

КЛЕТКАВЫ АЎТАМАТ ДЛЯ МАДЭЛЯВАННЯ ДАЖДЖАВОГА СЦЁКУ

А.А. Волчак, Д.А. Касцюк, Д.А. Пятроў, М.М. Шэшка

Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь,
polegdo@gmail.com

The two-dimensional cellular automaton and a reasonable simplifications for the shallow water (Saint-Venant) differential equations based model, for the computational simulation of rain surface runoff is proposed. The adequacy analysis of the calculations performed in their practical application is presented.

Для ўрбанізаваных тэрыторый становіцца характэрным узнікненне пазаштатных сітуацый, прычына якіх - рэзкае павелічэнне дажджавога сцёку. Мэтай прадстаўленых даследаванняў з'яўляецца распрацоўка спрошчанай двухмернай мадэлі руху водных патокаў па лічбавых мадэлях рэльефу (ЛМР) мясцовасці ў зоне гарадской забудовы, якая дзейнічае сумесна з мадэллю сістэмы ліўневай каналізацыі.

Зыходныя дадзеныя для мадэлявання - гэта ЛМР мясцовасці ў выглядзе матрыцы вышынных адзнак і граф схемы злучэнняў калодзежаў ліўневай каналізацыі трубамі. Мадэль пабудавана з улікам апісаных ніжэй умоў і абмежаванняў. Маштаб ЛМР падбіраецца такім, каб на кожны элемент мадэлі рэльефу прыходзілася не больш за адзін калодзеж ліўневай каналізацыі. Кожная з труб характарызуецца дыяметрам, даўжынёй, ухілам і велічынёй каэфіцыента гідраўлічнага супраціву, а характарыстыкі калодзежа - гэта яго аб'ём, глыбіня, прапуская здольнасць дажджапрымальніка і элемент матрыцы вышынных адзнак рэльефу мясцовасці, на тэрыторыі якога ён знаходзіцца. З кожным элементам ЛМР мясцовасці, акрамя вышыні яго размяшчэння і плошчы, звязана велічыня каэфіцыента гідраўлічнага супраціву. У склад зыходных дадзеных уваходзіць гідрограф, які адлюстроўвае змену інтэнсіўнасці ападкаў у часе па ўсёй плошчы мадэлі рэльефу мясцовасці.

Тэарэтычнай асновай мадэлявання дажджавога павярхоўнага сцёку з'яўляецца разлік дынамікі руху водных патокаў, які апісваецца сістэмай двухмерных раўнанняў дробнай вады (Сэн-Венана) [1]. Для спрашчэння разліку замест колькаснага рашэння ўраўненняў метадам канчатковых аб'ёмаў прымяняецца двухмерны клеткавы аўтамат (КА) [2 - 4]. Мадэляванне сцёку вады ў сістэме ліўневай каналізацыі адбываецца спрошчана, з выкарыстаннем адпаведнага двухмернага клеткавага аўтамата [5, 6]. Абодва КА выконваюць ітэрацыі сінхронна: працягласць ітэрацыі ўяўляе сабой зменную велічыню і з цягам часу мадэлявання падвяргаецца пераразліку.

Тэхнічна ўзаемадзеянне КА адбываецца наступным чынам. КА мадэлявання павярхоўнага сцёку разлічвае паступленне ападкаў на паверхню элементаў ЛМР, вылічае аб'ёмы вады, якая перамяшчаецца паміж элементамі мадэлі

рэльефу, вызначае неабходную працягласць ітэрацыі і ажыццяўляе размеркаванне павярхоўнага сцёку па мадэлі рэльефу мясцовасці. Затым КА мадэлявання ліўневай каналізацыі разлічвае прыток вады з паверхні элементаў ЛМР у калодзежы за прамежак часу паводле прапускной здольнасці дажджапрыёмнікаў. На наступных этапах вырашаюцца задачы паступлення вады з напоўненых калодзежаў у каналізацыйныя трубы, перамяшчэння прысутных у трубах аб'ёмаў вады паміж студнямі і магчымым выцяканні залішняй вады з перапоўненых калодзежаў на паверхню.

