

MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA: CARACTERIZAÇÃO DE UM AMBIENTE EDUCACIONAL

Karina Alessandra Pessoa da Silva¹

Resumo: Neste artigo apresentamos resultados parciais de uma pesquisa na qual investigamos se atividades de modelagem matemática podem ser caracterizadas como elemento determinante para desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos no âmbito de um ambiente educacional, mais precisamente no âmbito de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. A pesquisa está fundamentada nos pressupostos teóricos da modelagem matemática entendida como alternativa pedagógica e em ideias e caracterizações de ambiente educacional. A busca por evidências relacionadas à caracterização do ambiente educacional é permeada pela análise dos registros escritos e falados de um grupo de alunos de um curso de Licenciatura em Química e que foram coletados por meio de gravações em áudio, no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Por meio desses registros inferimos sobre características que permitem à atividade se configurar como elemento determinante de um ambiente educacional, considerando a parceria entre os alunos no trabalho em grupo e as intervenções da professora atribuindo caráter pessoal à atividade, bem como possibilitando desencadear tarefas para a aplicação de conteúdos matemáticos estudados.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ambiente Educacional. Cálculo Diferencial e Integral 1.

MATHEMATICAL MODELLING IN A CLASSROOM: CHARACTERIZATION OF AN EDUCATIONAL ENVIRONMENT

Abstract: In this article we present partial results of a research in which we investigate if mathematical modelling activities are characterized as a determinant element to develop mathematical and procedures concepts within an educational environment, more precisely within the scope of an Integral and Differential Calculus. The research is based on theoretical assumptions of mathematical modelling understood as a pedagogical alternative and on ideas and characterizations of educational environment. The search for evidence related to the characterization of the educational environment is permeated by the analysis of the written and spoken records by a group of students of a course degree in chemistry that were collected through audio recordings in the development of the mathematical modelling activity. Through these records, we infer about characteristics that allow the activity to be configured as a determining element of an educational environment, considering the partnership between the students in the group work and the interventions of the teacher attributing personal character to the activity, as well as enabling to trigger tasks for the application of mathematics contents studied.

Keywords: Mathematical Modelling. Educational Environment. Integral and Differential Calculus.

Introdução

No ensino de matemática, diferentes abordagens metodológicas têm sido

¹ Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática, docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Londrina, atuando no curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. E-mail: karinasilva@utfpr.edu.br.

desenvolvidas para o trabalho em sala de aula. Dentre essas abordagens, a modelagem matemática tem se destacado em discussões seja em programas de formação continuada, seja em eventos da área de Educação Matemática. Em muitos desses eventos, a prática de sala de aula tem sido temática recorrente nas discussões e reflexões sobre possibilidades para sua implementação. Na sétima edição do Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, realizado em novembro de 2016, tanto no painel de abertura quanto no painel de encerramento, os palestrantes versaram sobre diálogos, reflexões e desafios sobre pesquisas vinculadas à prática da sala de aula (ALMEIDA *et al*, 2016).

Neste artigo, apresentamos resultados parciais de um projeto de pesquisa que visa o trabalho de sala de aula ao propor a *investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino*. O projeto tem por objetivo geral investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de um ambiente educacional para a disciplina de Cálculo e suas consequências para a aprendizagem. Por ser uma pesquisa aplicada a condições reais de ensino, a sala de aula é considerada como principal espaço de investigação.

Considerando as potencialidades da modelagem matemática como alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Matemática e as inquietações sobre sua implementação em sala de aula, voltamos nossos interesses em investigar possíveis caracterizações de um ambiente educacional no qual atividades de modelagem matemática estejam presentes.

Dependendo da perspectiva sobre modelagem matemática adotada, diferentes configurações podem ser desenvolvidas em sala de aula. Pesquisas realizadas por Iglioni e Beltrão (2015) e Almeida e Silva (2017) apontam reflexões relacionadas à implementação de atividades de modelagem matemática em aulas de Cálculo Diferencial e Integral 1. É nesse cenário que movemos nossas pesquisas. No entanto, nos debruçamos na caracterização de um ambiente educacional mediado por atividades de modelagem matemática.

Subsidiaremos nossas reflexões na análise de uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por alunos de um curso de Licenciatura em Química na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 de uma universidade federal do Paraná. Tal análise conduz a reflexões e considerações sobre a questão: *atividades de modelagem matemática podem se configurar*

em elementos determinantes de um ambiente educacional? Os elementos determinantes de um ambiente educacional articulam, conforme Troncon (2014), aspectos materiais e afetivos que circundam os alunos.

Levando em consideração reflexões sobre a questão de investigação, este texto está estruturado, além desta introdução, em quatro seções subsequentes. Na primeira enunciamos aspectos sobre a modelagem matemática que praticamos. Em seguida, tratamos sobre o ambiente educacional e tarefas com potencial para desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos. Na terceira seção definimos os aspectos metodológicos que orientam nossa pesquisa e, na quarta seção, apresentamos a descrição e a análise da atividade de modelagem matemática desenvolvida. Finalizamos com algumas considerações.

Modelagem Matemática na Educação Matemática

Ubiratan D'Ambrósio em prefácio no livro *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* (BASSANEZI, 2002, p.11), afirma que “a modelagem matemática é a matemática por excelência”. Modelagem matemática é uma arte peculiar. Envolvendo-se com ela, o aluno passa da condição de expectador passivo para ‘artesão’ ativo enquanto aprende fazer modelagem. Para Bassanezi (2002), a modelagem matemática se fundamenta na arte de transformar problemas reais em problemas matemáticos, em que a resolução e a interpretação de suas possíveis soluções devem se dar por meio da linguagem habitual.

Em geral, o termo modelagem matemática se refere à busca por uma representação matemática para um objeto ou fenômeno não-matemático. Corroboramos com Almeida e Silva (2015, p. 45), ao afirmarem que o processo de modelagem “cria uma complexa relação estrutural entre duas entidades de diferente natureza epistemológica: a situação a ser modelada e o sistema matemático”. Assim, por meio do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática é possível fazer uma aproximação matemática de uma situação não necessariamente matemática.

