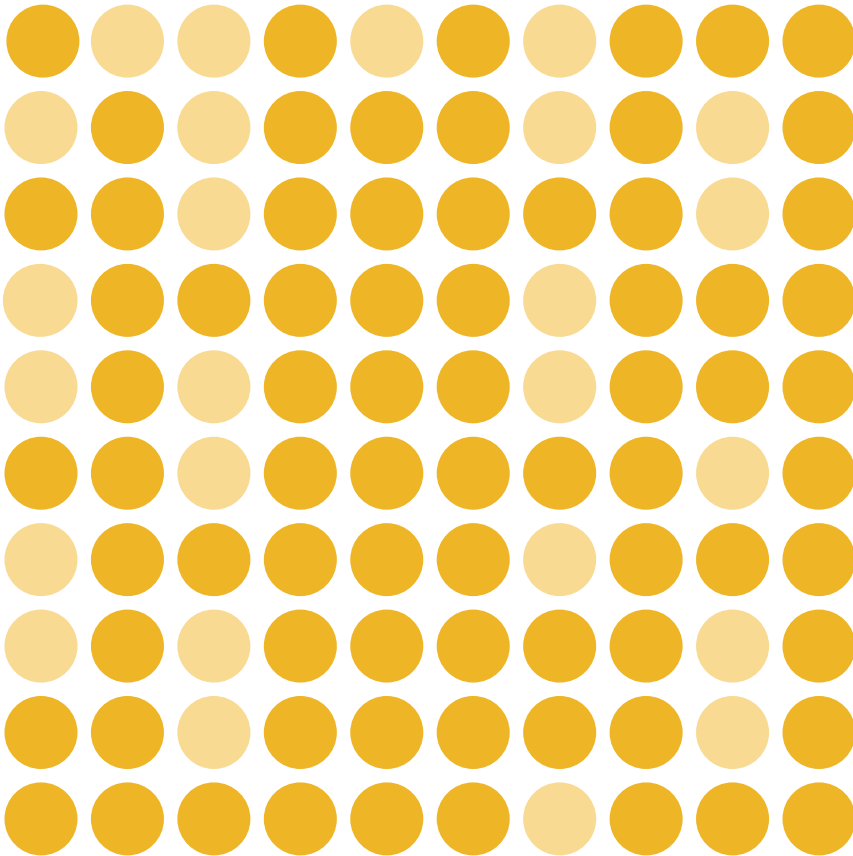


SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 16 • 2022**
Siegener Beiträge zur
Geschichte und Philosophie
der Mathematik



Mit Beiträgen von

**S. Berendonk | H. Boehme | C. H. Hoffmann |
D. Koenig | J. Lemanski | J. Özel |
F. Pielsticker und I. Witzke | Š. Porubský |
D. Rami | R. Tobies**

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

**Siegener Beiträge
zur Geschichte und Philosophie der Mathematik**

Band 16 (2022)

Mit Beiträgen von:

S. Berendonk | H. Boehme | C. H. Hoffmann | D. Koenig | J. Lemanski
J. Özel | F. Pielsticker und I. Witzke | Š. Porubský | D. Rami | R. Tobies

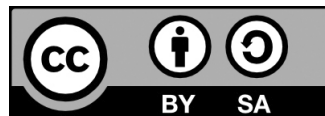
Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 16 (2022)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

Rechte: bei den Herausgebern/den Autoren

universi – Universitätsverlag Siegen 2022



Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
universi – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
<i>Harald Boehme</i>	
Von Theodoros bis Speusippos. Zur Entdeckung des Inkommensurablen sowie der Seiten- und Diagonalzahlen	5
<i>Jasmin Özel</i>	
Diagrammatisches Denken bei Euklid	63
<i>Christian Hugo Hoffmann</i>	
Der Hauptsatz in der Ars conjectandi: Interpretationen von Bernoullis Beiträgen zu den Anfängen der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie	79
<i>Jens Lemanski</i>	
Schopenhauers Logikdiagramme in den Mathematiklehrbüchern Adolph Diesterwegs	101
<i>Dolf Rami</i>	
Frege über Merkmale von Begriffen	133
<i>Daniel Koenig</i>	
Der Raum als Reihenbegriff – Ernst Cassirers Deutung der Geometrieentwicklung des 19. Jahrhunderts	175
<i>Renate Tobies</i>	
Zum 100-jährigen Jubiläum des Ernst Abbe-Gedächtnispreises	199
<i>Štefan Porubský</i>	
Štefan Schwarz und die Entstehung der Halbgruppentheorie	221
<i>Stephan Berendonk</i>	
Ein dialektischer Weg zur Summe der Kubikzahlen	235
<i>Felicitas Pielsticker & Ingo Witzke</i>	
Devilish prime factorization – fundamental theorem of arithmetic	251
Adressen der Autoren	261

Schopenhauers Logikdiagramme in den Mathematiklehrbüchern Adolph Diesterwegs

Jens Lemanski

1 Einleitung

Erst seit Mitte der 2010er Jahre hat man sich in der Forschung verstärkt auf zwei Bereiche des Werks Arthur Schopenhauers (1788–1860) konzentriert: Seine Logik und seine Philosophie der Mathematik. Dabei ist aufgefallen, dass wesentliche Texte, die Schopenhauer für seine *Berliner Vorlesungen* aus den 1820er Jahren verfasst hat, nie intensiv in der Forschung zur Kenntnis genommen wurden. Diese Texte zeigen sowohl in der Logik als auch in der Philosophie der Mathematik eine starke Verwandtschaft: Schopenhauer argumentiert dafür, dass weder Mathematik auf Logik noch Logik auf Mathematik zurückgeführt werden soll, sondern dass beide Disziplinen auf der reinen Anschauung beruhen. Wie in der von Immanuel Kant (1724–1804) begründeten Transzendentalphilosophie üblich, ist diese Anschauung zwar nicht notwendigerweise sinnlich, kann aber durch Diagramme in der Logik oder durch Figuren in der Mathematik versinnlicht werden.

Die Entdeckung der schopenhauerschen Logik und Philosophie der Mathematik hat weitreichende Folgen für das Verständnis der Philosophie Schopenhauers und deren Rezeptionsgeschichte: Hatten Historiker und Biographen aufgrund der Nichtbeachtung der Mathematik und Logik Schopenhauers bis vor Kurzem noch angenommen, dass Schopenhauers Werk erst langsam ab den 1840er an Popularität gewinnt, so zeigen erste Blicke in Werke der Logik und Mathematik, dass Schopenhauers Ansatz bereits in den 1820er Jahren rezipiert und auch produktiv in anderen Bereichen angewandt wurde.

Ein Beispiel für diese Rezeption und Fortführung der schopenhauerschen Ideen findet man im Werk Friedrich Adolph Wilhelm Diesterwegs (1790–1866): Dieser honoriert bereits in den frühen 1820er Jahren Schopenhauers Leistungen, insbesondere im Bereich der Logik und Mathematik, und führt seine Impulse fort. Eine Idee betrifft einen besonderen Typus von Logikdiagrammen, den Schopenhauer verstärkt erforscht hat, nämlich das sogenannte Partitionsdiagramm. Schopenhauer verwendet diese Diagramme, um damit Begriffsanalysen in der Wissenschaft und Alltagssprache zu visualisieren. Partitionsdiagramme haben die Besonderheit, sowohl das Art- und Gattungsverhältnis von Begriffen als auch die Oppositionsstrukturen (Kontradiktion, Kontrarität, Subkontrarität, Subalternation) anzuzeigen. Diese schopenhauersche Methode wurde von Diesterweg aufgegriffen, fortgeführt und konsequent in der Mathematik angewandt.

In den folgenden Kapiteln soll die historische und auch die systematische Dimension dieser Anwendung von Logikdiagramme auf die Mathematik skizziert werden. In Kapitel 2 wird zunächst die frühe Rezeption der schopenhauerschen Logik und Philosophie der Mathematik vorgestellt. Dabei werden einige oftmals tradierte Vorurteile, die das Werk Schopenhauers betreffen, in Frage gestellt oder sogar ausgeräumt. In Kapitel 3 wird dann die Philosophie der Mathematik und der Logik Schopenhauers vorgestellt. Es wird gezeigt, dass Schopenhauers Logikdiagramme auf Ideen der Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783), Bernhard Friedrich Thibaut (1775–1832) und Franz Ferdinand Schweins (1780–1856) zurückgehen und dass Schopenhauer diese Logikdiagramme auch bereits zur Analyse mathematischer Begriffe verwendet. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Schopenhauer-Rezeption Diesterwegs. Es wird die Frage behandelt, inwieweit Diesterweg in der Mathematik von Schopenhauer beeinflusst war und welche Rolle dieser Einfluss auf sein Verständnis von Logik und Mathematik hatte. In Kapitel 5 wird schließlich gezeigt, dass Diesterweg die schopenhauersche Begriffsanalyse der Mathematik mit Hilfe von Logikdiagrammen aufgreift und weiterführt. Da Diesterweg einer der einflussreichsten Pädagogen und Mathematikdidaktiker des 20. Jahrhunderts war, ist anzunehmen, dass sich Spuren dieser Methode noch heute finden lassen. Inwiefern dies wahrscheinlich ist, wird in der Zusammenfassung (Kapitel 6) thematisiert.

2 Die frühe Schopenhauer-Rezeption

Arthur Schopenhauer ist ein Name, der in der Vergangenheit selten mit Logik und Mathematik in Verbindung gebracht wurde. Mit dem 1788 in Danzig geborenen und 1860 in Frankfurt am Main gestorbenen Philosophen werden meist andere Assoziationen verbunden: Er gilt als Nachfolger Kants, als jemand, der erste Ideen

für den Tierschutz formuliert, die eurozentristische Perspektive auf die Philosophie überwunden und die aufklärerisch-atheistische Religionsphilosophie auf den Weg gebracht hat. Seine Meinungen zur Sexualität haben ihm aber nicht selten – und auch nicht unberechtigt – den Vorwurf der Misogynie eingetragen.

Dem Anspruch der Systemphilosophie folgend behandelt Schopenhauer in seinem Werk die damals wichtigsten Disziplinen der Philosophie wie Erkenntnislehre, Metaphysik, Naturphilosophie, Ästhetik und praktische Philosophie. Einzelne Abhandlungen Schopenhauers zur Optik, Farbenlehre und zur Evolution haben auch in den Naturwissenschaften des 19. Jahrhunderts Spuren hinterlassen.

Das Werk Schopenhauers polarisiert bis heute. Das gilt selbst für die Schopenhauer-Forschung. Einige dieser Streitpunkte, die für die folgenden Kapitel relevant sind, betreffen 1) Schopenhauers Hochschulkarriere, 2) seine Beziehung zu Logik und Mathematik, 3) die verspätete Rezeptionsgeschichte. Zuerst sollen die oftmals tradierten Vorurteile zu Wort kommen, danach das revidierte Bild der gegenwärtigen Forschung.