Матэматычнай асновай для разліку хуткасці руху водных мас як па зямной паверхні, так і па трубах служаць вядомыя эмпірычныя залежнасці, такія як формула Манінга для хуткасці воднага патоку ў адчыненым рэчышчы і формула Хазена-Вільямса для хуткасці воднага патоку ў трубапаводзе:

$$v = \frac{1}{n} [R^h]^{\frac{2}{3}} \sqrt{S^h}, \quad (1)$$

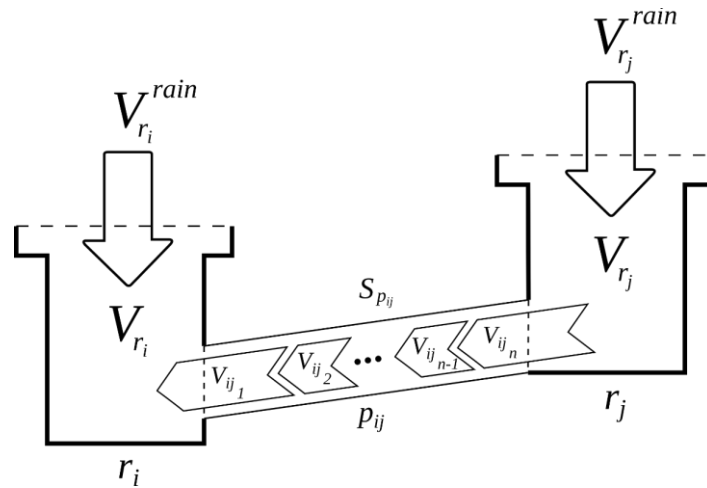
$$v = 0,849(C[R^h]^{0,63}[S^h]^{0,54}) \quad (2)$$

дзе n – каэфіцыент шурпатасці па Манінгу, C – каэфіцыент шурпатасці па Хазену-Вільямсу, R^h – гідраўлічны радыус, S^h – гідраўлічны ўхіл.

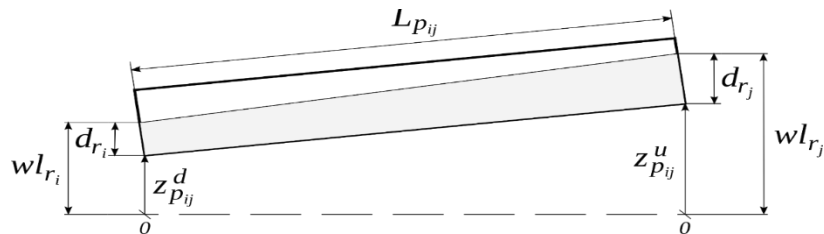
Асобна варта спыніцца на ўжыванні формул (1) і (2) пры разліку руху вады па трубах: формула (1) выкарыстоўваецца для вылічэння хуткасці ў тым выпадку, калі глыбіня вады ў трубе меней 95% яе дыяметра, у адваротным выпадку варта ўжываць формулу (2) [5, 6].

На аснове працы [5] быў распрацаваны двухмерны клеткавы аўтамат для мадэлявання сістэмы вулічнай ліўневай каналізацыі, які ўяўляе сабой мноства элементаў $r_i \in R$. Кожны элемент $r_i \in R$ адпавядае калодзежу ліўневай каналізацыі, які мае наступныя атрыбуты: $V_{r_i}^{max}$ – максімальны аб'ём умяшчальнай вады (m^3), V_{r_i} – аб'ём назапашанай вады (m^3), d_{r_i} – глыбіня назапашанай вады (м), wl_{r_i} – вышыня ўзроўню назапашанай вады (м), $Q_{r_i}^{rain}$ – прапускная здольнасць устаноўленага дажджапрыёмніка (m^3/c), якая залежыць ад глыбіні пласта вады што яе пакрывае (гл. малюнак 1).

Пары калодзежаў $[r_i, r_j] \in R$ звязаны паміж сабой трубамаі $p_{ij} \in P$. Кожная труба $p_{ij} \in P$ мае наступныя атрыбуты: $D_{p_{ij}}$ – дыяметр (м), $L_{p_{ij}}$ – даўжыня (м), $z_{p_{ij}}^d$ – вышыня ніжняга краю трубы з боку калодзежа r_i (м), $z_{p_{ij}}^u$ – вышыня ніжняга краю трубы з боку калодзежа r_j (м), $V_{p_{ij}}^{max}$ – максімальны аб'ём вады, якая можа ў ім змясціцца (m^3), $V_{p_{ij}}$ – аб'ём вады, якая ў ім знаходзіцца (m^3), $n_{p_{ij}}$ – каэфіцыент шурпатасці па Манінгу, $C_{p_{ij}}$ – каэфіцыент шурпатасці па Хазену-Вільямсу (гл. малюнак 2).



