revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

ESTRUTURA MULTIPLICATIVA DE NÚMEROS RACIONAIS NA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA: INDICATIVOS DE TEOREMAS EM AÇÃO

Marlí Schmitt Zanella*
Rui Marcos de Oliveira Barros**

Resumo
Este artigo é um ensaio teórico sobre a estrutura multiplicativa de números racionais na representação fracionária, que teve como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). O objetivo foi identificar elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, mediante releitura do trabalho *Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions*[1] de Tirosh (2000), que descreveu uma pesquisa realizada com 30 alunos que cursavam o segundo ano de licenciatura em Matemática da Faculdade de Professores de Israel, em que foram investigados os procedimentos algorítmicos para a divisão de números racionais sob a representação fracionária. A coleta de dados de Tirosh (2000) ocorreu mediante aplicação de questionários e entrevistas. Como resultados, identificamos para a estrutura multiplicativa, a partir do referencial teórico adotado, situações problemas classificadas como isomorfismo de medidas. Nessas situações, as respostas dos estudantes indicaram a presença de teoremas em ação, tais como: quociente menor do que o dividendo, dividendo maior do que o divisor e, numa divisão de frações dividiram numerador por numerador e denominador por denominador. Destacamos que a identificação desses elementos para o campo conceitual multiplicativo poderá auxiliar professores na elaboração e escolha de atividades para a formação e desenvolvimento dos conceitos envolvidos na estrutura multiplicativa de números racionais na representação fracionária.
Palavras-chave: Estrutura Multiplicativa. Teorema em ação. Números Racionais na Representação Fracionária.

MULTIPLICATIVE STRUCTURE IN RATIONAL NUMBERS FRACTIONAL REPRESENTATION: INDICATIVES OF THEOREMS IN ACTION

Abstract
This article is a theoretical essay on the multiplicative structure of rational numbers in fractional representation, which had the theoretical foundation to the Conceptual Fields Theory (CFT). The goal was to identify elements of CFT - Situations, Invariants and Representations by rereading the work Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions of Tirosh (2000), who described a survey of 30 students who attended the second year undergraduate in the Faculty of Mathematics Teachers of Israel, where the algorithmic to the division of rational numbers under the fractional representation procedures were investigated. The data collection Tirosh (2000) occurred through questionnaires and interviews. As a result, we identified for the multiplicative structure, from the

[1] Melhorar o conhecimento dos futuros professores para as concepções das crianças: o caso da divisão de frações.

theoretical approach situations and problems classified isomorphism of measures. In these situations, students' responses indicated the presence of theorems in action, such as quotient less than the dividend, dividend greater than the divisor and division of fractions in the numerator divided by the denominator and numerator by the denominator. We emphasize that the identification of these elements to the multiplicative conceptual field may assist teachers in the development and choice of activities for the training and development of the concepts involved in the multiplicative structure of rational numbers in fractional representation.
Keywords: Multiplicative structure. Theorem in action. Rational Numbers in Fractional Representation.

Introdução

Neste trabalho, objetivamos investigar por meio da pesquisa bibliográfica a presença de elementos da Teoria dos Campos Conceituais – TCC, tais como identificar tipos de situações problemas da estrutura multiplicativa envolvendo números racionais na representação fracionária, bem como identificar indicativos da presença de invariantes operatórios e, representações, mobilizados por futuros professores de Matemática ao resolverem tais situações problemas.

O estudo teórico que ora apresentamos ocorreu mediante releitura do trabalho de Dina Tirosh, intitulado *Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions*[2] publicado em 2000, no *Journal for Research in Mathematics Education*, volume 31. Neste trabalho, a autora descreveu uma pesquisa realizada com 30 alunos, que cursavam o segundo ano de licenciatura em Matemática da Faculdade de Professores do Estado de Israel, sobre a estrutura multiplicativa de números racionais em sua representação fracionária. A escolha deste trabalho justifica-se em função da explicitação dos diálogos entre alunos e suas estratégias de resolução centradas em procedimentos algorítmicos para a divisão de frações.

A pesquisa bibliográfica, que culminou na seleção do artigo de Tirosh (2000), ocorreu por meio dos periódicos disponibilizados no Portal CAPES[3], entre novembro/2011 e março/2012, na área de Educação, nível A1.

---

2 Melhorar o conhecimento dos futuros professores para as concepções das crianças: o caso da divisão de frações.
[3]Disponível em: <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

Percurso metodológico

O material consultado constituiu-se de periódicos, na forma eletrônica e foi submetido ao Método de Leitura Científica, a partir de passos sistematizados (CERVO e BERVIAN, 1996), a saber:

Visão sincrética – ocorre com a leitura de reconhecimento, que tem como objetivo localizar as fontes, numa aproximação preliminar sobre o tema e, a leitura seletiva, localizando as informações de acordo com os propósitos do estudo.

Visão analítica – compreende a leitura crítica e reflexiva dos textos selecionados, na busca dos significados e das ideias principais.

Visão sintética – constituiu a última etapa do Método de Leitura Científica, que é concretizada pela leitura interpretativa.

A abordagem por meio do Método de Leitura Científica possibilitou a construção do presente ensaio teórico, que consistiu na exposição lógico-reflexiva, com ênfase na argumentação e interpretação pessoal, sob o embasamento teórico proposto pela Teoria dos Campos Conceituais.

A pesquisa bibliográfica ocorreu por meio dos periódicos disponibilizados pelo Portal de Periódicos CAPES. O primeiro passo foi pesquisar artigos que tinham como objeto de estudo os números racionais em sua representação fracionária. Para isto, iniciamos nossa busca por assunto, inserindo os termos: *fractions* e *rational numbers*. Em virtude do grande número de trabalhos contendo no título algumas dessas palavras, identificamos aqueles publicados em periódicos específicos da área de Avaliação da Educação, classificados em nível A1, a maior classificação de Qualis da CAPES. Tal busca foi realizada no período de novembro de 2011 a março de 2012. O segundo passo foi selecionar aqueles que tratassem das operações matemáticas de multiplicação e divisão, para na sequência, selecionar aqueles que tivessem sido realizados com acadêmicos de Licenciatura em Matemática.