Neste sentido, nosso entendimento está ancorado no fato de que a modelagem matemática consiste em uma alternativa pedagógica na qual a partir de uma situação inicial (problemática) são utilizados procedimentos que definem estratégias de ação do sujeito

envolvido com a atividade em relação à situação problemática, obtendo uma situação final (solução para a situação inicial). Almeida, Silva e Vertuan (2012) identificam elementos que, de modo geral, se fazem presentes em atividades de modelagem

[...] o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.17).

Esses autores ponderam que quando a modelagem matemática é concebida como uma alternativa pedagógica o foco está nos encaminhamentos e procedimentos que mediam a transição da situação inicial para a situação final. Esses procedimentos, de forma geral, se configuram em um conjunto de ações como a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a solução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação do modelo matemático obtido.

Blomhøj e Kjeldsen (2011) defendem que para ocorrer a construção do modelo matemático, é necessário que os alunos sejam expostos a situações que os levem à reflexão sobre o processo de modelagem e à função dos modelos em diferentes contextos. Com isso, os alunos passam a ter familiaridade com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e a lidar adequadamente com uma variedade de dados.

A familiarização do aluno com atividades de modelagem deve ocorrer de forma gradativa, conforme apontam pesquisadores como Silva, Almeida e Gerôlomo (2011). Tais autores caracterizam três momentos de familiarização.

O 1º momento é o primeiro contato do aluno com a modelagem, no qual recebe todas as informações das quais precisa para desenvolver uma atividade, em muitos casos, o problema já está definido ou é definido com o auxílio do professor. No 2º momento, o professor apresenta um fato, sugere uma situação-problema aos alunos que, em grupos, desenvolvem a atividade com a coleta de dados, definição de um problema e sua solução. Nesse momento de familiarização, os alunos trabalham com mais independência, porém, a intervenção do professor ainda é muito relevante. No 3º momento o aluno é o artesão. Com

autonomia realiza a escolha da situação-problema, a coleta e a análise dos dados obtidos, realizando a tradução de linguagens e a identificação de objetos matemáticos que serão usados para obter e validar o modelo matemático.

Nos diferentes momentos de familiarização, de forma geral, a gênese da atividade está atrelada à formulação de um problema. Os procedimentos seguintes se enquadram na prática realizada pelo modelador. Embora na literatura se aponte para o fato de o problema ser formulado pelos alunos, entendemos que a “a escolha final dependerá muito da orientação do professor que discursará a exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção dos dados, visitas, bibliografia, etc.” (BASSANEZI, 2002, p.46).

Dessa forma, professor e alunos reunidos em grupos são os responsáveis pelo início do desenvolvimento de uma atividade de modelagem. É de se considerar que atividades de modelagem matemática são essencialmente cooperativas e o trabalho em grupo é o seu aporte. Cabe ao professor o papel de orientador no qual indica caminhos, faz perguntas, não aceita o que não está bom, sugere procedimentos, não dá respostas prontas e acabadas, não aceita que ‘vale tudo’, não espera que o aluno simplesmente siga exemplos, além de não se despir da autoridade de professor.

Neste contexto, o enfoque ‘resolução de um problema’ e o enfoque ‘ações e interesses dos alunos’ são importantes para o ensino e a aprendizagem da matemática. Além disso, ensino e aprendizagem não são ‘atos’ independentes. Ou seja, o que e como o professor faz nas aulas com modelagem têm repercussão direta sobre o que aluno faz e como ele faz para aprender.

Levando em consideração esses apontamentos, investigamos se atividades de modelagem matemática podem ser configuradas enquanto elementos determinantes de um ambiente educacional para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral 1 em condições reais de ensino.

Ambiente educacional

A expressão “ambiente educacional” apresenta várias designações, dependendo do enfoque com que é utilizado. Em geral, essa expressão é utilizada para designar um contexto

em que ocorre o ensino e a aprendizagem e, de certa forma, particularizada às instituições de ensino. Quando nos referimos ao ambiente educacional consideramos a compreensão de Troncon (2014), de que se trata de um

[...] conjunto de elementos, de ordem material ou afetiva, que circunda o educando, que nele deve necessariamente se inserir e que o inclui, quando vivencia os processos de ensino e aprendizado, e que exerce influência definida sobre a qualidade do ensino e a eficácia do aprendizado. Destaque-se que um aspecto particular deste conceito é a inclusão do educando como elemento que participa do ambiente, o que tem a implicação de lhe atribuir responsabilidades na manutenção e no aperfeiçoamento do ambiente que integra (TRONCON, 2014, p.265).

Esse autor ainda destaca que o ambiente educacional tem impacto no rendimento acadêmico do estudante. O que acarreta a importância de que o ambiente educacional seja sempre investigado e aprimorado com o objetivo de aperfeiçoar o processo educacional. Para tanto, deve-se levar em consideração aspectos materiais e afetivos para compor o ambiente educacional. Os elementos materiais estão relacionados ao espaço físico que circunda o estudante, no que concerne ao seu bem-estar, bem como os equipamentos dos quais faz uso durante suas atividades. Os elementos de caráter afetivo dizem respeito às relações estabelecidas entre os alunos e entre aluno e professor.

Tanto os elementos de caráter materiais quanto os elementos de caráter afetivo estão relacionados à instituição e, em especial, ao professor. Os alunos colaboram na manutenção e no aprimoramento do ambiente educacional, além de serem afetados por ele. As articulações entre os elementos que circundam os alunos são determinantes do ambiente educacional.

Levando em consideração os elementos necessários para compor um ambiente educacional, com relação ao ensino da Matemática, também corroboramos com Borssoi, Silva e Ferruzzi (2016) de que

[...] a caracterização do ambiente educacional, deva levar em consideração aspectos estruturais (estrutura da instituição de ensino, a natureza dos cursos de graduação oferecidos por ela, o perfil do egresso que se almeja e o perfil dos alunos matriculados na disciplina de Cálculo, entre outros) e aspectos pedagógicos e procedimentais (BORSSOI; SILVA; FERRUZZI, 2016, p.4).

Os aspectos pedagógicos e procedimentais relacionam-se à postura e escolhas do

professor ao propor atividades em sala de aula. Com isso, nosso intuito é evidenciar se as atividades de modelagem matemática são determinantes de um ambiente educacional que promova a aprendizagem a partir de tarefas que delas emergem.

