MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL
2023, Vol. 21, No. 1 Enero - Junio

Transitividad de familias en la recta real con asíntotas horizontales y asíntota vertical

Transitivity of families in the real line with horizontal asymptotes and vertical asymptotes.

Dimas Geovanny Vera Pisco y Luis Bladismir Ruiz Leal

Recepción: 30/05/2022 **Aceptación:** 12/11/2022 **Publicación:** 31/01/2023

Abstract In the space of increasing transformations without fixed point of the real line with a vertical asymptote, conditions have been shown to determine chaos, but the case with horizontal asymptotes has been little studied. In this work we study this kind of transformations on the real line with a vertical asymptote and two horizontal asymptotes, demonstrating conditions to obtain transitivity and that the set of periodic points is dense on the real line. In addition, it is shown that the existence of periodic orbits of period 2 or 3 eliminate the possibility of transitivity
Keywords expansiveness, one-sided shift, periodic orbit, symbolic dynamics, transitivity.

Resumen En el espacio de transformaciones crecientes sin punto fijo de la recta real con una asíntota vertical se han mostrado condiciones para determinar caos, pero el caso con asíntotas horizontales ha sido poco estudiado. En este trabajo se estudia esta clase de transformaciones en la recta real con una asíntota vertical y dos asíntotas horizontales, demostrando condiciones para obtener transitividad y que el conjunto de puntos periódicos sea denso en la recta real. Además, se muestra que la existencia de órbitas periódicas de período 2 o 3 eliminan la posibilidad de transitividad.
Palabras Claves dinámica simbólica, expansividad, órbitas periódicas, shift unilateral, transitividad.

Dimas Geovanny Vera Pisco, Ing.
Estudiante de Maestría, Universidad Técnica de Manabí, UTM, Instituto de Posgrado, Portoviejo, Ecuador, e-mail: verapisco.16@gmail.com, https://orcid.org/ 0000-0002-3524-0907

Luis Bladismir Ruiz Leal, Ph.D.
Docente, Instituto de Ciencias Básicas,Universidad Técnica de Manabí, UTM, Portoviejo, Ecuador e-mail: bladismir@gmail.com, https://orcid.org/ 0000-0002-7737-3847

1 Introducción

En los trabajos de Muñoz (2006), Lenarduzzi (2016) y Leal y Muñoz (2021) sobre homeomorfismos del plano con una curva de discontinuidad, aparecen en el estudio de dichos trabajos, transformaciones de $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ crecientes con asíntota vertical en $x=0$, como proyecciones a lo largo de cierto tipo de curvas. Bajo ciertas condiciones para f, Muñoz (2015) demuestra que f es transitiva (existe un punto cuya órbita es densa en $\mathbb{R}$). Recientemente Leal, Mata, y Ramírez (2018), Boole (1857) y Anosov (1967), inspirados en la transformación de Boole $B(x)=1-\frac{1}{x}$, muestran la existencia de una amplia clase de transformaciones $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ con una asíntota en $x=0$, exhibiendo un conjunto invariante robustamente transitivo. En el caso f es creciente, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ existen y f es lineal por partes, Iñiguez y Ruiz Leal (2021) prueban una amplia clase de este tipo de transformaciones y exhíben un atractor topológico que admite una medida ergódica absolutamente continua a la de Lebesgue.

En los trabajos citados se le exige a la transformación que exista $\lambda>0$ (con λ próximos a 1) tal que $f'(x)>\lambda$, $\forall x\neq 0$ y en otros estudios se exige que $f'(x)>1$, $\forall x\neq 0$, es decir forzando que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|f(x)|=+\infty$. En el espacio de las funciones continuas $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, que satisface:

1. f es creciente en cada componente $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$.
3. $f(x)\neq x$ para todo $x\neq 0$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=x_1>0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=x_0$ donde, $f^{-1}(0)=\{x_0,x_1\}$

Leal, Mata, y Muñoz (2018) muestran condiciones para que este tipo de transformaciones sean transitivas y que el conjunto de puntos periódicos sea denso en $\mathbb{R}$. Contrario a esto en Leal, Tineo, y Lugo (2022) se demuestra que si f satisface las condiciones 1, 2 y $f_-^{-1}(0)\neq\varnothing$; entonces $\omega(x,f=\{0\})$ es una órbita periódica de período 2 o $\omega(x,f)$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(0)$.

Note que en un trabajo $f^{-1}(0)=\varnothing$ y en el otro trabajo (Leal, Mata, y Muñoz, 2018) $f^{-1}(0)=\{x_0,x_1\}$ con $x_0<0$ y $x_1>0$. Una pregunta natural es ¿Cuál es el comportamiento dinámico de f si $f^{-1}(0)$ posee un único punto? Se puede pensar que el comportamiento es como lo demostrado en Leal et al. (2022) o la dinámica es como en Leal, Mata, y Muñoz (2018). En el presente trabajo se responde esta pregunta en el siguiente resultado.