Desta forma, os artigos selecionados foram submetidos ao Método de Leitura Científica para obter uma visão sincrética desses trabalhos, e os critérios para seleção destes artigos foram:

- Tema de investigação: Números Racionais na representação fracionária.
- Público alvo: acadêmicos de Licenciatura em Matemática.
- Tipo de atividades realizadas na pesquisa: aquelas que realizaram atividades com multiplicação e divisão de números racionais na representação fracionária.
- Tipo de pesquisa: aquelas que explicitaram o diálogo entre alunos, entre professor/pesquisador e alunos ou que apresentaram as expressões utilizadas durante o processo de resolução de um problema, isto é, a simbologia verbal, escrita, desenhos e diagramas que o aluno usou para representar as situações propostas nas atividades.

Em virtude dos objetivos deste estudo e dos critérios para a seleção final dos artigos, apresentados anteriormente, identificamos apenas três (03) trabalhos com tais características, dos quais, neste artigo apresentamos uma releitura do trabalho de Tirosh (2000), que foi submetido aos passos sistematizados de visão analítica e sintética, sugeridos por Cervo e Bervian (1996). Na sequência, apresentamos considerações acerca da TCC, referencial teórico que fundamentou a releitura do artigo de Tirosh (2000).

A teoria dos campos conceituais - TCC

A TCC proporciona o estudo das ações dos alunos e as condições de produção, de registro e de comunicação durante situações de aprendizagem. Proporciona ao professor uma compreensão das ações do estudante, fornecendo subsídios para a organização dos conteúdos em sala de aula, de modo a privilegiar uma diversidade de situações problemas relacionadas ao mesmo conceito. De acordo com Vergnaud (1993, p.1), a TCC preocupa-se com a formação e o desenvolvimento de conceitos, visto que é “[...] uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual”.

A formação e o desenvolvimento de um conceito devem emergir a partir de situações problemas que levem em consideração: a representação e o conceito e, os invariantes operatórios (conceitos e teoremas em ação) na situação problema (VERGNAUD, 2009).

Para estudar a formação e o desenvolvimento de um conceito durante a aprendizagem dos educandos, Vergnaud (1993) ressalta a importância de considerarmos o conceito formado por uma terna de conjuntos (*S*, *I*, *Y*), a saber:

> *S* conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência). *I* conjunto dos invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado). *Y* conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (VERGNAUD, 1993, p.8).

As situações, os invariantes e as representações são conjuntos indissociáveis para estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito durante os processos de ensino e de aprendizagem. Entretanto, não podemos afirmar que há uma bijeção entre tais conjuntos, ou seja, não se pode reduzir o significado ao significante, nem às situações, e vice-versa. Deste modo, há uma estreita relação entre situação e conceito, de modo que um conceito não assume o seu significado numa única classe de situações e que, uma situação não se analisa por meio de um único conceito.

Para uma classe de situações, o aluno tem várias decisões a tomar, e estas são também objeto de uma organização invariante. De acordo com Magina *et al*. (2008), o conjunto de invariantes compreende objetos, propriedades e relações que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito em ação. Em muitos casos, os invariantes expressam a compreensão que o educando possui sobre determinado conceito, ou seja, os invariantes dão significado ao conceito. Os invariantes dividem-se em: proposição e função proposicional, explicitados no Quadro 01.

Quadro 01: Proposição e função proposicional

Proposição	Função proposicional
São teoremas em ação implícitos e têm validade local, ou seja, são verdadeiros apenas para um conjunto de situações.	São conceitos em ação implícitos, que se assumem pertinentes na ação.

Fonte: Autores

A ação operatória de um conceito deve ser analisada por meio de uma variedade de situações. A TCC valoriza os aspectos estruturais dos invariantes, analisando-os do ponto de vista dos próprios saberes constituídos. De acordo com Vergnaud (1993), a TCC procura dar um conteúdo matemático às organizações das condutas observáveis em situação. Com isto, podemos compreender a reciprocidade do processo de transformação das situações e dos conhecimentos em sua relação com os conceitos.

Nas relações multiplicativas, Vergnaud (2009) ressalta que podemos distinguir duas categorias principais, o isomorfismo de medidas e o produto de medidas. Estas possuem relações entre si, pois, quando realizamos uma análise dimensional e utilizamos, por exemplo, um operador-função para a solução de situações problemas de isomorfismo de medidas, podemos encontrar o produto de medidas.

De acordo com Vergnaud (2009), pode-se interpretar o produto de medidas como um isomorfismo duplo, ou, dupla proporcionalidade. Geralmente, os estudantes possuem mais dificuldades com o produto de medidas do que com o isomorfismo, a não ser que este seja interpretado como dupla proporção. O autor destaca também que existem dimensões simples, como comprimento, tempo, peso, custo, dimensões produto compostas por área e volume, e as dimensões quociente, dos quais pertence a velocidade, densidade ou valor unitário

O **isomorfismo de medidas** é uma relação quaternária entre quatro quantidades, sendo, duas a duas, medidas diferentes, e uma dessas quantidades corresponde ao valor unitário. Há três classes de problemas, subdivididas em multiplicação, divisão em que se busca o valor unitário, e a divisão em que se busca a quantidade de unidades. Vergnaud (2009) destaca que essas três classes do isomorfismo de medidas, podem ser subdivididas em numerosas subclasses, variando apenas o conjunto numérico (inteiros pequenos e grandes, números decimais e decimais inferiores a um), bem como a busca pelo valor unitário ou a quantidade de unidades.

O **produto de medidas** permite distinguir duas classes de problemas: a multiplicação e a divisão. A multiplicação é aquela em que se busca a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares. A divisão é aquela que se deseja encontrar as medidas elementares, conhecendo-se uma medida elementar e a medida produto. Estão subdivididas em: produto discreto-discreto, produto contínuo-contínuo e noção de média. Na sequência, apresentamos uma releitura do artigo de Tirosh (2000), com base no referencial teórico proposto pela TCC.

