revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PENSAMENTO ALGÉBRICO: EM BUSCA DE UMA DEFINIÇÃO

Jadilson Ramos de Almeida[1]
Marcelo Câmara dos Santos[2]

Resumo: Esse texto trata de um artigo teórico que tem por objetivo apresentar uma caracterização de pensamento algébrico. Acreditamos que esse artigo seja relevante pelo fato de não existir um consenso entre os pesquisadores sobre uma definição de pensamento algébrico, como nos coloca Radford (2006). Diante disso, resolvemos construir nossa caracterização dessa forma de pensar levando em consideração três perspectivas diferentes, a de Rômulo Lins, a de James Kaput e a de Luis Radford, três pesquisadores que desenvolveram trabalhos significativos sobre o tema. Após nossas análises, acreditamos que o pensamento algébrico é composto pelas seguintes características: "estabelecer relações"; "modelar"; "generalizar"; "operar com o desconhecido"; e "construir significado".
Palavras-chaves: Álgebra escolar. Caracterização. Pensamento algébrico.

ALGEBRAIC THINKING: IN SEARCH OF A DEFINITION

Abstract: This theoretical article aims to present a characterization of algebraic thinking. We believe that this article is relevant, because there is no consensus among researchers on a definition of algebraic thinking, as stated by Radford (2006). Thus, we decided to construct our characterization of this way of thinking taking into account three different perspectives, Rômulo Lins's, James Kaput's and Luis Radford's, three researchers who have developed significant works on the subject. After our analyzes, we believe that algebraic thinking is composed of the following characteristics: "establishing relationships"; "modeling"; "generalizing"; "operating with the unknown"; and "building meaning".
Keywords: School algebra. Characterization. Algebraic thinking.

Introdução

Apesar de existir um consenso entre os pesquisadores da área de educação matemática da importância de levar o estudante a desenvolver o pensar algebricamente, esse consenso não existe quando nos referimos ao conceito de pensamento algébrico. Radford (2006) lembra que se ainda não temos uma caracterização definitiva para pensamento algébrico, isso se deve possivelmente ao "extenso escopo de objetos (por exemplo, equações, funções, padrões, ...) e processos algébricos (inversão, simplificação, ...) bem como os vários modos possíveis de conceber o pensamento em geral" (p.2, tradução nossa).

É, diante desse fato, que decidimos escrever esse artigo, que tem por objetivo construir

[1]Doutor em Ensino das Ciências e Matemática. Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE. E-mail: jadilsonalmeida@hotmail.com.
[2]Doutor em Ciências da Educação. Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. E-mail: marcelocamaraufpe@yahoo.com.br.

uma caracterização de pensamento algébrico com base em perspectivas de diferentes pesquisadores. Acreditamos que a caracterização aqui discutida poderá ajudar professores que ensinam matemática na educação básica a planejarem suas aulas com o intuito de desenvolver essa forma de pensar, além de contribuir com os pesquisadores da área de educação matemática que têm dificuldades em encontrar uma caracterização de pensamento algébrico na literatura em português.

Kieran (1992), uma das pesquisadoras em educação matemática dedicada a investigar esse fenômeno, buscou fazer uma diferenciação entre o pensamento aritmético e o algébrico. Para ela o pensamento aritmético está intimamente ligado ao cálculo e à realização de operações na procura de um resultado, enquanto que o pensamento algébrico está relacionado com as estruturas e ao "uso de uma variedade de representações que permitem lidar com situações quantitativas de uma forma relacional" (p.4).

Pesquisadores como Schliemann, Carraher, Brizuela (2012), Lins (1992, 1994a, 1994b), Arcavi (2005), Kaput (1999, 2008), Blanton e Kaput (2005), Silva e Savioli (2012, 2014), Radford (2006, 2009, 2011a, 2011b), dentre outros, adotam uma postura próxima à de Kieran. Eles tendem a entender pensamento algébrico como ações acerca de situações quantitativas, ou não, percebendo e generalizando as relações entre as informações contidas nessas situações. Além disso, defendem a ideia de que o pensamento algébrico pode ser revelado por diferentes linguagens, como a gestual, natural, pictórica e simbólica.

Para construir nossa caracterização de pensamento algébrico iremos nos basear, principalmente, nos trabalhos de Rômulo Lins, James Kaput e Luis Radford. Por conta disso, esse artigo foi construído com as seguintes seções: "pensamento algébrico na perspectiva de Rômulo Lins"; "pensamento algébrico na perspectiva de James Kaput; "pensamento algébrico na perspectiva de Luis Radford". Por fim, concluímos, a partir dessas perspectivas, com a caracterização de pensamento algébrico adotada por nós nesse artigo.

Pensamento algébrico na perspectiva de Rômulo Lins

Rômulo Lins (1992), em sua tese de doutorado intitulada "A framework for understanding: what algebraic thinking is[3]", destaca que pensar algebricamente é uma maneira, entre outras, de produzir significado para a álgebra. Nesse sentido, para esse autor o aluno está pensando algebricamente quando ele consegue construir significado para os objetos algébricos, como as equações e inequações. Quando o aluno consegue perceber regularidades em operações aritméticas, como a propriedade comutativa, ou quando ele consegue perceber, por exemplo, quando o "X" está representando uma incógnita (em uma equação) ou uma variável (em uma função).

A produção de significado para os objetos e os símbolos algébricos como elemento caracterizador do pensamento algébrico também é proposto por Arcavi (2005). Ele lembra que o essencial no desenvolvimento do pensamento algébrico é a construção do sentido para os símbolos, em especial os símbolos algébricos, ou seja, para esse pesquisador, assim como para Rômulo Lins, o aluno está pensando algebricamente quando constrói significado para os objetos e a linguagem algébrica.

Para discutir a construção de significado em álgebra Rômulo Lins utiliza como referencial o "Modelo Teórico dos Campos Semânticos[4]" (MTCS).

> O MTCS é um modelo epistemológico que propõe que *conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação para a crença-afirmação*. Indicamos, desta forma, que conhecimento é algo do domínio da enunciação – e que, portanto, todo *conhecimento* tem um sujeito – e não do domínio do *enunciado*; podemos também expressar este fato dizendo que *conhecimento* é do domínio da *fala*, e não do *texto*. Desde este ponto de vista, a matemática é um *texto*, e não *conhecimento*; tem-se *conhecimento* apenas na medida em que pessoas se dispõem a *enunciar* este *texto* (LINS, 1994b, p.29).

Nesse sentido, para esse autor um objeto matemático só se torna conhecimento quando ele passa a ser enunciado por um indivíduo, ou seja, o conhecimento não está no texto, mas, no sujeito.

Ainda segundo Lins (1994b, p.31), "um campo semântico é um modo [como outro] de produzir significado". Ele nos coloca que podemos construir significado para uma equação em diferentes campos semânticos como, por exemplo, o campo da "balança de dois pratos" ou o campo do "pensamento algébrico".

