revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

# PROBLEMAS COMBINATÓRIOS INVERSOS RESOLVIDOS POR ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Juliana Azevedo *
Universidade Federal de Pernambuco
azevedo.juliana1987@gmail.com
Julia Calheiros **
Universidade Federal de Pernambuco
juliacalheirospe@yahoo.com.br
Rute Borba***
Universidade Federal de Pernambuco
borba@talk21.com

**RESUMO**
O presente artigo objetiva levantar e analisar os conhecimentos de 20 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental (EF) e de 10 alunos do 3º ano do Ensino Médio (EM) em relação ao raciocínio combinatório com quatro tipos de problemas inversos. Para isso, foram aplicados dois tipos de teste diferentes com os participantes da pesquisa. Ambos os tipos de teste eram compostos pelas mesmas oito situações-problema (duas questões para cada tipo de problema: *produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação)*, sendo diferenciados apenas pela ordenação dessas situações. Verificou-se um baixo desempenho nos *problemas combinatórios inversos* em ambos os anos de ensino pesquisados, embora os alunos do EM tenham se saído um pouco melhor. Com isso, foram observadas diferenças significativas no desempenho total do 9º ano do EF quando comparado ao desempenho total do 3º ano do EM, mas, as diferenças significativas por tipo de problema foram observadas apenas nos problemas que envolvem *produto cartesiano*. Dessa forma, os alunos do final do EF e do final do EM evidenciam ainda não compreenderem relações combinatórias inversas, o que pode ser foco de ensino para um desenvolvimento mais amplo de seus raciocínios combinatórios.
**Palavras-chave**: Problemas combinatórios inversos. Anos finais do Ensino Fundamental. Ensino Médio.

# INVERSE COMBINATORIAL PROBLEMS SOLVED BY 9TH GRADE PRIMARY SCHOOL STUDENTS AND3RD GRADE SECONDARY SCHOOLSTUDENTS

**ABSTRACT**
The objective of this study was to identify and analyze the knowledge level of 20 9th grade primary school (PS) students and 10 3rdgradesecondary school (SS) students concerning their combinatorial reasoning with four types of inverse problems. Two different types of tests were applied to the participants. Both

tests were composed by the same eight problem-situations (two questions for each type of problem: Cartesian product, combination, arrangement and permutation), only differing in the order the situations were presented. Students in both levels presented poor performance in the inverse combinatorial problems, although SS students fared a little better. As a result, significant differences were observed in the overall performance of 9th grade PS students when compared to the overall performance of 3rd gradeSS students. However, these significant differences were observed only in problems involving Cartesian products. Therefore, students at the end of their PS and SS demonstrated that they still do not fully understand inverse combinatorial relations, which should be the focus of teaching for the broader development of their combinatorial reasoning.
**Key words**: Inverse Combinatorial Problems. Final Years of Primary School. Secondary School.

## Introdução

A presente pesquisa aborda questões relativas ao estudo do raciocínio combinatório que é orientado nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - PCN (BRASIL, 1997), os quais indicam o trabalho com a Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Os PCN também enfatizam que a Combinatória deve ser trabalhada por meio de variados tipos de problemas: *arranjos*, *permutações*, *combinações* e problemas que envolvam o *princípio fundamental da contagem*.

Borba (2010) ressalta a importância da resolução de problemas combinatórios no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e Pessoa e Borba (2007), em consonância com os PCN, agrupam em uma categorização única os quatro tipos de problemas combinatórios (*arranjo, permutação*, *combinação* e *produto cartesiano*), sugerindo que todos sejam trabalhados simultaneamente desde o início da escolarização, para um desenvolvimento mais amplo do raciocínio combinatório. As autoras defendem que o *princípio fundamental da contagem* não caracteriza um tipo específico de problema combinatório, mas, sim, uma estratégia de resolução, válida para todos os tipos de problemas combinatórios. Além dos problemas ressaltados no Ensino Médio (*arranjos*, *combinações* e *permutações*), as autoras incluem também os *produtos cartesianos*, indicados, com esta terminologia ou similar, em diversas categorizações de problemas multiplicativos, tais como as classificações de Vergnaud (1991), de Nunes e Bryant (1997) e dos PCN (BRASIL, 1997).

O raciocínio combinatório pode ser trabalhado de forma direta, ou seja, todos os elementos de um conjunto dado no problema proposto, ou dos conjuntos dados, são conhecidos, e se intenciona encontrar o número total de possibilidades. As relações diretas são usualmente enfocadas na Educação Básica.

Pode-se também trabalhar a resolução de situações combinatórias a partir da inversão dos problemas, ou seja, nesse caso, o número total de possibilidades é conhecido, sendo desconhecido, portanto, os elementos de um dos conjuntos dados no problema ou do único conjunto dado. Essa ideia é apontada pelos PCN (BRASIL, 1997) ao enfatizar que “A ideia de combinação também está presente em situações relacionadas com a divisão” (p.73). Entretanto, os PCN só abordam problemas inversos de *produto cartesiano*.

A partir de uma revisão da literatura, não foram encontrados trabalhos que versem sobre os quatro tipos de problemas combinatórios inversos aqui tratados. Foram localizados apenas estudos com problemas de *produto cartesiano inverso*, mas nenhuma investigação com *arranjos inversos*, *combinações inversas* e *permutações inversas*.

Selva, Borba, Campos, Bivar, Ferreira e Luna (2008), em um estudo sobre a resolução de problemas multiplicativos, destacam a dificuldade que alunos de 3ª e 5ª séries (4º e 6º anos do Ensino Fundamental) apresentam ao resolverem problemas de *produto cartesiano*, principalmente *produtos cartesianos inversos*. Resultados semelhantes foram encontrados por Lima (2010) em seu estudo com alunos da Educação de Jovens e Adultos.