Consideramos tarefa como “amplo espectro composto por ‘coisas a fazer’ pelos estudantes em sala de aula, o que inclui desde a execução de exercícios algorítmicos até a realização de investigações ou construção de modelos matemáticos” (TREVISAN; BORSSOI; ELIAS, 2015, p.3). Esse entendimento está de acordo com Ponte (2014, p. 14), de que tarefas são “o elemento organizador da atividade de quem aprende”, sendo “usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor”.

Considerando esses apontamentos sobre ambiente educacional e a possibilidade de desencadeamento de tarefas a partir de uma atividade de modelagem é que realizamos nossa investigação.

Contexto da pesquisa e coleta de informações

Nossa pesquisa foi realizada em uma universidade federal do estado do Paraná na qual os elementos materiais, componentes do ambiente educacional, em certa medida satisfazem as acomodações dos alunos para o desenvolvimento de atividades de modelagem, principalmente para o trabalho em grupo e a coleta de dados. A instituição conta com laboratórios (de Química e de Informática) equipados com instrumentos e softwares matemáticos que possibilitam a coleta e o manejo de dados. Os elementos afetivos, bem como os aspectos pedagógicos e procedimentais com relação às atividades de modelagem, são foco de nossa análise para evidenciar se tais atividades são determinantes de um ambiente educacional que promova a aprendizagem.

O foco de nossa análise é uma das atividades de modelagem matemática desenvolvidas com alunos de uma turma do primeiro período (regime semestral) de um curso de Licenciatura em Química na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 no primeiro semestre de 2016.

A professora da turma, pesquisadora em Modelagem Matemática na Educação Matemática seguiu os procedimentos de familiarização com atividades de modelagem

matemática, conforme proposto por Silva, Almeida e Gerôlomo (2011). No décimo quinto encontro, a professora solicitou aos alunos que, em grupos de até três integrantes, coletassem dados relativos a temáticas estudadas no curso de Licenciatura em Química e trouxessem para a sala de aula no próximo encontro. O desenvolvimento dessa atividade seguiu caracterizações descritas no 2º momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática. Neste caso, os alunos teriam que providenciar as informações relativas à temática a ser investigada.

Os registros escritos do desenvolvimento das atividades e as discussões realizadas em sala de aula foram gravados em áudio com o consentimento dos envolvidos, que foram transcritos pela pesquisadora. Neste artigo, devido às limitações de espaço, apresentamos a análise da atividade desenvolvida por um dos grupos. A escolha do grupo está atrelada à participação de todos os integrantes no desenvolvimento de atividades de modelagem no primeiro momento de familiarização, no desenvolvimento da atividade analisada, bem como no rendimento dos mesmos na disciplina – faltaram em apenas um encontro e foram aprovados.

Para investigar se as atividades de modelagem se configuram enquanto elemento determinante de um ambiente educacional na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, desde a coleta de dados até as análises e inferências, nos pautamos na pesquisa que apresenta caráter de ‘qualitativa’, no sentido atribuído por Bogdan e Biklen (1994). Para esses autores, na pesquisa qualitativa, os pesquisadores têm como objetivo melhor compreender o comportamento e a experiência humana, o que implica em ser ele, o pesquisador, o principal instrumento da pesquisa.

Os nomes (fictícios) de alunos usados no decorrer da nossa descrição e discussão apresentadas na próxima seção são de integrantes do grupo analisado.

Descrição e discussão da atividade

Os alunos que compõem a turma na qual o desenvolvimento da atividade de modelagem aconteceu já haviam trabalhado com outras seis atividades de modelagem matemática seguindo caracterizações do 1º momento de familiarização. Nesse sentido, já

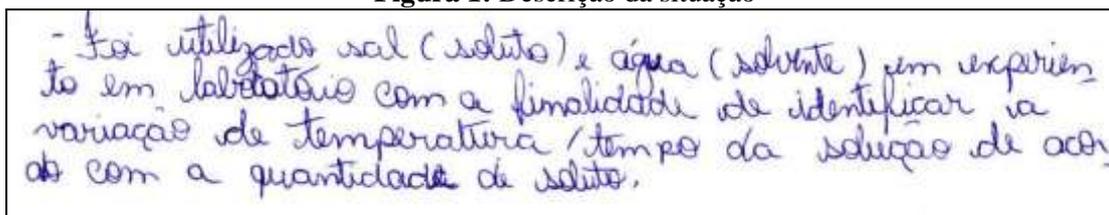
estavam habituados a trabalhar em grupo, a analisar o comportamento de dados e representá-los por meio de tabelas, gráficos e expressões algébricas, com o objetivo de realizar uma interpretação matemática da situação.

O segundo momento de familiarização foi caracterizado por uma atividade na qual os alunos teriam de produzir os dados dos quais fariam a interpretação matemática. Para isso, a professora solicitou que escolhessem uma situação que fizesse parte do contexto no qual estavam inseridos – Licenciatura em Química. Caso optassem por coletar dados no laboratório de Química, poderiam solicitar a ajuda de uma aluna de Iniciação Científica (IC) que conhecia as regras e o técnico do laboratório.

Mesmo que a professora tenha deixado ‘livre’ a escolha da situação, orientou os alunos a fazerem uso do laboratório de maneira que a coleta de dados fosse acompanhada por uma aluna de IC, configurando um discurso sobre a exequibilidade e facilidade na obtenção dos dados, conforme apontado por Bassanezi (2002).

Com as orientações da professora, Beto, Ana e Gil formaram um grupo e decidiram investigar a ebulição de uma solução de água (solvente) e cloreto de sódio (soluto), conforme descrito em relatório entregue pelos alunos e apresentado na Figura 1.

Figura 1: Descrição da situação



- Foi utilizada sal (soluto) e água (solvente) em experiência em laboratório com a finalidade de identificar a variação de temperatura / tempo da solução de acordo com a quantidade de soluto.

Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

A coleta de dados foi realizada no Laboratório de Química da universidade com a orientação da aluna de IC e a supervisão de um técnico, assegurando a integridade física dos alunos na manipulação dos materiais. Para a coleta de dados, os alunos utilizaram uma chapa de temperatura contínua a 100 °C, um béquer, uma balança de precisão para medir a quantidade de massa de cloreto de sódio, um termômetro digital tipo espeto, cronômetro, água e sal, conforme mostram as fotografias registradas pelos alunos durante a coleta de dados (Figura 2).

