



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Producción de majorones en decaimientos de leptones

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Adrián González Quiterio

Asesorado por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.
Julio de 2022



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Producción de majorones en decaimientos de leptones

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Adrián González Quiterio

Asesorado por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.
Julio de 2022

Título: Producción de majorones en decaimientos de leptones

Estudiante: ADRIÁN GONZÁLEZ QUITERIO

COMITÉ

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Presidente

Dra. Ana Aurelia Avilés López
Secretario

Dr. Arturo Fernández Téllez
Vocal

Dra. Iraís Bautista Guzmán
Vocal

Dr. Héctor Novales Sánchez
Asesor

Agradecimientos

A lo largo de la vida siempre te encuentras con personas que se vuelven significativas para bien y para mal, pues siempre te dejan algo de ellas en tu persona y sin eso no serías lo que eres ni lo que aspiras llegar a ser algún día. Si me preguntan a mí, de todas esas personas significativas, las más importantes son las que se quedan a pesar de los problemas o malentendidos que hayas tenido con ellas, más valiosas aún son las personas que te han ayudado cuando a veces la situación es en extremo difícil de superar y las cuales me gustaría reconocer sin importarme si en el futuro ya no están más conmigo pues hasta el día de hoy todas ellas me han dejado una enseñanza que llevaré conmigo siempre.

A mi mamá Elisa, más que nadie es gracias a ti y a tu apoyo que hoy estoy aquí escribiendo estas líneas y sin ti no tendría nada de lo que he conseguido y sé que siempre estarás ahí aún cuando nadie más lo esté.

A mi abuelita Caridad, más que mi abuela siempre fuiste una segunda madre y aunque ya no estás físicamente conmigo siempre estarás en cada palabra y expresión que me enseñaste.

A mis hermanos Osvaldo e Israel que fueron y han sido siempre mis primeros camaradas.

De las personas que he conocido a lo largo de la vida escolar y que se han convertido en mi segunda familia.

A ti Daniela G.R. que me has apoyado bastante en todo sentido incluso cuando has tenido hasta problemas más graves que los míos y aún así siempre me regalas parte de tu tiempo para escuchar lo que tengo que decir.

A mis amigos más cercanos que gracias a ellos la vida escolar ha sido más divertida de llevar, gracias Luz siempre me andabas acompañando en la universidad a todas partes incluso a clases que no tomabas, a mis amigos Alex, Yehoshuah, Víctor, Mafer, Brayam, Rodrigo, Arianna que aunque no hablamos mucho siempre nos reunimos incluso aunque no allá algún motivo.

A mi asesor el Dr. Héctor Novales por todo el tiempo y paciencia que se tomó para trabajar conmigo, sin duda además de ser un excelente profesor es una excelente persona, muchas gracias por todo su apoyo.

Al CONACYT, por el apoyo monetario brindado a través de su beca de posgrado de agosto del 2020 a julio del 2022, en la Maestría en Ciencias Física Aplica.

Índice general

Resumen	IX
Introducción	XI
1. El Modelo Estándar Electro débil	1
1.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetría	1
1.1.1. Simetría Global	2
1.1.2. Simetría de Norma	5
1.2. Sectores del MEE	10
1.2.1. Sector Escalar	10
1.2.2. Sector de Norma	14
1.2.3. Sector de Yukawa	17
1.2.4. Sector de Corrientes	26
2. Física más allá del Modelo Estándar	33
2.1. Conjugación de Carga	33
2.2. Espinores de Majorana	38
2.3. Modelo mínimo del Majorón	43
2.3.1. Rompimiento espontáneo de simetrías	43
2.3.2. Generación de masas de neutrinos	45
2.3.3. Espectro de masas de los neutrinos	54
2.3.4. Corrientes cargadas con neutrinos masivos	57
3. Cálculo de la producción de Majorones	63
3.1. Cálculo analítico	63
3.2. Cálculo numérico	68
3.3. Análisis de Resultados	72
Conclusión	76
A. Reglas de Feynman	79
A.0.1. Propagadores	79
A.0.2. Vértices	79
B. Funciones escalares de Passarino-Veltman	83
C. Aspectos generales del cálculo	85
D. Matrices de Dirac	95
Bibliografía	97

Resumen

Se estudia la producción de majorones (J) vía decaimientos de leptones cargados mediante el proceso $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta J$ en el modelo mínimo del majorón singlete; se desarrollaron los sectores de Yukawa y de corrientes cargadas para obtener los acoplamientos de los neutrinos con el majorón y el bosón W [9], se consideran los decaimientos $\mu \rightarrow eJ$, $\tau \rightarrow eJ$, $\tau \rightarrow \mu J$ comparando los *Branching Ratios* resultantes con los encontrados en la literatura, se determinan las condiciones del valor de la escala de alta energía para la consistencia de este modelo y se estiman valores para las masas de los neutrinos.

Introducción

Dentro de la física de altas energías una muestra muy importante de evidencia de nueva física es la relacionada a las oscilaciones de neutrinos[1]; ya que contrario a lo que conocemos del Modelo Estándar[2-4], nos indica que estas partículas sí son masivas y además sus masas son mucho más pequeñas que las de los leptones cargados, este problema nos lleva a cuestionar cuál es el mecanismo correcto de generación de masas. Si bien múltiples propuestas han sido desarrolladas, la certeza acerca de cuál mecanismo de generación de masa es el correcto sigue siendo un problema actualmente, más aún, considerando que los neutrinos son partículas sin carga, algunas de las propuestas requieren que los neutrinos sean partículas de Majorana[5]. Sin embargo la naturaleza del neutrino (si es de Dirac[6] o de Majorana) aún no ha sido probada. De los diferentes mecanismos que se han propuesto para explicar la generación de la masa de los neutrinos, el que más aceptación tiene es el mecanismo de *see-saw* [7], el cual permite explicar, de manera más dinámica, la ligereza en la masa de los neutrinos.

Los términos de masa de Majorana, sin embargo, violan la simetría global $U(1)$ asociada con el número leptónico, lo que permite explorar la idea de que esta simetría no sea una simetría fundamental de la naturaleza. La generación de términos de masa de Majorana, dirigidos a la implementación del mecanismo *see-saw* se puede realizar añadiendo a la teoría un campo escalar que rompa espontáneamente la simetría global $U(1)$. Una consecuencia notable es la generación de un bosón de Goldstone, conocido como *majorón*[8] y denotado por J , que al estar ligado a la definición de las masas de los neutrinos, se acopla con éstos. En este sentido consideramos el "modelo mínimo del *majorón* *singlete*"[9] ya que ofrece una descripción "sencilla" de un mecanismo de generación de masas del tipo *see-saw* que toma en cuenta la posibilidad de que los neutrinos sean partículas de Majorana. Comenzando con el estudio de este modelo, en el cual se añade un campo neutrino derecho por cada familia, el término lagrangiano considerado principalmente es el asociado con el sector de Yukawa, ya que es el encargado de dotar de masa a los neutrinos y permite obtener los acoplamientos de estos con el *majorón*

$$\mathcal{L}_Y^N = \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \left(-y_{\alpha\beta}^\ell \bar{L}_\alpha \tilde{\phi} N_{\beta,R} - \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta} \bar{N}_{\alpha,R}^c \sigma N_{\beta,R} + H.c. \right). \quad (1)$$

Una motivación importante detrás del *majorón*, cuya masa, en esquemas convencionales de *see-saw*, yace en el orden de los KeVs, es que encarna a un candidato a materia oscura cuyos efectos son de interés astrofísico y cosmológico.

Puesto que el surgimiento del *majorón* está vinculado exclusivamente a la generación de masas de los neutrinos, los acoplamientos entre campos *majorones* y leptones cargados ocurren solo a nivel de lazos. Ejemplos de tales procesos de decaimiento son $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta J$, siendo ℓ_α y ℓ_β campos leptones cargados de sabores α y β , respectivamente. Así pues, discutimos la producción de *majorones* en decaimientos de leptones cargados, para el cálculo analítico de las amplitudes de decaimiento bajo consideración se desarrollaron los términos lagrangianos del sector de Yukawa descrito en (1) con el motivo de encontrar las expresiones de los acoplamientos del *majorón* con los neutrinos; además se estudian los acoplamientos del bosón W con los eigenestados de masa de los neutrinos y se define la matriz de mezcla de los leptones, se hizo uso del método de reducción tensorial

de Passarino-Veltman[10] y parametrización de Feynman[11] con el fin de poder comparar los resultados numéricos mediante dos métodos distintos.

Debido a que es un modelo de nueva física, no existe información para algunos de los parámetros libres que se encuentran presentes en la teoría. Para ello se realiza una aproximación a primer orden que deja a las expresiones obtenidas en términos de elementos para los cuales existen mediciones experimentales, como los de la matriz de mezcla mencionada anteriormente. Por otro lado, dichas expresiones fueron en extremo complicadas de resolver numéricamente, afortunadamente estas dependen exclusivamente de las masas de los leptones cargados y neutrinos, aprovechando esto y realizando el desarrollo del mecanismo de *see-saw* más explícitamente, para este modelo fue posible expresar a las masas en función de la razón $t = \frac{v}{w}$, donde v es la escala de energía electrodébil característica del Modelo Estándar y w la escala de energía representativa para el proceso de ruptura de simetría del grupo $U(1)$ global. Considerando que a esta escala se espera detectar efectos de nueva física, exploramos el caso donde $w \gg v$, esto nos permite trabajar a las expresiones en serie de Taylor aproximándolas a primer orden de t .

Los resultados numéricos que se obtuvieron se compararon con los *Branching Ratios* de los decaimientos del tipo $l_\alpha \rightarrow X^0 l_\beta$ con X^0 un bosón de Goldstone en general. Con los datos reportados en el *Particle Data Group*[19] fue posible realizar una estimación del orden de las masas de los neutrinos pesados siendo $O(10^{13})\text{GeV}$. Este resultado es interesante pues al ser las masas de los neutrinos pesados $\propto w$ los efectos de nueva física, de acuerdo con este modelo, deberían manifestarse a estos ordenes de energía. Además, se encontró una cota mínima para que este modelo tenga consistencia con los datos experimentales reportados hasta el día de hoy, por último los resultados encontrados nos llevaron a concluir que las fases de Majorana no afectan a este tipo de procesos.

Capítulo 1

El Modelo Estándar Electrodébil

Actualmente se conocen cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza, esto gracias a las observaciones realizadas a lo largo de los años. Estas interacciones son conocidas como el electromagnetismo, las interacciones fuerte y débil y la gravedad. Por largo tiempo los esfuerzos de la comunidad científica se han enfocado en obtener una teoría capaz de realizar una descripción de las cuatro interacciones bajo un mismo marco teórico; sin embargo, hasta el día de hoy sólo se ha podido hacer una descripción bastante consistente con nuestras mediciones experimentales de tres de estas cuatro interacciones, siendo la gravedad la única que se escapa, dicha unificación es el llamado Modelo Estándar (ME).

El ME está construido bajo el contexto de la teoría cuántica de campos donde los dos elementos base que se utilizan para su construcción son las simetrías y las variables dinámicas[11-15]. Las variables dinámicas son los campos que dependen de las coordenadas del espacio-tiempo, y se asocian con los grados de libertad de la teoría y cuyos cuantos se interpretan como las partículas fundamentales que la constituyen. Por otro lado, están las simetrías, que se definen como transformaciones sobre los campos que dejan invariantes a las ecuaciones de movimiento. Las simetrías más importantes son la simetría de espacio-tiempo y la simetría de norma[11][16]. Las simetrías pueden caracterizarse bajo el lenguaje de la teoría de grupos en el que a cada simetría le corresponde un grupo y las transformaciones son elementos de dicho grupo, esto nos brinda una forma poderosa de comprender y clasificar a las simetrías.[11][17][18].

El presente trabajo se enfocará en el Modelo Estándar Electrodébil (MEE), la cual es la parte del ME que sólo describe las interacciones electromagnética y débil. El grupo de norma asociado al MEE es el grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$, mientras la simetría de espacio-tiempo es el grupo $ISO(1, 3)$ o grupo de Poincaré, definido sobre el espacio-tiempo de Mikowski.

Como ya hemos mencionado, el ME tiene un gran respaldo experimental[19] en el sentido de que ha sido capaz de predecir muchos fenómenos físicos y la existencia de partículas como el bosón Higgs recientemente descubierto en 2012[20]. Sin embargo, no es perfecto ya que existen muchos fenómenos que el ME no es capaz de explicar, por mencionar algunos, son la materia oscura[21][22], el mecanismo de generación de masas de los neutrinos y por supuesto la ya mencionada incompatibilidad con la gravedad. Esto nos lleva a pensar que el ME y en específico el MEE es una teoría incompleta y que existe una teoría más allá del ME capaz de poder resolver estos problemas y que ha sido el motivo de investigación en la física de altas energías y otras áreas como la gravitación.

1.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetría

Para hablar del MEE es necesario profundizar un poco en el concepto de simetría y el mecanismo del rompimiento espontaneo de la simetría (RES). Ya se ha mencionado que una simetría se define

como una transformación que deja invariante a las ecuaciones de movimiento y además a dicha simetría se le puede asignar un grupo. En general a las transformaciones se les puede caracterizar como elementos del grupo asociado a tal simetría, los parámetros de los que dependen son requeridos para especificar un elemento de dicho grupo y hay uno por cada generador de éste. Por lo tanto, las simetrías pueden clasificarse según los parámetros de los cuales dependan, si la transformación depende de parámetros continuos tenemos una simetría continua, pero si los parámetros de la transformación toman valores discretos decimos que es una simetría discreta. Por otro lado, si los parámetros asociados a la simetría no dependen de las coordenadas del espacio-tiempo; es decir son constantes, tenemos una simetría global mientras que si los parámetros si dependen de las coordenadas del espacio-tiempo la simetría se conoce como una simetría local o de norma.

La importancia de la invariancia de norma radica en que nos permite relacionar mediante transformaciones descripciones matemáticamente distintas de un sistema físico pero que producen las mismas observables y que por este motivo todas estas descripciones son igualmente válidas y la decisión de la elección de una de ellas sólo obedece a motivos de practicidad para la realización de cálculos en vez de principios más fundamentales. Existen dos formas de romper la simetría: el rompimiento explícito, en donde se agrega al lagrangiano un término que rompe la simetría, y el rompimiento espontáneo, en este caso el lagrangiano es invariante ante la simetría, pero el vacío cae en un estado que no lo es. Este último caso es de especial interés pues si este rompimiento es el de una simetría global se da lugar al teorema de Goldstone[23] mientras que si la simetría es de norma se da el mecanismo de Higgs[24-26], que es el corazón del MEE.

1.1.1. Simetría Global

Para ilustrar mejor lo anteriormente mencionado se implementará el RES a una teoría invariante bajo el grupo $U(1)$ global. Para comenzar considere el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi^*(x)) (\partial^\mu \phi(x)) - V(\phi(x), \phi^*(x)), \quad (1.1)$$

donde $\phi(x)$ es un campo escalar complejo y además $\phi(x)$, $\phi^*(x)$ se pueden considerar como variables independientes entre sí, por otro lado $V(\phi(x), \phi^*(x))$ es el potencial escalar. Comenzamos con la forma de potencial más sencilla que caracteriza a la teoría del campo escalar complejo libre

$$V_1(\phi(x), \phi^*(x)) = m^2 \phi^*(x) \phi(x). \quad (1.2)$$

Así el lagrangiano (1.1) toma la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{cs}(x) = (\partial_\mu \phi^*(x)) (\partial^\mu \phi(x)) - m^2 \phi^*(x) \phi(x), \quad (1.3)$$

y además es invariante ante la transformación del grupo $U(1)$ global

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\alpha} \phi(x), \quad (1.4)$$

$$\phi^*(x) \rightarrow \phi'^*(x) = e^{i\alpha} \phi^*(x), \quad (1.5)$$

donde $e^{-i\alpha}$ y su conjugado son elementos de $U(1)$ y α es el parámetro constante que caracteriza a la transformación, al ser $\phi(x)$ un campo escalar complejo puede escribirse como la suma de una parte real y una parte imaginaria; así podemos definir a los campos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$ como sigue

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)), \quad (1.6)$$

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) - i\phi_2(x)), \quad (1.7)$$

que define un cambio de variable de los campos complejos por los campos escalares reales $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, implementando este cambio en (1.3) obtenemos

$$\mathcal{L}_{cs}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1(x)\partial^\mu\phi_1(x) - \frac{m^2}{2}\phi_1^2(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2(x)\partial^\mu\phi_2(x) - \frac{m^2}{2}\phi_2^2(x), \quad (1.8)$$

notemos que obtenemos para los campos $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ términos lagrangianos del tipo de Klein-Gordon[11-13] (K-G), debido a esto podemos decir que los términos $-\frac{m^2}{2}\phi_j^2(x)$ son términos de masa para sus respectivos campos.¹

Tomando en cuenta sólo el potencial dado en (1.2) en términos de los campos reales, tenemos

$$V_1(\phi_1, \phi_2) = \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (1.9)$$

Las nuevas variables que se han introducido de igual forma pueden considerarse independientes. Ya que los campos son reales es fácil ver que en general $V_1(\phi_1, \phi_2) \geq 0$ y que tiene un mínimo global en $\phi_1 = \phi_2 = 0$ o equivalentemente en $\phi = 0$ que se asocia con el valor de mínima energía que pueden tomar los campos para esta teoría. Un hecho importante se puede notar en el contexto de la teoría cuántica de campos es que las partículas elementales se definen como excitaciones de los campos alrededor de su mínima energía; es decir, se crean partículas cuando los cuantos de energía de los campos aumentan y se destruyen cuando estos disminuyen, por lo que si el potencial no estuviera acotado por abajo las partículas se destruirían sin restricción alguna al disminuir la energía, por este motivo al valor donde los campos minimizan al potencial se conoce como el Valor de Expectación del Vacío (VEV). En adelante a la configuración donde el campo minimice al potencial lo llamaremos vacío.

Ahora consideremos un potencial de la forma

$$V_2(\phi^*, \phi) = \lambda m^2 (\phi^* \phi - \xi^2)^2, \quad (1.10)$$

donde $\lambda > 0$ y cuenta con unidades de (masa)⁻², además ξ es real, constante y tiene unidades de (masa)¹. Sustituyendo en nuestro lagrangiano (1.1) ahora se tiene

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - \lambda m^2 (\phi^* \phi - \xi^2)^2, \quad (1.11)$$

el cual también es invariante bajo las transformaciones (1.4) y (1.5); y por lo tanto, es invariante bajo el grupo global $U(1)$. En términos de los campos reales (1.11) tiene la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}(2\lambda m^2\xi^2)\phi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \frac{1}{2}(2\lambda m^2\xi^2)\phi_2^2 + O(\phi^4). \quad (1.12)$$

Enfocándonos en los términos cuadráticos de los campos los cuales definen masas, a diferencia de (1.8) los términos en (1.12) no pueden ser considerados términos de masa ya que al ser $2\lambda m^2\xi^2 > 0$ en el lagrangiano (1.12) estos términos deberían ser precedidos por un signo negativo como es en el caso de (1.8), por lo que decimos que los campos en esta teoría son no masivos. Prestemos especial atención al potencial escalar en términos de los campos reales

$$V_2(\phi_1, \phi_2) = \lambda m^2 \left(\frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \xi^2 \right)^2. \quad (1.13)$$

Nos interesa saber la configuración de mínima energía, entonces se deben calcular los puntos críticos de nuestra función potencial, de tal forma que las condiciones resultantes son

$$\phi_1 \left(\frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \xi^2 \right) = 0, \quad (1.14)$$

¹En adelante obviaremos en los campos la dependencia del espacio-tiempo

$$\phi_2 \left(\frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \xi^2 \right) = 0, \quad (1.15)$$

lo que es equivalente a las condiciones

$$\phi_{1,0}^2 + \phi_{2,0}^2 = 2\xi^2, \quad (1.16)$$

$$\phi_{1,0} = \phi_{2,0} = 0. \quad (1.17)$$

El subíndice cero se refiere a los valores de los campos (ϕ_1, ϕ_2) que cumplan la condición de extremización. Es fácil ver que la condición correspondiente al valor mínimo del potencial es (1.16) ya que si evaluamos estas condiciones en (1.13), obtenemos que $V_2 = 0$ y $V_2 > 0$ respectivamente. La condición (1.16) corresponde a una circunferencia centrada en el origen en el espacio (ϕ_1, ϕ_2) de radio $\sqrt{2}|\xi|$. Comparando las dos funciones potenciales (1.9) y (1.13) observe que caracterizan a dos teorías completamente distintas. Mientras el potencial (1.9) tiene un único mínimo global, en el caso de (1.13) corresponde a infinitos puntos mínimos globales y que son todos equivalentes, es por lo que se dice que el conjunto de puntos críticos de mínimo del potencial (1.13) caracterizan a un conjunto de estados de energía mínima degenerado o en otras palabras un vacío degenerado. Trabajando con la transformación (1.4, 1.5) y combinándola con (1.6, 1.7) hay una conclusión importante a la que podemos llegar, es decir, se tiene

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi'_1 + i\phi'_2) = e^{-i\alpha}\phi = e^{-i\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) = (\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \\ &\Rightarrow \phi'_1 = \cos(\alpha)\phi_1 + \sin(\alpha)\phi_2, \\ &\phi'_2 = -\sin(\alpha)\phi_1 + \cos(\alpha)\phi_2, \end{aligned}$$

de donde la transformación puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

Donde claramente se puede concluir que una transformación del grupo global $U(1)$ es equivalente a una rotación sobre los campos reales²; esto no es de extrañarse, de hecho tomando en cuenta la condición de mínimo (1.16) si elegimos algunos valores para ϕ_1 y ϕ_2 tal que satisfagan dicha condición, siempre es posible encontrar mediante una rotación de un ángulo α otros valores para nuestros campos que también la cumplan, por lo que la condición de mínimo también es un invariante bajo $U(1)$ global.

Como ya se ha mencionado, tenemos infinitos puntos que satisfacen la condición de mínimo y todos son igualmente válidos en el sentido de que físicamente no son distintos uno del otro, por lo que podemos elegir uno de ellos. Esta elección es lo que rompe la simetría. En particular escogemos $(\phi_{1,0}, \phi_{2,0}) = (\sqrt{2}\xi, 0)$, así el vacío toma el valor³

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{1,0} + i\phi_{2,0}) = \xi. \quad (1.19)$$

Ahora se puede redefinir nuestro campo haciendo una aproximación mediante el teorema de Taylor alrededor de nuestro valor ϕ_0 , tenemos entonces

$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi, \quad (1.20)$$

²Este resultado sucede en los casos del grupo local y global $U(1)$ la única diferencia es la dependencia o no dependencia del parámetro α de las coordenadas del espacio-tiempo respectivamente

³Por simplicidad elegimos $\xi > 0$, de esta manera $|\xi| = \xi$

en general el segundo sumando de la ecuación anterior es una función de valores complejos de tal forma que podemos redefinir nuestro cambio de la siguiente forma

$$\phi(x) = \xi + \frac{1}{\sqrt{2}} (S(x) + iG(x)), \quad (1.21)$$

aplicando este cambio en nuestro lagrangiano (1.11), se obtiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu S) (\partial^\mu S) - \frac{1}{2} (2m\xi\sqrt{\lambda})^2 S^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu G) (\partial^\mu G) + \mathcal{L}_{int}. \quad (1.22)$$

Como hicimos anteriormente, podemos relacionar a la primera parte del nuevo lagrangiano (1.22) para el campo S con la teoría de campo libre de K-G donde ahora se puede identificar al término $-\frac{1}{2} (2m\xi\sqrt{\lambda})^2 S^2$ como el término de masa para el campo S , tal que la masa asociada a este campo esta dada por

$$m_S = 2m\xi\sqrt{\lambda}. \quad (1.23)$$

En contraste, notemos que en lo que respecta al campo G , este no tiene término de masa, por lo que es un campo no masivo. Los términos restantes son los términos de interacción de la teoría. Resumiendo: hemos partido de una teoría invariante bajo el grupo $U(1)$ global, al implementar el cambio (1.21) en el que rompemos la simetría del lagrangiano (1.11) correspondiente a la simetría del vacío, nuestro nuevo lagrangiano (1.22) ya no es invariante bajo este grupo. Además, es posible realizar la transformación inversa y recuperar la simetría, es decir, la simetría bajo $U(1)$ sigue estando presente pero no de manera explícita si no que esta oculta. Con este proceso de RES a partir de los campos ϕ_1 y ϕ_2 los cuales no poseen masa, obtenemos dos campos; un campo S escalar con masa m_S y un campo G escalar sin masa que se conoce como bosón de Goldstone. Este es el teorema de Goldstone que establece que cuando una simetría global se rompe espontáneamente siempre aparecen campos escalares sin masa llamados bosones de Goldstone.

1.1.2. Simetría de Norma

Una vez que se ha revisado el caso de una ruptura espontánea en una simetría global, una pregunta natural que podemos realizar es ¿qué sucede en el caso de que una simetría local se rompa espontáneamente? Para aclarar esta pregunta consideremos el lagrangiano siguiente

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi, \phi^*), \quad (1.24)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es un tensor de campo dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.25)$$

además ϕ es el campo escalar complejo, A_μ el campo de norma asociado al grupo $U(1)$ local y $D_\mu \phi$ es la derivada covariante definida por

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi. \quad (1.26)$$

Para hablar un poco más al respecto de la derivada covariante comenzaremos con el potencial más sencillo

$$V(\phi^*, \phi) = m^2 \phi^* \phi, \quad (1.27)$$

de esta manera tenemos que nuestro lagrangiano (1.24) coincide con la de la electrodinámica escalar y es invariante bajo el grupo $U(1)$ local mediante las transformaciones siguientes

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-iq\alpha(x)} \phi(x), \quad (1.28)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \quad (1.29)$$

en este caso $e^{-iq\alpha(x)}$ es un elemento de nuestro grupo local y $\alpha(x)$ es el parámetro de norma dependiente de los puntos del espacio-tiempo que caracteriza a la transformación, de esta manera usando estas relaciones obtenemos que la derivada covariante tiene que transformarse como sigue

$$\begin{aligned} D_\mu \phi(x) &\longrightarrow (D_\mu \phi)'(x) = D'_\mu \phi'(x) = [\partial_\mu + iqA'_\mu]e^{-iq\alpha(x)}\phi(x) \\ &= \partial_\mu(e^{-iq\alpha(x)}\phi(x)) + iq(A_\mu + \partial_\mu \alpha(x))e^{-iq\alpha(x)}\phi(x) \\ &= e^{-iq\alpha(x)}\partial_\mu \phi(x) - iqe^{-iq\alpha(x)}\phi(x)\partial_\mu \alpha(x) \\ &\quad + iqA_\mu e^{-iq\alpha(x)}\phi(x) + iqe^{-iq\alpha(x)}\phi(x)\partial_\mu \alpha(x) \\ &= e^{-iq\alpha(x)}[\partial_\mu + iqA_\mu]\phi(x) \\ &= e^{-iq\alpha(x)}D_\mu \phi(x). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Es decir, la derivada covariante del campo ϕ se transforma de la misma manera que el campo mismo, esto es importante ya que si usáramos la derivada usual sobre el campo escalar, la invariancia de norma no estaría presente. Por este motivo en teorías invariantes bajo una simetría local, para los campos que no son de norma en sus términos cinéticos se debe usar una derivada covariante en lugar de la usual para preservar la simetría de norma. Además la derivada covariante nos da información de como interactúa el campo de norma con el campo sobre el cual actúa la derivada covariante. Ahora suponemos un potencial de la forma

$$V(\phi^*, \phi) = -\mu^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2, \quad (1.31)$$

el término correspondiente a λ es el que se convierte en dominante cuan más grande es el valor de $|\phi|$, por lo que $\lambda > 0$ para tener un vacío físicamente estable en el sentido ya discutido del VEV. Aplicando las relaciones dadas en (1.6, 1.7) pasamos de la definición de nuestro potencial a una sobre los campos reales, obteniendo así

$$V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{\mu^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{8} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad (1.32)$$

notemos que dependiendo del valor que tome μ^2 ; esto es si $\mu^2 < 0$ ó $\mu^2 > 0$ el potencial describe dos formas diferentes siendo en esencia correspondientes con los casos vistos anteriormente de vacío no degenerado y vacío degenerado respectivamente. Como fue en el caso de una simetría global, lo que nos permite el proceso de ruptura de la simetría es que tengamos un estado de vacío degenerado y este ocurre si $\mu^2 > 0$ por este motivo es que supondremos en adelante tal caso. Dado nuestro potencial la forma del lagrangiano (1.24) que se obtiene es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2, \quad (1.33)$$

y si desarrollamos esta expresión en términos de los campos reales, tenemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2}\mu^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + \frac{1}{2}\mu^2 \phi_2^2 + \dots, \quad (1.34)$$

como hemos supuesto que $\mu^2 > 0$, es fácil ver que no contamos con términos de masa para los campos ϕ_j , es decir que estos campos no son masivos. Retomando nuestra expresión para

el potencial dada en (1.32), nos interesa saber sus puntos críticos los cuales pueden ser calculados bajo el criterio de la primera derivada, tenemos así las ecuaciones

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = \phi_1 \left(-\mu^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) \right) = 0, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_2} = \phi_2 \left(-\mu^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) \right) = 0, \quad (1.36)$$

las cuales son equivalentes a las condiciones de mínimo y máximo respectivamente

$$\phi_{1,0}^2 + \phi_{2,0}^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda}, \quad (1.37)$$

$$\phi_{1,0} = \phi_{2,0} = 0, \quad (1.38)$$

la condición de mínimo en el plano (ϕ_1, ϕ_2) dibuja una circunferencia centrada en el origen ahora con radio $\sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}$, con esto verificamos que bajo nuestra suposición sobre μ^2 , correctamente obtenemos un estado de vacío degenerado que es lo que nos permitirá el rompimiento de la simetría. Ahora romperemos la simetría como ya lo hemos hecho eligiendo de todos los valores para $(\phi_{1,0}, \phi_{2,0})$ uno solo en particular, con esto el valor del vacío es

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (1.39)$$

y así podemos reescribir nuestro campo escalar mediante el mismo procedimiento que en la ecuación (1.20), por lo que ahora tenemos

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1(x) + i\xi_2(x)). \quad (1.40)$$

Aplicando este cambio en nuestra expresión del lagrangiano (1.33), haciendo especial énfasis en los términos cinéticos y cuadráticos de los campos resulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{2\mu^2} \right)^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_2 \partial^\mu \xi_2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} q \right)^2 A_\mu A^\mu + \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} q A_\mu \partial^\mu \xi_2 + \dots \quad (1.41)$$

Los términos que son constantes pueden ser despreciados ya que no afectan a las ecuaciones de movimiento. Analicemos cada parte que es relevante de esta expresión, comencemos con

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{2\mu^2} \right)^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_2 \partial^\mu \xi_2.$$

Es fácil observar que estos términos evocan a la forma de una teoría de K-G para campos reales, de hecho podemos notar que el término $\frac{1}{2} \left(\sqrt{2\mu^2} \right)^2 \xi_1^2$ es siempre positivo y al ser precedido por un signo menos cumple con las condiciones para ser considerado un término de masa para el campo ξ_1 y podemos definir a la masa asociada para este campo como $m_{\xi_1} = \sqrt{2\mu^2}$, por otra parte para el campo ξ_2 no existe un término de este tipo por lo que este campo no es masivo; por último tenemos el término

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} q \right)^2 A_\mu A^\mu.$$

Para hablar de este término comparemos con la lagrangiana de Proca[11-13]

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu, \quad (1.42)$$

El Modelo Estándar Electro débil
1.1 Rompimiento Espontáneo de la Simetría

la cual describe una teoría de un campo de tipo electromagnético con masa asociada m_A . Para que el segundo sumando en el lagrangiano de Proca sea considerado un término de masa $\frac{1}{2}m_A$ debe ser positivo. En comparación con nuestra relación notemos que $\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} q \right)^2 > 0$, por lo que en analogía se tiene un campo de norma con masa $m_A = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} q$; es decir, después del proceso de RES el campo de norma adquiere masa, este hecho es fundamental pues notemos que los términos que nos evocan al lagrangiano de Proca no son invariantes de norma

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu \rightarrow -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A'_\mu A'^\mu = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu + m_A^2 A_\mu \partial^\mu \alpha(x) + \dots$$

$$\neq -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu. \quad (1.43)$$

Puntualmente, es el término de masa el que impide que sea invariante; en general no podemos construir teorías invariantes bajo una simetría local con campos de norma masivos, pero a partir de la ruptura de la simetría nosotros podemos generar términos de masa para estos campos partiendo de una teoría que sí es invariante local, de aquí viene la importancia de este proceso de ruptura de simetría. Al proceso en el que se generan masas para los campos de norma a través de la ruptura espontánea de la simetría se le conoce como mecanismo de Higgs. Aplicando estas definiciones sobre las masas la lagrangiana resultante es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 - \frac{1}{2}m_{\xi_1}^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \xi_2 \partial^\mu \xi_2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu + m_A A_\mu \partial^\mu \xi_2 + \dots \quad (1.44)$$

