

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA  
U OSIJEKU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK**

**ZAVRŠNI RAD**

Osijek, 15.9.2015.

Hrvoje Kmoniček

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA  
U OSIJEKU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK**

**ZAVRŠNI RAD**

**TEMA: RAZLIKA LINEARNOG I NELINEARNOG PRORAČUNA**

**TOPIC: DIFFERENCES IN LINEAR AND NONLINEAR ANALYSIS**

Osijek, 15.9.2015.

Hrvoje Kmoniček

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA  
U OSIJEKU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK**

ZNANSTVENO PODRUČJE: Područje tehničkih znanosti  
ZNANSTVENO POLJE: Temeljne tehničke znanosti  
ZNANSTVENA GRANA: Tehnička mehanika  
TEMA: Razlika linearnog i nelinearnog proračuna  
PRISTUPNIK: Hrvoje Kmoniček  
NAZIV STUDIJA: Sveučilišni preddiplomski studij

**RAZLIKA LINEARNOG I NELINEARNOG PRORAČUNA**

Osijek,  
Mentor:  
Izv.prof. dr.sc. SILVA LOZANČIĆ

Predsjednik Odbora za završne i diplomske ispite

---

# Sadržaj

1. Uvod	5
2. Općenito	6
2.a. Linearni proračun konstrukcija	7
2.b. Nelinearni proračun konstrukcija	8
P-Delta	11
3. Ciljevi	12
4. Tehnički opis	12
5. Linearni proračun grede	15
6. Nelinearni proračun grede	18
7. Linearni proračun okvira	21
8. Nelinearni proračun okvira	25
9. Zaključak	30
10. Literatura	31

## **1. Uvod**

Cilj ovoga rada je osnovno upoznavanje sa razlikama u linearnim i nelinearnim proračunima statike štapnih konstrukcija.

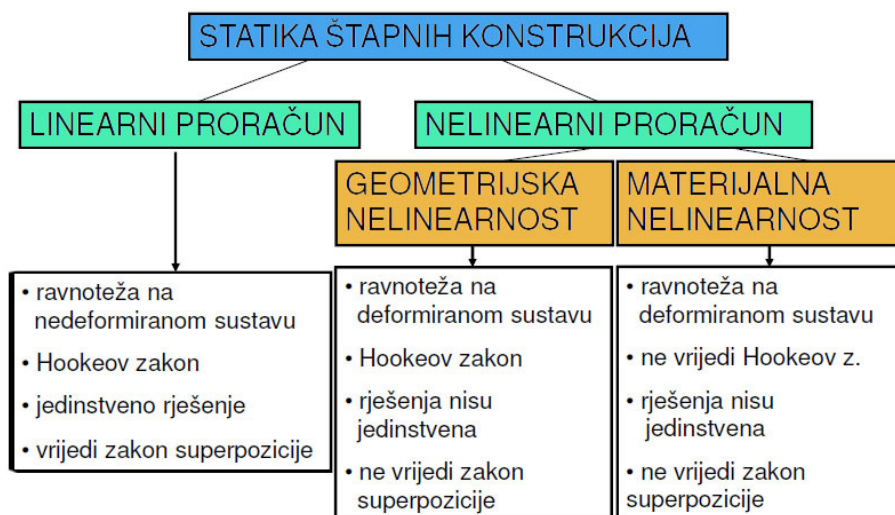
Rad je podijeljen na dva glavna dijela. Prvi dio je teoretski dio koji će nas upoznati sa linearnim i nelinearnim proračunom te sa razlikama u proračunima. Drugi dio se sastoji od primjene te teorije na dva jednostavna statička sustava gdje ćemo te razlike uočiti i izmjeriti. Svi proračuni koji će se prikazati u drugome dijelu rada su obavljani na računaru koristeći program SAP2000 v17.1.0 Evaluation.