2.1 Die übliche Geschichtsschreibung

Die übliche Geschichtsschreibung zur schopenhauerschen Philosophie hat sich im späten 19. Jahrhundert entwickelt und bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts gefestigt, so dass man heutzutage nahezu unisono in vielen Lexika, Philosophiegeschichten und Biographien dieselben Vorurteile und Gemeinplätze zu Schopenhauer findet. In Hinblick auf die drei oben genannten Themen liest man meist folgendes:

1) Zunächst finden sich zahlreiche Legenden über Schopenhauer als Hochschullehrer. Schopenhauer hat sich Anfang 1820 mit seinem Hauptwerk *Die Welt als Wille und Vorstellung* an der Universität in Berlin habilitiert. Bereits bei seiner Probevorlesung sei es zu einem Streitgespräch mit Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831) gekommen, und Schopenhauer habe dann absichtlich seine Vorlesung als Konkurrenzveranstaltung zu Hegel gehalten. Er sei als ‘Rächer’ aufgetreten, der alle anderen Philosophen seiner Zeit verhöhnt habe. Da aber nur drei Studenten diese Vorlesung besucht haben, habe Schopenhauer sie nie wieder gehalten und schnell von seiner Hochschulkarriere Abstand genommen. Schopenhauer sei daher eine Art ‘Künstlerphilosoph’, der sich nie ernsthaft für seine akademische Karriere und damit auch für fachphilosophische oder wissenschaftliche Themen interessiert habe.

2) Zu Mathematik und Logik habe Schopenhauer zudem auch eine schlechte Beziehung: Erstens habe Schopenhauer kaum etwas zu beiden Disziplinen geschrieben,

höchstens ein paar einzelne Absätze oder Paragraphen, die aber im Gesamtwerk schnell untergehen. Zweitens habe er sich in diesen wenigen Kapitel immer negativ über den Wert der Logik und Mathematik geäußert. Drittens sei seine Philosophie eher ein Ausdruck eines Irrationalismus, da Schopenhauer im Unterschied zu Hegel oder Kant der Vernunft keinen besonderen Wert beilegt, sondern alles auf einem irrationalen Willen basieren lässt. Schopenhauer sei daher kein Logiker, und auch zur Mathematik könne er keine profunden Aussagen geliefert haben, da er selbst keine Kenntnisse von der Mathematik besaß.

3) Schopenhauer hat 1818 sein Hauptwerk *Die Welt als Wille und Vorstellung* publiziert, es wurde spärlich rezensiert und dabei zwischen wohlwollend bis vernichtend beurteilt. Erst in den 1840er Jahren wuchs dann der Zuspruch zu seiner Philosophie; Anhänger unterschiedlicher Disziplinen und Lebensbereiche schlossen sich Schopenhauer an und ab 1850 wuchs sein Ruhm so stark, dass er bis zum Ende des 19. Jahrhunderts einer der meistgelesenen Philosophen Deutschlands wurde.

Derartige Aussagen findet man selbst in den sehr verdienstvollen Biographien und historischen Arbeiten zu Schopenhauer aus dem späten 20. und frühen 21. Jahrhundert, wie z. B. bei (Safranski 1987, S. 237, 387, 484ff.), (Cartwright 2010, 380ff.), (Jacquette 2012).

2.2 Die revidierte Geschichtsschreibung

Allen drei genannten Punkten kann man mit eindeutigen Fakten oder zumindest mit stichhaltigen Interpretationen begegnen, die in der Forschung der letzten Jahrzehnte entstanden sind:

ad 1) Wie viele Studenten tatsächlich Schopenhauers Vorlesung besucht haben, ist nicht bekannt. Zwar gibt es nur Hinweise auf wenige eingeschriebene Studenten, aber oftmals saßen in Berliner Vorlesungen des frühen 19. Jahrhunderts auch viele Gäste. Schopenhauer hat sich zudem intensiv darum bemüht, seine akademische Karriere an anderen Universitäten fortzuführen. In dieser Zeit hat er sich intensiv mit Themen beschäftigt, die für die akademische Philosophie relevant waren: Seiner Meinung nach war dies vor allem Logik (Schopenhauer 1913, S. 72).¹ Eine neue und sehr differenzierte Betrachtung dieses ersten Punktes gibt (Schubbe 2022).

1. Im Folgenden wird die frei im Internet zugängliche Mockrauer/Deussen-Edition der *Berliner Vorlesungen* zitiert (Schopenhauer 1913). Zur intensiveren Lektüre eignet sich aber die Neuedition (Schopenhauer 2022) weitaus besser. Mit Hilfe der dort befindlichen Seitenkonkordanz lassen sich die Referenzen schnell wiederfinden.

ad 2) Wie zuvor beschrieben, hat sich Schopenhauer in der Zeit, als er an seiner akademischen Karriere festhielt, d.h. bis zum Beginn der 1830er Jahre, sehr intensiv mit Logik beschäftigt. Er hat in dieser Zeit sein Hauptwerk, *Die Welt als Wille und Vorstellung*, für ein akademisches Publikum ausgearbeitet. Dabei entstand ein etwa 150seitiges Manuskript zur Logik, das als Druckfassung einer ganzen Monographie gleichgekommen wäre. In diesem Zusammenhang hat Schopenhauer auch seine Philosophie der Mathematik überarbeitet. Wenn Schopenhauer zudem der Mathematik und Logik einen Wert abspricht, dann tut er dies gegenüber seinem nicht-akademischen Publikum. Er ist nämlich der Meinung, dass sich der Bildungsbürger nicht intensiv mit diesen beiden Disziplinen beschäftigen muss, um ein Urteil über die Sachverhalte fällen zu müssen, mit denen man im Alltags- und Berufsleben konfrontiert ist. An der Universität, also in Gegenwart eines akademischen Publikums, hat Schopenhauer allerdings das Gegenteil gelehrt. Und da er selbst in Göttingen ein Semester Mathematik bei Bernhard Friedrich Thibaut studiert hat und ein intensives Studium der Logik betrieben hat, ist das Vorurteil (2) ungerechtfertigt. Neue und sehr differenzierte Betrachtungen zu diesem zweiten Punkt geben (Heinemann 2020) und (Segala 2020).

ad 3) Tatsächlich setzt die breite Aufnahme aller schopenhauerschen Schriften erst zunehmend ab den 1840er Jahren ein. Allerdings ist es falsch, wie Historiker und Biographen immer wieder behauptet haben, dass Schopenhauer zuvor gar nicht zur Kenntnis genommen wurde. Bereits die wenigen kleineren Schriften zur Logik und Mathematik Schopenhauers wurden in den 1820er Jahren rezipiert und zum Teil sehr produktiv fortgeführt. Da Schopenhauer sich aber nach dem Ende seiner Universitätskarriere fast gar nicht mehr für Logik interessiert hat, sind ihm selbst auch die Diskussionen um seine Schriften in diesem Bereich entgangen. Als Beispiel für die frühe Rezeption kann man Johann Friedrich Herbart (*Lehrbuch* 1821, §72), August Twisten (*Logik* 1825, §24), Carl Friedrich Bachmann (*Logik* 1828, §26) nennen. Herausragende Beispiele für die Anwendung der Logikdiagramme sind zum einen die *Eristik* in der 1824 von Ignaz Denzinger (1782–1862) publizierte *Institutiones Logicae* und zum anderen die Mathematiklehrbücher von Adolph Diesterweg ab den frühen 1820er Jahren. Eine differenzierte Betrachtung der schopenhauerschen Philosophie der Mathematik und Logik findet sich im folgenden Kapitel.

3 Schopenhauers Philosophie der Mathematik und Logik

Schopenhauers Philosophie der Mathematik und Logik zeichnet sich dadurch aus, dass der Anschauung eine zentrale Rolle zukommt (3.1). Im besonderen wird dies deutlich, wenn man den Fokus auf die Urteilslehre in der Logik legt (3.2). Dabei zeigt sich, wie Schopenhauer anhand von Schweins Mathematiklehrbuch eine geometrische Formenlehre auf die Logik anwendet, um damit eine transzendentalphilosophische Urteilslehre zu entwickeln. In dieser wird ein von Schopenhauer entwickelter Typus von Logikdiagrammen vorgestellt, der zur Analyse mathematischer Begriffe eingesetzt werden kann (3.3). Diese Idee wird später von Diesterweg aufgegriffen und fortgeführt.

3.1 Anschauung und Begründung in Schopenhauers Philosophie der Mathematik

Eine Besonderheit von Schopenhauers Philosophie der Logik und Mathematik ist die Anschauungsbezogenheit. Zunächst scheint dies nicht untypisch für das frühe 19. Jahrhundert zu sein. Nimmt man einen sehr generellen Standpunkt ein, so kann man sagen, dass man damals zwischen zwei grundsätzlichen Vermögen des Geistes unterschieden hat: Verstand und Vernunft. Der Verstand (und damit auch die Sinnlichkeit) ist anschaulicher, die Vernunft begrifflicher Natur. Je nach Gewichtung lassen sich somit die jeweiligen Philosophien des frühen 19. Jahrhunderts klassifizieren: Während Rationalisten und Autoren, die dem deutschen Idealismus zugerechnet werden, insbesondere Hegel, die Rolle der Anschauung abgewertet haben, setzen sich in der Nachfolge Kants mehrere Strömungen im 19. Jahrhundert durch, die der Anschauung eine zentrale Rolle zuweisen, z.B. Herbartianer, Krausianer, Trendelenburgianer oder Schopenhauerianer (Mach 1906, S. 402).

Schopenhauer nimmt unter den anschauungsbezogenen Philosophen zudem eine Extremposition ein. Während einige versuchen, entweder die Logik auf die Mathematik zu gründen oder die Mathematik auf die Logik, so versucht Schopenhauer beide auf die Anschauung zurückzuführen. Wie extrem Schopenhauers Position dabei war, wird besonders an den Reaktionen des späten 19. Jahrhunderts und frühen 20. Jahrhunderts deutlich, als durch Aufkommen der nicht-euklidischen Geometrie und der Monsterkurven in der Analysis der Anschauung immer weniger Beachtung geschenkt wurde (Volkert 1986).

Um Schopenhauers Extremposition genauer zu verstehen, muss man sich seine Wissenschaftslehre ansehen, bei welcher der Satz vom Grund (principium rationis) eine zentrale Rolle spielt. Schopenhauer differenziert diesen Grundsatz in vier Klassen oder auch 'Wurzeln', von denen jeder durch ein anderes subjektives Vermögen organisiert wird, jeder Bereich einer anderen Gesetzmäßigkeit unterliegt und in unterschiedlichen Wissenschaften angewandt wird. Die nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht über diese vier Grundsätze:²

Satz vom Grunde	Subjektives Vermögen	Bereiche	Wissenschaft
des Werdens	Verstand	Kausalität	Physik, Chemie, Geologie
des Erkennens	Vernunft	Begriffe	Botanik, Zoologie, Mineralogie
des Seins	Reine Sinnlichkeit	Raum und Zeit	Geometrie, Arithmetik
des Handelns	Selbstbewusstsein	Motive	Geschichte, Politik, Ethik, Recht

Wie anhand der Tabelle zu erkennen ist, sind für Schopenhauer Begründungen in der Mathematik einer anderen Wurzel des Satzes vom Grund zugeordnet als Begründungen in der Logik. Die Logik ist das begriffliche Vermögen und ihr kommt der Satz vom Grunde des Erkennens zu. Geometrie und Arithmetik basieren für ihn aber auf dem apriorischen Vermögen der reinen Sinnlichkeit. Die Geometrie wird durch die Gesetze des Raumes, die Arithmetik durch die Gesetze der Zeit bedingt. Dabei ist aber zu beachten, dass die reine Sinnlichkeit nicht mit der empirischen verwechselt wird, welche dem Satz vom Grunde des Werdens unterliegt.³

Diese letzte Unterscheidung ist wichtig, um den Unterschied zwischen dem vor-kantischen Empirismus und der Transzendentalphilosophie kenntlich machen zu können: Die empiristische Position würde besagen, dass mathematische Objekte durch Rezeption von Sinnesdaten und durch Abstraktion von Inhalten im Verstand entstanden sind. Dem transzendentalphilosophischen Standpunkt Schopenhauers nach müssen mathematische Objekte aber nur vorstellbar sein. Vereinfacht gesagt: Ich muss das Dreieck nicht in der Natur finden, um seine Eigenschaften kennenzulernen, sondern ich muss es nur im Geiste konstruieren können.