Resumiendo, comenzamos con una teoría con dos campos escalares y uno de norma sin masa que después del proceso de ruptura de simetría cambia por una en la que ahora contamos con un campo escalar masivo conocido como bosón de Higgs y un campo escalar sin masa llamado pseudo-bosón de Goldstone y lo más importante es que nuestro campo de norma ahora adquiere masa. Podemos profundizar un poco más acerca de estos campos escalares sin masa pues se tiene una diferencia con el caso global con los llamados bosones de Goldstone, para ello retomemos de nuevo nuestra condición de mínimo, de la cual podemos encontrar una equivalencia

$$\begin{aligned} \phi_{1,0}^2 + \phi_{2,0}^2 &= \frac{2\mu^2}{\lambda}, \\ \Rightarrow \phi_0^* \phi_0 &= \frac{\mu^2}{\lambda}, \\ \Rightarrow |\phi_0| &= \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Por otro lado notemos que ϕ_0 es una cantidad compleja por lo que podemos expresarlo en forma polar de la siguiente forma

$$\phi_0 = |\phi_0| \exp\left(-i \frac{\chi(x)}{|\phi_0|}\right), \quad (1.45)$$

volvemos a retomar nuestra expresión (1.20)

$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi,$$

como hemos mencionado el segundo sumando de la expresión es una función de valores complejos que podemos parametrizar en forma polar como sigue

$$\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x) \exp\left(-i \frac{\chi(x)}{|\phi_0|}\right), \quad (1.46)$$

ahora podemos reescribir nuestro campo escalar de una forma un poco más general, se tiene así⁴

$$\phi(x) = |\phi_0| \exp\left(-i\frac{\chi(x)}{|\phi_0|}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x) \exp\left(-i\frac{\chi(x)}{|\phi_0|}\right) = \left(|\phi_0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x)\right) \exp\left(-i\frac{\chi(x)}{|\phi_0|}\right), \quad (1.47)$$

utilizando la transformación de nuestro campo definida en (1.28) vemos que

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= e^{-iq\alpha(x)}\phi(x) = e^{-iq\alpha(x)} \left(|\phi_0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x)\right) \exp\left(-i\frac{\chi(x)}{|\phi_0|}\right) \\ &= \left(|\phi_0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x)\right) \exp\left(-i\left(q\alpha(x) + \frac{\chi(x)}{|\phi_0|}\right)\right), \end{aligned} \quad (1.48)$$

observe que no existe una restricción sobre el valor que pueda tomar nuestro parámetro de norma por lo que podemos elegir una función en particular para dicho parámetro, a esto lo conocemos como fijación de la norma, en este caso elegimos una norma tal que

$$q\alpha(x) + \frac{\chi(x)}{|\phi_0|} = 0, \quad (1.49)$$

que nos da la función para nuestro parámetro

$$\alpha(x) = -\frac{\chi(x)}{q|\phi_0|}, \quad (1.50)$$

lo que se conoce como norma unitaria. Bajo esta norma notemos que el campo se transforma como

$$\phi'(x) = |\phi_0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x) = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x), \quad (1.51)$$

sin embargo nuestro campo transformado o primado también puede escribirse de forma usual como lo hemos estado trabajando con la expresión (1.40), combinando estas dos formas de expresar nuestro campo podemos encontrar las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi'_1(x) + i\xi'_2(x)) = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(x), \\ &\Rightarrow \xi'_1(x) = \eta(x), \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\xi'_2(x) = 0, \quad (1.53)$$

con esto podemos decir en la norma unitaria bajo la transformación que rompe la simetría, el campo sin masa desaparece

$$\phi'(x) = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi'_1(x). \quad (1.54)$$

El lagrangiano al ser invariante de norma nos permite trabajar en términos de los campos transformados y podemos sustituir nuestra expresión para el campo ϕ' en el que fijamos la norma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)'^*(D^\mu\phi)' + \mu^2\phi'^*\phi' - \frac{\lambda}{2}(\phi'^*\phi')^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\xi'_1\partial^\mu\xi'_1 - \frac{1}{2}m_{\xi_1}^2\xi'^2_1 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2A'_\mu A'^\mu + \dots, \end{aligned} \quad (1.55)$$

donde las definiciones para las masas de sus respectivos campos son equivalentes en el caso en el que no se fijó la norma, por simplicidad eliminemos la prima sobre los campos pero tomando en

⁴Para el caso de la simetría global también es posible expresar al campo escalar ϕ en forma polar pero ya que obtenemos las mismas conclusiones que las ya mostradas el desarrollo se omite.

cuenta que en (1.55) se está trabajando con una norma fija que es la norma unitaria. Comparando con la expresión obtenida mediante el proceso de ruptura en el que no se fijó la norma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}\partial_\mu\xi_1\partial^\mu\xi_1 - \frac{1}{2}m_{\xi_1}^2\xi_1^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2A_\mu A^\mu + \dots, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\xi_1\partial^\mu\xi_1 - \frac{1}{2}m_{\xi_1}^2\xi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi_2\partial^\mu\xi_2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2A_\mu A^\mu + m_A A_\mu\partial^\mu\xi_2 + \dots,\end{aligned}$$

corresponden a la misma forma salvo por los términos del campo ξ_2 , pero es importante tener presente lo ya dicho con anterioridad, la simetría de norma nos permite relacionar descripciones matemáticamente distintas de un mismo sistema físico que nos llevan a las mismas observables físicas, por este motivo la elección de una norma en particular no debe afectar el espectro de partículas físicas. Que el campo ξ_2 no se encuentre presente bajo una norma particular, pero sí cuando no elegimos alguna nos lleva a concluir que este campo no es físico; es decir a diferencia del caso de una simetría global donde obtenemos campos no masivos llamados bosones de Goldstone los cuales sí son físicos, en el caso de la ruptura de una simetría local los campos escalares no masivos que resultan no son físicos por lo que no se encontrarían en la naturaleza y los conocemos como pseudo-bosones de Goldstone, además en la norma unitaria se interpreta que los pseudo-bosones de Goldstone son engullidos por los campos de norma para dotarlos de masa.

1.2. Sectores del MEE

El MEE se ha dicho, es una teoría de norma bajo el grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ que se encarga de describir las fuerzas débil y electromagnética, dichas interacciones son mediadas por bosones de norma siendo para la fuerza débil los bosones masivos W^\pm y Z , mientras que para la electromagnética es el bosón de norma sin masa A que llamamos fotón. La existencia de términos de masa para los bosones masivos se consigue mediante el mecanismo de Higgs por lo que el MEE debe ser una teoría espontáneamente rota que a bajas energías esta descrita por el grupo electromagnético y como remanente del proceso de RES obtenemos un campo físico escalar llamado bosón de Higgs. Las demás partículas constituyentes de este modelo son los fermiones que son partículas de espín $\frac{1}{2}$ descritas por campos espinores de Dirac, experimentalmente se tiene evidencia de que la fuerza débil actúa sólo sobre fermiones quirales izquierdos. Los fermiones se dividen en dos tipos: leptones y quarks, los leptones interactúan débil y electromagnéticamente y los quarks que a diferencia de los leptones además de interactuar con dichas dos fuerzas también interactúan fuertemente. Sin embargo, en el presente trabajo nos importan especialmente las interacciones de los leptones por ello la parte referente a los quarks la omitiremos en el desarrollo subsecuente.

El lagrangiano que caracteriza al MEE puede escribirse como la suma de diferentes sectores que nos dan diferente información acerca de nuestra teoría

$$\mathcal{L}_{\text{MEE}} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_Y, \quad (1.56)$$

los términos correspondientes son: \mathcal{L}_S para el sector escalar que permite realizar el mecanismo de Higgs para dotar de masa a los bosones de norma, \mathcal{L}_{YM} es el sector de Yang-Mills o sector de norma y determina la dinámica de los campos de norma, \mathcal{L}_C es el sector de corrientes y determina la dinámica de los leptones y quarks además de sus interacciones con los bosones de norma y por último \mathcal{L}_Y es el sector de Yukawa que permitirá dotar de masa a los leptones cargados y quarks y nos dará los acoplamientos con el bosón de Higgs.

1.2.1. Sector Escalar

El sector escalar o sector de Higgs está descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi^\dagger, \phi), \quad (1.57)$$

donde se introduce un doblete escalar complejo de $SU(2)_L$ definido como

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

y la derivada covariante se expresa ⁵

$$D_\mu = \partial_\mu \cdot 1_2 - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - ig_1 B_\mu \frac{Y}{2} \cdot 1_2, \quad (1.59)$$

en la llamada representación fundamental. Los elementos g_1 y g_2 son las constantes de acoplamiento de los grupos $U(1)_Y$ y $SU(2)_L$ respectivamente siendo ambas reales, σ^l las matrices de Pauli y $\frac{\sigma^l}{2}$ los generadores del grupo $SU(2)_L$. Finalmente Y es la hipercarga del campo sobre el que actúa la derivada covariante y determina cómo interacciona el campo con el grupo $U(1)_Y$. Las leyes de transformación para los campos de norma son

$$W_\mu^j(x) \frac{\sigma^j}{2} \longrightarrow W'^j{}_\mu(x) \frac{\sigma^j}{2} = v(x) \left[W_\mu^j(x) \frac{\sigma^j}{2} + \frac{i}{g_2} \partial_\mu \right] v^\dagger(x), \quad (1.60)$$

$$B_\mu(x) \longrightarrow B'_\mu(x) = B_\mu(x) + \frac{i}{g_1} \partial_\mu \alpha(x), \quad (1.61)$$

donde $v(x)$ es un elemento de $SU(2)_L$ que puede expresarse de manera más general como

$$v(x) = \exp \left\{ \frac{\sigma^l}{2} \alpha^l(x) \right\}, \quad (1.62)$$

Por otra parte en (1.61,1.62) $\alpha(x)$ y $\alpha^l(x)$ son los parámetros de norma que caracterizan a las transformaciones locales y son arbitrarias con el único requisito de que sean diferenciables para todos los puntos del espacio-tiempo. La ley de transformación para el doblete escalar está dada por

$$\begin{aligned} \phi(x) \longrightarrow \phi'(x) &= \exp \left\{ i \frac{Y_\phi}{2} \alpha(x) \right\} v(x) \phi(x) \\ &= \exp \left\{ i \left(\frac{\sigma^l}{2} \alpha^l(x) + \frac{Y_\phi}{2} \alpha(x) \cdot 1_2 \right) \right\} \phi(x), \end{aligned} \quad (1.63)$$

donde Y_ϕ es la hipercarga del doblete escalar. Se mencionó en la sección (1.1.2) que la importancia de usar una derivada covariante es que esta se transforma de igual forma que el campo sobre el que se aplica por lo que por un proceso similar a (1.30) en efecto se puede probar que la ley de transformación es idéntica a la del doblete; esto es

$$D_\mu \phi(x) \longrightarrow (D_\mu \phi(x))' = \exp \left\{ i \left(\frac{\sigma^l}{2} \alpha^l(x) + \frac{Y_\phi}{2} \alpha(x) \cdot 1_2 \right) \right\} D_\mu \phi(x), \quad (1.64)$$

el potencial escalar invariante de norma está dado por

$$V(\phi^\dagger, \phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (1.65)$$

Los signos de μ^2 y λ son elegidos positivos por los mismos motivos que los discutidos en el caso del grupo $U(1)$ de la sección (1.1.2); además λ es adimensional. El doblete escalar puede ser escrito en términos de campos reales como sigue

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) + i\varphi_4(x) \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

⁵En adelante índices repetidos expresan suma, índices latinos corren sobre $i = 1, 2, 3$ y griegos sobre $\beta = 0, 1, 2, 3$ a menos que se indique otra cosa

El símbolo 1_2 representa a una matriz unitaria de tamaño 2×2 , en general, a las matrices unitarias de tamaño $n \times n$ las representaremos como 1_n

Analizamos nuestra teoría alrededor del punto mínimo de energía, la condición de mínimo es

$$\phi_0^\dagger \phi_0 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}, \quad (1.67)$$

que es equivalente a una esfera de 4 dimensiones en el espacio $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ con lo que tenemos un vacío infinitamente degenerado en el que cada punto sobre esta hiperesfera está conectado por transformaciones de norma y por ello son físicamente equivalentes, la simetría se rompe espontáneamente eligiendo un valor en particular, elegimos a la configuración dada por

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

Recordemos que al valor en donde los campos minimizan al potencial es el llamado VEV, por lo que

$$|\phi_0| = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (1.69)$$

es el VEV para el modelo estándar⁶ y nos da una escala de energía alrededor de la que sucede la ruptura de la simetría. Analizamos la teoría alrededor del punto mínimo escogido por lo que podemos usar un procedimiento similar a los realizados sobre el doblete

$$\phi(x) = \phi_0 + \xi(x), \quad (1.70)$$

donde

$$\xi(x) = \phi(x) - \phi_0 = \begin{pmatrix} G_W^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h(x) + iG_z(x)) \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

y a su vez $h(x)$ y G_Z son campos escalares reales y G_W^+ es un campo escalar complejo que cumple

$$(G_W^+)^*(x) = G_W^-(x). \quad (1.72)$$

Como recordemos al romper una simetría local, aparecen campos escalares sin masa no físicos que dominamos pseudo-bosones de Goldstone y otro que sí tiene masa que llamaremos campo de Higgs; además se producen términos de masa para campos de norma, para observar esa situación sustituiremos las expresiones (1.70,1.71) en nuestro potencial, únicamente mostraremos los términos cuadráticos sobre los campos ya que son los que definen masas. De manera conveniente calculamos

$$\begin{aligned} \phi^\dagger \phi &= (\phi_0 + \xi)^\dagger (\phi_0 + \xi) \\ &= \phi_0^\dagger \phi_0 + \phi_0^\dagger \xi + \xi^\dagger \phi_0 + \xi^\dagger \xi \\ &= \frac{v^2}{2} + v h + G_W^- G_W^+ + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} G_z^2. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Sustituyendo en nuestra expresión (1.65) y haciendo uso de las relaciones

$$-\mu^2 + \lambda v^2 = 0 \quad (1.74)$$

$$-\mu^2 + 3\lambda v^2 = 2\mu^2 \quad (1.75)$$

el potencial toma la forma

$$V(\phi^\dagger, \phi) = \left(-\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\right) \frac{v^2}{2} + \mu^2 h^2 + \dots \quad (1.76)$$

⁶Por convención v es al que se le asigna como el VEV, en adelante seguiremos esta convención

Ahora antes de analizar los términos cinéticos sobre el doblete escalar en la derivada covariante realizamos el siguiente cambio de base

$$W^+{}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1{}_{\mu} - iW^2{}_{\mu}), \quad (1.77)$$

$$W^-{}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1{}_{\mu} + iW^2{}_{\mu}) \quad (1.78)$$

$$\Rightarrow (W^+{}_{\mu})^* = W^-{}_{\mu},$$

entonces nuestra definición para la derivada covariante toma la forma

$$D_{\mu}\phi = \left(\partial_{\mu} \cdot 1_2 - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^+{}_{\mu} \sigma^+ - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-{}_{\mu} \sigma^- - ig_1 B_{\mu} \frac{Y_{\phi}}{2} \cdot 1_2 \right) \phi, \quad (1.79)$$

donde se definen

$$\sigma^+ \equiv \frac{1}{2} (\sigma^1 + i\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.80)$$

$$\sigma^- \equiv \frac{1}{2} (\sigma^1 - i\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.81)$$

En términos de nuestra nueva base definida por (1.77, 1.78) y además sustituyendo el doblete por (1.70) tenemos que nuestro término cinético es

$$\begin{aligned} (D_{\mu}\phi)^{\dagger} (D^{\mu}\phi) &= (\partial_{\mu} G_W^-) (\partial^{\mu} G_W^+) + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} h) (\partial^{\mu} h) + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} G_z) (\partial^{\mu} G_z) \\ &\quad - \frac{ig_2 v}{2} W^+{}_{\mu} \partial^{\mu} G_W^- + \frac{ig_2 v}{2} W^-{}_{\mu} \partial^{\mu} G_W^+ \\ &\quad + \frac{g_2 v}{2} W^3{}_{\mu} \partial^{\mu} G_z - \frac{g_1 Y_{\phi}}{2} v B_{\mu} \partial^{\mu} G_z + \frac{v^2 g_2^2}{4} W^-{}_{\mu} W^+{}_{\mu} \\ &\quad + \frac{v^2}{8} (W^3{}_{\mu} \quad B_{\mu}) \begin{pmatrix} g_2^2 & -(g_1 Y_{\phi}) g_2 \\ (g_1 Y_{\phi}) g_2 & (g_1 Y_{\phi})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Para pasar a los eigenestados de masa se debe diagonalizar la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} g_2^2 & -(g_1 Y_{\phi}) g_2 \\ (g_1 Y_{\phi}) g_2 & (g_1 Y_{\phi})^2 \end{pmatrix}. \quad (1.83)$$

La matriz que diagonaliza a Q es la dada por

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_W & S_W \\ -S_W & C_W \end{pmatrix}, \quad (1.84)$$

y es una matriz ortogonal $RR^T = 1_2$ donde θ_W es el ángulo de mezcla débil o ángulo de Weinberg, además

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + (g_1 Y_{\phi})^2}}, \quad (1.85)$$

$$\sin \theta_W = \frac{g_1 Y_{\phi}}{\sqrt{g_2^2 + (g_1 Y_{\phi})^2}}. \quad (1.86)$$

De esta forma el último término de la expresión (1.82) puede convertirse en

$$\begin{aligned}
(W^3_{\mu} \ B_{\mu}) Q \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{pmatrix} &= (W^3_{\mu} \ B_{\mu}) \cdot 1_2 \cdot Q \cdot 1_2 \cdot \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{pmatrix} \\
&= (W^3_{\mu} \ B_{\mu}) R R^T Q R R^T \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{pmatrix} \quad , \quad (1.87) \\
&= \left(R^T \begin{pmatrix} W^3_{\mu} \\ B_{\mu} \end{pmatrix} \right)^T (R^T Q R) \left(R^T \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

definimos el cambio de base

$$\begin{pmatrix} Z_{\mu} \\ A_{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_W & -S_W \\ S_W & C_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3_{\mu} \\ B_{\mu} \end{pmatrix}. \quad (1.88)$$

Por lo tanto, tenemos

$$(W^3_{\mu} \ B_{\mu}) Q \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^{\mu} \end{pmatrix} = \left(g_2^2 + (g_1 Y_{\phi})^2 \right)^2 Z_{\mu} Z^{\mu}, \quad (1.89)$$

el sector escalar después de la ruptura de la simetría viene dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S &= \frac{1}{2} \partial_{\mu} h \partial^{\mu} h - \mu^2 h + (\partial_{\mu} G_W^{-}) (\partial^{\mu} G_W^{+}) + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} G_z) (\partial^{\mu} G_z) \\
&+ \frac{v^2 g_2^2}{4} W^{-}_{\mu} W^{+}_{\mu} + \frac{v^2}{8} \left(g_2^2 + (g_1 Y_{\phi})^2 \right)^2 Z_{\mu} Z^{\mu} \quad , \quad (1.90) \\
&- \frac{i g_2 v}{2} W^{+}_{\mu} \partial^{\mu} G_W^{-} + \frac{i g_2 v}{2} W^{-}_{\mu} \partial^{\mu} G_W^{+} + \frac{v}{2} (g_2 W^3_{\mu} - g_1 Y_{\phi} B_{\mu}) \partial^{\mu} G_z
\end{aligned}$$

note que en los 4 primeros sumandos evocan a la forma lagrangiana de K-G para campos reales y complejos. Podemos reescribir a

$$-\mu^2 h = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{2\mu^2} \right)^2 h, \quad (1.91)$$

claramente es un término de masa donde $m_h = \sqrt{2\mu}$; es decir, el campo h es un campo masivo y es el bosón de Higgs, los campos G_Z y G_W^{+} no tienen masa, ya que son remanentes de la ruptura de una simetría local son los denominados pseudo-bosones de Goldstone. También encontramos mediante la diagonalización 4 campos de norma físicos, W_{μ}^{\pm} , Z_{μ} y A_{μ} para hablar más a profundidad de ellos tenemos que desarrollar el sector de norma en términos de estos campos.

1.2.2. Sector de Norma

Este sector está caracterizado por la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[W^j_{\mu\nu} \frac{\sigma^j}{2} W^l_{\mu\nu} \frac{\sigma^l}{2} \right] - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (1.92)$$

donde $B_{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu}$ son los tensores de campo definidos por

$$W^j_{\mu\nu} = \partial_{\mu} W^j_{\nu} - \partial_{\nu} W^j_{\mu} + g_2 \epsilon_{jkm} W^k_{\mu} W^m_{\nu}, \quad (1.93)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu}, \quad (1.94)$$

el último término en (1.93) exhibe la naturaleza no abeliana del grupo electrodebil. Bajo las transformaciones para el campo de norma W^j_μ se puede probar que

$$-\frac{1}{2}\text{Tr}\left[W^j_{\mu\nu}\frac{\sigma^j}{2}W^l_{\mu\nu}\frac{\sigma^l}{2}\right] = -\frac{1}{4}W^j_{\mu\nu}W^{j\mu\nu}, \quad (1.95)$$

teniendo así

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}W^j_{\mu\nu}W^{j\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \quad (1.96)$$

En el sector escalar encontramos que los cambios de variables al espectro de partículas físicas están dados por las expresiones (1.77, 1.78, 1.88), con las cuales podemos encontrar las transformaciones inversas

$$W^1_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^+_\mu + W^-_\mu), \quad (1.97)$$

$$W^2_\mu = \frac{i}{\sqrt{2}}(W^+_\mu - W^-_\mu), \quad (1.98)$$

$$\begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_W & S_W \\ -S_W & C_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}, \quad (1.99)$$

equivalentemente se tiene

$$W^3_\mu = C_W Z_\mu + S_W A_\mu, \quad (1.100)$$

$$B_\mu = -S_W Z_\mu + C_W A_\mu. \quad (1.101)$$

Para poner nuestro lagrangiano en términos de nuestros nuevos campos comencemos con el término

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}W^l_{\mu\nu}W^{l\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu W^l_\nu - \partial_\nu W^l_\mu + g_2\epsilon_{lkm}W^k_\mu W^m_\nu) \\ &\quad \times (\partial^\mu W^{l\nu} - \partial^\nu W^{l\mu} + g_2\epsilon_{lrs}W^{r\mu}W^{s\nu}) \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu W^l_\nu - \partial_\nu W^l_\mu)(\partial^\mu W^{l\nu} - \partial^\nu W^{l\mu}) + \dots, \end{aligned} \quad (1.102)$$

definimos así

$$\hat{W}^l_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W^l_\nu - \partial_\nu W^l_\mu, \quad (1.103)$$

con esto tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}W^l_{\mu\nu}W^{l\mu\nu} &= -\frac{1}{4}\hat{W}^l_{\mu\nu}\hat{W}^{l\mu\nu} + \dots \\ &= -\frac{1}{4}\hat{W}^1_{\mu\nu}\hat{W}^{1\mu\nu} - \frac{1}{4}\hat{W}^2_{\mu\nu}\hat{W}^{2\mu\nu} - \frac{1}{4}\hat{W}^3_{\mu\nu}\hat{W}^{3\mu\nu} + \dots. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Haciendo uso de las relaciones (1.97) y (1.98) podemos notar que

$$\begin{aligned} \hat{W}^1_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu + \partial_\mu W^-_\nu - \partial_\nu W^-_\mu), \end{aligned} \quad (1.105)$$

ahora, definimos

$$W^+_{\mu\nu} = \partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu, \quad (1.106)$$

$$W^-_{\mu\nu} = \partial_\mu W^-_\nu - \partial_\nu W^-_\mu, \quad (1.107)$$

y entonces nuestra expresión (1.105) tiene la forma siguiente

$$\hat{W}^1_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^+_{\mu\nu} + W^-_{\mu\nu}), \quad (1.108)$$

de manera similar se tiene

$$\hat{W}^2_{\mu\nu} = \frac{i}{\sqrt{2}} (W^+_{\mu\nu} - W^-_{\mu\nu}), \quad (1.109)$$

junto con las expresiones (1.108) y (1.109) el término expresado en (1.104) resulta

$$-\frac{1}{4} W^l_{\mu\nu} W^{l\mu\nu} = -\frac{1}{2} W^+_{\mu\nu} W^{-\mu\nu} - \frac{1}{4} \hat{W}^3_{\mu\nu} \hat{W}^{3\mu\nu} + \dots \quad (1.110)$$

Por lo tanto, el lagrangiano de Yang-Mills se expresa como

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} W^+_{\mu\nu} W^{-\mu\nu} - \frac{1}{4} \hat{W}^3_{\mu\nu} \hat{W}^{3\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \dots \quad (1.111)$$

a continuación, haremos uso de las ecuaciones (1.100) y (1.101) podemos ver que el término siguiente puede escribirse como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \hat{W}^3_{\mu\nu} \hat{W}^{3\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu) (\partial^\mu W^{3\nu} - \partial^\nu W^{3\mu}) \\ &\quad -\frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) \quad , \quad (1.112) \\ &\quad -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \end{aligned}$$

en donde se han definido a los tensores

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.113)$$

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \quad (1.114)$$

finalmente, la lagrangiana de Yang-Mills tiene la forma

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} W^+_{\mu\nu} W^{-\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \dots \quad (1.115)$$

Bajo estos cambios podemos analizar el espectro completo de partículas físicas, para ello sumamos los lagrangianos del sector escalar y de norma dados en (1.90) y (1.115)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{S}} &= -\frac{1}{2} W^+_{\mu\nu} W^{-\mu\nu} + \frac{v^2 g_2^2}{4} W^+_{\mu\nu} W^{-\mu\nu} \\ &\quad -\frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{v^2}{8} \left(g_2^2 + (g_1 Y_\phi)^2 \right)^2 Z_\mu Z^\mu \quad , \quad (1.116) \\ &\quad -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h + \dots \end{aligned}$$

en cada renglón en el que aparecen campos de norma podemos reconocer términos semejantes a la lagrangiana de Proca descrita en (1.42), entonces hacemos las siguientes identificaciones para las masas

$$m_W = \frac{g_2}{2} v, \quad (1.117)$$

$$m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g_2^2 + (g_1 Y_\phi)^2}, \quad (1.118)$$

$$m_A = 0, \quad (1.119)$$

las masas encontradas son las masas correspondientes para los campos W^\pm y Z , además tenemos un campo de norma A sin masa. En conclusión, usando las definiciones de nuestras masas la expresión (1.116) queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{S}} &= -\frac{1}{2} W^+_{\mu\nu} W^{-\mu\nu} + m_W W^+_{\mu\nu} W^{-\mu\nu} \\ &\quad -\frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_Z Z_\mu Z^\mu \\ &\quad -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \\ &\quad +\frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h + \dots \end{aligned} \quad (1.120)$$

los términos restantes contienen información de los acoplamientos entre los bosones de norma con el campo de Higgs, los pseudo-bosones de Goldstone y entre ellos mismos.

1.2.3. Sector de Yukawa

- Quiralidad

Para comenzar a hablar acerca de los sectores que llevan consigo campos fermiónicos descritos por espinores de Dirac es necesario hablar de manera muy breve acerca de la quiralidad. En el contexto de la teoría libre de Dirac[27-30] descrita por

$$\mathcal{L}_{\text{D}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m \cdot 1_4) \psi, \quad (1.121)$$

el campo ψ es un espinor de Dirac y γ^μ representa las matrices de Dirac de tamaño 4×4 ; y $\bar{\psi}$ el adjunto de Dirac que se define por

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (1.122)$$

Podemos definir una matriz que llamaremos gama-cinco o matriz de quiralidad

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4, \quad (1.123)$$

es importante enfatizar que el subíndice 5 no está relacionado con alguna coordenada del espacio-tiempo⁷. De la expresión (D.5) observamos que la matriz de quiralidad es hermitiana, por lo que puede ser diagonalizada mediante una relación de similaridad

$$U^\dagger \gamma_5 U = \gamma_{5,d}, \quad (1.124)$$

aquí, U es una matriz unitaria y $\gamma_{5,d}$ se refiere a la matriz gama-cinco diagonalizada; por otro lado, los elementos de la diagonal de $\gamma_{5,d}$ son sus eigenvalores. Es un resultado general que los eigenvalores de una matriz hermitiana son reales por lo que $\gamma_{5,d}$ es una matriz real. Notemos que

$$\gamma_{5,d} \gamma_{5,d} = 1_4, \quad (1.125)$$

y que la forma general de $\gamma_{5,d}$, puede escribirse como

$$\gamma_{5,d} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad (1.126)$$

⁷Algunas propiedades son enunciadas en el apéndice D

con λ_j los eigenvalores de γ_5 , usando esta expresión junto con el resultado (2.151), tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_{5,d} \gamma_{5,d} &= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \lambda_j^2 = 1 \\ &\lambda_j = \pm 1, \end{aligned} \tag{1.127}$$

entonces, los eigenvalores de γ_5 son iguales a ± 1 ; un resultado importante a recordar es que la traza de una matriz es invariante bajo transformaciones de similaridad. Entonces de la ecuación (D.8) tenemos

$$\text{Tr} [\gamma_{5,d}] = \text{Tr} [\gamma_5] = 0 \tag{1.128}$$

Al ser $\gamma_{5,d}$ diagonal, la traza es fácil de calcular siendo la suma de los valores en la diagonal, obtenemos así

$$\text{Tr} [\gamma_{5,d}] = \sum_j \lambda_j = 0, \tag{1.129}$$

de (1.127) y (1.129) podemos concluir que la única forma de que estas ecuaciones tengan sentido conjuntamente es que dos eigenvalores tengan valor (+1) y dos eigenvalores tengan valor (-1), las matrices de Dirac, de hecho, operan sobre espinores de Dirac, entonces los eigenvectores asociados a los eigenvalores de la matriz de quiralidad son espinores, diferenciamos los eigenvectores asociados a los eigenvalores (+1) y (-1) por ψ_R y ψ_L respectivamente y cumplen las siguientes expresiones

- Eigenvalor (+1)

$$\gamma_5 \psi_R = (+1) \psi_R, \tag{1.130}$$

- Eigenvalor (-1)

$$\gamma_5 \psi_L = (-1) \psi_L, \tag{1.131}$$

decimos que ψ_R es un eigenvector derecho de γ_5 y ψ_L es un eigenvector izquierdo de γ_5 , para ilustrar mejor la importancia de este resultado consideramos un espinor de Dirac ψ que podemos escribir como

$$\psi = \frac{1}{2} (1_4 + \gamma_5) \psi + \frac{1}{2} (1_4 - \gamma_5) \psi. \tag{1.132}$$

Definimos así a las matrices de proyección derecha e izquierda, respectivamente tenemos⁸

$$P_R = \frac{1}{2} (1_4 + \gamma_5), \tag{1.133}$$

$$P_L = \frac{1}{2} (1_4 - \gamma_5), \tag{1.134}$$

y (1.132) toma la forma

$$\psi = P_R \psi + P_L \psi. \tag{1.135}$$

⁸Propiedades que cumplen las matrices de proyección y que emplearemos son mostradas en el apéndice D

Consideremos ahora el siguiente cálculo breve

$$\begin{aligned}
 \gamma_5 (P_R \psi) &= \gamma_5 \left(\frac{1}{2} (1_4 + \gamma_5) \psi \right) \\
 &= \frac{1}{2} (\gamma_5 + \gamma_5 \cdot \gamma_5) \psi \\
 &= \frac{1}{2} (\gamma_5 + 1_4) \psi \\
 &= \frac{1}{2} (1_4 + \gamma_5) \psi \\
 &= (+1) P_R \psi
 \end{aligned} \tag{1.136}$$

de manera similar podemos probar que

$$\gamma_5 (P_L \psi) = (-1) P_L \psi, \tag{1.137}$$

las expresiones anteriores satisfacen una ecuación de eigenvectores y eigenvalores, como las de (1.130) y (1.131), entonces podemos decir que

$$P_R \psi = \psi_R, \tag{1.138}$$

$$P_L \psi = \psi_L, \tag{1.139}$$

aún más interesante, con estas relaciones (1.135) es

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \tag{1.140}$$

lo que nos dice que un espinor de Dirac puede ser expresado como la suma de dos espinores quirales uno izquierdo y uno derecho. En adelante nos referimos a ψ_R como espinor quiral derecho y ψ_L como espinor quiral izquierdo y en general cuando hablemos de ambos nos referiremos como espinores quirales.