## 2. Općenito

Konstrukcije moraju biti projektirane i izvedene na način da tijekom predviđenog vijeka trajanja podnesu sva djelovanja i učinke. S obzirom na promjenjivost tijekom vremena ta djelovanja mogu biti stalna, promjenjiva i izvanredna. Proračunom konstrukcije dokazujemo njenu nosivost i uporabljivost pod djelovanjem propisanog opterećenja tijekom projektnog razdoblja. Potrebno je pronaći proračunski model koji će najvjerođostojnije opisati stvarno ponašanje konstrukcije u svakom trenutku projektnog razdoblja a da ostane u granicama isplativosti i mogućnosti izvedbe. Pojavom sve moćnijih računalnih programa i algoritama danas smo u mogućnosti u proračun uključiti i stvarne nelinearne utjecaje na konstrukcije. Takvi proračuni za rezultat imaju optimalnije projektirane i dimenzionirane konstrukcije. Tako danas računalo umjesto inženjera provodi velike proračunske operacije dok inženjer mora moći prepoznati sve probleme i početne uvjete sustava kao i mogućnosti softvera kojim barata.

Statičke proračune možemo podijeliti na dva tipa:

- a. Linearni proračun konstrukcija ili Proračun konstrukcije po Teoriji I reda
- b. Nelinearni proračun konstrukcija po Teoriji II reda ili po Teoriji III reda.



Slika 1. Podjela statičkih proračuna

## 2.a. Linearni proračun konstrukcija

Pretpostavka linearnog ponašanja konstruktivnih elemenata podrazumijeva da su pomaci, unutarnje sile i reakcije proporcionalni opterećenju konstrukcije. Također, princip superpozicije je unutar tih pretpostavki. On nam dopušta da konačno stanje konstrukcije dobijemo zbrajajući razdvojena djelovanja.

Osnove pretpostavke ovakvog pristupa proračunu su:

- pomaci konstrukcije su dovoljno mali što nam dozvoljava definirati uvjete ravnoteže na nedeformiranoj konstrukciji. Također, radi toga smijemo pretpostaviti da sva opterećenja nakon konstrukciju ne mijenjaju točke i pravac djelovanja na konstrukciju. Ukoliko ukinemo ovu pretpostavku, slijedi geometrijski nelinearno ponašanje konstrukcije te jednačbe ravnoteže postavljamo na deformiranoj konstrukciji.

- vrijedi Hookeov zakon, odnosno, vrijedi linearno-elastično ponašanje materijala konstrukcije. Pomaci i unutarnje sile su u međusobnoj linearnoj vezi a ponašanje materijala tijekom djelovanja opterećenja ne napušta linearno područje. Ukoliko ukinemo ovu pretpostavku, slijedi materijalno ili fizikalno nelinearno ponašanje konstrukcije.

- poprečni presjeci ostaju okomiti na tangentu na nedeformiranu težišnu os i nakon djelovanja opterećenja.

Također, kod proračuna štapnih elemenata konstrukcije po linearnoj teoriji pretpostavljamo osnovne idealizacije:

