revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O QUE PENSAM OS PROFESSORES UNIVERSITÁRIOS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE?

Maria Bethânia Sardeiro dos Santos[1]
Saddo Ag Almouloud[2]

Resumo: Este artigo apresenta parte dos resultados obtidos em uma pesquisa de doutorado que teve como objetivo trazer novas reflexões relacionadas ao conceito de limite de uma função. Há um número grande de trabalhos de investigação com diferentes abordagens e metodologias que procuraram descobrir os motivos para o fracasso generalizado dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Mas, há ainda poucos trabalham que versam sobre o olhar do professor universitário sobre essa dificuldade. Apresentaremos nesse texto, especificamente, as "falas" de professores universitários referentes ao conceito de limite e seu ensino. Para tanto, procuraremos inicialmente explicitar como realizamos a leitura dessas falas. O método utilizado para a análise se aproxima da análise de conteúdo porque fizemos uma leitura repetida das respostas até encontrarmos uma maneira de explicitar o que era comum ou não, o que se repetia com frequência, as palavras mais utilizadas. Ao falarem da definição formal de limite, alguns professores utilizaram os termos vizinhança, aproximações, e mencionaram trabalhar com mais de um registro em sala de aula. Na nossa perspectiva, essa explicação não se constitui verdadeiramente em uma explicação, mas em uma "leitura" da mesma. E, então, nos perguntamos: Que visão o professor universitário teria de explicação? Como seria para ele traduzir/decodificar o simbólico para o aluno?
Palavras-chaves: Limite. Percepção do professor universitário. Dificuldade. Aprendizagem.

WHAT DO UNIVERSITY TEACHERS THINK ABOUT TEACHING AND LEARNING THE LIMIT CONCEPT?

Abstract: This article presents some results from a doctoral research that aimed to bring new insights related to the concept of function limit. There are a lot of research with different approaches and methodologies which seek to discover the reasons for the widespread failure of students in the discipline of Differential and Integral Calculus. There are still few research works that deal with the view of professor about this difficulty. We will introduce on this article, specifically, what the university professors have said about the limit concept and its teaching. Therefore, we seek first explain how we analyzed it. The method used for reading it is a method that approaches of content analysis because we did a repeated reading of the answers until we find a way to explain what was common or not, what repeated often, the most commonly used words. When speaking about the formal definition of limit, some of those teachers used words like neighborhood, approaches, and they mentioned they used to work with more than one record in the classroom. In our view, this explanation is not truly an explanation, but a "reading" of it. Then we ask ourselves which vision the professor would have of explanation? How would be to him translate /decode the symbolic to the student?
Keywords: Limit. Perception of the university professor. Difficulty. Learning.

[1] Professora Adjunta do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás. E-mail: bethania@ufg.br.
[2] Professor Assistente, Prof. Doutor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. E-mail: saddoag@pucsp.br.

Introdução

Este artigo apresenta parte dos resultados obtidos em uma pesquisa de doutorado que teve como objetivo trazer novas reflexões relacionadas ao ensino e a aprendizagem do conceito de limite de uma função. Nessa investigação, enfatizamos momentos. No primeiro momento, selecionamos trabalhos relacionados ao nosso estudo. No segundo momento, voltamos à História da Matemática para refletirmos com maior profundidade sobre o desenvolvimento e a constituição do conceito de limite. No terceiro momento, realizamos um estudo do conceito de limite como objeto matemático por meio da Teoria Antropológica do Didático. No quarto e último momento, procuramos explicitar a percepção do professor universitário e do aluno acerca do conceito de limite.

Nosso trabalho de investigação procurou respostas para os seguintes questionamentos:

- ✓ De onde viria a dificuldade de aprendizagem do conceito de limite?
- ✓ Como os livros o apresentam? E as tarefas? Como são propostas?
- ✓ Em que os professores universitários se apoiariam para ensinar esse conceito? Que elementos utilizariam para motivar o aprendizado? Com quais definições trabalhariam? Como viriam as dificuldades dos alunos? E os alunos? Que testemunho nos trariam com relação aos seus aprendizados de limite de uma função?

Para o estudo teórico do conceito de limite como objeto matemático apoiamo-nos na Teoria Antropológica do Didático para pensarmos as relações: teoria, tecnologia, técnica e tarefa. Ao analisarmos os tipos de tarefas e registros que delas se originariam, nosso suporte teórico foi o Registro de Representação Semiótica.

Com relação aos livros textos de Cálculo Diferencial e Integral, trabalhamos com elementos da teoria de Bakhtin para analisarmos a estruturação do discurso apresentado pelos autores. O trabalho de campo da nossa investigação buscou explicitar a percepção do professor universitário e do aluno sobre o conceito de limite, ao analisarmos o sentido e o significado apresentados por nossos informantes também nós apoiamos na teoria cognitiva de Vygotsky.

Apresentaremos nesse texto, especificamente, as “falas” de alguns professores universitários referentes ao conceito de limite e seu ensino; para tanto, procuraremos inicialmente explicitar como realizamos a leitura dessas falas, certos de que elas não apresentam, na sua totalidade, toda a complexidade/dificuldade presente no ato de ensinar.

Devemos ressaltar, ainda, que os alunos também fizeram parte integrante do trabalho de investigação que deu origem a esse artigo. Para eles, elaboramos um questionário com perguntas abertas e fechadas. O único critério estabelecido foi o de que o aluno já deveria ter cursado Cálculo Diferencial e Integral. Tivemos um total de 62 alunos participantes.

Aos buscarmos – nos textos e nas falas dos nossos sujeitos - a maneira que eles percebiam o conceito de limite, tínhamos em mente que: “o objeto que está sendo tratado num texto de pesquisa é ao mesmo tempo *objeto já falado, objeto a ser falado* e *objeto falante* (...). O conhecimento que se produz nesse texto é também uma questão de silêncio” (AMORIM, 2004, p.19) (grifos nossos).