Малюнак 1 – Перамяшчэнне вады паміж суседнімі калодзежамі r_i і r_j , якія злучаны трубой p_{ij} , дзе V_{r_i} і V_{r_j} – аб'ёмы вады ў калодзежах, $V_{r_i}^{rain}$ і $V_{r_j}^{rain}$ – аб'ёмы вады, якая паступіла праз дажджапрыёмнікі, $V_{ij_1} \dots V_{ij_n}$ – аб'ёмныя сегменты вады, якія перамяшчаюцца па трубе p_{ij} і знаходзяцца ў чарзе $S_{p_{ij}}$

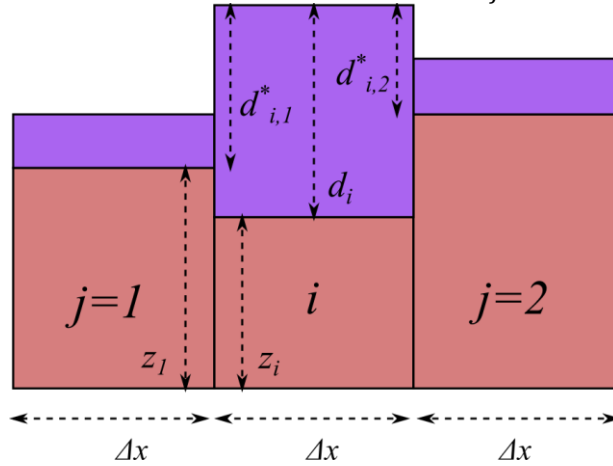


Малюнак 2 – Схема для тлумачэння разліку вышыні ўзроўня вады wl_{r_i} і wl_{r_j} ў двух суседніх калодзежах ліўневай каналізацыі r_i і r_j , якія злучаны трубой p_{ij} з даўжынёй $L_{p_{ij}}$, дзе $z_{p_{ij}}^d$ – вышыня ніжняга краю трубы з боку калодзежа r_i , адпаведна $z_{p_{ij}}^u$ – вышыня ніжняга краю трубы з боку калодзежа r_j . Глыбіня вады ў калодзежах r_i і r_j – велічыні d_{r_i} і d_{r_j} адпаведна.

Згодна з прынятай мадэллю ліўневай каналізацыі, перамяшчэнне вады ў трубах $p_{ij} \in P$ у напрамку ад калодзежа $r_j \in R$ да калодзежа $r_i \in R$ адбываецца ў выглядзе паслядоўнасці сегментаў вады пераменнага аб'ёму V_{ij} (m^3), з кожным з якіх звязаны час t_i (с) прыбыцця ў калодзеж $r_i \in R$ – таму з кожнай трубой $p_{ij} \in P$ звязана чарга $S_{p_{ij}}$ сегментаў вады, якая арганізавана па прынцыпе «першым прыйшоў - першым выйшаў» (гл. малюнак 3). Абзначым як $U_{r_{ij}}$ мноства калодзежаў $r_j \in R$, якія непасрэдна звязаны трубой $p_{ij} \in P$ з калодзежам $r_i \in R$ і якія пры гэтым знаходзяцца вышэй за яго па цячэнні. Для мадэлявання адводу дажджавога сцёку за межы ўрбанізаванай тэрыторыі сістэма ліўневай каналізацыі злучаецца трубамаі з калодзежамі, у якіх максімальны аб'ём $V_{r_i}^{max} = \infty$.

