes sobre a questão mais difícil, o que sinaliza que para os participantes da pesquisa, em todas as três questões, há aspectos não triviais sobre os conteúdos em foco.

Nos argumentos apresentados, há indícios da compreensão da possível mobilização de concepções geométricas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989):

Figura 18: Exemplo de teoremas em ação e outros elementos na questão complementar 3


Provavelmente o exercício número dois. Pois os alunos teram que relacionar a área de diferentes figuras, oque leva o aluno a errar. Muitos alunos podem pensar que figuras iguais tem mesma área ou o pensamento mais comum é de que figuras diferentes tem áreas diferentes. Portanto para a criança, um quadrado tem área diferente de um paralelogramo quaisquer que sejam os quadrados e paralelogramos.

Fonte: Protocolo G2

Compreender o que pode levar os estudantes a errarem na resolução de certas tarefas é um componente importante da formação docente, pois permite ao professor intervir de maneira a contribuir para a superação de concepções errôneas. No caso acima, notamos que o grupo além de saber que figuras diferentes podem ter mesma área, também entendem que quando os estudantes erram nessa questão podem estar mobilizando teoremas em ação errôneos como aquele segundo o qual figuras diferentes têm necessariamente áreas diferentes, indício da manifestação de concepções geométricas.

Considerações finais

Com a realização desta pesquisa, notamos que as respostas indicaram, como era de se esperar, um bom padrão de acertos em todas as questões, mas também alguns aspectos não plenamente dominados pelos licenciandos. Na questão de identificação, observamos alguns equívocos como considerar que “todo losango também é quadrado”, identificar paralelogramos não retângulos como retângulos ou não identificar losangos, quando não estavam em posição prototípica. Na questão de comparação de áreas, os procedimentos envolveram a mobilização de teoremas em ação verdadeiros como a invariância da área por decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição, a contagem de quadradinhos e comparação dos valores numéricos obtidos, quando as unidades de área são iguais, a inclusão e sobreposição de figuras para comparar suas áreas. Verificamos nas respostas de alguns grupos que há clareza quanto à insuficiência do aspecto numérico para lidar adequadamente com tarefas sobre área, ou seja, entendem que os números podem ser diferentes e as áreas iguais, o que indica a compreensão da inadequação de concepções numéricas. Na terceira questão alguns utilizaram fórmulas de área, outros o Teorema de Pitágoras, alguns apenas colocaram diretamente as respostas. Em relação à questão de produção, todos a acertaram. Porém, apenas um grupo considerou a inclusão de classes na produção das figuras, fato que nos faz supor que as dificuldades na primeira questão tenham contribuído para isso.

Nas questões complementares, apesar de não haver consenso entre os grupos em algumas respostas e aspectos não plenamente dominados, notamos elementos importantes da formação docente, pois mostram que vislumbram focos de dificuldades na resolução das tarefas propostas que correspondem àqueles estudados na literatura em educação matemática, cuja identificação permite ao professor intervir de maneira a contribuir para a superação de concepções errôneas. Percebemos ainda a necessidade, em cursos de Licenciatura em Matemática, de discutir aspectos relacionados às etapas iniciais da Educação Básica e não somente do Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Referências

ARAÚJO, J. C. **Como os alunos de 8º ano lidam com situações relativas à área de paralelogramos?**: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

BALTAR, P. M. **Enseignement-apprentissage de la notion d'aire de surface plane:** une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. (Tese Doutorado) Grenoble, França: Universidade Joseph Fourier, 1996.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática, 10ª edição, 2006.

BELLEMAIN, P. M. B. Estudo de situações problema relativas ao conceito de área. In: X ENDIPE – X Encontro de Didática e Prática de Ensino, 2000, Rio de Janeiro, **Anais...** X ENDIPE. Cd - Rom.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental** / Paula Moreira Baltar Bellemain, Paulo Figueiredo Lima. Natal: SBHMata, 2002.

BERNARDES, G. M.; SOUZA, C. S.; ZANDONADE, C. S. A construção do conceito de área por meio de atividades investigativas: uma experiência com paralelogramos no PIBID/IFES. Revista eletrônica **Sala de Aula em Foco.** vol. 3, nº 1, 73 - 82, 2014.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 242f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

DINIZ, L. S. Habilidades e níveis do pensamento geométrico de alunos do ensino fundamental sobre quadriláteros. **Revista Acadêmica do Campus de Marabá**, n° 1/2013 Universidade Federal do Pará.

DOUADY R.; PERRIN-GLORIAN M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. vol.20, n. 4, p. 387-424, 1989.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J.B.P.F. Geometria. In: CARVALHO, J.B.P.F. **Coleção Explorando o Ensino:** Matemática, v. 17. Brasília, MEC, 2010, p. 135 – 166.

MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana.** CAED/UFMG, Belo Horizonte-MG, 2012.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica:** a geometria na sala de aula. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2000.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:** Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife, 2012.

______. **Parâmetros na sala de aula.** Matemática. Ensino Fundamental e Médio. Recife, 2013.

SANTOS, M. R. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo:** um estudo sob a ótica das variáveis didáticas e do contrato didático. 178 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – UFRPE, Recife-PE, 2005.

SOUZA, E. R. **Análise de estratégias de alunos do ensino médio em problemas de cálculo de área do paralelogramo.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2013.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas.** *Análise Psicológica, 1*, 1986, pp. 75-90.

______. La Théorie des Champs Conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 10, nº 2.3, p. 133-170, 1990.

Recebido em: 30 de junho de 2020
Aprovado em: 14 de agosto de 2020