Conhecimento mobilizado por futuros professores de Matemática sobre a divisão de frações: uma releitura a partir da TCC

O artigo *Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions*[4] de Dina Tirosh, foi publicado em 2000, no *Journal for Research in Mathematics Education*, volume 31. Neste trabalho, a autora investigou os procedimentos algoritmos mobilizados para a divisão de frações, de 30 alunos que cursavam o segundo ano de licenciatura em Matemática da Faculdade de Professores do Estado de Israel. A coleta de dados ocorreu mediante aplicação de questionários e entrevistas.

As atividades propostas no questionário inicial estavam centradas em procedimentos algorítmicos para a divisão de frações. Os estudantes foram estimulados a discutir sobre por que os algoritmos matemáticos, teoremas, e operações estão estabelecidos de tal maneira e de forma inquestionável, para proporcionar-lhes uma reflexão sobre sua própria compreensão destes conceitos matemáticos.

Tirosh (2000) descreveu os principais tipos de erros que os alunos cometeram durante a divisão de frações, organizados em três classes: (i) erros baseados no algoritmo, (ii) erros baseados na intuição e (iii) erros baseados no conhecimento formal (TIROSH, 2000).

[4] Melhorar o conhecimento dos futuros professores para as concepções das crianças: o caso da divisão de frações.

Erros baseados no algoritmo: os mais comuns foram trocar o dividendo pelo divisor, ou inverter os termos do dividendo e divisor antes de multiplicar numerador e denominador. De acordo com Tirosh (2000), tais erros geralmente ocorrem quando um algoritmo é visto como uma série de passos memorizados.

Erros baseados na intuição: provenientes da interpretação de divisão partitiva, em que um objeto ou uma coleção de objetos são divididos em partes iguais. Esta interpretação é uma extensão das propriedades das operações com os números naturais para as frações, e impõe três restrições sobre a operação de divisão: "o divisor deve ser um número inteiro; o divisor deve ser menor do que o dividendo; e o quociente deve ser menor do que o dividendo"[5] (Ibid., p.7).

Erros baseados no conhecimento formal: provenientes, tanto às concepções limitadas da noção de fração, quanto ao conhecimento inadequado relacionado às propriedades das operações com frações (FISCHBEIN *et al*., 1985).

No Quadro 02 apresentamos exemplos de erros cometidos pelos estudantes, elencados por Tirosh (2000), em cada classe. Juntamente, faremos nossa análise, com embasamento teórico proposto pela TCC.

Quadro 02: Classificação de erros identificados por Tirosh (2000)

Tipo de erro identificado por Tirosh (2000, p. 7).	Exemplo de cálculo apresentado pelos alunos	Descrição
Erros baseados no algoritmo	$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{1}{2} = 2$	O aluno utilizou a regra "na divisão de frações, inverter o 2º termo da fração (divisor) e em seguida, multiplicar os termos", mas equivocou-se e inverteu o dividendo.
Erros baseados na intuição	$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$	A justificativa do aluno para este caso parece estar baseada na divisão entre dois números naturais, em que ele considerou o dividendo sendo maior do que o divisor. Mas isso é um caso particular, pois, de acordo com o algoritmo da divisão de Euclides, para quaisquer dois números naturais a e b, temos: $a = q \times b + r$ Onde, $a, b, q, r \in \mathbb{N}$, a é o dividendo, b o divisor, q o quociente e $r < b$ o resto da divisão.

[5](a) The divisor must be a whole number; (b) the divisor must be less than the dividend; and (c) the quotientmust be less thanthe dividend (TIROSH, 2000, p.7, tradução nossa).

		Embora o estudante cometesse um equívoco em trocar o dividendo pelo divisor, ele demonstrou ter conhecimento adequado para operar na divisão entre $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$. Também identificou que $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. Esta estratégia, possivelmente, indica um **teorema em ação** falso, mobilizado pelo aluno.
Erros baseados no conhecimento formal	$1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$	A justificativa para a troca do dividendo pelo divisor consiste na afirmação: "a divisão é comutativa". Entretanto, a comutatividade tem validade na adição e multiplicação de naturais. Desta forma, tem domínio de validade restrita, e caso essa ação seja repetida pelo aluno, possivelmente, seria considerado um **teorema em ação** falso.

Fonte: Autores

Embora os exemplos de erros das categorias (ii) e (iii) pareçam ocorrer de maneira análoga, as origens destes são diferentes. Conhecer que tipos de erros os alunos cometem é uma ação importante para o professor, especialmente, para realizar atividades adequadas e auxiliar seus alunos a superar tais equívocos.

As experiências dos estudantes com os números naturais, quando são generalizadas para com os números racionais na representação fracionária, podem gerar nestes estudantes, erros baseados na intuição e no conhecimento formal, como definidos por Tirosh (2000) e exemplificados no Quadro 02. Entretanto, seria necessário realizar uma investigação mais apurada, por meio de uma sequência de atividades com variadas situações, para afirmar que esses erros, caso persistissem, são teoremas em ação.

Na divisão de números naturais, as proposições a seguir são consideradas pertinentes: "o divisor é um número inteiro", "divisor e/ou quociente são menores do que o dividendo". Entretanto, estas proposições são falsas na divisão entre números racionais na representação fracionária e/ou decimal, pois podem ocorrer casos em que o divisor é maior do que o dividendo, como por exemplo, $\frac{1}{2} \div 2$, ou o quociente é maior do que o dividendo, como por exemplo, $2 \div \frac{1}{4} = 8$.

Analogamente, a proposição de que "a divisão é comutativa" é falsa para a operação de divisão, tanto nos números naturais, como nos números racionais. Entretanto, é verdadeira para as operações de adição e multiplicação de números naturais e racionais.

Em seu trabalho, Tirosh (2000) expõe o diálogo de alguns alunos e as respostas dadas por eles durante a realização do questionário inicial e entrevistas. Isto possibilitou analisá-los com aporte teórico da TCC.

O questionário aplicado aos futuros professores permitiu identificar o conhecimento destes sobre a divisão de frações, tanto em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, quanto ao objeto de conhecimento. Na sequência, apresentamos as atividades propostas e faremos nossas inferências, segundo a TCC.