На аснове працы [4] быў створаны двухмерны КА для мадэлявання дажджавога сцёку, які ўяўляе сабой мноства элементаў $k_i \in K$. Размяшчэнне $k_i \in K$ супадае з размяшчэннем квадратных па форме элементаў ЛМР ўчастку мясцовасці, на якую выпадаюць вадкія ападкі ў выглядзе дажджу, пры гэтым мяркуецца, што назапашаная вада не пакідае меж ЛМР. Абзначым мноства

елементаў КА, якія знаходзяцца ў наваколлі Дж. фон Нэймана адносна $k_i \in K$ як $k_j \in N^{k_i}$. Падмноства элементаў $k_j \in N^{k_i}$, якія могуць атрымаць ненулявы аб'ём вады шляхам ператоку ад k_i , абазначым як $k_j \in N_{V_{ij}}^{k_i}$.



Малюнак 3 – Вялічыня эфектыўнай глыбіні вады d_{ij} для элемента k_i ў напрамку суседзяў $k_j \in N_{V_{ij}}^{k_i}$

Для кожнага элемента КА вызначаны наступныя атрыбуты (гл. малюнак 3): $z_i, \Delta x, A, n_i$ – вышыня (м), даўжыня боку (м), плошча (м^2) і каэфіцыент шурпатасці па Манінгу адпаведнага элемента ЛМР; d_i – глыбіня пласта вады (м); $S_{ij} = (w_l - w_j) / \Delta x = \Delta w_{l_{ij}} / \Delta x$ – гідраўлічны ўхіл паміж k_i і $k_j \in N^{k_i}$, дзе $w_l = d_i + z_i$ і $w_j = d_j + z_j$ – вышыня узроўня вады (м); $w_{l_{ij}^{max}}$ – максімальная вышыня ўзроўню вады сярод $k_j \in N^{k_i}$; $d_{ij} = w_l - z_j$ – эфектыўная глыбіня вады (м) для элемента k_i ў напрамку $k_j \in N_{V_{ij}}^{k_i}$; $v_{ij} = [(d_{ij})^{2/3} \sqrt{S_{ij}}] / n_i$ – скорасць плыні вады (м/с) паміж k_i і $k_j \in N_{V_{ij}}^{k_i}$; $Q_{ij} = \Delta x \cdot d_{ij} \cdot v_{ij}$ – расход вады ($\text{м}^3/\text{с}$) паміж k_i і $k_j \in N_{V_{ij}}^{k_i}$; Q_{ij}^{max} – расход вады ($\text{м}^3/\text{с}$) паміж k_i і суседнім элементам з максімальнай вышынёй ўзроўню вады сярод $k_j \in N_{V_{ij}}^{k_i}$; $\Delta t_i = [(w_l - w_{l_{ij}^{max}}) \cdot A] / (\sum Q_{ij} + Q_{ij}^{max})$ – прамежак часу (с), за які ў працэсе перацякання вады ад элемента k_i да ўсіх суседзяў, для якіх справядліва ўмова $w_l - w_j \geq \delta$, адбудзецца выраўноўванне вышыні ўзроўню вады ў элеменце k_i з тым суседам, у якога раней была зафіксавана вышыня ўзроўню вады роўная $w_{l_{ij}^{max}}$; $V_{ij}^{out} = Q_{ij} \cdot \Delta T$ – аб'ём вады, які перадаецца ад k_i у напрамку $k_j \in N_{V_{ij}}^{k_i}$, дзе ΔT – крок часу (с) для КА на цяперашняй ітэрацыі мадэлявання; $V_i^{out} = \sum V_{ij}^{out}$ – сумарны аб'ём вады (м^3), які пакідае элемент k_i у напрамку ўсіх $k_j \in N_{V_{ij}}^{k_i}$ на цяперашняй ітэрацыі мадэлявання; $V_i = \sum V_{ji}^{out}$ – сумарны аб'ём вады (м^3), які паступіў ад усіх элементаў $k_j \in N^{k_i}$ у напрамку k_i на цяперашняй ітэрацыі мадэлявання.

Разгледзім правіла змены стану КА паверхневага сцёку.