Assim, segundo as autoras supracitadas, tanto com crianças, quanto com jovens e adultos, a maior dificuldade em problemas multiplicativos reside em problemas combinatórios, em particular o *produto cartesiano inverso*. Isso porque, segundo Lima (2010), este tipo de problema exige do estudante “mais uma operação mental – a inversão” (p.91). Ressalta-se, porém, que esses estudos não abordaram outras relações combinatórias inversas, como as relações presentes em problemas de *arranjos*, *combinações* e *permutações*, que são objeto de análise do estudo aqui relatado.

Como suporte teórico para a presente pesquisa, tem-se a Teoria dos Campos Conceituais, na qual é destacada a definição de *conceito* de Vergnaud (1986), que se ampara em três dimensões fundamentais: as situações que dão *significado* ao conceito (S); as propriedades e relações *invariantes* do conceito (I) e as *representações simbólicas* que são usadas para registrar o conceito (R). Segundo Vergnaud (1986), essas dimensões devem ser consideradas no aprendizado de todo conceito, pois estão fortemente imbricadas e influenciam uma à outra.

Considerando as dimensões conceituais mencionadas, foi investigado na presente pesquisa o conhecimento de alunos da Educação Básica sobre problemas combinatórios inversos, por meio de situações e seus invariantes, como também pelas representações simbólicas utilizadas. Assim, tomando como referencial, entre outros, os estudos de Vergnaud (1986) e Pessoa e Borba (2007, 2009a, 2009b), a pesquisa objetivou analisar os conhecimentos dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio em relação ao raciocínio combinatório com os quatro tipos de problemas inversos. Para isso, foi aplicado um teste diagnóstico com alunos dos referidos anos de estudo.

Desse modo, o presente estudo teve como objetivo analisar o conhecimento de alunos da Educação Básica sobre problemas inversos combinatórios, verificando o desempenho dos alunos do último ano do Ensino Fundamental e do último ano do Ensino Médio em quatro tipos de problemas combinatórios inversos. Além disso, também se observou os tipos de respostas mais utilizados, para cada tipo de problema, bem como foram analisadas as representações simbólicas mais usadas na resolução de cada tipo de problema.

## Campo conceitual das estruturas multiplicativas e o raciocínio combinatório direto e inverso

Vergnaud (1986) define o campo conceitual das estruturas multiplicativas como o conjunto de situações que envolvem multiplicação, divisão ou a combinação de ambas. Desse modo, a Combinatória está inserida no campo conceitual das estruturas multiplicativas, uma vez que a base de solução das situações combinatórias são multiplicações e/ou divisões.

Pessoa e Borba (2007) caracterizam os quatro tipos de problemas combinatórios, evidenciando as semelhanças e diferenças entre estas situações, conforme se pode observar no Quadro 1, a seguir. Nesta categorização são tratados os problemas diretos e evidencia-se como cada situação combinatória possui invariantes – propriedades e relações – específicos, referentes a como os elementos são escolhidos para comporem possibilidades e se ordens diferenciadas dos elementos compõem, ou não, novas possibilidades.

**Quadro 1**: Tipos de problemas combinatórios diretos

- **Produto Cartesiano:** [...] o problema envolve dois conjuntos básicos, mais um outro conjunto, que é formado pela combinação de cada elemento de um conjunto básico, com cada elemento do outro conjunto básico.

  Ex: Maria tem 3 saias e 5 blusas. Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?
- **Combinação:** Dados *n* elementos distintos, chama-se *combinação simples* de ordem *p* cada maneira de escolher *p* elementos entre eles, com $p \leq n$.

  Ex: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso, sabendo que cada um dos três alunos só poderá ser sorteado uma vez?
- **Arranjo:** Consideremos *n* elementos distintos. Chama-se *arranjo simples* de ordem *p* cada maneira de escolher e ordenar *p* elementos entre eles ($p \leq n$).

  Ex: Para representante da turma da sala de aula candidataram-se 3 pessoas. (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vive representante?
- **Permutação:** Dados *n* elementos distintos, chama-se *permutação simples* desses elementos cada uma das maneiras de ordená-los.

  Ex: Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.

Fonte: Pessoa e Borba (2007)

Nos problemas inversos, o valor inicial (de um dos conjuntos da situação, ou do único conjunto) não é explicitado, sendo este o que se busca na situação. A seguir, apresentam-se exemplos de problemas combinatórios inversos e suas características.

Problemas de p*roduto cartesiano inverso* envolvem dois ou mais conjuntos, sendo um deles desconhecido e, também, outro conjunto que foi formado pela combinação de cada elemento do conjunto conhecido, com cada elemento do outro conjunto desconhecido. Como exemplo, tem-se:

*Thalita tem algumas blusas e 2 saias. Combinando cada uma de suas blusas com cada uma de suas saias, ela pode formar 10 trajes. Quantas blusas Thalita tem?*

Nesta situação, o conjunto desconhecido é número de blusas que Thalita tem. O outro conjunto, que é conhecido, é o número de saias que Thalita tem (duas saias) e o conjunto formado pela combinação de cada elemento do primeiro conjunto (desconhecido) com cada elemento do segundo conjunto conhecido (duas saias) é a quantidade de trajes que Thalita conseguiu formar (10 trajes diferentes).