Teorema 1. *Si $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ satisfacen las condiciones (1)-(3) y existe $x_1>0$ tal que $f_+^{-1}(0)=x_1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=x_1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; entonces $\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(0)$ es denso en $\mathbb{R}$ si, y solo si, f es transitiva.*

Es importante mencionar que este tipo de aplicaciones aparece en homeomorfismos del plano con una curva de discontinuidad como proyección de ciertas curvas en el eje vertical (Lenarduzzi, 2019; Leal y Muñoz, 2022). Lo cual indica que entender el comportamiento dinámico del modelo unidimensional, ayuda a entender el comportamiento bidimensional.

Es importante mencionar que este trabajo está organizado de la siguiente forma: dentro de la sección 2 se estudia la condición de expansividad y se prueba una condición equivalente. En la sección 3 se consideran las particiones generadas por la misma transformación. En la sección 4 se muestra el teorema principal, con la técnica usada para la demostración del teorema 1, bajo las mismas hipótesis se prueba que el conjunto de puntos periódicos es denso en $\mathbb{R}$. Contrario a esto también se prueba que la existencia de puntos periódicos de período 2 o 3, no permite que esta clase de transformaciones sea transitiva.

2 Expansividad

En esta sección $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ denota un SAC-1P, si satisface las condiciones 1-4. Como $f^{-1}(0) \neq \emptyset$, se considera la siguiente notación:

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-j}(0) \cup (0), \forall n \geq 1 \quad \text{y} \quad A_f = \bigcup_{n \geq 1} f^{-n}(0) \cup (0)$$

donde $\mathbb{R}_f = \mathbb{R} \setminus A_f$.

Por la definición de SAC-1P y sus propiedades, se obtiene lo siguiente:

Observación 1. *Si f un SAC-1P, entonces:*

1. $f(0, x_1) = \mathbb{R}_0$
2. $f(\mathbb{R}_0) = \mathbb{R}_1$ *y* $f(\mathbb{R}_1) = (-\infty, x_1)$
3. $f^2(x_1, +\infty) = \mathbb{R}_0$

Note que si $x \in \mathbb{R}_f$ el iterado $f^n(x)$ está bien definido para todo $n \geq 1$.

Definición 1. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ un SAC-1P. f es expansivo si para todo $x \neq y$ en $\mathbb{R}_f$, existe $N > 1$, tal que

$$f^N(x) \cdot f^N(y) < 0.$$

Es importante tomar en cuenta que la existencia de una órbita de período 3, para este tipo de transformaciones, obstruye la existencia tanto de transitividad como de expansividad.

Lema 1. *Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ un SAC-1P. Si existe $\overline{x}$ un punto periódico de período 3, entonces f no es expansiva y no es transitiva.*

Demostración. Suponga que $\overline{x}$ es un punto periódico de período 3 para f. Se denota $\overline{x} = \overline{x_0}$, $f(\overline{x_0}) = f(\overline{x_1})$ y $f^2(\overline{x_0}) = f^2(\overline{x_2})$, note que $f^3(\overline{x_0}) = \overline{x_0} = f(\overline{x_2})$. Suponga que $\overline{x_0} > x_1$, sea $x > \overline{x_0}$, entonces:

$$x_1 > f(x) > f(\overline{x_0}) > f(x_1) = 0$$

luego aplicando f nuevamente, $0 > f^2(x) > \overline{x_2}$, entonces $f^3(x) > f(\overline{x_2}) = \overline{x_0}$, esto significa que $f^3(\overline{x_0}, +\infty) \subset (x_0, +\infty)$. Tomando

$$B = (\overline{x_2}, 0) \cup (\overline{x_1}, x_1) \cup (\overline{x_0}, +\infty)$$

se tiene que $f(B) \subset B$, además $f(x_0, +\infty) = (\overline{x_1}, x_1)$ y $f^2(x_0, +\infty) = (\overline{x_2}, 0)$. Esto muestra que f no es expansiva porque si se considera $x \neq y$ en $(\overline{x_0}, +\infty)$, $f(x) \cdot f(y) > 0$, pues $f(x), f(y)$ entonces en $(\overline{x_1}, x_1)$, también $f^2(x), f^2(y) \in (\overline{x_2}, 0)$, en este caso $f^2(x) \cdot f^2(y) > 0$ y finalmente $f^3(x) \cdot f^3(y) > 0$ pues $f^3(x), f^3(y) \in (\overline{x_0}, +\infty)$.