- homogen, izotropan i linearno elastičan materijal

- dimenzije poprečnog presjeka štapa su znatno manje u odnosu na duljinu štapa

- potpuno točna izvedba konstrukcije, bez imperfekcija i naprezanja

- jednačbe ravnoteže postavljamo na nedeformiranom sustavu

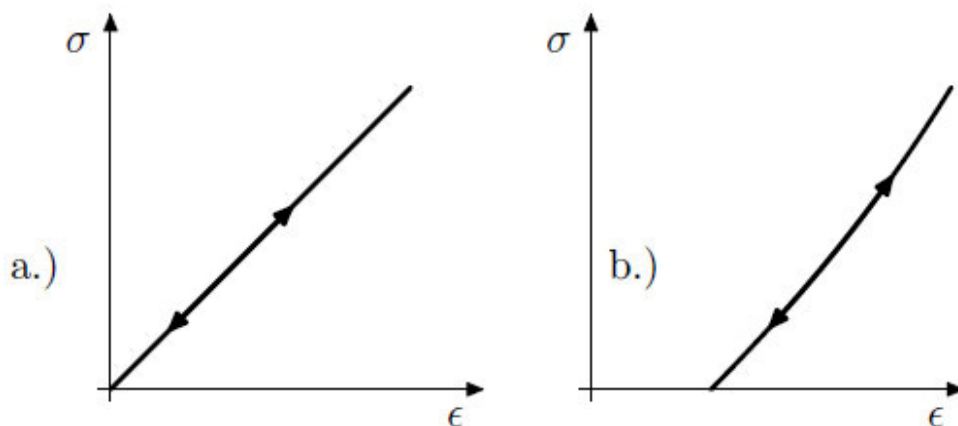
- relativno mali pomaci i deformacije konstrukcije pod djelovanjem opterećenja

Takve su pretpostavke u potpunosti opravdane za većinu konstrukcija. Ako su prikazani uvjeti ispunjeni, a proračun dobro proveden, rješenja dobivena linearnom teorijom će biti u potpunosti korektna i prihvatljiva. Tek kod konstrukcija koje nisu obuhvaćene ovim pretpostavkama linearna teorija neće rezultirati korektnim i prihvatljivim rješenjima. Na takvim konstrukcijama jednačbe ravnoteže trebaju biti ispunjene na deformiranoj konstrukciji, a ponašanje materijala u takvim konstrukcijama treba ustanoviti eksperimentalno.

## 2.b. Nelinearni proračun konstrukcija

Jedna od pretpostavki u teoriji I. reda je pretpostavka linearno elastičnog ponašanja materijala. U stvarnosti, ponašanje većine materijala nije takvo. Za potrebe proračuna konstrukcija ponašanje materijala dobiveno ispitivanjima idealizirano je po dijelovima područja deformacija.

Krivulje opterećenja i rasterećenja se kod elastičnih materijala podudaraju u dijagramu napreznja i deformacija. Za linearno elastičan materijal ta krivulja je pravac te su napreznja i deformacije linearno zavisne veličine. U stvarnosti, za nelinearno elastičan materijal, krivulja napreznja-deformacija je polinom n-tog stupnja.

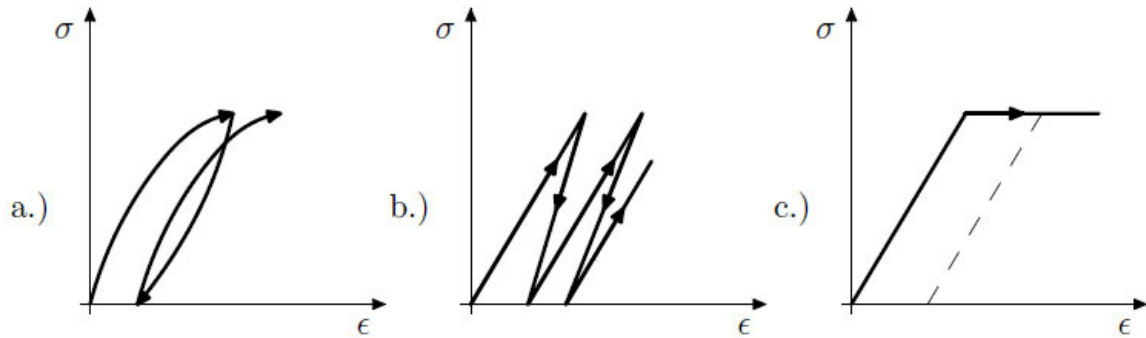


Slika 2. Elastično ponašanje materijala

a) linearno elastično, b) nelinearno elastično

Kod neelastičnih materijala ne postoji direktna veza napreznja i deformacija. Njima se ukupna deformacija sastoji od elastične i plastične deformacije a nakon prestanka djelovanja opterećenja na konstrukciji ostaje trajna, plastična deformacija. Kod ponovnog opterećenja, krivulja opterećenja polazi od početne deformacije i ne poklapa se s prethodnom krivuljom. Svakim ponovnim opterećenjem konstrukcija dobiva novu dodatnu trajnu deformaciju.