Con este resultado nuestro lagrangiano (1.121) puede expresarse en términos de espinores quirales, por ello escribimos la parte cinética del lagrangiano

$$\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \tag{1.141}$$

usando (1.140) resulta que este término es

$$(\overline{\psi_L + \psi_R}) i \gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L + \psi_R) = \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R. \tag{1.142}$$

Así luce la forma de un término cinético para un campo espinor de Dirac en términos de sus partes de quiralidad definida. El término dado por

$$-m \bar{\psi} \psi, \tag{1.143}$$

es un término de masa para un campo espinor de Dirac, en términos de los campos quirales se tiene

$$-m (\overline{\psi_L + \psi_R}) (\psi_L + \psi_R) = -m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L). \tag{1.144}$$

Esta es la forma general de un término de masa para un campo espinor de Dirac en términos de sus partes de quiralidad definida. De (1.142) y (1.144) tenemos que nuestra expresión (96) resulta en

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L). \tag{1.145}$$

• **Helicidad**

A nivel clásico tenemos una observable llamada momento angular orbital definida como

$$\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}', \quad (1.146)$$

que mediante el proceso de cuantización canónica le corresponde un operador en el espacio de kets y su dual de los bras

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}, \quad (1.147)$$

es decir que podemos encontrar un análogo cuántico de la cantidad que clásicamente conocemos como momento angular, mediciones experimentales evidenciaron que a nivel cuántico existe otro tipo de momento angular. Por otro lado el momento angular de espín (MAE), no tiene análogo clásico y más aún, a diferencia del momento angular, orbital el MAE no tiene nada que ver con la posición y el momento. Esto presentó problemas para definir un operador que caracterizara a esta observable, para resolverlo se definió un momento angular general \vec{J} que tratara de abarcar ambos casos, el operador se define como un operador vectorial

$$\vec{J} = J_x \hat{i} + J_y \hat{j} + J_z \hat{k}, \quad (1.148)$$

y cada una de sus componentes es un operador; además pedimos que sea hermitiano y que sus componentes satisfagan

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k, \quad (1.149)$$

con esta definición, a un operador vectorial hermitiano que cumpla las condiciones en (1.149) podemos decir que es un operador de momento angular. De hecho el momento angular orbital cumple con las características de \vec{J}

$$\vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k}, \quad (1.150)$$

donde todas sus componentes son operadores y cumplen

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k. \quad (1.151)$$

Definir de esta manera al momento angular tiene a favor que quita la dependencia de la posición y del momento; con esto podemos también definir al operador de MAE

$$\vec{S} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k}, \quad (1.152)$$

$$[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k. \quad (1.153)$$

Recordemos que dos observables son compatibles si su conmutador es igual a cero, si esto se cumple entonces comparte una base común de eigenkets y físicamente las cantidades que representan se pueden medir al mismo tiempo. Desafortunadamente por la ecuación (1.153) tenemos que los componentes del MAE no son compatibles y por tanto no podemos medirlas al mismo tiempo, con el fin de encontrar un conjunto de observables compatibles notemos que el par

$$[S^2, S_j] = 0, \quad (1.154)$$

con

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2, \quad (1.155)$$

por lo que el operador S^2 con alguna de las componentes son compatibles, atendiendo a la convención estándar elegimos a la componente S_z sin olvidar que cualquier otra elección de componente es válida. Entonces tenemos al conjunto observables compatibles $\{S^2, S_z\}$ las cuales tienen una base común que satisfacen a las ecuaciones de eigenkets y eigenvalores

$$S^2 |s, m_s\rangle = S^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle, \quad (1.156)$$

$$S_z |s, m_s\rangle = S_z |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle, \quad (1.157)$$

y los eigenvalores son entonces

$$S' = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad (1.158)$$

$$S'_z = \hbar m_s, \quad (1.159)$$

s puede tomar los valores

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \quad (1.160)$$

y m_s una vez dado el valor de s toma los valores

$$m_s = \{-s, -s+1, -s+2, \dots, s-1, s\}, \quad (1.161)$$

al número s se llama número cuántico de espín o espín simplemente, en el caso del ME el valor de s es único para cada campo y representa una propiedad intrínseca de los campos como la masa o carga eléctrica, las partículas fermiónicas que constituyen al MEE son partículas de espín $s = \frac{1}{2}$, en tal caso tenemos que la base común de eigenkets podemos etiquetarla como

$$\left\{ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right\}. \quad (1.162)$$

Con lo dicho podemos definir al operador helicidad

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \hat{p}}{s}, \quad (1.163)$$

donde \hat{p} es el vector unitario en dirección del momento de la partícula y s es el número cuántico de espín; siguiendo la interpretación del producto punto de vectores, la helicidad puede entenderse como la proyección del momento angular de espín en la dirección de movimiento de la partícula; operando esta observable sobre la base generada en el caso de estados de espín $\frac{1}{2}$ expresada en (1.162, 1.73) obtenemos los siguientes eigenvalores

$$h \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle = h' \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \pm \hbar \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (1.164)$$

$$h' = \pm \hbar,$$

en el espacio de matrices de Dirac el operador helicidad es una matriz 4x4 definida por

$$h = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \quad (1.165)$$

donde

$$\Sigma^l = \gamma^0 \gamma^l \gamma_5 \quad (1.166)$$

entonces para espinores de Dirac que caracterizan partículas de espín $\frac{1}{2}$ los eigenvalores de la helicidad son⁹

$$h' = \pm 1 \quad (1.167)$$

de manera que existen eigenvectores ψ_+ y ψ_- tales que

$$h\psi_+ = (+1)\psi_+ \quad (1.168)$$

$$h\psi_- = (-1)\psi_- \quad (1.169)$$

aquí es donde viene la conexión física para la helicidad con la quiralidad, resulta que para partículas fermionicas que no tienen masa, la helicidad y la quiralidad coinciden

$$\psi_+ = \psi_R \quad (1.170)$$

⁹En este espacio se usan unidades naturales

$$\psi_- = \psi_L \quad (1.171)$$

de hecho se tiene

$$h\psi_R = (+1)\psi_R \quad (1.172)$$

$$h\psi_L = (-1)\psi_L \quad (1.173)$$

físicamente este resultado es muy importante pues en partículas sin masa al medir su helicidad estamos midiendo también su quiralidad, más aún, para partículas con masa ultrarelativistas la quiralidad y la helicidad son aproximadamente muy similares permitiendo medir también para partículas fermiónicas con masa su quiralidad mediante su helicidad.

• Leptones

Los sectores que tienen incrustados fermiones se dividen en dos partes: sector de leptones y el sector de quarks, los leptones se dividen en 3 tipos de familia o generación¹⁰

Tipo de familia	Leptones	
Familia del electrón (Generación I)	ν_e	e^-
Familia del muón (Generación II)	ν_μ	μ^-
Familia del tau (Generación III)	ν_τ	τ^-

los campos ν_e, ν_μ, ν_τ son los neutrinos y no tienen carga por lo que no interactúan electromagnéticamente, por su parte e^-, μ^-, τ^- son leptones cargados con carga $-e$, los fermiones en general son descritos por campos espinores de Dirac, podemos nombrarlos usando la siguiente notación

$$\begin{aligned} \ell_e &= e^- \\ \ell_\mu &= \mu^- \end{aligned} \quad (1.174)$$

$$\ell_\tau = \tau^-$$

y en general podemos denotarlos con

$$\ell_\alpha \quad \nu_\alpha,$$

donde el subíndice $\alpha = e, \mu, \tau$ es un índice de sabor que identifica al tipo de familia. Como ya hemos revisado un campo de Dirac puede expresarse como (1.140) mediante estados de quiralidad definida, tenemos así que nuestros campos pueden escribirse como

$$\ell_\alpha = \ell_{\alpha,L} + \ell_{\alpha,R}, \quad (1.175)$$

$$\nu_\alpha = \nu_{\alpha,L} + \nu_{\alpha,R}. \quad (1.176)$$

Experimentalmente hay dos hechos importantes acerca de los neutrinos, el primero de ellos es que en la naturaleza sólo se han detectado neutrinos de quiralidad izquierda[54] debido a esto se omite la parte derecha del campo neutrino, tenemos así

$$\nu_\alpha = \nu_{\alpha,L}. \quad (1.177)$$

¹⁰También podemos referirnos a su tipo como sabor

Si bien mediciones nos indican que en realidad los neutrinos si tienen masa, el MEE se construyó bajo el supuesto de que los neutrinos no tienen masa. Además, analizando (1.144) notemos que el término de masa para este campo no puede construirse, en el MEE el hecho de que los neutrinos se consideran no masivos se lleva bien con que no exista su parte quiral derecha. También mencionamos que la fuerza débil sí distingue estados de quiralidad, definimos dobletes de $SU(2)_L$ con quiralidad definida izquierda

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha,L} \\ \ell_{\alpha,L} \end{pmatrix}, \quad \overline{L}_\alpha = (\overline{\nu_{\alpha,L}} \quad \overline{\ell_{\alpha,L}}), \quad (1.178)$$

los cuales se transforman como

$$L_\alpha \longrightarrow L'_\alpha = \exp \left\{ i \frac{Y_L^\ell}{2} \alpha(x) \right\} v(x) L_\alpha, \quad (1.179)$$

justo como el doblete escalar pero con hipercarga Y_L^ℓ . Los estados de quiralidad derecha se introducen como singletes de $SU(2)_L$, los cuales son estructuras 1×1 que permanecen invariantes bajo las transformaciones del grupo $SU(2)_L$, mientras que bajo las transformaciones del grupo $U(1)_Y$ no es invariante, tenemos así que bajó el grupo $SU(2)_L$

$$\ell_{\alpha,R} \longrightarrow \ell'_{\alpha,R} = \ell_{\alpha,R}, \quad (1.180)$$

con la etiqueta α corriendo sobre los mismos índices de sabor. Para el grupo $U(1)_Y$ la ley de transformación es la siguiente

$$\ell_{\alpha,R} \longrightarrow \ell'_{\alpha,R} = \exp \left\{ i \frac{Y_R^\ell}{2} \alpha(x) \right\} \ell_{\alpha,R}, \quad (1.181)$$

donde Y_R^ℓ es su hipercarga, bajo el grupo de norma completo del MEE tenemos que la transformación de hecho es la misma. Definir de esta forma a los dobletes con estados de quiralidad izquierda y a los singletes con estados de quiralidad derecha para los leptones cargados nos permite evitar que haya interacciones del bosón W con campos quirales derechos y que haya neutrinos derechos.

• Sector de Yukawa

El lagrangiano que describe este sector puede escribirse como la suma de las partes dedicadas a los leptones y quarks

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^\ell + \mathcal{L}_Y^q, \quad (1.182)$$

el lagrangiano característico que se encarga de dotar de masa a los leptones está definido por

$$\mathcal{L}_Y^\ell = - \sum_\alpha \sum_\beta \left(\overline{L}_\alpha \phi y_{\alpha\beta}^\ell \ell_{\beta,R} + \overline{\ell}_{\beta,R} y_{\alpha\beta}^{\ell\dagger} \phi^\dagger L_\alpha \right), \quad (1.183)$$

los índices α, β corren sobre los tipos de familia, las constantes $y_{\alpha\beta}^\ell$ son llamadas constantes de Yukawa que son elementos de una matriz en general compleja 3×3 definida por

$$y^\ell = \begin{pmatrix} y_{ee}^\ell & y_{e\mu}^\ell & y_{e\tau}^\ell \\ y_{\mu e}^\ell & y_{\mu\mu}^\ell & y_{\mu\tau}^\ell \\ y_{\tau e}^\ell & y_{\tau\mu}^\ell & y_{\tau\tau}^\ell \end{pmatrix}, \quad (1.184)$$

que llamaremos matriz de Yukawa para leptones, el lagrangiano anterior es invariante de norma bajo las transformaciones definidas en (1.179) y (1.181) si se cumple la condición entre sus hipercargas

$$Y_\phi - Y_L^\ell + Y_R^\ell = 0. \quad (1.185)$$

Implementamos el proceso de RES aplicando en (1.184) el cambio por nuestra expresión para el doblete escalar dada por (1.70), nos hemos enfocado sólo en los términos cuadráticos ya que son los que definen a los términos de masa, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y^\ell &= - \sum_\alpha \sum_\beta \left(\overline{L_\alpha} \phi y_{\alpha\beta}^\ell \ell_{\beta,R} + \overline{\ell_{\beta,R}} y_{\alpha\beta}^{\ell\dagger} \phi^\dagger L_\alpha \right) \\
&= - \sum_\alpha \sum_\beta \left(\overline{L_\alpha} (\phi_0 + \xi) y_{\alpha\beta}^\ell \ell_{\beta,R} + \overline{\ell_{\beta,R}} y_{\alpha\beta}^{\ell\dagger} (\phi_0 + \xi)^\dagger L_\alpha \right) \\
&= - \sum_\alpha \sum_\beta \left(\overline{L_\alpha} \phi_0 y_{\alpha\beta}^\ell \ell_{\beta,R} + \overline{\ell_{\beta,R}} y_{\alpha\beta}^{\ell\dagger} \phi_0^\dagger L_\alpha \right) + \dots \\
&= - \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_\alpha \sum_\beta \left(\overline{\ell_{\alpha,L}} y_{\alpha\beta}^\ell \ell_{\beta,R} + \overline{\ell_{\beta,R}} y_{\alpha\beta}^{\ell\dagger} \ell_{\alpha,L} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{1.186}$$

Estos términos son muy similares en forma a términos de masa para campos de Dirac; sin embargo, éstos no pueden ser considerados términos de masa ya que contienen mezclas en diferentes tipos de familias en los estados de quiralidad definida. Para pasar a eigenestados de masa debemos tener solamente términos que contengan elementos de una misma familia, para lograr esto definimos

$$\begin{aligned}
\ell_L &= \begin{pmatrix} \ell_{e,L} \\ \ell_{\mu,L} \\ \ell_{\tau,L} \end{pmatrix} \\
\ell_R &= \begin{pmatrix} \ell_{e,R} \\ \ell_{\mu,R} \\ \ell_{\tau,R} \end{pmatrix}, \\
\nu_L &= \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ \nu_{\mu,L} \\ \nu_{\tau,L} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.187}$$

la expresión (1.186) la podemos escribir en términos matriciales como sigue

$$\mathcal{L}_Y^\ell = - \frac{v}{\sqrt{2}} \left(\overline{\ell_L} y^\ell \ell_R + \overline{\ell_R} y^{\ell\dagger} \ell_L \right) + \dots \tag{1.188}$$

así el problema se reduce a encontrar una forma para diagonalizar la matriz de Yukawa y^ℓ de tal forma que encontremos una matriz \mathcal{M}_D real diagonal y con elementos positivos en la diagonal, suponemos que y^ℓ se diagonaliza mediante una transformación biunitaria

$$V_L^\dagger y^\ell V_R = \mathcal{M}_D, \tag{1.189}$$

con \mathcal{M}_D la matriz con los requisitos ya mencionados, las matrices V_L y V_R cumplen también

$$V_L V_L^\dagger = V_L^\dagger V_L = \mathbf{1}_3, \tag{1.190}$$

$$V_R V_R^\dagger = V_R^\dagger V_R = \mathbf{1}_3, \tag{1.191}$$

De esta forma en (1.188) podemos hacer el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y^\ell &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\bar{\ell}_L y^\ell \ell_R + \bar{\ell}_R y^{\ell^\dagger} \ell_L \right) + \dots \\
&= -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\bar{\ell}_L 1_3 y^\ell 1_3 \ell_R + \bar{\ell}_R 1_3 y^{\ell^\dagger} 1_3 \ell_L \right) + \dots \\
&= -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\bar{\ell}_L V_L V_L^\dagger y^\ell V_R V_R^\dagger \ell_R + \bar{\ell}_R V_R V_R^\dagger y^{\ell^\dagger} V_L V_L^\dagger \ell_L \right) + \dots \\
&= -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\left(V_L^\dagger \ell_L \right)^\dagger \gamma^0 \left(V_L^\dagger y^\ell V_R \right) \left(V_R^\dagger \ell_R \right) + \left(V_R^\dagger \ell_R \right)^\dagger \gamma^0 \left(V_L^\dagger y^\ell V_R \right)^\dagger \left(V_L^\dagger \ell_L \right) \right) + \dots
\end{aligned} \tag{1.192}$$

definimos

$$\ell'_L = V_L^\dagger \ell_L, \tag{1.193}$$

$$\ell'_R = V_R^\dagger \ell_R, \tag{1.194}$$

estas ecuaciones representan un cambio de base con el que pasamos de un espacio de sabor al espacio de eigenestados de masa tenemos

$$\ell'_L = \begin{pmatrix} \ell'_{e,L} \\ \ell'_{\mu,L} \\ \ell'_{\tau,L} \end{pmatrix}, \tag{1.195}$$

$$\ell'_R = \begin{pmatrix} \ell'_{e,R} \\ \ell'_{\mu,R} \\ \ell'_{\tau,R} \end{pmatrix}, \tag{1.196}$$

con la expresión (1.189, 1.193, 1.194) podemos expresar nuestro lagrangiano de Yukawa como

$$\mathcal{L}_Y^\ell = -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\bar{\ell}'_L \mathcal{M}_D \ell'_R + \bar{\ell}'_R \mathcal{M}_D^\dagger \ell'_L \right) + \dots, \tag{1.197}$$

la matriz \mathcal{M}_D es hermitiana, además definimos una matriz M_m tal que

$$M_m = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix} = \frac{v}{\sqrt{2}} \mathcal{M}_D \tag{1.198}$$

a M_m se conoce como la matriz de masas de leptones, finalmente la ecuación (1.197) puede expresarse como

$$\mathcal{L}_Y^\ell = -\bar{\ell}'_L M_m \ell'_R - \bar{\ell}'_R M_m \ell'_L + \dots \tag{1.199}$$

un hecho importante que podemos notar es el siguiente

$$\begin{aligned}
P_R \ell'_{\alpha,L} &= P_R V^\dagger \ell_L \\
&= P_R \sum_{\beta} (V^\dagger)_{\alpha\beta} \ell_{\beta,L} \\
&= \sum_{\beta} (V^\dagger)_{\alpha\beta} P_R \ell_{\beta,L} \quad , \\
&= P_R \sum_{\beta} (V^\dagger)_{\alpha\beta} P_R P_L \ell_{\beta} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.200}$$

de manera similar

$$P_L \ell'_{\alpha,R} = 0, \quad (1.201)$$

entonces, ℓ'_L y ℓ'_R son estados de quiralidad izquierda y derecha respectivamente; a su vez, sus elementos también son de esta misma quiralidad definida, en la expresión (1.199) eliminamos la prima a sabiendas de que estamos en el espacio de eigenestados de masa y desarrollando nuestra expresión explícitamente tenemos

$$\mathcal{L}_Y^\ell = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\overline{\ell_{\alpha,L}} \ell_{\alpha,R} + \overline{\ell_{\alpha,R}} \ell_{\alpha,L}) + \dots, \quad (1.202)$$

claramente se tiene la forma de un término de masa para un campo espinor de Dirac; de hecho, podemos poner a la expresión anterior en términos de estados sin quiralidad definida y finalmente tenemos

$$\mathcal{L}_Y^\ell = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overline{\ell_{\alpha}} \ell_{\alpha} + \dots = -m_e \overline{\ell_e} \ell_e - m_{\mu} \overline{\ell_{\mu}} \ell_{\mu} - m_{\tau} \overline{\ell_{\tau}} \ell_{\tau} + \dots, \quad (1.203)$$

que son términos de masa para los leptones cargados, los términos adicionales que no se muestran son acoplamientos de estos campos con el bosón de Higgs y los pseudo-bosones de Goldstone.

1.2.4. Sector de Corrientes

En el sector de corrientes de igual manera que para el de Yukawa se puede dividir en la parte que se refiere a los leptones y la que se refiere a los quarks

$$\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_C^\ell + \mathcal{L}_C^q, \quad (1.204)$$

el lagrangiano que caracteriza al sector de corrientes para los leptones se escribe a continuación

$$\mathcal{L}_C^\ell = \sum_{\alpha} (\overline{L_{\alpha}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} L_{\alpha} + \overline{\ell_{\alpha,R}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} \ell_{\alpha,R}). \quad (1.205)$$

Esta expresión no se encuentra en términos de los eigenestados de masa por lo que tendremos que aplicar los cambios de base definidos en (1.97 - 1.100), con las relaciones (1.193, 1.194) encontramos la transformación inversa mediante

$$\ell_L = V_L \ell'_L, \quad (1.206)$$

$$\ell_R = V_R \ell'_R, \quad (1.207)$$

para cambiar en (1.205) a los eigenestados de masa comenzamos con la expresión para la derivada covariante para el doblete izquierdo

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} \cdot 1_2 - ig_2 W_{\mu}^l \frac{\sigma^l}{2} - ig_1 B_{\mu} \frac{Y_L^{\ell}}{2} \cdot 1_2, \quad (1.208)$$

sustituyendo los campos de norma W^l , B_{μ} usando las transformaciones ya mencionadas en (1.97, 1.98, 1.100, 1.101) para pasar a los campos de norma físicos

$$\begin{aligned} D_{\mu} &= \partial_{\mu} \cdot 1_2 - i \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_{\mu}^{+} \sigma^{+} + W_{\mu}^{-} \sigma^{-}) \\ &+ Z_{\mu} \left(-ig_2 C_W \frac{\sigma^3}{2} + ig_1 S_W \frac{Y_L^{\ell}}{2} \cdot 1_2 \right) \\ &+ A_{\mu} \left(-ig_2 S_W \frac{\sigma^3}{2} - ig_1 C_W \frac{Y_L^{\ell}}{2} \cdot 1_2 \right), \end{aligned} \quad (1.209)$$

recordando los definiciones para $\sin \theta_W$ y $\cos \theta_W$ podemos sustituirlas en nuestra expresión anterior, tenemos así

$$\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu \cdot 1_2 - i \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W^+_\mu \sigma^+ + W^-_\mu \sigma^-) \\
&\quad - \frac{ig_2}{C_W} Z_\mu \left(\frac{\sigma^3}{2} - S_W^2 \left(\frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y_L^\ell}{2Y_\phi} \cdot 1_2 \right) \right), \\
&\quad - \frac{ig_1 g_2 Y_\phi}{\sqrt{g_2^2 + (g_1 Y_\phi)^2}} A_\mu \left(\frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y_L^\ell}{2Y_\phi} \cdot 1_2 \right)
\end{aligned} \tag{1.210}$$

la expresión

$$Q_\ell = \frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y_L^\ell}{2Y_\phi} \cdot 1_2, \tag{1.211}$$

es la relación de Gell-Mann-Nishijima[13] y lo conocemos como el operador de carga eléctrica, para ahorrar escritura definiremos

$$c = \frac{g_1 g_2 Y_\phi}{\sqrt{g_2^2 + (g_1 Y_\phi)^2}}, \tag{1.212}$$

la expresión para nuestra derivada covariante sobre el doblete leptónico se escribe como

$$\begin{aligned}
D_\mu L_\alpha &= \partial_\mu L_\alpha - i \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W^+_\mu \sigma^+ L_\alpha + W^-_\mu \sigma^- L_\alpha) \\
&\quad - \frac{ig_2}{C_W} Z_\mu \left(\frac{\sigma^3}{2} - S_W^2 Q_\ell \right) L_\alpha \\
&\quad - ic A_\mu Q_\ell L_\alpha,
\end{aligned} \tag{1.213}$$

la ley de transformación debe ser la misma que para el doblete expresada en (1.179) por los motivos ya revisados. De esta manera el término cinético para el doblete leptónico podemos expresarlo como

$$\begin{aligned}
\overline{L_\alpha} i \gamma^\mu D_\mu L_\alpha &= \overline{L_\alpha} i \gamma^\mu \partial_\mu L_\alpha - i \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W^+_\mu \overline{L_\alpha} i \gamma^\mu \sigma^+ L_\alpha + W^-_\mu \overline{L_\alpha} i \gamma^\mu \sigma^- L_\alpha) \\
&\quad - \frac{ig_2}{C_W} Z_\mu \overline{L_\alpha} i \gamma^\mu \left(\frac{\sigma^3}{2} - S_W^2 Q_\ell \right) L_\alpha \\
&\quad - ic A_\mu \overline{L_\alpha} i \gamma^\mu Q_\ell L_\alpha \\
&= \overline{\nu_{\alpha,L}} i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{\alpha,L} + \overline{\ell_{\alpha,L}} i \gamma^\mu \partial_\mu \ell_{\alpha,L} \\
&\quad - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^+_\mu \overline{\nu_{\alpha,L}} i \gamma^\mu \ell_{\alpha,L} - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \overline{\ell_{\alpha,L}} i \gamma^\mu \nu_{\alpha,L} \\
&\quad - i \left(\frac{Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c \right) A_\mu \overline{\nu_{\alpha,L}} i \gamma^\mu \nu_{\alpha,L} - i \left(\frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c \right) A_\mu \overline{\ell_{\alpha,L}} i \gamma^\mu \ell_{\alpha,L} \\
&\quad - i \frac{g_2}{2C_W} \left(1 - S_W^2 \frac{Y_\phi + Y_L^\ell}{Y_\phi} \right) Z_\mu \overline{\nu_{\alpha,L}} i \gamma^\mu \nu_{\alpha,L} \\
&\quad - i \frac{g_2}{2C_W} \left(-1 - S_W^2 \frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{Y_\phi} \right) Z_\mu \overline{\ell_{\alpha,L}} i \gamma^\mu \ell_{\alpha,L}.
\end{aligned} \tag{1.214}$$

Ahora nos enfocaremos en la parte con quiralidad derecha

$$\overline{\ell_{\alpha,R}} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{\alpha,R}, \quad (1.215)$$

la derivada covariante para el singlete derecho está definida por

$$D_\mu \ell_{\alpha,R} = \left(\partial_\mu - g_1 \frac{Y_R^\ell}{2} B_\mu \right) \ell_{\alpha,R}. \quad (1.216)$$

Hay una diferencia importante entre esta relación y la expresada en (1.208), y es que recordemos que los bosones W solo interaccionan con los estados quirales izquierdos por lo que debemos suprimir el término relacionado con $SU(2)_L$; además, en este caso, la derivada covariante no tiene estructura de matriz sino de un escalar, aplicando los cambios a términos de los campos de norma masivos tenemos

$$\begin{aligned} D_\mu \ell_{\alpha,R} &= \left(\partial_\mu - g_1 \frac{Y_R^\ell}{2} (-S_W Z_\mu + C_W A_\mu) \right) \ell_{\alpha,R} \\ &= \partial_\mu \ell_{\alpha,R} - i \frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c A_\mu \ell_{\alpha,R} + i \frac{g_2}{2C_W} \frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{Y_\phi} S_W^2 Z_\mu \ell_{\alpha,R}, \end{aligned} \quad (1.217)$$

la expresión (1.216) entonces tiene la forma

$$\overline{\ell_{\alpha,R}} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{\alpha,R} = \overline{\ell_{\alpha,R}} i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_{\alpha,R} - i \frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c A_\mu \overline{\ell_{\alpha,R}} i\gamma^\mu \ell_{\alpha,R} + i \frac{g_2}{2C_W} \frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{Y_\phi} S_W^2 Z_\mu \overline{\ell_{\alpha,R}} i\gamma^\mu \ell_{\alpha,R}. \quad (1.218)$$

Una vez obtenidas las expresiones para cada término, el lagrangiano se expresa como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^\ell &= \sum_\alpha (\overline{L_\alpha} i\gamma^\mu D_\mu L_\alpha + \overline{\ell_{\alpha,R}} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{\alpha,R}) \\ &= \sum_\alpha [\overline{\nu_{\alpha,L}} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{\alpha,L} + \overline{\ell_{\alpha,L}} i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_{\alpha,L} + \overline{\ell_{\alpha,R}} i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_{\alpha,R} \\ &\quad - i \left(\frac{Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c \right) A_\mu \overline{\nu_{\alpha,L}} i\gamma^\mu \nu_{\alpha,L} \\ &\quad - i \left(\frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c \right) A_\mu (\overline{\ell_{\alpha,L}} i\gamma^\mu \ell_{\alpha,L} + \overline{\ell_{\alpha,R}} i\gamma^\mu \ell_{\alpha,R}) \\ &\quad - \frac{ig_2}{2C_W} \frac{Y_\phi - S_W^2 (Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \overline{\nu_{\alpha,L}} i\gamma^\mu \nu_{\alpha,L} \\ &\quad - \frac{ig_2}{2C_W} \frac{-Y_\phi - S_W^2 (-Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \overline{\ell_{\alpha,L}} i\gamma^\mu \ell_{\alpha,L} \\ &\quad + \frac{ig_2}{2C_W} \frac{S_W^2 (-Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \overline{\ell_{\alpha,R}} i\gamma^\mu \ell_{\alpha,R} \\ &\quad - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \overline{\nu_{\alpha,L}} i\gamma^\mu \ell_{\alpha,L} - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_{\mu} \overline{\ell_{\alpha,L}} i\gamma^\mu \nu_{\alpha,L}], \end{aligned} \quad (1.219)$$

y en forma matricial

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_C^\ell &= \bar{\nu}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + \bar{\ell}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_L + \bar{\ell}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_R \\
&\quad - i \left(\frac{Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c \right) A_\mu \bar{\nu}_L i\gamma^\mu \nu_L \\
&\quad - i \left(\frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c \right) A_\mu (\bar{\ell}_L i\gamma^\mu \ell_L + \bar{\ell}_R i\gamma^\mu \ell_R) \\
&\quad - \frac{ig_2}{2C_W} \frac{Y_\phi - S_W^2 (Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \bar{\nu}_L i\gamma^\mu \nu_L \\
&\quad - \frac{ig_2}{2C_W} \frac{-Y_\phi - S_W^2 (-Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \bar{\ell}_L i\gamma^\mu \ell_L \\
&\quad + \frac{ig_2}{2C_W} \frac{S_W^2 (-Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \bar{\ell}_R i\gamma^\mu \ell_R \\
&\quad - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^+_\mu \bar{\nu}_L i\gamma^\mu \ell_L - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \bar{\ell}_L i\gamma^\mu \nu_L.
\end{aligned} \tag{1.220}$$

Vamos a fijarnos en los términos siguientes

$$\bar{\ell}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_R \tag{1.221}$$

$$-\frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \bar{\ell}_L i\gamma^\mu \nu_L \tag{1.222}$$

estas expresiones se encuentran en el espacio de sabor; sin embargo, se necesitan escribir en términos de los eigenestados de masa, lograremos esto usando las expresiones (1.206, 1.207) tenemos así en primer lugar

$$\begin{aligned}
\bar{\ell}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_R &= \bar{\ell}_R 1_2 i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_R \\
&= \bar{\ell}_R V_R V_R^\dagger i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_R \\
&= \left(V_R^\dagger \ell_R \right)^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \partial_\mu \left(V_R^\dagger \ell_R \right) \\
&= \ell_R^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_R' \\
&= \bar{\ell}'_R i\gamma^\mu \partial_\mu \ell'_R.
\end{aligned} \tag{1.223}$$

Ahora en una forma similar para la expresión (1.222) tenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \bar{\ell}_L i\gamma^\mu \nu_L &= -\frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \bar{\ell}_L V_L V_L^\dagger i\gamma^\mu \nu_L \\
&= -\frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \left(V_L^\dagger \ell_L \right)^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \left(V_L^\dagger \nu_L \right) \\
&= -\frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \bar{\ell}'_L i\gamma^\mu \left(V_L^\dagger \nu_L \right).
\end{aligned} \tag{1.224}$$

Debido a que en el MEE los neutrinos son considerados sin masa no existe una relación para un cambio de base para los neutrinos, sin embargo de manera natural podemos definir al cambio

$$\nu'_L = V^\dagger \nu_L \quad (1.225)$$

los campos del neutrino en esta nueva base son también son llamados neutrinos de sabor y esto es porque cualquier combinación de campos sin masa es un campo sin masa, por lo tanto dada la relación (1.225) tenemos

$$-\frac{ig_2}{\sqrt{2}}W^-_{\mu} \bar{\ell}'_L i\gamma^\mu \nu_L = -\frac{ig_2}{\sqrt{2}}W^-_{\mu} \bar{\ell}'_L i\gamma^\mu \nu'_L. \quad (1.226)$$

De manera similar a lo mostrado en estas expresiones podemos pasar a los campos de masa en la expresión (1.220), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^\ell &= \bar{\nu}'_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu'_L + \bar{\ell}'_L i\gamma^\mu \partial_\mu \ell'_L + \bar{\ell}'_R i\gamma^\mu \partial_\mu \ell'_R \\ &\quad -i \left(\frac{Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c \right) A_\mu \bar{\nu}'_L i\gamma^\mu \nu'_L \\ &\quad -i \left(\frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c \right) A_\mu \left(\bar{\ell}'_L i\gamma^\mu \ell'_L + \bar{\ell}'_R i\gamma^\mu \ell'_R \right) \\ &\quad - \frac{ig_2}{2C_W} \frac{Y_\phi - S_W^2 (Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \bar{\nu}'_L i\gamma^\mu \nu'_L \\ &\quad - \frac{ig_2}{2C_W} \frac{-Y_\phi - S_W^2 (-Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \bar{\ell}'_L i\gamma^\mu \ell'_L \\ &\quad + \frac{ig_2}{2C_W} \frac{S_W^2 (-Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \bar{\ell}'_R i\gamma^\mu \ell'_R \\ &\quad - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}'_L i\gamma^\mu \ell'_L - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_{\mu} \bar{\ell}'_L i\gamma^\mu \nu'_L, \end{aligned} \quad (1.227)$$

definimos

$$q_\nu = \frac{Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c, \quad (1.228)$$

$$q_\ell = \frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c. \quad (1.229)$$