Atividade 1A: divisão entre frações.

A primeira atividade proposta solicitava aos acadêmicos que resolvessem quatro equações envolvendo divisão entre frações. As respostas dos estudantes estão apresentadas no Quadro 03, seguido de inferências teóricas dadas pela TCC.

Quadro 03: Estratégia dos alunos, identificados na atividade 1A

Equação envolvendo divisão entre frações (TIROSH, 2000, p. 9).	Cálculo apresentado pelos acadêmicos (TIROSH, 2000, p. 9).	Descrição
$a)\ \frac{1}{4} \div 4 =$	$a_1)\ \frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{4} \times 4 = 1$	Dois (02) estudantes indicaram que o quociente entre $\frac{1}{4}$ e 4 é igual a um (1). Neste erro, os estudantes substituíram a operação de divisão pela multiplicação. Para eles, ainda não faz sentido ter o dividendo menor do que o divisor.
	$a_2)\ \frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$	Os demais estudantes (28) indicaram o resultado correto, $\frac{1}{16}$. Inverteram o divisor e multiplicaram os termos para obter o valor do quociente.
$b)\ \frac{1}{4} \div \frac{3}{5} =$	$b_1)$ $\frac{1}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$	Um (01) estudante tentou utilizar a regra "na divisão de frações, inverter os termos do divisor e em seguida, multiplicar os termos", mas equivocou-se e inverteu os termos do dividendo e do divisor.
	$b_2)$	Os demais estudantes (29) utilizaram o algoritmo da divisão entre frações

	$\frac{1}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{12}$	corretamente, ou seja, manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração. Esta estratégia pode indicar, nas respostas dos alunos, a utilização de um **teorema em ação**.
$c)\ 4 \div \frac{1}{4} =$	$c_1)$ $4 \div \frac{1}{4} = 16$	A justificativa verbal dada pelos estudantes é proveniente da relação parte-todo. A resposta dada é pertinente na ação: "Cada unidade tem 4 pedaços de $\frac{1}{4}$, então em 4 unidades tem 16 pedaços". Entretanto, essa estratégia é reconhecida pelos alunos quando se trata da divisão de um número inteiro por uma fração. Quando se trata da divisão entre duas frações, o mesmo raciocínio não é utilizado. Os estudantes recorrem ao seguinte procedimento para realizar esta divisão: manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração. Assim, a resposta dos alunos indica a possibilidade de um **teorema em ação**.
$d)\ 320 \div \frac{1}{3} =$	$d_1)\ 320 \div \frac{1}{3} = 106{,}666\ ...$	Dois (02) alunos apresentaram este resultado. Eles dividiram 320 por 3, o que demonstra não compreender a divisão entre frações. Para os estudantes o resultado fazia sentido, pois, na divisão o quociente diminui, e ainda, o dividendo é maior do que divisor. Assim, a resposta dos alunos indica a possibilidade de mobilização de um **teorema em ação**, pois tais propositivas não são válidas para os números racionais, ou seja, na divisão de racionais: "nem sempre o quociente diminui" ou "nem sempre o dividendo é maior do que o divisor".
	$d_2)$ $320 \div \frac{1}{3} = 320 \times \frac{3}{1} = 960$	Os demais estudantes (28) apresentaram o quociente correto. As respostas dos alunos indicam a possibilidade de mobilização de um **teorema em ação**, pois se utilizam do procedimento algorítmico para resolver a divisão de um número inteiro por uma fração: manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração.

Fonte: Autores

Na primeira atividade proposta por Tirosh (2000), a sequência de ações que os estudantes têm a efetuar é breve, entretanto, não seria possível, tanto para a criança quanto para o adulto, se as ações não se apoiassem sobre o conhecimento das relações pertinentes para tal estrutura: na divisão entre frações, manter o dividendo e inverter o divisor, para então multiplicar os termos. Não se aplica a regra sem tê-la compreendido.

De acordo com Vergnaud (2009), os algoritmos são também relações, e por isso, são calculáveis: grande parte das operações que se desenvolvem no plano das representações tem por objetivo encontrar algoritmos. Se as ações dos estudantes se situam no plano da realidade, os algoritmos pertencem ao domínio da representação, portanto são regras de ação e deve dar conta do conjunto de comportamentos que podemos observar.

Portanto, é tarefa do professor buscar as relações que o educando compreendeu, tanto para o que ele compreendeu modo equivocado, como para o que ele ignora simplesmente. O conceito de teorema em ação designa as propriedades das relações que o estudante utiliza para resolver uma situação problema, ou mesmo um exercício. No entanto, isso não significa que este aluno possui capacidade de explicitar ou de justificar essas propriedades (VERGNAUD, 1981). Neste sentido, identificar um teorema em ação a partir das respostas do aluno permite ao professor interpretar a ação desenvolvida pelo estudante em dada situação.

Os estudantes não adquirem hábitos, mas regras, as quais podem usar em problemas novos. Estes alunos não as adquirem solidamente, a menos que as compreendam e percebam as relações que as regras mantêm com a estrutura relacional das situações problemas às quais se aplicam.

Atividade 2A: Problema 1 - Uma fita de cinco metros de comprimento foi dividida em 15 partes iguais. Qual é o comprimento de cada pedaço desta fita?

De acordo com Tirosh (2000), dos trinta (30) acadêmicos, oito (08) deram 15/5 como resposta ao Problema 1. Enquanto que o correto seria 5/15. Fundamentados em Vergnaud (2009), é possível identificar que, neste problema, existe um isomorfismo de medidas. Na Figura 01, apresentamos uma solução para o Problema 1, segundo os pressupostos teóricos de Vergnaud (2009).