Os problemas de *combinação inversa* envolvem um conjunto de *n* elementos distintos desconhecidos. Este conjunto gera subconjuntos conhecidos, formados pela combinação de cada elemento com um ou mais elementos do mesmo conjunto, não importando a ordem dos elementos nos subconjuntos formados. Um exemplo desse tipo de situação combinatória é:

*Camila tem algumas frutas em casa e quer fazer um suco combinando 2 frutas. Ela percebeu que tem 21 maneiras de combinar essas frutas de duas em duas. Quantas frutas Camila tem?*

Neste exemplo, o conjunto desconhecido é o número de frutas que Camila tem em casa. Sabe-se a quantidade de elementos que os subconjuntos devem ter (duas frutas) e sabe-se, ainda, o total de subconjuntos possíveis de serem formados quando se combinam duas frutas (21 combinações diferentes).

Os problemas de *arranjo inverso* envolvem um conjunto de *n* elementos distintos desconhecidos. Este conjunto gera subconjuntos conhecidos, formados pelo arranjo de cada elemento com um ou mais elementos do mesmo conjunto, importando a ordem em que os elementos são organizados nos subconjuntos formados. Um exemplo desse tipo de problema é:

*Quantos candidatos estão concorrendo na eleição de representante e vice-representante da turma do 5º ano da Escola Saber, se existem 12 maneiras de formar chapas diferentes para esses dois cargos?*

Neste exemplo, o conjunto desconhecido corresponde ao número de candidatos que estão concorrendo na eleição. Sabe-se a quantidade de elementos que os subconjuntos devem ter (dois candidatos: representante e vice-representante) e sabe-se ainda o total de subconjuntos possíveis de serem formados quando se escolhem os dois candidatos (12 chapas diferentes).

Os problemas de *permutação inversa* envolvem um conjunto de *n* elementos distintos desconhecidos. Este conjunto gera subconjuntos conhecidos, formados pela permutação de todos os elementos do conjunto, importando a ordem em que os elementos são organizados nos subconjuntos formados. Como exemplo, tem-se:

*Na casa de João tem alguns porta-retratos na estante da sala. João descobriu que há seis maneiras diferentes de organizar os porta-retratos na estante. Quantos são os porta-retratos?*

Neste exemplo o conjunto desconhecido é o número de porta-retratos que tem na estante da sala de João. Sabe-se que João quer organizar todos os seus porta-retratos na estante e sabe-se, ainda, o total de subconjuntos possíveis de serem formados quando se permutam os porta-retratos (seis maneiras diferentes).

Sendo os problemas combinatórios inversos pouco explorados na literatura, este estudo visa analisar o conhecimento que alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio têm sobre problemas combinatórios desse tipo.

**Método**

Para realização deste estudo, participaram 30 alunos de uma escola pública do Estado de Pernambuco. Destes alunos, 20 eram do 9ª ano do Ensino Fundamental e 10 do 3º ano do Ensino Médio. Objetivava-se averiguar o desempenho de estudantes do último ano de cada nível da escolarização básica em problemas envolvendo o raciocínio combinatório em problemas inversos.

Cada aluno resolveu, individualmente, oito problemas envolvendo o raciocínio combinatório em problemas inversos, sendo duas questões para cada tipo de problema: *produto cartesiano inverso, combinação inversa, arranjo inverso e permutação inversa*.

No teste havia quatro problemas que envolviam números com menor número de possibilidades no grupo ou subgrupo formado (já fornecido no enunciado), ou seja, de 6 a 15 possibilidades, e quatro problemas que envolviam maior número de possibilidades no grupo ou subgrupo formado (já fornecido no enunciado), ou seja, de 21 a 30 possibilidades, de modo que em cada tipo de problema o aluno, participante da pesquisa, entrava em contato com problemas de maiores e menores possibilidades envolvidas, como pode ser observado no Quadro 2.

As situações-problema foram separadas em dois testes diferentes (Teste 1 e Teste 2). Metade dos alunos resolveu um tipo de teste e a outra metade resolveu o outro tipo de teste. Os problemas eram iguais em ambos os testes, diferenciando-se apenas na ordem em que as situações eram apresentadas. Assim, buscava-se controlar se a ordem em que as questões eram apresentadas poderia influenciar no desempenho dos alunos no teste. No Teste 1, a ordem dos problemas foi a seguinte: CI1; AI1; PI2; PCI2; CI2; AI2; PI1; PCI1 e a ordem do Teste 2 foi: PCI1; PI1; AI2; CI2; PCI2; PI2; AI1; CI1.

**Quadro 2 –** Problemas inversos apresentados aos participantes

| |
|---|
| **Produto Cartesiano Inverso (PCI):**<br>PCI 1: Thalita tem algumas blusas e 2 saias. Combinando cada uma de suas blusas com cada uma de suas saias, ela pode formar 10 trajes. Quantas blusas Thalita tem? (Resposta: 5 blusas) |

PCI 2: Para dançar a quadrilha de São João a turma da Rua Paraíso pode formar 30 casais se cada menino dançar com cada menina. Na turma há 5 meninas. Quantos meninos fazem parte dessa turma? (Resposta: 6 meninos)

**Combinação Inversa (CI):**

CI1: Aline tem algumas bolsas e quer levar 2 delas na viagem que vai fazer. Ela combinou suas bolsas de duas em duas para decidir quais duplas de bolsas poderia levar e percebeu que tinha 15 combinações possíveis. Quantas bolsas Aline tem? (Resposta: 6 bolsas)

CI2: Camila tem algumas frutas em casa e quer fazer um suco combinando 2 frutas. Ela percebeu que tem 21 maneiras de combinar essas frutas de duas em duas. Quantas frutas Camila tem? (Resposta: 7 frutas)