Figura 2: Coleta de dados realizada em laboratório pelos alunos



Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

A aluna de IC auxiliou os alunos no manejo dos instrumentos, ao mesmo tempo em que coletavam os dados e registravam com o telefone celular fotografias dos procedimentos. Fixando o volume de água em 100 mL, os alunos diluíram diferentes quantidades de cloreto de sódio (soluto), obtendo diferentes soluções. Cada solução foi colocada sobre a chapa de temperatura contínua até entrar em ebulição, momento em que os alunos mediram a temperatura e o tempo necessário para a ocorrência desse fenômeno, conforme consta na Tabela 1.

Tabela 1: Temperatura e tempo de ebulição de solução

Quantidade de soluto (g)	Temperatura de ebulição da solução ($^{\circ}\text{C}$)	Tempo em que a solução entrou em ebulição (min)
0	97	19
10	98	17
20	101	13
30	104	9
40	107	5

Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

Para o propósito dos alunos, o laboratório de Química da instituição estava suprido com os equipamentos necessários, configurando os elementos materiais. Os aspectos pedagógicos e procedimentais já faziam parte do contexto das aulas de instrumentalização dos alunos e a aluna de IC (estudante do 4^o período do curso) já tinha vasta familiaridade com o manejo dos equipamentos para esse tipo de experimento. Como os alunos ficaram livres para formarem os grupos e escolherem a situação para estudarem, os elementos afetivos não apresentaram interferências negativas, pelo contrário, os alunos vivenciaram momentos matemáticos em situação laboratorial, conforme avaliação do docente pelo discente:



“Professora com ótima didática de ensino traz a matemática para dentro do conteúdo da química e da realidade do aluno e sempre pesca o aluno que está com dificuldades na matemática básica”.

Em sala de aula, no décimo sexto encontro da disciplina, em um período de quatro horas/aula, já com os dados apresentados na Tabela 1, a professora solicitou que os alunos juntassem as carteiras para desenvolverem a atividade em grupo. Mesmo que a turma fosse composta por 44 alunos, a sala é suficientemente espaçosa para os alunos se reunirem em grupos. Com os alunos já organizados, a professora propôs um encaminhamento para toda a turma, conforme consta na transcrição a seguir:

P: Com os dados que vocês coletaram, proponham um problema, uma pergunta para responder.

Beto: Como assim uma pergunta?

P: Lembram daquela situação que encaminhei para vocês resolverem e que não tinha um problema especificado? [relembrando situação proposta aos alunos]

Ana: O problema do estacionamento? Daquela função...

Gil: Maior inteiro?

P: Essa situação mesmo.

Ana: Ai professora, mas eu mesma nem consegui fazer esse problema lá.

P: Ana, vocês tiveram dificuldade em desenvolver o modelo matemático, mas conseguiram elaborar um problema, lembra? E agora, perceba que é sobre algo que vocês escolheram!

Ana: Verdade professora, mas o que a senhora quer? Porque em outras atividades fizemos gráficos para ver a função!

P: Conversem em grupo e decidam o que vocês podem investigar com a situação que escolheram.

[...]

A professora propõe um encaminhamento para todos os alunos, no entanto, defronte de uma dificuldade se remete a atividades que foram desenvolvidas em aulas anteriores. Ao mesmo tempo em que situa os alunos, também os coloca como participantes do ambiente – *“E agora, perceba que é sobre algo que vocês escolheram!”* – atribuindo-lhes responsabilidade com a atividade. Isso é um dos elementos que determinam um ambiente educacional conforme proposto por Troncon (2014).

Como é uma prática o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula, os alunos se remetem à atividade por um nome – o problema do estacionamento – e o conteúdo matemático que dela emergiu – função maior inteiro. O que podemos evidenciar é que a atividade já desenvolvida criou uma identidade na qual o aluno se remete e

já associa o objeto matemático estudado. No entanto, evidenciamos que o elemento afetivo para o objeto matemático função maior inteiro para Ana causou estranhamento ao afirmar que “*eu mesma nem consegui fazer esse problema*”. Para contornar esse fato, que se configurou como uma inquietação negativa, a ação da professora foi a de reforçar um aspecto positivo da atividade para com os alunos: “*Ana, vocês tiveram dificuldade em desenvolver o modelo matemático, mas conseguiram elaborar um problema, lembra?*”. Essa ação teve o objetivo de motivar os alunos a estudar a situação, reforçando o fato de que eles sabiam formular um problema, mas que tiveram dificuldades com a matemática. De acordo com Troncon (2014, p. 264), no ambiente educacional, o professor “se caracteriza como o principal elemento na sua manutenção e aprimoramento” para auxiliar a aprendizagem.

A partir da formulação de um problema, considerando os dados que haviam coletado, bem como de discutir em grupo o que poderiam estudar. Os alunos, em grupo, iniciaram uma abordagem para a situação, conforme transcrição:

Ana: Meninos, vocês entenderam o que é para fazer?

Gil: Sim, Ana. A gente tem que ver os dados aqui e fazer uma pergunta para depois responder usando coisas do cálculo, como já fizemos em outros momentos!

Beto: Isso mesmo, o que agora temos aqui é... [observando as informações coletadas] é nada fácil fazer uma pergunta, o tal do problema que podemos estudar!

Gil: Beto olhe aqui, olhe aqui também Ana. Quando a gente aumentou a quantidade de soluto na solução, a temperatura de ebulição também aumentou...

Ana: E o tempo foi diminuindo! [empolgada com as observações realizadas]

Gil: Isso mesmo.

Beto: Vamos começar com isso. Escreve aí Ana, para já dar uma luz.

Com esse diálogo, ponderamos como afirma Troncon (2014, p. 269) que “os estudantes têm a responsabilidade de interagir favoravelmente com os colegas mais retraídos, estimulando-os e favorecendo a sua integração com o grupo”. Ana passou a fazer parte do grupo e a ter um papel de conduzir a atividade sendo a redatora das conclusões obtidas, no caso da situação em estudo, que com o aumento da quantidade de soluto na solução, a temperatura de ebulição aumentava e o tempo para atingir o ponto de ebulição diminuía (Figura 3).