[3] Um quadro para a compreensão do que é pensamento algébrico
[4] Mais elementos desse modelo é encontrado em Lins (1992, 1994a, 1994b)

Para entender a diferença entre esses dois campos semânticos, Lins (1994a) nos coloca que quando um aluno resolve uma equação não significa, necessariamente, que ele está pensando algebricamente. Quer dizer, um aluno pode responder facilmente a equação 3X + 10 = 100, utilizando como técnica, por exemplo, o "modelo da balança de dois pratos", no qual deve ter um equilíbrio entre os pratos. Entretanto, isso não é o suficiente para garantir que ele compreendeu a equação enquanto uma relação de igualdade numérica, e que o "X" é um número desconhecido a ser encontrado.

Por conta disso, esse mesmo aluno pode encontrar dificuldades para responder a equação 3X + 100 = 10, uma vez que essa equação não tem sentido no "modelo da balança". Para que um aluno consiga responder a essa equação ele tem que ter construído o significado de equação como igualdades numéricas, ou seja, perceber que existe uma relação entre o primeiro e o segundo membro da equação e, por conta dessa relação é possível, por exemplo, subtrair 100 do primeiro e do segundo membro e encontrar uma equação equivalente à primeira. Compreender uma equação dessa forma caracteriza, segundo Lins (1992), que o aluno está pensando algebricamente.

Diante da complexidade do que seja pensar algebricamente, Lins (1992) apresenta, em sua pesquisa, três vertentes dessa forma de pensar, são elas: "pensar aritmeticamente" (aritmeticismo), "pensar internamente" (internalismo) e "pensar analiticamente" (analiticidade).

- ***Aritmeticismo*:** nessa vertente do pensamento algébrico o objeto de trabalho é exclusivamente números, operações aritméticas e uma relação de igualdade. Nessa perspectiva, é no bojo da linguagem aritmética que o pensamento algébrico emerge nas suas primeiras características.

  Ainda segundo Lins (1992, p.12, tradução nossa) "aritmeticismo significa precisamente 'modelar em números', o que naturalmente implica a utilização das operações aritméticas a fim de produzir as relações que constituem o modelo". Portanto, podemos dizer que nessa vertente do pensamento algébrico os números e as operações aritméticas são vistos como ferramentas no intuito de resolver, ou modelar, determinadas situações. Parece estranho essa caracterização de pensamento algébrico, uma vez que não trata, em nenhum momento, de uma linguagem algébrica. Entretanto, não é a linguagem utilizada para revelar o pensamento que determina a forma que o sujeito está pensando.

Além disso,

> [...] não há nenhum problema em dizer que "número é qualquer elemento do conjunto de base de uma estrutura algébrica". Outros autores colocam restrições, por exemplo, que essa estrutura algébrica tenha duas de tal e tal tipo, mas isso não é realmente necessário. Segundo nosso ponto de vista, números naturais, inteiros, reais e complexos são números, mas também o são: polinômios, vetores, matrizes, permutações, conjuntos, e assim por diante, *sempre que estiverem sendo considerados do ponto de vista da estrutura algébrica correspondente*. Por outro lado, o que caracteriza a "verdadeira" operação aritmética é a "sensação" de se estar "fazendo uma conta": dois elementos são associados para "produzir" um terceiro. É essa característica – forte – das operações aritméticas "verdadeiras" que persiste nas leis de composição da álgebra abstrata, de modo que não vemos inconveniente em utilizar a nomenclatura que adotamos, de modo a preservar o *insight* que ela oferece (LINS; GIMENEZ, 1997, p.152).

- ***Internalismo***: implica considerar os números e as operações apenas segundo as suas propriedades, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade. "As propriedades destes objetos, que sustentam a ação dos alunos, não fazem referência a coisa alguma fora do domínio desses objetos" (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p.101). Portanto, nessa segunda vertente do pensamento algébrico o foco é na possibilidade que temos de "distinguir soluções internas, isto é, aquelas produzidas dentro das fronteiras dos campos semânticos dos números e das operações aritméticas" (LINS, 1992, p.14).

Nessa vertente do pensamento algébrico os números são tratados como objetos de estudo, deixando de servir como ferramentas na resolução ou modelação de situações problemas.

Lins (1992, p.14 – 15, tradução nossa) destaca que

> [...] é uma característica do pensamento algébrico que as operações aritméticas se tornem objetos, ao mesmo tempo que são usadas como ferramentas e esta é apenas uma consequência do conjunto de requisitos do *aritmeticismo* e do *internalismo* do pensamento algébrico.

Portanto, podemos perceber que não existe uma fronteira clara e definida, segundo Lins (1992), entre o pensar no aritmeticismo ou no internalismo. Na verdade, o pesquisador não busca, em sua tese, definir quando o aluno está pensando em uma ou outra vertente do pensamento algébrico. Para ele, o aluno está pensando algebricamente quando mobiliza os elementos das três vertentes ao mesmo tempo.

- ***Analiticidade***: nessa vertente o pensamento algébrico é caracterizado como um método de procura de verdades no qual o “desconhecido é tratado como conhecido” (LINS, 1992, p.16), ou seja, os números genéricos são tidos exatamente como se fossem específicos e as “incógnitas” são tidas exatamente como se fossem “dados”.

  Por exemplo, nessa vertente do pensamento algébrico as expressões algébricas que formam uma equação são manipuladas segundo as leis da aritmética, isto é, os elementos desconhecidos, como o “X”, são tratados como valores conhecidos, para que possam ser geradas equações equivalentes até encontrar o desconhecido, ou seja, o “X”. Lins (1992) destaca que nessa vertente do pensamento algébrico “os elementos "desconhecidos" devem ser manipulados com base em propriedades gerais para a classe de objetos a que pertencem, e não como uma manipulação real de um determinado, específico, objeto” (p.15).

Diante disso, podemos concluir que pensar algebricamente, de acordo com as ideias de Rômulo Lins, nada mais é do que “produzir significado para as situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdade ou desigualdades), e como base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com [o aritmeticismo, o internalismo e a analiticidade]” (LINS; GIMENEZ, 1997, p.151).

Apesar de em sua definição de pensamento algébrico Lins (1992) falar de “transformismo”, ele destaca que essa forma de pensar não é revelada apenas por meio de uma notação, ou linguagem, simbólica-literal. Mesmo defendendo a ideia de que “a notação algébrica compacta tal como se desenvolveu a partir de empréstimos da notação da aritmética – não só é possível no contexto do pensamento algébrico, mas também adequada” (LINS, 1992, p.17). Porém, para esse autor, o transformismo algébrico dentro de sua caracterização de pensamento algébrico não acontece de forma mecanizada.