**Arranjo Inverso (AI):**

AI1: Quantos candidatos estão concorrendo na eleição de representante e vice-representante da turma do 7º ano da Escola Saber, se existem 12 maneiras de formar chapas diferentes para esses dois cargos? (Resposta: 4 candidatos)

AI2: Quantos maratonistas estão inscritos na corrida para que tenhamos 30 maneiras diferentes para 1º e 2º colocados? (Resposta: 6 maratonistas)

**Permutação Inversa (PI):**

PI1: Na casa de João tem alguns porta-retratos na estante da sala. João descobriu que há 6 maneiras diferentes de organizar os porta-retratos na estante. Quantos são os porta-retratos? (Resposta: 3 porta-retratos)

PI2: Carol percebeu que há 24 maneiras diferentes de formar palavras com e sem sentido usando as letras do nome do amigo dela. Quantas letras tem o nome do amigo de Carol? (Resposta: 4 letras)

Fonte: Autoras da presente pesquisa

A análise foi realizada em três dimensões, sendo que em todas as dimensões de análise foi usado o *software Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS. A primeira dimensão se refere ao desempenho dos 30 alunos analisados em função do tipo de teste e do ano de ensino. Assim, foi analisada a quantidade de acertos e erros para cada tipo de problema, e o acerto total no teste. A segunda dimensão se refere a analise do tipo de resposta mais utilizada para cada tipo de problema, utilizando as categorias do estudo de Pessoa e Borba (2009b). Quanto à terceira dimensão, foi analisado o tipo de representação simbólica mais utilizada para cada tipo de problema, também utilizando as categorias do referido estudo.

## Apresentação e análise dos resultados

### Análise de desempenho

Nesta seção, serão analisados os dados encontrados por meio da pesquisa de sondagem realizada. Assim, foi realizada uma análise quantitativa do desempenho dos alunos na comparação com o tipo de teste realizado; do desempenho em função do ano de escolarização; do tipo de reposta dada pelos alunos aos problemas e do tipo de representação simbólica utilizada.

### Desempenho em função do tipo de teste por tipo de problema

Com a análise estatística realizada por meio do pacote estatístico SPSS, obtiveram-se os resultados que podem ser observados na Tabela 1. A média de desempenho dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio por tipo de problema em função do tipo de teste. Os resultados trazem o valor médio de desempenho das turmas, uma vez que o número de alunos era diferenciado e, por uso de média, foi possível realizar uma comparação entre as turmas.

**Tabela 1**: Média de desempenho (máximo de 1,0 ponto por tipo de problema) em função do tipo de teste

| **Média/Ano de ensino** | **9º Ano E.F** | | **3º Ano E.M.** | |
|---|---|---|---|---|
| | **Teste 1** | **Teste 2** | **Teste 1** | **Teste 2** |
| Produto Cartesiano 1 | 0,30 | 0,30 | 1,00 | 0,60 |
| Produto Cartesiano 2 | 0,00 | 0,00 | 0,40 | 0,20 |
| Combinação 1 | 0,20 | 0,00 | 0,40 | 0,00 |
| Combinação 2 | 0,00 | 0,00 | 0,20 | 0,00 |
| Arranjo 1 | 0,00 | 0,00 | 0,20 | 0,00 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Arranjo 2 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| Permutação 1 | 0,10 | 0,20 | 0,40 | 0,20 |
| Permutação 2 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

Observando a tabela, percebe-se que, em geral, os alunos de ambas as turmas tiveram um baixo desempenho nos dois tipos de teste. Este resultado indica a grande dificuldade em lidar com problemas combinatórios inversos.

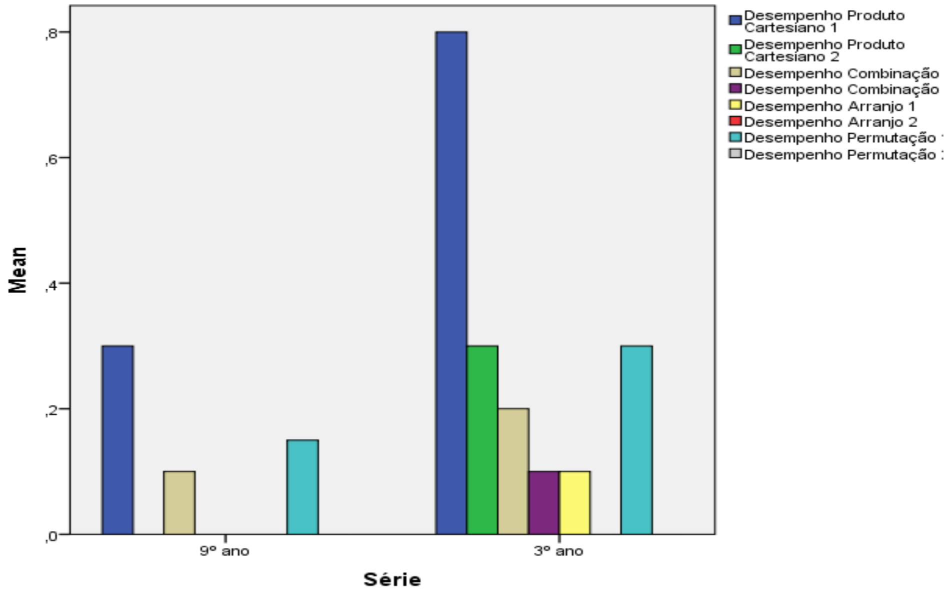
Verifica-se ainda que, no total das médias nos quatro tipos de problemas pesquisados, o tipo de Teste 1 teve média maior nos dois anos de ensino. Apesar do aparente melhor resultado no Teste 1, não foram observadas diferenças significativas entre os desempenhos nos dois tipos de teste (*t-teste de amostras independentes* –T1 x T2: t(28) = 1,444; p = 0,160). Assim, como não houve diferenças significativas entre os testes, passou-se a fazer as análises considerando que na pesquisa tivesse sido utilizado um instrumento único.