Segundo Amorim (2004, p.16), não há trabalho de campo que não vise ao encontro com o outro, que não busque um interlocutor e também; ressalta ela, não há escrita de pesquisa que não se coloque o problema do lugar da palavra do outro no texto: “pode-se utilizar métodos ou convenções de escrita que ignorem ou que esqueçam que, do outro lado, há um sujeito que fala e produz texto tanto quanto o pesquisador que o estuda” (p.16). Procuramos, na medida do possível, nos lembrarmos disso.

Com relação aos teóricos[3] que direcionaram o nosso olhar para a elaboração das questões e sobre os dados, comungamos com Amorim (2004) quando afirma que é “a teoria, com o conjunto de suas proposições, que confere precisão e universidade a uma significação e permite assim que se extraiam todas as consequências do que é dito” (p.21). O texto científico é, segundo Bakhtin, monológico[4]. Mas, não há monologismo absoluto (AMORIM, 2004, p.16). O objeto pode ser específico, determinado no campo matemático; mas não a maneira de se falar sobre ele. Para Amorim (2004): “O monologismo seria justamente o apagamento das diferentes enunciações que produzem um objeto de pesquisa. Ouve-se apenas uma voz a falar e, entre a descrição e o descrito, nenhum espaço é entrevisto” (p.94).

Barros (2005) ressalta que

[3] Bakthin, Chevallard, Vygotsky, Duval.
[4] Para Bakhtin (2003, p.400) – As ciências exatas são uma forma monológica do saber.

> A palavra polifonia é utilizada para caracterizar um certo tipo de texto, aquele em que o dialogismo se deixa ver, aquele em que são percebidas muitas vozes, por oposição aos textos monofônicos, que escondem os diálogos que os constituem. Nos textos monofônicos eles (os diálogos) se ocultam sob a aparência de um discurso único, de uma única voz (p.34).

Sabemos que é o sujeito que constrói o sentido ou que explicita a falta dele. Ao lermos os textos dos nossos sujeitos, tínhamos em mente que "todo enunciado, mesmo o mais simples, é um acontecimento; uma espécie de drama cujos papéis mínimos são o locutor, o objeto e o ouvinte. O objeto é entendido aqui como o assunto de que trata o texto" (AMORIM, 2004, p.121). Como o professor fala do conceito de limite? O que prioriza? O que não menciona? Como trabalha certos elementos específicos relacionados a esse conceito? Como enxerga a relação entre o aluno e o aprendizado desse conceito? Procuramos, por intermédio dessas várias perguntas, reposta para uma única: *O que pensam professores universitários sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de limite?*

Para Amorim (2004, p.66),

> Aquilo que do outro permanece incompreensível, indizível do lugar enunciativo em que nos encontramos (enquanto pesquisadores num dado contexto cultural e histórico) somente a partir de um outro lugar ou de um outro regime discursivo, o silêncio poderá ser identificado e nomeado, pois, caso contrário, ficaria a pergunta: como ouvir o silêncio se ele é justamente uma ausência, uma ausência de signo ou de rastro?

É claro que, em termos textuais, o silêncio não é uma "marca" simples de ser identificada. Na oralidade isso é mais óbvio. Mas, ainda assim é possível identificar nos questionários, por exemplo, quais as questões que não foram respondidas. A ausência não deixa de ser, também, uma espécie de silêncio sobre algo, sobre algum aspecto do objeto do nosso estudo.

Como foi a elaboração do questionário e com quais objetivos.

Utilizamo-nos de um questionário geral (cujo resultado apresentamos nesse artigo) e uma atividade livre (com entrevista) para três professores universitários. Esses três professores que responderam a atividade livre não fazem parte do público que respondeu ao questionário geral. A elaboração desse segundo instrumento teve o objetivo de complementar ou mesmo evidenciar elementos que não foram percebidos nas respostas fornecidas pelo primeiro grupo.

Nosso intuito ao solicitar que os alunos também respondessem a um questionário foi o de ouvir as falas tanto de quem ensina, quanto de quem aprende. Nós queríamos verificar se as dificuldades apresentadas pelos professores no ensino do conceito coincidiram com as dificuldades vivenciadas pelos alunos na aprendizagem. Dividimos o encontro com nossos informantes em três momentos.

No primeiro momento, aplicamos um questionário com questões abertas para todos os professores que já haviam lecionado Cálculo Diferencial e Integral em diferentes cursos. Nosso objetivo era ter uma visão geral com relação à maneira que eles ensinavam cálculo independentemente do curso: com qual definição de limite trabalhavam, se trabalhavam o conceito de maneira intuitiva, se utilizavam a história da matemática, etc. Como buscávamos a percepções dos professores, decidimos por não utilizarmos questões de múltiplas escolhas para não os induzir a nenhuma resposta.

No segundo momento, solicitamos a alguns professores que respondessem uma atividade livre para verificarmos se os dados coletados no questionário inicial se confirmariam criando a oportunidade para que o professor falasse mais abertamente sobre elementos relacionados ao conceito de limite e sua prática pedagógica.

No terceiro momento, aplicamos um questionário para os alunos da licenciatura em matemática que já tinham cursado Cálculo Diferencial e Integral. Nosso objetivo era, também, o de verificar se os alunos teriam domínio conceitual do limite e identificar suas possíveis dificuldades. Não estávamos preocupados com algoritmos, mas com a compreensão do conceito de limite e suas relações. Ao elaborarmos o questionário a ser aplicado aos alunos, procuramos ser abrangentes com relação aos conteúdos relacionados ao conceito de limite dividindo-o em três partes para que os alunos pudessem trabalhar com diferentes registros ao longo do mesmo.

Como foi realizada a coleta dos dados

O questionário foi entregue, em mãos, a 12 professores que se comprometeram em respondê-lo. Desse total, 9 professores devolveram os questionários respondidos. O único critério estabelecido para o convite à participação foi o de que o professor já deveria ter lecionado Cálculo Diferencial e Integral, independentemente da turma.

Para a caracterização do grupo perguntamos somente a quantidade de vezes que ele/ela já havia lecionado à disciplina de Cálculo Diferencial e para quais turmas. O quadro abaixo explicita esse total.