Para compreender o que esse autor quer dizer temos o exemplo a seguir, o qual mostra os possíveis passos para se chegar na solução de uma equação.

$$2X + 5 = 25$$

I. $2X = 25 - 5$

II. $2X = 20$

III. $X = \frac{20}{2}$

IV. $X = 10$

Para Lins (1992) se o aluno realiza os passos (I), (II), (III) e (IV) de forma mecanizada, ou seja, seguindo o modelo apresentado pelo professor, sem entender o significado de cada operação realizada, ele, o aluno, de forma alguma está pensando algebricamente.

Entretanto, se o aluno entender que esses passos são realizados de acordo com as propriedades das operações aritméticas em relação a uma igualdade, ou seja, perceber que em uma igualdade se subtrairmos ou dividimos (no caso do exemplo colocado) o mesmo valor de ambos os membros, encontraremos uma equação (ou expressão) equivalente, ele está demonstrando pensar algebricamente ao resolver essa equação.

Pensamento algébrico na perspectiva de James Kaput

Kaput (2008) classifica a álgebra como uma atividade humana, portanto, assim como Lins (1992), para Kaput o conhecimento está no sujeito e não no objeto. Logo, não é pelo fato de um aluno visualizar uma equação, como por exemplo 2X + 10 = 100, que ele a percebe como um objeto algébrico. Podemos dizer o mesmo para o processo de resolução, isto é, o aluno que responde essa equação não significa, necessariamente, que ele esteja fazendo álgebra, ou trabalhando no mundo algébrico.

Acreditamos que um aluno esteja no mundo algébrico quando compreende ou constrói significado para a equação, no sentido colocado por Kaput (1999) e Lins (1992). Ou seja, um sujeito está visualizando ou respondendo uma equação como um objeto algébrico quando ele está pensando algebricamente, quando entende a equação como uma relação de equivalência entre o primeiro e o segundo membro e para respondê-la deve encontrar um valor para o "X" que torne a igualdade verdadeira.

Diante disso, Kaput (1999, 2008) destaca que o pensamento algébrico é uma atividade exclusivamente humana que surge das generalizações estabelecidas, como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais formal, usada na argumentação. Segundo ele esse processo pode ocorrer com base em situações aritméticas, geométricas, de modelação matemática ou em quaisquer outras situações matemáticas, surgindo como um prolongamento do raciocínio que vai além dos casos particulares.

Blanton e Kaput (2005 p.413, tradução nossa) chegam a caracterizar pensamento algébrico como um

> [...] processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem essas generalizações por meio de discurso argumentativo, e as expressam de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade.

Para esses pesquisadores as generalizações podem ser expressas pelos alunos por meio de diferentes linguagens, como a natural, gestual, numérica ou simbólica. O que determina a linguagem utilizada é, segundo Blanton e Kaput (2005) e Radford (2009), o nível de experiência dos alunos.

Entretanto, vale lembrar que quando esses autores falam de nível de experiência dos alunos não significa dizer que o nível está, necessariamente, vinculado à idade, ou seja, os alunos mais experientes não são, prioritariamente, os mais velhos, mas, sim, os que tiveram maior contato com situações de ensino que promovam, por exemplo, a capacidade de realizar generalizações de padrões numéricos.

Continuando, Kaput, Blanton e Moreno (2008) destacam ainda que no cerne do pensamento algébrico estão, essencialmente, os significados, está o uso de uma linguagem simbólica como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão.

Apesar de colocar os símbolos no cerne do pensamento algébrico, não significa, para esses pesquisadores, reduzi-lo ao transformismo algébrico, muito pelo contrário, o mais importante é a construção de significado, é o pensamento com compreensão. Não é olhar os símbolos que caracteriza o pensamento algébrico, porém, olhar por meio dos símbolos, é entender o que cada símbolo significa, por exemplo, em uma equação, ideias que são compartilhadas com outros pesquisadores, como Lins (1992) e Arcavi (2005).

Ainda de acordo com Kaput (2008) existem dois aspectos centrais do pensamento algébrico. O primeiro é a "generalização e a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais" (CANAVARRO, 2007, p.88), que está relacionado com o *pensamento representacional*, reservado para designar os processos mentais pelos quais um sujeito constrói significado num sistema de representação (SMITH, 2008).

O segundo aspecto é o "raciocínio e ação sintaticamente orientada sobre as generalizações expressas em sistemas de símbolos organizados" (CANAVARRO, 2007, p.88), que está associado ao *pensamento simbólico*, ou seja, à forma como o indivíduo compreende e usa um sistema de símbolos e as respectivas regras, focando-se nos símbolos propriamente ditos (SMITH, 2008).

Esses dois aspectos centrais do pensamento algébrico dão origem a três vertentes dessa forma de pensar. A *"aritmética generalizada ou pensamento quantitativo"*, o *"pensamento funcional"* e a *"modelação"*.

- ***Aritmética generalizada ou pensamento quantitativo***: essa vertente do pensamento algébrico tem por base o potencial caráter algébrico da aritmética, que deve ser explorado explicitamente de forma sistemática, revelando a sua generalidade. Esse caráter algébrico da aritmética é tomado como base para a caracterização de pensamento algébrico proposta por Lins (1992). Para sua definição de pensamento algébrico, Lins (1994b) caracteriza álgebra como "um conjunto de afirmações a respeito de relações aritméticas, em que por *aritméticas* [entendemos] relações envolvendo apenas operações finitas e homogêneas, precisamente no sentido das leis de composição da álgebra moderna" (p.30).

  Já para Canavarro (2007, p.89)

  > [...] é a partir da estrutura da aritmética que se podem construir os aspectos sintáticos da álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido por meio do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que 33 + 8 = 8 + 33 não porque ambos representam 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente).

  No cerne da álgebra como aritmética generalizada está a generalização acerca das operações aritméticas e suas propriedades e o pensamento sobre relações entre números (Kaput, 2008). Porém, podemos encontrar outros aspectos que podem fazer parte dessa vertente do pensamento algébrico, tais como os propostos por Blanton e Kaput (2005):

- *Explorar propriedades e relações de números inteiros*: esse aspecto caracteriza-se pela generalização sobre somas e produtos de números pares e ímpares; generalização de propriedades como o resultado de uma subtração de um número por ele mesmo, chegando a formalizar com "a – a = 0"; decomposição de números inteiros em possíveis somas e examinar a estrutura dessas somas.
- *Explorar propriedades das operações com números inteiros*: nesse aspecto concentra-se a exploração de relações entre operações aritméticas com números inteiros, como a comutatividade da adição e da multiplicação, ou a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação; generalizações em operações, como adicionar ou subtrair o mesmo valor.
- *Explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade*: nesse aspecto encontramos a exploração do papel algébrico do sinal de "=" usando a ideia de equivalência entre expressões numéricas do tipo 8 + 4 = □ + 5; da mesma forma, tratar equações como objetos que expressam relações entre quantidades, como (3 x n) + 2 = 14.
- *Tratar o número algebricamente*: consiste em compreender o número como número generalizado, enfatizando sua estrutura e não seu valor. Por exemplo, se um aluno se deparar com as seguintes questões: 7 + 5 é par ou ímpar? E 45678 + 85631? É par ou ímpar? A resposta dele deve ser baseada na estrutura dos números e não no resultado das adições.
- *Resolver expressões numéricas com número desconhecido (equações simples)*: nesse aspecto concentra-se a resolução de equações polinomiais do 1º grau simples com uma incógnita; a resolução de equações com incógnitas repetidas, por exemplo, se V + V = 4, quanto é V + V + 6? A resolução de equações no contexto da reta numérica; completar puzzles numéricos no qual faltam números, como, por exemplo, o quadrado mágico.