Como $f(B) \subset B$ y $(-\infty, \overline{x_2}) \cap B = \emptyset$ se sigue que f no es transitiva, pues B es abierto $f^n(B) \subset B$ para todo $n \geq 1$. □

Lema 2. *Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ un SAC-1P. Si existe un punto periódico de período 2, entonces f no es transitiva y no es expansiva.*

Demostración. Sea $\overline{x}$ un punto periódico de período 2 para f. Por el lema 1 $\overline{x} \in (-\infty, 0)$ o $x \in (0, x_1)$, si $\overline{x} \in (-\infty, 0)$ entonces $f(\overline{x}) < x_1$. Luego el conjunto

$$B = (-\infty, \overline{x}] \cup (0, f(\overline{x})]$$

satisface que $f(B) \subset B$ y al igual que en el lema 1 f no es transitiva y no es expansiva. Ahora si $\overline{x} \in (0, x_1)$ entonces tomando

$$B = (-\infty, f(\overline{x})] \cup (0, \overline{x}]$$

se tiene que $f(B) \subset B$, probando lo deseado. □

Lema 3. *Sea f un SAC-1P. Si f es transitiva, entonces f es expansiva.*

Demostración. Suponga que f es transitiva. Suponga que f no es expansiva. Entonces $x \neq y$, tal que

$$f^i(x) \cdot f^j(y), \forall j \geq 0$$

Suponga que $x < y$, lo que significa que

$$f^i([x, y] \cap A_f = \emptyset, \forall j \geq 0$$

se concluye que $f^i([x, y])$ no posee puntos en

$$\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(0).$$

Se denota $I = [x, y]$. Como f no es transitiva existe $k \geq 1$, tal que $f^k(I) \cap I \neq \emptyset$. Siendo f continua y creciente en cada una de las componentes y $f^i(I) \subset \mathbb{R}_{a_j}, \forall i \geq 0$ donde $j = 0$ o $j = 1$, como $f^k(I) \cup I$ es un intervalo. Note que

$$f^{2k}(I) \cap (f^k(I) \cap I) \neq \emptyset$$

Así

$$f^2 k(I) \cup f^k(I) \circ I$$

Es un intervalo y además está contenido en una de las componentes conexas de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{R}_0$ o $\mathbb{R}_1$), continuando con este proceso se construye que

$$J = \bigcup_{n \geq 0} f^{n \cdot k}(I)$$

es un intervalo invariante por f^k, es decir, $f^k(k) \subset J$. Además, $J \cap A_f = \varnothing$, por tanto

$$J_k = J \cup f(J) \cup \cdots \cup f^{k-1}(J)$$

es unión de intervalos que está propiamente contenido en $\mathbb{R}_f$ y $f(J_k) \subset (J_k)$, esto muestra que f no puede ser transitiva, lo cual es una contradicción suponer que f no es expansiva. □

Lema 4. *Sea f un SAC-1P. f es expansiva si, y sólo si, $A_f = \{0\} \cup \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} A_n$, es denso en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga que f es expansiva. Suponga que $A_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \{0\}$, no es denso $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces hay un intervalo J tal que

$$J \cup f^{-n}(0) = \varnothing, \forall n \geqslant 0$$

por lo tanto, $f^n(J) \subset \mathbb{R}_0$ o $f^n(J) \subset \mathbb{R}_1$,$\forall n \geqslant 0$. Ahora bien, sea $x \neq y$ en todo J, por lo tanto como f es expansiva, existe $N > 0$, lo cual $f^N(x) \cdot f^N(y) < 0$, de aquí se tiene que $f^N(J) \cap \mathbb{R}_0 \neq \varnothing$ y $f^N(J) \cap \mathbb{R}_1 \neq \varnothing$. Por tanto, es una contradicción.

($\Leftarrow$) Ahora suponga que $A_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \{0\}$ es denso en $\mathbb{R} \{0\}$. Sea entonces $a \neq b$ en $\mathbb{R}_f$, se considera un $a < b$, siendo A_f denso, entonces existe un $x \in A_f$, tal que $x \in (a, b)$. Sea $N \leq 1$ el mínimo, tal que

$$f^{-n}(0) \cap (a, b) \neq \varnothing$$

Por lo tanto, $f^N(a) \cdot f^N(b) < 0$. □

Lema 5. *Si f es expansiva entonces $\mathbb{R}_f$ es un conjunto totalmente disconexo y $f(\mathbb{R}_f) = \mathbb{R}_f$.*

Demostración. Como f es expansiva por el lema 5, A_f es denso en $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R}_f = \mathbb{R} \setminus A_f$ es totalmente disconexo, es decir, $\mathbb{R}_f$ no contiene intervalos. En lo siguiente se prueba que $f(\mathbb{R}_f) = \mathbb{R}_f$. Para lo cual, sea $x \in \mathbb{R}_f$ y $f(x) \notin A_f$, pues si $f(x) \in A_f$, entonces $x \in A_f$, lo que es una contradicción. Así $f(x) \in \mathbb{R} \setminus A_f = \mathbb{R}_f$, esto muestra que $\mathbb{R}_f \subset f(\mathbb{R}_f)$. Si $y \in f(\mathbb{R}_f)$, entonces existe $x \in \mathbb{R}_f$, tal que $f(x) = y$, como $x \in \mathbb{R}_f$, $f(x) \in \mathbb{R}_f$, luego $y \in \mathbb{R}_f$. □