Перад пачаткам ітэрацыі глыбіня вады d_i для кожнага элемента $k_i \in K$ прыраўноўваецца таўшчыні пласта вады ад выпадзення ападкаў за 1 секунду, і ва ўнутраным часе мадэлі (які супадае для абодвух КА) праходзіць 1 секунда:

$t = 1$. Правіла сінхроннай змены стану элементаў $k_i \in K$ на кожнай ітэрацыі мадэлявання апісваецца наступнай паслядоўнасцю крокаў:

1. Значэнні V_{ij}^{out} і V_i^{out} абнуляюцца, Δt_i прымаецца роўным ∞ , $N_{V_{ij}}^{k_i} \equiv \emptyset$;
2. Калі ўмова $d_i < \delta$ ($\delta = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м) выканана, адбываецца пераход да кроку 8;
3. Выконваецца разлік $S_{ij} = (wl_i - wl_j) / \Delta x = \Delta wl_{ij} / \Delta x$ для $k_j \in N^{k_i}$;
4. Элементы $k_j \in N^{k_i}$, для якіх справядліва няроўнасць $S_{ij} > \delta$ ўключаюцца ў мноства $N_{V_{ij}}^{k_i}$;
5. Выконваецца разлік $\Delta t_i = [(wl_i - wl_{ij}^{max}) \cdot A] / (\sum Q_{ij} + Q_{ij}^{max})$;
6. Прыняць значэнне $\Delta T = \min(\Delta t_i)$ – адшуканне мінімальнага Δt_i выконваецца ва ўсім мностве $k_i \in K$;
7. Выконваецца разлік $V_{ij}^{out} = Q_{ij} \cdot \Delta T$ і $V_i^{out} = \sum V_{ij}^{out}$;
8. Выконваецца разлік $V_i = \sum V_{ji}^{out}$;
9. Змяншаецца d_i на велічыню V_i^{out} / A ;
10. Дадаецца да d_i сума V_i / A і таўшчыня пласта вады, якая выпала з ападкамі за прамежак часу ΔT ;
11. Калі ў дадзенага элемента $k_i \in K$ ёсць сувязь з калодзежам ліўневай каналізацыі $r_i \in R$, то выконваюцца наступныя дзеянні:

1. Калі $V_{r_i} > V_{r_i}^{max}$, то выконваецца павелічэнне d_i ў адпаведнасці з аб'ёмам вады $V_{r_i}^{out} = V_{r_i} - V_{r_i}^{max}$, які паступіў з калодзежа; пры гэтым аб'ём вады, які застаўся ў калодзежы, прыраўноўваецца $V_{r_i}^{max}$, а змяненне стану элемента на гэтым кроку заканчваецца;

2. Калі $V_{r_i} = V_{r_i}^{max}$, то змяненне стану элемента $k_i \in K$ на гэтым кроку заканчваецца;

3. Калі $V_{r_i} < V_{r_i}^{max}$, то на падставе прапускной здольнасці дажджапрыёмніка на калодзежы $Q_{r_i}^{rain}$ (якая залежыць ад глыбіні вады d_i) выконваецца разлік аб'ёму вады $V_{r_i}^{rain} = Q_{r_i}^{rain} \cdot \Delta T$;

4. Калі $V_{r_i}^{rain} > A \cdot d_i$, то $V_{r_i}^{rain} = A \cdot d_i$;

5. Калі $V_{r_i}^{rain} > 0$, то атрыманы аб'ём вады дадаецца да аб'ёму вады V_{r_i} , што ўжо знаходзіцца ў калодзежы $r_i \in R$: $V_{r_i} = V_{r_i} + V_{r_i}^{rain}$;

6. Калі $V_{r_i} > V_{r_i}^{max}$, то $V_{r_i}^{rain} = V_{r_i} - V_{r_i}^{max}$ і $V_{r_i} = V_{r_i}^{max}$;

7. Змяншаецца d_i ў адпаведнасці з аб'ёмам вады $V_{r_i}^{rain}$, які быў перамешчаны з элемента $k_i \in K$ ў калодзеж $r_i \in R$.

Разгледзім правіла змены стану КА сістэмы ліўневай каналізацыі.