Figura 3: Conclusão obtida com a observação dos dados

- Conforme a quantidade de soluto aumenta, o tempo para atingir a ebulição diminui e a temperatura aumenta quando atinge este ponto.

Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

As informações organizadas em forma de tabela (Tabela 1) permitiu uma interpretação matemática para a situação – aumento da temperatura de ebulição e diminuição do tempo de ebulição de acordo com a quantidade de soluto – e uma interpretação não matemática – o soluto interfere no fenômeno de ebulição da solução. Isso corrobora com a afirmação de Almeida, Silva e Veronez (2015, p. 3) de que “a modelagem matemática viabiliza uma leitura, ou até mesmo uma interpretação, ainda que parcial e idiossincrática, de fenômenos do mundo ou da vida, muitas vezes identificados fora do ambiente escolar, com o apoio da Matemática”.

As considerações realizadas pelos alunos davam indícios de que procuravam alguma regularidade para poderem definir um problema a ser estudado e continuar o encaminhamento da atividade de modelagem. Após atender dois grupos, a professora se aproximou do grupo em análise e iniciou uma abordagem, conforme descrição:

P: E esse grupo? O que está investigando? [direcionando-se para o grupo constituído por Beto, Ana e Gil].

Gil: Professora, a gente estudou a ebulioscopia.

P: Ebulioscopia?

Beto: É, o estudo da temperatura de ebulição de uma solução de acordo com a quantidade de um soluto.

Gil: Solute não volátil.

Beto: É, soluto não volátil, como o cloreto de sódio que é sal de cozinha que nós utilizamos. Nós sabemos que quanto mais soluto há na solução maior é a temperatura de ebulição. E vimos isso no experimento. Mas e agora a pergunta, a gente não sabe!

P: Deixa eu ver. E essa temperatura da água sem sal aqui, deveria ser cem graus Celsius, não é? [apontando para a Tabela 1 projetada no computador de Gil].

Gil: É... a gente queria ver se pode desconsiderar isso aqui no nosso estudo.

P: Mas o que vocês querem estudar?

Beto: Um modelo matemático, pode ser?

P: Para que?

Ana: E se a gente pensasse em fazer uma função que dependendo da quantidade de soluto, obtemos a temperatura?

Beto: Mas chega um momento que a solução fica saturada.

Gil: Desconsideramos isso nas hipóteses. Pode ser professora? Porque nos livros que a gente estudou, tem algumas tabelas e gráficos, mas a função com y e x não aparece.

P: E o que são x e y ?



Beto: As variáveis que são o soluto e a temperatura. Escreve aí nosso problema Ana. E professora vamos usar o Excel e aquele programa... o... como é o nome?

Gil: Curve.

Beto: Isso, curve.

P: Qual o problema?

Beto: Aquele que Ana falou!

P: Ana você pode repetir ou anotar?

Ana: Escrevi aqui professora! [Figura 4]

P: Ótimo.

Ana: Pode ser esse?

P: O que vocês acham? É interessante?

Gil: Sim, porque com isso, inserimos qualquer quantidade de soluto e sabemos a temperatura. Sabendo que a solução não pode saturar. Podemos considerar para um certo domínio né?

Quando solicitada, a professora interpela os alunos com questionamentos e valoriza os apontamentos deles, principalmente os de Ana que, inicialmente, relutou para desenvolver a atividade. Essa ação está em consonância com o papel do professor no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, bem como na configuração do ambiente educacional. As informações transcritas também revelam o interesse dos alunos em fazer uso de recurso computacional para auxiliá-los.

Com os dados apresentados na Tabela 1, os diálogos entre os integrantes do grupo e a intervenção da professora, configurou-se um problema para ser abordado na atividade, conforme consta na Figura 4.

Figura 4: Problema definido pelos alunos para a atividade Ebulição de uma solução

Dependendo da quantidade de soluto,
qual será a temperatura?

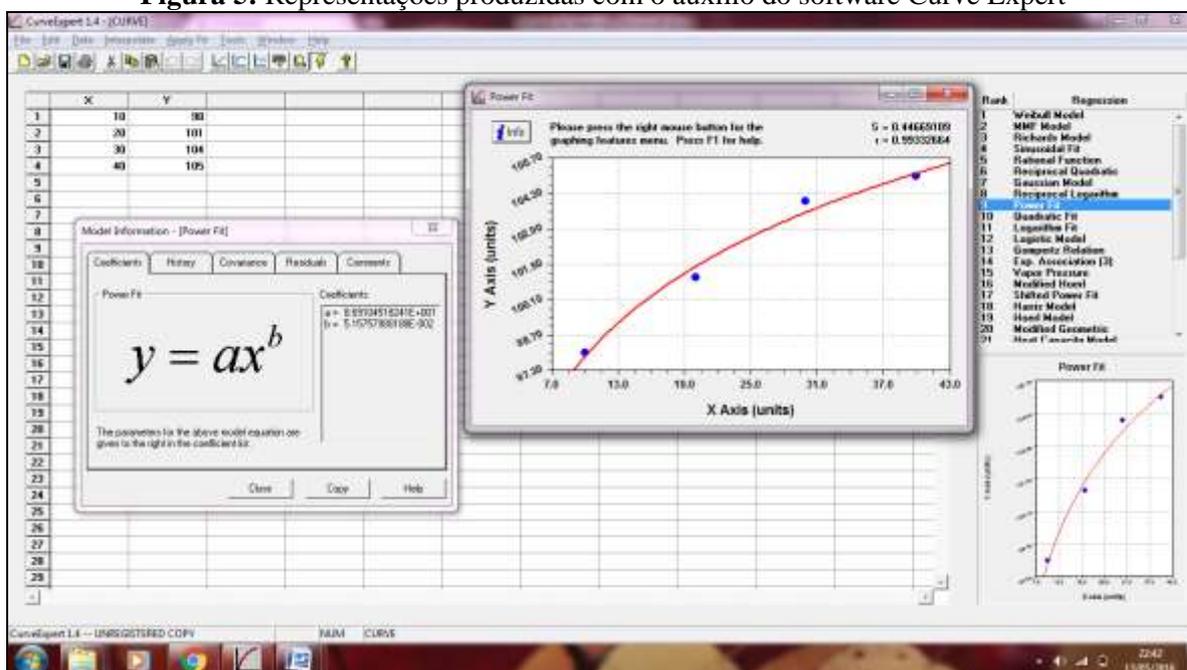
Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

Com o problema definido, bem como as informações utilizadas para simplificar o estudo da situação (com relação à saturação da solução), a matematização (busca de uma representação matemática para a situação) foi mediada pelo uso do software Curve Expert (software livre disponível para download no link <http://www.curveexpert.net/download/>, acesso em: 02 jan. 2017). A especificidade do trabalho em grupo necessita de um espaço diferente daquele presente nos laboratórios de informática da instituição, com isso, os alunos

fizeram uso de seus próprios computadores em sala de aula – um por grupo – já com os softwares matemáticos previamente instalados.