Identificamos os professores com a letra P. As duas primeiras questões foram para a caracterização do grupo de professores. Questão 01**:** Quantas vezes você já lecionou essa disciplina? Questão 02: Para quais cursos você já lecionou Cálculo? As respostas obtidas foram:

Tabela 1: Respostas dadas às questões 1 e 2

1	Mais de 20 vezes	Matemática, Física, Química, Biologia, Computação, várias engenharias.
2	Em 7 oportunidades	Matemática, Química, Computação e Engenharia da Computação.
3	Mais de 10 vezes	Matemática, Física, Engenharia de Alimentos, Farmácia.
4	Pelo menos cinco vezes	Farmácia, Engenharias, Matemática, Administração, Computação, Química.
5	Acima de 5 vezes	Engenharia Elétrica, Engenharia Civil, Matemática, Física, etc.
6	Mais de vinte	Administração, Economia, Química, Física, Matemática, Engenharia: Química, Civil, Mecânica.
7	4 vezes	Agronomia, Química e Matemática.
8	Umas 30 vezes	Para todos os cursos da área de exatas criados antes de 2009, Biologia, Farmácia.
9	Uma vez	Engenharia Elétrica, Agronomia.

Fonte: Santos (2013, p.280)

O professor P9 foi o único que não ministrou aulas para o curso de Matemática e que – mesmo afirmando ter lecionado uma única vez – ao mencionar para quais cursos deixa explícito que foram duas vezes. Todos os professores possuem boa experiência com essa disciplina. O professor que lecionou menos tempo, trabalhou com o Cálculo por quatro vezes.

E há aquele que já lecionou essa disciplina por mais de vinte vezes.

Antes de passarmos especificamente para as respostas relacionadas ao conceito de limite, faz-se necessário destacar que a parte que foi escrita pelo professor será apresentada, nesse artigo, como citação. Alguns eventuais erros de português foram corrigidos porque o foco do trabalho não é a "forma", mas o conteúdo e o sentido do que foi escrito.

Nosso primeiro olhar para os questionários. O que as respostas nos revelariam?

Passaremos a apresentar agora as análises detalhadas das respostas dadas, questão por questão. O método utilizado para a análise se aproxima da análise de conteúdo porque fizemos uma leitura repetida das respostas até encontrarmos uma maneira de explicitar o que era comum ou não, o que se repetia com frequência, as palavras mais utilizadas. A ideia foi a de construir núcleos de sentido.

Ao responderem à questão 1 (Como você explicaria com palavras o limite de uma função?), a grande maioria dos professores (8 professores) utilizou a ideia de movimento (ou dinâmica) do conceito, que é o sentido vinculado à noção intuitiva do limite de uma função. Outros trabalharam com algumas características do conceito (2 professores) ou com as condições (2 professores) para a existência do mesmo. Apenas dois professores explicitaram uma "metodologia" para essa explicação, isso pode indicar que eles pensaram na sala de aula ao responderem, pois eles chegaram a explicar a ordem da apresentação do conteúdo que fariam e o que utilizariam.

A palavra que mais se repetiu foi "aproxima" – com suas variações: próximo, aproxima-se, se aproximam, aproximariam, aproximação (6 professores a utilizaram). E os que não a utilizaram diretamente, fizeram menção a palavras que também indicam certa aproximação, como é o caso dos termos: fecho[5], tender e fronteira.

> (P6) Se existe, o limite de uma função em um ponto a, é o valor para o qual as imagens se aproximam quando os respectivos valores do domínio se aproximam do ponto a.

Se quiséssemos associar o conceito de limite de uma função pelo que foi escrito pelos

[5] Fecho ou aderência é um termo da Topologia. O fecho é formado pelo conjunto dos pontos aderentes. Um ponto aderente é o limite de uma sequência de pontos e ele pode pertencer ao conjunto ou não.

professores a uma única palavra, ele seria – valor (6 professores) ou número (1 professor).

No artigo *Intuitive infinitesimal in the calculus*, Tall (1980) discute essa aproximação intuitiva da noção do limite de uma função afirmando que são usualmente interpretadas em um sentido dinâmico (que coincide com as respostas apresentadas pelos nossos informantes), mas que isso pode gerar a interpretação – por parte dos alunos – que o limite é um processo sem fim, no qual a imagem da função chega perto do valor de *l*, em vez de chegar ao valor de *l*.

Cornu (1983) destaca que a aquisição do conceito de limite supõe uma representação mental, imagens, desenhos, exemplos, *links* que não são os mesmos para a aquisição da definição de limite. Para que isso aconteça, o professor precisará planejar aulas em que os alunos trabalhem com diferentes tipos de registros. A questão foi colocada com uma terminologia explícita - "em palavras" – para tentarmos induzir o professor a se utilizar da língua materna, mas percebemos que a linguagem apresentada nas respostas é densa, típica de especialistas. Se essa linguagem for a mesma que o professor utiliza em sala de aula, ela poderá gerar incompreensões por parte dos alunos.

Com relação a questão 2 (Como você explica o limite infinito? E o limite no infinito?), encontramos nas respostas a utilização de termos que indicam movimento (6 professores) e palavras relacionadas às condições para se trabalhar com o limite infinito ou limite no infinito. Os professores deixam claro que é preciso o trabalho com certos valores. Boa parte dos professores apresentou esses limites na forma "quando isso" – "aquilo" (5 professores). Com relação à presença de palavras novas para descrever esses limites, os termos mais utilizados foram: arbitrariamente (3 professores), indefinidamente (1 professor), vai para o infinito (1 professor), crescem cada vez mais (1 professor), muito grande/muito pequeno, maior que zero/menor que zero (1 professor). O que é esperado, pois lidamos com o infinito.

Quando refletimos sobre termos como "muito pequeno", "menor que zero" – pensamos nos infinitésimos que, segundo Cornu (2002), continuam vivos nas mentes e na **comunicação** dos profissionais de matemática. É necessário destacar, no entanto, que essa terminologia não é familiar aos alunos e muitos deles não compreendem frases do tipo "cresce arbitrariamente" ou "cresce indefinidamente". Outros estudantes, como ressalta Robert (1982 apud CORNU, 2002), desenvolvem imagens de limites e infinito que se relacionam a equívocos associados ao processo de "chegar perto" ou de "grande crescimento" ou "indo para sempre".