Figura 01: Representação de uma solução para o problema1, de acordo com a TCC

Comprimento (metro)	Pedaços de mesmo comprimento (unidades)
x ←	1
5 ←	15

Fonte: Autores

A equação correspondente ao esquema do Problema 1 é dada por:

$$\frac{5}{x} = \frac{15}{1} \Rightarrow 15.x = 5.1 \Rightarrow x = \frac{5}{15} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Para a resolução desta situação utiliza-se regra de três simples, obtendo-se que cada pedaço de fita tem 1/3 metro. Para a análise vertical, centrada na noção de operador escalar (sem dimensão) permite passar de uma linha à outra na mesma categoria de medidas. Desta forma, o operador vertical é dado pela divisão por 15 (÷ 15). Podemos representar o operador vertical da seguinte maneira:

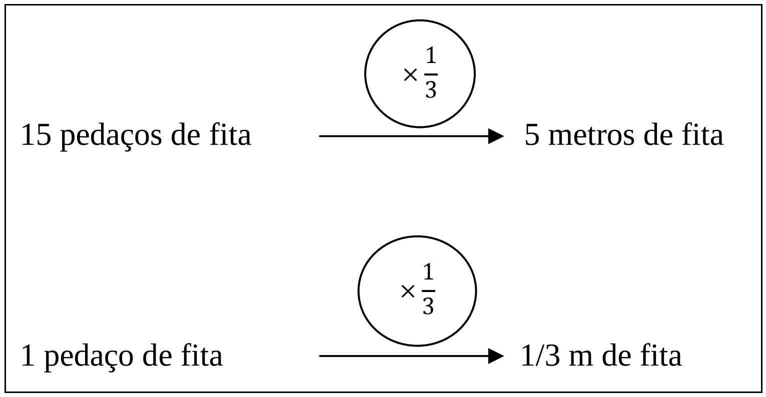
Figura 02: Representação de uma solução para o Problema 1 – operador vertical

5 m de fita	15 pedaços de fita
↓ ÷ 15	↓ ÷ 15
1/3 m de fita	1 pedaço de fita

Fonte: Autores

O operador horizontal é uma função relacional que expressa a passagem de uma categoria de medidas à outra, nesse caso, expressa a passagem entre a quantidade de partes (pedaços) de fita e a quantidade total de fita (metros).

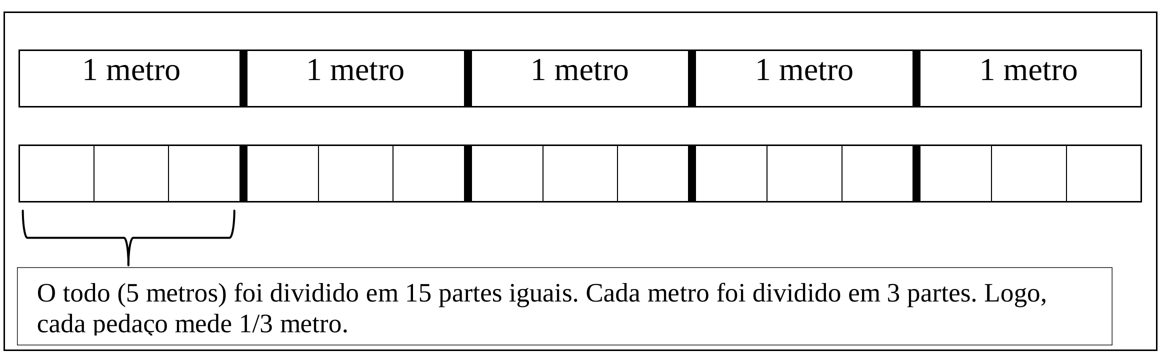
Figura 03: Representação de uma solução para o problema 1 – operador horizontal



Fonte: Autores

Assim, há duas possibilidades de determinar o comprimento *x*, em metro, de cada pedaço de fita. A primeira consiste em aplicar o operador vertical, sem dimensão, (÷ 15) aos 5 metros de fita. A segunda consiste em aplicar a função relacional: 1 pedaço de fita vezes um terço $\left(\times \frac{1}{3}\right)$ para obter o comprimento de um pedaço de fita. Na Figura 04 representa-se uma solução do problema a partir da relação parte-todo.

Figura 04: Representação de uma solução para o Problema 1



Fonte: Autores

Apesar de não ser propriamente uma teoria didática, a TCC permite ao professor, a partir das respostas dos alunos, planejar situações problemas nas quais se exploraram o uso do operador horizontal e do operador vertical.

Atividade 3A: Problema 2 - Quatro amigos compraram 1/4 kg de chocolate e dividiram igualmente. Quantos quilogramas de chocolate cada pessoa recebeu?

De acordo com Tirosh (2000), 12 acadêmicos deram como resposta ao Problema 2, a seguinte equação: $\frac{1}{4} \times 4$, que é um erro. Os demais justificaram a resposta, pelo seguinte raciocínio: "Se cada unidade tem 4 pedaços de $\frac{1}{4}$, então em 4 unidades serão 16 pedaços", ou seja, o mesmo raciocínio utilizado na questão c_1, apresentado no Quadro 03. Desta forma, inferimos que a resposta dada a este problema, pela maioria dos alunos indica a possibilidade de um teorema em ação. Fundamentados em Vergnaud (2009), um esquema referente ao Problema 2, é representado na Figura 05.