Mit dieser geistigen Konstruierbarkeit mathematischer Objekte geht aber auch eine

2. Eine detailliertere, aber dennoch kompakte Darstellung gibt (Birnbacher 2018).

3. Im Folgenden ist mit 'Geometrie' immer die euklidische Geometrie gemeint, ansonsten wird explizit auf die Ausnahme hingewiesen.

Schwierigkeit einher: Was ich im Geiste konstruiere, kann ich nicht ebenso unmittelbar kommunizieren. Wie kann ich also meine mentale Vorstellung eines Dreiecks jemand anderem mitteilen? Zwei Antworten sind üblich: Ich muss entweder auf Begriffe zurückgreifen (Erkenntnisgrund) oder auf Figuren, Diagramme oder Bilder (Werdensgrund). Schopenhauer zeigt dies am deutlichsten an der euklidischen Geometrie. In den *Elementen* Euklids ist beides vorhanden: Wir finden darin sowohl Figuren als auch verbale oder symbolische Beweise. Für Schopenhauer ist der symbolische Beweis aber nur ein Zusatz, den Euklid hinzugefügt haben soll, da die rationalistische Strömung der Eleaten damals sehr dominant gewesen ist – eine These, die man im 20. Jahrhundert wieder findet (z. B. bei Szabó 1969). Für Schopenhauer sind aber die Figuren in den *Elementen* höher zu bewerten, weil sie ein empirisches Abbild der reinen Sinnlichkeit sind. Sie entsprechen der geistigen Konstruierbarkeit mehr als die begriffliche Darstellung. Vereinfacht gesagt: Die Eigenschaft eines Dreieck lässt sich einfacher und deutlicher zeigen als mit Worten oder Symbolen beschreiben.

Man kann Schopenhauer schon deshalb einen strengen Vertreter der Anschauungsphilosophie bezeichnen, weil er fordert, dass alle mathematischen Ausdrücke geistig oder auch empirisch anschaubar sein müssen. Die verbale Beschreibung, die Axiomatisierung und auch die Forderung nach einem symbolischen Beweis sind für ihn unwichtig. Sie können höchstens erklären, was ein mathematisches Objekt ist, aber nicht, warum es so ist, wie es ist. Zwar ist sich Schopenhauer darüber im Klaren, dass mit zunehmender Abstraktheit der mathematischen Objekte, die Anschaubarkeit nach und nach verloren geht und der verbale oder symbolische Beweis sich durchsetzen muss, aber das bedeutet für ihn nicht, dass die Bestandteile dieser komplexen Objekte frei von jeglicher Anschauung seien. Alles beruht somit unmittelbar oder über mehrere Abstraktions- oder Konkretionsstufen vermittelt auf der Anschauung (Dobrzański 2017).

Ein ähnliches Verhältnis finden wir auch in der Logik wieder: Hier sind zunächst sowohl Konstruierbarkeit als auch Kommunizierbarkeit durch einen Satz vom Grunde, dem des Erkennens, möglich. Vereinfacht gesagt: Ein logisches Objekt, wie bspw. ein Urteil oder eine Schlussfolgerung, kann ich in Begriffen konstruieren und durch Worte kommunizieren. Das ist jedem Menschen bereits durch das Erlernen einer Sprache so intuitiv gegeben, dass wir Logik gar nicht als Disziplin erlernen müssen. Wie in Kap. 2 dargestellt, schreibt Schopenhauer seine Logik auch nicht für ein breites Publikum, sondern für ein akademisches. Daher muss das breite Publikum sich nicht für Logik interessieren, da dieses aufgrund muttersprachlicher Kompetenzen bereits unbewusst logische Regeln verinnerlicht hat.

Wenn man nun aber rechtfertigen muss, worauf die Logik als akademische Diszi-

plin gründet, so scheidet man am sogenannten Agrippa Trilemma: Entweder bricht die Kette der Begründungen ab (Dogma), man findet immer weitere begründbare Voraussetzungen (infiniter Regress) oder logische Schlussfolgerungen erklären andere logische Schlussfolgerungen (Zirkel). Wenn man bspw. beim philosophischen Argumentieren nach Gründen für logische Sachverhalte oder Objekte verlangt, so kann man laut Schopenhauer zwar weitere logische Sachverhalte oder Objekte angeben, aber die gesamte Logik kann sich derart nicht selbst rechtfertigen. Die axiomatische Methode ist für ihn ein Dogma, und ein Regelkalkül wäre für ihn wahrscheinlich ein Spagat zwischen einem Zirkel und einem infiniten Regress.

3.2 Der transzendentalphilosophische Ansatz der Urteilslehre

Um aus dem zuvor beschriebenen Agrippa-Trilemma herauszugelangen, entwickelt Schopenhauer eine Strategie, bei der die reine Anschauung die zentrale Rolle spielt: Wie die Geometrie, so gründet auch die Logik auf der reinen Sinnlichkeit, die sich durch Formen der empirischen Sinnlichkeit kommunizieren lässt.

Die Lösung dieses Problems lässt sich gut am Beispiel der Urteilslogik exemplifizieren. Schopenhauers Logik ist kompositionalistisch: Sie baut aus kleinsten Einheiten, den Begriffen, immer komplexere Formen wie Urteile und zuletzt Schlussfolgerungen. Obwohl die Genese kompositional ist, ist die Frage nach der Geltung für Schopenhauer kontextuell. Man muss nämlich nicht nur Begriffe zusammensetzen können, sondern auch Bedeutungen verstehen, indem man fragt: Was ist die Bedeutung kleinerer Einheiten im Kontext von größeren? Wir können Urteile also dadurch formulieren, dass wir sie kompositional aus kleineren Einheiten zusammenbauen und wir können bereits bestehende Urteile begreifen, indem wir die darin enthaltenen Begriffe kontextuell aus dem Zusammenhang verstehen.

Schopenhauer geht aber noch einen Schritt weiter. Er entwickelt in dem Kapitel über die Urteile eine Frage transzendentalphilosophischer Natur: Was ist die Bedingung der Möglichkeit von Urteilen? Vereinfacht lässt sich die Frage umschreiben als Suche nach den Grundformen des Urteilens: Welche Formen des Urteilens gibt es überhaupt? Was ist Bedingung der Möglichkeit, damit wir Urteile zusammensetzen oder im Zusammenhang verstehen können?

Schopenhauer erkennt bei der Beantwortung dieser Fragen, dass Begriffe in Urteilen (und Schlussfolgerungen) sich genauso verhalten, wie Kreise im euklidischen Raum. Diese Einsicht hatten schon viele Logiker vor Schopenhauer, obwohl die Idee erst durch Euler und dann durch Kantianer im 19. Jahrhundert populär wurde. Die einzige Möglichkeit um aus dem Trilemma herauszukommen, ist die Analogie

oder Isomorphie, die Schopenhauer zwischen den Begriffsumfängen (in Urteilen und Schlussfolgerungen) und den Umfängen von Kreisen sieht: Begriffe verhalten sich in Urteilen ebenso wie sich Kreise als geometrische Figuren konstruieren lassen. Und da die Logik als Disziplin sich nicht selbst begründen kann, kann es vielleicht die reine Sinnlichkeit mit Blick auf die Lagebeziehungen von Kreisen im euklidischen Raum.

Um die Möglichkeiten zu ermitteln, die sich für Begriffsbeziehungen in Urteilen ergeben, knüpft Schopenhauer an ein Projekt von Schweins an, das er zumindest aus dessen *Mathematik für den ersten wissenschaftlichen Unterricht*, Bd. II, kennt. Schopenhauer hatte zwar ein Semester Mathematik in Göttingen bei Thibaut studiert, aber Schweins Lehrbuch zu Schulzeiten intensiv verwendet. Bereits 1818, in der *Welt als Wille und Vorstellung* § 15, bespricht er zwei Lehrbücher von Thibaut und Schweins wohlwollend: Mit Schweins teilt Schopenhauer seine Abneigung gegen einen axiomatischen Aufbau der Mathematik und eine Fokussierung auf die symbolischen Beweise. Besonders zu Schweins zeigt sich dann eine Ähnlichkeit in der Logik, sowohl in §9 der *Welt als Wille und Vorstellung* als auch in der sogenannten großen Logik der *Berliner Vorlesungen* der frühen 1820er Jahre.

Schweins geometrischer Ansatz ist streng kompositionalistisch: Aus Punkten werden Linien; aus geraden Linien werden Dreiecke, Vierecke und Polygone; aus gekrümmten Linien werden, wenn ihre Krümmung gleichmäßig ist, Kreise; aus diesen Figuren lassen sich Flächen und schließlich Körper konstruieren. Bei den Kreisen stellt Schweins zunächst die Eigenschaften und Bestandteile eines Kreises dar, dann die Beziehungen, die zwei oder mehrere Kreise zueinander haben sowie deren Bestandteile. Betrachtet man beispielsweise nur die Haupteigenschaften, die Schweins aufzählt, wenn es um zwei Kreise in Relation geht, so können diese entweder ineinander (Abb. 1: Fig. 74), auseinander liegen (Abb. 1: Fig. 76) oder sind durch zwei Durchschnittspunkte verbunden (Abb. 1: Fig. 79).

Schopenhauer greift nun aus diesen Lagebeziehungen von Kreisen diejenigen heraus, bei denen er eine Isomorphie zu den Verhältnissen von Begriffen im Urteil sieht. Wie bereits oben erwähnt, ist diese Methode Schopenhauers transzendentalphilosophisch begründet: Kant hatte in seiner transzendentalen Logik bei seinem Leitfaden der reinen Verstandesbegriffe auf eine Tafel zurückgegriffen, die mit den Urteilsformen der formalen Logik korrespondiert, wie man sie in Textbüchern des 18. Jahrhunderts findet (Menne 1989). Schopenhauer kamen gegenüber dieser Methode schon frühzeitig Zweifel. Da es ihm aber gar nicht um Verstandesbegriffe oder Kategorien ging, sondern um die Bedingung der Möglichkeit des Urteilens, so entwickelt er mit Hilfe von Schweins eine ganz neue Methode: "Leitfaden sind

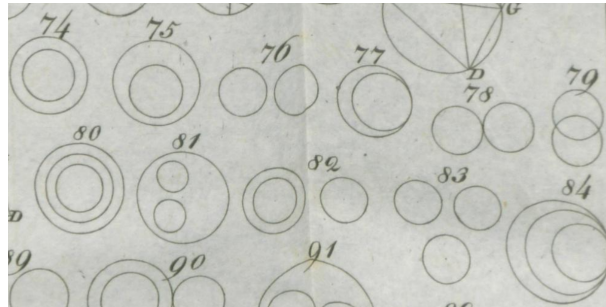


Abbildung 1: Schweins: *Mathematik für den ersten wissenschaftlichen Unterricht II*, Tafel II.

die Schemata” heißt es bei Schopenhauer an entsprechender Stelle (Schopenhauer 1913, S. 272).