**Desempenho em função do ano de ensino por tipo de problema e por número total de possibilidades**

Analisando a média de desempenho em função do ano de ensino por tipo de problema, percebe-se, ao observar o Gráfico 1, que o tipo de problema *produto cartesiano 1* apresentou a maior média de acerto em relação aos outros tipos de problemas. Ao realizar a prova paramétrica *t-teste de amostras independentes*, ambos os problemas de *produto cartesiano* apresentaram diferenças significativas em função do ano de ensino (PC1: t (28) = 1,496; p = 0,008; PC2: t (28) = 98,000; p = 0,009). Observou-se, assim, que para os problemas de *produto cartesiano* – tanto o de menor, quanto o de maior número de possibilidades – os alunos do 3º ano do Ensino Médio desempenharam-se significativamente melhor que os do 9º ano do Ensino Fundamental.

Ainda observando o Gráfico 1, percebe-se que nos demais tipos de problemas (*combinação*, *arranjo* e *permutação*) não há média de acertos acima de 0,3. A partir desses dados, foi comprovado pelo *t-teste de amostras independentes*, que nesses problemas não houve diferenças significativas entre os desempenhos dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e os do 3º ano do Ensino Médio. Verificou-se, assim, que o único tipo de problema que apresentou diferenças significativas entre os anos escolares foi o do *produto cartesiano*.

**Gráfico 1**: Média de desempenho em função do ano de ensino




Além dos problemas de *produto cartesiano*, foram observadas diferenças significativas no desempenho total (somatório de acertos de todos os tipos de problemas) em função do ano de ensino ($p < 0,03$). Isso se justifica pelo panorama de melhor desempenho dos alunos do 3º ano do Ensino Médio, mas, essencialmente, pelo melhor desempenho dos alunos deste nível de ensino nos problemas de *produto cartesiano*.

Também foi observado, nos resultados obtidos na presente pesquisa, que as questões que levavam a um maior número de possibilidades no grupo ou subgrupo formado (de 21 a 30 possibilidades) foram mais difíceis que as situações que envolviam menos possibilidades no grupo ou subgrupo formado (de 6 a 15 possibilidades). Verificou-se, por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares*, que houve uma diferença altamente significativa ($p < 0,001$) no desempenho em questões que levavam a um maior número de possibilidades em comparação com questões que levavam a um menor número de possibilidades. Destaca-se que essa dificuldade foi observada nos dois grupos pesquisados (do Ensino Fundamental e do Ensino Médio).

**Tipo de resposta por tipo de problema**

A segunda dimensão de análise foi o tipo de resposta que os alunos apresentaram para a resolução dos quatro tipos de problemas combinatórios. Nesta dimensão, foram adaptadas as categorias de análise do estudo de Pessoa e Borba (2009), resultando na seguinte classificação: 1: *Em branco*; 2: *Apenas resposta incorreta*; 3: *Resposta incorreta sem estabelecimento de relação combinatória*; 4: *Resposta incorreta ou incompleta com estabelecimento de relação não sistemática*; 5: *Resposta incorreta ou incompleta com estabelecimento de relação combinatória, utilizando estratégia sistemática*; 6: *Resposta correta*.

Na Tabela 2, referente aos tipos de resposta nos *produtos cartesianos inversos* por ano de escolarização, observa-se que no 9º ano do Ensino Fundamental o tipo de resposta mais utilizado foi o Tipo 2 (*Apenas resposta incorreta*). Já no 3º ano do Ensino Médio, o tipo de resposta mais utilizado foi o Tipo 6 (*Resposta correta*). Entende-se, assim, o melhor desempenho dos alunos do Ensino Médio, pois apresentaram respostas corretas nesse tipo de problema combinatório inverso.

**Tabela 2**: Percentuais de tipos de respostas em *produtos cartesianos inversos* (PCI) por ano

| **Ano de ensino** | **Tipos de problemas** | **Tipos de Respostas – PCI** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| 9º Ano E.F | PC 1 | 5 | 55 | 10 | 0 | 0 | 30 |
| | PC 2 | 5 | 75 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 3º Ano E.M. | PC 1 | 0 | 10 | 10 | 0 | 0 | 80 |
| | PC 2 | 10 | 40 | 20 | 0 | 0 | 30 |

Nos problemas de *combinação inversa*, como se pode observar na Tabela 3, o tipo de resposta mais utilizado foi o Tipo 2 (*Apenas resposta incorreta*), sendo este quantitativo expressivo nos dois anos de ensino pesquisados, não havendo, portanto, diferenças entre os anos de ensino quanto ao tipo de resposta para problemas de *combinação*. Apesar dos PCN (BRASIL, 1997) indicarem o aprendizado da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, observa-se, em função da quantidade de respostas incorretas, sem ao menos apresentar tentativa de resolução, que esse tipo de problema é muito difícil até mesmo para alunos em anos finais da escolarização básica.

Nos problemas de *arranjo inverso*, o tipo de resposta mais utilizado, em ambos os anos de ensino, também foi o tipo 2 (*Apenas resposta incorreta*). Ressalta-se que no 9º ano do Ensino Fundamental o quantitativo de respostas incorretas é superior à metade do número de alunos da turma, como pode ser visto na Tabela 4. Evidencia-se também, assim, que, no estudo de sondagem realizado na presente pesquisa, houve dificuldade na resolução dos problemas de *arranjo inverso* para os alunos de escolarização básica.