Podemos escribir nuestra ecuación anterior en términos de estados sin quiralidad definida, recordando que el neutrino no tiene estado de quiralidad derecha tenemos así, omitiendo las primas

por simplicidad

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_C^\ell &= \sum_\alpha \left[\bar{\nu}_\alpha i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_\alpha + \bar{\ell}_\alpha i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_\alpha \right. \\
&\quad - i q_\nu A_\mu \bar{\nu}_\alpha i\gamma^\mu \nu_\alpha \\
&\quad - i q_\ell A_\mu \bar{\ell}_\alpha i\gamma^\mu \ell_\alpha \\
&\quad - \frac{ig_2}{2C_W} \frac{Y_\phi - S_W^2 (Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \bar{\nu}_\alpha i\gamma^\mu \nu_\alpha \\
&\quad - \frac{ig_2}{2C_W} \frac{-Y_\phi - S_w^2 (-Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \bar{\ell}_\alpha i\gamma^\mu P_L \ell_\alpha \\
&\quad + \frac{ig_2}{2C_W} \frac{S_W^2 (-Y_\phi + Y_L^\ell)}{Y_\phi} Z_\mu \bar{\ell}_\alpha i\gamma^\mu P_R \ell_\alpha \\
&\quad \left. - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}_\alpha i\gamma^\mu P_L \ell_\alpha - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W^-_{\mu} \bar{\ell}_\alpha i\gamma^\mu P_L \nu_\alpha \right].
\end{aligned} \tag{1.230}$$

Vamos a poner especial énfasis en la familia del electrón y consideremos exclusivamente a los términos cinéticos y proporcionales a los campos de norma no masivos

$$\bar{\nu}_e i\gamma^\mu (\partial_\mu - i q_\nu A_\mu) \nu_e + \bar{\ell}_e i\gamma^\mu (\partial_\mu - i q_\ell A_\mu) \ell_e, \tag{1.231}$$

el electrón sabemos interacciona electromagnéticamente con el fotón el cual no tiene masa por este motivo A_μ se caracteriza como el fotón, además el neutrino no interacciona de esta manera por lo que el acoplamiento con el campo A_μ no debe estar presente y esto puede ser realizado si

$$\begin{aligned}
q_\nu &= \frac{Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c = 0, \\
\Leftrightarrow Y_\phi + Y_L^\ell &= 0, \\
\Rightarrow Y_L^\ell &= -Y_\phi,
\end{aligned} \tag{1.232}$$

y por lo tanto

$$q_\nu = \frac{-Y_\phi + Y_L^\ell}{2Y_\phi} c = -c, \tag{1.233}$$

obtenemos que nuestra expresión (1.231) queda escrita como

$$\bar{\nu}_e i\gamma^\mu (\partial_\mu - i q_\nu A_\mu) \nu_e + \bar{\ell}_e i\gamma^\mu (\partial_\mu - i q_\ell A_\mu) \ell_e = \bar{\nu}_e i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_e + \bar{\ell}_e i\gamma^\mu (\partial_\mu + i c A_\mu) \ell_e, \tag{1.234}$$

si nos fijamos en el término

$$\bar{\ell}_e i\gamma^\mu (\partial_\mu + i c A_\mu) \ell_e, \tag{1.235}$$

es de hecho la definición de la derivada covariante para la electrodinámica así podemos hacer la identificación

$$e = c = \frac{g_1 g_2 Y_\phi}{\sqrt{g_2^2 + (g_1 Y_\phi)^2}}. \tag{1.236}$$

Por último, tomando en cuenta las expresiones (1.232, 1.233) podemos encontrar que el lagrangiano para el sector de corrientes de leptones resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_C^\ell &= \sum_\alpha [\bar{\nu}_\alpha i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_\alpha + \bar{\ell}_\alpha i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \ell_\alpha \\
&+ \frac{g_2}{2C_W} Z_\mu \bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu \nu_\alpha - \frac{g_2}{4C_W} Z_\mu \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu ((1 - 4S_W^2) \cdot 1_4 - \gamma^5) \ell_\alpha \\
&+ \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_\mu \bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu P_L \ell_\alpha + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu P_L \nu_\alpha] .
\end{aligned} \tag{1.237}$$

Las interacciones mediadas por los bosones W^\pm las llamamos corrientes cargadas y se definen como

$$j^{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu P_L \ell_\alpha \tag{1.238}$$

$$j^{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu P_L \nu_\alpha, \tag{1.239}$$

por su parte, la mediada por el fotón la llamamos corriente electromagnética

$$j_{\text{em}}^\mu = \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu \ell_\alpha, \tag{1.240}$$

finalmente, a la mediada por el bosón Z es la corriente neutra

$$j^{0\mu} = \frac{1}{2C_W} \bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu \nu_\alpha - \frac{1}{4C_W} \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu ((1 - 4S_W^2) \cdot 1_4 - \gamma^5) \ell_\alpha. \tag{1.241}$$

Capítulo 2

Física más allá del Modelo Estándar

Las preguntas más notables planteadas por la física de los neutrinos se vinculan con las masas de estas partículas. Las oscilaciones de neutrinos, teorizadas hace más de seis décadas por Bruno Pontecorvo[1], medidas por primera vez hace poco más de veinte años por la Colaboración Super-Kamiokande[31], y confirmadas en 2002 por la Colaboración SNO[32]; se han interpretado como evidencia definitiva de que los neutrinos son partículas masivas. El mecanismo *see-saw*, de generación de masas de neutrinos, es una alternativa que ha gozado de mucha atención y de la que se han desarrollado diversas variantes[33]. Permite explicar, en forma natural, la pequeñez de las masas de los neutrinos, de la cual sería responsable la escala de alta energía característica de alguna teoría más allá del Modelo Estándar, proporcionando así una descripción de las masas de estos fermiones menos ambigua que aquella propia de parametrizaciones vía constantes de Yukawa[13]. Más aún, desde la perspectiva de las teorías efectivas, el operador de Weinberg[34], con unidades de $(masa)^5$, favorece la idea de que el mecanismo *see-saw* es el que origina a las masas de los neutrinos. Si bien, la versión mínima de dicho término en el lagrangiano requiere que los neutrinos sean partículas de Majorana, induciendo así violaciones al número leptónico, existen generalizaciones en las que los campos espinores usados para describir a los neutrinos son de Dirac.

2.1. Conjugación de Carga

Para comprender un poco mejor de concepto de campos de Majorana, discutiremos de manera breve la transformación llamada conjugación de carga, la cual es la transformación asociada al cambio de materia por antimateria y viceversa, comenzamos recordando a las ecuaciones de Maxwell en unidades naturales[36,37]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.4)$$

los campos eléctrico (\vec{E}) y magnético (\vec{B}) se expresan en términos de los potenciales escalar ϕ y vectorial \vec{A} como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (2.5)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.6)$$

Consideremos una densidad de carga ρ e imaginemos que en esa distribución de carga súbitamente cambiamos a la materia presente por su antimateria, este cambio ahora nos produce una nueva densidad de carga eléctrica ρ^c y nos preguntamos cómo se relaciona esta nueva densidad de carga eléctrica con nuestra densidad original, para ilustrar la idea general, tomemos el caso sencillo de una densidad de cargas puntuales finitas producidas por electrones distribuidos en el espacio; un conjunto de cargas eléctricas discretas pueden ser descritas por la densidad[36]

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = q_{e^-} \sum_{i=1}^n \delta(\vec{x} - \vec{x}_i). \quad (2.7)$$

La densidad de carga eléctrica es de hecho proporcional a la carga del electrón, al transformar la materia por antimateria los electrones pasan a ser positrones pero la distribución de ellos no cambian en el espacio, no así su carga eléctrica pues recordemos que una partícula y su antipartícula se diferencian en su carga eléctrica siendo de la misma magnitud pero de signo contrario. Con eso la distribución ρ^c es

$$\begin{aligned} \rho^c(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = q_{e^+} \sum_{i=1}^n \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = -q_{e^-} \sum_{i=1}^n \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = -\rho(\vec{x}) \\ &\Rightarrow \rho^c(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

En general esto sucede para cualquier densidad de carga, mediante un razonamiento similar para la densidad de corriente tenemos que al cambiar la materia por antimateria en las densidades tenemos las transformaciones siguientes

$$\rho \longrightarrow \rho^c = -\rho, \quad (2.9)$$

$$\vec{J} \longrightarrow \vec{J}^c = -\vec{J}, \quad (2.10)$$

desde el punto de vista de la formulación covariante del electromagnetismo con la densidad de carga y de corriente se define a la 4-corriente que es un 4-vector con componentes

$$j = \begin{pmatrix} j^0 \\ j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^0 \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

de esta manera la 4-corriente bajo la conjugación de carga se transforma como

$$j_\mu \longrightarrow j_\mu^c = -j_\mu. \quad (2.12)$$

El potencial eléctrico y magnético están relacionados con las densidades de carga y corriente respectivamente, se puede mostrar que estos potenciales deben transformarse de la forma siguiente

$$\phi \longrightarrow \phi^c = -\phi, \quad (2.13)$$

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}^c = -\vec{A}, \quad (2.14)$$

y nuevamente desde el punto de vista de la formulación covariante del electromagnetismo tenemos al 4-vector formado por estos elementos llamados 4-potencial electromagnético definido por

$$A = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

y se transforma bajo la conjugación de carga como

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu^c = -A_\mu, \quad (2.16)$$

así el tensor de campo electromagnético se transforma

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{\mu\nu}^c = \partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c = -(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -F_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Con estas transformaciones podemos encontrar las respectivas para el campo eléctrico y magnético, tenemos entonces que al cambiar materia por antimateria se transforman como sigue

$$\vec{B} \longrightarrow \vec{B}^c = -\vec{B}, \quad (2.18)$$

$$\vec{E} \longrightarrow \vec{E}^c = -\vec{E}, \quad (2.19)$$

ahora podemos observar que sucede con las ecuaciones de Maxwell al aplicar la conjugación de carga

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho &\longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^c = \rho^c \\ &-\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\rho \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 &\longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^c = 0 \\ &-\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} &\longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B}^c - \frac{\partial \vec{E}^c}{\partial t} = \vec{J}^c \\ &-\left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\vec{J} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 &\longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}^c - \frac{\partial \vec{B}^c}{\partial t} = 0 \\ &-\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Con esto podemos concluir que bajo la conjugación de carga, las ecuaciones de Maxwell son invariantes, esto tiene una consecuencia física relevante y es que el electromagnetismo se comporta exactamente de la misma manera para la materia que para la antimateria. La electrodinámica describe cómo interaccionan las partículas cargadas con el campo electromagnético y está descrito por el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\text{ED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m \cdot 1_4)\psi, \quad (2.24)$$

donde $(-q)$ es la carga de la partícula asociada al campo ψ ; las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta teoría son las siguientes

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (2.25)$$

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m \cdot 1_4)\psi = 0. \quad (2.26)$$

Bajo el mismo argumento de que el electromagnetismo no distingue entre partículas y antipartículas se espera que nuestro lagrangiano, sea invariante bajo la transformación de conjugación de carga, pero no contamos con una transformación del campo ψ a su campo de carga conjugada ψ^c , por ello a partir de (2.26) trataremos de encontrar una expresión para ψ^c , para comenzar veamos que las matrices de Dirac se caracterizan porque cumplen las relaciones (D.3, D.4), si bien no se menciona la forma que tienen esas matrices, se tiene claro que cualquier conjunto de 4 matrices que cumplan estas dos ecuaciones pueden ser usadas como matrices de Dirac, esto es lo que llamamos una representación de las matrices de Dirac, existe un número infinito de representaciones de las matrices de Dirac podemos destacar dos representaciones importantes la representación de Dirac y la de Weyl o quiral. En estas representaciones las matrices de Dirac cumplen¹

$$\gamma^2\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu\gamma^2, \quad (2.27)$$

trabajando en estas representaciones comenzamos nuestro desarrollo sobre la ecuación (2.26) a fin de encontrar una ley de transformación para ψ bajo la transformación de conjugación de carga, conjugando complejamente y realizando producto por la izquierda por la matriz γ^2 además haciendo uso de (2.27) obtenemos

$$\gamma^2 [(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m \cdot 1_4)\psi]^* = (i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m \cdot 1_4)(\gamma^2\psi^*) = 0, \quad (2.28)$$

luego de nuestra relación (2.16) podemos encontrar que

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m \cdot 1_4)(\gamma^2\psi^*) &= (i\gamma^\mu(\partial_\mu + iq(-A_\mu)) - m \cdot 1_4)(\gamma^2\psi^*) \\ &= (i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu^c) - m \cdot 1_4)(\gamma^2\psi^*) = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

notemos que esta ecuación ya es parecida a (2.26) y si interpretamos a (2.29) como la ecuación que describe a un fermión cargado que interactúa con un campo electromagnético definido por el 4-potencial A_μ^c conjugado entonces resulta natural definir al campo de carga conjugada ψ^c de nuestro fermión como

$$\psi^c \propto \gamma^2\psi, \quad (2.30)$$

de la discusión anterior en el que la conjugación de carga representa una transformación de materia por antimateria, podemos intuir que nuestro campo ψ^c tiene carga opuesta a ψ . De manera más precisa, vamos a definir al campo de carga conjugado como

$$\psi^c = -i\gamma^2\psi^*. \quad (2.31)$$

Por otro lado, notemos que podemos reescribir esta ecuación como sigue

$$\psi^c = (-i\gamma^2\gamma^0)(\psi^\dagger\gamma^0)^T = (-i\gamma^2\gamma^0)\bar{\psi}^T = C\bar{\psi}^T, \quad (2.32)$$

por lo tanto, el campo espinor de Dirac bajo la conjugación se transforma como

$$\psi \longrightarrow \psi^c = C\bar{\psi}^T, \quad (2.33)$$

dónde hemos definido C

$$C = i\gamma^2\gamma^0, \quad (2.34)$$

como la matriz de conjugación de carga. Es importante mencionar que la relación (2.33) es válida en general independientemente de la representación que estamos usando mientras que la definición para la matriz de conjugación de carga en (2.34) solo es válida en las representaciones de Weyl y de

¹Las expresiones explícitas de las matrices de Dirac para estas representaciones se muestran en el Apéndice D

Dirac, conviene definirla a través de sus propiedades generales independientes de la representación usada[13]

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^{\mu}, \quad (2.35)$$

$$C^{-1} = C^{\dagger}, \quad (2.36)$$

$$C^T = -C, \quad (2.37)$$

$$C\gamma_5^T C^{-1} = \gamma_5. \quad (2.38)$$

Ahora nos preguntamos qué sucede con el lagrangiano de la electrodinámica bajo esas transformaciones de conjugación de carga

$$\mathcal{L}_{\text{ED}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\text{ED}}^c = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^c F^{c\mu\nu} + \bar{\psi}^c (i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iqA_{\mu}^c) - m \cdot 1_4)\psi^c, \quad (2.39)$$

vamos a aplicar nuestros cambios definidos para la conjugación de carga término a término, tenemos

$$F_{\mu\nu}^c F^{c\mu\nu} = (-F_{\mu\nu})(-F^{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

el segundo término lo separaremos a su vez en sus partes

$$\bar{\psi}^c (i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iqA_{\mu}^c) - m \cdot 1_4)\psi^c = \bar{\psi}^c i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi^c + (i)^2 qA_{\mu}^c \bar{\psi}^c \gamma^{\mu}\psi^c - m\bar{\psi}^c \psi^c, \quad (2.41)$$

recordando que los campos de Dirac son variables de Grassman tenemos

$$\begin{aligned} -m\bar{\psi}^c \psi^c &= -m\psi^{c\dagger}\gamma^0\psi^c \\ &= -m(C\bar{\psi}^T)^{\dagger}\gamma^0 C\bar{\psi}^T \\ &= -m\bar{\psi}^{\dagger T} C^{-1}\gamma^0 C\bar{\psi}^T \\ &= m(\gamma^0\psi)^T \gamma^0 \bar{\psi}^T \\ &= -m(\bar{\psi}\gamma^0\gamma^0\psi)^T \\ &= -m(\underbrace{\bar{\psi}\psi}_{1\times 1})^T \\ &= -m\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (2.42)$$

similarmente se tiene

$$(i)^2 qA_{\mu}^c \bar{\psi}^c \gamma^{\mu}\psi^c = (i)^2 qA_{\mu} \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \quad (2.43)$$

Por último

$$\bar{\psi}^c i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi^c = -(\partial_{\mu}\bar{\psi})i\gamma^{\mu}\psi = \partial_{\mu}(\bar{\psi}i\gamma^{\mu}\psi) + \bar{\psi}i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi,$$

usando el teorema de Gauss podemos eliminar el término de superficie

$$\bar{\psi}^c i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi^c = \bar{\psi}i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi, \quad (2.44)$$

la ecuación (2.41) resulta en

$$\bar{\psi}^c (i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iqA_{\mu}^c) - m \cdot 1_4)\psi^c = \bar{\psi}i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + (i)^2 qA_{\mu} \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iqA_{\mu}) - m \cdot 1_4)\psi, \quad (2.45)$$

de las expresiones (2.40) y (2.45) el lagrangiano transformado

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{ED}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\text{ED}}^c &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^c F^{c\mu\nu} + \bar{\psi}^c (i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu^c) - m \cdot 1_4)\psi^c \\
 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m \cdot 1_4)\psi \\
 &= \mathcal{L}_{\text{ED}},
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

concluimos que el lagrangiano de la electrodinámica consistentemente con nuestro razonamiento es invariante bajo la transformación de conjugación de carga.

2.2. Espinores de Majorana

Consideramos la ecuación de Dirac libre

$$(i\gamma^\mu - m \cdot 1_4)\psi = 0, \tag{2.47}$$

podemos hacer un producto por la matriz de quiralidad derecha por la izquierda y aplicando (1.138, 1.139) encontramos que la ecuación anterior es equivalente a

$$\begin{aligned}
 0 &= P_R(i\gamma^\mu - m \cdot 1_4)\psi \\
 &= (iP_R\gamma^\mu - m \cdot P_R)\psi \\
 &= (i\gamma^\mu P_L - m \cdot P_R)\psi \\
 &= i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R \\
 &\Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

de manera similar, pero haciendo el producto con la matriz de quiralidad derecha obtenemos

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L. \tag{2.49}$$

Este par de ecuaciones nos dice que si queremos conocer la dinámica del estado quiral izquierdo del espinor necesitamos la información del espinor quiral derecho y viceversa; es decir este par de ecuaciones están acopladas y más aún se encuentran acopladas por la masa asociada al campo ψ . Por otro lado pensemos en el caso en que tenemos un fermión sin masa; como sucede con los neutrinos, en tales circunstancias las ecuaciones resultantes son

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = 0, \tag{2.50}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0, \tag{2.51}$$

estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de Weyl, y están desacopladas pues ya no necesitamos la información de un espinor de quiralidad definida para conocer la dinámica del espinor quiral contrario; de hecho, puede no existir un estado de quiralidad definida y aun así podemos describir a su estado de quiralidad contraria. Por tal motivo el MEE se construyó bajo el supuesto de que los neutrinos no tienen masa pues nos permite describir a neutrinos como campos de quiralidad izquierda omitiendo la componente derecha. Esto es importante pues se lleva bien con el hecho de que experimentalmente se han detectado solamente neutrinos de quiralidad izquierda[54]. Sobre el caso de fermiones de masa nula podemos decir algo más al respecto, para ello consideramos a la representación de Weyl, bajo esta representación las matrices de quiralidad tienen la forma

$$P_L = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.52}$$

$$P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

escribimos al espinor ψ en términos de matrices columna de dos componentes χ_1 y χ_2 como

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

notemos que los estados de quiralidad definida pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} \psi_L &= P_L \psi = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi_R &= P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \\ \psi_L &= \begin{pmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\psi_R = P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

En el caso de un fermión sin masa solo necesitamos un estado de quiralidad definida digamos ψ_L , se muestra que este espinor solo necesita de dos componentes en lugar de las cuatro que definen a un espinor de Dirac. Todo lo anterior nos lleva a concluir que para describir a un fermión sin masa, solo se requiere de un espinor de Dirac de dos componentes. Alrededor de los años treinta Ettore Majorana[5] se preguntó si esto también era posible pero con campos masivos. Al establecer una condición para lograrlo, dio nacimiento a lo que conocemos como fermiones de Majorana. Para hablar de los espinores de Majorana consideremos la ecuación (2.49) y calculemos su hermitiano adjunto

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R)^\dagger = (m\psi_L)^\dagger \quad (2.57)$$

$$\Rightarrow -i(\partial_\mu \psi_R^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} = m\psi_L^\dagger,$$

haremos producto por la matriz γ^0 por la derecha con la que obtenemos la ecuación

$$-i(\partial_\mu \psi_R^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = m\psi_L^\dagger \gamma^0 \quad (2.58)$$

$$\Rightarrow i(\partial_\mu \overline{\psi_R}) \gamma^\mu = -m\overline{\psi_L},$$

posteriormente transponiendo esta ecuación tenemos

$$(i(\partial_\mu \overline{\psi_R}) \gamma^\mu)^T = -m\overline{\psi_L}^T \quad (2.59)$$

$$\Rightarrow i\gamma^{\mu T} (\partial_\mu \overline{\psi_R}^T) = -m\overline{\psi_L}^T,$$

ahora operamos a esta ecuación por la izquierda con la matriz de conjugación de carga obteniendo

$$\begin{aligned} iC\gamma^{\mu T} C^\dagger C (\partial_\mu \overline{\psi_R}^T) &= -mC\overline{\psi_L}^T \\ \Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu (C\overline{\psi_R}^T) &= m\overline{C\psi_L}^T \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R^c = m\psi_L^c,$$

supongamos que se cumple la relación

$$\psi_R = \xi C\overline{\psi_L}^T = \xi\psi_L^c, \quad (2.61)$$

donde ξ es alguna fase compleja, tal que $|\xi| = 1$, notemos que la relación anterior es equivalente a

$$\psi_L^c = \xi^* \psi_R \quad (2.62)$$

aplicando conjugación de carga en (2.61)

$$\begin{aligned} \psi_R &\longrightarrow \psi_R^c = C \overline{\psi_R}^T \\ &= C \left(\overline{\xi C \psi_L^T} \right)^T \\ &= C \left[(\xi C \overline{\psi_L^T})^\dagger \gamma^0 \right]^T \\ &= \xi^* \psi_L, \end{aligned} \quad (2.63)$$

usando así (2.62) y (2.63) y sustituyendo en (2.60) tenemos

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R^c &= m \psi_L^c \\ \Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu (\xi^* \psi_L) &= m (\xi^* \psi_R) \\ \Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m \psi_R, \end{aligned} \quad (2.64)$$

que de hecho es nuestra ecuación descrita en (2.48); con eso tenemos que si se cumple la ecuación (2.61), entonces las ecuaciones (2.48, 2.49) son equivalentes. La condición (2.61) que nos permite encontrar esta equivalencia es la llamada condición de Majorana y nos dice que las dos componentes de ψ_R están completamente determinadas por las dos componentes de ψ_L , así el número total de componentes independientes es dos. Hemos establecido por (1.140) que un espinor de Dirac puede ser escrito por la suma de sus estados de quiralidad definida como

$$\psi = \psi_L + \psi_R,$$

suponemos que este espinor cumple la condición de Majorana se tiene entonces

$$\psi = \psi_L + \xi \psi_L^c, \quad (2.65)$$

vamos a aplicar conjugación de carga en esta ecuación junto con (2.63)

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \psi^c = \psi_L^c + (\xi \psi_L^c)^c \\ &= \psi_L^c + \psi_R^c \\ &= \psi_L^c + \xi^* \psi_L, \end{aligned} \quad (2.66)$$

multiplicando por la fase compleja a nuestro campo de carga conjugado ψ^c notamos

$$\begin{aligned} \xi \psi^c &= \xi (\psi_L^c + \xi^* \psi_L) \\ &= \xi \psi_L^c + |\xi| \psi_L \\ &= \xi \psi_L^c + \psi_L \\ &= \psi, \end{aligned} \quad (2.67)$$

esta es la condición de Majorana para el campo ψ sin quiralidad definida, ahora elegimos por simplicidad $\xi = 1$ en tal caso obtenemos que la condición de Majorana es

$$\psi = \psi^c, \quad (2.68)$$

es decir, que el campo de carga conjugado coincide con su mismo campo. En otras palabras, la partícula asociada con el campo ψ coincide con su antipartícula. Si tenemos un campo espinorial de Dirac que cumple la condición de Majorana (2.68) decimos que ψ es un campo de Majorana. Hemos mencionado que una partícula se distingue de su antipartícula por su carga, en ese sentido, aquellas partículas descritas por campos de Majorana tienen que ser necesariamente neutras como es el caso de los neutrinos. A continuación, veamos qué sucede con la quiralidad cuando tenemos los campos de carga conjugado ψ_L^c y ψ_R^c , para ello aplicamos las matrices de proyección quiral sobre los espinores

$$\begin{aligned} P_L \psi_L^c &= P_L C \overline{\psi_L}^T \\ &= P_L C (\psi^\dagger P_L \gamma^0)^T \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$= -P_L P_R \gamma^0 C \psi^{\dagger T} = 0,$$

$$\begin{aligned} P_R \psi_L^c &= P_R C \overline{\psi_L}^T \\ &= P_R C (\psi^\dagger P_L \gamma^0)^T \\ &= -P_R P_R \gamma^0 C \psi^{\dagger T} \\ &= -P_R \gamma^0 C \psi^{\dagger T} \\ &= C (\psi^\dagger P_L \gamma^0)^T \\ &= \psi_L^c, \end{aligned} \quad (2.70)$$

de manera similar se tiene

$$P_L \psi_R^c = \psi_R^c, \quad (2.71)$$

$$P_R \psi_R^c = 0, \quad (2.72)$$

con los resultados encontrados en (2.71, 2.72), mostramos que al realizar la conjugación de carga sobre un espinor de alguna quiralidad, la quiralidad se invierte; este resultado es válido para campos de Dirac y de Majorana. En el contexto de la teoría de Dirac libre discutida en la sección (1.2.3) encontramos que el término de masa para esta teoría en términos de espinores con quiralidad definida está dado por (1.144) donde sólo se tienen productos entre estados de quiralidad opuesta, a saber

$$\overline{\psi_L} \psi_R + \overline{\psi_R} \psi_L, \quad (2.73)$$

nos preguntamos si es posible escribir términos de masa en el que usemos solamente un estado quiral ψ_L , para ello necesitamos una relación sobre el espinor quiral izquierdo que lo transforme en un espinor de quiralidad definida derecha, de (2.70) notamos que la conjugación de carga realiza dicha transformación entonces reemplazamos al espinor quiral de carga conjugado ψ_L^c en lugar del espinor quiral derecho en (2.73) tenemos así

$$\overline{\psi_L} \psi_L^c + \overline{\psi_L^c} \psi_L. \quad (2.74)$$

Al parecer hemos encontrado una propuesta para un término de masa en el que solo necesitamos un estado de quiralidad, no obstante este término presenta un problema con las simetrías, para ilustrarlo consideramos la transformación del grupo $U(1)$ global

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi, \quad (2.75)$$

bajo esta transformación la lagrangiana de Dirac es invariante

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_D &\longrightarrow \mathcal{L}'_D = \bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m \cdot 1_4) \psi' \\
 &= \psi'^{\dagger} \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m \cdot 1_4) \psi' \\
 &= (e^{i\alpha} \psi)^{\dagger} \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m \cdot 1_4) e^{i\alpha} \psi \\
 &= e^{-i\alpha} e^{i\alpha} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m \cdot 1_4) \psi = \mathcal{L}_D
 \end{aligned}$$

esta transformación representa una simetría, de acuerdo al teorema de Noether existe una cantidad conservada asociada con esta simetría y es el número leptónico, en el caso de partículas cargadas el número leptónico se traduce en la carga eléctrica, veamos qué sucede en el caso de (2.74) para ello encontramos la ley de transformación para nuestros campos quirales

$$\psi'_L = P_L \psi' = P_L (e^{i\alpha} \psi) = e^{i\alpha} P_L \psi = e^{i\alpha} \psi_L \quad (2.76)$$

por otro lado

$$\psi'_L{}^c = e^{-i\alpha} \psi_L^c \quad (2.77)$$

$$\bar{\psi}'_L{}^c = e^{i\alpha} \bar{\psi}_L^c \quad (2.78)$$

con las relaciones encontradas (2.76-2.78) el término (2.74) bajo la transformación global queda como

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_L \psi_L^c + \bar{\psi}_L^c \psi_L &\longrightarrow \bar{\psi}'_L \psi'_L{}^c + \bar{\psi}'_L{}^c \psi'_L = e^{-i\alpha} \bar{\psi}_L e^{-i\alpha} \psi_L^c + e^{i\alpha} \bar{\psi}_L^c e^{i\alpha} \psi_L \\
 &= e^{-2i\alpha} \bar{\psi}_L \psi_L^c + e^{2i\alpha} \bar{\psi}_L^c \psi_L \\
 &\neq \bar{\psi}_L \psi_L^c + \bar{\psi}_L^c \psi_L,
 \end{aligned}$$

entonces nuestro término propuesto en (2.73) no es invariante bajo esta simetría y decimos que viola al número leptónico en dos unidades, en el MEE el número leptónico se conserva por tal motivo ese tipo de términos no se consideran como términos de masa permitidos. Volvamos a escribir la ecuación (1.145) en donde hemos escrito al lagrangiano de Dirac en términos de campos quirales

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L),$$

haciendo un cambio como el realizado en (2.74) usamos al lagrangiano anterior como modelo para definir al lagrangiano de Majorana[13]

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} [\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L^c i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L^c - m (\bar{\psi}_L \psi_L^c + \bar{\psi}_L^c \psi_L)], \quad (2.79)$$

donde estos campos quirales satisfacen la condición de Majorana (2.61) con $\xi = 1$, podemos reescribir a este lagrangiano como sigue

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} [\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L^c i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L^c - m (\bar{\psi}_L \psi_L^c + \bar{\psi}_L^c \psi_L)] \\
 &= \frac{1}{2} [\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L + \psi_L^c) + \bar{\psi}_L^c i\gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L + \psi_L^c) \\
 &\quad - m (\bar{\psi}_L (\psi_L + \psi_L^c) + \bar{\psi}_L^c (\psi_L + \psi_L^c))] \\
 &= \frac{1}{2} [(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_L^c) i\gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L + \psi_L^c) - m (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_L^c) (\psi_L + \psi_L^c)] \\
 &= \frac{1}{2} [(\overline{\psi_L + \psi_L^c}) i\gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L + \psi_L^c) - m \overline{(\psi_L + \psi_L^c)} (\psi_L + \psi_L^c)],
 \end{aligned}$$

usando (D.13, D.16) y (2.65) concluimos que el lagrangiano de Majorana se escribe también como

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m \cdot 1_4) \psi. \quad (2.80)$$

Este lagrangiano luce como el de Dirac salvo por el factor de $\frac{1}{2}$ y que el campo ψ satisface ahora la condición de Majorana (2.68) y en la ecuación de Dirac esto no es así. Bajo este contexto en el lagrangiano de Majorana identificamos al término

$$-\frac{m}{2} \bar{\psi} \psi = -\frac{m}{2} (\bar{\psi}_L \psi_L^c + \bar{\psi}_L^c \psi_L) \quad (2.81)$$

como el término de masa de Majorana.

2.3. Modelo mínimo del Majorón

² El término lagrangiano considerado a lo largo del presente trabajo es aquel asociado con el sector de Yukawa ya que este definirá los eigenestados de masa y los acoplamientos con el majorón

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^N = & - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left[y_{\alpha\beta}^\ell \bar{L}_\alpha \tilde{\phi} N_{\beta,R} + y_{\alpha\beta}^{\ell*} \bar{N}_{\beta,R} \tilde{\phi}^\dagger L_\alpha \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta} \bar{N}_{\alpha,R}^c \sigma N_{\beta,R} + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta}^* \bar{N}_{\beta,R} \sigma^\dagger N_{\alpha,R}^c \right], \end{aligned} \quad (2.82)$$

en donde $y_{\alpha\beta}^\ell$ y $\lambda_{\alpha\beta}$ son constantes de Yukawa que definen matrices 3×3 como en (118) para $y_{\alpha\beta}^\ell$, mientras que para $\lambda_{\alpha\beta}$ tenemos

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{ee} & \lambda_{e\mu} & \lambda_{e\tau} \\ \lambda_{\mu e} & \lambda_{\mu\mu} & \lambda_{\mu\tau} \\ \lambda_{\tau e} & \lambda_{\tau\mu} & \lambda_{\tau\tau} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Además, se conservan a los dobletes leptónicos y de Higgs definidos en (1.178) y (1.58) respectivamente y $\tilde{\phi}$ cumple con

$$\tilde{\phi} = i\sigma^2 \phi^* = \begin{pmatrix} 0 & -i^2 \\ i^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

por otra parte se han añadido singletes del ME siendo un campo escalar complejo σ necesario para realizar el proceso de RES del grupo global $U(1)$ y $N_{\beta,R}$ tres campos neutrinos derechos uno por cada tipo de familia.