Dieses Vorgehen bzw. diesen Leitfaden kann man sich so vorstellen: Unter Berücksichtigung der Isomorphie von Kreisen und Begriffen und mit Hilfe von Schweins konstruiert Schopenhauer alle möglichen Lagebeziehungen von Kreisen und kontrolliert, ob eine Änderung der Lagebeziehung eine semantische Bedeutung besitzt, also ein mögliches Urteil abbilden kann. Dies ist beispielsweise der Fall bei den Figuren 74, 76 und 79 der Abb. 1. Wie Schopenhauer schnell feststellt, korrespondieren diese Formen mit den bekannten Euler-Diagrammen für die Syllogistik (Bernhard 2001). Ob ein Kreis aber nun tangential (Abb. 1, Fig. 77 u. 78) an einem anderen oder nicht-konzentrisch in einem anderem liegt (Abb. 1, Fig. 75) hat keine semantische Signifikanz.⁴

Schopenhauer ergänzt dann Schweins Ansatz zum einen noch dahingehend, dass ein Kreis einen anderen ganz überschneiden kann, so dass nur ein Kreisumfang zu sehen ist. Zum anderen untersucht er auch, ob das Lageverhältnis von zwei Kreisen zu einem dritten, eine Signifikanz für das Urteilen besitzt. Dabei bemerkt Schopenhauer, dass die Einbeziehung eines dritten Kreises größtenteils keine urteilslogische, sondern bereits schlusslogische Signifikanz besitzt: Bspw. würde Abb. 1: Fig. 80 (oder ferner 84) kein Urteil mehr darstellen, sondern den sogenannten modus Barbara in der Syllogistik. Allerdings sieht Schopenhauer zwei Ausnahmen. Abb. 1: Fig. 81 kann ein Urteil beschreiben, wenn zwei sich gegenseitig ausschließende Begriffe (wie Fig. 76) in einem anderen Begriff vollständig enthalten werden (wie ein Kreis in einem anderen bei Fig. 74, 75 oder 77). Da diese beiden Krei-

4. Die Bewertung der semantischen Signifikanz der Tangente unterscheidet Schopenhauers Formenlehre von mehreren modernen Logiken, bspw. dem Region connection calculus.

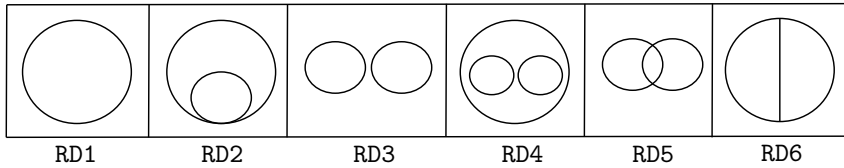


Abbildung 2: Schopenhauers Relationsdiagramme (RD) nach Schopenhauer 1913, S. 269–284

se aber nie den gesamten größeren Kreis ausfüllen können, ergänzt Schopenhauer noch eine Figur, in der ein Kreis in zwei Hälften geteilt wird.

Das Resultat dieser transzendentalphilosophischen Untersuchung der Urteilslehre zeigt sich in sechs geometrischen Grundfiguren (Abb. 2), von denen jedes mindestens eine urteilslogische Signifikanz aufweist (Schopenhauer 1913, S. 272ff.). Da in Abb. 2 jede der sechs geometrischen Figuren eine Relation zwischen mindestens zwei Begriffen in einem Urteil darstellen soll, werden diese auch als Relationsdiagramme (RD) und die Kreise eines RD als ‘Sphären’ bezeichnet. Für die sechs RD gilt:

RD1 Zwei begriffliche Sphären, A und B , überschneiden sich genau, so dass nur eine Sphäre zu sehen ist, $A = B$.

RD2 Eine begriffliche Sphäre A enthält eine andere B vollständig, $A \subsetneq B$.

RD3 Zwei begriffliche Sphären, A und B sind vollständig voneinander getrennt, $A \cap B = \emptyset$.

RD4 Eine begriffliche Sphäre A umfasst zwei (oder mehrere) weitere Sphären, B , C , so dass die eingeschlossenen Sphären voneinander getrennt sind, aber die erste Sphäre nicht erschöpfen, $(B \cup C) \subsetneq A$, $B \cap C = \emptyset$.

RD5 Zwei begriffliche Sphären, A und B , überschneiden sich teilweise, $A \cap B \neq \emptyset$.

RD6 Eine begriffliche Sphäre, A , umfasst zwei (oder mehrere) weitere Sphären, B und C , so dass sich die eingeschlossenen Sphären nicht gegenseitig schneiden, sondern die erste Sphäre ausschöpfen, $A = B \dot{\cup} C$.

Im Vergleich mit den Figuren aus Schweins Geometrie ergibt sich nun folgendes Bild für die Relationsdiagramme: RD1 ist Schopenhauers eigener Zusatz; RD2 entspricht Abb. 1, Fig. 74 (oder 75 oder 77); RD3 entspricht Abb. 1, Fig. 76 (oder 78); RD4 entspricht Abb. 1, Fig. 81; RD5 entspricht Abb. 1, Fig. 79; RD6 ist Schopenhauers eigener Zusatz.

Im Vergleich mit den damals und heute bekannten Logikdiagrammen lässt sich folgendes festhalten: RD2, RD3, RD5 können als *Euler-Diagramme* eingesetzt werden, wodurch die traditionelle Syllogistik abgebildet werden kann; zusammen mit RD1 stellen die Euler-Diagramme auch die *Gergonne Relationen* dar (Moktefi 2020, S. 119); RD4 und RD6 werden heutzutage als *Partitionsdiagramme* bezeichnet (Lemanski und Demey 2021). Bei Schopenhauer und seinen Nachfolgern sollen diese zur Erklärung der stoischen Logik eingesetzt werden, die heutzutage als ein Fragment der Aussagenlogik interpretiert werden kann.

Bereits in seinem 1818 veröffentlichten Hauptwerk *Die Welt als Wille und Vorstellung* hat Schopenhauer in §9 fünf der später auf sechs erweiterten RD kurz skizziert und folgende kryptische Anmerkung dazu hinterlassen:

Auf diese Fälle [sc. RD1-6 ohne RD3] möchten alle Verbindungen von Begriffen zurückzuführen seyn, und die ganze Lehre von den Urtheilen, deren Konversion, Kontraposition, Reciprokation, Disjunktion (diese nach der dritten Figur [sc. RD6]) läßt sich daraus ableiten: ebenso auch die Eigenschaften der Urtheile, auf welche Kant die vorgeblichen Kategorien des Verstandes gründete [. . .]. Ueber die angegebenen möglichen Begriffsverbindungen ist nur noch zu bemerken, daß sie auch unter einander mannigfaltig verbunden werden können, z.B. die vierte Figur [sc. RD3] mit der zweiten [sc. RD2].

Wie man an dem Zitat sieht, hat Schopenhauer hier bereits den Grundstein für seine viel ausführlicheren Darstellungen in den Berliner Vorlesungen gelegt: (1) Die RD haben eine transzendente Funktion, da sie die Bedingungen für die Möglichkeiten von Begriffsverhältnissen in Urteilen anzeigen; (2) alle Urteile lassen sich auf irgendein RD reduzieren und (3) RD sind kompositional zu verwenden, d.h. sie können miteinander kombiniert werden, um komplexere Diagramme aus ihnen zu bilden. Diese drei Thesen können als (1) transzendental, (2) reduktional und (3) kompositional beschrieben werden.

3.3 Partitionsdiagramme in der Philosophie der Mathematik

Wie zuvor angedeutet, haben die beiden Partitionsdiagramme RD4 und RD6 die Besonderheit, das Verhältnis von zwei Begriffssphären zu einer dritten zu kennzeichnen. Schopenhauer verwendet diese Diagramme zum einen, um die stoische Logik abzuhandeln, zum anderen aber auch zur Begriffsanalyse. Bereits in der *Welt als Wille und Vorstellung* § 9 findet sich ein RD6, das die mathematische Begriffsanalyse mit Hilfe von vier Begriffen illustrieren soll: In Abb. 3 sehen wir

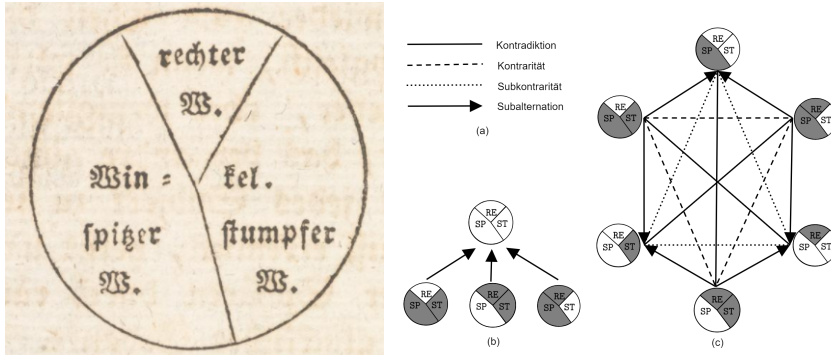


Abbildung 3: (a) Partitionsdiagramm von §9, (b) Baumdiagramm für den Winkelbegriff, (c) JSB-Hexagon

einen Kreis, der den Winkel W darstellt und drei Bereiche, in denen ‘rechter’ RE , ‘spitzer’ SP und ‘stumpfer’ ST eingetragen sind. Schopenhauer weist selbst in dem zuletzt angegebenen Zitat darauf hin, dass RD6 besonders für die Darstellung von Disjunktionen eingesetzt werden könne.

Greift man nun, wie im Detail bei (Demey 2020) beschrieben, auf eine Boolesche Algebra mit der ganzen Menge \bigcirc und der leeren Menge \bigotimes zurück, so gilt sowohl $\bigcirc \cap \bigcirc = \bigotimes$, $\bigotimes \cap \bigotimes = \bigotimes$, $\bigotimes \cap \bigcirc = \bigotimes$, als auch $\bigotimes \cup \bigotimes \neq \bigcirc$, $\bigotimes \cup \bigotimes \neq \bigcirc$, $\bigotimes \cup \bigotimes \neq \bigcirc$, aber dafür $\bigotimes \cup \bigotimes \cup \bigotimes = \bigcirc$.

Ein Partitionsdiagramm wie Abb. 3 hat nun den Vorteil, zum einen die Gattungs- und Artverhältnisse wie in Baumdiagrammen, zum anderen die Oppositionsverhältnisse wie im logischen Quadrat und deren Erweiterungen anzuzeigen.

Greift man nun auf ein Baumdiagramm zurück, bei dem die jeweils oben dargestellten Begriffe eine Gattung und die jeweils darunter, mit Linie verbundenen Begriffe die Arten darstellen, wobei die Arten die der Gattung untergeordneten Begriffe sind, so lässt sich Abb. 3b heranziehen. Hier sieht man, dass \bigcirc der Gattungsbegriff ist, \bigotimes , \bigotimes , \bigotimes die Artbegriffe darstellen.