O professor (P7) expressou o limite infinito e o limite no infinito da maneira mais formalizada possível. A impressão que temos ao ler o seu texto é de que ele fez a transcrição de algum livro. Um professor não respondeu à questão (P9). A palavra mais utilizada para a explicação do limite infinito ou limite no infinito foi **tendência** - a que mais se repetiu nas descrições dos professores.

> (P7) **LIMITE INFINITO**
> Seja a um ponto de acumulação de B $\subset \mathbb{R}$ e seja f: B $\rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que o limite de f em a é infinito, e denota-se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ se, dado um número K > 0 qualquer, existe um número $\delta = \delta(K) > 0$ de modo que
> $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \geq K$
> **LIMITE NO INFINITO**
> Suponhamos que A $\subset \mathbb{R}$ tenha interseção não vazia com intervalos da forma $[r, \infty)$ e consideremos uma função f: A $\rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que o limite de f no infinito é $l \in \mathbb{R}$, e se escreve $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, se, dado um número $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um número $K = K(\varepsilon) > 0$ de modo que $x \in A, x \geq K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
> A definição acima significa que, se considerarmos no plano xy uma faixa:
> $l - \varepsilon < y < l + \varepsilon$, não importa quão estreita ela seja, existe um número K > 0 de modo que, para $x \in (k, \infty)$, o gráfico de f fica dentro dessa faixa.
>
> (P4) O limite infinito significa que o valor da função vai para o infinito. Limite no infinito nós estamos interessados em calcular o valor da função quando o argumento vai para o infinito.

Percebemos, pelas respostas de alguns professores (quatro dos nove), que eles têm maneiras parecidas para falar dos limites infinitos e limites no infinito. Eles falam ora de pontos do domínio, ora do valor da função - para explicitarem as diferenças entre um e outro – de maneira invertida. Para explicitarmos isso, citaremos duas respostas desses quatro professores:

> (P1) Limite Infinito: Quando x se aproxima de um certo valor a o valor da função cresce arbitrariamente. Limite no infinito: Quando o valor da função se aproxima de um certo valor, digamos L, quando x cresce arbitrariamente.
>
> (P2) O limite infinito significa que quanto mais próximo de um determinado ponto, eu avalio a função maior é a imagem, superando qualquer valor pré-fixado. Já o limite no infinito significa que a imagem da função se aproxima de um determinado valor quando avaliada em pontos arbitrariamente

grandes.

Com relação às indeterminações, perguntamos na questão 3: Com quais tipos de indeterminação você trabalha? Os professores foram bastante específicos em suas respostas. Todos eles, com exceção de um professor (P9), escreveram as indeterminações. Alguns deles (dois professores) destacaram a forma como trabalham as mesmas. Um dos professores afirmou que a escolha das indeterminações dependia do curso, que em alguns casos ele só trabalharia em um curso da área de exatas.

> (P8) As básicas. Considero interessante mostrar através de exemplos triviais infinito sobre infinito e 0/0 pode ser qualquer número real.
>
> (P1) Sempre interpretações através de exemplos. Todos os tipos. As mais comuns 0/0 e ∞/∞. Outros tipos $\infty - \infty$, $0.\ \infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}.

Com base nessas respostas, achamos mais fácil apresentarmos os resultados em forma de tabela.

Tabela 2: Indeterminações dadas como exemplos

Indeterminação	Quantidade de professores
$\frac{0}{0}$	8 professores
$\frac{\infty}{\infty}$	8 professores
$\infty - \infty$	4 professores
$0.\infty$	5 professores
1^{∞}	4 professores
∞^{0}	3 professores
0^{0}	4 professores
∞^{∞}	1 professor
$\frac{\infty}{0}$ equivalente a $\infty.\infty$	1 professor

Fonte: Santos (2013, p.291)

Para investigarmos como o professor lidaria com uma dedução errada do aluno relacionada aos infinitos, propusemos a questão 4 (Se um aluno afirma que infinito “dividido” por infinito dá como resultado um. Como você explicaria para ele que isso nem sempre acontece?). Dos nove professores, seis afirmaram que explicariam a impossibilidade desse resultado por meio de exemplos. Dois deles afirmaram que “infinito não é um número” e outros dois fizeram menção ao fato desse quociente se constituir numa indeterminação.

Três professores relataram a forma que trabalhariam com a relação denominador/numerador para explicar melhor o porquê de não se efetuar essa operação. Outros três professores se utilizaram de outros elementos – entre esses, o professor P9 foi o único que falou, explicitamente, de conjuntos numéricos e suas possíveis operações.

> (P5) Dando exemplos, mostrando situações em que a expressão pode ser qualquer número pré-fixado.
>
> (P9) Tomando como base a ideia de conjunto numérico e as operações possíveis a partir das propriedades e operações estabelecidas pelos conjuntos numéricos;

Para sabermos o que o professor universitário consideraria difícil de ensinar, elaboramos a questão 5 (Para você, qual a parte mais delicada no ensino e aprendizagem de limite? Porque razão?) e a questão 7 (Quais dificuldades você apontaria como as mais importantes que são observadas nos alunos no estudo de limite? Por que razão?)

Na questão 5, obtivemos as seguintes respostas:

- ✓ Entender e/ou aceitar a ideia de próximo/aproximação (2 professores);
- ✓ O fato de o limite de uma função num ponto poder existir mesmo que a função não esteja definida nesse ponto (1 professor);
- ✓ O cálculo do limite (1 professor);
- ✓ A utilização rigorosa da definição de limite (1 professor);
- ✓ Relacionar grandezas muito “pequenas” e muito “grandes” (1 professor);
- ✓ A noção de limite (1 professor);
- ✓ Dar um significado/sentido para o conceito (1 professor).