Com o auxílio do Curve Expert, o grupo obteve representações em forma de tabela, pontos no plano cartesiano, curva de tendência e expressão algébrica, como indicado na Figura 5.

Figura 5: Representações produzidas com o auxílio do software Curve Expert



Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

Corroboramos com Almeida, Silva e Veronez (2015, p.3) de que “as representações ocupam um papel importante no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e oferecem elementos para que a obtenção e a interpretação da solução sejam viabilizadas”. Para tanto, se faz necessário obter uma expressão algébrica da situação para auxiliar a obtenção de uma solução para o problema inicialmente proposto.

O software Curve Expert, apresenta uma lista de curvas de regressão que se ajustam aos pontos no plano cartesiano. Ao escolherem a curva representada por $y = 86,9x^{0,05}$, em que y é a temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) da solução de acordo com a quantidade de soluto x , em gramas, de cloreto de sódio, os alunos tecem considerações matemáticas e também não matemáticas que estão atreladas ao fenômeno em estudo, no caso a ebulioscopia, conforme consta na

transcrição a seguir:

Beto: Olha bem professora, a gente foi vendo cada uma das funções que o software nos sugeriu e achamos que essa a gente pode utilizar e até podemos estudar outras coisas que vimos na matéria, como limite e derivada.

P: E qual é o limite dessa função?

Beto: Ixi... o limite... bom e qual é essa função. Quem é o a e o b?

Gil: A Ana anotou todos os dados. O a é igual a oitenta e seis vírgula nove e o b é igual a zero vírgula zero cinco.

Beto: E professora, a gente tem que validar esses dados! Se for válido a gente pode usar né? Porque eu acho que ficou bom! Não sei se o pessoal concorda, mas eu acho que uma função potência é boa para nosso estudo aqui. O gráfico está parecido com aquele que vimos em um livro didático.

P: Ok, e o limite de uma função potência?

Beto: É, pode ir para o infinito ou para zero quando x aumenta. Se for positivo, vai para infinito e negativo vai para zero. No caso, temos zero vírgula zero cinco, então vai para o infinito, a temperatura. Só que a gente tem que considerar que a quantidade de soluto não pode ultrapassar aquele que satura a solução. Vamos validar o modelo e vemos se ficamos com ele.

O que podemos evidenciar é que os alunos se envolveram com a situação matematicamente, passando a considerá-la pessoal no sentido de apresentar à professora seus conhecimentos sobre conteúdos estudados na disciplina. O interesse de mostrar seus conhecimentos, para além da situação em estudo, nos possibilita inferir que os alunos apresentam intimidade com os conteúdos matemáticos. Dessa forma, elementos afetivos dos alunos interferem de forma positiva na sua aprendizagem. Isso é apontado por Troncon (2014) ao ser referir ao ambiente educacional: “Dentre os fatores de importância inquestionável, talvez o de maior relevância seja o envolvimento pessoal do educando” (p. 268).

A partir dos questionamentos realizados pela professora, os alunos entenderam que o modelo matemático descrito por $y = 86,9x^{0,05}$ precisa representar a situação. Representar a situação para esses alunos está associado à validação desse modelo matemático com a situação-problema. Por meio da validação, compararam os resultados obtidos com o modelo matemático com os dados coletados empiricamente, conforme consta na Figura 5.



Figura 5: Modelo matemático da atividade Ebulição de uma solução e sua validação

<u>soluto</u>	<u>temperatura de ebulição</u>	
10 g	98	93,30
20 g	103	100,94
30 g	104	103
40 g	107	109,50

Handwritten notes on the left:
 $y = 86,9 x^{0,05}$
 $y = \text{temperatura}$
 $x = \text{soluto}$

Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

Considerando o modelo matemático válido, os alunos obtêm uma solução para o problema que se propuseram a investigar: *Dependendo da quantidade de soluto, qual será a temperatura?* No caso, a temperatura de ebulição da solução.

No diálogo com a professora, menções sobre o estudo de objetos matemáticos como limite e derivada são destacados por Beto. Esse integrante do grupo deixa evidente o conhecimento do cálculo de limites de uma função potência quando destaca características do comportamento da função quando a potência é não negativa e quando é não positiva. Nesse caso, a expressão algébrica da função possibilita evidenciar conhecimentos de Beto para o objeto matemático limite de função potência.

Ao ser questionado pela professora sobre a menção ao cálculo da derivada da função e o que esta representa na situação em estudo, Beto responde:

Beto: Quando a gente tá lá na aula de química, no laboratório, não pensamos nessas coisas. Mas agora, na aula de cálculo onde vimos função, domínio, imagem, limite, derivadas e outras coisas que ainda veremos, a gente fica pensando como fazer uso disso. Eu pensei em calcular a derivada aqui. E já sabemos que derivada é a taxa de variação... aqui taxa de variação da temperatura de ebulição em função da quantidade de soluto misturado.

P: E essa taxa aí, o que ela representa, já que você a mencionou.

Beto: É uma função. Bom dá para fazer o gráfico, talvez com algum software e ver o comportamento dessa função. Aí outra coisa se a derivada é positiva, a função original é crescente, se é negativa, é decrescente. Dá para estudar ponto de máximo, mínimo e por aí vai. Se a gente tem o gráfico ajuda bastante nisso. Vamos calcular a derivada aqui e usar o GeoGebra para ver. O que acha professora, tá bom isso?