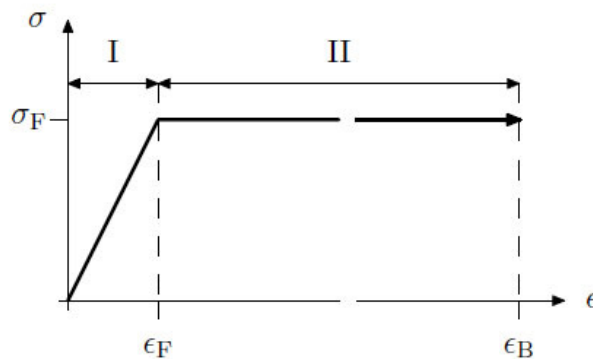




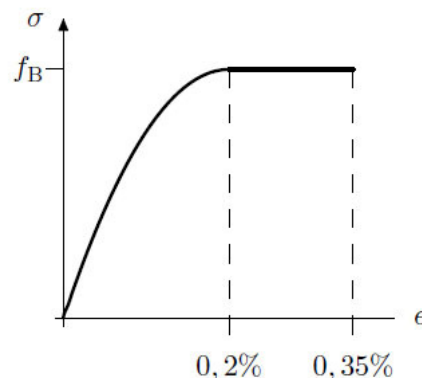
Slika 3. Neelastično ponašanje materijala

a) nelinearno elastoplastično, b) linearno elastoplastično, c) linearno elastično - idealno plastično

Sve to proračun zadaće uz nelinearnost materijala čini dodatno zahtjevnim. Konstante materijala je potrebno ustanoviti eksperimentalnim putem. Zbog toga i ovdje dolazi do određene idealizacije nelinearnosti materijala. Za bitne materijale definiramo idealizirane dijagrame naprezanja-deformacije. Najjednostavniji primjer toga je idealizacija čelika. U području prije granice popuštanja, materijal se ponaša prema linearnoj teoriji. Njegov idealizirani dijagram je bilinearan, linearno elastičan - idealno plastičan. Za idealizaciju armiranog betona uzima se idealizirani nelinearno elastičan - idealno plastičan dijagram odnosa naprezanja i deformacija. Nelinearna elastičnost u prvom dijelu dijagrama izražena je parabolom drugog stupnja.

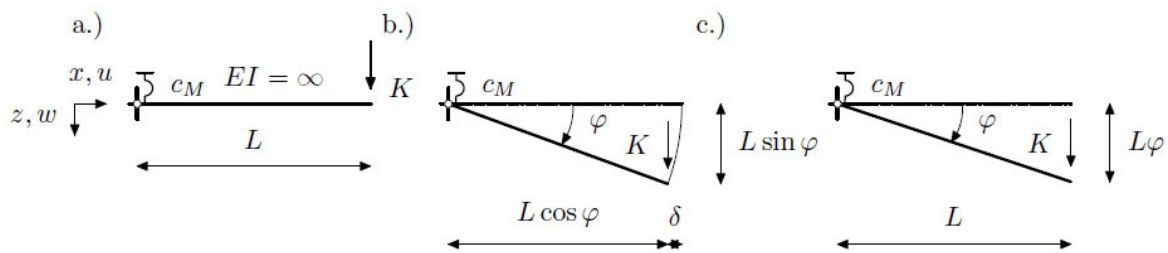


Slika 4. Linearno elastično - idealno plastično ponašanje čelika



Slika 5. Nelinearno elastično - idealno plastično ponašanje betona

Najjednostavniji primjer za prikaz razlike stvarnih i lineariziranih pomaka je beskonačno kruta elastično upeta konzolna greda opterećena koncentriranom silom na slobodnom kraju.