É importante ressaltar que a grande maioria das dificuldades apontadas pelos professores coincide com as dificuldades apresentadas pelos estudos que fizeram parte da revisão bibliográfica da pesquisa, mas há outras dificuldades que não foram sequer citadas. Jordaan (2005) encontrou, em pesquisa realizada com alunos, dados que coincidem com algumas dificuldades apontadas pelos professores, tais como: os alunos acham que a função tem que estar definida no ponto para ter limite naquele ponto, se a função não for definida em determinado ponto, não há limite; acreditam que o valor da função no ponto é igual ao limite e pode ser encontrado pelo método de substituição.

Com relação às respostas para a questão 7, elas foram tão diversificadas que não foi possível elaborarmos uma síntese que abrangesse todas elas. Só houve uma repetição – dois professores consideraram a definição formal do limite como uma das dificuldades enfrentadas pelos alunos. E para não perdermos essas "falas", transcrevemos abaixo as respostas para essa questão.

> (P1) A definição formal do limite é sempre uma dificuldade. Por que o aluno tem dificuldade de fazer a conexão da definição formal com a ideia geométrica.
>
> (P2) Do ponto de vista do professor, a linguagem e a formalização prematura são pontos que podem gerar dificuldades. Já para o aluno o tempo é o principal obstáculo, pois ele precisa amadurecer rapidamente em conceitos que são delicados.
>
> (P3) É a mudança do estático "do ensino médio, para o movimento" do nível superior. Eles até aprendem as manipulações algébricas, mas o conceito e novas ideias e formas de abordar o assunto é que são mais delicados.
>
> (P4) O entendimento das funções que aparecem no denominador e numerador. Os alunos têm dificuldades de entender o comportamento das funções e também de manusear algebricamente essas funções.
>
> (P5) A maior dificuldade está quando no cálculo de um limite chega-se a uma indeterminação, pois a tendência do aluno é aceitar expressões do tipo $\infty/\infty = 1$ $\infty - \infty = 0$.
>
> (P6) Primeiro, a dificuldade de abstração de conceitos com que os alunos chegam na universidade. E justamente por este conceito ser "novo" e muito abstrato.
>
> (P7) Definição de limite. Propriedades, exemplos adequados, demonstração de teoremas. O material a ser aprendido pelo aluno nem sempre faz sentido.
>
> (P8) Como falei anteriormente considero que na parte intuitiva os alunos não têm grandes problemas, talvez os maiores problemas sejam a manipulação de expressões algébricas e a interpretação de gráficos.
>
> (P9) Dificuldades na abstração da ideia matemática de limite e no diálogo entre a representação gráfica e sua respectiva representação algébrica/aritmética. De certo modo, parece que a falta de conexão aparente

> entre as distintas linguagens dificulta a construção de significados para a ideia de limite.

Não encontramos nas respostas dos professores nenhum indicativo de que as dificuldades dos alunos (ou o insucesso na aprendizagem) poderiam ter como causa – eles próprios. Barbosa (2004), em seu trabalho com os professores, constatou isso também. A causa do insucesso do aluno estaria – na visão dos professores por ele pesquisados - centrada no próprio aluno. Santos e Matos (2012) afirmam que os professores não citam como possível fator responsável pelas dificuldades dos alunos às falhas dos docentes. Ressaltamos que nossa pergunta teve foco no aluno, talvez se tivéssemos perguntado – qual a sua dificuldade em ensinar – o professor teria apresentado outras respostas. Mas, é importante ressaltar que todos eles percebem (de maneiras distintas) às dificuldades de se ensinar o conceito de limite.

Na questão 6, perguntamos aos professores como eles explicariam para os alunos a definição formal de limite:

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Ao lermos as respostas, nós percebemos que alguns professores se limitaram a "traduzir" a definição (2 professores) do simbólico para a língua materna.

> (P2) Por menor que seja a vizinhança de L que você escolher existe uma vizinhança de p tal que pra todo ponto x na vizinhança de p temos $f(x)$ na vizinhança de L.

> (P7) Basicamente o significado da definição formal é este: Se o valor de x se aproxima de p, então o valor de $f(x)$ se aproxima de L.

Um professor não respondeu à questão. Cinco professores explicitaram como explicariam essa definição para seus alunos. É de se destacar que alguns professores afirmaram trabalhar com diferentes tipos de registros como o gráfico e o algébrico.

> (P8) Utilizo gráficos e para mostrar o "dado épsilon existe um delta" faço exemplos com vários valores de épsilon.

Outro aspecto importante foi o fato de dois professores ressaltarem a dificuldade dessa definição formal chegando a afirmar que não trabalham com a mesma em um curso introdutório.

> (P3) Esta é uma parte delicada. Não tenho feito isso em Cálculo 1, às vezes para a matemática. Se tiver que fazer, exploro a visualização e interpretação geométrica e depois a manipulação algébrica.
>
> (P5) A nível de um curso introdutório de cálculo não considero a definição formal; isto é ensinado em curso de fundamentos de análise.

Mastorides e Zachariades (2004) desenvolveram um trabalho com professores do Secundário e concluíram que eles encontraram dificuldades relacionadas aos quantificadores e um grande número não compreendeu corretamente a relação entre épsilon e n_0 na definição de convergência de sequências. Guerra (2012), ao entrevistar professores que trabalhavam com esses conteúdos para alunos não universitários, encontrou essa mesma indicação de que a dificuldade vem do fato do conceito ser bastante abstrato.

Não queremos afirmar que os professores universitários teriam dificuldades na compreensão da definição formal do limite, mas ressaltar o quanto ela é complexa – até mesmo a sua "leitura" não é tarefa fácil. Como então explicá-la, traduzi-la de maneira que seja compreendida pelo aluno?