**Tabela 3**: Percentuais de tipos de respostas em *combinações inversas* (CI) por ano

| **Ano de ensino** | **Tipos de problemas** | **Tipos de Respostas – CI** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| 9º Ano E.F | C 1 | 0 | 70 | 20 | 0 | 0 | 10 |
| | C 2 | 5 | 75 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 3º Ano E. M | C 1 | 20 | 30 | 30 | 0 | 0 | 20 |
| | C 2 | 20 | 60 | 20 | 0 | 0 | 0 |

**Tabela 4**: Percentuais de tipos de respostas em *arranjos inversos* (AI) por ano

| **Ano de ensino** | **Tipos de problemas** | **Tipos de Respostas – AI** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| 9º Ano | A 1 | 15 | 65 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| | A 2 | 20 | 65 | 15 | 0 | 0 | 0 |
| 3º Ano | A 1 | 20 | 40 | 30 | 0 | 0 | 10 |
| | A 2 | 20 | 60 | 20 | 0 | 0 | 0 |

Os problemas de *permutação inversa*, também apresentaram a resposta do Tipo 2 (*Apenas resposta incorreta)* como a mais utilizada, em ambas os anos pesquisados, sendo este quantitativo igual ou superior à metade do número de alunos de cada turma, podendo ser observado na Tabela 5.

**Tabela 5**: Percentuais de tipos de respostas em *permutações inversas* (PI) por ano

| **Ano de ensino** | **Tipos de problemas** | **Tipos de Respostas – PI** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| 9º Ano E.F | P 1 | 30 | 50 | 5 | 0 | 0 | 15 |
| | P 2 | 25 | 65 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 3º Ano E.M | P 1 | 0 | 50 | 20 | 0 | 0 | 30 |
| | P 2 | 40 | 50 | 10 | 0 | 0 | 0 |

**Tipo de representação simbólica utilizada por tipo de problema**

A terceira dimensão de análise foi por tipo de representação simbólica que os alunos apresentaram para a resolução dos quatro tipos de problemas combinatórios. Nesta dimensão também foram adotadas as categorias de análise do estudo de Pessoa e Borba (2009): 1: *Não apresentou representação simbólica* 2: *Adição/Subtração*; 3: *Desenho*; 4: *Listagem de possibilidades*; 5: *Multiplicação inadequada*; 6: *Multiplicação e Adição inadequada*; 7: *Multiplicação adequada e desenho*; 8: *Divisão inadequada*; 9: *Divisão adequada*.

Nos problemas de *produto cartesiano inverso*, a metade ou mais da metade dos alunos de cada turma *não apresentaram representação simbólica* (Tipo 1) na resolução dos problemas inversos, como pode ser visto na Tabela 6.

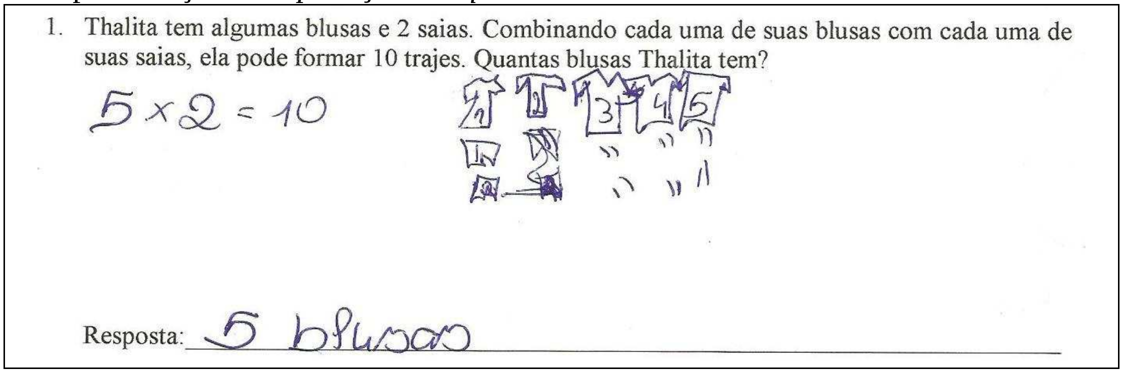
**Tabela 6**: Percentuais de tipos de representação simbólica em *produtos cartesianos inversos* (PCI) por ano

| **Ano de ensino** | **Tipos de problemas** | **Tipos de Representação – PCI** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **5** | **6** | **7** | **9** |
| 9º Ano | PC 1 | 80 | 0 | 10 | 0 | 5 | 5 |
| | PC 2 | 80 | 15 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| 3º Ano | PC 1 | 50 | 0 | 10 | 0 | 0 | 40 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | PC 2 | 70 | 10 | 10 | 0 | 0 | 10 |

Ainda na Tabela 6, verifica-se que alguns alunos que responderam corretamente esse tipo de questão, o fizeram por meio de *divisão adequada* (Representação simbólica 9) ou por meio de uma *multiplicação adequada e desenho* (Representação simbólica 7), este último tipo de representação, pode ser visto na Figura 1.

**Figura 1**: Resolução correta para o problema de *produto cartesiano 1* do aluno 4 (9º ano) por meio da representação *multiplicação adequada e desenho*


1. Thalita tem algumas blusas e 2 saias. Combinando cada uma de suas blusas com cada uma de suas saias, ela pode formar 10 trajes. Quantas blusas Thalita tem?