3 Partición Inducida

Definición 2. Sea K un conjunto finito de $\mathbb{R}$. $\mathbb{P}_K$ denota una partición de $\mathbb{R}$ generada por K, si sus elementos son intervalos de $\mathbb{R}$ que satisfacen:

1. $\partial I \subset K$ y $I \cap K = \varnothing$, para todo $I \in \mathbb{P}_K$.
2. $\bigcup_{I \in \mathbb{P}_K} I = \mathbb{R} \setminus K$;
3. Si $I, J \epsilon \mathbb{P}_K$ con $I \neq j$, entonces $I \cap J = \varnothing$

$\mathbb{P}_K$ es la familia de todas las componentes conexas en $\mathbb{R} \setminus K$.

Lema 6. *Sean $n \geq 1$ y $\mathbb{P}_{A_n}$, la participación generada por A_n. Si I es un átomo de la partición $\mathbb{P}_{A_n}$, entonces $f^n(I) \in \{\mathbb{R}_0, (0, x_1), \mathbb{R}_1\}$.*

Demostración. Por inducción, en el caso $n = 1$ es evidente por la **observación 1** $f(0, x_1) = \mathbb{R}_0$, de aquí:

$$A_1 = \{\mathbb{R}_0, (0, x_1), \mathbb{R}_1\}$$

Se supone que el lema 6 es cierto para algún $n \geq 1$. Sea $J \in \mathbb{P}_{A_{n+1}}$ como $A_n \subset A_{n+1}$, existe $I \in P_{A_n}$, tal que $J \subset I$, por la **observación 1**, se tiene 3 opciones para $f^n(I)$.

1. Si $f^n(I) = \mathbb{R}_0$, entonces por la **observación 1** $f^{n+1}(I) = \mathbb{R}_1$, por lo tanto, $I \cap A_{n+1} = \varnothing$ y por la **definición 4**, $I \in \mathbb{P}_{A_{n+1}}$, lo cual $J = I$, demostrando que $f^{n+1}(J) = \mathbb{R}_0$.
2. Si $f^{n+1} = (x_0, 0)$, por la **observacion 1**, aplicando f, se tiene que $f^{n+1} = \mathbb{R}_0$, por tanto, $I \cap A_{n+1} = \varnothing$, luego por la definición de partición, $I \in \mathbb{P}_{A_{n+1}}$, con $J = I$, lo cual demuestra que $f^{n+1}(J) = (x_0, 0)$.
3. Si $f^n(I) = \mathbb{R}_1$, por la **observación 1**, aplicando f, se tiene que $f^{n+1}(I) = (-\infty, x_1)$, existe $y \in I$, tal que $f^{n+1}(y) = 0$ y por la definición de partición, existe J_1 y J_2 en $\mathbb{P}_{A_{n+1}}$, tal que $J_1 \cup J_2 \cup \{y\} = I$, $\{y\} = \partial J_1 \cup J_2$, $f^{n+1}(J_1) = (X_1, 0)$ y $f^{n+1}(J_2) = \mathbb{R}_1$, por la **definición 4** se tiene que $J = I_1$ o $J = I_2$ en cualquier caso se muestra que

$$f^{n+1}(J) \in \{\mathbb{R}_0, (0, x_1), \mathbb{R}_1\}$$

□

Lema 7. *sea f un SAC, para cada $n > 0$, se tiene que*

$$f^{-n}(\mathbb{R}_0) \cup f^{-n}(\mathbb{R}_1) = \bigcup_{I \in \mathbb{P}_{A_n}} I$$

Demostración. Por inducción. Para $n = 1$ es inmediato por la observación 1. Suponga que la proposición es válida para n. Primero, se usa la hipótesis de inducción, nótese que:

$$f^{-n-1}(\mathbb{R}_0) \cup f^{-n-1}(\mathbb{R}_1) = f^{-n-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \bigcup_{I \in \mathbb{P}_{A_n}} I$$

Sea $x \in f^{-n-1}(\mathbb{R}_0) \cup f^{-n-1}(\mathbb{R}_1)$, entonces $x \in \bigcup_{I \in \mathbb{P}_{A_n}} f^{-1}(I)$, lo cual existe $I \in \mathbb{P}_{A_n}$, tal que $x \in f^{-1}(I)$, como $I \cap A_n = \varnothing$, luego $x \in \mathbb{R} \setminus A_{n+1}$, entonces $x \in \bigcup_{I \in \mathbb{P}_{A_{n+1}}} I$. Por tanto existe un $J \in \mathbb{P}_{An+1}$, tal que $y \in J$. Por consiguiente

$$y \in \bigcup_{I \in \mathbb{P}_{A_n}} f^{-1}(I)$$

□

4 Dinámica Simbólica y Transitividad

En esta sección se mostrará la relación entre la dinámica simbólica asociada al subconjunto $\sum^*(1,2)$ y la dinámica de f restricto a $\mathbb{R}_f$ por medio de un homeomorfismo. Tal relación permitirá la demostración del resultado principal de esta investigación.