- ***Pensamento funcional***: Caracteriza-se pela generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, além de perceber as relações de variações e (co)variações. Nessa vertente do pensamento algébrico a generalização surge por meio da ideia de função.

> O aspecto sintático da álgebra surge aqui para descrever regularidades por meio de símbolos ou para alterar a forma das expressões que traduzem regularidades, para comparar diferentes expressões relativas à mesma regularidade ou para determinar valores particulares de uma função motivada, por exemplo, pela necessidade de previsão (CANAVARRO, 2007, p.90).

No pensamento funcional é possível elencar diversos aspectos revelados pelos alunos, como nos colocam Blanton e Kaput (2005), tais como:

- *Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas*: refere-se aos casos em que são utilizados símbolos para modelar problemas ou operar com expressões simbólicas, não no sentido de resolução de equações ou na generalização das propriedades das operações aritméticas, mas, no sentido, por exemplo, do

> [...] contexto de mensagens secretas que são códigos simbólicos para fazer conversões de unidades: *3 ft 5 in* corresponde a 3(12) + 5, pois a mensagem secreta para conversão de pés *(feets)* em polegadas *(inches)* é F(12) + I, em que F representa o número de pés e I o número de polegadas, funcionando, assim, a mensagem secreta como função e F como variável (CANAVARRO, 2007, p.90).

- *Representar dados graficamente*: refere-se à construção de gráficos, como os de pares ordenados, para representar uma relação funcional, além de utilizar o gráfico para analisar variações de uma função.
- *Descobrir relações funcionais*: refere-se à exploração de correspondência entre quantidades; à exploração de relações recursivas; à elaboração de regras para descrever relações funcionais; à utilização de tabelas para representar as variações; e à simbolização de regras descobertas.
- *Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos*: corresponde à

formulação de conjecturas sobre o que não se sabe, a partir do que se sabe sem, necessariamente, repetir todo o processo anterior.

- *Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos*: refere-se à identificação de regularidades de sequências numéricas; à identificação de padrões em sequências de figuras geométricas e/ou em conjuntos de expressões numéricas.

➢ ***Modelação*:** é considerada como um domínio para expressar e formalizar generalizações. Nessa perspectiva, a generalização é realizada a partir de situações matemáticas ou de fenômenos, como, por exemplo, a generalização de regularidades em situações do dia a dia na qual a regularidade é secundária relativamente ao objetivo mais geral da tarefa.

Para Kaput (2008), modelar é utilizar o aspecto sintático da álgebra para representar diversas situações, desde as essencialmente aritméticas, como problemas simples, até as ditas essencialmente algébricas, como as relações funcionais. Além disso, essa vertente do pensamento algébrico está, sobretudo, entrelaçada com as outras duas vertentes, uma vez que ela é utilizada para representar, muitas vezes, as ações realizadas nessas vertentes.

Além disso, destacamos que modelar uma situação, ou problema de estrutura algébrica, não significa, necessariamente, utilizar a linguagem simbólica da álgebra. É possível utilizar, por exemplo, a linguagem gestual, pictórica, natural, numérica ou simbólica algébrica para representar um problema algébrico.

Entretanto, temos convicção da importância do domínio, pelo aluno, da linguagem simbólica algébrica, pelo grande potencial de síntese que ela garante. Porém, o aluno deve perceber a importância da utilização dessa linguagem, e construí-la com compreensão, com significado.

Pensamento algébrico na perspectiva de Luis Radford

Para caracterizar pensamento algébrico, destacado por Radford (2006, p.2) como uma "forma particular de refletir matematicamente", esse pesquisador se apoia na teoria da objetificação do conhecimento[5], elaborada por ele, e que leva em consideração a história, a antropologia e a epistemologia do saber. Além disso, essa teoria discute a unicidade entre a linguagem e o pensamento, e destaca que o esforço para compreender a realidade conceitual e a produção de conhecimento não pode se restringir à linguagem e ao discurso, sendo necessário incluir-se, também, as práticas sociais subjacentes.

Diante disso, Luis Radford, assim como Rômulo Lins, destaca que o ser humano não desenvolve o pensamento algébrico de forma natural. Essa forma particular de pensar não é algo que se desenvolverá uma vez que a pessoa tenha um determinado amadurecimento. Para Radford (2011b, p.319, tradução nossa) "o pensamento algébrico é um tipo de reflexão e ação cultural muito sofisticado, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual".

E, o que diferencia o pensamento algébrico do aritmético é que, enquanto nesse último, lidamos com quantidades conhecidas, no pensamento algébrico lidamos com quantidades indeterminadas de uma maneira analítica, ou seja, tratamos quantidades desconhecidas (por exemplo, incógnitas ou variáveis) como se fossem conhecidas e realizamos cálculos com elas como fazemos na aritmética, com os valores conhecidos (RADFORD, 2011b).

Em um artigo de 2006, Radford caracteriza pensamento algébrico levando em consideração três elementos inter-relacionados entre si. O primeiro elemento lida com um senso de indeterminação que é próprio para objetos algébricos básicos, como incógnitas, variáveis e parâmetros. É essa indeterminação, em oposição à determinação numérica, que torna possível, por exemplo, a substituição de uma variável ou incógnita por outra, ou seja, não faz sentido fazer a substituição de 3 por 3 em aritmética, mas, em álgebra, faz sentido a substituição de uma incógnita por outra, sob determinadas condições.

O segundo elemento caracterizador do pensamento algébrico, segundo Radford (2006), é que objetos desconhecidos são manipulados analiticamente, ou seja, estamos pensando algebricamente quando conseguimos manipular, como por exemplo na resolução de uma equação, objetos desconhecidos de forma analítica. Essa forma analítica de tratar os

---

[5] Mais sobre essa teoria pode ser encontrado em Radford (2011a).

objetos desconhecidos também é defendida por Lins (1992), na *analiticidade*, como característica do pensamento algébrico.

Já o terceiro elemento do pensar algebricamente é o modo particular simbólico de designar objetos. Para explicar esse elemento do pensamento algébrico, Radford nos remete a uma reflexão de Kant, filósofo alemão do século 18, que diz que enquanto os objetos da geometria podem ser representados ostensivamente, incógnitas, variáveis e outros objetos algébricos só podem ser representados indiretamente, por meio de construções baseadas em sinais.