Greift man auf eine Erweiterung des logischen Quadrates zurück, nämlich auf ein sogenanntes ‘JSB-Hexagon’,⁵ wie in Abb. 3c, so lassen sich die Oppositionsverhältnisse (a) noch genauer anzeigen. Hier sieht man, unter anderem, dass \bigotimes , \bigotimes , \bigotimes in einem Kontraritätsverhältnis und \bigotimes , \bigotimes , \bigotimes in einem Subkontraritätsverhältnis

5. ‘JSB’ steht für die drei Logiker Paul Jacoby (1915–1993), Augustin Sesmat (1885–1957) und Robert Blanché (1898–1975), die diese Erweiterung in den 1950er Jahren bekannt gemacht haben. Detaillierte Informationen bietet (Moretti 2009).

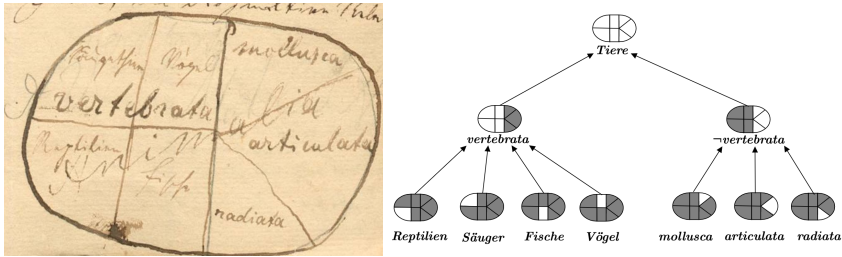


Abbildung 4: Animalia-Partition und Baumdiagramm nach BL

und dass \odot und \ominus , \oslash und \otimes , \oplus und \otimes in einem Kontradiktionsverhältnis stehen.

Schopenhauer gelingt es mit diesen Verhältnisbestimmungen nun Schlussregeln kenntlich zu machen, wie beispielsweise den modus tollendo ponens: Nimmt man an, dass x ein Winkel \oslash ist, dann kann man dem Gattungs-Art-Verhältnis gemäß annehmen, dass x \otimes oder \oplus oder \otimes ist. Weiß man nun, dass x nicht \otimes und nicht \oplus ist, dann kann x nur \otimes sein.

Schopenhauers Ausführungen für solche Schlüsse in (Schopenhauer 1913, S. 278ff.) sind leider lückenhaft überliefert und nicht immer deutlich. Man tut daher gut daran, sie zu interpretieren und dabei zu modernisieren. Hier ist nicht der entsprechende Ort, um ein formales System dieser Partitionsdiagramme zu entwickeln, aber ich möchte auf der Grundlage des Gentzen-Systems das obige Beispiel kurz skizzieren. Eine Interpretation wäre es, Einführungs- (E) und Beseitigungsregeln (B) für die Schnittmenge (\cap), Vereinigungsmenge (\cup) und Negation (\neg) einzuführen⁶:

$$\begin{array}{c}
 \frac{x \in \neg \otimes}{x \in \ominus} (\neg\text{-B}) \quad \frac{x \in \neg \oplus}{x \in \otimes} (\neg\text{-B}) \\
 \frac{\quad}{x \in (\otimes \cap \oplus)} (\cap\text{-B}) \quad \frac{\quad}{x \in (\oplus \cup \otimes \cup \otimes)} (\cup\text{-B}) \\
 \frac{\quad}{x \in \otimes} (\otimes\text{-B}) \quad \frac{\quad}{x \in \oslash} (\oslash\text{-B}) \\
 \frac{\quad}{x \in (\otimes \cap \oslash)} (\cap\text{-B}) \\
 \frac{\quad}{x \in \otimes} (\otimes\text{-B})
 \end{array}$$

Alle Relationsdiagramme sind insofern Grunddiagramme, da mit ihnen komplexere Urteile geformt und dann auch wiederum Schlussfolgerungen gezogen werden sol-

6. Die Schnittmenge entspricht dabei weitestgehend der logischen Konjunktion, die Vereinigungsmenge der Disjunktion und die Negation den Regeln der Kontradiktion bzw. reductio per contradictionem. Die Regeln orientieren sich an (Prawitz 1965, §2) und (Bernhard 2001, p. 25).

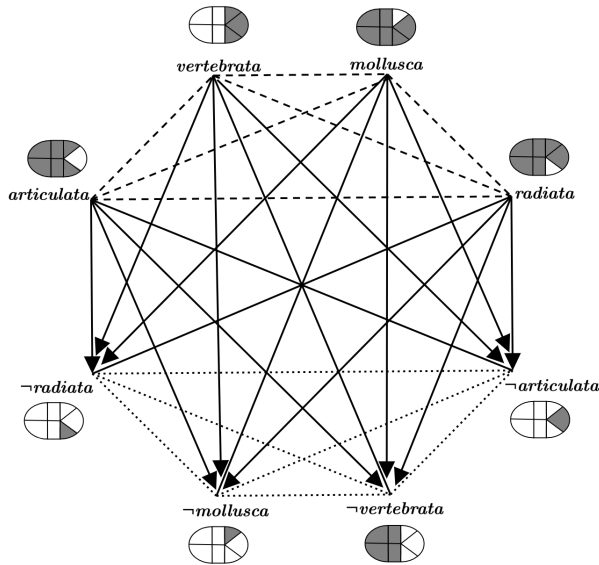


Abbildung 5: Moretti-Oktagon für $\mathcal{I}2$

len. Schopenhauer greift als Beispiel eines komplexeren RD6 auf Abb. 4 zurück, das keinen Begriff aus der Mathematik verwendet, sondern eine biologische Taxonomie skizziert. In Fig. 4 wird der Begriff ‘animalia’ (Tier) partitioniert. Bei dieser Partitionierung ergeben sich mehrere Interpretationsmöglichkeiten (\mathcal{I}): ($\mathcal{I}1$) Nimmt man die dicke, doppelte Linie als oberste Zerlegung an, so stellt der linke Bereich die ‘vertebrata’ dar, die anderen die ‘nicht-vertebrata’, wie in Abb. 4 angegeben. Jeder dieser Bereich wird dann noch einmal partitioniert, nämlich in vier Bereiche auf der linken Seite und drei auf der rechten. ($\mathcal{I}2$) Liest man aber Abb. 4 so, dass es vier Bereiche auf der ersten Partitionsstufe gibt und davon nur ‘vertebrata’ weiter zerlegt werden kann, so ergibt sich ein Morretti-Oktagon wie in Abb. 5. ($\mathcal{I}3$) Liest man Abb. 4 so, dass der Begriff ‘Tier’ direkt in sieben Bereiche unterteilt wird, so ist dies analog zu einem starken α_7 -Diagramm, das genauer in (Lemanski und Demey 2021) beschrieben wurde.

4 Diesterweg als Schopenhauerianer

Adolph Diesterweg wurde 1790 in Siegen geboren und starb 1866 in Berlin. Sein Lebensweg ist eng mit dem mittel- und norddeutschen Bildungssystem des 19.

Jahrhunderts verbunden, wie man an den Stationen seiner Ausbildung und Wirksamkeit sieht: Herborn, Tübingen, Worms, Mannheim, Frankfurt a. M., Wuppertal, Moers, Berlin. Diesterwegs Bedeutung für die Pädagogik und Mathematikdidaktik sind bis heute nicht zu unterschätzen, wie man an den zahlreichen Diesterweg-Schulen und -Denkmälern im mittel- und norddeutschen Raum zu Beginn des 21. Jahrhunderts noch sieht.

Diesterweg hat zahlreiche Schriften, insbes. Schulbücher, für den Mathematik-, Pädagogik-, Deutsch- sowie Geographie- und Heimatunterricht verfasst. Die wichtigsten Schriften sind in Goebel 1995, S. 98ff. genannt, und für die Geometrie sind vor allem zu nennen:

- *Geometrische Combinationslehre*, 1820;
- *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre*, 1822;
- *Raumlehre oder Geometrie nach den jetzigen Anforderungen der Didaktik für Lehrende und Lernende*, 1828.
- *Anweisung zum Gebrauche des Leitfadens für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre*, 1829.

Bevor in Kapitel 5 gezeigt werden soll, wie Diesterweg Schopenhauers Partitionsdiagramme angewandt und erweitert hat, soll in diesem Kapitel Diesterwegs Affinität zur Anschauung in der Mathematik (4.1) und seine Schopenhauer-Rezeption (4.2) vorgestellt werden.

4.1 Anschauung in Diesterwegs Philosophie der Mathematik und Logik

Diesterweg teilt nicht nur mit Schopenhauer, sondern auch mit vielen anderen Mathematikern in der nachkantischen Philosophie eine Affinität zur Anschauung.

Diese Affinität der Anschauung ist bereits in der Einleitung seines ersten Buchs, die *Geometrische Combinationslehre*, deutlich ausgesprochen worden: Die bisherigen Bücher “über Formen= Größen= Konstruktions= und Anschauungslehre” würden nicht den Forderungen genügen, die man derzeit an sie stellen würde. Denn der wissenschaftliche Charakter der Mathematik bestehe vor allem in “Anschauung und Evidenz” (Diesterweg 1820, S. If.). Dass Diesterweg dabei nicht an die empiristische Philosophie, sondern an einen transzendentalphilosophischen

Ansatz anknüpft, wird am Ende des Buchs deutlich. Hier kritisiert er eine Methode, die mit der sinnlichen oder empirischen Anschauung beginnt und dann per Abstraktion geometrische Formen aufstellt.

Ich halte dagegen die Weise für richtiger, ja für allein richtig, welche sich an die innere Anschauung zuerst wendet, und demnächst die äußere nur als Probe der Versinnlichung des Gedachten anwendet. (Diesterweg 1820, S. 177)

Wie in Schweins Lehrbuch ist auch Diesterwegs Ansatz kompositionaler Natur: Er möchte “mit dem Einfachsten beginnen [...] und zu immer Zusammengesetzterem” übergehen (Diesterweg 1820, S. IV). Tatsächlich weist damit Diesterwegs Lehrbuch einen ähnlichen kompositionalen Gang auf wie zum Beispiel Schweins: Diesterweg beginnt mit Punkten, diese werden zu Linien zusammengesetzt und aus den unterschiedlichen Arten von Linien lassen sich Winkel, Kreise usw. bilden. Ebenso wie Schweins bildet dann auch Diesterweg die jeweiligen Arten von Kreisen, Dreiecken usw. ab, benutzt dabei nicht nur eine logische Beschreibung der Verhältnisse der Arten, sondern auch Baumdiagramme, um die Vollständigkeit der Kombinationsfälle zu gewährleisten (Diesterweg 1820, S. 88, 171).

In dem *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre* von 1822 führt Diesterweg diese Ideen fort und erweitert sie. Sein Ziel ist es, sowohl die Anschauung als auch die Logik miteinander zu verbinden (Diesterweg 1822, S. 2). Die Gewissheit, Untrüglichkeit und Evidenz der geometrischen Grundobjekte gründe auf der Anschauung (Diesterweg 1822, S. 4); da diese aber nicht empirischer, sondern mentaler Natur sei, d.h. “nicht aus der Erfahrung, sondern aus dem Geiste” stamme, habe er auf eine Vielzahl von Figuren und Diagramme verzichtet (Diesterweg 1822, S. 6). Schließlich soll der Leser sich auf die Konstruktion der Figuren im Geiste konzentrieren.