$5 \times 2 = 10$

Resposta: 5 blusas

Este tipo de representação simbólica realizada pelo Aluno 4 é citado pelos PCN (BRASIL, 1997) quando aponta que "Os alunos costumam solucionar esse tipo de problema por meio de tentativas apoiadas em procedimentos multiplicativos, muitas vezes representando graficamente [...]" (p.73). Observa-se, assim, que para esse tipo de problema pode-se pensar no produto resultante a partir de desenhos efetuados, podendo esta ser uma representação estimulada pelo aprendizado em sala de aula.

Salienta-se a pouca utilização da representação *listagem de possibilidades* como procedimento de resolução adotado pelos alunos da presente pesquisa. Essa foi uma representação muito utilizada em estudos anteriores com *problemas combinatórios diretos*, como apontado por Pessoa e Borba (2009a), quando enfatizaram a escrita de possibilidades (listagem) como uma importante representação para resolução de problemas combinatórios.

Nos problemas de *combinação inversos* também se obteve quantidade expressiva na não apresentação de representação, sendo mais da metade dos alunos de cada turma. Dos alunos que apresentaram representações simbólicas, resolveram as situações por meio da representação do Tipo 3 (*Desenho*) do Tipo 5 (*Multiplicação inadequada*) e do Tipo 6 (*Multiplicação e Adição inadequada*), como pode ser visto na Tabela 7. Ressalta-se, entretanto, que nenhuma dessas representações levou os alunos ao acerto nesse tipo de problema.

**Tabela 7**: Percentuais de tipos de representação simbólica em *combinações inversas* (CI) por ano

| Ano de ensino | Tipos de problemas | Tipos de Representação – CI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **3** | **5** | **6** |
| 9º Ano E.F. | C 1 | 80 | 0 | 15 | 5 |
| | C 2 | 80 | 0 | 15 | 5 |
| 3º Ano E.M. | C 1 | 70 | 0 | 30 | 0 |
| | C 2 | 70 | 10 | 20 | 0 |

Os problemas de *arranjo inverso* também apresentaram a representação do Tipo 1 (*Não apresentou* representação simbólica) como a mais utilizada, em ambos os anos de ensino. Também foram identificadas, nesse tipo de problema, representações do Tipo 2 (*Adição/Subtração*), do Tipo 5 (*Multiplicação inadequada*) e do Tipo 8 (*Divisão inadequada*), como pode ser visto na Tabela 8, e, nenhuma dessas representações levou os alunos ao acerto dos problemas.

**Tabela 8**: Percentuais de tipos de representação simbólica em *arranjos inversos* (AI) por ano

| Ano de ensino | Tipos de problemas | Tipos de Representação – AI | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **5** | **8** |
| 9º Ano E.F. | A 1 | 80 | 5 | 15 | 0 |
| | A 2 | 80 | 5 | 15 | 0 |
| 3º Ano E.M. | A 1 | 60 | 0 | 30 | 10 |
| | A 2 | 80 | 0 | 10 | 10 |

Assim como nos outros tipos de problemas, no problema do tipo *permutação inverso* os alunos também, em sua maioria, não apresentaram representações simbólicas para a resolução dos problemas, como se observa na Tabela 9. Os alunos também apresentaram representações do

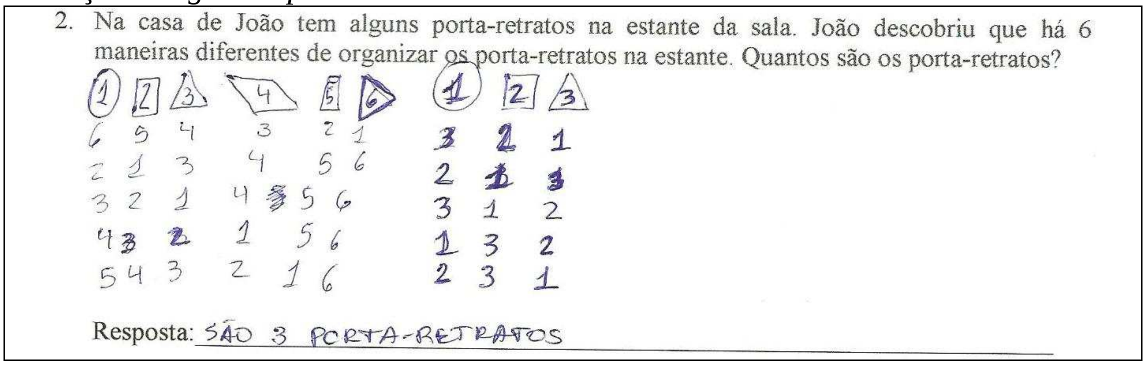
Tipo 5 (*Multiplicação inadequada*) e 8 (*Divisão inadequada*), todavia, essas representações não fizeram com que eles chegassem aos resultados corretos.

**Tabela 9**: Percentuais de tipos de representação simbólica em *permutações inversas* (PI) por ano

| **Ano de ensino** | **Tipos de problemas** | **Tipos de Representação – PI** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **4** | **5** | **8** |
| 9º Ano E.F. | P 1 | 19 | 0 | 1 | 0 |
| | P 2 | 18 | 0 | 1 | 1 |
| 3º Ano E.M. | P 1 | 7 | 1 | 2 | 0 |
| | P 2 | 10 | 0 | 0 | 0 |

Dos alunos que apresentaram representações, apenas o Aluno 25 teve êxito utilizando a representação do Tipo 4 (*Listagem de possibilidades*), como pode ser observado na Figura 2.