O simbolismo alfanumérico é, de fato, considerado como o sistema semiótico da álgebra por excelência. No entanto, a partir de uma perspectiva semiótica, os sinais também podem ser algo muito diferente. Palavras ou gestos, por exemplo, são sinais por conta própria, – "semioticamente" falando, eles podem ser sinais genuinamente algébricos, como as letras. Claro que isso não significa que eles são equivalentes ou que podemos simplesmente substituir um por outro. O que torna o sistema semiótico único e insubstituível é o seu modo de significar. Há coisas que podem ser representadas por certos sinais, e ter significado, e há coisas que não (RADFORD, 2009, p.35).

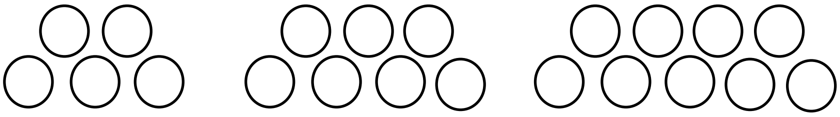
A história da matemática mostra, por exemplo, que a álgebra pode ser feita recorrendo a outros sistemas semióticos, como, por exemplo, fichas coloridas movidas em uma mesa de madeira, como usado por matemáticos chineses durante todo o século I a.C., ou desenhos geométricos, usados por escribas babilônicos no século XVII a.C. (RADFORD, 2006).

Assim como Lins (1992) e Kaput (2008), Radford (2009) classifica pensamento algébrico em três vertentes, ou como o próprio Radford chama, três formas diferentes de pensar, são elas:

- ✓ "factual algebraic thinking" – "pensamento algébrico factual";
- ✓ "contextual algebraic thinking" – "pensamento algébrico contextual";
- ✓ "standard algebraic thinking" – "pensamento algébrico padrão".

Para descrever essas formas de pensamento algébrico, Radford (2009) utiliza as ações de alunos, trabalhando em grupos de três, em uma atividade de generalização de padrões. A atividade trazida como exemplo por esse pesquisador para explicar as formas de pensamento algébrico consiste em desenhar a figura 4 e 5 da sequência mostrada na figura 1 a seguir, e descobrir o número de círculos nas Figuras 10 e 1001. A segunda parte da atividade consiste em escrever uma mensagem para um aluno de outra classe indicando como descobrir o número de círculos em qualquer figura, e, em seguida, escrever uma fórmula algébrica para o número de círculos na figura n.

Figura 1: Atividade sobre sequência de padrões.



Fonte: Radford (2009)

Temos, nas seções seguintes, o detalhamento de cada forma de pensar algebricamente propostas por Radford.

- **Pensamento algébrico factual:** também chamado por Radford, em alguns momentos, de pensamento algébrico concreto, está intimamente relacionado com situações mais particulares. Nessa forma de pensar algebricamente a indeterminação, o desconhecido (a incógnita) permanece implícita. Gestos, palavras e ritmo constituem a essência semiótica dos estudantes. É, nessa forma de pensar, que os estudantes têm condições de construir, o que Radford (2009) chama de “fórmulas-em-ação”, expressão que o próprio Radford declara ter tomada emprestada de Vergnaud, com algumas modificações.

  O aluno que utiliza essa forma de pensamento algébrico consegue responder a primeira parte da atividade representada na figura 1, ou seja, consegue desenhar as figuras 4 e 5, pois percebe que o número de círculos aumenta em dois de uma figura à outra. O aluno também é capaz de objetificar[6] uma regularidade: “a relação entre o número da figura e o número de círculos nas suas linhas” (RADFORD, 2009, p.39).

  Entretanto, Radford (2009) destaca que para determinar o número de círculos nas figuras 100, 1 000 ou 10 000, identificar a regularidade não é suficiente. A

[6] Objetificar é “um processo ativo e dinâmico no qual o sujeito se dá conta de um objeto conceitual da cultura e o transforma em um objeto de sua consciência” (GOMES, 2016, p.78).

regularidade tem que ser generalizada, ou seja, o aluno tem que construir uma fórmula para calcular o número de círculos de qualquer figura. Porém, a fórmula construída por um aluno que se encontra nessa forma de pensar não é constituída por símbolos essencialmente algébricos, como os sinais alfanuméricos, ou seja, números e letras.

Por exemplo, o aluno é capaz de perceber que para calcular o número total de círculos da figura 10, basta somar 1 ao 10 para encontrar o número de círculos da linha superior, que nesse caso é igual a 11, e somar 2 ao 10 para encontrar o número de círculos da linha inferior, que é igual a 12. Logo, o total de círculos da figura 10 é igual à soma dos círculos da linha superior com o total de círculos da linha inferior, ou seja, 23 círculos. Para calcular o número de círculos da figura 100 o estudante utiliza a mesma estrutura, ou seja, 101 + 102, que é igual a 203 círculos.

Percebemos, então, que a fórmula construída por um aluno que se encontra nessa forma de pensar está fortemente relacionada a números particulares, por isso Radford a chama de fórmula-em-ação. “A ‘fórmula’ desta forma concreta do pensamento algébrico pode ser entendida como um predicado concretizado por uma variável implícita: indeterminação não chega ao nível do discurso” (RADFORD, 2009, p.40, tradução nossa).

A indeterminação ou incógnita é considerada como um espaço vazio a ser preenchido pela eventual substituição de termos particulares. Nesse sentido, a generalização, nessa forma de pensar algebricamente, ocorre dentro de uma camada primária de generalidade e em um universo de discurso que não excede números específicos, como a figura 1 000, figura 3 245, e assim por diante (RADFORD, 2009).

Embora essa forma de pensamento algébrico ocorra dentro de uma camada primária de generalidade, Radford (2009, p.40, tradução nossa) afirma que

> [...] apesar de sua natureza aparentemente concreta, pensamento algébrico factual não é uma forma simples de reflexão matemática. Pelo contrário, ele repousa sobre mecanismos altamente evoluídos de percepção e uma sofisticada coordenação rítmica de gestos, palavras e símbolos. A compreensão da regularidade e a imaginação das figuras na busca pela generalização dos resultados, permanece ancorada em um profundo processo de mediação sensorial – mostrando assim a natureza multi-modal do pensamento algébrico factual.

- **Pensamento algébrico contextual:** nessa forma de pensamento algébrico o nível de objetificação é mais profundo do que o da ação e percepção característica do pensamento algébrico factual. Por exemplo, na atividade citada anteriormente, da figura 1, o aluno tem que ir além de números particulares e lidar com um novo objeto, a figura geral (RADFORD, 2009).