Figura 05: Representação de uma solução para o problema 2

Sujeito	Chocolate (quilogramas)
4	$\frac{1}{4}$
1	x

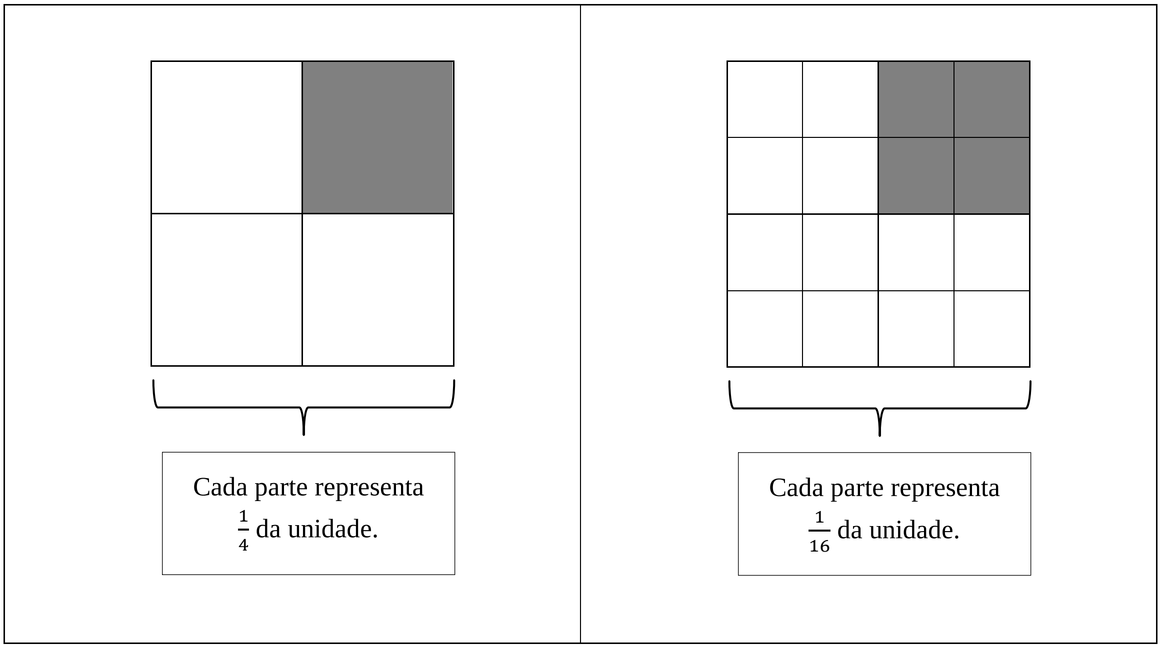
Fonte: Autores

A equação correspondente ao esquema do problema 2 é dada por:

$$\frac{4}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{x} \Longrightarrow 4.x = \frac{1}{4}.1 \Longrightarrow x = \frac{\frac{1}{4}}{4} \Longrightarrow x = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} \Longrightarrow x = \frac{1}{16}$$

Para a resolução desta situação, utiliza-se regra de três simples, e na sequência realiza-se a divisão, obtendo-se que, cada pessoa recebeu 1/16 Kg de chocolate.

Figura 06: Representação de uma solução para o Problema 2



Fonte: Autores

A Figura 06 ilustra a representação da solução para o Problema 2, e favorece a compreensão de que “o quociente deve ser menor do que o dividendo” (TIROSH, 2000, p.7), muito embora nem sempre isto ocorra com os números racionais na representação fracionária, como é apresentado no Problema 3.

Atividade 4A: Problema 3 – Quatro (4) kg de queijo foram acondicionados em embalagens de 1/4 kg cada um. Quantos pacotes devem embalar esta quantidade de queijo?

Fundamentados em Vergnaud (2009), uma solução para o Problema 3, é representado na Figura 07.

Figura 07: Representação de uma solução para o Problema 3, segundo a TCC

Quantidade de queijo (Kg)	Quantidade de pacotes (unidades)
4 $\longrightarrow$	X
$\frac{1}{4}$ $\longrightarrow$	1

Fonte: Autores

A equação correspondente ao esquema do Problema 3 é dada por:

$$\frac{4}{\frac{1}{4}} = \frac{x}{1} \Rightarrow \frac{1}{4}.x = 4.1 \Rightarrow x = 4.\frac{4}{1} \Rightarrow x = 16$$

Note que esta situação é resolvida por regra de três simples, na qual o estudante irá manipular a multiplicação e a divisão para determinar a quantidade de pacotes em que serão embalados 4 Kg de queijo. Desta forma, conclui-se que para embalar 4 Kg de queijo em pacotes contendo ¼ Kg de queijo cada, tem-se 16 pacotes.

A resposta dada pelos acadêmicos "Cada quilograma de queijo gera 4 pacotes de $\frac{1}{4}$ Kg, então 4 Kg gera 16 pacotes" permite mostrar-lhes que nem sempre o quociente é menor do que o dividendo. Neste caso ocorre o contrário: o dividendo é menor do que o quociente ou ainda o dividendo é maior do que o divisor. O raciocínio utilizado é o mesmo apresentado à questão c_1, descrito no Quadro 03. Assim, inferimos que a resposta dada a este problema, indica a possibilidade de um teorema em ação. Os problemas 1 e 2 são do tipo partitivo, e o 3º é um problema de medição. Fundamentados em Vergnaud (2009) estes problemas podem ser classificados como isomorfismo de medidas.

Atividade 5A: discussão sobre o algoritmo da divisão

A pesquisadora Tirosh (2000), propôs aos acadêmicos uma discussão acerca do procedimento para a divisão entre frações, a partir do seguinte questionamento:

É fácil multiplicar frações, basta multiplicar os numeradores e os denominadores. Eu acho que deveríamos definir a divisão entre frações de forma semelhante:

$$Divisão: \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$$

No Quadro 04 apresenta-se o diálogo entre a pesquisadora e os estudantes Lili, Yael, Efrat, Miki, Tili, Sally para a atividade em que foi solicitado discutir o algoritmo para a divisão.