Cornu (1983) destaca que embora matematicamente toda a noção de limite esteja contida na sua definição formal, há uma lacuna entre a noção de limite como conceito e a definição da noção de limite. Para ele, a ideia dinâmica (tudo está ligado ao "tender a", ao fato de "se aproxima de") não é passada por meio da definição – que é estática. Essa definição transforma o conceito em algo extremamente complexo que mistura infinito, ideia de aproximação, ideia de abordar algo sem atingir ou alcançar; em suma, a definição transforma o conceito em um objeto de outra natureza, misturando quantificadores. Esse mesmo autor destaca que os quantificadores "para todo", "existe", presentes na definição formal de limite têm seus próprios sentidos na linguagem do dia a dia sutilmente diferente dos sentidos encontrados nessa definição (CORNU, 2002).

Abreu e Reis (2011) apontam nos resultados do trabalho realizado com alunos do segundo semestre do curso de licenciatura em matemática, que a notação rigorosa tanto para o limite quanto para a continuidade se revelou totalmente sem sentido para os alunos. Com relação ao limite, os alunos deixaram as respostas em branco e nenhum participante apresentou uma resposta considerada correta.

Ao focarmos a História da Matemática na questão 8 (Você utiliza História da

Matemática para ensinar limite? ( ) SIM ou ( ) NÃO. Em caso afirmativo, explique como é feito) queríamos averiguar se o professor traria elementos da história do desenvolvimento do conceito de limite para refletir sobre sua prática. Dos nove professores, quatro afirmaram que utilizam a história da matemática e cinco que não utilizam.

Um professor foi contado tanto no sim quanto no não porque afirmou que fala sobre a história apenas nas aulas para o curso de matemática, nos outros cursos ele não menciona porque "não tem surtido efeito". Um professor não respondeu à questão. Quatro professores apresentaram a maneira como utilizam a História da Matemática.

> (P1) Sim. Apenas comento que o conceito formal é relativamente recente através do matemático Weierstrass. Mas as ideias de limites já vinham sendo usadas há vários séculos.
>
> (P2) Não. Acredito que o uso da História, comparado à maneira como o limite foi definido inicialmente com o modo como é feito hoje, seja mais proveitoso em um segundo contato.
>
> (P3) Sim e não. Somente para a matemática falo sobre a história da matemática. Tento mostrar como os conceitos evoluíram dependendo do contexto em que estão inseridos. Nos outros cursos falar sobre história da matemática não tem surtido efeito.
>
> (P7) Sim. É feito de modo que o aluno perceba que os estudos apresentados não ocorreram em ordem cronológica.
>
> (P8) SIM. Mostro através da história que a dificuldade deles em entender a definição foi igual à da humanidade, pois da intuição à definição rigorosa levou séculos.

Inicialmente percebemos que poucos professores se apoiam na História da Matemática e, quando o fazem, é de maneira ilustrativa. Não percebemos, por parte deles, uma compreensão mais profunda da importância do desenvolvimento da história para refletirmos sobre os obstáculos epistemológicos relacionados a determinados conceitos. Cornu (2002, p.159) ressalta que é útil o estudo da história do conceito para localizar períodos de desenvolvimento lento, as dificuldades que surgiram podem indicar a presença desses obstáculos, tais como: o fracasso em associar geometria com os números, a noção do infinitamente grande e infinitamente pequeno, entre outros.

Ao lermos respostas como a do professor P8, percebemos que o seu trabalho com a história está na mesma perspectiva dos trabalhos desenvolvidos por Castro e Fernandez (2011) que procuram, por intermédio da história, a humanização do fazer matemático. Isso poderá contribuir na superação da ideia do texto matemático monofônico. O professor P1, ao destacar o nome de Weierstrass contribui, no nosso ponto de vista, com essa humanização e, também, com a elucidação das vozes que se fazem presentes ou ausentes no texto matemático. A referência à Weierstrass identifica uma dessas vozes. Só por meio da história seremos capazes de perceber muitas outras vozes que "se perderam" até que a definição final e formal do conceito de limite se estruturasse.

O que os questionários evidenciaram?

Quando os professores escreveram sobre o conceito de limite, deixaram explícitos alguns elementos importantes. A grande maioria deles trabalha o conceito de maneira intuitiva explorando a ideia dinâmica do mesmo – isso se refletiu na escolha das palavras (aproxima – foi a mais mencionada).

Um dos professores afirmou que trabalharia com números e levaria o aluno a analisar para quais valores a imagem da função iria/tenderia à medida que esses valores se aproximassem de um $x = a$ determinado.

Com relação aos limites infinitos e limites no infinito, os professores modificaram sua maneira de "falar" sobre cada um deles, mas eles mantiveram a ideia de movimento agora explicitado pelo termo "tendência". A maioria deles apresentou esse tipo de limite na forma "quando isso – então aquilo" e utilizaram palavras tais como: arbitrariamente, indefinidamente, crescem cada vez mais, etc. Nenhum professor mencionou – explicitamente – que a maneira de "ler" a igualdade se modifica, mas deixaram essa indicação implícita na maneira que escreveram sobre esses limites.

Um fato que chamou nossa atenção foi a inversão que alguns professores fizeram ao falarem de limite infinito e de limite no infinito. Novamente, eles não foram claros com relação à utilização de mais de um registro, mas falaram de valores assumidos pela função. Chama nossa atenção, também, o fato de os professores não falarem em *x*, em pontos do domínio para valores arbitrariamente grandes; tão pouco, em regiões (ou intervalos) próximos aos pontos considerados.

A igualdade, ao mencionarmos os limites infinitos, também é lida como tendência e não valor. Isso fica explicito na maneira como o professor apresenta os limites infinitos e limites no infinito, mas será que essa leitura, por si só, garantiria a compreensão desses detalhes por parte dos alunos?

Com relação às indeterminações, os professores foram sucintos, eles afirmaram trabalhar com as indeterminações mais comuns (ou triviais – e aqui podemos nos perguntar: o que seria trivial para os alunos?); outros professores afirmaram que trabalham com exemplos (dois professores) – mas, não deram nenhum desses exemplos. Um deles afirmou que mostra que as indeterminações básicas ($\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$) podem ser qualquer número. Essas indeterminações chamadas básicas foram as mais citadas pelos professores.