2.3.1. Rompimiento espontáneo de simetrías

Para realizar el proceso de RES y encontrar el espectro de los campos físicos como se ha discutido a lo largo del capítulo 1 necesitamos la expresión del potencial cuyos puntos de mínimo de energía describan un estado de vacío degenerado, el potencial escalar para este modelo es

$$V(\phi, \sigma) = \mu_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \mu_\sigma^2 \sigma^\dagger \sigma - \frac{\lambda_1}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{\lambda_2}{2} (\sigma^\dagger \sigma)^2 - \delta (\phi^\dagger \phi) (\sigma^\dagger \sigma), \quad (2.85)$$

con las condiciones de estabilidad $\{\mu_\phi^2, \mu_\sigma^2, \lambda_1, \lambda_2\} < 0$ y $\lambda_1 \lambda_2 > \delta$. Obtenemos las condiciones para puntos mínimos del potencial dadas por

$$\phi_0^\dagger \phi_0 = \frac{\lambda_2 \mu_\phi^2 - \delta \mu_\sigma^2}{\lambda_1 \lambda_2 - \delta^2}, \quad (2.86)$$

²Las ideas desarrolladas a lo largo de esta sección se basaron en [9] y [35]

$$\sigma_0^* \sigma_0 = \frac{\lambda_1 \mu_\sigma^2 - \delta \mu_\phi^2}{\lambda_1 \lambda_2 - \delta^2}, \quad (2.87)$$

para realizar el proceso de RES se debe enfatizar que se rompen espontáneamente dos tipos de simetría, una local referente al grupo del MEE, y una global siendo la correspondiente al grupo $U(1)$ global que hemos mencionado se asocia con la conservación del número leptónico, elegimos en particular como el MEE el valor mínimo para el doblete como

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

donde ahora el VEV se define como

$$v = \sqrt{\frac{2(\lambda_2 \mu_\phi^2 - \delta \mu_\sigma^2)}{\lambda_1 \lambda_2 - \delta^2}}, \quad (2.89)$$

el RES sobre el doblete es el que rompe la simetría local y permite realizar el mecanismo de Higgs. En el caso de la simetría global el RES se realiza sobre el singlete σ , elegimos en particular el valor para el mínimo de este campo como

$$\sigma_0 = \frac{w}{\sqrt{2}}, \quad (2.90)$$

donde definimos a este VEV como

$$w = \sqrt{\frac{2(\lambda_1 \mu_\sigma^2 - \delta \mu_\phi^2)}{\lambda_1 \lambda_2 - \delta^2}}, \quad (2.91)$$

el hecho de que se tengan dos VEV's está asociado a que existen dos fases de ruptura de simetría; v es la escala que conocemos a la que sucede el RES para el MEE y w es la escala a la que esperamos detectar efectos de nueva física y debe ser mayor a la escala electrodébil para que tales efectos de nueva física escapen de las mediciones actuales. Para las expresiones de (2.89) y (2.91) suponemos

$$\lambda_1 \lambda_2 - \delta^2 > 0, \quad (2.92)$$

$$\lambda_2 \mu_\phi^2 - \delta \mu_\sigma^2 > 0, \quad (2.93)$$

$$\lambda_1 \mu_\sigma^2 - \delta \mu_\phi^2 > 0, \quad (2.94)$$

evocando a las expresiones para la ruptura de una simetría global redefinimos el campo σ como

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \eta(x), \quad (2.95)$$

con

$$\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(s(x) + iJ(x)), \quad (2.96)$$

y para el doblete se sigue usando las relaciones (1.70) y (1.71), aplicando estos cambios en el potencial (2.85) obtenemos

$$V(\phi, \sigma) = -\frac{1}{2}\lambda_1 v^2 h^2 - \frac{1}{2}\lambda_2 w^2 s^2 - \delta v w h s + \dots, \quad (2.97)$$

nos hemos enfocado en los términos cuadráticos sobre los campos pues son los que definen a los términos de masa; en ese sentido notamos que no tenemos términos de masa para el campo J , al ser el remanente de la ruptura de la simetría global es un bosón de Goldstone que representa a una partícula sin masa que llamaremos Majorón y es la de vital interés en el desarrollo del

presente trabajo. Con el objetivo de pasar a los eigenestados de masas escalares encontramos que los términos

$$-\frac{1}{2}\lambda_1 v^2 h^2 - \frac{1}{2}\lambda_2 w^2 s^2 - \delta v w h s = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 v^2 & \delta v w \\ \delta v w & \lambda_2 w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}, \quad (2.98)$$

bajo un proceso similar en el realizado en la sección (1.2.1) diagonalizamos a la matriz

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 v^2 & \delta v w \\ \delta v w & \lambda_2 w^2 \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

encontramos que la matriz de diagonalización es una matriz ortogonal definida como

$$F = \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\text{sen } \zeta \\ \text{sen } \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix}, \quad (2.100)$$

y se definen

$$\cos \zeta = \frac{\delta v w}{\sqrt{(\delta v w)^2 - (\beta_1 - \lambda_1 v^2)^2}}, \quad (2.101)$$

$$\text{sen } \zeta = \frac{\beta_1 - \lambda_1 v^2}{\sqrt{(\delta v w)^2 - (\beta_1 - \lambda_1 v^2)^2}}, \quad (2.102)$$

encontramos el estado de eigenvalores de masa definido por el cambio de base

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ H_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\text{sen } \zeta \\ \text{sen } \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}, \quad (2.103)$$

estos campos escalares son los remanentes de la ruptura de las simetrías; es decir en este modelo contamos con la presencia de dos bosones de Higgs, la masa para estos bosones escalares es

$$m_{S_0} = \sqrt{\beta_1}, \quad (2.104)$$

$$m_{H_0} = \sqrt{\beta_2}, \quad (2.105)$$

con

$$\beta_1 = \frac{\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2 + \sqrt{(\lambda_1 v^2 - \lambda_2 w^2)^2 + 4\delta^2 v^2 w^2}}{2}, \quad (2.106)$$

$$\beta_2 = \frac{\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2 - \sqrt{(\lambda_1 v^2 - \lambda_2 w^2)^2 + 4\delta^2 v^2 w^2}}{2}. \quad (2.107)$$

2.3.2. Generación de masas de neutrinos

A continuación, aplicamos los cambios de base encontrados en la sección anterior en el sector de Yukawa (2.82) nos enfocaremos principalmente en los términos que definen los términos de masa y los acoplamientos del Majorón

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^N &= - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left[\frac{v}{\sqrt{2}} y_{\alpha\beta}^{\ell} \overline{\nu_{\alpha,L}} N_{\beta,R} + \frac{v}{\sqrt{2}} y_{\beta\alpha}^{\ell\dagger} \overline{N_{\beta,R}} \nu_{\alpha,L} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{w}{\sqrt{2}} \lambda_{\alpha\beta} \overline{N_{\alpha,R}^c} N_{\beta,R} + \frac{1}{2} \frac{w}{\sqrt{2}} \lambda_{\beta\alpha}^{\dagger} \overline{N_{\beta,R}} N_{\alpha,R}^c \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_{\alpha\beta} J \overline{N_{\alpha,R}^c} N_{\beta,R} - \frac{1}{2} \frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_{\beta\alpha}^{\dagger} J \overline{N_{\beta,R}} N_{\alpha,R}^c \right], \end{aligned} \quad (2.108)$$

podemos pasar a una representación matricial de esta expresión usando la definición de una matriz columna para los neutrinos de quiralidad derecha

$$N_R = \begin{pmatrix} N_{e,R} \\ N_{\mu,R} \\ N_{\tau,R} \end{pmatrix} \quad N_R^c = \begin{pmatrix} N_{e,R}^c \\ N_{\mu,R}^c \\ N_{\tau,R}^c \end{pmatrix}, \quad (2.109)$$

y para los neutrinos izquierdos seguimos usando (1.187), tenemos así

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^N &= - \left[\frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\nu}_L y^\ell N_R + \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{N}_R y^{\ell\dagger} \nu_L \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{w}{\sqrt{2}} \overline{N}_R^c \lambda N_R + \frac{1}{2} \frac{w}{\sqrt{2}} \overline{N}_R \lambda^\dagger N_R^c \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{i}{\sqrt{2}} J \overline{N}_R^c \lambda N_R - \frac{1}{2} \frac{i}{\sqrt{2}} J \overline{N}_R \lambda^\dagger N_R^c \right]. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Notemos que los acoplamientos y los términos cuadráticos son proporcionales a los términos

$$\overline{\nu}_L y^\ell N_R, \quad (2.111)$$

$$\overline{N}_R y^{\ell\dagger} \nu_L, \quad (2.112)$$

$$\overline{N}_R^c \lambda N_R, \quad (2.113)$$

$$\overline{N}_R \lambda^\dagger N_R^c, \quad (2.114)$$

a fin de encontrar los eigenestados de masa implementamos dos cambios de base, el primero de ellos

$$\nu_L^0 = V_L^{\nu\dagger} \nu_L, \quad (2.115)$$

$$\nu_R^0 = V_R^{N\dagger} N_R, \quad (2.116)$$

y denotamos

$$\nu_L^0 = \begin{pmatrix} \nu_{1,L}^0 \\ \nu_{2,L}^0 \\ \nu_{3,L}^0 \end{pmatrix} \quad \nu_R^0 = \begin{pmatrix} \nu_{1,R}^0 \\ \nu_{2,R}^0 \\ \nu_{3,R}^0 \end{pmatrix}, \quad (2.117)$$

$V_L^{\nu\dagger}$ y $V_R^{N\dagger}$ son matrices unitarias, aplicando conjugación de carga en (2.116)

$$\nu_R^0 \longrightarrow \nu_R^{0c} = V_R^{N^T} N_R^c, \quad (2.118)$$

y además

$$\overline{\nu_R^{0c}} = \overline{N_R^c} V_R^{N*}. \quad (2.119)$$

Vamos a implementar, por ejemplo, en (2.113) nuestro cambio de base

$$\begin{aligned} \overline{N}_R^c \lambda N_R &= \overline{N}_R^c 1_2 \lambda 1_2 N_R \\ &= \overline{N}_R^c V_R^{N*} V_R^{N\dagger} \lambda V_R^N V_R^{N\dagger} N_R \\ &= (\overline{N}_R^c V_R^{N*}) (V_R^{N\dagger} \lambda V_R^N) (V_R^{N\dagger} N_R) \\ &= \overline{\nu_R^{0c}} \left(V_R^{N\dagger} \lambda V_R^N \right) \nu_R^0, \end{aligned} \quad (2.120)$$

con un desarrollo similar tenemos que los demás términos restantes se pueden escribir como

$$\overline{\nu_L} y^\ell N_R = \overline{\nu_L^0} \left(V_L^{\nu^\dagger} y^\ell V_R^N \right) \nu_R^0, \quad (2.121)$$

$$\overline{N_R} y^{\ell\dagger} \nu_L = \overline{\nu_R^0} \left(V_L^{\nu^\dagger} y^\ell V_R^N \right)^\dagger \nu_L^0, \quad (2.122)$$

$$\overline{N_R} \lambda N_R^c = \overline{\nu_R^0} \left(V_R^{N^T} \lambda V_R^N \right)^\dagger \nu_R^{0c}, \quad (2.123)$$

en general las matrices

$$V_L^{\nu^\dagger} y^\ell V_R^N, \quad (2.124)$$

$$V_R^{N^T} \lambda V_N^R, \quad (2.125)$$

no son diagonales, vamos a denotar a las matrices

$$m_D = \frac{v}{\sqrt{2}} V_L^{\nu^\dagger} y^\ell V_R^N, \quad (2.126)$$

$$m_M = \frac{w}{\sqrt{2}} V_R^{N^T} \lambda V_N^R, \quad (2.127)$$

finalmente, nuestra expresión (2.110) toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^N &= - \left[\overline{\nu_L^0} m_D \nu_R^0 + \overline{\nu_R^0} m_D^\dagger \nu_L^0 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \overline{\nu_R^{0c}} m_M \nu_R^0 + \frac{1}{2} \overline{\nu_R^0} m_M^\dagger \nu_R^{0c} \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \frac{1}{w} J \overline{\nu_R^{0c}} m_M \nu_R^0 - \frac{i}{2} \frac{1}{w} J \overline{\nu_R^0} m_M^\dagger \nu_R^{0c} \right]. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Para realizar los siguientes cálculos separaremos los términos cuadráticos y los acoplamientos con el majorón

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = - \left[\overline{\nu_L^0} m_D \nu_R^0 + \overline{\nu_R^0} m_D^\dagger \nu_L^0 + \frac{1}{2} \overline{\nu_R^{0c}} m_M \nu_R^0 + \frac{1}{2} \overline{\nu_R^0} m_M^\dagger \nu_R^{0c} \right], \quad (2.129)$$

$$\mathcal{L}_{J\nu\nu} = - \left[\frac{i}{2} \frac{1}{w} J \overline{\nu_R^{0c}} m_M \nu_R^0 - \frac{i}{2} \frac{1}{w} J \overline{\nu_R^0} m_M^\dagger \nu_R^{0c} \right], \quad (2.130)$$

para terminar de definir a la base de estados de masa nos enfocamos en $\mathcal{L}_{\text{mass}}$ y que es posible escribir en forma extensa como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} &= - \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left[(m_D)_{jl} \overline{\nu_{j,L}^0} \nu_{l,R}^0 + (m_D^\dagger)_{jl} \overline{\nu_{j,R}^0} \nu_{l,L}^0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (m_M)_{jl} \overline{\nu_{j,R}^{0c}} \nu_{l,R}^0 + \frac{1}{2} (m_M^\dagger)_{jl} \overline{\nu_{j,R}^0} \nu_{l,R}^{0c} \right], \end{aligned} \quad (2.131)$$

notemos que los términos pueden ser reescritos como

$$\begin{aligned} (m_D)_{jl} \overline{\nu_{j,L}^0} \nu_{l,R}^0 &= -(m_D^T)_{lj} \underbrace{\left(\overline{\nu_{l,R}^0} \nu_{j,L}^{0T} \right)}_{1 \times 1}^T \\ &= -(m_D^T)_{lj} \nu_{l,R}^0 \overline{\nu_{j,L}^{0T}} \\ &= -(m_D^T)_{lj} \nu_{l,R}^0 \overline{C C^\dagger \nu_{j,L}^{0T}} \\ &= \overline{\nu_{l,R}^{0c}} (m_D^T)_{lj} \nu_{j,L}^{0c}, \end{aligned} \quad (2.132)$$

y similarmente se tiene

$$(m_D^\dagger)_{lj} \overline{\nu_{l,R}^0} \nu_{j,L}^0 = \overline{\nu_{j,L}^{0c}} (m_D^*)_{j,l} \nu_{l,R}^{0c}, \quad (2.133)$$

realizando estos cambios sobre la expresión (2.131)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} = & - \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left[\frac{1}{2} (m_D)_{jl} \overline{\nu_{j,L}^0} \nu_{l,R}^0 + \frac{1}{2} (m_D^T)_{lj} \overline{\nu_{l,R}^{0c}} \nu_{j,L}^{0c} + \frac{1}{2} (m_M)_{jl} \overline{\nu_{j,R}^{0c}} \nu_{l,R}^0 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (m_D^\dagger)_{jl} \overline{\nu_{j,R}^0} \nu_{l,L}^0 + \frac{1}{2} (m_D^*)_{l,j} \overline{\nu_{l,L}^{0c}} \nu_{j,R}^{0c} + \frac{1}{2} (m_M^\dagger)_{jl} \overline{\nu_{j,R}^{0c}} \nu_{l,R}^0 \right], \end{aligned} \quad (2.134)$$

simplificamos un poco la notación renombrando como sigue

$$\nu_{j,L}^0 = f_{j,L}, \quad \nu_{j,L}^{0c} = f_{j,R}, \quad \nu_{j,R}^{0c} = F_{j,L}, \quad \nu_{j,R}^0 = F_{j,R}, \quad (2.135)$$

con nuestra nueva notación obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} = & - \sum_j \sum_l \left[\frac{1}{2} (m_D)_{jl} \overline{f_{j,L}} F_{l,R} - \frac{1}{2} (m_D^T)_{lj} \overline{F_{l,L}} f_{j,R} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (m_M)_{jl} \overline{F_{j,L}} F_{l,R} + \frac{1}{2} (m_D^\dagger)_{jl} \overline{F_{j,R}} f_{l,L} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (m_D^*)_{lj} \overline{f_{l,R}} F_{j,L} + \frac{1}{2} (m_M^\dagger)_{jl} \overline{F_{j,R}} F_{l,L} \right] \\ = & - \frac{1}{2} \overline{f_L} m_D F_R - \frac{1}{2} \overline{F_L} m_D^T f_R - \frac{1}{2} \overline{F_L} m_M F_R \\ & - \frac{1}{2} \overline{F_R} m_D^\dagger f_L - \frac{1}{2} \overline{f_R} m_D^* F_L - \frac{1}{2} \overline{F_R} m_M^\dagger F_L, \end{aligned} \quad (2.136)$$

donde hemos definido

$$f_L = \begin{pmatrix} f_{1,L} \\ f_{2,L} \\ f_{3,L} \end{pmatrix} \quad f_R = \begin{pmatrix} f_{1,R} \\ f_{2,R} \\ f_{3,R} \end{pmatrix} \quad F_L = \begin{pmatrix} F_{1,L} \\ F_{2,L} \\ F_{3,L} \end{pmatrix} \quad F_R = \begin{pmatrix} F_{1,R} \\ F_{2,R} \\ F_{3,R} \end{pmatrix}, \quad (2.137)$$

y finalmente en forma más compacta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} = & - \frac{1}{2} [(\overline{f_L} \cdot 0 + \overline{F_L} m_D^T) f_R + (\overline{f_L} m_D + \overline{F_L} m_M) F_R] \\ & - \frac{1}{2} [(\overline{f_R} \cdot 0 + \overline{F_R} m_D^\dagger) f_L + (\overline{f_R} m_D^* + \overline{F_R} m_M^\dagger) F_L] \\ = & - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{f_L} & \overline{F_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & m_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_R \\ F_R \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{f_R} & \overline{F_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & m_M \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} f_L \\ F_L \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.138)$$

vamos a enfocarnos especialmente en la matriz

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & m_M \end{pmatrix}, \quad (2.139)$$

esta matriz es de tamaño 6×6 , para tener más información de ella necesitamos información de las matrices que la componen, en la matriz m_M podemos probar otra propiedad importante

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \overline{\nu_{j,R}^{0c}} (m_M)_{jl} \nu_{l,R}^0 &= - \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (m_M)_{j,l} \left(\nu_{l,R}^{0T} \overline{\nu_{j,R}^{0c}} \right)^T \\
&= - \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (m_M)_{j,l} \nu_{l,R}^{0T} \overline{\nu_{j,R}^{0c}} \\
&= - \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (m_M)_{j,l} \nu_{l,R}^{0T} C C^\dagger \overline{\nu_{j,R}^{0c}} \\
&= \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (m_M^T)_{l,j} \overline{\nu_{l,R}^{0c}} \nu_{j,R}^0 \\
&= \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \overline{\nu_{l,R}^{0c}} (m_M^T)_{l,j} \nu_{j,R}^0, \\
\Rightarrow \overline{\nu_R^{0c}} (m_M) \nu_R^0 &= \overline{\nu_R^{0c}} (m_M^T) \nu_R^0 \\
\Rightarrow m_M &= m_M^T
\end{aligned} \tag{2.140}$$

con este resultado se nota que la matriz \mathcal{M} es simétrica y en general compleja, entonces puede ser diagonalizada por una matriz unitaria como

$$M = \mathcal{U}^{\nu T} \mathcal{M} \mathcal{U}^\nu \tag{2.141}$$

M es una matriz diagonal real, cuyos eigenvalores son cantidades positivas. Con estas expresiones tenemos que la expresión de los términos de masa toma la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{mass}} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{f_L} & \overline{f_R} \end{pmatrix} \mathcal{U}^{\nu*} \mathcal{U}^{\nu T} \mathcal{M} \mathcal{U}^\nu \mathcal{U}^{\nu\dagger} \begin{pmatrix} f_R \\ f_L \end{pmatrix} \\
&\quad -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{f_R} & \overline{f_L} \end{pmatrix} \mathcal{U}^\nu \mathcal{U}^{\nu\dagger} \mathcal{M}^\dagger \mathcal{U}^{\nu*} \mathcal{U}^{\nu T} \begin{pmatrix} f_L \\ f_R \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\mathcal{U}^{\nu T} \begin{pmatrix} f_L \\ f_R \end{pmatrix} \right)^\dagger \gamma^0 M \left(\mathcal{U}^{\nu\dagger} \begin{pmatrix} f_R \\ f_L \end{pmatrix} \right) \\
&\quad -\frac{1}{2} \left(\mathcal{U}^{\nu\dagger} \begin{pmatrix} f_R \\ f_L \end{pmatrix} \right)^\dagger \gamma^0 M \left(\mathcal{U}^{\nu T} \begin{pmatrix} f_L \\ f_R \end{pmatrix} \right),
\end{aligned} \tag{2.142}$$

encontramos entonces las expresiones de los cambios de base que nos permiten pasar a los eigenestados de masa

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ N_L \end{pmatrix} = \mathcal{U}^{\nu T} \begin{pmatrix} f_L \\ f_R \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_R \\ N_R \end{pmatrix} = \mathcal{U}^{\nu\dagger} \begin{pmatrix} f_R \\ f_L \end{pmatrix}, \tag{2.143}$$

y además

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{1,L} \\ \nu_{2,L} \\ \nu_{3,L} \end{pmatrix} \quad N_L = \begin{pmatrix} N_{1,L} \\ N_{2,L} \\ N_{3,L} \end{pmatrix}, \tag{2.144}$$

$$\nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{1,R} \\ \nu_{2,R} \\ \nu_{3,R} \end{pmatrix} \quad N_R = \begin{pmatrix} N_{1,R} \\ N_{2,R} \\ N_{3,R} \end{pmatrix}. \quad (2.145)$$

La matriz M puede ser escrita como una matriz de bloques matriciales 3×3

$$M = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_N \end{pmatrix}, \quad (2.146)$$

siendo m_ν y m_N diagonales escritas como

$$m_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu_1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\nu_3} \end{pmatrix}, \quad (2.147)$$

$$m_N = \begin{pmatrix} m_{N_1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{N_2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{N_3} \end{pmatrix}, \quad (2.148)$$

los valores dentro de la diagonal son los valores de las masas para los neutrinos, entonces M es la matriz de masa de neutrinos, así tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} &= -\frac{1}{2} (\overline{\nu_L} \quad \overline{N_L}) \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ N_R \end{pmatrix} \\ &\quad -\frac{1}{2} (\overline{\nu_R} \quad \overline{N_R}) \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_L \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 [m_{\nu_j} \overline{\nu_{j,L}} \nu_{j,R} + m_{N_j} \overline{N_{j,L}} N_{j,R} \\ &\quad + m_{\nu_j} \overline{\nu_{j,R}} \nu_{j,L} + m_{N_j} \overline{N_{j,R}} N_{j,L}], \end{aligned} \quad (2.149)$$

de acuerdo con (1.140) definimos a los campos sin quiralidad definida

$$\nu_j = \nu_{j,L} + \nu_{j,R}, \quad (2.150)$$

$$N_j = N_{j,L} + N_{j,R}, \quad (2.151)$$

con lo que concluimos que los términos de masa son

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \sum_{j=1}^3 \left[-\frac{1}{2} m_{\nu_j} \overline{\nu_j} \nu_j - \frac{1}{2} m_{N_j} \overline{N_j} N_j \right]. \quad (2.152)$$

Sobre los acoplamientos con el majorón, con los renombramientos descritos en (2.135) encontramos que la expresión resultante es

$$\mathcal{L}_{J\nu\nu} = -\frac{iJ}{2w} \left((\overline{f_L} \quad \overline{F_L}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_R \\ F_R \end{pmatrix} - (\overline{f_R} \quad \overline{F_R}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_M \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} f_L \\ F_L \end{pmatrix} \right), \quad (2.153)$$

usando los cambios de base para pasar a los eigenestados de masa, los acoplamientos del majorón con los neutrinos están determinados por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{J\nu\nu} &= -\frac{iJ}{2w} (\bar{\nu}_L \quad \bar{N}_L) H_M \begin{pmatrix} \nu_R \\ N_R \end{pmatrix} + \frac{iJ}{2w} (\bar{\nu}_R \quad \bar{N}_R) H_M^\dagger \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_L \end{pmatrix} \\
&= -\left(\frac{iJ}{2w} (\bar{\nu} \quad \bar{N}) H_M P_R \begin{pmatrix} \nu \\ N \end{pmatrix} - \frac{iJ}{2w} (\bar{\nu} \quad \bar{N}) H_M^\dagger P_L \begin{pmatrix} \nu \\ N \end{pmatrix} \right) \\
&= -\frac{i}{4w} J (\bar{\nu} \quad \bar{N}) \left((H_M - H_M^\dagger) \cdot 1_4 + (H_M + H_M^\dagger) \cdot \gamma^5 \right) \begin{pmatrix} \nu \\ N \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.154}$$

mientras que H_M es una matriz de tamaño 6×6 definida por

$$H_M = \mathcal{U}^{\nu T} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_M \end{pmatrix} \mathcal{U}^\nu, \tag{2.155}$$

de la relación anterior es claro que esta matriz es simétrica y en general compleja, por lo que

$$H_M^\dagger = H_M^*. \tag{2.156}$$

Una matriz compleja se puede separar en dos matrices una puramente real que contiene las partes reales de cada entrada y una puramente imaginaria que contiene a la parte imaginaria de cada entrada; en este sentido, la matriz H_M se escribe

$$H_M = \text{Re}\{H_M\} + i\text{Im}\{H_M\}, \tag{2.157}$$

consideremos el cálculo siguiente

$$H_M + H_M^* = \text{Re}\{H_M\} + i\text{Im}\{H_M\} + \text{Re}\{H_M\} - i\text{Im}\{H_M\} = 2\text{Re}\{H_M\}, \tag{2.158}$$

$$H_M - H_M^* = \text{Re}\{H_M\} + i\text{Im}\{H_M\} - \text{Re}\{H_M\} + i\text{Im}\{H_M\} = 2i\text{Im}\{H_M\}, \tag{2.159}$$

vanos a escribir a las matrices $\text{Re}\{H_M\}$ e $\text{Im}\{H_M\}$ como matrices de bloques matriciales 3×3

$$H_M = \begin{pmatrix} H_M^{11} & H_M^{12} \\ H_M^{21} & H_M^{22} \end{pmatrix}, \tag{2.160}$$

$$\text{Re}\{H_M\} = \begin{pmatrix} \text{Re}\{H_M^{11}\} & \text{Re}\{H_M^{12}\} \\ \text{Re}\{H_M^{21}\} & \text{Re}\{H_M^{22}\} \end{pmatrix} \quad \text{Im}\{H_M\} = \begin{pmatrix} \text{Im}\{H_M^{11}\} & \text{Im}\{H_M^{12}\} \\ \text{Im}\{H_M^{21}\} & \text{Im}\{H_M^{22}\} \end{pmatrix}, \tag{2.161}$$

concluimos así, que los acoplamientos del majorón con los neutrinos están descritos por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{J\nu\nu} &= -\frac{1}{2w} J [\bar{\nu} (-\text{Im}\{H_M^{11}\} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{11}\} \cdot \gamma^5) \nu \\
&\quad + \bar{N} (-\text{Im}\{H_M^{22}\} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{22}\} \cdot \gamma^5) N \\
&\quad + \bar{\nu} (-\text{Im}\{H_M^{12}\} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{12}\} \cdot \gamma^5) N \\
&\quad + \bar{N} (-\text{Im}\{H_M^{21}\} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{21}\} \cdot \gamma^5) \nu] \\
&= -\frac{1}{2w} J \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 [\bar{\nu}_j (-\text{Im}\{H_M^{11}\}_{jl} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{11}\}_{jl} \cdot \gamma^5) \nu_l \\
&\quad + \bar{N}_j (-\text{Im}\{H_M^{22}\}_{jl} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{22}\}_{jl} \cdot \gamma^5) N_l \\
&\quad + \bar{\nu}_j (-\text{Im}\{H_M^{12}\}_{jl} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{12}\}_{jl} \cdot \gamma^5) N_l \\
&\quad + \bar{N}_j (-\text{Im}\{H_M^{21}\}_{jl} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{21}\}_{jl} \cdot \gamma^5) \nu_l].
\end{aligned} \tag{2.162}$$

Acercas de los campos neutrinos es posible decir algo más de ellos, de la expresión (2.152) y con lo dicho en la sección anterior este término evoca a un término de masa de Majorana; de hecho estos campos neutrinos son campos espinores de Majorana, para ilustrarlo consideramos a (2.143) y denotamos a la matriz \mathcal{U}^ν como una matriz por bloques 3×3 desarrollando explícitamente se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{11}^T & u_{21}^T \\ u_{12}^T & u_{22}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_L \\ F_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^T f_L + u_{21}^T F_L \\ u_{12}^T f_L + u_{22}^T F_L \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \quad \nu_L &= u_{11}^T f_L + u_{21}^T F_L, \\ N_L &= u_{12}^T f_L + u_{22}^T F_L, \end{aligned} \tag{2.163}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_R \\ N_R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{11}^\dagger & u_{21}^\dagger \\ u_{12}^\dagger & u_{22}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_R \\ F_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^\dagger f_R + u_{21}^\dagger F_R \\ u_{12}^\dagger f_R + u_{22}^\dagger F_R \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \quad \nu_R &= u_{11}^\dagger f_R + u_{21}^\dagger F_R, \\ N_R &= u_{12}^\dagger f_R + u_{22}^\dagger F_R, \end{aligned} \tag{2.164}$$

Tomemos la l –ésima componente de (2.163) y (2.164)

$$\nu_{l,L} = \sum_{j=1}^3 \left((u_{11}^T)_{lj} f_{j,L} + (u_{21}^T)_{lj} F_{j,L} \right), \tag{2.165}$$

$$\nu_{l,R} = \sum_{j=1}^3 \left((u_{11}^\dagger)_{lj} f_{j,R} + (u_{21}^\dagger)_{lj} F_{j,R} \right), \tag{2.166}$$

apliquemos conjugación de carga sobre el espinor de quiralidad izquierda y en adición con los renombramientos (2.133) tenemos

$$\begin{aligned}
\nu_{l,L} &\longrightarrow \nu_{l,L}^{0c} = C\overline{\nu_{l,L}}^T \\
&= C\left(\nu_{l,L}^\dagger\gamma^0\right)^T \\
&= C\left[\sum_{j=1}^3\left((u_{11}^T)_{lj}f_{j,L}+(u_{21}^T)_{lj}F_{j,L}\right)^\dagger\gamma^0\right]^T \\
&= C\left[\sum_{j=1}^3\left((u_{11}^T)^*_{lj}f_{j,L}^\dagger+(u_{21}^T)^*_{lj}F_{j,L}^\dagger\right)\gamma^0\right]^T \\
&= C\sum_{j=1}^3\left((u_{11}^T)^*_{lj}f_{j,L}^\dagger\gamma^0+(u_{21}^T)^*_{lj}F_{j,L}^\dagger\gamma^0\right)^T \\
&= C\sum_{j=1}^3\left((u_{11}^T)^*_{lj}\overline{f_{j,L}}^T+(u_{21}^T)^*_{lj}\overline{F_{j,L}}^T\right) \\
&= C\sum_{j=1}^3\left((u_{11}^\dagger)_{lj}\overline{\nu_{j,L}^0}^T+(u_{21}^\dagger)_{lj}\overline{\nu_{j,R}^{0c}}^T\right) \\
&= \sum_{j=1}^3\left((u_{11}^\dagger)_{lj}C\overline{\nu_{j,L}^0}^T+(u_{21}^\dagger)_{lj}C\overline{\nu_{j,R}^{0c}}^T\right) \\
&= \sum_{j=1}^3\left((u_{11}^\dagger)_{lj}\nu_{j,L}^{0c}+(u_{21}^\dagger)_{lj}(\nu_{j,R}^{0c})^c\right) \\
&= \sum_{j=1}^3\left((u_{11}^\dagger)_{lj}f_{j,R}+(u_{21}^\dagger)_{lj}\nu_{j,R}^0\right) \\
&= \sum_{j=1}^3\left((u_{11}^\dagger)_{lj}f_{j,R}+(u_{21}^\dagger)_{lj}F_{j,R}\right) \\
&= \nu_{l,R},
\end{aligned} \tag{2.167}$$

evidentemente cumple la condición de Majorana (2.61) con $\xi = 1$, siguiendo el cálculo se puede probar que el estado quiral derecho

$$\nu_{l,R}^c = \nu_{l,L}, \tag{2.168}$$

y aún más en general

$$N_l^c = N_l, \tag{2.169}$$

$$\nu_l^c = \nu_l, \tag{2.170}$$

por lo tanto, los 6 campos neutrinos son sus propias antipartículas, estos campos son los neutrinos de masa y su índice corre sobre los valores $l = 1, 2, 3$ y contamos con dos tipos caracterizados

por las letras ν y N , la distinción entre estos tipos son las escalas para el tamaño de sus masas, profundizaremos más al respecto en el desarrollo de la sección siguiente.