Quadro 04: Diálogo entre os acadêmicos Lili, Yael e Tili

Diálogo entre a pesquisadora e a estudante Teresa (TIROSH, 2000, p.14).	Tradução dos autores
Lili: So, we are left with division. Let's do the same thing. For instance, 16 : 2 = 8. 16 = 16/1; 2 = 2/1. According suggestions, we get: $16 \div 2 = \frac{16}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{16 \div 2}{1 \div 1} = 8$	**Lili:** Então, ficamos com a divisão. Vamos fazer a mesma coisa. Por exemplo, 16 : 2 = 8. 16 = 16/1, 2 = 2/1. De acordo com sugestões, obtemos: $16 \div 2 = \frac{16}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{16 \div 2}{1 \div 1} = 8$
Yael: This is probably a specific case. We have to find an example in which this does not work. Let's try another example.	**Yael:** Este é provavelmente um caso específico. Temos que encontrar um exemplo em que isso não funciona. Vamos tentar outro exemplo.
Yael: No. It's impossible. If it was correct, why would anyone use the complicated invert-and-multiply algorithm?... We need only one example... Let's try expressions such as $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1 \div 1}{2 \div 2} = 1$ This works too. Let's try a number that is not divided.	**Yael:** Não. É impossível. Se fosse correto, por que alguém iria usar o algoritmo complicado inverter e multiplicar? ... Precisamos apenas um exemplo ... Vamos tentar expressões como: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1 \div 1}{2 \div 2} = 1$ Isso funciona também. Vamos tentar um número que não está dividido.
Yael: Take, for instance, this example: $\frac{1}{8} \div \frac{2}{4} = \frac{1 \div 2}{8 \div 4} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$ Now we have a fraction in the numerator, and this is too complicated; we can't go on. So this is why division is defined by "invert and multiply.	**Yael:** Tomemos, por exemplo, este exemplo: $\frac{1}{8} \div \frac{2}{4} = \frac{1 \div 2}{8 \div 4} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$ Agora temos uma fração no numerador, e isso é muito complicado, não podemos ir em frente. Então é por isso que a divisão é definida por "inverter e multiplicar."
Lili: So, suggestion is good, but it is complicated. In some cases, like the last one, we will get stuck unless we use the invert-and-multiply algorithm. So better to use the invert-and-multiply algorithm, because it works in all cases.	**Lili:** Então, a sugestão é boa, mas é complicada. Em alguns casos, como o último, vamos ficar presos a menos que use o algoritmo de inverter e multiplicar. Então é melhor usar o algoritmo de inverter e multiplicar, porque ele funciona em todos os casos.
Tili: How would you show this?	**Tili:** Como você pode mostrar isso?
Lili: Substituting numbers is not enough because it is impossible to check all the possibilities. We should search for one example for which we will get different answers.	**Lili**: Substituindo números não é suficiente, porque é impossível verificar todas as possibilidades. Devemos procurar um exemplo de que vamos obter respostas diferentes.
Lili: But we need to show it for all cases. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = x \Leftrightarrow x.\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, $\left(x.\frac{c}{d}\right).\frac{d}{c} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$,	**Lili**: Mas precisamos mostrar isso para todos os casos. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = x \Leftrightarrow x.\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, $\left(x.\frac{c}{d}\right).\frac{d}{c} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$, $x.\left(\frac{d}{c}.\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$,

$x.\left(\frac{d}{c}.\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$, $x=\frac{ad}{bc}$, hence, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$	$x=\frac{ad}{bc}$, portanto, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

Fonte: Autores, adaptado de Tirosh (2000, p. 14)

De acordo com Vergnaud (2009), o conhecimento do aluno está na ação realizada por ele, frente à situações problemas. Para o autor, a noção de algoritmo, permite esclarecer os elos entre conhecimento e ação: “Um algoritmo é uma regra (ou um conjunto de regras) que permite, diante de todo problema ou de uma classe dada de antemão, de conduzir à sua solução, se dele existe uma, ou, em caso de insucesso, de mostrar que não há uma solução” (VERGNAUD, 2009, p.309).

No diálogo apresentado no Quadro 04, os estudantes partiram de um teorema em ação para chegar a um conceito em ação, o algoritmo para a divisão entre frações. Afirmamos que $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\div c}{b\div d}$ é um teorema em ação, pois conforme Nunes e Bryant (1997) esta é a primeira ideia (no início da escolarização) que os alunos possuem a respeito dos números racionais na represetação fracionária: dois números naturais que estão separados por uma barra, então as operações entre estes números ocorre separadamente. Os estudantes não compreendem a representação $\frac{a}{b}$ como um novo tipo de número.

Além do que, se a regra vale para a multiplicação: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$, por que não vale também para a divisão? Os estudantes testam, por meio de exemplos numéricos, a regra: $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\div c}{b\div d}$, que para alguns casos tem validade. Entretanto, encontram um contra exemplo, $\frac{1}{8}\div\frac{2}{4}=\frac{1\div 2}{8\div 4}=\frac{\frac{1}{2}}{2}$, mostrando a falsidade deste algoritmo.

Do ponto de vista da TCC, a discussão e os passos explicitados pelos acadêmicos são importantes, visto que indicam como pensavam, ao mesmo tempo em que modificam suas ações. Para Vergnaud (2009), a realização de uma análise relacional permitiria aos estudantes definir rigorosamente a validade de um algoritmo, tal como o ocorreu o desenvolvimento das ciências, por meio de descobertas, transformações, refutações e invariantes. Diante disto, Vergnaud (2009, p.308), afirma que “a noção de invariante é o núcleo mais sólido que podemos encontrar na análise da noção do conceito”.

A partir do referencial teórico proposto pela TCC fez-se a análise dos dados da pesquisa realizada por Tirosh (2000), e apresentamos uma discussão acerca da possiblidade de identificar teoremas em ação para a estrutura multiplicativa de números racionais na representação fracionária, bem como a categorização das situações problemas, segundo Vergnaud (2009).

Considerações finais

A escolha do artigo de Tirosh (2000) justificou-se pelo fato deste trabalho apresentar, em detalhes, as respostas dos alunos para as atividades, o que possibilitou indicar situações problemas, invariantes operatórios – teoremas em ação, e as representações utilizadas pelos estudantes.

A compreensão da divisão entre frações revela-se mais do que apenas uma compreensão algorítmica, que garante a aplicação de procedimentos de cálculo. Nesse sentido, a perspectiva teórica defendida por Vergnaud (1993, 2009), indica que a compreensão de conceitos matemáticos requer considerar os invariantes, as situações de uso e os suportes de representação.

Em muitos casos, os invariantes operatórios podem orientar o professor sobre como os estudantes lidam com as situações de divisão. É fundamental que a divisão em partes iguais de um objeto considerado como unidade, seja percebida pelo educando como a totalidade inalterada. Esta conservação de unidade é um elemento básico para a compreensão do conceito de fração.