**Figura 2**: Resolução correta para o problema de *permutação 1* do aluno 25 (3º ano) por meio da representação *listagem de possiblidades*




Percebe-se, na Figura 2, que este aluno resolveu o problema por meio de tentativa. Inicialmente, optando pelo número de seis porta-retratos, e, percebendo que assim haveria mais de seis maneiras de organizá-los na estante, optou por três porta-retratos e chegou ao número de maneiras citado no enunciado do problema. Neste caso, o aluno percebeu a *listagem* como um eficiente tipo de representação, assim como no estudo de Pessoa e Borba (2009a), em que os participantes haviam feito uso desse procedimento em *problemas combinatórios diretos*.

A partir da análise das representações simbólicas, percebe-se que a do Tipo 1 (*Não apresentação de representação*) foi a mais recorrente nos quatro tipos de problemas *combinatórios inversos* em ambos os anos de ensino, confirmando o estudo de Pessoa e Borba (2009a) para problemas *combinatórios de diretos*, quando as autoras enfatizam que "Infelizmente, a *não apresentação de representação* apresenta um alto percentual, o que não favorece avaliar o que foi pensado pelo aluno ao responder o problema" (p.10). Desse modo, percebe-se que tanto em *problemas combinatórios diretos*, como em *problemas combinatórios inversos* um alto índice de alunos tem dificuldade em expressar o seu pensamento em forma de representação simbólica explícita.

**Conclusões**

A análise efetuada neste estudo permitiu, inicialmente, evidenciar que não houve diferenças significativas no desempenho em função do tipo de teste aplicado quando analisados por ano de ensino.

Foi possível observar, ainda, que o problema de *produto cartesiano inverso*, assim como os *problemas diretos* investigados por Pessoa e Borba (2009b), são mais fáceis quando comparados com os demais problemas combinatórios inversos, uma vez que, apenas nas situações de *produto cartesiano inverso* houve indicação de algum sucesso, em particular pelos alunos do 3º ano do Médio. Evidencia-se, assim, esse tipo de problema como o único compreendido por alguns alunos da escolarização básica, mas particularmente pelos alunos do último ano do Ensino Médio.

Mesmo sendo claramente recomendados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) apenas os *produtos cartesianos inversos*, acredita-se que esse tipo de problema não esteja sendo trabalhado no Ensino Básico. Mesmo assim, alguns alunos ainda foram capazes de resolver problemas inversos deste tipo de situação combinatória, mas tiveram grande dificuldade com outras situações combinatórias inversas.

Foi possível identificar também, que no desempenho total houve diferenças significativas entre os anos de ensino, mas apenas nos problemas de *produto cartesiano*, pois foi influenciado pelo melhor desempenho do 3° ano do Ensino Médio em relação ao desempenho do 9º ano do Ensino Fundamental.

Também, apenas nos problemas de *produto cartesiano inverso*, verificaram-se diferenças nos tipos de respostas do 9º ano, quando comparado com o 3º ano. A maioria dos alunos do 3º ano resolveu estes problemas corretamente, diferente da maioria dos alunos do 9º ano. Esperava-se, entretanto, que os problemas de produto cartesianos inversos também pudessem ser de mais fácil resolução para os alunos do 9º ano, uma vez que a inversão de problemas combinatórios é indicada pelos PCN desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Entretanto, não houve diferenças nos tipos de representação simbólicas, pois, a maioria dos alunos, como pode ser visto nas tabelas sobre as representações, *não apresentou representações simbólicas* para a resolução de todas as situações do teste.

Desse modo, pode-se concluir que a escolarização parece ter influenciado nos resultados dos problemas de *produto cartesiano inverso,* entretanto, não há indícios de que o maior período de escolarização tenha tido influência nos demais tipos de problemas (*combinação, arranjo* e *permutação*).

Assim, conclui-se que, *problemas combinatórios inversos*, principalmente *arranjos*, *combinações* e *permutações*, são difíceis de serem resolvidos por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, bem como pelos do 3º ano do Ensino Médio.

Recomenda-se que esses problemas sejam foco de ensino na escolarização básica, de modo a possibilitar um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos, uma vez que, trabalhar relações diretas e inversas possibilitam que os alunos pensem diferentemente sobre propriedades matemáticas e podem resultar em um maior desenvolvimento do raciocínio matemático. Recomenda-se, ainda, que se inicie o trabalho com as relações inversas por meio de situações mais simples, como as de *produto cartesiano* e, depois, trabalhar-se com outras situações mais complexas.

**Notas**

*Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – EDUMATEC/UFPE. E-mail: azevedo.juliana1987@gmail.com

** Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – EDUMATEC/UFPE. E-mail: juliacalheirospe@yahoo.com.br

***Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – EDUMATEC/UFPE. E-mail: borba@talk21.com

**Referências**

BORBA, Rute. *O Raciocínio Combinatório na Educação Básica.* In: **Anais**... X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Bahia, 2010.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

LIMA, Rita de Cássia Gomes de. **O raciocínio combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adultos**: do início da escolarização até o Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª a 4ª série. **Anais...** IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, 2007.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. A compreensão do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. **Anais...** IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM. Brasília, 2009a.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **Quem Dança Com Quem**: O desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese de doutorado. UFPE: Programa de Pós-graduação em Educação, 2009b.

SELVA, Ana; BORBA, Rute; CAMPOS, Tânia; BIVAR, Dayse; FERREIRA, Maria Neuza; LUNA, Maria Helena. O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: O que compreendem? Que dificuldades apresentam? **Anais...** 2º Simpósio Internacional de Educação Matemática. Recife, 2008.

VERGNAUD, Gerard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise psicológica, 1,** 1986, pp. 75-90.

VERGNAUD, Gérard. **El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. Mexico: Trillas, 1991.