A parte considerada a mais delicada do estudo de limites pelos professores foi bastante diversificada, mas girou em torno da compreensão do conceito. Apenas um professor afirmou que o aluno tem dificuldade com o cálculo do limite. E outro afirmou que a dificuldade seria dar um significado/sentido para o conceito.

Cada um deles apresentou uma dificuldade – desde a aceitar/compreender a ideia de próximo, relacionar grandezas muito pequenas e muito grandes, a definição rigorosa da definição de limite e o fato do limite de uma função num ponto existir ainda que a função não esteja definida nesse ponto.

Pedimos aos professores que apontassem as dificuldades mais importantes observadas por eles nos alunos com relação ao estudo de limite e que justificassem suas escolhas. Só encontramos duas repetições nas respostas – a definição formal do limite foi apontada como uma das dificuldades. E, também, a manipulação algébrica das funções e a compreensão dos gráficos das mesmas.

Alguns professores afirmaram que não trabalhariam com a definição formal de limite. Esse resultado é semelhante ao encontrado por Reis (2001) que apontou que alguns autores de livros didáticos para o ensino de Cálculo ou Análise também rejeitaram um ensino de Cálculo fundamentado no conceito de Weierstrass de limite e continuidade.

Ao final do questionário foi reservado um espaço para que o professor – se quisesse – falasse mais livremente. A questão foi assim colocada: Fique à vontade para fazer algum comentário relacionado ao estudo de limites no Cálculo Diferencial. Três professores deixaram a questão em branco, o que representa um terço do total. Seis professores responderam e forneceram elementos significativos para refletirmos sobre a aprendizagem de limite no Cálculo.

> (P1) Se o aluno entender corretamente o conceito de limite, ele está apto a entender qualquer conceito do cálculo.
>
> (P2) No meu ponto de vista o professor deve ter em mente que o tempo que o aluno leva para amadurecer certos conceitos está diretamente relacionado com a quantidade de contato que ele tem com o conceito. Dessa forma, o professor precisará incentivar, ao máximo, este contato.
>
> (P3) Se formos dedicar o tempo necessário para que os alunos apreendam os conceitos, principalmente de limites, não conseguiremos fazer todo o curso (derivada e aplicações, integral) com o tempo que sobra da disciplina.
>
> (P4) É primordial o entendimento para o sucesso na disciplina, pois é o divisor de águas no Cálculo.
>
> (P5) A nível de introdução é bom usar a calculadora para avaliar a tendência do limite. Pode-se substituir na função valores de x próximo do valor x_0, para avaliar o que está acontecendo com os valores da função no ponto considerado.

É interessante perceber que na fala do professor P5 há implícita uma estratégia para minimizar dificuldades comuns dos alunos com relação aos termos – cada vez mais próximo, arbitrariamente grande, etc. A simples utilização da calculadora pode amenizar essas dificuldades e outras que surgem quando os alunos se deparam com questionamentos como do tipo: quando dividimos um número por outro muito grande, o resultado será um número muito grande ou muito pequeno?; quando dividimos um número por outro muito pequeno, bem próximo de zero, o resultado é um número muito grande ou muito pequeno?

Nossas Considerações

Procuramos, nesse artigo, contribuir para a reflexão relacionada ao ensino e aprendizagem do conceito de limite de uma função pela perspectiva de quem o ensina. Para tanto, buscamos os professores que já trabalham há algum tempo com o ensino de Cálculo

Diferencial e Integral porque acreditamos que essas dificuldades só poderão ser superadas com a participação dele.

Percebemos poucos elementos relacionados às suas práticas porque eles não foram muito explícitos com relação às suas metodologias. Apenas um ou outro professor indicou a maneira como trabalhava parte desse conceito em sala de aula. Ainda assim, conseguimos verificar que a grande maioria dos professores defende o ensino do limite de maneira intuitiva, mas não fazem menção ao trabalho com gráficos, com tabelas, com o registro na língua materna, se mobilizariam diferentes metodologias para isso.

A palavra mais utilizada por eles para tratarem de limite é aproximação. Mas, implícita nessa palavra há toda uma análise que precisa ser feita para compreendermos o que acontece com as funções quando consideramos determinados pontos do seu domínio.

Ao analisarmos as palavras utilizadas pelos professores para falarem dos limites infinitos e dos limites no infinito encontramos termos que não são nada comuns para nossos alunos tais como: arbitrariamente, indefinidamente, valores muito grandes ou pequenos, etc. Falar de tendência é falar de aproximações. O limite pode ser visto como um valor e como uma tendência. A igualdade aqui merece destaque porque há a forma explícita de se escrever que o limite de uma função "é igual a infinito", mas que na verdade tem outro significado. A leitura é outra: há medida que um x do domínio da função se aproxima de determinado valor a, a função (e aqui estamos falando da imagem dela) cresce arbitrariamente (infinitamente). Já sabemos que o infinito não é número, mas a maneira de escrever é a mesma tanto quanto o resultado é um número finito quanto estamos falando de tendência. Isso gera dificuldade de compreensão por parte do aluno, como indicaram os estudos que compuseram nosso estudo.

A outra leitura relaciona-se ao limite no infinito. Nesse caso, nosso x está crescendo – indo para valores muito grandes – e a função (ou sua imagem) aproxima-se de zero. Aqui encontramos outra dificuldade porque o aluno poderá ter problemas em pensar sobre esse número muito grande. O que seria um número muito grande? 100? 1.000? 1.000.000? Não temos esse número de maneira explícita, mas chegamos em um resultado finito (ou nulo).

Com relação às indeterminações, consideramos uma parte delicada do estudo de limite, mas os professores (em sua maioria) não explicitaram a maneira que trabalham com as mesmas em sala de aula. Não há nada similar às indeterminações nos estudos realizados pelos alunos até o ensino médio. Precisamos lembrar que levantar a indeterminação de uma função é um método para encontrarmos a solução para o cálculo do valor do limite de outra maneira, mas compreender uma indeterminação é entender o porquê daquela situação se constituir em algo indeterminado. É preciso ter cuidado para que o aluno não relacione a palavra “indeterminado” com “sem solução”.