2.3.3. Espectro de masas de los neutrinos

En general, una matriz unitaria 2×2 se puede parametrizar como

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta)e^{i\omega_1} & \text{sen}(\theta)e^{i(\omega_2+\eta)} \\ -\text{sen}(\theta)e^{i(\omega_1-\eta)} & \cos(\theta)e^{i\omega_2} \end{pmatrix} \quad (2.171)$$

considerando valores para ángulos pequeños, a primer orden de la serie de Taylor el valor de $\text{sen } \theta$ y $\cos \theta$ corresponde a

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots \approx 1, \quad (2.172)$$

$$\text{sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \approx \theta, \quad (2.173)$$

con esto en mente y tomando los valores $\omega_1 = \omega_2 = 0$, podemos obtener una aproximación a primer orden para una matriz unitaria 2×2 dada por

$$U \approx \begin{pmatrix} 1 & \theta e^{i\eta} \\ -\theta e^{-i\eta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.174)$$

Notemos que nuestra aproximación es consistente con la condición de unitariedad a primer orden

$$\begin{aligned} U^\dagger U &\approx \begin{pmatrix} 1 & \theta e^{i\eta} \\ -\theta e^{-i\eta} & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & \theta e^{i\eta} \\ \theta e^{-i\eta} & 1 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.175)$$

a la parametrización usada en (2.174) la reescribimos como

$$U \approx \begin{pmatrix} 1 & (\theta e^{-i\eta})^* \\ -(\theta e^{-i\eta}) & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.176)$$

considerando como referencia el resultado anterior proponemos que la matriz unitaria que define nuestro cambio de base (2.143) sea

$$\mathcal{U}^\nu \approx \begin{pmatrix} 1_3 & \Omega^\dagger \\ -\Omega & 1_3 \end{pmatrix}, \quad (2.177)$$

donde Ω es una matriz de tamaño 3×3 , con el fin de que se cumpla nuestra condición de unitariedad suponemos que sus entradas son muy pequeñas, así a primer orden

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\nu\dagger} \mathcal{U}^\nu &\approx \begin{pmatrix} 1_3 & \Omega^\dagger \\ -\Omega & 1_3 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1_3 & \Omega^\dagger \\ -\Omega & 1_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_3 & -\Omega^\dagger \\ \Omega & 1_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_3 & \Omega^\dagger \\ -\Omega & 1_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_3 + \Omega^\dagger \Omega & \Omega^\dagger - \Omega^\dagger \\ \Omega - \Omega & \Omega \Omega^\dagger + 1_3 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1_3 & 0 \\ 0 & 1_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.178)$$

el requerimiento necesario es que a primer orden el producto de las matrices Ω y Ω^\dagger pueda despreciarse, esto es

$$\Omega^\dagger \Omega = \Omega \Omega^\dagger \approx 0. \quad (2.179)$$

Ahora calculamos a la matriz de masa definida en (2.141) con la expresión propuesta para nuestra matriz \mathcal{U}^ν , tenemos

$$M = \mathcal{U}^{\nu T} \mathcal{M} \mathcal{U}^\nu \approx \begin{pmatrix} \Omega^T m_M \Omega - m_D \Omega - \Omega^T m_D^T & (m_D^T - m_M \Omega - \Omega^* m_D \Omega)^T \\ m_D^T - m_M \Omega - \Omega^* m_D \Omega & m_M + \Omega^* m_D + m_D^T \Omega \end{pmatrix}, \quad (2.180)$$

además, esta matriz fue escrita como una matriz de bloques 3×3 descrita por (2.146- 2.148), entonces

$$\begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_N \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \Omega^T m_M \Omega - m_D \Omega - \Omega^T m_D^T & (m_D^T - m_M \Omega - \Omega^* m_D \Omega)^T \\ m_D^T - m_M \Omega - \Omega^* m_D \Omega & m_M + \Omega^* m_D + m_D^T \Omega \end{pmatrix}, \quad (2.181)$$

con este resultado se obtienen las ecuaciones

$$m_\nu \approx \Omega^T m_M \Omega - m_D \Omega - \Omega^T m_D^T, \quad (2.182)$$

$$m_N \approx m_M + \Omega^* m_D + m_D^T, \quad (2.183)$$

$$0 \approx m_D^T - m_M \Omega - \Omega^* m_D \Omega, \quad (2.184)$$

de las definiciones para las matrices m_D y m_M dadas en (2.126) y (2.127)

$$m_D \propto v, \quad (2.185)$$

$$m_M \propto w, \quad (2.186)$$

es decir, m_D está asociada con la escala de energía electrodébil y m_M con la escala de altas energías en este sentido de los productos

$$\Omega^* m_D \Omega, \quad \Omega^T m_M \Omega,$$

es posible despreciar el primero ya que entre más alto sea la escala w el segundo término se vuelve más significativo; por lo tanto, de la ecuación (2.184) concluimos

$$0 \approx m_D^T - m_M \Omega \quad (2.187)$$

$$\Rightarrow \Omega \approx m_M^{-1} m_D^T,$$

donde hemos supuesto que la matriz m_M es invertible, entonces para la matriz de masa de los neutrinos ν se tiene la aproximación

$$m_\nu \approx -m_D m_M^{-1} m_D^T, \quad (2.188)$$

mientras que para los neutrinos N

$$m_N \approx m_M + m_M^{-1*} m_D^\dagger m_D + (m_M^{-1*} m_D^\dagger m_D)^T. \quad (2.189)$$

Reescribimos las expresiones para m_D y m_M con el fin de simplificar la notación

$$m_D = \frac{v}{\sqrt{2}} M_D, \quad (2.190)$$

$$m_M = \frac{w}{\sqrt{2}} M_M, \quad (2.191)$$

y suponemos que M_M es invertible, usando nuestra aproximación y las relaciones para nuestras matrices m_D y m_M

$$m_\nu \approx \frac{v^2}{\sqrt{2}w} \underbrace{(-M_D M_M^{-1} M_D^T)}_{M_\nu} = \frac{v^2}{\sqrt{2}w} M_\nu, \quad (2.192)$$

$$m_N \approx \frac{w}{\sqrt{2}} M_M + \frac{v^2}{\sqrt{2}w} \underbrace{\left(M_M^{-1*} M_D^\dagger M_D + \left(M_M^{-1*} M_D^\dagger M_D \right)^T \right)}_{M_s} = \frac{w}{\sqrt{2}} M_M + \frac{v^2}{\sqrt{2}w} M_s, \quad (2.193)$$

las matrices m_ν y m_N son diagonales y los valores en la diagonal son las masas para nuestros neutrinos, nos centramos en la masa l –ésima

$$m_{\nu_l} \approx \frac{v^2}{\sqrt{2}w} (M_\nu)_{ll}, \quad (2.194)$$

$$m_{N_l} \approx \frac{w}{\sqrt{2}} (M_M)_{ll} + \frac{v^2}{\sqrt{2}w} (M_s)_{ll}, \quad (2.195)$$

de acuerdo a la relación (2.194) la masa de los neutrinos ν esta suprimida por un factor w referente a la escala de alta energía, en tal caso entre más grande sea esta escala los neutrinos ν son cada vez más ligeros, con los neutrinos N notemos que el término w es el dominante; entre más grande sea la escala de alta energía los neutrinos N son cada vez más pesados. En adelante trabajaremos en un contexto en el que $w \gg v$, así las masas

$$m_{\nu_l} \propto \frac{v}{w}, \quad (2.196)$$

$$m_{N_l} \propto w, \quad (2.197)$$

dicho de otro modo, entre más pesados sean los neutrinos N , los neutrinos ν son más ligeros, a esto lo conocemos como mecanismo de *see-saw*, a los neutrinos ν los llamaremos neutrinos ligeros y a los neutrinos N los llamaremos neutrinos pesados. Considerar el caso en el que la escala de alta energía es mucho más grande que la escala electrodébil nos da más información de la matriz m_M , de la ecuación (2.193) y tomando en cuenta lo mencionado anteriormente se tiene

$$m_N \approx \frac{w}{\sqrt{2}} M_M = m_M, \quad (2.198)$$

por lo que la matriz m_M es posible considerarla como diagonal y real además los elementos de la diagonal son mayores a cero.

Por último, con lo dicho anteriormente nos permite encontrar una aproximación para la matriz H_M , usando su expresión de matriz de bloques

$$H_M = \begin{pmatrix} H_M^{11} & H_M^{12} \\ H_M^{21} & H_M^{22} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -m_\nu & -m_D \\ -m_D^T & m_M \end{pmatrix}. \quad (2.199)$$

Tenemos así

$$H_M^{11} = -m_\nu, \quad (2.200)$$

$$H_M^{12} = -m_D, \quad (2.201)$$

$$H_M^{21} = -m_D^T, \quad (2.202)$$

$$H_M^{22} = m_M, \quad (2.203)$$

2.3.4. Corrientes cargadas con neutrinos masivos

Experimentalmente se han detectado corrientes cargadas bien definidas en el contexto del MEE, por lo que para el modelo considerado esperamos debe contener un término para las corrientes cargadas como las del MEE, los términos de las corrientes cargadas en el espacio de sabor del MEE lucen de (1.219) en forma matricial como

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} \ell_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^-_{\mu} \bar{\ell}_L \gamma^{\mu} \nu_L, \quad (2.204)$$

para pasar a los estados de masa después de aplicado el rompimiento de simetría en el sector de Yukawa del MEE se definieron en (1.193) los cambios de base correspondientes para los leptones de sabor $\ell_{\alpha,L}$, en el caso de los neutrinos para pasar a los campos de masa se definieron en el modelo que estamos trabajando dos cambios de base sobre los neutrinos de sabor $\nu_{\alpha,L}$ en el orden siguiente

$$\underbrace{\nu_{\alpha,L}}_{\text{Neutrinos de sabor}} \longrightarrow \nu^0_{j,L} = f_{j,R} \longrightarrow \underbrace{\nu_{j,L}, N_{j,L}}_{\text{Neutrinos de masa}},$$

las transformaciones correspondientes son las descritas en (2.115) y (2.143), vamos a implementar nuestros cambios de base en (2.204) comenzamos con el cambio (1.193) y realizando un cálculo similar al mostrado en (1.224) obtenemos

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} V_L^{\ell} \ell'_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^-_{\mu} \bar{\ell}'_L \gamma^{\mu} V_L^{\ell \dagger} \nu_L, \quad (2.205)$$

ahora apliquemos el cambio definido en (2.115), mostramos para primer el sumando de (2.196) solamente, para el segundo sumando es análogo

$$\begin{aligned} \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} V_L^{\ell} \ell'_L &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} 1_3 V_L^{\ell} \ell'_L \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} V_L^{\nu} V_L^{\nu \dagger} V_L^{\ell} \ell'_L \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \nu_L^{\dagger} \gamma^0 V_L^{\nu} \gamma^{\mu} V_L^{\nu \dagger} V_L^{\ell} \ell'_L \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \left(\nu_L^{\dagger} V_L^{\nu} \right) \gamma^0 \gamma^{\mu} V_L^{\nu \dagger} V_L^{\ell} \ell'_L \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \left(V_L^{\nu \dagger} \nu_L \right)^{\dagger} \gamma^0 \gamma^{\mu} \left(V_L^{\ell \dagger} V_L^{\nu} \right)^{\dagger} \ell'_L \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \nu_L^{0 \dagger} \gamma^0 \gamma^{\mu} \left(V_L^{\ell \dagger} V_L^{\nu} \right)^{\dagger} \ell'_L \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}_L^0 \gamma^{\mu} \left(V_L^{\ell \dagger} V_L^{\nu} \right)^{\dagger} \ell'_L, \end{aligned} \quad (2.206)$$

Así nuestro lagrangiano en (2.205) luce como

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}_L^0 \gamma^{\mu} \left(V_L^{\ell \dagger} V_L^{\nu} \right)^{\dagger} \ell'_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^-_{\mu} \bar{\ell}'_L \gamma^{\mu} \left(V_L^{\ell \dagger} V_L^{\nu} \right) \nu_L^0, \quad (2.207)$$

definimos a la matriz 3×3

$$\mathcal{U}_{\text{PMNS}} = V_L^{\ell \dagger} V_L^{\nu}, \quad (2.208)$$

que es la matriz de mezcla para los leptones y es llamada como la matriz de Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata o simplemente matriz PMNS[38]. La estructura general de esta matriz es

$$\mathcal{U}_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{e1} & (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{e2} & (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{e3} \\ (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\mu1} & (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\mu2} & (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\mu3} \\ (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\tau1} & (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\tau2} & (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\tau3} \end{pmatrix}, \quad (2.209)$$

con lo anterior dicho, el término de corrientes cargadas se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cc} &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \bar{\nu}_L^0 \gamma^{\mu} \mathcal{U}^{\dagger}_{\text{PMNS}} \ell'_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^-_{\mu} \bar{\ell}'_L \gamma^{\mu} \mathcal{U}_{\text{PMNS}} \nu_L^0 \\ &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_{\mu} \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{l,L}^0 \gamma^{\mu} (\mathcal{U}^{\dagger}_{\text{PMNS}})_{\alpha l} \ell'_{\alpha,L} \\ &\quad + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^-_{\mu} \sum_{l=1}^3 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}'_{\alpha,L} \gamma^{\mu} (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\alpha l} \nu_{l,L}^0. \end{aligned} \quad (2.210)$$

Del cambio definido en (2.143) podemos encontrar la transformación inversa dada por

$$\begin{pmatrix} f_L \\ F_L \end{pmatrix} = \mathcal{U}^{\nu*} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_L \end{pmatrix}, \quad (2.211)$$

y como se realizó para las expresiones (2.163 - 2.166) la componente j -ésima de f_L es igual a

$$f_{j,L} = \sum_{j=1}^3 ((u_{11}^*)_{lj} \nu_{j,L} + (u_{12}^*)_{lj} N_{j,L}) \equiv \nu_{j,L}^0, \quad (2.212)$$

con esta expresión podemos expresar al sector de las corrientes cargadas en el espacio de eigenestados de masa como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{cc} &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_\mu \sum_l \sum_\alpha \left[\sum_j ((u_{11}^*)_{lj} \nu_{j,L} + (u_{12}^*)_{lj} N_{j,L}) \right]^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (\mathcal{U}^\dagger_{\text{PMNS}})_{\alpha l} \ell'_{\alpha,L} \\
&+ \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \sum_l \sum_\alpha \overline{\ell'_{\alpha,L}} \gamma^\mu (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\alpha l} \left[\sum_j ((u_{11}^*)_{lj} \nu_{j,L} + (u_{12}^*)_{lj} N_{j,L}) \right] \\
&= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_\mu \sum_\alpha \sum_l \sum_j [(\mathcal{U}^\dagger_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{11})_{lj} \overline{\nu_{j,L}} \gamma^\mu \ell'_{\alpha,L} \\
&+ (\mathcal{U}^\dagger_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{12})_{lj} \overline{N_{j,L}} \gamma^\mu \ell'_{\alpha,L}] \\
&+ \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \sum_\alpha \sum_l \sum_j [(\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\alpha l} \overline{\ell'_{\alpha,L}} \gamma^\mu (u_{11}^*)_{lj} \nu_{j,L} \\
&+ (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\alpha l} \overline{\ell'_{\alpha,L}} \gamma^\mu (u_{12}^*)_{lj} N_{j,L}] \\
&= \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^-_\mu \sum_\alpha \sum_j \left[\overline{\ell'_{\alpha,L}} \gamma^\mu \nu_{j,L} \sum_l (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{11}^*)_{lj} \right. \\
&+ \left. \overline{\ell'_{\alpha,L}} \gamma^\mu N_{j,L} \sum_l (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{12}^*)_{lj} \right] \\
&+ \frac{g_2}{\sqrt{2}} W^+_\mu \sum_\alpha \sum_j \left[\overline{\nu_{j,L}} \gamma^\mu \ell'_{\alpha,L} \sum_l (\mathcal{U}^\dagger_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{11})_{lj} \right. \\
&+ \left. \overline{N_{j,L}} \gamma^\mu \ell'_{\alpha,L} \sum_l (\mathcal{U}^\dagger_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{12})_{lj} \right].
\end{aligned} \tag{2.213}$$

A continuación definimos

$$\mathcal{B}_{\alpha\nu_j} = \sum_{l=1}^3 (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{11}^*)_{lj} \tag{2.214}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}^*_{\alpha\nu_j} = \sum_{l=1}^3 (\mathcal{U}^\dagger_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{11})_{lj} \tag{2.215}$$

$$\mathcal{B}_{\alpha N_j} = \sum_{l=1}^3 (\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{12}^*)_{lj} \tag{2.216}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}^*_{\alpha N_j} = \sum_{l=1}^3 (\mathcal{U}^\dagger_{\text{PMNS}})_{\alpha l} (u_{12})_{lj} \tag{2.217}$$

con lo que finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{cc} = & \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{g_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha\nu_j} W^{-}_{\mu} \overline{\ell_{\alpha,L}} \gamma^{\mu} \nu_{j,L} \right. \\
 & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha\nu_j}^* W^{+}_{\mu} \overline{\nu_{j,L}} \gamma^{\mu} \ell_{\alpha,L} \\
 & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha N_j} W^{-}_{\mu} \overline{\ell_{\alpha,L}} \gamma^{\mu} N_{j,L} \\
 & \left. + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha N_j}^* W^{+}_{\mu} \overline{N_{j,L}} \gamma^{\mu} \ell_{\alpha,L} \right],
 \end{aligned} \tag{2.218}$$

omitiremos la prima sin olvidar que estamos en los eigenestados de masa. Los elementos $\mathcal{B}_{\alpha\nu_i}$, $\mathcal{B}_{\alpha N_j}$ definen matrices 3×3 cuya estructura general es

$$\mathcal{B}_{\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{e\nu_1} & \mathcal{B}_{e\nu_2} & \mathcal{B}_{e\nu_3} \\ \mathcal{B}_{\mu\nu_1} & \mathcal{B}_{\mu\nu_2} & \mathcal{B}_{\mu\nu_3} \\ \mathcal{B}_{\tau\nu_1} & \mathcal{B}_{\tau\nu_2} & \mathcal{B}_{\tau\nu_3} \end{pmatrix} \tag{2.219}$$

$$\mathcal{B}_N = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{eN_1} & \mathcal{B}_{eN_2} & \mathcal{B}_{eN_3} \\ \mathcal{B}_{\mu N_1} & \mathcal{B}_{\mu N_2} & \mathcal{B}_{\mu N_3} \\ \mathcal{B}_{\tau N_1} & \mathcal{B}_{\tau N_2} & \mathcal{B}_{\tau N_3} \end{pmatrix} \tag{2.220}$$

teniendo claro que los neutrinos ν son de masas ligeras y N de masas grandes podemos simplificar nuestra notación renombrando

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_1 &= \nu_1 & \mathcal{V}_4 &= N_1 \\
 \mathcal{V}_2 &= \nu_2 & \mathcal{V}_5 &= N_2 \\
 \mathcal{V}_3 &= \nu_3 & \mathcal{V}_6 &= N_3
 \end{aligned} \tag{2.221}$$

bajo estos cambios la expresión (2.218) se reduce a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{cc} &= \sum_{\alpha} \left[\frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\alpha\nu_j} W^{-}_{\mu} \overline{\ell_{\alpha,L}} \gamma^{\mu} \nu_{j,L} \right. \\
&\quad + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\alpha N_j} W^{-}_{\mu} \overline{\ell_{\alpha,L}} \gamma^{\mu} N_{j,L} \\
&\quad + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\alpha\nu_j}^* W^{+}_{\mu} \overline{\nu_{j,L}} \gamma^{\mu} \ell_{\alpha,L} \\
&\quad \left. + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\alpha N_j}^* W^{+}_{\mu} \overline{N_{j,L}} \gamma^{\mu} \ell_{\alpha,L} \right] \\
&= \sum_{\alpha} \left[\frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\alpha_j} W^{-}_{\mu} \overline{\ell_{\alpha,L}} \gamma^{\mu} \mathcal{V}_{j,L} \right. \\
&\quad + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=4}^6 \mathcal{B}_{\alpha_j} W^{-}_{\mu} \overline{\ell_{\alpha,L}} \gamma^{\mu} \mathcal{V}_{j,L} \\
&\quad + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\alpha_j}^* W^{+}_{\mu} \overline{\mathcal{V}_{j,L}} \gamma^{\mu} \ell_{\alpha,L} \\
&\quad \left. + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=4}^6 \mathcal{B}_{\alpha_j}^* W^{+}_{\mu} \overline{\mathcal{V}_{j,L}} \gamma^{\mu} \ell_{\alpha,L} \right] \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^6 \left[\frac{g_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha_j} W^{-}_{\mu} \overline{\ell_{\alpha,L}} \gamma^{\mu} \mathcal{V}_{j,L} \right. \\
&\quad \left. + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha_j}^* W^{+}_{\mu} \overline{\mathcal{V}_{j,L}} \gamma^{\mu} \ell_{\alpha,L} \right],
\end{aligned} \tag{2.222}$$

a lo largo de los cálculos usaremos sistemáticamente dos notaciones atendiendo a motivos de simplicidad y practicidad de las operaciones. En el caso en que distingamos de neutrinos ligeros y pesados los representaremos como lo hemos estado haciendo con las letras ν y N respectivamente y además se usarán los subíndices $\{\nu_i, N_i\}$, donde $\{i = 1, 2, 3\}$; por otra parte, cuando hablemos de nuestros neutrinos en general; sin distinguirlos por su espectro de masas, los representaremos como \mathcal{V} y se usarán subíndices $\{i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, un ejemplo lo ilustramos a continuación con los elementos

$$\text{Distinción por espectro de masas } \begin{cases} \mathcal{B}_{\alpha\nu_i} \\ \mathcal{B}_{\alpha N_i} \end{cases} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Sin distinción} \\ \text{entre ellos} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{matrix}$$

con la nueva notación notemos que podemos escribir una matriz \mathcal{B} de tamaño 3×6 que a su vez es una matriz de bloques 3×3 , donde los bloques son las matrices \mathcal{B}_{ν} , \mathcal{B}_N

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\nu} \quad \mathcal{B}_N), \tag{2.223}$$

mediante la aproximación a primer orden de la matriz \mathcal{U}^ν , las matrices anteriores son aproximadamente

$$\mathcal{B}_\nu \approx \mathcal{U}_{\text{PMNS}}, \quad (2.224)$$

$$\mathcal{B}_N \approx \mathcal{U}_{\text{PMNS}} \frac{v}{w} M_D M_M^{-1}, \quad (2.225)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} \approx \left(\mathcal{U}_{\text{PMNS}} \quad \mathcal{U}_{\text{PMNS}} \frac{v}{w} M_D M_M^{-1} \right). \quad (2.226)$$

Capítulo 3

Cálculo de la producción de Majorones

Revisamos el proceso de producción de Majorones a través del decaimiento $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta J$; puesto que el majorón solo se acopla con los campos neutrinos a nivel de árbol, los acoplamientos del majorón con los leptones cargados sólo sucede a nivel de lazos, las contribuciones totales a un lazo para ese decaimiento se pueden representar en forma diagramática como sigue:

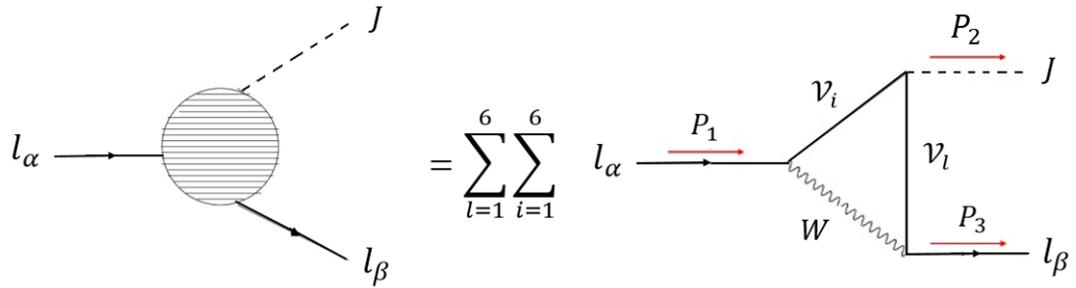


Figura 3.1: Contribuciones totales a un lazo del decaimiento $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta J$

3.1. Cálculo analítico

En el diagrama de Feynman anterior en estructura solo cambia en los tipos de neutrino, con esto podemos representar en forma general a la amplitud como

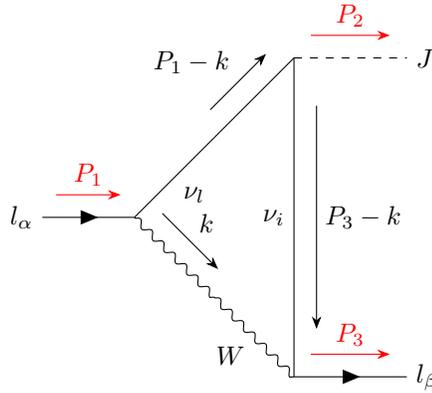
$$M_{\alpha\beta} = \sum_{l=1}^6 \sum_{i=1}^6 (M_{\alpha\beta})_{li}, \quad (3.1)$$

los índices l, i nos indican el número de neutrino en el lazo, los acoplamientos del majorón con los neutrinos, mostrados en (2.162), se observa que se encuentran divididos en los acoplamientos con los neutrinos ligeros y los acoplamientos con los neutrinos pesados, por esta razón a la ecuación

(3.1) debemos dividirla en dichos tipos

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta} &= \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^3 (M_{\alpha\beta})_{li} + \sum_{l=4}^6 \sum_{i=1}^3 (M_{\alpha\beta})_{li} + \sum_{l=1}^3 \sum_{i=4}^6 (M_{\alpha\beta})_{li} + \sum_{l=4}^6 \sum_{i=4}^6 (M_{\alpha\beta})_{li} \\
 &= \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left[(M_{\alpha\beta})_{\nu_l\nu_i} + (M_{\alpha\beta})_{N_l\nu_i} + (M_{\alpha\beta})_{\nu_l N_i} + (M_{\alpha\beta})_{N_l N_i} \right],
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

con el fin de calcular la amplitud total debemos obtener cada una de las amplitudes $(M_{\alpha\beta})_{\nu_l\nu_i}$, $(M_{\alpha\beta})_{N_l\nu_i}$, $(M_{\alpha\beta})_{\nu_l N_i}$, $(M_{\alpha\beta})_{N_l N_i}$, el diagrama de Feynman para $(M_{\alpha\beta})_{\nu_l\nu_i}$ es entonces



trabajando en la norma unitaria, la expresión analítica para este diagrama es¹

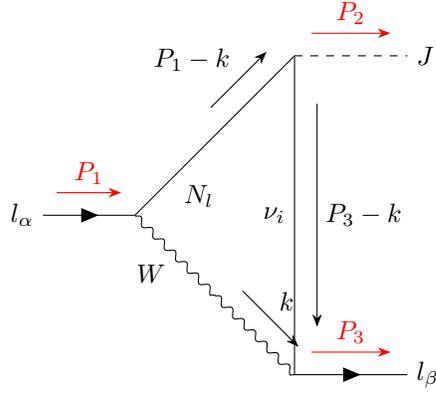
$$\begin{aligned}
 (M_{\alpha\beta})_{\nu_l\nu_i} &= -\frac{g_2^2}{2w} \mathcal{B}_{\beta\nu_i} \mathcal{B}_{\alpha\nu_j}^* \bar{\mathcal{U}}_{\beta}(P_3) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\gamma_{\nu} P_L \frac{\not{P}_3 - \not{k} + m_{\nu_i} \cdot 1_4}{(P_3 - k)^2 - m_{\nu_i}^2} \right. \\
 &\quad \times (-\text{Im}\{H_M^{11}\}_{lj} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{11}\}_{lj} \cdot \gamma_5) \frac{\not{P}_1 - \not{k} + m_{\nu_j} \cdot 1_4}{(P_1 - k)^2 - m_{\nu_j}^2} \\
 &\quad \left. \times \gamma_{\mu} P_L \frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{m_W^2} \right) \right] \mathcal{U}_{\alpha}(P_1),
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

es importante mencionar que nos conviene considerar una representación donde $\gamma_5 = \gamma_5^T$; sin embargo, conociendo una representación siempre podemos encontrar otra representación mediante una transformación de similaridad[39]

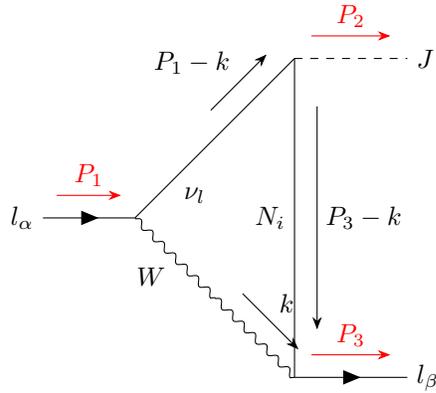
$$\gamma'^{\mu} = U \gamma^{\mu} U^{\dagger}, \tag{3.4}$$

con U una matriz unitaria; en caso de tener una representación que no sea simétrica mediante una matriz unitaria adecuada se puede encontrar una representación que sí lo sea. A continuación solo mostraremos el diagrama correspondiente y su expresión analítica.