Neben dem Training der nicht-sinnlichen Anschauung ist aber auch die Anwendung der Logik das erklärte Ziel des Lehrbuchs. Logik, so Diesterweg, könne vor allem in zwei Bereichen angewandt werden und sich dort ausdrücken: entweder in der Sprache oder in der Mathematik (Diesterweg 1822, S. 6f.). Diesterweg plädiert zwar für den Einsatz der Logik sowohl im Deutsch- als auch im Mathematikunterricht, aber sein Votum bei einer Entscheidungsfrage ist eindeutig:

Die Mathematik erscheint mir dazu passender als die Sprache, weil jene größere Anschaulichkeit, Klarheit und Evidenz in die Waageschale zu legen hat. [...] Der Versuch wird lehren, daß man alle einfachen Lehren der Logik sehr bequem an geometrischen, und überhaupt an mathematischen Gegenständen entwickeln kann. [...] Mathematik und Logik,

Logik und Mathematik sind das für die Schule, was die Philosophie für die Universität. [...] Ohne Logik wird keiner ein denkender Lehrer, wie ohne Philosophie und Psychologie keiner ein Erzieher. (Diesterweg 1822, S. 7)

Diesterweg folgt auch 1822 seinem kompositionalen Ansatz in der Geometrie und weitet diesen auf die Logik aus: So wie aus Punkten Linien und aus Linien dann Dreiecke oder andere Figuren werden, so werden aus Begriffen Urteile und aus Urteilen Schlüsse (Diesterweg 1822, S. 7).

Die bislang skizzierten Thesen Diesterwegs stellen den Grundansatz dar, den man auch in den späteren Schriften zur Raumlehre findet. Wer genau liest, mag hier zwar einige Akzentverschiebungen beobachten, keine ist aber so gravierend, dass man eine Revision der bislang genannten Thesen dabei festmachen könnte. Insgesamt kann man somit resümieren, dass Diesterweg einer der wichtigsten Vertreter der anschauungsaffinen Mathematik des frühen 19. Jahrhunderts war und viele seine Thesen bis in die Moderne nachgewirkt haben.

4.2 Diesterwegs Schopenhauer-Rezeption

Das vorangegangene Kapitel dürfte bereits eine deutliche Nähe Diesterwegs zu Schopenhauer aufgezeigt haben. Beide setzen sich für die Anschauung insbesondere in der Geometrie ein, und beiden scheinen die Ansätze ihrer Vorgänger nicht radikal genug gewesen zu sein. Dennoch bleibt natürlich die Frage bestehen, ob Diesterweg nicht eher zufällig eine nur systematische Ähnlichkeit mit Schopenhauer aufweist – evtl. weil die Anschauungsaffinität sozusagen am Anfang des 19. Jh. ‘in der Luft lag’ – oder aber ob Diesterweg tatsächlich sich auf Schopenhauer bei seinen Thesen beruft. Der allgemeinen Geschichtsschreibung zufolge, wie sie in Kap. 2 dargestellt wurde, dürfte sich eine Rezeption Schopenhauers ausschließen, da viele Historiker und Biographen immer darauf hingewiesen haben, dass Schopenhauer erst langsam ab den 1840er Jahren ‘entdeckt’ wurde und Sympathisanten gefunden hat.

Diesterweg kannte aber Schopenhauers Schriften gut und hat diese vielleicht sogar deutlicher gelobt als viele andere. In Diesterwegs ersten Schrift zur Raumlehre, die *Geometrische Combinationslehre* aus dem Jahr 1820, findet man kaum Referenzen zu anderen Autoren. Positiv wird von Diesterweg eigentlich nur Justus Graßmanns *Raumlehre* von 1817 genannt (Diesterweg 1820, S. VI). Ganz anders verhält es sich dagegen 1822 in Diesterwegs *Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre*. Hier begegnet man zu Beginn einem ausführlichen Bericht über die Literatur zur Didaktik, Geometrie und Anschauungsphilosophie aus den letzten 20 Jahren. Ein

elementarische, ich mögte sagen einseitige Weise gefundenen und gesicherten Wahrheiten. Die
 Gegner dieser Schrift verweise ich auf das tiefgebachte Wort:
Die Welt als Wille und Vorstellung
 von Arthur Schopenhauer.
 Leipzig 1819. S. 102 und Fig.

Abbildung 6: Hinweis auf Schopenhauer in Diesterweg 1822, S. 51

Autor taucht im Verlauf dieses Berichtes auffällig oft und mit besonderer Betonung auf: “ein bedeutender Schriftsteller [. . .], nämlich Schopenhauer in seinem: die Welt als Wille und Vorstellung, Leipzig 1819” (Diesterweg 1822, S. 7). An anderer Stelle heißt es:

Es möchte gut seyn, gegenwärtig den mathematisch=philosophischen Streit zu schlichten, den neuerdings Wagner und Schopenhauer gegen die Euclidischen Mathematiker angeregt haben. Die genannten Herrn verlangen in der Raumlehre intuitive Anschauung, intuitive Erkenntniß die auf logischen Regeln ruhende discursive Erkenntniß in Begriffen verpönend. In dem ersten Theil dieser Forderung haben sie unbedingt recht, und die Mathematiker verstehen sie nicht, welche das bestreiten wollen. (Diesterweg 1822, S. 8)

Etwa in der Mitte des Buchs weist Diesterweg dann noch einmal darauf hin, dass die anschauliche Gewissheit einen weitaus höheren Stellenwert beim Beweisen besitze als die diskursive. Dabei verweist er nicht nur erneut auf Schopenhauer, sondern stellt Schopenhauers Hauptwerk in exponierter Weise dar, wie man in Abb. 6 sieht.

Meines Wissens findet man in keinem anderen Buch Diesterwegs so eindeutige und lobende Referenzen zu Schopenhauer. Dennoch kann man in dem *Leitfaden* von 1822 und auch in späteren Büchern Diesterwegs zur Raumlehre mehrere, fast wörtliche Übernahmen Schopenhauers entdecken, die zum Beispiel die Frage nach dem Warum (Diesterweg 1822, S. 9), die Kritik am indirekten Beweis (Diesterweg 1822, S. 50), die Verfälschung der euklidischen Geometrie durch die diskursive Logik (Diesterweg 1828, S. XI) oder die Vorstellungslehre (Diesterweg 1829, S. 1) betreffen. Auch in anderen Schriften, die nicht die Geometrie zum Thema haben, ist ein Einfluss Schopenhauers implizit oder explizit ersichtlich. So nennt Diesterweg zum Beispiel in einem Aufsatz die vier in Kap. 3.1 genannten Wurzeln des Satzes vom Grund aus der Dissertationsschrift Schopenhauers (Diesterweg 1878).

Eine genauere Aufspürung aller Einflüsse und Übernahmen Schopenhauers bei Diesterweg könnte ein vielleicht interessantes Projekt sein. Hier reichen aber wohl diese Hinweise, um kenntlich zu machen, dass Diesterweg von Schopenhauer deutlich beeinflusst war und dass er an mehreren Stellen so auf ihn verweist, wie es nur wenige andere Autoren vor den 1840er/ -50er Jahren öffentlich getan haben. Bemerkenswert muss aber, dass es neben den in Kap. 2 genannten Logikern auch mehrere Mathematikdidaktiker gab, die sich zwischen 1820 und 1880 intensiv mit Schopenhauer beschäftigt haben (Lemanski 2022, Kap. 2.3.3) – darunter auch Weggefährten Diesterwegs wie etwa Karl Wilhelm Eduard Mager (1810–1858).

Bevor wir aber den deutlichsten Einfluss Schopenhauers auf Diesterweg in Kap. 5 darstellen, soll abschließend noch die Frage gestreift werden, ob Diesterweg Schopenhauerianer und vielleicht sogar der erste Anhänger Schopenhauers war. Auf diese Frage können gewiss unterschiedliche Antworten gegeben und vertreten werden, je nachdem was man unter ‘Anhänger’ oder ‘Schopenhauerianer’ versteht. Zwei Perspektiven scheinen dabei ein breites Spektrum an Antwortmöglichkeiten abzustecken: 1) Ein Anhänger eines Systemphilosophen wie Arthur Schopenhauer muss alle Teile dieses Systems kennen und befürworten. Wenn man diese Definition von ‘Anhänger’ akzeptiert, dann kann man wahrscheinlich nicht sagen, dass der erste Anhänger Schopenhauers ein Mathematikdidaktiker war – schon allein, weil Mathematikdidaktiker sich meistens nicht mit Disziplinen des schopenhauerischen Systems wie Erkenntnistheorie, Metaphysik oder Ethik beschäftigen. 2) Ein Anhänger eines Philosophen wie Arthur Schopenhauer begeistert sich für dessen Ideen und Argumente und führt bestimmte davon produktiv fort. Wenn man dies unter einem ‘Anhänger’ versteht, dann kann man die Frage, ob Diesterweg ein Anhänger Schopenhauers war, bejahen und rechtfertigen.

5 Diesterwegs Partitionsdiagramme

Der vermutlich stärkste Einfluss Schopenhauers auf Diesterweg betrifft die Anwendung der Partitionsdiagramme auf die Philosophie der Mathematik. Diese Übernahme und Fortführung der Partitionsdiagramme sind insofern eine Kuriosität, da es meines Wissens vor Schopenhauer nur zwei Autoren gab, die Partitionsdiagramme verwendet haben, nämlich Johann Christian Lange im *Nucleus Logicus Weisianae* und Kant in der *Jäsche-Logik*. Die Methode Kants unterscheidet sich aber so stark von Schopenhauer, dass ein Einfluss Kants auf Schopenhauer oder Diesterweg kaum sinnvoll erklärbar ist (Lemanski und Demey 2021). Auch Langes *Nucleus* kann keine wesentliche Rolle für Schopenhauer gespielt haben, da dieses Buch bereits Mitte des 18. Jahrhunderts kaum noch verfügbar war. Darüber

hinaus unterscheiden sich die Diagramme Langes von denen Schopenhauers und Diesterwegs sehr stark im Aufbau und damit auch in der Form.

Da – wie im Folgenden dargestellt werden soll – Diesterweg nicht nur Schopenhauers diagrammatische Prinzipien übernimmt, sondern auch dessen Beispiel aus der Philosophie der Mathematik (Abb. 3), ist der Einfluss Schopenhauers wohl solange die plausibelste Erklärung, solange keine weitere Quelle vor 1819 gefunden wird, die sowohl Schopenhauers Partitionsdiagramme als auch die von Diesterweg erklärt. Wie im Folgenden zudem zu sehen sein wird, greift Diesterweg nicht nur das Partitionsdiagramm aus der *Welt als Wille und Vorstellung* §9 wieder auf, sondern auch das animalia-Diagramm aus Schopenhauers *Berliner Vorlesungen*.

Glaubt man aber der in Kap. 2 dargestellten ‘üblichen Geschichtsschreibung’ hätte Diesterweg diese Diagramme gar nicht kennen können, da in Schopenhauers Vorlesung angeblich kaum Studenten saßen. Ob Diesterweg nun aber in den 1820er Jahren selbst in Berlin war und in Schopenhauers Vorlesung ‘gestolpert’ ist oder einen Studenten kennengelernt hat, der ihm von dem animalia-Diagramm berichtete, oder ob Diesterweg nur aus dem in Kap. 3.3 angegebenen, kryptischen Zitat Schopenhauers zur transzendentalphilosophischen, reduktionistischen und kompositionalen Natur der RD durch Zufall dasselbe Diagramm (nur mit anderem Inhalt) konstruiert hat, wird hier leider nicht geklärt werden können. Die folgenden Unterkapitel, die zunächst die Rezeption des schopenhauerschen Grunddiagramms (5.1) und dann deren Erweiterung darstellen (5.2), bleiben somit zuletzt ein Rätsel der Mathematik- und Logikgeschichte.