P: Decidam entre vocês e me comuniquem.

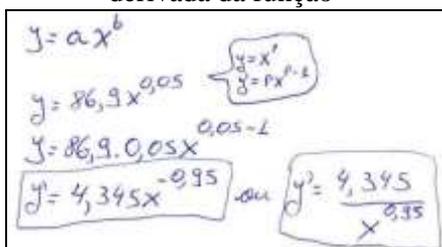
Beto: A professora nunca diz que sim nem que não. Que impasse. Mas vamos lá deixando cada vez mais, como se fala... sofisticado nosso modelo. [risos]

Ana: Sofisticado, sei... ficar mais trabalhoso isso sim. Vamos então né? Já que você insiste. [risos]

Os argumentos utilizados por Beto dão indícios de que o objeto depende do contexto

em que os alunos estão inseridos: “lá na aula de química, no laboratório, não pensamos nessas coisas. Mas agora, na aula de cálculo onde vimos função, domínio, imagem, limite, derivadas e outras coisas que ainda veremos, a gente fica pensando como fazer uso disso”. De fato, na aula de Química os alunos não têm a intenção de calcular derivadas, já no contexto da aula de Cálculo Diferencial e Integral essa intenção se faz presente, além de acreditarem atender às expectativas da professora – “O que acha professora, tá bom isso?”. Com esses propósitos, realizam algebricamente o cálculo da derivada (Figura 6) e a representam graficamente com o auxílio do software GeoGebra (software livre disponível para download no link <http://www.geogebra.org/download>, acesso em: 02 jan. 2017), conforme apresentado na Figura 7.

Figura 6: Cálculo algébrico da derivada da função



$$y = ax^b$$

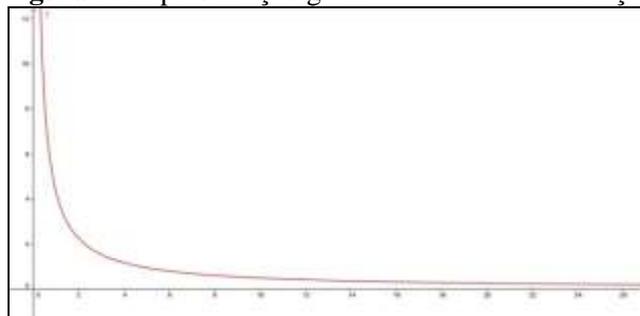
$$y = 86,9x^{0,05}$$

$$y' = 86,9 \cdot 0,05x^{0,05-1}$$

$$y' = 4,345x^{-0,95} \text{ ou } y' = \frac{4,345}{x^{0,95}}$$

Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

Figura 7: Representação gráfica da derivada da função



Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

Nesse momento, podemos evidenciar conforme já investigado por Borssoi, Silva e Ferruzzi (2016, p. 10), que “os procedimentos dos alunos na busca pela solução do problema perpassando pela estrutura matemática podem desencadear tarefas com potencial para desenvolver conceitos matemáticos”. As tarefas, enquanto *coisas a fazer* foram motivadas pela professora a partir dos argumentos utilizados por Beto: “a gente pode utilizar e até podemos estudar outras coisas que vimos na matéria, como limite e derivada”.

A representação gráfica da derivada auxiliou os alunos a tecerem algumas considerações, externalizando seus conhecimentos sobre esse conceito, conforme transcrição de conversa entre os integrantes do grupo:

Beto: Bem que eu falei, agora com o gráfico podemos falar algumas coisas da derivada.
Ana: E que coisas hein Beto! [risos]



*Gil: Vamos ver o que a gente fala, porque o Beto cismou de calcular a derivada e aí já viu. A professora se empolgou nas perguntas. Agora temos que resolver isso... ou sair pela tangente.
Beto: Calma, olha só. O gráfico todo acima do eixo y. Derivada é positiva em todo o seu domínio. E tinha que ser porque nossa função é crescente. A temperatura de ebulição aumenta com a quantidade de soluto.*

Gil: E esse decrescimento da derivada? Ou melhor, o decrescimento da taxa de variação?

Beto: Bom... a temperatura de ebulição aumenta, mas a uma taxa cada vez menor, por isso que ela é decrescente. Olha na tabela aqui do Excel que eu montei [apontando para a tela do computador] e vejam que essa terceira coluna mostra a diferença entre a temperatura de ebulição com uma quantidade de soluto menos a temperatura de ebulição da quantidade anterior. Tá vendo? Vai diminuindo gradativamente (Figura 8). Lógico que temos situação em que em determinado momento a solução satura e tanto o tempo como o ponto de ebulição se mantêm constantes. Mas o nosso modelo matemático representou de forma bem consistente o procedimento e a derivada também nos mostra a variação da temperatura pela quantidade de soluto.

De certa forma, a representação gráfica da função derivada fez emergir considerações sobre o estudo da função que representa a situação, assunto já estudado pelos alunos em aulas posteriores. No entanto, Beto ainda faz uso da representação tabular para validar o que a representação gráfica da função derivada representa para a situação diante do questionamento de Gil. Já que a temperatura de ebulição aumenta com o aumento da concentração de soluto, por que a derivada é uma função decrescente? Os argumentos produzidos pelos alunos a partir do gráfico da derivada são ainda validados por meio da representação em forma tabular na qual Beto realizou cálculos matemáticos (Figura 8), evidenciando que a atividade de modelagem possibilita determinar um ambiente em que o aluno expressa seu conhecimento compartilhando com outros.

Figura 8: Diferenças entre temperaturas de ebulição

14	10	97,50340368	
15	20	100,9418538	3,438450105
16	30	103,0091585	2,067304675
17	40	104,5015606	1,492402111
18	50	105,6740316	1,172471038
19	60	106,6417686	0,967736979
20	70	107,4668894	0,825120795
21	80	108,1868001	0,719910763
22	90	108,8258084	0,639008248
23	100	109,4006183	0,574809892
24	110	109,9232121	0,522593854
25			

Fonte: Relatório entregue pelos alunos.