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga que f es expansiva. Entonces por el **Lema 5**, $\mathbb{R}_f$ es totalmente disconexo y $f(\mathbb{R}_f) = \mathbb{R}_f$. Se considera la siguiente aplicación $t : \mathbb{R}_f \to \sum^*(1,2)$, queda definida por $t(x) = a$, donde:

$$a_n = \begin{cases} 0 \ si \ f^n(x) < 0 \\ 1 \ si \ f^n(x) > 0 \end{cases}$$

para $n \geq 0$. Por la **observación 1** si $x < 0$, $f(x) > 0$ y $x > 0$, entonces $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$, en este caso si $f(x) > 0$, $f^2(x) < 0$, lo que muestra que t está bien definida. La idea de la demostración es probar que t es una conjugación topológica entre $\sigma^* : \sum^*(1,2) \to \sum^*(1,2)$ y $f\ |_{\mathbb{R}_f} : \mathbb{R}_f \to \mathbb{R}_f$, es decir, se debe probar que t tiene un homeomorfismo y

$$(t \circ f)(x) = (\sigma^* \circ t)(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_f$, se mostrará primero que t es un homeomorfismo.

t **es inyectiva**, sea $x \neq y$ en $\mathbb{R}_f$ y se denota como $a = t(x)$ y $b = t(y)$, siendo f expansiva, existe $N > 1$, tal que el producto $f^N(x) \cdot f^N(y) < 0$; por tanto $a_N = 1$ y $b_N = 0$ o $a_N = 0$ y $b_N = 1$, en cualquier caso $a_N \neq b_N$ y así $a \neq b$.

t **es continua**, sea $\mathbb{R}_f$, se denota como $a = t(x)$.Si $\in> 0$, entonces existe $M > 1$, tal que si $b \in \sum^*(1,2)$, con $a_j = b_j$, $\forall 0 \leq j \leq M+1$, después de esto y como quedó definida t se tiene que $d_2(a,b) <\in$. Por otro lugar, existe $I \in \mathbb{P}_{A_{M+1}}$. De aquí se sigue que

$$f^i(I) \cap \{0\} = \emptyset, \forall 0 < j < M+1$$

Sea $\delta = d(x, \partial I)$, entonces para

$$y \in (x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{R}_f \subset I$$

se tiene

$$f^i(y) \in \mathbb{R}_{a_j}, \forall 0 \leq J \leq M$$

Ahora bien, llamando $b = t(y)$ se concluye que

$$d_2(t(x), t(y)) <\in$$

t **es sobreyectiva**, sea

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots) \in \sum^*(1,2)$$

también se debe tomar en cuenta el hecho de que $\mathbb{R}_0 = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}_1 = (0, +\infty)$, se considera el siguiente conjunto:

$H_0 = \mathbb{R}_{a_0}$;
$H_1 = \mathbb{R}_{a_0} \cap f^{-1}(\mathbb{R}_{a_1})$;
.
.
.
$H_n = \mathbb{R}_{a_0} \cap f^{-1}(\mathbb{R}_{a_1}) \cap \cdots \cap f^{-n}(\mathbb{R}_{a_n}), \forall n \geq 1$;

Note que

$$H_{n+1} \subset H_n, \quad \forall n \geq 0$$

Afirmación 1: $H_n \neq \varnothing$ y $H_n \in \mathbb{P}_{A_n}$

Demostración. Por inducción. Para $n = 1$ la proposición es válida. Note que $H_0 = \mathbb{R}_0$ o $\mathbb{R}_1$ y $f^{-1}(0) = \{x_1\}$. Aquí $A_1 = \{0, x_1\}$. Además $f^{-1}(\mathbb{R}_0) = (0, x_1)$ y $f^{-1}(\mathbb{R}_1) = (-\infty, 0) \cup (x_0, +\infty)$ en cualquier caso $H_1 \in \mathbb{P}$ y $H_1 \neq \varnothing$ pues $H_1 = \mathbb{R}_0 \cap f^{-1}(\mathbb{R}_1)$ o $H_1 = \mathbb{R}_1 \cap f^{-1}(\mathbb{R}_0)$ o $H_1 = \mathbb{R}_1 \cap f^{-1}(\mathbb{R}_1$. Note que el caso $\mathbb{R}_0 \cap f^{-1}(\mathbb{R}_0)$ no está considerado.