5.1 Diesterwegs Partitionsdiagramme

Diesterwegs Partitionsdiagramme finden sich im *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre* von 1822. Die Ausgabe von 1845 hat den Vorteil, dass die Diagramme direkt im Text eingebunden sind und nicht als Anhang gedruckt wurden, wie in den vorangegangenen Auflagen. Daher orientiere ich mich an der späteren Edition, die inhaltlich mit der 1822-Auflage identisch ist. Die *Anweisung zum Gebrauche des Leitfadens für räumlichen Verbindungslehre* (1. Aufl. v. 1829) stellt einen Kommentar zur Schrift von 1822 dar.

§19 des *Leitfadens* trägt den Titel “Zerlegung und Verhältniß geometrischer Begriffe (Logisch-mathematische Uebungen)”. Diesterweg argumentiert in diesem Paragraphen, dass Inhalt und Umfang von Begriffen in einem antiproportionalen Verhältnis stehen. Dieses sogenannte Reziprozitätsgesetz wurde durch Kants Logik

bekannt: "Inhalt und Umfang eines Begriffes stehen gegen einander in umgekehrtem Verhältnisse. Je mehr nämlich ein Begriff unter sich enthält, desto weniger enthält er in sich und umgekehrt." (AA IX, S. 95.31–33) Dieses Gesetz hielt sich insbesondere in der deutschsprachigen Philosophie bis zur Einführung der Typentheorie durch Bertrand Russell (1872–1970) und wurde in dieser Zeit prominent von Schopenhauer, Hegel, Bolzano oder auch Frege vertreten (Centrone 2010).

Wie Schopenhauer diskutiert Diesterweg dieses Gesetz zunächst anhand von alltagssprachlichen Begriffen wie 'Pferd' oder 'Säugetier'. 'Tier' ist ein allgemeinerer Begriff als Pferd und besitzt daher mehr Umfang, aber weniger Inhalt. Das bedeutet, dass die Menge an Individuen, die dem Begriff 'Tier' untergeordnet sind, größer ist als die Menge der Individuen, die dem Begriff 'Pferd' subsumiert werden. Es gibt nun mal mehr Tiere als Pferde. Die Menge der Eigenschaften, die man aber dem Begriff 'Pferd' zuspricht, ist größer als die Menge, die man unter dem Begriff 'Tier' subsumiert. Alle Pferde haben zum Beispiel die Eigenschaft Hufe zu haben, aber das trifft halt nicht auf alle Tiere zu. Versteht man nun unter 'Umfang' die Menge der Individuen oder Objekte und unter 'Inhalt' die Menge an Eigenschaften und Merkmalen, so lässt sich das antiproportionale Verhältnis beider Begriffe bestimmen (Lemanski 2022, S. 436 – 440).

Diesterweg weitet seine Überlegungen schließlich auch auf geometrische Begriffe aus. Bereits Schopenhauer hatte in Abb. 3 ein Exempel mit geometrischen Begriffen verwendet. Diesterweg greift zunächst aber ein anderes Beispiel aus der Geometrie auf, das sich dennoch deutlich an Schopenhauers RD orientiert. Er verwendet dafür ein RD3, das allerdings nicht zwei, sondern drei begriffliche Sphären zeigt, die in einer vierten enthalten sind. Diese vierte Sphäre soll den Begriff 'geradlinige Figur' anzeigen. Darin sind nun die Begriffe 'Dreieck', 'Viereck', 'Vieleck' enthalten, wobei diese die umgebende Sphäre nicht vollständig füllen. Das entsprechende RD3 ist in Abb. 7 angegeben, zusammen mit dem korrespondierenden schwachen JSB-Hexagon, das in (Demey 2020, S. 200ff.) genauer beschrieben wird.

Abb. 7 folgen mehrere weitere Partitionsdiagramme, die sich dann aber nicht mehr an RD4, sondern an RD6 orientieren. Diesterweg spricht dabei nicht von 'Logik-' oder 'Partitionsdiagrammen', so wie wir es heutzutage tun, sondern von "figürlichen Darstellungen", die "sinnlich anschaulich" sind. Schopenhauer selbst verwendet mehrfach den Begriff 'bildliche Darstellung' oder 'räumliche Figuren' – all diese Ausdrucksweisen sind aber nicht untypisch für das frühe 19. Jahrhundert. Untypisch sind hingegen die von Schopenhauer eingeführten und dann von Diesterweg vollständig auf die Geometrie übertragenen Diagramme.

Als nächstes Beispiel verwendet Diesterweg nun eine Sphäre, die vollständig von drei Begriffen ausgefüllt wird. Damit soll der Unterschied zwischen RD4 und RD6

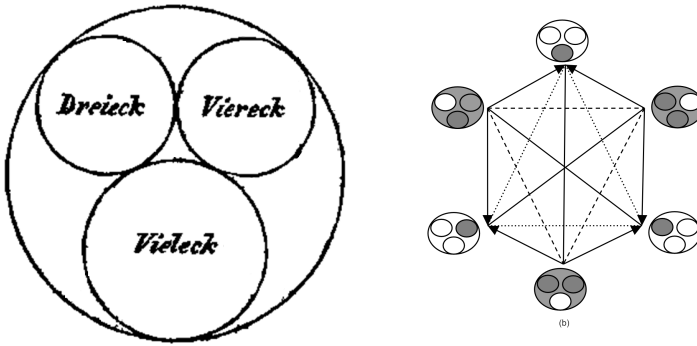


Abbildung 7: (Diesterweg 1845, S. 38), (b) korrespondierendes schwaches JSB-Hexagon

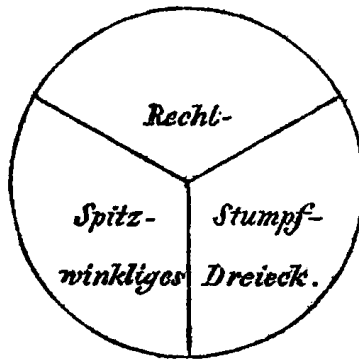


Abbildung 8: (Diesterweg 1845, S. 38)

deutlich werden. Diesterweg wählt dafür dasselbe Beispiel, das Schopenhauer auch in *Die Welt als Wille und Vorstellung* angeführt hatte und das oben bereits als Abb. 3 angegeben wurde. Die diesterwegsche Adaption dieses Diagramms zeigt Abb. 8. Die Abbildung veranschaulicht, wie die Begriffe 'recht-', 'spitz-' und 'stumpfwinkeliges Dreieck' in der sie umgebenden Sphäre 'geradliniges Dreieck' enthalten sind. Geradliniges Dreieck hat somit mehr Umfang, aber weniger Inhalt als die ihm untergeordneten Begriffe, die in seiner Sphäre eingezeichnet sind.

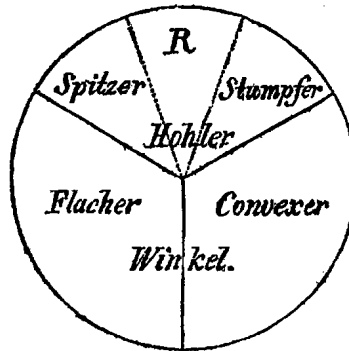


Abbildung 9: (Diesterweg 1845, S. 38)

5.2 Diesterwegs Erweiterung der schopenhauerschen Partitionsdiagramme

Überaus ungewöhnlich sind die beiden Partitionsdiagramme, die nun in Diesterwegs *Leitfaden* folgen. Beide basieren auf den Prinzipien der *RD6*, gehen aber weit über die Darstellungsformen hinaus, die Schopenhauer in seinen bis 1822 veröffentlichten Schriften verwendet hat. Damit drängen sich zwei Möglichkeiten auf, die das Verhältnis zwischen Diesterweg und Schopenhauer bestimmen: Entweder hat Diesterweg Schopenhauers kryptische Anregung, die *RD* kompositional zu verwenden (siehe Kap. 3.3), genauso verstanden wie Schopenhauer sie auch im Sinn hatte, oder Diesterweg kannte direkt oder indirekt das animalia-Diagramm (Abb. 4) aus Schopenhauers Berliner Vorlesung. Zwar lässt sich zum jetzigen Zeitpunkt keine These untermauern, die eine der Alternativen favorisieren könnte, aber man kann zeigen, wie ähnlich sich Diesterwegs erweiterte Partitionsdiagramme und das animalia-Diagramm Schopenhauers sind.

Das erste der beiden Partitionsdiagramme integriert Abb. 8 in einen Begriff mit einem weiteren Umfang: 'Geradlinige Winkel' umfasst zum einen 'rechte', 'spitze' und 'stumpfe Winkel', die alle zusammen die Klasse der 'hohlen Winkel' bilden und diesem untergeordnet sind. Die übergeordnete Klasse wird dann den Begriffen 'flacher' und 'konvexer Winkel' nebengeordnet. 'Hohler', 'flacher' und 'konvexer Winkel' sind also Gattungsbegriffe, während 'rechter', 'spitzer' und 'stumpfer Winkel' Artbegriffe von 'hohler Winkel' sind. Auch hier haben die Gattungsbegriffe mehr Umfang, aber weniger Inhalt als die Artbegriffe.

Während in Abb. 8 bzw. 3 nur Begriffe abgebildet waren, die einem Begriff un-

tergeordnet sind und untereinander nebengeordnet waren, zeigt Abb. 9 hingegen eine Partition, also die Zerlegung des Umfangs des Begriffs ‘Winkel’ in disjunkte Teilmengen, bei denen der Begriff ‘hohler Winkel’ wiederum in drei disjunkte Teilmengen unterteilt wird. Diesterweg schreibt:

Alle geradlinigen Winkel sind:
entweder convex,
oder flach,
oder hohl; a) spitz; b) R; c) stumpf.

Auffällig ist, dass Diesterweg bei diesem Partitionsdiagramm auch symbolische Elemente von Schopenhauers animalia-Diagramm übernimmt: Wie ‘vertebrata’ und ‘animalia’ in Abb. 4 über mehrere Sektionen des Diagramms in Sperrschrift geschrieben wurde, um die Zerlegung dieser Begriffe in weitere Unterklassen deutlich zu machen, so wurde auch in Abb. 9 die Worte ‘Hohler’ und ‘Winkel’ ähnlich gestreckt über mehrere Segmente eingefügt. Darüber hinaus übernimmt Diesterweg auch die Methode der zwei unterschiedlichen Linienarten, um die Unterordnung von der Nebenordnung der Begriffe kenntlich zu machen: Zwischen den Arten des hohlen Winkels wurden gepunktete Linien gezogen, zwischen den Gattungsbegriffen ‘hohl’, ‘flach’ und ‘konvex’ hingegen durchgezogene Linien. Das erinnert an die vielen einfachen und an die dicke, doppelte Linie im animalia-Diagramm Schopenhauers.