  Portanto, os alunos que se encontram nessa forma mais abstrata de pensamento algébrico devem ser capazes de responder a segunda parte da atividade, ou seja, construir uma mensagem (fórmula) que possa ser utilizada para calcular o número de círculos de qualquer figura. Nesse caso, os alunos devem lançar mão dos números particulares e pensar em números gerais.

  Radford (2009, p.49, tradução nossa) destaca ainda que "no pensamento algébrico contextual indeterminação se torna um objeto explícito do discurso. Gestos e ritmos são substituídos por dêiticos linguísticos, advérbios, etc". As fórmulas começam a ser expressas de forma perceptual, baseadas em termos-chave, como "superior" e "inferior", no exemplo da atividade da figura 1.

  Radford (2009) traz, como exemplo, a seguinte mensagem, ou fórmula, de um aluno que utiliza o pensamento algébrico contextual para responder a segunda parte da atividade.

  "Você tem que adicionar um círculo ao número da figura para encontrar o número de círculos da linha superior, e adicionar um círculo à linha superior para encontrar o número de círculos da linha inferior".

  Essa frase pode ser vista como uma fórmula, porém muito diferente da apresentada na forma de pensamento algébrico factual. Aqui, ritmo e gestos são substituídos por termos-chave descritivos, como "superior" e "inferior". Esses termos são, de acordo com Radford (2009), o que os linguistas chamam de dêiticos espaciais, ou seja, palavras que utilizamos para descrever, de forma contextual, objetos no espaço.

  No entanto, embora diferente do pensamento algébrico factual, tanto em termos de como a indeterminação é tratada, como os meios semióticos utilizados pelos alunos para expressar o pensamento, essa forma de pensar algebricamente ainda é contextual e "perspectiva", uma vez que se baseia em um modo particular de relacionar algo. A fórmula algébrica aqui é de fato uma descrição do termo geral (RADFORD, 2009).

- **Pensamento algébrico padrão:** Nessa forma de pensamento algébrico, em alguns momentos chamado por Radford de pensamento algébrico simbólico, o aluno começa a utilizar fórmulas alfanuméricas, ou seja, uma linguagem simbólica algébrica para expressar o pensamento. No início dessa forma de pensar algebricamente, em vez de ser um dispositivo de cálculo abstrato, essas fórmulas alfanuméricas são narrativas vivas dos fenômenos estudados. Elas são, por exemplo, em atividades de generalização de padrões, como a do tipo da figura 1, ícones em que os alunos oferecem uma espécie de descrição espacial da figura e as ações a serem realizadas.

  Em um nível mais consolidado, as fórmulas deixam de ser ícones, deixam de ter uma natureza "perspectiva", e passam a significar coisas de uma forma totalmente abstrata (RADFORD, 2009).

  Radford (2009) lembra que a gama dos ricos recursos semióticos utilizados nas formas de pensamento algébrico factual e contextual, como ritmos, gestos, dêiticos, advérbios, etc. não têm espaço nas fórmulas algébricas baseadas em símbolos alfanuméricos. Ocorrendo, portanto, uma drástica mudança na linguagem utilizada para expressar o pensamento algébrico.

  Por exemplo, ao ser pedido para escrever uma fórmula para representar o número de círculos da figura n, o aluno chega, em princípio, à seguinte expressão:

  $(n + 1) + (n + 2)$.

  Percebemos que essa fórmula é mais evoluída do que a utilizada pelo aluno no pensamento algébrico contextual, uma vez que agora o aluno utiliza uma linguagem com poder de síntese muito maior, a linguagem simbólica algébrica, baseada em sinais alfanuméricos. Entretanto, apesar de utilizar uma linguagem simbólica, os sinais nessa fórmula ainda mantêm uma experiência corporificada e perspectiva do processo de objetificação. Reconhecemos, facilmente, no termo "n + 1" a referência à linha superior da sequência, assim como reconhecemos no termo "n + 2" a referência à linha inferior.

Radford destaca que uma fórmula desse tipo pode ser denominada como um ícone, ou seja, uma espécie de descrição geométrica da figura. Isso porque ela não é um artefato simbólico de cálculo abstrato, mas, sim, uma história que narra, de forma altamente condensada, experiências matemáticas dos alunos.

Em um nível mais avançado do pensamento algébrico simbólico, o aluno é capaz de simplificar essa fórmula, chegando a uma que não seja uma descrição espacial da figura, mas uma síntese da relação existente entre o número da figura e o número de círculos. Temos, a seguir, uma fórmula simplificada para representar o número de círculos da figura n:

$2n + 3$.

No caso dessa fórmula, não temos mais uma representação espacial da figura. Não percebemos a linha superior e a inferior, como na fórmula anterior. É essa natureza não "perspectiva" da fórmula que constitui, segundo Radford, a força da álgebra, ou seja, o distanciamento do contexto, com a finalidade de significar coisas de uma maneira abstrata.

Apesar de concordar que o domínio da linguagem algébrica é o ápice do pensamento algébrico, Radford destaca a importância do caminho percorrido pelo aluno no desenvolvimento dessa forma de pensar. Caminho que começa no pensamento algébrico factual, passando pelo contextual, até chegar ao pensamento algébrico simbólico.

Ele afirma que esse percurso é fundamental pela importância dele na construção de significado para os objetos e para a linguagem da álgebra. Portanto, assim como Lins (1992) e Kaput (2008), Radford (2009) também ressalta que trabalhar o pensamento algébrico do aluno é fundamental para que ele aprenda, de forma significativa, os objetos algébricos, assim como a linguagem utilizada para representar esses objetos.

Considerações: nossa caracterização de pensamento algébrico

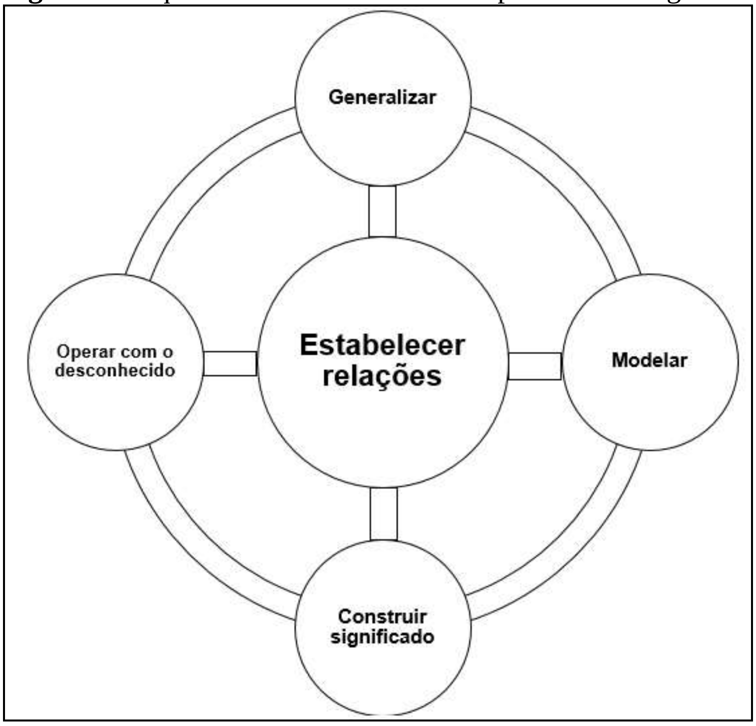
Percebemos, a partir das pesquisas de Lins (1992; 1994a; 1994b), Kaput (1999; 2008) e Radford (2006; 2009; 2011b), que a caracterização de pensamento algébrico não é algo simples. Isso talvez ocorra, como o próprio Radford nos coloca, pelo fato de o extenso campo em que essa forma de pensar se insere, a álgebra, ter um número grande de objetos de estudo, como equações, inequações, sistemas de equações e de inequações, funções, padrões, etc, além de processos algébricos, como inversão e simplificação.