Suponga que $H_n \neq \varnothing$ y $H_n \in \mathbb{P}_{A_n}$ como $a \in \sum^*(1,2)$ $H_{n+1} \neq \varnothing$. Falta ver que $H_{n+1} \in \mathbb{P}_{A_{n+1}}$, para ello si $f^{-n-1}(0) \cap H_n = \varnothing$ existe $I \in \mathbb{P}_{A_{n+1}}$. Por el **Lema 7** y con el hecho de que $H_{n+1} \neq \varnothing$ existe $I \in \mathbb{P}_{A_{n+1}}$ tal que $H_{n+1} = H_n \cap I \neq \varnothing$. Luego, por la **definición 4.3** $H_n = I$, donde se obtuvo que $H_{n+1} \in \mathbb{P}_{A_{n+1}}$. Después, si $f^{n+1}(y) = 0$ entonces, por la **definición 7** y además que $A_n \subset A_{n+1}$, existen I_2 y I_2 en $\mathbb{P}_{A_{n+1}}$ disjuntos tal que $I_1 \cup I_2 = H_n \setminus \{y\}$. De esto y por **Lema 6**, si $f^{n+1}(I_1) \subset \mathbb{R}_1$, entonces $f^{n+1}(I_2) \subset \mathbb{R}_0$ o viceversa. Por tanto I_1 e I_2 está contenido $f^{-n-1}(\mathbb{R}_{a_{n+1}})$. Por el **Lema 7** $H_{n+1} = H_n \cap I_1$ o $H_{n+1} = H_n \cap I_2$, en cualquiera de los casos $H_{n+1} \in \mathbb{P}_{A_{n+1}}$. Encontrando el resultado deseado dentro de la afirmación 1. □

Afirmación 2: Existe $N \geq 1$ tal que H_N es un átomo acotado de $\mathbb{P}_{A_N}$.

Demostración. Suponga que H_n no es acotado para todo $N \geq 1$. **Caso 1.** Si $a_0 = 0$ entonces, $a_2 = 0$ y $a_{ak+1} = 1 \quad \forall k \neq 0$. Por inducción $k = 0$, $H_0 = \mathbb{R}_0$ y $f^{-1}(\mathbb{R}_1) = (-\infty, 0) \cup (x_1, +\infty)$, es decir, $a_1 = 1$.

Suponga que $a_{2k} = 0$ y $a_{2k+1} = 1$ para algún $k \geq 0$. Entonces, de esto y **Lema 6**, se sigue que $f^{2k}(H_{2k}) = \mathbb{R}_0$ y $f^{2k+1}(H_{2k}) = \mathbb{R}_1$, por lo tanto, $f^{2k+1}(H_{2k+1}) = (0, x_1)$, por ser H_{2k+1} no acotado $f^{2k+2}(H_{2k+1}) = \mathbb{R}_0$, esto implica que $f^{-2k-2}(0) \cap H_{2k+1} = \varnothing$, en este caso $H_{2k+1} = H_{2k+2}$. Así $f^{2k+2}(H_{2k+2}) = \mathbb{R}_0$ luego $a_{2k+2} = 0$. Entonces $f^{2(k+1)+1}(H_{2(k+1)}) = \mathbb{R}_1$, $H_{2(k+1)+1} \subset H_{2(k+1)}$ de hecho $f^{2(k+1)+1}(H_{2(k+1)+1}) \subset \mathbb{R}_1$ así $a_{2(k+1)+1} = 1$.

Caso 2. Si $a_0 = 1$ entonces, $a_{3k} = 1$, $a_{3k+1} = 1$ y $a_{3k+2} = 0$

Por inducción en k. Como $H_0 = \mathbb{R}_1$ entonces, $H_1 = (x_1, +\infty)$. Por la **Observación 1.3** $f^2(H_1) = \mathbb{R}_0$ por tanto $a_2 = 0$. Esto prueba el caso $k = 0$.

Suponga $a_{3k} = a_{3k+1} = 1$ y $a_{3k+2} = 0$ para algún $k \geq 0$. **Lema 6** y que $a_{3k+1} = 1$, $f^{3k}(H_3k) = \mathbb{R}_1$, $f^{3k+1}(H_{3k+1}) = (0, x_1)$ y $f^{3k+2}(H_{3k+2}) = \mathbb{R}_0$. Note que $f^{3k+3}(H_{3k+2}) = \mathbb{R}_1$, como $H_{3k+3} \subset H_{3K+2}$ entonces, $a_{3k+3} = 1$ además, H_{3k+3} es no acotado entonces, $f^{3k+3}(H_{3k+3}) = \mathbb{R}_1$. Ya que $f^{3(k+1)+1}(H_{3(k+1)}) = (-\infty, x_1)$ existe

$y \in H_{3(k+1)}$ tal que $f^{3(k+1)+1}(y) = 0$. Como f es creciente en cada componente conexa de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $H_{3(K+1)+1} = (y, +\infty)$ y $f^{3(k+1)+1}(H_{3(k+1)+1}) = (0, x_1)$ así $a_{3(k+1)+1} = 1$ y $a_{3(k+1)+2} = 0$, con esto termina la prueba de la afirmación 2. □

Afirmación 3: Si $x \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{H_n}$, entonces $x \in \mathbb{R}_f$.