Slika 6. a) zadana konstrukcija, b) nelinearni pomaci, c) linearni pomaci

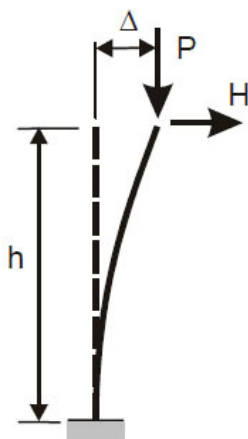
Slika 6 nam prikazuje kako u slučaju linearnog pomaka ovakvog tipa grede zanemarujemo uzdužne pomake slobodnoga kraja što rezultira nepromijenjenom projiciranom duljinom  $L$ . U slučaju nelinearnih pomaka taj se uzdužni pomak uzima u obzir te tada moment u elastično upetom ležaju poprima oblik

$$M = KL \cos \varphi$$

dok bi u slučaju linearnog pomaka kut zaokreta slobodnog kraja štapa bio zanemaren. Tako prijelaz s nelinearne teorije na linearnu teoriju možemo prikazati razvojem trigonometrijskih funkcija u red u izrazima za moment na elastično upetom ležaju te poprečni i uzdužni pomak slobodnog kraja.

## P-Delta

Postupak P-Delta je iterativni postupak proračuna po Teoriji II reda te on predstavlja linearizaciju jednadžbi nelinearne teorije. Ovaj postupak je pojednostavljen je inženjerske metode pomaka jer se u njemu koriste samo elastična i geometrijska svojstva u matrici krutosti.



Slika 7. Tlačni štap

Sa slike 7 uočavamo da se štap pod djelovanje tlačne sile  $P$  izvio u stranu za otklon 'delta', a s takvom deformacijom se javlja moment u upetom kraju grede. U slučaju linearnog proračuna ova bi se analiza provodila na ravnom, nedeformiranom štapu.

Tijek postupka je jednak kao i kod inženjerske metode pomaka. U sustavu jednadžbi ravnoteže uz sve nepoznate pomake imamo i uzdužnu silu  $N$  kao nepoznanicu koja je iskazana kao funkcija matrice krutosti. Pretpostavimo li tada neku vrijednost uzdužne sile, matrica krutosti postaje neovisna o vrijednostima unutarnjih sila. To nas dovodi do mogućnosti proračuna po linearnoj teoriji, odnosno, inženjerskoj metodi pomaka. Početnu vrijednost sile  $N_0$  koju smo dobili linearnim proračunom mijenjamo tijekom iterativnog postupka do konačne vrijednosti  $N_n$  nakon  $n$  iteracija. Kod translatorno pomičnih konstrukcija nužno je jednadžbu rada postaviti na konstrukciji nakon deformacije.

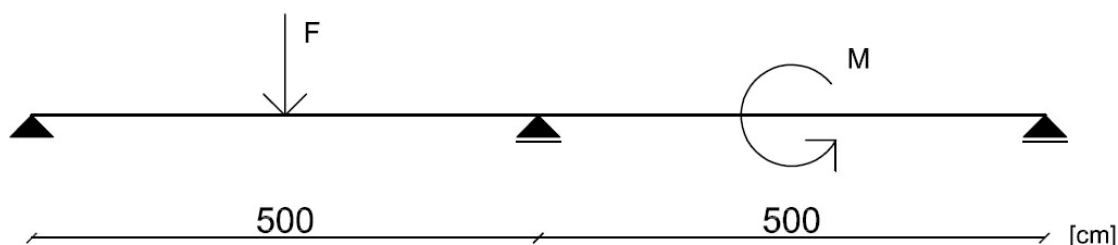
Prvi korak nam predstavlja provođenje linearnog proračuna i iz jednadžbi ravnoteže čvorova određivanje uzdužnih sila u svim elementima konstrukcije. Nakon toga ponovno određujemo lokalne matrice krutosti svih elemenata konstrukcije, lokalne vektore upetosti, globalnu matricu krutosti te globalni vektor upetosti. Nepoznanice nam ostaju translatorni pomaci i kutevi zaokreta. Iz jednadžbi ravnoteže čvorova i jednadžbi radova na nepoznatim translatorskim pomacima odredimo vrijednosti nepoznatih pomaka i sila na krajevima štapova. Nakon toga određujemo sile na krajevima svih elemenata konstrukcije iz jednadžbi ravnoteže čvorova uzdužne sile u svima elementima konstrukcije. Tako dobivene vrijednosti uzdužnih sila se uspoređuju sa vrijednostima iz prethodne iteracije te u slučaju sličnih vrijednosti možemo zaključiti da su vrijednosti iz ove iteracije također i konačne vrijednosti, a ukoliko su razlike ipak veće provodi se dodatna iteracija.