Porém, precisamos delimitar uma caracterização dessa forma particular de pensar matematicamente, uma vez que pretendemos apresentar uma definição de pensamento algébrico que possa ser adotada tanto por professores como por pesquisadores. Portanto, a conclusão desse artigo será composta por nossa caracterização de pensamento algébrico, tomando por base os estudos de Lins (1992; 1994a; 1994b), Kaput (1999; 2008) e Radford (2006; 2009; 2011b), além de seus colaboradores.

Diante do exposto, acreditamos que o pensar algebricamente é revelado por meio de cinco características, a saber: “estabelecer relações”; “generalizar”; “modelar”; “operar com o desconhecido”; e “construir significado”. Além disso, sustentamos que no centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e, subjacentes a ela, porém, não menos importantes, estão as outras. Portanto, defendemos que a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais.

Para entender essa estrutura, ou formato de pensamento algébrico aqui defendido, temos o esquema a seguir, que mostra como essas características se comunicam e inter-relacionam entre si.

Figura 2: Esquema das características do pensamento algébrico

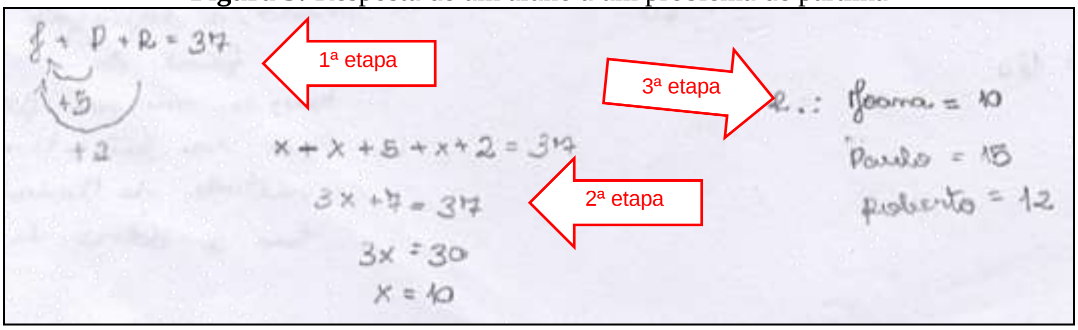


Fonte: Os autores

Para entender cada característica e como elas se revelam na resolução de um problema, analisaremos a resposta de um aluno ao problema de estrutura algébrica a seguir. Os dados aqui utilizados para exemplificar nossa caracterização de pensamento algébrico é parte de um estudo maior desenvolvido em uma tese de doutorado elaborada pelo primeiro autor sob a orientação do segundo.

Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

Figura 3: Resposta de um aluno a um problema de partilha



Fonte: Almeida (2016)

Podemos perceber que o aluno inicia a resolução do problema mobilizando, para nós, a característica central do pensamento algébrico, que é a **capacidade de estabelecer relações**, uma vez que ele, na 1ª etapa da resolução do problema, estabelece as relações existentes entre as partes (a quantidade de balas que cada personagem irá receber) e o todo (o total de balas).

Além dos registros indicarem que o aluno iniciou a resposta pelo estabelecimento das relações, o que é necessário na resolução de um problema de estrutura algébrica (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011), ele confirma isso por meio do seguinte extrato de uma entrevista realizada pelo pesquisador, em que é pedido para o aluno explicar como ele respondeu ao problema.

> ***P*[7]*:*** *Me explica como você resolveu esse problema?*
>
> ***A*[8]*:*** *Certo. Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana, aqui (apontando para a seta e o mais 5 no esquema) e Roberto receba 2 balas a mais que Joana, aqui (apontando para a seta e o mais 2 no esquema).*

Portanto, percebemos que o aluno não inicia a resolução do problema com a equação. Primeiro ele elabora um modelo, utilizando as inicias dos nomes das personagens, indicando que a soma das quantidades de balas recebida por cada personagem é igual ao total de balas, quer dizer, J + P + R = 37, porém, a quantidade de balas não é igual para todos, o que caracterizaria um problema de estrutura aritmética, que seria facilmente resolvido por uma divisão.

Diante disso, o aluno percebe que para chegar na resposta correta é necessário levar em consideração as condições propostas no enunciado. É, nesse momento, que ele estabelece as relações, indicando-as, inicialmente, pelas setas e os sinais de + e os valores 5 e 2. É possível identificar no modelo que $(\xleftarrow[+5]{})$, indo do P para o J, indica, para o aluno, que Paulo irá receber 5 balas a mais que Joana, o mesmo acontece com $(\xleftarrow[+2]{})$, que vai do R ao J, indicando que Roberto vai receber 2 balas a mais que Joana.

Já nesse processo inicial, em que o aluno elabora o modelo, para só depois chegar na equação, ele começa a revelar outra característica do pensamento algébrico, a **capacidade de modelar**, ou seja, ele começa a construir um modelo matemático para representar o problema

---

[7] Pesquisador
[8] Aluno

apresentado em linguagem natural. E, dependendo do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico em que esse aluno se encontra, esse modelo matemático terá uma linguagem algébrica mais ou menos formal (KAPUT, 1999; 2008; RADFORD, 2009; 2011b).

No início da 2ª etapa de resolução o aluno demonstra que essa característica do pensamento algébrico, a capacidade de modelar, está bem desenvolvida, uma vez que ele converte o problema em uma equação polinomial do 1º grau em que aparecem todas as relações estabelecidas inicialmente no modelo, ou seja, ele coloca o "X" para representar a quantidade de balas de Joana, o "X + 5" para representar a quantidade de Paulo, e o "X + 2" para indicar a quantidade de Roberto, além de deixar claro que a soma dessas três quantidades é igual a 37, expressa na equação "X + X + 5 + X + 2 = 37", como pode ser verificado na figura 3 e confirmado no extrato da entrevista a seguir.