Перад пачаткам ітэрацыі аб'ём назапашанай вады V_{r_i} , глыбіня вады d_{r_i} і вышыня ўзроўню вады wl_{r_i} для кожнага калодзежа $r_i \in R$ абнуляецца, таксама спусташаюцца чэргі $S_{p_{ij}}$ для ўсіх труб $p_{ij} \in P$. Правіла сінхроннай змены стану $[r_i, r_j] \in R$, дзе $r_j \in U_{r_{ij}}$ на кожнай ітэрацыі мадэлявання апісваецца наступнай паслядоўнасцю крокаў:

1. Пры наяўнасці ў чарзе $S_{p_{ij}}$ сегментаў вады V_{ij} з часам прыбыцця $t_i < t$ выконваецца разлік іх сумарнага аб'ёму V_{r_i} , выдаленне іх з чаргі, памяншэнне

аб'ёму вады $V_{p_{ij}}$ ў трубе p_{ij} на велічыню V_{r_i} і адпаведна павелічэнне аб'ёму вады V_{r_i} ў калодзежы r_i на велічыню V_{r_i} ;

2. Выконваецца разлік вышыні ўзроўняў вады $wl_{r_i} = z_{p_{ij}}^d + d_{r_i}$, $wl_{r_j} = z_{p_{ij}}^u + d_{r_j}$;

3. Калі $d_{r_j} > 0$, то выконваюцца наступныя дзеянні:

1. Вылічаецца гідраўлічны ўхіл $S_{ij}^h = (wl_{r_j} - wl_{r_i})/L_{p_{ij}}$ і гідраўлічны радыус $R_{r_j}^h$;

2. Вызначаецца хуткасць перацякання вады v_{ij} (м/с) паміж калодзежамі r_i і r_j з дапамогай формулы (1), калі d_{r_j} менш за 95% $D_{p_{ij}}$ – у адваротным выпадку прымяняецца формула (2);

3. Вылічаецца расход вады $Q_{ij} = v_{ij} \cdot A_{r_j}$ (м³/с), дзе A_{r_j} – плошча сячэння воднага патоку з боку калодзежа r_j ;

4. Разлічыць аб'ём сегмента вады $V_{ij} = Q_{ij} \cdot \Delta T$, які паступае з калодзежа r_j ў трубу p_{ij} ;

5. Калі $V_{p_{ij}} + V_{ij} > V_{p_{ij}}^{max}$, то памяншаецца аб'ём сегмента: $V_{ij} = V_{p_{ij}}^{max} - V_{p_{ij}}$;

6. Памяншаецца аб'ём назапашанай вады V_{r_j} на велічыню аб'ёму V_{ij} выходнага з калодзежа сегмента;

7. Дадаецца аб'ём V_{ij} сегмента, які паступае, да агульнага аб'ёму вады $V_{p_{ij}}$ ў трубе p_{ij} ;

8. Сегмент V_{ij} змяшчаецца ў чарзе $S_{p_{ij}}$ і выконваецца разлік часу $t_i = L_{p_{ij}}/v_{ij}$ яго прыбыцця ў калодзеж r_i .

Спіс выкарыстаных крыніц

1. Кивва С. Л. Двумерное моделирование дождевого стока и транспорта наносов на малых водосборах / С. Л. Кивва, М. И. Железняк // Прикладна гідромеханіка. – 2002. – Т. 4 (76), № 1. – С. 34 - 43.

2. Costabile P. Comparative analysis of overland flow models using finite volume schemes / P. Costabile, C. Costanzo, F. Macchione // Journal of Hydroinformatics. – 2012. – Vol. 14, № 1. – P. 122 - 135.

3. Dottori F. A 2d flood inundation model based on cellular automata approach / F. Dottori, E. Todini // XVIII International Conference on Water Resources, Barcelona, Spain, June 21-24, 2010 / International Centre for Numerical Methods in Engineering. – International Centre for Numerical Methods in Engineering, 2010.

4. Development of a diffusive wave shallow water model with a novel stability condition and other new features / M. Jahanbazi, I. Özgen, R. Aleixo, R. Hinkelmann // Journal of Hydroinformatics. – 2017. – Vol. 19, № 3. – P. 405 - 425.

5. Quick and Accurate Cellular Automata Sewer Simulator / R. J. Austin, A. S. Chen, D. A. Savić, S. Djordjević // Journal of Hydroinformatics. – 2014. – Vol. 16, № 6. – P. 1359 - 1374.

6. Fast Simulation of Sewer Flow using Cellular Automata / R. J. Austin, A. S. Chen, D. A. Savić, S. Djordjević // 8th International Conference on planning and technologies for sustainable management of Water in the City, Lyon, France, Jun. 2013. – Lyon, 2013.