Para o desenvolvimento desta atividade, os argumentos produzidos pelo grupo

representam aspectos matemáticos e não matemáticos da situação. Os alunos partem de dados coletados empiricamente e representados em uma tabela para, por intermédio de orientações da professora, configurarem um problema a ser estudado e que está em consonância com o que faz parte das aulas de química. Com o uso de recurso computacional, os dados são ajustados a uma curva que representa uma função potência que é analisada pelos alunos tanto no contexto matemático quanto no contexto não matemático, remetendo-se ao que já foi visto em livros didáticos. A expressão algébrica é analisada e validada pelo grupo no intuito de representar a situação e apresentar uma solução ao problema. Além dessa abordagem, a atividade possibilita desencadear tarefas em que os alunos aplicam conteúdos matemáticos estudados, possibilitando-os compartilhar conhecimentos.

Algumas considerações

Algumas configurações que temos investigado em nossas pesquisas sobre a implementação de atividades de modelagem matemática em sala de aula leva em consideração os momentos de familiarização, o trabalho em grupo, o manejo dos dados por parte dos alunos, a definição do problema a ser estudado e, principalmente, a abordagem do conteúdo matemático.

A partir do projeto de pesquisa *investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino*, nos debruçamos em evidenciar se as atividades de modelagem matemática são elementos determinantes para a caracterização do ambiente educacional almejado. Tomando como pressuposto teórico que o ambiente educacional precisa de elementos materiais, afetivos, pedagógicos e procedimentais que auxiliem a aprendizagem dos alunos, nosso olhar se voltou para o desenvolvimento de uma atividade em sala de aula proposta como de segundo de momento de familiarização. Desde a coleta de dados, os alunos lançaram mãos de elementos materiais oferecidos pela instituição, bem como de pessoas capacitadas para orientá-los. A troca de experiência entre a estudante de IC e os alunos foi importante para a aprendizagem com relação ao manejo dos equipamentos e materiais laboratoriais de forma que o experimento realizado tenha ocorrido de maneira satisfatória.

Em sala de aula, porém, o encaminhamento da atividade com os alunos reunidos em grupos em um mesmo ambiente e o uso de computador pessoal proporcionou o estudo e a análise da situação com vistas a obter um modelo matemático que pudesse representá-la. De posse dos conhecimentos químicos, matemáticos e computacionais, o ambiente educacional foi favorecido com o compartilhamento e incentivo entre os grupos que por vezes era motivado pela professora. Desde a definição de um problema a ser estudado até a escolha da curva que melhor representasse a situação, a responsabilidade recaiu para os alunos, tornando-os protagonistas do processo de ensino e de aprendizagem, seja do conteúdo matemático aplicado, seja do desenvolvimento da atividade de modelagem, cujo foco está nos encaminhamentos e procedimentos que mediam a transição da situação inicial para a situação final (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Embora tenhamos apresentado resultados parciais do projeto supracitado, podemos inferir que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula se configura em elemento determinante de um ambiente educacional, desde que o trabalho em grupo seja aporte para compartilhamento de conteúdos matemáticos e extramatemáticos, em que todos os integrantes estejam inseridos e participantes. Além disso, a atividade precisa assumir um caráter pessoal para os envolvidos que procurem buscar avançar no desenvolvimento da situação “[...] *deixando cada vez mais, como se fala... sofisticado nosso modelo [...]*”, conforme afirma Beto.

A atividade de modelagem, enquanto determinante de um ambiente educacional, também depende das orientações do professor em sala de aula. Essa orientação está atrelada à motivação dos alunos, a solicitar que discutam entre todos os envolvidos os melhores procedimentos e estratégias, bem como possibilitar o desencadeamento de tarefas a partir do interesse dos mesmos, visando evidenciar o conhecimento sobre alguns conteúdos trabalhados em sala de aula. Além disso, entender que o ambiente educacional deve ser regado pelo companheirismo entre os membros do grupo e a atenção do professor quando solicitado, valorizando as propostas elencadas.

A avaliação do ambiente educacional permeado por atividades de modelagem matemática deve ser realizada constantemente pelo professor que pode realizar adaptações e aprimoramentos da atividade com o objetivo de auxiliar na aprendizagem. Nesse sentido, para

além das atividades caracterizadas como de segundo momento de familiarização, também temos como foco no projeto investigar se aquelas caracterizadas como de primeiro e terceiro momentos são determinantes para a caracterização do ambiente educacional e se uma mesma atividade desenvolvida com diferentes turmas pode desencadear tarefas que fomentem um ambiente educacional.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq, processo 457765/2014-3.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; BORSSOI, A. H.; TORTOLA, E.; SILVA, K. A. P. (Eds.).

Modelagem Matemática em debate: diálogos, reflexões e desafios. EPMEM 7. Londrina: UEL, UTFPR, 2016.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP). v. 31, n. 57, abr. 2017, p. 202-219.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. The Meaning of the Problem in a Mathematical Modelling Activity. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.).

Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences. ICTMA 16. New York: Springer, 2015, p. 45-54.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Sobre a geração e a interpretação de signos em atividades de modelagem matemática. In: VI SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis - GO. **Anais do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Pirenópolis - GO, 2015. v. 1. p. 1-13.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002.

BLOMHØJ, M; KJELDSSEN, T. H. Students' reflections in Mathematical Modelling Projects. In: KAISER, G. *et al.* (Ed.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: international perspectives on the teaching and learning of mathematical modeling.** ICTMA 14. New York: Springer, 2011, p. 385-395.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; FERRUZZI, E. C. Tarefas desencadeadas em aulas com modelagem matemática. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais... Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. v. 1. p. 1-12.

IGLIORI, S. B. C.; BELTRÃO, M. E. P. Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações em um Curso Superior Tecnológico. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n. 42, nov. 2015, p. 55-76.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação, 2014, p. 13-30.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.; GERÔLOMO, A. M. L. “Aprendendo” a fazer modelagem matemática: a vez do aluno. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, v. 1, p. 28-36, 2011.

TREVISAN, A. L.; BORSSOI, A. H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo. In: VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM**. Brasília: SBEM, 2015. v. único. p. 1-12.

TRONCON, L. E. A. Ambiente educacional. **Revista Medicina**. Ribeirão Preto. V. 47, n. 3, 2014, p. 264-271.

Recebido em: 03/01/2017
Aprovado em: 02/05/2017