Noch deutlicher sind diese beiden symbolischen Elemente in dem letzten Partitionsdiagramm Diesterwegs zu erkennen. In diesem Diagramm, nämlich Abb. 10 ist der Begriff ‘geradliniges ebenes Viereck’ in seine Partitionen zergliedert worden. Diesterweg schreibt dazu Folgendes im *Leitfaden*:

In dem geradlinigen ebenen Viereck sind:
entweder die Seiten paarweise ||:
a) Quadrat; b) Rechteck; c) Rhombus; d) Rhomboides;
oder nur 1 Paar Seiten ist || = Paralleltrapez;
oder kein Paar = Trapez.

Diesterweg hat mit diesen vier Diagrammen mehrere Grundlagen in seinem Lehrbuch geschaffen: Zum einen fordert er seine Leser nun auf, komplexere Partitionsdiagramme zu weiteren geometrischen Begriffen zu konstruieren; zum anderen verwendet er die Partitionsdiagramme, um damit verschiedene logische Übungen durchzuführen. Beide Vorgehensweisen sind stark interpretationsbedürftig, da Diesterweg keine explizite Auflösung der Übungen gibt. Zwar sind die Beschreibungen in der *Anweisung* nützlich, aber Partitionsdiagramme findet man dort nicht.

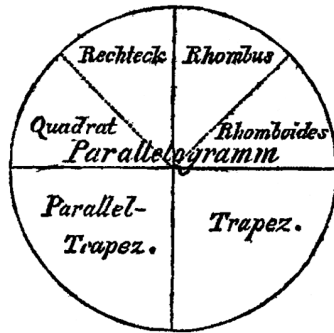


Abbildung 10: (Diesterweg 1845, S. 39)

Die Konstruktion der komplexeren Diagramme müssen an anderer Stelle intensiver diskutiert werden. Ich möchte abschließend nur zwei Beispiele für logische Schlüsse geben, die in ähnlicher Weise dem Leser in (Diesterweg 1845, §22) als Aufgabe gestellt werden. Dabei verwende ich die bereits in Kapitel 3.3 skizzierten Regeln.

1) Wenn nach Fig. 9 x ein hohler Winkel \odot ist, aber es nicht der Fall ist, dass dieser ein spitzer \ominus oder ein stumpfer $\omin�$ ist, dann ist x ein rechter Winkel $\omin�$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{x \in \neg \odot}{x \in \omin�} \neg\text{-B} \quad \frac{x \in \neg \odot}{x \in \omin�} \neg\text{-B} \\
 \hline
 \frac{\quad}{x \in (\omin� \cap \omin�)} \cap\text{-E} \\
 \frac{\quad}{x \in \omin�} \cap\text{-B} \quad \frac{\quad}{x \in \omin�} \cap\text{-E} \\
 \hline
 \frac{x \in (\omin� \cap \omin�)}{x \in \omin�} \cap\text{-B}
 \end{array}$$

2) Wenn nach Fig. 9 x ein spitzer $\omin�$, rechter $\omin�$ oder stumpfer Winkel $\omin�$ ist, dann ist x ein nicht-konvexer $\omin�$ und ein nicht-flacher Winkel $\omin�$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{x \in (\omin� \cup \omin� \cup \omin�)}{x \in \omin�} \cup\text{-B} \\
 \frac{\quad}{x \in \neg \omin�} \neg\text{-E} \\
 \frac{\quad}{x \in (\neg \omin� \cup \neg \omin�)} \cup\text{-E} \\
 \frac{\quad}{x \in (\omin� \cup \omin�)} \neg\text{-B}
 \end{array}$$

6 Fazit

Diesterweg gibt noch viele weitere logisch-mathematische Übungen an, die mit Hilfe der Diagramme bearbeitet werden sollen. Für diesen Aufsatz sollte es aber reichen, gezeigt zu haben, dass Diesterweg Schopenhauers RD kannte, erweiterte und Anwendungen für sie in der Geometrie fand.

Das dargebotene Material sollte belegt haben, dass es

- bereits eine frühe Schopenhauer-Rezeption in der Logik und Mathematik, also vor den 1840er Jahren, gab,
- dass Schopenhauers Ideen in der Mathematik des 19. Jahrhunderts fruchtbar angewandt wurden, und
- dass Schopenhauers und Diesterwegs Anwendungen sich auch Modernisierungen nicht versperren und heute noch sinnvoll interpretiert werden können.

Trotz der hier dargebotenen Erkenntnisse steckt die Forschung zu Schopenhauers Logik und Mathematik erst in den Kinderschuhen. Die Antworten, nach denen die zukünftige Forschung suchen dürfte, betreffen einige der folgenden Fragen: Wie einflussreich war Diesterwegs und damit Schopenhauers Ansatz, insbes. die Anwendung von Logik auf die Mathematik? Gab es weitere Partitionsdiagramme in der (Philosophie der) Mathematik des 20. Jahrhunderts? Inwieweit waren Diesterwegs Ideen insgesamt von Schopenhauer beeinflusst? Warum haben Schopenhauer und seine Anhänger, die so akribisch nach einer Rezeptionen der schopenhauerschen Lehre gesucht haben, keine Hinweise auf Diesterweg gefunden oder festgehalten? Wie kam Diesterweg zu den Kenntnissen über Schopenhauers diagrammatische Techniken aus den Berliner Vorlesungen, die angeblich kaum jemand besucht und gekannt haben soll? Inwieweit sind Schopenhauers und Diesterwegs Ansätze modernisierungsfähig? Lässt sich beispielsweise ein vollständiger und widerspruchsfreier Kalkül des natürlichen Schließens auf Basis der Partitionsdiagramme entwickeln?

Danksagung

Ich danke den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Zwanzigsten Treffens des *Rheinisch-Westfälisches Seminar zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* am 28. Januar 2022 in Paderborn sowie Daniel Schubbe und Gregor Nickel für viele wichtige und interessante Hinweise und Denkanregungen. Ich danke zudem der

Thyssen-Stiftung, die durch die Förderung des Projekts ‘History of Logic Diagrams in Kantianism’ die Publikation dieses Aufsatzes ermöglicht hat.

Literaturverzeichnis

- Bernhard, Peter. 2001. *Euler-Diagramme: Zur Morphologie einer Repräsentationsform in der Logik*. Paderborn: mentis.
- Birnbacher, Dieter. 2018. Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie. In *Schopenhauer-Handbuch. Leben – Werk – Wirkung. 2. Aufl.* Herausgegeben von Daniel Schubbe und Matthias Köhler, 51–60. Stuttgart: Metzler.
- Cartwright, David E. 2010. *Schopenhauer: A Biography*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Centrone, Stefania. 2010. Der Reziprozitätskanon in den Beyträgen und in der Wissenschaftslehre. *Zeitschrift für philosophische Forschung* 64 (3): 310–330.
- Demey, Lorenz. 2020. From Euler Diagrams in Schopenhauer to Aristotelian Diagrams in Logical Geometry. In *Language, Logic, and Mathematics in Schopenhauer*, herausgegeben von Jens Lemanski, 181–205. Cham: Springer.
- Diesterweg, Friedrich Adolf Wilhelm. 1820. *Geometrische Combinationslehre: Zur Beförderung des Elementar-Unterrichts in der Formen- und Grössenlehre*. Elberfeld: Friedrichs.
- . 1822. *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre*. Elberfeld: Büchler.
- . 1828. *Raumlehre oder Geometrie nach den jetzigen Anforderungen der Didaktik für Lehrende und Lernende*. Bonn: Weber.
- . 1829. *Anweisung zum Gebrauche des Leitfadens für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre*. Elberfeld: Büchler.
- . 1845. *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre. 4. verb. Aufl.* Leipzig: Friedlein & Hirsch.
- . 1878. Über die richtige Methode des Forschens und Lehrens. In *Ausgewählte Schriften, Bd. 3*, herausgegeben von E. Langenberg, 322–333. Frankfurt am Main: Diesterweg.
- Dobrzański, Michał. 2017. *Begriff und Methode bei Arthur Schopenhauer*. Würzburg: Königshausen & Neumann.

- Goebel, Klaus. 1995. *Wer die Schule hat, der hat die Zukunft. Gesammelte Aufsätze zur rheinisch-westfälischen Schulgeschichte*. Hg. v. Herausgegeben von H. G. Kirchoff. Bochum: Brockmeyer.
- Heinemann, Anna-Sophie. 2020. Schopenhauer and the Equational Form of Predication. In *Language, Logic, and Mathematics in Schopenhauer*, herausgegeben von Jens Lemanski, 165–179. Cham: Springer.
- Jacquette, Dale. 2012. Schopenhauer's Philosophy of Logic and Mathematics. In *A Companion to Schopenhauer*, herausgegeben von B. Vandenabeele, 43–59. Oxford: Wiley-Blackwell.
- Lemanski, Jens. 2022. *Welt und Logik*. London: College Publications.
- Lemanski, Jens, und Lorenz Demey. 2021. Schopenhauer's Partition Diagrams and Logical Geometry. In *Diagrams 2021: Diagrammatic Representation and Inference*, herausgegeben von A. Basu, G. Stapleton, S. Linker, C. Legg, E. Manalo und P. Viana, 149–165. Cham: Springer.
- Mach, Ernst. 1906. *Erkenntnis und Irrtum: Skizzen zur Psychologie der Forschung*. 2. durchges. Aufl. Leipzig: Barth.
- Menne, Albert. 1989. Die Kantische Urteilstafel im Lichte der Logikgeschichte und der modernen Logik. *Journal for General Philosophy of Science* 20:317–324.
- Moktefi, Amirouche. 2020. Schopenhauer's Eulerian Diagrams. In *Language, Logic, and Mathematics in Schopenhauer*, herausgegeben von Jens Lemanski, 111–127. Springer.
- Moretti, Alessio. 2009. *The Geometry of Logical Opposition*. Diss., Neuchâtel.
- Prawitz, Dag. 1965. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Stockholm, Sweden: Dover Publications.
- Safranski, Rüdiger. 1987. *Schopenhauer und die wilden Jahre der Philosophie*. München: Carl Hanser.
- Schopenhauer, Arthur. 1913. *Philosophische Vorlesungen (Sämtliche Werke IX. Ed. by P. Deussen and F. Mockrauer)*. München: Piper & Co.
- . 2022. *Vorlesung über Die gesamte Philosophie oder die Lehre vom Wesen der Welt und dem menschlichen Geiste Teil 1: Theorie des gesamten Vorstellens, Denkens und Erkennens*. Hrsg. v. Daniel Schubbe unter Mitarbeit von Judith Werntgen-Schmidt und Daniel Elon. Hamburg: Meiner.

- Schubbe, Daniel. 2022. Zum biographischen Kontext der Vorlesung. In *Arthur Schopenhauer: Vorlesung über Die gesamte Philosophie oder die Lehre vom Wesen der Welt und dem menschlichen Geiste, 1. Teil: Theorie des Vorstellens, Denkens und Erkennens*, herausgegeben von Daniel Schubbe, Judith Werntgen-Schmidt und Daniel Elon, XI–XXIV. Hamburg: Meiner.
- Segala, Marco. 2020. Schopenhauer on Intuition and Proof in Mathematics. In *Language, Logic, and Mathematics in Schopenhauer*, herausgegeben von Jens Lemanski, 287–305. Cham: Springer.
- Szabó, Árpád. 1969. *Anfänge der griechischen Mathematik*. München, Wien: Oldenbourg.
- Volkert, Klaus. 1986. *Die Krise der Anschauung: Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.