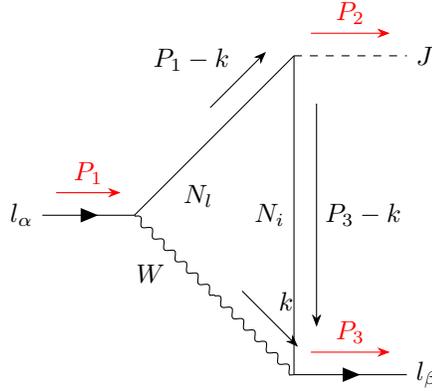
¹Las reglas de Feynman correspondientes se muestran en el apéndice A



$$\begin{aligned}
 (M_{\alpha\beta})_{N_l\nu_i} &= -\frac{g_2^2}{2w} \mathcal{B}_{\beta N_l} \mathcal{B}_{\alpha\nu_i}^* \bar{\mathcal{U}}_{\beta}(P_3) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\gamma_{\nu} P_L \frac{\not{P}_3 - \not{k} + m_{N_l} \cdot 1_4}{(P_3 - k)^2 - m_{N_l}^2} \right. \\
 &\times (-\text{Im}\{H_M^{21}\}_{lj} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{21}\}_{lj} \cdot \gamma_5) \frac{\not{P}_1 - \not{k} + m_{\nu_j} \cdot 1_4}{(P_1 - k)^2 - m_{\nu_j}^2} \\
 &\left. \times \gamma_{\mu} P_L \frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{m_W^2} \right) \right] \mathcal{U}_{\alpha}(P_1),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$



$$\begin{aligned}
 (M_{\alpha\beta})_{\nu_i N_i} &= -\frac{g_2^2}{2w} \mathcal{B}_{\beta\nu_i} \mathcal{B}_{\alpha N_i}^* \bar{\mathcal{U}}_{\beta}(P_3) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\gamma_{\nu} P_L \frac{\not{P}_3 - \not{k} + m_{\nu_i} \cdot 1_4}{(P_3 - k)^2 - m_{\nu_i}^2} \right. \\
 &\times (-\text{Im}\{H_M^{12}\}_{lj} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{12}\}_{lj} \cdot \gamma_5) \frac{\not{P}_1 - \not{k} + m_{N_j} \cdot 1_4}{(P_1 - k)^2 - m_{N_j}^2} \\
 &\left. \times \gamma_{\mu} P_L \frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{m_W^2} \right) \right] \mathcal{U}_{\alpha}(P_1),
 \end{aligned} \tag{3.6}$$



$$\begin{aligned}
 (M_{\alpha\beta})_{N_l N_i} &= -\frac{g_2^2}{2w} \mathcal{B}_{\beta N_l} \mathcal{B}_{\alpha N_j}^* \bar{\mathcal{U}}_{\beta}(P_3) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\gamma_{\nu} P_L \frac{\not{P}_3 - \not{k} + m_{N_l} \cdot 1_4}{(P_3 - k)^2 - m_{N_l}^2} \right. \\
 &\quad \times \left(-\text{Im}\{H_M^{22}\}_{lj} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{22}\}_{lj} \cdot \gamma_5 \right) \frac{\not{P}_1 - \not{k} + m_{N_j} \cdot 1_4}{(P_1 - k)^2 - m_{N_j}^2} \\
 &\quad \left. \times \gamma_{\mu} P_L \frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{m_W^2} \right) \right] \mathcal{U}_{\alpha}(P_1).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por lo tanto, la expresión analítica para la amplitud completa es

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta} &= -\frac{g_2^2}{2w} \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}_{\alpha j}^* \bar{\mathcal{U}}_{\beta}(P_3) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\gamma_{\nu} P_L \frac{\not{P}_3 - \not{k} + m_l \cdot 1_4}{(P_3 - k)^2 - m_l^2} \right. \\
 &\quad \times \left(-\text{Im}\{H_M\}_{lj} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M\}_{lj} \cdot \gamma_5 \right) \frac{\not{P}_1 - \not{k} + m_j \cdot 1_4}{(P_1 - k)^2 - m_j^2} \\
 &\quad \left. \times \gamma_{\mu} P_L \frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{m_W^2} \right) \right] \mathcal{U}_{\alpha}(P_1),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

la resolución de la integral sobre el 4-momento k se realiza con la ayuda de las paqueterías de FeynCalc[40-42] y de Package-X[43] en el software de Wolfram Mathematica, la forma general de la amplitud es la siguiente

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta} &= T \left[A_{\alpha\beta}(m_j, m_l) \bar{\mathcal{U}}_{\beta}(P_3) (\gamma_5 + 1_4) \mathcal{U}_{\alpha}(P_1) \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{A}_{\alpha\beta}(m_j, m_l) \bar{\mathcal{U}}_{\beta}(P_3) (\gamma_5 - 1_4) \mathcal{U}_{\alpha}(P_1) \right],
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde T es una constante, los coeficientes $A_{\alpha\beta}(m_i, m_l)$ y $\tilde{A}_{\alpha\beta}(m_i, m_l)$ se calcularon usando el método de regularización dimensional, ya que es necesario para tratar adecuadamente posibles divergencias ultravioletas que podrían ocurrir en la amplitud, debido a la integración de momentos sobre intervalos infinitos. Paralelamente se hizo uso de parametrización de Feynman y el método de Passarino-Veltman con el fin de tener un punto de comparación al realizar el cálculo numérico. Ya que este proceso sólo ocurre a nivel de lazo las divergencias ultravioletas deben cancelarse, en el caso de parametrización de Feynman el término divergente tiene la forma

$$\text{div} = \Delta \left(a \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}_{\alpha j}^* \{H_M\}_{lj} f(m_j) + b \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}_{\alpha j}^* \{H_M\}_{lj}^* f(m_l) \right), \tag{3.10}$$

con Δ la divergencia ultravioleta y a, b coeficientes que sólo dependen de las masas de los leptones; se encontraron

$$\sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} f(m_j) = 0, \quad (3.11)$$

$$\sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* f(m_l) = 0, \quad (3.12)$$

con $f(m_k)$ una función que depende solamente del valor de la masa en su argumento, gracias a estas relaciones el término de divergencia se cancela. En las funciones de Passarino-Veltman² las divergencias están asociadas a la función B_0 e independientemente de sus argumentos siempre es el mismo (no depende de los valores de las masas en sus argumentos), así los términos de divergencia tienen la estructura siguiente

$$\text{div}_1 = \Delta \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} f(m_j) g(m_l), \quad (3.13)$$

$$\text{div}_2 = \Delta \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* f(m_l) g(m_j), \quad (3.14)$$

$g(m_k)$, al igual que como mencionamos para $f(m_k)$, es una función que solo depende del valor de la masa de su argumento, de las relaciones (3.11) y (3.12) podemos obtener a su vez las siguientes igualdades

$$\sum_{l=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha 6} \{H_M\}_{l6} f(m_6) = - \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^5 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} f(m_j), \quad (3.15)$$

$$\sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta 6} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{6j}^* f(m_6) = - \sum_{l=1}^5 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* f(m_l), \quad (3.16)$$

ilustremos el proceso que cancela a los términos divergentes con la ecuación (3.13)

$$\begin{aligned} \text{div}_1 &= \Delta \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} f(m_j) g(m_l) \\ &= \Delta \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^5 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} f(m_j) g(m_l) + \Delta \sum_{l=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha 6} \{H_M\}_{l6} f(m_6) g(m_l) \\ &= \Delta \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^5 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} f(m_j) g(m_l) - \Delta \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^5 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} f(m_j) g(m_l) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

similarmente con (3.16) obtenemos el mismo resultado, con estos se tiene que las divergencias se cancelan; otras propiedades útiles que se derivan de (3.11) y (3.12) son

$$\sum_{l=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha 3} \{H_M\}_{l3} f(m_3) = - \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^2 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} f(m_j), \quad (3.18)$$

²Más información acerca de las funciones escalares de Passarino-Veltman se encuentran en el Apéndice B

$$\sum_{l=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha 6} \{H_M\}_{l6} f(m_6) = - \sum_{l=1}^6 \sum_{j=4}^5 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} f(m_j), \quad (3.19)$$

$$\sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta 3} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{3j}^* f(m_3) = - \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* f(m_l), \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta 6} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{6j}^* f(m_6) = - \sum_{l=4}^5 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* f(m_l). \quad (3.21)$$

Los coeficientes $A_{\alpha\beta}$ y $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ que aparecen en la ecuación (3.9) son en general escalares complejos, gracias a ello podemos tratarlos como tal, cuadrando la amplitud y promediando sobre estados de espín obtenemos

$$|\bar{M}_{\alpha\beta}|^2 = 2T^2 \left[(|A_{\alpha\beta}|^2 + |\tilde{A}_{\alpha\beta}|^2) (m_\alpha^2 + m_\beta^2) - 4m_\alpha m_\beta \text{Re}\{A_{\alpha\beta} \tilde{A}^*_{\alpha\beta}\} \right], \quad (3.22)$$

para un proceso de decaimiento $1 \rightarrow 2$ la tasa de decaimiento diferencial en el marco de reposo de la partícula entrante se expresa como[44]

$$d\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_2 + P_3 - P_1)}{2m_1} \frac{d^3\vec{P}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3\vec{P}_3}{(2\pi)^3 2E_3}, \quad (3.23)$$

donde P_1 es el 4-momento inicial y P_2, P_3 son los 4-momentos finales, $|M_{fi}|^2$ es la amplitud cuadrada del proceso de decaimiento, ya que la expresión (3.22) no depende de los 4-momentos entrantes y salientes la expresión para nuestra tasa de decaimiento se obtiene integrando sobre el espacio fase como sigue

$$\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta J) = \frac{|\bar{M}_{\alpha\beta}|^2}{8m_\alpha (2\pi)^2} \int \frac{d^3\vec{P}_2 d^3\vec{P}_3}{E_2 E_3} \delta^4(P_2 + P_3 - P_1), \quad (3.24)$$

realizando la integración y tomando en cuenta que la masa del majorón es nula, la tasa de decaimiento es

$$\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta J) = \frac{|\bar{M}_{\alpha\beta}|^2}{16\pi m_\alpha^3} (m_\alpha^2 - m_\beta^2). \quad (3.25)$$

3.2. Cálculo numérico

Con todo lo anterior dicho, nuestro problema se reduce en obtener un cálculo numérico de los coeficientes $A_{\alpha\beta}$ y $\tilde{A}_{\alpha\beta}$, notemos que de la discusión anterior las masas de los neutrinos pueden expresarse como

$$m_{\nu_j} = \frac{v}{w} c_j = t c_j, \quad (3.26)$$

$$m_{N_j} = w c_j = \frac{1}{v} v c_j = \frac{1}{t} r_j, \quad (3.27)$$

la razón $\frac{v}{w} = t$, de acuerdo a que consideramos $w \gg v$, es por lo tanto $t < 1$, esto nos permite hacer un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $t = 0$ en nuestros coeficientes, la expansión no es tan sencilla debido a que en sus argumentos combina neutrinos ligeros y pesados y el reemplazamiento de las masas por las expresiones anteriores debe ser con sumo cuidado, por este motivo debemos hacer una separación de acuerdo a su tipo, consideremos al coeficiente $A_{\alpha\beta}$ la estructura general

de este coeficiente puede representarse como sigue

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta} &= \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} [\{H_M\}_{lj} m_j d_1(m_j, m_l) + \{H_M\}_{lj}^* m_l d_2(m_j, m_l)] \\
&= \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} m_j d_1(m_j, m_l) \\
&\quad + \sum_{l=1}^6 \sum_{j=4}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} m_j d_1(m_j, m_l) \\
&\quad + \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* m_l d_2(m_j, m_l) \\
&\quad + \sum_{l=4}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* m_l d_2(m_j, m_l),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

garantizamos la cancelación de divergencias mediante el proceso ilustrado en (3.17) y las relaciones (3.18 – 3.21) tomando $f(m_j) = m_j$ tenemos

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta} &= \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^2 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} m_j (d_1(m_j, m_l) - d_1(m_3, m_l)) \\
&\quad + \sum_{l=1}^6 \sum_{j=4}^5 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} m_j (d_1(m_j, m_l) - d_1(m_6, m_l)) \\
&\quad + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* m_l (d_2(m_j, m_l) - d_2(m_j, m_3)) \\
&\quad + \sum_{l=4}^5 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* m_l (d_2(m_j, m_l) - d_2(m_j, m_6)),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

definimos entonces

$$D_1(m_j, m_l, m_{3,6}) = d_1(m_j, m_l) - d_1(m_{3,6}, m_l), \tag{3.30}$$

$$D_2(m_j, m_l, m_{3,6}) = d_2(m_j, m_l) - d_2(m_j, m_{3,6}), \tag{3.31}$$

con esta definición nuestro coeficiente se reescribe como

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta} &= \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^2 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} m_j D_1(m_j, m_l, m_3) \\
&+ \sum_{l=1}^6 \sum_{j=4}^5 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} m_j D_1(m_j, m_l, m_6) \\
&+ \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}^*_{lj} m_l D_2(m_j, m_l, m_3) \\
&+ \sum_{l=4}^5 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}^*_{lj} m_l D_2(m_j, m_l, m_6),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ahora, pasamos a la notación que identifica los tipos de neutrino por su espectro de masas

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta} &= \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \mathcal{B}_{\beta\nu_l} \mathcal{B}^*_{\alpha\nu_j} \{H_M^{11}\}_{lj} m_{\nu_j} D_1(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) \\
&+ \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \mathcal{B}_{\beta N_l} \mathcal{B}^*_{\alpha\nu_j} \{H_M^{21}\}_{lj} m_{\nu_j} D_1(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_3) \\
&+ \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \mathcal{B}_{\beta\nu_l} \mathcal{B}^*_{\alpha N_j} \{H_M^{12}\}_{lj} m_{N_j} D_1(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_6) \\
&+ \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \mathcal{B}_{\beta N_l} \mathcal{B}^*_{\alpha N_j} \{H_M^{22}\}_{lj} m_{N_j} D_1(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6) \\
&+ \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\beta\nu_l} \mathcal{B}^*_{\alpha\nu_j} \{H_M^{11}\}^*_{lj} m_{\nu_l} D_2(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) \\
&+ \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\beta\nu_l} \mathcal{B}^*_{\alpha N_j} \{H_M^{12}\}^*_{lj} m_{\nu_l} D_2(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_3) \\
&+ \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\beta N_l} \mathcal{B}^*_{\alpha\nu_j} \{H_M^{21}\}^*_{lj} m_{N_l} D_2(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_6) \\
&+ \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_{\beta N_l} \mathcal{B}^*_{\alpha N_j} \{H_M^{22}\}^*_{lj} m_{N_l} D_2(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

en esta notación es más que claro en los argumentos cuando tenemos neutrinos ligeros, pesados y mezclas de ellos y entonces es posible realizar nuestro desarrollo en serie de Taylor en el cual consideramos hasta primer orden en t , la estructura del coeficiente $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ es exactamente la misma, pero identificamos a sus funciones como $\tilde{D}_k(m_j, m_l, m_{3,6})$, las expresiones para estas funciones a primer orden se muestran en el apéndice C

Ahora nos enfocamos en obtener datos numéricos para los valores de todos los parámetros presentes en nuestras ecuaciones, comenzamos con la matriz de mezcla PMNS, utilizaremos la parametrización usual para campos de Majorana[13] donde

$$\mathcal{U}_{\text{PMNS}} = U^D D^M, \quad (3.34)$$

la forma de U^D se muestra en el apéndice C, D^M una matriz unitaria diagonal que se escribe como

$$D^M = \text{diag}(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_3}), \quad (3.35)$$

convencionalmente se considera $\lambda_1 = 0$ y λ_2, λ_3 son fases de Majorana, los datos para la matriz U^D son tomados del *Particle Data Group* (PDG)[19] y consideramos el esquema normal e invertido; estas fases no tienen valores experimentales medidos, por tal motivo elegiremos diferentes valores para dichas fases con el fin de observar si existen cambios significativos según los valores considerados para las fases. Las masas de los neutrinos ligeros podemos aproximarlas de acuerdo a las siguientes relaciones

$$m_{\nu_1} \approx \sqrt{(m_{\nu_e}^{\text{eff}})^2 - |(\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{e3}|^2 \Delta m_{31}^2 - |(\mathcal{U}_{\text{PMNS}})_{e2}|^2 \Delta m_{21}^2}, \quad (3.36)$$

$$m_{\nu_2} = \sqrt{m_{\nu_1}^2 + \Delta m_{21}^2}, \quad (3.37)$$

$$m_{\nu_3} = \sqrt{m_{\nu_1}^2 + \Delta m_{31}^2}, \quad (3.38)$$

la definición de $(m_{\nu_e}^{\text{eff}})^2$ es la utilizada en el apartado *Neutrino Properties* en [19] y se ha definido a la diferencia de masas cuadráticas como

$$\Delta m_{ij}^2 = m_{\nu_i}^2 - m_{\nu_j}^2, \quad (3.39)$$

siguiendo a las ecuaciones encontradas bajo nuestra aproximación de la sección (2.3.3) la matriz de masas de los neutrinos ligeros se relaciona con la ecuación (2.188) y mencionamos que la matriz m_M se considera diagonal, real y con los elementos mayores a cero entonces podemos expresarla de la forma

$$m_M = \frac{w}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}; \quad c_j > 0, \quad (3.40)$$

acerca de la matriz m_D solo conocemos que en general es una matriz compleja, con el fin de hacer una estimación de los valores de la diagonal en m_M elegimos a m_D de la forma más sencilla

$$m_D = \frac{v}{\sqrt{2}} i \cdot 1_3, \quad (3.41)$$

el factor imaginario se agrega para corregir el signo en la ecuación (2.188), encontrando así que la matriz m_M es

$$m_M = \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} 1/m_{\nu_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_{\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_{\nu_3} \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

siguiendo el mismo esquema de nuestras aproximaciones de la relación (2.189) se obtiene una estimación para la masa de los neutrinos pesados

$$m_{N_i} \approx \frac{v^2}{2m_{\nu_i}} + 2m_{\nu_i}, \quad (3.43)$$

Las matrices \mathcal{B} y H_M están determinadas por estos parámetros. Una partícula puede decaer en varias rutas diferentes, a las que se les conoce como modos de decaimiento, la tasa total de decaimiento es igual a la suma de todas las tasas de decaimiento de cada modo diferente[45]

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_i \Gamma_i, \quad (3.44)$$

la tasa total de decaimiento se relaciona con el tiempo de vida medio de la partícula con

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\Gamma_{\text{tot}}}. \quad (3.45)$$

El *Branching Ratio* nos da la información de la probabilidad de que la partícula decaiga en algún modo específico, y está determinada por la razón

$$\text{Br}_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{\text{tot}}}, \quad (3.46)$$

con i refiriendo al i -ésimo modo de decaimiento, la expresión para el *Branching Ratio* para nuestro modo de decaimiento es

$$\text{Br}(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta J) = \mathcal{T}_\alpha \Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta J) \quad (3.47)$$

los tiempos de vida y valores de masas de los leptones cargados considerados son[19]

$$\begin{aligned} m_e &= 0.51099 \text{ MeV} \\ m_\mu &= 105.6583 \text{ MeV} \quad \mathcal{T}_\mu = 2.1969 \times 10^{-6} \text{ s} \\ m_\tau &= 1776.86 \text{ MeV} \quad \mathcal{T}_\tau = 290.3 \times 10^{-15} \text{ s} \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.3. Análisis de Resultados

De acuerdo con las relaciones (3.36 - 3.38) encontramos los valores siguientes para las masas de los neutrinos ligeros:

Esquema normal (eV)	Esquema Invertido (eV)
$m_{\nu_1} = 0.899958$	$m_{\nu_1} = 0.900019$
$m_{\nu_2} = 0.9$	$m_{\nu_2} = 0.900061$
$m_{\nu_3} = 0.901278$	$m_{\nu_3} = 0.898567$

en ambos casos todas las masas son $< 1.1 \text{ eV}$ [46], ya que experimentalmente no tenemos valores absolutos de las masas sólo de las diferencias cuadráticas, podemos considerar la relación (3.39) con nuestros valores de las masas de los neutrinos ligeros, las diferencias cuadráticas son

Esquema normal (eV ²)	Esquema Invertido (eV ²)
$\Delta m^2_{21} = 7.53 \times 10^{-5}$	$\Delta m^2_{21} = 7.53 \times 10^{-5}$
$\Delta m^2_{32} = 2.3024 \times 10^{-3}$	$\Delta m^2_{32} = -2.6866 \times 10^{-3}$

PDG reporta los datos siguientes[19]

Esquema normal	Esquema Invertido
$\Delta m^2_{21} = 7.53 \times 10^{-5}$	$\Delta m^2_{21} = 7.53 \times 10^{-5}$
$\Delta m^2_{32} = 2.453 \times 10^{-3}$	$\Delta m^2_{32} = -2.536 \times 10^{-3}$

las diferencias cuadráticas presentadas son muy cercanas a las reportadas variando en a lo más un 6 %, en ese sentido tomar los resultados de nuestras masas para la realización de los cálculos puede considerarse como una buena elección para nuestras estimaciones, en virtud de eso encontramos en ambos casos que el orden de las masas para los neutrinos es alrededor

$$m_{N_i} \sim O(10^{13}) \text{ GeV.} \quad (3.49)$$

Mediante los dos métodos utilizados para nuestro cálculo los resultados coincidieron exactamente considerando para la parametrización de Feynman una precisión de 60 dígitos decimales, los *Branching Ratios* quedan en función de los parámetros de la escala de alta energía y sus fases de Majorana, eligiendo fases fijas resulta que los *Branching Ratios* encontrados dependen de la escala de altas energías como $\propto \frac{1}{w^2}$, las cotas experimentales para este tipo de decaimientos donde interviene como partícula final un bosón de Goldstone se encuentran en

Decaimiento $\mu \rightarrow eJ$

$$\begin{aligned} \text{Br}(\mu \rightarrow eJ) &< 3 \times 10^{-4} & [47] \\ \text{Br}(\mu^+ \rightarrow e^+J) &< 2.1 \times 10^{-5} & [48] \\ \text{Br}(\mu^+ \rightarrow e^+J) &< 1.4 \times 10^{-5} & [49] \\ \text{Br}(\mu^+ \rightarrow e^+J) &< 9 \times 10^{-6} & [48][50] \\ \text{Br}(\mu^+ \rightarrow e^+J) &< 2.6 \times 10^{-6} & [51] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Decaimiento $\tau \rightarrow eJ$

$$\begin{aligned} \text{Br}(\tau \rightarrow eJ) &< 0.018 & [52] \\ \text{Br}(\tau \rightarrow eJ) &< 7.1 \times 10^{-3} & [53] \end{aligned} \quad (3.51)$$

Decaimiento $\tau \rightarrow \mu J$

$$\begin{aligned} \text{Br}(\tau \rightarrow \mu J) &< 0.033 & [52] \\ \text{Br}(\tau \rightarrow \mu J) &< 2.3 \times 10^{-3} & [53] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Es posible comparar los resultados obtenidos con los datos experimentales mencionados anteriormente de manera gráfica, las contribuciones más grandes son las del decaimiento del muón

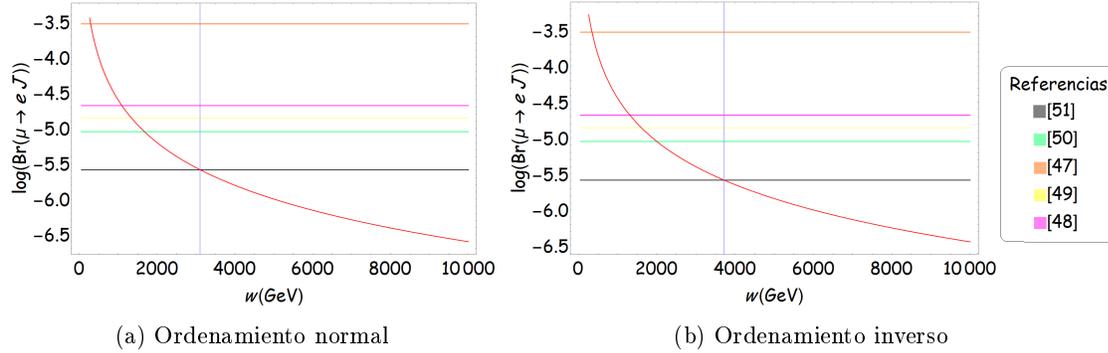


Figura 3.2: Variación del $\log(Br(\mu \rightarrow eJ))$ en función de la escala de alta energía w para ambos ordenamientos. La línea horizontal muestra el corte con la cota más alta para dicha escala.

comparando los resultados mostrados en (3.50) observamos que se obtienen cotas para la escala de energía w para que un decaimiento de este tipo sea posible en este modelo, los resultados anteriores contienen consideraciones donde se toman bosones de Goldstone masivos que pueden obtenerse cuando una simetría se ha roto aproximadamente y otros donde el bosón de Goldstone no tiene masa como es el caso del presente trabajo donde una simetría global se ha roto espontáneamente atendiendo a esto la cota mínima para el modelo estudiado consideramos es la referente a [51] en el que se examina un bosón de Goldstone no masivo como es el majorón, de acuerdo con lo ya dicho encontramos las cotas mínimas para la escala de alta energía

$$3104.68 \text{ GeV} \leq w \quad 3710.25 \text{ GeV} \leq w \quad (3.53)$$

para los ordenamientos normal e invertido respectivamente, aunque la cota más grande es la del esquema invertido nos permitiremos expresar una cota general para ambos casos, la escala de alta energía debe cumplir para que el modelo que estamos estudiando sea consistente

$$3 \times 10^3 \text{ GeV} < w \quad (3.54)$$

o que es lo mismo a 3 TeV; dado el comportamiento de nuestra gráfica tendiendo a infinito no encontramos algún límite superior que la restrinja con lo que la escala tiene la posibilidad de ser mucho mayor que este límite, variando las fases de Majorana $\lambda_{2,3}$ no se encontró ningún cambio en nuestros resultados concluyendo que estos resultados no sienten efectos de fases de Majorana. Los resultados para los demás decaimientos considerados se muestran a continuación, en las gráficas se ha considerado desde el valor para nuestro corte de energía observamos que sus contribuciones están muy por debajo de las cotas experimentales por lo que los valores para estos decaimientos están permitidos.

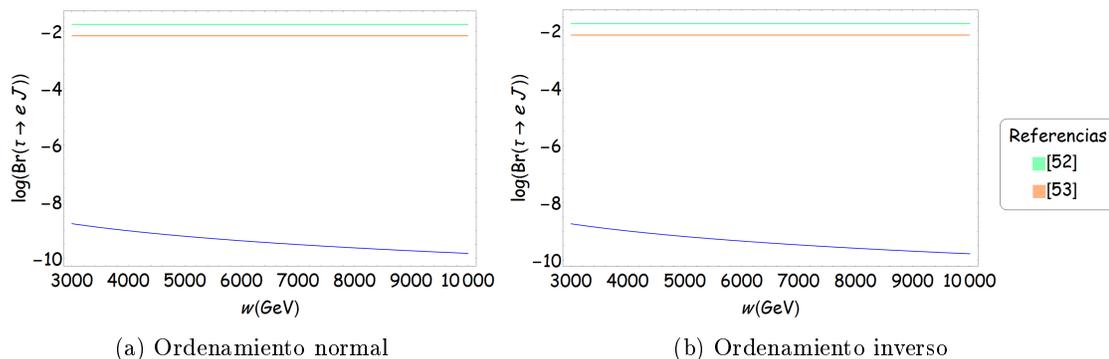


Figura 3.3: Variación del $\log (Br(\tau \rightarrow eJ))$ en función de la escala de alta energía w para ambos ordenamientos

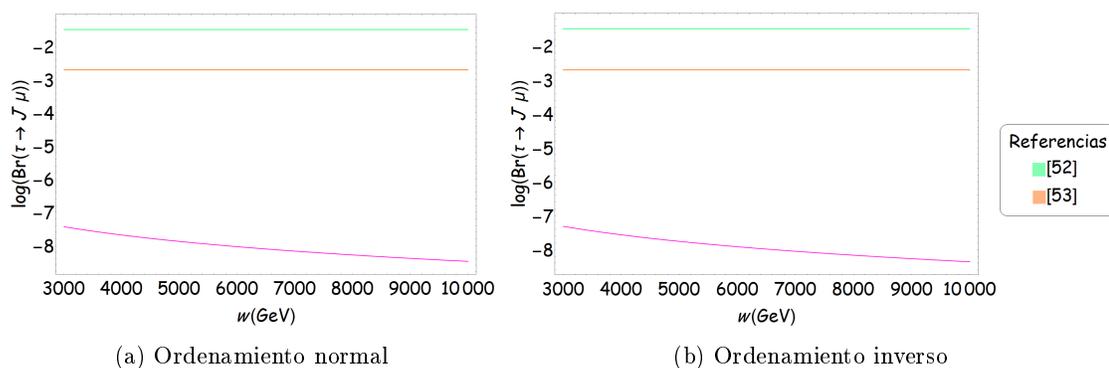


Figura 3.4: Variación del $\log (Br(\tau \rightarrow \mu J))$ en función de la escala de alta energía w para ambos ordenamientos

Profundicemos un poco más acerca del valor mínimo para la escala w encontrado; si bien es baja en el sentido a que es accesible para detectar sus efectos a estos ordenes de energía en experimentos actuales, este límite es más una cota mínima para la cual el modelo considerado comienza a ser consistente con los datos experimentales encontrados para los decaimientos estudiados; ahora, ¿el valor para la cota de w realmente implica que encontraremos efectos de nueva física llegados a los 3 TeV de energía en los aceleradores? la respuesta rápida es no, en realidad al no tener un valor máximo sobre los valores que puede tomar la escala w abre la posibilidad que en realidad esta escala sea mucho mayor, de hecho la estimación que encontramos para el orden de las masas de los neutrinos pesados y de lo discutido en la sección (2.3.3) las masas de estos neutrinos son directamente proporcionales al valor de w y nos sugiere que el valor de la escala de alta energía es comparable con el de la estimación de los órdenes de magnitud para los neutrinos pesados que hemos calculado en este trabajo; por otro lado que los valores de los *Branching Ratios* queden por debajo de los datos experimentales no representa problemas pues estos solo son límites superiores y no restringe a que si estos decaimientos de llegar a detectarse tengan valores menores a los de sus cotas.

Conclusiones

El proceso calculado involucra cambio de sabor leptónico el cual no es permitido el ME por lo que se explora la posibilidad de que la conservación de número leptónico no sea una simetría fundamental de la naturaleza, y más aún que sea una simetría espontáneamente rota. Que esta simetría se rompa espontáneamente nos permite considerar dos cosas, que existan términos de masa de Majorana y al ser una simetría global que se rompe espontáneamente que exista un bosón de Goldstone que llamamos majorón.

El rompimiento ya mencionado es inducido a una escala de energía mayor a la del ME con esto los efectos de nueva física se encuentran restringidos a cuan grande sea esta escala.

Con respecto a las masas de los neutrinos encontramos que se pueden diferenciar entre sus espectros de masa teniendo dos tipos a los que nos referimos como ligeros y pesados lo que evoca a un mecanismo de *see-saw* y explica de manera más dinámica la razón de lo pequeña que es la masa de los neutrinos ligeros, debido a que en los neutrinos pesados sus masas son $\propto w$ su detección está sujeta a que tan grande sea el valor de w .

Aunque actualmente no se han detectado corrientes cargadas con cambio de sabor leptónico, considerar neutrinos masivos abre la puerta a que en efecto sí existan este tipo de corrientes por lo que debe existir una matriz de mezcla y que denotamos como matriz PMNS, esta matriz es parametrizada para casos en que los términos de masa de neutrinos sean de Dirac a pesar de esto para los términos de masa de Majorana la matriz de mezcla solo agrega un par de fases complejas a la parametrización ya dicha, medir estas fases es realmente difícil y no existen datos acerca del valor de ellas así que estas fases se pueden considerar parámetros libres y variarlos para estudiar su contribución en diferentes fenómenos físicos donde estén involucrados campos neutrinos de Majorana.

Se han establecido cotas experimentales donde se han considerado bosones de Goldstone siendo no específicamente el caso del majorón sino uno en general, gracias a esto es posible determinar una cota inferior para la escala de alta energía y que oscila en los casos estudiados alrededor de $\sim O(10^3)$ GeV, a decir verdad esta cota es muy pequeña y es accesible a las mediciones actuales, esto no representa un problema en el sentido de que no hay una restricción de cuan grande puede ser dicha escala; de hecho la estimación de los valores de las masas de los neutrinos pesados realizada es alrededor de $\sim O(10^{13})$ GeV y es increíblemente grande, esto nos sugiere que la escala de energía debe ser mayor que la cota encontrada. Nuestras estimaciones arrojan que las fases de Majorana no afectan significativamente a nuestros resultados con ello no encontramos conclusiones acerca del valor que deben tener.

Apéndice A

Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman que se utilizaron se muestran a continuación

A.0.1. Propagadores

$$\mu \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \text{~~~~~} \\ W \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} = \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi) k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_W^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

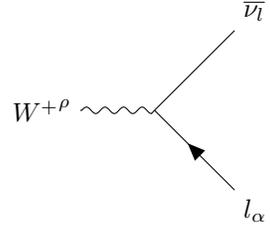
$$\bar{\mathcal{V}}_j \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \text{-----} \\ \mathcal{V}_j \end{array} = \frac{i(\not{q} + m_j \cdot 1_4)}{q^2 - m_j^2} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{V}_j \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \text{-----} \\ \mathcal{V}_j \end{array} = \frac{i(\not{q} + m_j \cdot 1_4) C}{q^2 - m_j^2} \quad (\text{A.3})$$

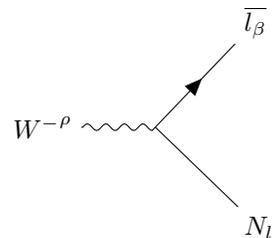
$$\bar{\mathcal{V}}_j \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \text{-----} \\ \bar{\mathcal{V}}_j \end{array} = C^\dagger \frac{i(\not{q} + m_j \cdot 1_4)}{q^2 - m_j^2} \quad (\text{A.4})$$

A.0.2. Vértices

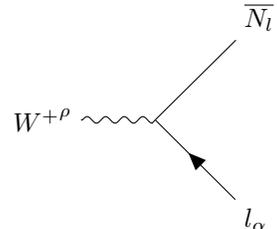
$$\begin{array}{c} \bar{l}_\beta \\ \nearrow \\ W^{-\rho} \text{~~~~~} \\ \searrow \\ \nu_l \end{array} = \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha\nu l} \gamma_\rho P_L \quad (\text{A.5})$$



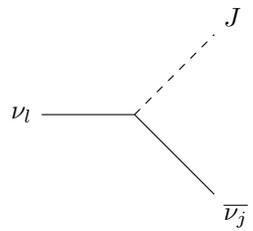
$$= \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha\nu_l}^* \gamma_\rho P_L \quad (\text{A.6})$$



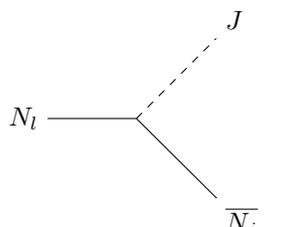
$$= \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha N_l} \gamma_\rho P_L \quad (\text{A.7})$$



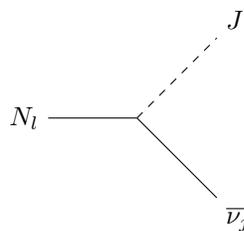
$$= \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \mathcal{B}_{\alpha N_l}^* \gamma_\rho P_L \quad (\text{A.8})$$

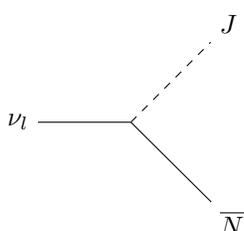


$$= \frac{-i}{2w} (-\text{Im}\{H_M^{11}\}_{jl} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{11}\}_{jl} \cdot \gamma_5) \quad (\text{A.9})$$



$$= \frac{-i}{2w} (-\text{Im}\{H_M^{22}\}_{jl} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{22}\}_{jl} \cdot \gamma_5) \quad (\text{A.10})$$


$$N_l \text{ --- } \begin{array}{l} \nearrow \text{---} J \\ \searrow \text{---} \overline{v}_j \end{array} = \frac{-i}{2w} (-\text{Im}\{H_M^{12}\}_{jl} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{12}\}_{jl} \cdot \gamma_5) \quad (\text{A.11})$$


$$\nu_l \text{ --- } \begin{array}{l} \nearrow \text{---} J \\ \searrow \text{---} \overline{N}_j \end{array} = \frac{-i}{2w} (-\text{Im}\{H_M^{21}\}_{jl} \cdot 1_4 + i\text{Re}\{H_M^{21}\}_{jl} \cdot \gamma_5) \quad (\text{A.12})$$

Apéndice B

Funciones escalares de Passarino-Veltman

Con el surgimiento del modelo estándar de las interacciones electrodébiles, los cálculos de correcciones a nivel de un lazo por el método de parametrización de Feynman se tornaron extremadamente complicados. En este sentido, Martinus Veltman y su estudiante de posdoctorado Giampiero Passarino desarrollaron un método sistemático para el cálculo de diagramas de Feynman a un lazo y lo ejemplificaron con el cálculo del proceso $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$. Definimos a las funciones escalares de Passarino-Veltman como sigue

Función de un punto

$$A_0(m^2) = \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{k^2 - m^2}. \quad (\text{B.1})$$

Función de dos puntos

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(k^2 - m_0^2)((k + p_1)^2 - m_1^2)}. \quad (\text{B.2})$$

Función de tres puntos

$$C_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(k^2 - m_0^2)((k + p_1)^2 - m_1^2)((k + p_2)^2 - m_2^2)}. \quad (\text{B.3})$$

μ en este contexto es un elemento con unidades de (masa)¹ y es necesario para corregir unidades. Existe una función de cuatro puntos, sin embargo, ya que para nuestro cálculo solo se necesita hasta la función de tres puntos omitiremos su discusión. Las integrales se resolverán en D dimensiones ya que este método debe aplicarse en conjunto con el método de regularización dimensional. Notemos

ahora que

$$\begin{aligned}
 A_0(m_1^2) - A_0(m_2^2) &= \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{k^2 - m_1^2} - \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{k^2 - m_2^2} \\
 &= \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D k \left(\frac{1}{k^2 - m_1^2} - \frac{1}{k^2 - m_2^2} \right) \\
 &= \frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D k \frac{m_1^2 - m_2^2}{(k^2 - m_1^2)(k^2 - m_2^2)} \tag{B.4} \\
 &= (m_1^2 - m_2^2) \left(\frac{\mu^{4-D}}{i\pi^2} \int \frac{d^D k}{(k^2 - m_1^2)(k^2 - m_2^2)} \right) \\
 &= (m_1^2 - m_2^2) B_0(0, m_0^2, m_1^2)
 \end{aligned}$$

por lo tanto, si tenemos términos en donde se encuentre una diferencia de funciones A_0 es posible escribirla en términos de una función B_0 , gracias a esta situación en nuestro cálculo las expresiones encontradas fueron posibles de escribir sólo en términos de funciones B_0 y C_0 .