> ***A:*** *Então Joana seria o X, mais X mais 5, que seria o número de Paulo, mais X mais 2, que seria o número de Rogério, porque Paulo tem 5 a mais que Joana, e Rogério tem 2 a mais que Joana. A soma de Joana, Paulo e Roberto é igual a 37.*

Concomitante a esse processo de modelar, surge outra característica do pensar algebricamente, a **capacidade de generalizar**, tendo em vista que o aluno representa, após a conversão do problema, as quantidades de balas que cada personagem irá receber de uma forma geral. Ele realiza uma síntese das relações existentes entre as quantidades de balas que cada personagem irá receber e descreve essas relações em uma linguagem genuinamente algébrica, em que o X pode representar um valor qualquer, valor esse que, no problema em questão, é descoberto após a resolução da equação (RADFORD, 2009; 2011b).

Ainda na segunda etapa é revelada a quarta característica do pensamento algébrico assumida por nós, a **capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido**, ou seja, de forma analítica (LINS, 1992; 1994a; 1994b; RADFORD, 2006; 2009; 2011b).

Essa característica do pensamento algébrico é revelada no exemplo de resposta da figura 3, em que o aluno manipula o desconhecido, o "X" no caso, segundo as leis da aritmética em relação à igualdade, em que são realizadas algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até se chegar no valor de "X", no desconhecido.

Inicialmente podemos pensar que a resposta do aluno, trazida na figura 3, indica que ele respondeu à equação de forma mecânica, seguindo o modelo que possivelmente o professor apresentou em aula. Porém, a entrevista revela que ele se vale das leis da aritmética em relação a uma igualdade para chegar na resposta final. Podemos verificar isso no extrato a seguir.

> ***P:*** *Como você resolveu essa equação?*
>
> ***A:*** *Então, eu juntei os X separado dos números, ficando 3X mais 7, que é igual a 37. Então eu diminuí 7 dos dois lados, e ficou 3X igual a 30, então X é igual a 10.*
>
> ***P:*** *E como você fez para chegar em X igual a 10?*
>
> ***A:*** *Eu dividi os dois lados por 3.*

Portanto, tudo indica que quando o aluno subtrai 7 dos 37, ele demonstra, na entrevista, saber que isso é possível porque se subtrair o mesmo valor de ambos os membros de uma igualdade, essa igualdade não se altera. E no caso de uma equação essa ação gera uma equação equivalente a primeira. O mesmo caso acontece na divisão de ambos os membros da equação por 3.

Por fim, porém não menos importante, ao mesmo tempo em que o aluno mobiliza as características supracitadas do pensamento algébrico, ou algumas delas, ele também está lidando com a quinta e última característica dessa forma de pensar, a **capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébrico** (LINS, 1992; 1994a; 1994b; KAPUT, 1999; 2008; ARCAVI, 2005).

Isso acontece tendo em vista que o aluno compreende o problema como uma equação polinomial do 1º grau, ou seja, que existe uma relação de igualdade entre quantidades, no caso do exemplo da figura 3 a soma das quantidades de balas que cada personagem irá receber é igual ao total de balas. Continuando, ele representa essa relação de igualdade por meio de um modelo matemático, utilizando uma linguagem algébrica formal.

É, por meio disso, que o aluno demonstra ter construído significado para o objeto algébrico em jogo, no caso a equação. Acreditamos que o aluno não só demonstrou ter construído significado para o objeto matemático, mas, também, para a linguagem algébrica utilizada para representar esse objeto. A construção de significado da linguagem algébrica pelo aluno é revelada, por exemplo, ao final da resolução do problema, na 3ª etapa, quando ele indica que o "X" representa a quantidade de balas que Joana irá receber, por isso "Joana = 10", que "X + 5" indica a quantidade de balas de Paulo, daí "Paulo = 15" (10 + 5), e que o "X + 2" é a quantidade de balas de Roberto, levando a "Roberto = 12" (10 + 2).

Portanto, pensar algebricamente requer a mobilizações dessas cinco características aqui discutidas, ou seja, a "capacidade de estabelecer relações"; a "capacidade de modelar"; a "capacidade de generalizar"; a "capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido" e a "capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem algébrica". Porém, ressaltamos que a característica central do pensamento algébrico é imprescindível, isto é, um sujeito só está pensando algebricamente se conseguir estabelecer relações, enquanto que as demais vão surgindo com o tempo.

Ressaltamos, também, que apesar de apresentar no texto em uma ordem as quatro características subjacentes à central, isso não significa que elas sejam reveladas pelo sujeito nessa ordem, muito pelo contrário, acreditamos que elas surgem e se desenvolve de forma concomitante, e que o desenvolvimento de uma dessas características leva, consequentemente, ao desenvolvimento das outras.

Referências

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico:** proposição de um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Tese de doutorado em Ensino das Ciências e Matemática. UFRPE, Recife, 2016.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In: **Conferência plenária no encontro de investigação em educação matemática.** Caminha, Portugal, 2005. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-bibliografia.htm. Acesso em 23/07/2014

BLANTON, M. L.; KAPUT,J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. In: **Journal for Rescarch in Mathematics Education**. v. 36, n. 5. 2005

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In: **Quadrante**, v. VXI, n. 2. Portugal, 2007.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. In: **Boletim de educação Matemática – BOLEMA** (Online), v. 24, n. 38, Rio Claro – SP, 2011.

GOMES, S. C. **Teorias de aprendizagem em matemática: um estudo comparativo à luz da teoria da objetificação.** Tese de doutorado em Educação. UFRN, Natal, 2016.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In FENNEMA, E. ROMBERG, T.A. **(Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999.

_________. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KAPUT, J. BLANTON, M. L.; MORENO, Algebra from a symbolization point of view. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KIERAN, C. **The learning and teaching of school algebra. Handbook of research on mathematics teaching and learning**. National Council of Teachers of Mathematics - NCTM, New York, 1992.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.

_________. Campos semânticos y el problema del significado em álgebra. In**: UNO – Didáctica de las Matemáticas**. nº 1, Barcelona, 1994a.

_________. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. In: **Dynamis**. nº 1, v. 7, Blumenau, 1994b.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas. Papirus, 1997.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. In: **Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática**, Recife, 2011.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. v. 1, 2006.

___________. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: **Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.** Lyon – França, 2009. Disponível em:

<www.inrp.fr/editions/cerme6> Acesso em 18/06/2015.

___________. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. Tradutores Bernadete Morey, Iran Abreu Mendes. Livraria da Física. São Paulo, 2011a.

___________. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds). **A global dialogue from multiple perspectives**. Editora Springer. Berlin, 2011b.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D.; BRIZUELA, B. M. Algebra in elementary school. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. especial, pp 107 – 122, 2012.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. In: **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP. UFSCar, v. 6, nº 1, 2012.

______________________________ manifestação do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do ensino fundamental I. In: **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, PR, v. 3, n. 5, 2014.

SMITH, Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

Recebido em: 05/04/2016
Aprovado em: 28/04/2017