Demostración. Suponga que $x \notin \mathbb{R}_f$, entonces por la **afirmación 2** existe $N \notin 1$ tal que H_N es acotado. Por la **afirmación 1** existe $y \in A_N$ tal que $H_N = (x, y)$ o $H_N = (y, x)$, los siguientes casos posibles:

Caso 1: Si $H_N = (x, y)$ y $a_N = 1$ entonces,

$$a_{N+2K} = 1 \quad y \quad a_{N+2k+1} = 0, \quad \forall k \geq 0 \tag{1}$$

Se probará por inducción en k. De la **afirmación 2 y lema 6** $f^N(H_N) = (0, x_1)$ o $f^N(H_N) = \mathbb{R}_1$. Si $f^N(H_N) = (0, x_1)$ entonces, $f^{N+1}(H_{N+1}) = \mathbb{R}_0$ en este caso $a_{N+1} = 0$. Ahora, si $f^N(H_N) = \mathbb{R}_1$, existe $y_1 \in (x, y) = H_N$ tal que $f^{N+1}(y_1) = 0$. Entonces, $f^{N+1}(H_{N+1}) = (-\infty, 0) = \mathbb{R}_0$ o $f^{N+1}(H_{N+1}) = (0, x_1)$ como $x \in H_{N+1}$ se tiene que $H_{N+1} = (x, y_1)$ y como f^N es creciente en H_N, $f^{N+1}(H_{N+1}) = (-\infty, 0) = \mathbb{R}_0$ así $a_{N+1} = 0$ esto muestra que (1) es verdadero para $k = 0$.

Suponga que (1) es verdadero para algún $k \geq 0$, esto implica que $f^{N+2k}(H_{N+2k+1}) = \mathbb{R}_0$ por **observación 1 y lema 6**. Por tanto $f^{N+2k+1}(H_{N+2k+1}) = \mathbb{R}_1$ así $a_{N+2k+2} = 1$ y $H_{N+2k+1} = H_{N+2k+2}$. Note que $f^{N+2(k+1)+1}(H_{N+2(k+1)}) = (-\infty, x_1)$, razonando igual que el caso $k = 0$,

$$f^{N+2(k+1)+1}(H_{N+2(k+1)+1}) = \mathbb{R}_0 \quad y \quad así \quad a_{N+2(k+1)+1} = 0$$

esto prueba **Caso 1**.

Caso 2: Si $H_N = (x, y)$ y $a_N = 0$, entonces

$$a_{N+2k} = 0 \quad y \quad a_{N+2k+1} = 1, \quad \forall k \geq 0$$

Se probará por inducción k.

Por el **Lema 6** $f^N(H_N) = \mathbb{R}_0$ y por la **observación 1** $f^{N+1} = (0, x_1)$ o $f^{N+1}(H_{N+1}) = \mathbb{R}_1$, en cualquier caso $a_{N+1} = 1$.

Suponga que la afirmación es verdadera para algún $k \geq 0$, entonces por el **Lema 6**, $f^{N+2k+1}(H_{N+2k+1}) = (0, x_1)$ o $f^{N+2k+1}(H_{N+2k+1}) = \mathbb{R}_1$. Si $f^{N+2k+1}(H_{N+2k+1}) = (0, x_1)$ por **observación 1 y lema 6** $a_{N+2(k+1)} = 0$ y $a_{N+2(k+1)+1} = 1$. Ahora, si $f^{N+2k+1}(H_{N+2k+1}) = \mathbb{R}_1$ por **observación 1**, se tiene que existe $y_2 \in H_{N+2k+1}$, tal que $f^{N+2k+2}(y_2) = 0$. Como $x \in \overline{H_{N+2k+2}}$, del **Lema 6 y afirmación 2** $f^{N+2(k+1)}(H_{N+2(k+1)}) = (-\infty, 0) = \mathbb{R}_0$ de esto y **observación 1** $a_{N+2(k+1)} = 0$ y $a_{N+2(k+1)+1} = 1$

Caso 3: Si $H_N = (y, x)$ y $a_N = 1$, entonces $\sigma^N(a)$ es una órbita periódica de período 3.

Se probará esto, por **Lema 6** se tiene que $f^N(H_N) = (0, x_1)$ o $f^N(H_N) = \mathbb{R}_1$, en este caso por **observación 1**, $f^{N+1}(H_N) = (-\infty, x_1)$ y razonando igual que antes y el hecho que $x \in H_n, \quad \forall n \geq 0$ se puede probar sin problemas.

Caso 4: Si $H_N = (y, x)$ y $a_N = 0$ entonces, $\sigma^N(a)$ es una órbita de período 3, de hecho $a_{N+3k} = 0$, $a_{N+3k+1} = 1$, $a_{N+3k+2} = 1$, $\forall \geq 0$. Por **Lema 6** $f^N(H_N) = \mathbb{R}_0$, luego $f^{N+1}(H_{N+1}) = \mathbb{R}_1$ y $f^{N+2}(\underline{H_{N+1})} = (-\infty, x_1)$ esto implica que existe un $y_3 \in H_{N+1}$ tal que $f^{N+1}(y_3) = 0$ como $x \in \overline{H_{N+2}}$ y $H_{N+2} \subset (y, x)$, se tiene que $f^{N+2}(H_{N+2}) = (0, x_1)$. Así $a_N = 0$, $a_{N+1} = 1$ y $a_{N+2} = 1$ usando el mismo razonamiento se puede probar por inducción en k **Caso 4**.