Divergencias

Para ilustrar las divergencias presentes vamos a resolver las funciones B_0 y C_0 mediante parametrización de Feynman, la función B_0 es

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \Delta - \int_0^1 dx \log(m_0^2(1-x) + m_1^2 x + p_1^2 x(x-1)), \tag{B.5}$$

con el término divergente

$$\Delta = -\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi\mu^2), \tag{B.6}$$

donde $\epsilon \rightarrow 0$ y γ_E es la constante de Euler-Mascheroni. Notemos que dicho término no depende de los argumentos de los cuales depende la función B_0 y será el mismo sin importar los valores que tomen sus argumentos. Para la función C_0 se obtiene

$$C_0(p_1^2, (p_1-p_2)^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = - \int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx [m_1^2 x - p_1^2 x + m_2^2 y - p_2^2 y - m_0(-1+x+y) + (p_1 x + p_2 y)^2]^{-1} \tag{B.7}$$

observe que la solución de esta función no contiene divergencias. Por lo tanto, en nuestro cálculo las divergencias ultravioletas se encuentran presentes únicamente en las funciones B_0 .

Apéndice C

Aspectos generales del cálculo

En el transcurso del desarrollo del cálculo de la amplitud se utilizaron las siguientes condiciones cinemáticas

$$P_1^2 = P_1 \cdot P_1 = m_\alpha^2 \quad (\text{C.1})$$

$$P_2^2 = P_2 \cdot P_2 = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$P_3^2 = P_3 \cdot P_3 = m_\beta^2 \quad (\text{C.3})$$

$$P_1 \cdot P_3 = \frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2}{2} \quad (\text{C.4})$$

$$P_1 \cdot P_2 = \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2} \quad (\text{C.5})$$

Las expresiones completas para los coeficientes $A_{\alpha\beta}$ y $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ se muestran a continuación

Parametrización de Feynman

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha\beta}(m_j, m_l) &= \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}_{\alpha j}^* \{H_M\}_{lj}^* m_l \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
 &\quad \left(-\frac{xm_\alpha m_\beta^2 (xy + x + y^2)}{32\pi^2 M m_W^2} - \frac{y^2 m_\alpha^3 (x + y - 1)}{32\pi^2 M m_W^2} - \frac{(3y + 1)m_\alpha \log(M)}{32\pi^2 m_W^2} + \frac{(1 - y)m_\alpha}{16\pi^2 M} \right) \\
 &\quad + \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}_{\alpha j}^* \{H_M\}_{lj} m_j \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
 &\quad \left(\frac{y^2 m_\alpha^3 x + y - 1}{32\pi^2 M m_W^2} + \frac{ym_\alpha m_\beta^2 (x(x + y - 2) - y)}{32\pi^2 M m_W^2} + \frac{3ym_\alpha \log(M)}{32\pi^2 m_W^2} + \frac{ym_\alpha}{16\pi^2 M} \right)
 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{\alpha\beta}(m_j, m_l) &= \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}_{\alpha j}^* \{H_M\}_{lj}^* m_l \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \left(\frac{x^2 m_\beta^3 (x+y-1)}{32\pi^2 M m_W^2} + \frac{3x m_\beta \log(M)}{32\pi^2 m_W^2} + \frac{x m_\alpha^2 m_\beta (x(y-1) + (y-2)y)}{32\pi^2 M m_W^2} + \frac{x m_\beta}{16\pi^2 M} \right) \\
&\quad + \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}_{\alpha j}^* \{H_M\}_{lj} m_j \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \left(-\frac{x^2 m_\beta^3 (x+y-1)}{32\pi^2 M m_W^2} - \frac{(3x+1)m_\beta \log(M)}{32\pi^2 m_W^2} - \frac{y m_\alpha^2 m_\beta (x(x+y) + y)}{32\pi^2 M m_W^2} - \frac{(x-1)m_\beta}{16\pi^2 M} \right)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

La masa de Feynman asociada es la siguiente

$$M = y m_j^2 + x m_l^2 - m_w^2 (x+y-1) + (x-1) x m_\beta^2 + xy (m_\alpha^2 + m_\beta^2) + (y-1) y m_\alpha^2 \tag{C.8}$$

Passarino - Veltman

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha\beta}(m_j, m_l) = & \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* m_l \left[\frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^2 m_\alpha^5}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^5}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \right. \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^5}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^5}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^4 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_w^2 m_\alpha^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & - \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\beta^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m \beta^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\beta^2 m_\alpha^3}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m \alpha^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_j^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_l^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^4 m_\alpha}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^4 m_\alpha}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m \beta^4 m_\alpha}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^2 m_\alpha}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\beta^2 m_\alpha}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_w^2 m_\beta^2 m_\alpha}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m \beta^2 m_\alpha}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^2 m_\alpha}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\beta^2 m_\alpha}{16\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^4 m_\beta^2 m_\alpha}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_j^2 m \beta^2 m_\alpha}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^2 m_\alpha}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^2 m_\alpha}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_l^2 m_\beta^2 m_\alpha}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \left. \right] \\
 & + \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj} m_j \left[\frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha m_\beta^6}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \right. \\
 & - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^3 m_\beta^4}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha m_\beta^4}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\alpha m_\beta^4}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha m_\beta^4}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{3B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha m_\beta^4}{128\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\alpha m_\beta^4}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^4}{128\pi^2 m_\alpha (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^4}{128\pi^2 m_w^2 m_\alpha (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m \alpha m_\beta^2}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)} + \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^3 m_\beta^2}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\alpha m_\beta^2}{16\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha m_\beta^2}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_w^2 m_\alpha m_\beta^2}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m \alpha m_\beta^2}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \left. \right]
 \end{aligned}$$

Aspectos generales del cálculo

$$\begin{aligned}
& + \frac{3B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha m_\beta^2}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\alpha m_\beta^2}{16\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^4 m_\alpha m_\beta^2}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\alpha m_\beta^2}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_l^2 m_\alpha m_\beta^2}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha m_\beta^2}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& - \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha m_\beta^2}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(0, m_w^2, m_w^2)}{128\pi^2 m_\alpha} - \frac{B0(0, m_j^2, m_j^2) m_j^2}{128\pi^2 m_w^2 m_\alpha} \\
& - \frac{m_j^2}{128\pi^2 m_w^2 m_\alpha} + \frac{1}{128\pi^2 m_\alpha} - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_l^2 m_\alpha}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)} - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^5}{128\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_w^2 m_\alpha^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_\alpha^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{3B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^3}{128\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^4 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\alpha^3}{128\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \Big]
\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{\alpha\beta}(m_j, m_l) = & \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{lj}^* m_l \left[- \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta m_\alpha^6}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^3 m_\alpha^4}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \right. \\
& + \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta m_\alpha^4}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta m_\alpha^4}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\beta m_\alpha^4}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta m_\alpha^4}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{3B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\beta m_\alpha^4}{128\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\alpha^4}{128\pi^2 m_\beta (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^4}{128\pi^2 m_w^2 m_\beta (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_\beta m_\alpha^2}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)} \\
& - \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^3 m_\alpha^2}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta m_\alpha^2}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\beta m_\alpha^2}{16\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_w^2 m_\beta m_\alpha^2}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_\beta m_\alpha^2}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& + \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta m_\alpha^2}{16\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{3B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\beta m_\alpha^2}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^4 m_\beta m_\alpha^2}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& + \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta m_\alpha^2}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta m_\alpha^2}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_l^2 m_\beta m_\alpha^2}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_l^2 m_\beta m_\alpha^2}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(0, m_w^2, m_w^2)}{128\pi^2 m_\beta} + \frac{B0(0, m_l^2, m_l^2) m_l^2}{128\pi^2 m_w^2 m_\beta} + \frac{m_l^2}{128\pi^2 m_w^2 m_\beta} - \frac{1}{128\pi^2 m_\beta} \\
& - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_j^2 m_\beta}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)} + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\beta^5}{128\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^3}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_w^2 m_\beta^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_\beta^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{3B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\beta^3}{128\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
& \left. - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^4 m_\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_l^2 m_\beta^3}{128\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{B}_{\beta l} \mathcal{B}^*_{\alpha j} \{H_M\}_{l_j} m_j \left[- \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^2 m_\beta^5}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \right. \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\beta^5}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^5}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\beta^5}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^4 m_\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\beta^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\beta^3}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_w^2 m_\beta^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^2 m_\beta^3}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\alpha^2 m_\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^2 m_\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m\alpha^2 m_\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^2 m_\beta^3}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & - \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\alpha^2 m_\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m\beta^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\beta^3}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_l^2 m_\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_l^2 m\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_l^2 m_\beta^3}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^4 m_\beta}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^4 m_\beta}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m\alpha^4 m_\beta}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_\alpha^2 m_\beta}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{3C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^2 m_\beta}{64\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_w^2 m_\alpha^2 m_\beta}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m\alpha^2 m_\beta}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_\alpha^2 m_\beta}{16\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_\alpha^2 m_\beta}{32\pi^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_l^4 m_\alpha^2 m_\beta}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{C0(0, m\alpha^2, m_\beta^2, m_l^2, m_j^2, m_w^2) m_j^2 m_l^2 m_\alpha^2 m_\beta}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \\
 & \left. + \frac{B0(0, m_j^2, m_l^2) m_l^2 m_\alpha^2 m_\beta}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} - \frac{B0(m\alpha^2, m_j^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^2 m_\beta}{32\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} + \frac{B0(m\beta^2, m_l^2, m_w^2) m_l^2 m_\alpha^2 m_\beta}{64\pi^2 m_w^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2} \right] \tag{C.10}
 \end{aligned}$$

Las expresiones considerando el desarrollo en serie de Taylor a primer orden son

Parametrización de Feynman

Coefficiente $A_{\alpha\beta}$

$$D_1(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \tag{C.11}$$

$$D_1(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_3) = O(t^2) \tag{C.12}$$

$$D_1(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_6) = - \frac{m_\alpha \log\left(\frac{m_6^2}{m_j^2}\right)}{64\pi^2 m_W^2} + O(t^2) \tag{C.13}$$

$$D_1(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{3m_\alpha y (\log(m_j^2 y + m_l^2 x) - \log(m_6^2 y + m_l^2 x))}{32\pi^2 m_W^2} \cdot dy \cdot dx + O(t^2) \tag{C.14}$$

$$D_2(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \tag{C.15}$$

$$D_2(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \tag{C.16}$$

$$D_2(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_6) = -\frac{m_\alpha \log\left(\frac{m_l^2}{m_6^2}\right)}{32\pi^2 m_W^2} + O(t^2) \quad (\text{C.17})$$

$$D_2(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{m_\alpha (3y+1) (\log(m_6^2 x + m_j^2 y) - \log(m_j^2 y + m_l^2 x))}{32\pi^2 m_W^2} \cdot dy \cdot dx + O(t^2) \quad (\text{C.18})$$

Coefficiente $\tilde{A}_{\alpha\beta}$

$$\tilde{D}_1(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.19})$$

$$\tilde{D}_1(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.20})$$

$$\tilde{D}_1(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_6) = \frac{m_\beta \log\left(\frac{m_6^2}{m_j^2}\right)}{32\pi^2 m_W^2} + O(t^2) \quad (\text{C.21})$$

$$\tilde{D}_1(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{m_\beta (3x+1) (\log(m_6^2 y + m_l^2 x) - \log(m_j^2 y + m_l^2 x))}{32\pi^2 m_W^2} \cdot dy \cdot dx + O(t^2) \quad (\text{C.22})$$

$$\tilde{D}_2(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.23})$$

$$\tilde{D}_2(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.24})$$

$$\tilde{D}_2(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_6) = -\frac{m_\beta \log\left(\frac{m_6^2}{m_l^2}\right)}{64\pi^2 m_W^2} + O(t^2) \quad (\text{C.25})$$

$$\tilde{D}_2(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6) = \int_0^1 \int_0^{1-x} -\frac{3(m_\beta x (\log(m_6^2 x + m_j^2 y) - \log(m_j^2 y + m_l^2 x)))}{32\pi^2 m_W^2} \cdot dy \cdot dx + O(t^2) \quad (\text{C.26})$$

Passarino-Veltman

Coefficiente $A_{\alpha\beta}$

$$D_1(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.27})$$

$$D_1(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.28})$$

$$D_1(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_6) = -\frac{m_\alpha \log\left(\frac{m_6^2}{m_j^2}\right)}{64\pi^2 m_w^2} + O(t^2) \quad (\text{C.29})$$

$$D_1(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6) = -\frac{m_6^2(m_6^2 - 2m_l^2)m_\alpha \log\left(\frac{m_6^2}{m_l^2}\right)}{64\pi^2(m_6^2 - m_l^2)^2 m_W^2} - \frac{m_\alpha \left((m_j^2 - m_6^2)m_l^2(m_j^2 - m_l^2) + m_j^2(m_l^2 - m_6^2)(m_j^2 - 2m_l^2) \log\left(\frac{m_j^2}{m_l^2}\right) \right)}{64\pi^2(m_6^2 - m_l^2)m_W^2(m_j^2 - m_l^2)^2} + O(t^2) \quad (\text{C.30})$$

$$D_2(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.31})$$

$$D_2(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.32})$$

$$D_2(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_6) = \frac{m_\alpha \log\left(\frac{m_6^2}{m_l^2}\right)}{32\pi^2 m_W^2} + O(t^2) \quad (\text{C.33})$$

$$D_2(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6) = \frac{m_6^2(2m_6^2 - m_j^2)m_\alpha \log\left(\frac{m_6^2}{m_j^2}\right)}{64\pi^2(m_6^2 - m_j^2)^2 m_W^2} - \frac{m_\alpha \left(m_j^2(m_6^2 - m_l^2)(m_j^2 - m_l^2) + (m_6^2 - m_j^2)m_l^2(m_j^2 - 2m_l^2) \log\left(\frac{m_j^2}{m_l^2}\right) \right)}{64\pi^2(m_6^2 - m_j^2)m_W^2(m_j^2 - m_l^2)^2} + O(t^2) \quad (\text{C.34})$$

Coefficiente $\tilde{A}_{\alpha\beta}$

$$\tilde{D}_1(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.35})$$

$$\tilde{D}_1(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.36})$$

$$\tilde{D}_1(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_6) = \frac{m_\beta \log\left(\frac{m_6^2}{m_j^2}\right)}{32\pi^2 m_W^2} + O(t^2) \quad (\text{C.37})$$

$$\tilde{D}_1(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6) = \frac{m_6^2(2m_6^2 - m_l^2)m_\beta \log\left(\frac{m_6^2}{m_l^2}\right)}{64\pi^2(m_6^2 - m_l^2)^2 m_W^2} - \frac{m_\beta \left((m_j^2 - m_6^2)m_l^2(m_j^2 - m_l^2) + m_j^2(m_6^2 - m_l^2)(2m_j^2 - m_l^2) \log\left(\frac{m_j^2}{m_l^2}\right) \right)}{64\pi^2(m_6^2 - m_l^2)m_W^2(m_j^2 - m_l^2)^2} + O(t^2) \quad (\text{C.38})$$

$$\tilde{D}_2(m_{\nu_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.39})$$

$$\tilde{D}_2(m_{N_j}, m_{\nu_l}, m_3) = O(t^2) \quad (\text{C.40})$$

$$\tilde{D}_2(m_{\nu_j}, m_{N_l}, m_6) = -\frac{m_\beta \log\left(\frac{m_6^2}{m_l^2}\right)}{64\pi^2 m_W^2} + O(t^2) \quad (\text{C.41})$$

$$\tilde{D}_2(m_{N_j}, m_{N_l}, m_6) = \frac{m_j^4 m_\beta \log\left(\frac{m_6^2}{m_j^2}\right)}{64\pi^2(m_6^2 - m_j^2)^2 m_W^2} - \frac{m_\beta \left(m_j^2 \left((m_6^2 - m_l^2)(m_j^2 - m_l^2) + (m_j^4 - m_6^2 m_j^2) \log\left(\frac{m_j^2}{m_l^2}\right) \right) + (m_6^2 - m_j^2)(m_j^2 - m_l^2)^2 \log\left(\frac{m_6^2}{m_l^2}\right) \right)}{64\pi^2(m_6^2 - m_j^2)m_W^2(m_j^2 - m_l^2)^2} + O(t^2) \quad (\text{C.42})$$

Integración en el espacio fase

La expresión para el diferencial de la tasa de decaimiento $1 \rightarrow 2$ en el marco de reposo de la partícula entrante es

$$d\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_2 + P_3 - P_1)}{2m_1} \frac{d^3\vec{P}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3\vec{P}_3}{(2\pi)^3 2E_3}, \quad (\text{C.43})$$

considerando que nos encontramos con una situación en la que la amplitud cuadrada no depende de los 4-momentos, la tasa de decaimiento se obtiene integrando sobre el espacio fase como sigue

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|M_{fi}|^2}{32\pi^2 m_1} \int \delta^4(P_2 + P_3 - P_1) \frac{d^3\vec{P}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3\vec{P}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \\ &= \frac{|M_{fi}|^2}{32\pi^2 m_1} \int \left(\frac{d^3\vec{P}_2}{E_2} \delta(E_2 + E_3 - E_1) \right) \frac{\delta^3(\vec{P}_2 + \vec{P}_3 - \vec{P}_1) d^3\vec{P}_3}{E_3}. \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

En el marco de reposo de la partícula entrante se tienen las siguientes relaciones

$$P_1 = (E_1, 0) \Rightarrow \vec{P}_1 = 0, \quad (\text{C.45})$$

$$E_1 = \sqrt{|\vec{P}_1|^2 + m_1^2} = m_1, \quad (\text{C.46})$$

considerando estas condiciones, obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|M_{fi}|^2}{32\pi^2 m_1} \int \left(\frac{d^3 \vec{P}_2}{E_2} \delta(E_2 + E_3 - m_1) \right) \frac{\delta^3(\vec{P}_2 + \vec{P}_3) d^3 \vec{P}_3}{E_3} \\ &= \frac{|M_{fi}|^2}{32\pi^2 m_1} \int \frac{\delta(E_2 + E_3 - m_1)}{E_2 E_3} d^3 \vec{P}_2, \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

en el último paso hemos realizado la integración sobre el momento \vec{P}_3 gracias a la delta de Dirac sobre los momentos, con esto debemos tener claro que la energía E_3 se define ahora como

$$E_3 = \sqrt{|-\vec{P}_2|^2 + m_3^2} = \sqrt{|\vec{P}_2|^2 + m_3^2}, \quad (\text{C.48})$$

el diferencial podemos reescribirlo usando coordenadas esféricas

$$d^3 \vec{P}_2 = |P_2|^2 d|P_2| d\Omega, \quad (\text{C.49})$$

por lo tanto

$$\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2}{32\pi^2 m_1} \int d\Omega \int \frac{|\vec{P}_2|^2}{E_2 + E_3} \delta(E_2 + E_3 - m_1) d|P_2|, \quad (\text{C.50})$$

por otro lado, notemos

$$E_2 + E_3 = \sqrt{|\vec{P}_2|^2 + m_2^2} + \sqrt{|\vec{P}_2|^2 + m_3^2}, \quad (\text{C.51})$$

$$\Rightarrow \frac{d(E_2 + E_3)}{d|\vec{P}_2|} = |\vec{P}_2| \left(\frac{E_2 + E_3}{E_2 E_3} \right), \quad (\text{C.52})$$

$$\Rightarrow E_2 E_3 \frac{d(E_2 + E_3)}{E_2 + E_3} = |\vec{P}_2| d|\vec{P}_2|, \quad (\text{C.53})$$

De tal forma que finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|M_{fi}|^2}{32\pi^2 m_1} \int d\Omega \int \frac{|\vec{P}_2| E_2 E_3}{(E_2 + E_3) E_2 E_3} \delta(E_2 + E_3 - m_1) d(E_2 + E_3) \\ &= \frac{|M_{fi}|^2}{8\pi m_1} \int \frac{|\vec{P}_2| \delta(E_2 + E_3 - m_1)}{(E_2 + E_3)} d(E_2 + E_3) \\ &= \frac{|M_{fi}|^2}{8\pi m_1} \frac{|\vec{P}_2|}{m_1}. \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

De la conservación de la energía

$$E_1 = E_2 + E_3, \quad (\text{C.55})$$

lo que es equivalente a la ecuación

$$m_1 = \sqrt{|\vec{P}_2|^2 + m_2^2} + \sqrt{|\vec{P}_2|^2 + m_3^2}, \quad (\text{C.56})$$

y realizando manipulación algebraica es posible despejar $|\vec{P}_2|$

$$|\vec{P}_2| = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(m_1^2 - (m_2 + m_3)^2)(m_1^2 - (m_2 - m_3)^2)}}{m_1}, \quad (\text{C.57})$$

concluimos con la expresión anterior que la tasa de decaimiento es

$$\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2}{16\pi m_1^2} \sqrt{(m_1^2 - (m_2 + m_3)^2)(m_1^2 - (m_2 - m_3)^2)}. \quad (\text{C.58})$$

En nuestro caso $m_2 = 0$; por lo tanto, la expresión resultante

$$\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2}{16\pi m_1^2} (m_1^2 - m_3^2). \quad (\text{C.59})$$

Matriz PMNS

La matriz de mezcla PMNS es diferente si los neutrinos de masa son de Dirac o de Majorana, en el primer caso esta matriz puede parametrizarse como sigue[13]

$$U^D = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{C.60})$$

donde $c_{ab} \equiv \cos \theta_{ab}$ y $s_{ab} \equiv \sin \theta_{ab}$ cuyos ángulos de mezcla tienen valores en el rango $0 \leq \theta_{ab} \leq \frac{\pi}{2}$ mientras que la fase de Dirac oscila entre $0 \leq \delta_{13} < 2\pi$.

En el caso de neutrinos de Majorana la matriz de mezcla se escribe como el producto de dos matrices unitarias

$$U = U^D U^M \quad (\text{C.61})$$

donde la matriz U^D tiene la misma forma que la escrita anteriormente, mientras que la matriz U^M es una matriz diagonal caracterizada como

$$U^M = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}) \quad (\text{C.62})$$

siendo λ_1, λ_2 dos fases de Majorana, por convención se elige $\lambda_1 = 0$ sin embargo cualquier otra elección es físicamente equivalente.

Apéndice D

Matrices de Dirac

Las siguientes relaciones fueron tomadas de [13]

Representación de Weyl

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Representación de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Las matrices de Dirac y de proyección cumplen de manera general

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot 1_4 \quad (\text{D.3})$$

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \quad (\text{D.4})$$

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad (\text{D.5})$$

$$\gamma_5 \cdot \gamma_5 = 1_4 \quad (\text{D.6})$$

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{D.7})$$

$$\text{Tr} [\gamma_5] = 0 \quad (\text{D.8})$$

$$P_R + P_L = 1_4 \quad (\text{D.9})$$

$$P_R - P_L = \gamma_5 \quad (\text{D.10})$$

$$P_R P_R = P_R \quad (\text{D.11})$$

$$P_L P_L = P_L \quad (\text{D.12})$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0 \quad (\text{D.13})$$

$$P_R^\dagger = P_R \quad (\text{D.14})$$

$$P_L^\dagger = P_L \quad (\text{D.15})$$

$$P_R \psi_L = P_L \psi_R = 0 \quad (\text{D.16})$$

Bibliografía

- [1] B. PONTECORVO, *Mesonium and antimesonium*, Sov. Phys.-JETP **6** 429 (1957).
- [2] S. L. GLASHOW, *Partial-symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [3] S. WEINBERG, *A model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [4] A. SALAM, *"Weak and electromagnetic interactions"*, in *Elementary particle theory: relativistic groups and analyticity*, N. Svartholm, ed., p. 367. Almqvist & Wiksell, 1968. Proceedings of the eighth Nobel symposium.
- [5] E. MAJORANA, *Teoria simmetrica dell' elettrone e del positrone*, Nuovo Cimento **14**, 171 (1937).
- [6] P. A. M. DIRAC, *The quantum theory of the electron*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **118**, 351 (1928).
- [7] R. N. MOHAPATRA AND G. SENJANOVIC, *Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation*, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980).
- [8] Y. CHIKASHIGE, R.N. MOHAPATRA AND R.D. PECCEI, *Are There Real Goldstone Bosons Associated with Broken Lepton Number?*, Phys. Lett. B **98** (1981), 265-268
- [9] PILAFTSIS, A., *Radiatively induced neutrino masses and large Higgs-neutrino couplings in the Standard Model with Majorana fields*, Z. Phys. C - Particles and Fields **55**, 275–282 (1992).
- [10] G. PASSARINO AND M. VELTMAN, *One-loop corrections for $e + e^-$ annihilation into $\mu + \mu^-$ in the Weinberg model*, Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979).
- [11] M. PESKIN Y D. V. SCHROEDER, *Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.
- [12] L. H. RYDER, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [13] C. GIUNTI AND C. W. KIM, *Fundamental of Neutrino Physics and Atrophysics* (Oxford University Press, New York, 2007).
- [14] M. D. SCHWARTZ, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge University Press, New York, 2014).
- [15] J. WUDKA, *Electroweak Effective Lagrangians* , Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2301 (1994).
- [16] E. NOETHER, *Invariante Variationsprobleme*, Gott. Nachr. **1918** , 235 (1918)
- [17] J. J. SAKURAI AND J. NAPOLITANO, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, San Francisco, 2011).
- [18] M. ROBINSON, *Symmetry and the Standard Model* (Springer, New York, 2011).

- [19] R.L. WORKMAN *et al.* (Particle Data Group), to be published in Prog. Theor. Exp. Phys. **2022**, 083C01 (2022).
- [20] S. CHATRCHYAN *et al.* [CMS], *Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC*, Phys. Lett. B **716** (2012), 30-61
- [21] J. EINASTO, A. KAASIK, *Dynamic evidence on massive coronas of galaxies*, Nature **250**, 309 (1974).
- [22] J. P. OSTRIKER, P. J. E. PEEBLES, AND A. YAHIL, *The Size and Mass of Galaxies, and the Mass of the Universe*, *Astrophys. J.* **193**, L1 (1974).
- [23] J.GOLDSTONE, *Field Theories with Superconductor Solutions*, Nuovo Cim. **19** (1961), 154-164
- [24] P.W.HIGGS, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 508-509
- [25] P. W. HIGGS, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields* , Phys. Lett. **12** 132 (1964).
- [26] F. ENGLERT AND R. BROUT, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons* , Phys. Rev. Lett. **13** 321 (1964).
- [27] P. A. M. DIRAC, *The quantum theory of the electron, Part II*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **118**, 351 (1928).
- [28] P. A. M. DIRAC, *The quantum theory of the electron, Part II*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **118**, 351 (1928).
- [29] P. A. M. DIRAC, *A theory of electrons and protons*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **126**, 360 (1930).
- [30] P. A. M. DIRAC, *On the Annihilation of Electrons and Protons*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **26**, 361 (1930).
- [31] Y. FUKUDA ET AL. (SUPER-KAMIOKANDE COLLABORATION), *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).
- [32] Q. R. AHMAD ET AL. (SNO COLLABORATION), *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **29**, 011301 (2002).
- [33] E. MA, *Neutrino Mass: Mechanisms and Models*, ePrint: arXiv:0905.0221.
- [34] S. WEINBERG, *Baryon- and Lepton-Nonconserving Processes*, Phys. Rev. Lett. **43**, 1566 (1979).
- [35] A.PILAFTSIS, *Astrophysical and terrestrial constraints on singlet Majoron models*, Phys. Rev. D **49** (1994), 2398-2404 doi:10.1103/PhysRevD.49.2398 [arXiv:hep-ph/9308258 [hep-ph]].
- [36] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & Sons, New York, 1999).
- [37] A. ZANGWILL, *Modern Electrodynamics*, (Cambridge University Press, New York, 2012).
- [38] Z. MAKI, M. NAKAGAWA AND S. SAKATA, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [39] MOHAPATRA, R. N., & PAL, P. B..(2004). *Massive neutrinos in physics and astrophysics* (Vol. 72). World scientific.
- [40] V. SHABOVENKO, R. MERTIG AND F. ORELLANA, *FeynCalc 9.3: New features and improvements*, arXiv:2001.04407.

- [41] V. SHATABOVENKO, R. MERTIG AND F. ORELLANA, *New Developments in FeynCalc 9.0*, Comput. Phys. Commun., 207, 432-444, 2016, arXiv:1601.01167.
- [42] R. MERTIG, M. BÖHM, AND A. DENNER, *Feyn Calc - Computer-algebraic calculation of Feynman amplitudes*, Comput. Phys. Commun., 64, 345-359, 1991.
- [43] HIREN H. PATEL, Hiren H. Patel, Comput. Phys. Commun. 197, 276 (2015), ePrint: arXiv:1503.01469.
- [44] P.LANGACKER, *The standard model and beyond*.
- [45] DAVID GRIFFITHS, *Introduction to Elementary Particles*, (Wiley-VCH, Germany, 2008).
- [46] M.AKER *et al.* [KATRIN], *Improved Upper Limit on the Neutrino Mass from a Direct Kinematic Method by KATRIN*, Phys. Rev. Lett. **123** (2019) no.22, 221802
- [47] D.A. BRYMAN AND E.T.H. CLIFFORD, *EXOTIC MUON DECAY $\mu \longleftrightarrow e + x$* , (Wiley-VCH, Germany, 2008).
- [48] R.BAYES *et al.* [TWIST], *Search for two body muon decay signals*, Phys. Rev. D **91** (2015) no.5, 052020
- [49] B. BALKE, G. GIDAL, A. JODIDIO, K.A. SHINSKY, H.M. STEINER, D.P. STOKER, M. STROVINK, R.D. TRIPP, J. CARR AND B. GOBBI, *et al. Precise Measurement of the Asymmetry Parameter Delta in Muon Decay*, Phys. Rev. D **37** (1988), 587-617
- [50] A. AGUILAR AREVALO *et al.* [PIENU], *Improved search for two body muon decay $\mu^+ \rightarrow e^+ X_H$* , Phys. Rev. D **101** (2020) no.5, 052014
- [51] A. JODIDIO, B. BALKE, J. CARR, G. GIDAL, K.A. SHINSKY, H.M. STEINER, D.P. STOKER, M.STROVINK, R.D. TRIPP AND B. GOBBI, *et al. Search for Right-Handed Currents in Muon Decay*, Phys. Rev. D **34** (1986), 1967 [erratum: Phys. Rev. D **37** (1988), 237]
- [52] H. ALBRECHT *et al.* [ARGUS], *Determination of the Michel parameter in tau decay*, Phys. Lett. B **246** (1990), 278-284
- [53] MARK-III COLLABORATION, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1842.
- [54] M. GOLDHABER, L. GRODZINS AND A.W. SUNYAR, *Helicity of Neutrinos*, Phys. Rev. **109** (1958), 1015-1017 doi:10.1103/PhysRev.109.1015