Com relação aos indicativos de possíveis teoremas em ação para a divisão entre frações, destacamos que para Vergnaud (1981), um teorema em ação é baseado nas diversas ações dos estudantes, o que vai além de análise da produção escrita. Ademais, para este pesquisador, há necessidade do conhecimento falso mobilizado pelo estudante se repetir em diversas atividades para se indicar a manifestação de um teorema em ação. Por isso, neste trabalho apresentamos alguns indicativos de teoremas em ação, mobilizados por estudantes do Ensino Superior, tais como aqueles conhecimentos que estes estudantes manifestaram ao realizar a divisão entre frações, como “quociente menor do que o dividendo”, “dividendo maior do que o divisor” e, “numa divisão de frações dividiram numerador por numerador e denominador por denominador”. Por diversas vezes, nas diferentes atividades propostas a estes estudantes, eles se utilizaram destas justificativas para resolvê-las. Neste caso, ressaltamos a importância de oferecer contraexemplos aos alunos para discutir os teoremas em ação identificados, como por exemplo, mostrar situações multiplicativas em que o produto diminui ao invés de aumentar, e situações em que o quociente aumenta numa divisão. Também é necessário realizar este trabalho para mostrar-lhes que com os números racionais, o dividendo nem sempre é maior do que o divisor, nem mesmo o dividendo é maior do que o quociente.

Na extensão de multiplicação e divisão para outros conjuntos numéricos algumas propriedades não se conservam, por isso é necessário uma reconstrução conceitual sobre as dificuldades que os estudantes possam vir a ter.

De acordo com Greer (1994), é natural que as primeiras frações que os alunos têm acesso sejam do tipo $1/n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$), por isso, a ênfase está na divisão por n. No entanto, numa multiplicação por $3/4$ em que se divide por 4 e multiplica por 3, esta associação pode gerar dificuldades aos educandos. A associação entre $1/n$ e a divisão se reflete no erro comum apresentado pelos estudantes quando realizam $6 \div \frac{1}{3} = 2$.

Para Kieren (1994), a relação parte-todo auxilia na produção da linguagem fracionária, pois os livros textos de matemática escolares e o discurso do professor tendem a orientar o estudante a uma imagem de dupla contagem: contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e contar às partes que serão consideradas (numerador). Este procedimento pode capacitar o aluno a produzir respostas corretas em algumas situações, entretanto, desenvolve um modelo mental inapropriado, como partes de um inteiro, ao invés de um modelo mais poderoso, proporcionado pela concepção de medida - comparação com a unidade.

Com relação aos elementos da TCC que identificamos no decorrer desta pesquisa, destacamos que as **situações**, na perspectiva adotada por Vergnaud (1993), devem ser propostas em variedade e em diferentes níveis de generalidade, pois as operações de multiplicação e divisão devem ser usadas com uma variedade de atividades modeladas de tal modo que os estudantes possam compreender a natureza do processo em que se relacionam aspectos do mundo real e as estruturas matemáticas. A concepção moderna de ensino de Matemática não se afasta do "cálculo" a não ser para a ele melhor retornar, sob a forma do "cálculo relacional", o qual também está no centro da inteligência e do conhecimento (VERGNAUD, 2009).

Os indicativos de possíveis **teoremas em ação**, para a estrutura multiplicativa de racionais na representação fracionária, são um caminho para analisarmos as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los na transformação do conhecimento intuitivo para o conhecimento explícito.

Com relação às **representações**, inferimos que o simbolismo matemático não é uma condição necessária, nem mesmo suficiente para a conceitualização. Entretanto, contribui para a conceitualização, sobretudo para a transformação das categorias de pensamentos matemáticos, em objetos matemáticos (VERGNAUD, 1993). Para este autor, não existe uma representação, mas múltiplas representações de formas diferentes e de diversificados níveis. Na estrutura multiplicativa identificamos representação pictórica (por meio de desenhos, imagens), a linguagem natural e escrita, a representação $\frac{a}{b}$.

Com relação à escolha do trabalho de Tirosh (2000), concluímos que o conhecimento dos professores sobre as concepções alternativas das crianças deve estar ligado ao seu entendimento das fontes gerais de tais concepções. Em outras palavras, os programas de formação de professores devem familiarizar os futuros professores com vários, e às vezes errados, tipos comuns de processos cognitivos e como eles podem levar a diversas formas de pensar.

Enfim, ainda resta pontuar que há um caminho a ser percorrido e este deverá ser voltado para a análise da aprendizagem significativa dos estudantes em situações problemas da estrutura multiplicativa de racionais na representação fracionária, e esta busca contínua mostra sua relevância aos propósitos da Educação Matemática.

Notas

*Licenciada em Matemática – Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE; Mestre e Doutoranda em Educação para a Ciência e a Matemática – Universidade Estadual de Maringá – UEM. Bolsista CAPES. Email: marlischmitt@hotmail.com

** Licenciado em Matemática – Universidade Federal de São Carlos – UFSCar; Mestre em Matemática – Universidade de São Paulo – USP; Doutor em Matemática– Universidade de São Paulo – USP. Professor do Departamento de Matemática – UEM. Email: professorrui@gmail.com.

Referências

CERVO, A. L; BERVIAN, P. A. **Metodologia científica.** São Paulo: Makron Books, 1996.

FISCHBEIN, E.; DERI, M.;NELLO, M.; MARINO, M. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education**, 16, 1985. pp.3-17.

GREER, B. Extending the Meaning of Multiplication and Division. In**:** CONFREY, J; HAREL, G**. The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics.** Albany: State University of New York Press, 1994.

KIEREN, T. Multiple Views of Multiplicative Structure.In**:** CONFREY, J; HAREL, G**. The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics.** Albany: State University of New York Press, 1994.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; GATIRANA, V.; NUNES, T.. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** 3ª edição. São Paulo: PROEM, 2008.

NUNES, T; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática,** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

TIROSH, D. Enhancing Prospective Teachers' knowledge of Children's Conceptions: The Case of division of Fractions. In: **Journal for Research in Mathematics Education.** Vol. 31, No. 1. p.5-25. 2000.

VERGNAUD, G. **Quelques orientations theoriques et Methodologiques des recherches français es em didactique des mathématiques.** Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 2, n. 2, p. 215-232, 1981.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993, UFRJ**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, G. **A Criança, a Matemática e a Realidade:** Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.