Percebemos nas falas dos nossos informantes pouca menção à história da matemática em sala de aula. Fala-se dos conceitos, trabalha-se com eles de maneira algébrica/procedimental – mas sem nenhuma referência ao desenvolvimento do mesmo – isso poderá contribuir para o apagamento das vozes que estariam por trás desse desenvolvimento.

As dificuldades mais importantes observadas pelos professores com relação à aprendizagem dos alunos foram, entre outras: a definição formal do limite e a manipulação algébrica das funções e a compreensão dos seus gráficos. Alguns professores afirmaram que não trabalhariam com a definição formal de limite. Esse resultado é semelhante ao encontrado por Reis (2001) que apontou que alguns autores de livros didáticos de Cálculo ou Análise também rejeitaram um ensino de Cálculo fundamentado na definição de Weierstrass de limite e continuidade. Guerra (2012), ao entrevistar professores que trabalhavam com esses conteúdos para alunos não universitários, encontrou essa mesma indicação de que a dificuldade vem do fato do conceito ser bastante abstrato.

Ao falarem da definição formal de limite, alguns professores utilizaram os termos vizinhança, aproximações. E, pela primeira vez, eles mencionaram trabalhar com mais de um registro em sala de aula. Um deles chegou a explicitar que utilizava gráficos para mostrar o “dado épsilon”, “existe um delta”.

Chamou nossa atenção a linguagem utilizada por alguns professores para explicar a definição. Na nossa perspectiva, essa explicação não se constitui verdadeiramente em uma explicação, mas em uma “leitura” da mesma. E, então, nos perguntamos: Que visão o professor universitário teria de explicação? Como seria para ele traduzir/decodificar o simbólico para o aluno?

Finalizando nosso artigo, gostaríamos de enfatizar que acreditamos que algumas das dificuldades apontadas aqui poderiam ser superadas se os professores trabalhassem simultaneamente com diferentes registros. O que a parte algébrica não consegue “mostrar” pode ser facilmente visualizada por meio de gráficos que representam determinadas funções. As tabelas também são de extrema importância para o aluno compreender a ideia de tendência - se elas forem trabalhadas com os gráficos (ou com softwares). Há também o registro na língua materna que acaba sendo ignorado por muitos. Parece não haver “espaço” para trabalharmos com a escrita nas aulas de matemática.

É fundamental que outros estudos tenham a prática do professor universitário como objeto de pesquisa. A grande maioria dos trabalhos que compuseram a revisão bibliográfica da nossa investigação tiveram como foco o aluno e suas dificuldades identificando-as ou propondo estratégias para o ensino de determinado conceito. O professor universitário não aparece nesses trabalhos, aquele que propõe a intervenção costuma ser o próprio pesquisador. Alguns trabalhos, como os de Barbosa (2004), Mastories e Zachariades (2004) e Guerra (2012), trazem elementos para pensarmos sobre a percepção que o professor tem das dificuldades dos alunos.

Para concluir, inferimos que há uma série de estratégias que precisam ser implementadas para que novas reflexões sejam feitas com relação à dificuldade do aluno em aprender o conceito de limite, sem esquecermos que seria – de suma importância – a participação efetiva do professor universitário. Um trabalho colaborativo de professores de matemática com professores de educação matemática seria, no nosso ponto de vista, um caminho para a aprendizagem e partilha dessas vivências e desses olhares.

Bibliografia

ABREU, Osvaldo Honório de; REIS, Frederico da Silva. Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, n. 3, p. 439-459, 2011.

AMORIM, Marília – **O pesquisador e seu outro** – Bakhtin nas Ciências Humanas, Musa Editora, São Paulo, 2004.

BAKHTIN, Mikhail - **Estética da Criação Verbal**, Martins Fontes, São Paulo, 2003.

BARBOSA, Marco Antonio – **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**, Dissertação de mestrado, PUC-PR, Curitiba, 2004.

BARROS, Diana L P de – Contribuições de Bakhtin às teorias do discurso. In: BRAIT, Beth (org) – **Bakhtin, dialogismo e construção do sentido**, 2ª edição revisada, Editora da Unicamp, Campinas, 2005.

CASTRO, Concepción V; FERNANDEZ, Carlos Sánchez - Historia y rigor en una iniciación al cálculo: una experiencia cubana - In: **Educ. Matem. Pesq**, São Paulo, v.13, n.3, pp.581-596, 2011.

CORNU, Bernard – **Aprentissage de la notion de limite – Conceptions et obstacles** – These de doctorat de Troiseme Cycle de Mathematiques Pures – L' Université Scientifique et Medicale de Grenoble, 1983.

_______________- Limits – (p.153-165) In: TALL, David (Ed) - **Advanced Mathematical Thinking** – Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publisher, New York, 2002.

GUERRA, Rita Catarina C – **Aprendizagem do conceito de limite** – Dissertação, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, 2012.

JORDAAN, Tertia – **Misconceptions of the limit concept in mathematics course for engineering students**, master of education, university of South Africa, 2005.

MASTORIDES, E; ZACHARIADES, T – **Secondary mathematics teacher's knowledge concerning the concept of limit and continuity**, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004 Vol 4 pp 481–488.

REIS, Frederico da Silva – **A tensão entre o rigor e a intuição no ensino de cálculo e análise**: a visão de professores – tese de doutorado, FE/Unicamp, 2001.

SANTOS, Maria Bethânia S dos – **Um olhar para o conceito de limite**: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado. Tese de doutorado, PUC/SP, 2013.

SANTOS, Sílvia P dos; MATOS, Márcia G de O – O ensino de cálculo I no curso de licenciatura em matemática: obstáculos na aprendizagem - **Revista Eventos Pedagógicos** v.3, n.3, p. 458 - 473, ago. – Dez 2012.

TALL, David. **Intuitive infinitesimals in the calculus**. Poster presented at the Fourth International Congress on Mathematical Education, Berkeley, 1980, with abstract appearing in Abstracts of short communications. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980c-intuitive-infls.pdf. Acesso em: 01/2016.

Recebido em: 28/02/2016
Aprovado em: 28/04/2017