En conclusión de los 4 casos, $\sigma^N(a)$ es una órbita períodica de período 2 o 3 pero esto es una contradicción. Así $x \in \mathbb{R}_f$, por tanto t es sobreyectiva.

h^{-1} **es continua**. Sea $a \in \sum^*(1,2)$. Se denota $x = h^{-1}(a)$. Sea $\epsilon > 0$. De la manera que se construyeron los H_n en la prueba de h es sobreyectiva, tenemos que $x \in H_n$ para todo $n \geq 1$. Entonces, el $diam(H_n) \to 0$, cuando $n \to +\infty$. Por lo tanto, existe un $N > 1$ tal que $H_N \subset (x-\epsilon, x+\epsilon$. Por otro lado , existe $\delta > 0$ tal que si $b \in \sum^*(1,2)$ con $d_2(a,b) < \delta$ entonces $a_j = b_j$ para todo $0 \leq j \leq N$. Entonces, $y = h^{-1}(b) \in H_j$ para todo $0 \leq j \leq N$, es decir, $y = h^{-1}(b) \in H_n \subset (x - c, x + c)$. Asi queda probada la continuidad de h^{-1}.

Para finalizar, falta probar que $t \circ f = \sigma^* \circ h$. Para ello, sea $x \in \mathbb{R}_f$ y denotando $a = f(f(x))$ se tiene que $a_n = 0$, si $f^{n+1}(x) < 0$ o $a_n = 1$, si $f^{n+1}(x) > 0$ para todo $n \geq 0$. Por otro lado si $b = h(x)$, se tiene que, $\sigma^*(t(x)) = (b_1, b_2, b_3, \cdots)$. Note que $(b_1, b_2, b_3, \cdots) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$. Lo que muestra que $h \circ f(x) = \sigma^* \circ h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}_f$. □

5 Conclusiones

Del resultado principal y de la técnica que se usó para demostrarlo, se concluye:

1. Sea f es un SAC-1P y expansiva, en el **teorema 1** se demostró que $f|_{\mathbb{R}_f}$ es topológicamente conjugado al shit σ^*, y como el conjunto de puntos periódicos $Per(\sigma^*)$ es denso en $\sum^*(1,2)$, se tiene $Per(f)$ es denso en $\mathbb{R}$.
2. Sean f y g dos SAC-1P. Como ambas funciones son topológicamente conjugados a σ^*, digamos que por $t_f : \mathbb{R}_f \to \sum^*(1,2)$ y $t_g : \mathbb{R}_g \to \sum^*(1,2)$ respectivamente. Entonces $t_g^{-1} \circ t_f$ es una conjugación topológica entre f y g, lo que significa que posee a misma dinámica.

6 Bibliografía

Referencias

Anosov, D. V. (1967). Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni VA Steklova*, *90*, 3–210.

Boole, G. (1857). XXXVI. On the comparison of transcendents, with certain applications to the theory of definite integrals. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*(147), 745–803.

Iñiguez, A., y Ruiz Leal, B. (2021). Atractores en funciones lineales crecientes por parte en la recta real. *Revista Digital Novasinergia*, *4*(2), 48–61.

Leal, B., Mata, G., y Muñoz, S. (2018). Families of transitive maps on R with horizontal asymptotes. *Rev. Un. Mat. Argentina*, *59*(2).

Leal, B., Mata, G., y Ramírez, D. (2018). Traslaciones de Transformaciones Tipo Boole Robustamente Transitivas. *Revista Digital Novasinergia*, *1*(1), 1–13.

Leal, B., y Muñoz, S. (2021). Hénon–Devaney like maps. *Nonlinearity*, *34*(5), 2878.

Leal, B., y Muñoz, S. (2022). Invariant cantor sets in the parametrized Hénon-Devaney map. *Dynamical Systems*, *37*(1), 105–126.

Leal, B., Tineo, y Lugo. (2022). Una nota de transitividad de transformaciones crecientes a trozos sobre R. *Selecciones matemáticas*, *9*.

Lenarduzzi, F. (2016). Heneralized Hénon-Devaney Maps of the plane. *IMPA*, *Tesis Doctoral*.

Lenarduzzi, F. (2019). Recoding the Classic Hénon-Devaney Map. *arXiv preprint arXiv:1912.06293*.

Muñoz, S. (2015). Robust transitivity of maps of the real line. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, *35*(3), 1163.

Muñoz, S. (2006). Robust transitivity and ergodicity of transformations of the real line and real plane. *IMPA*, *Tesis Doctoral*.