### 3. Ciljevi

Cilj ovoga rada je kroz sve unutarnje sile i progibe promotriti ponašanje dva različita statička sustava u slučajevima linearne analize i nelinearne analize koristeći program SAP2000 v17.1.0 Evaluation. Uočiti ćemo razlike u reakcijama, momentnim, poprečnim i uzdužnim dijagramima unutarnjih sila te razlike u deformacijama sustava.

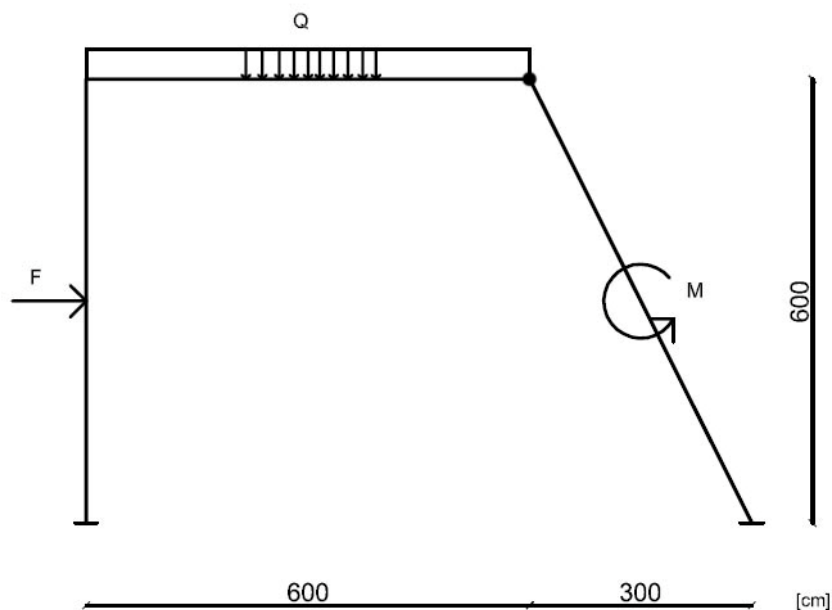
### 4. Tehnički opis

Zadana su dva statički neodređena sustava. Kontinuirana greda te okvirna konstrukcija. Kontinuirana greda se sastoji od 2 raspona veličine 5 metara. Ležaj u krajnjem lijevom čvoru je nepomični, a srednji i krajnji desni ležaj su pomični. U sredini svakog raspona se nalazi koncentrirano opterećenje u obliku okomite sile, odnosno momenta. Sila je iznosa 100 kN sa djelovanjem prema dolje, a moment je iznosa 100kNm sa djelovanjem u smjeru obrnutog od kretanja sata.



Slika 8. Kontinuirana greda

Okvirna konstrukcija se sastoji od grede i dva stupa od kojih je jedan kosi. Kosi stup i greda su spojeni zglobovom, dok je drugi spoj oblika krute veze. Sustav je u obje svoje vanjske veze upet. Opterećenje se sastoji od koncentrirane sile, koncentriranog momenta i jednolikog opterećenja. Koncentrirana sila je smještena na polovici visine lijevog stupa te je iznosa 100kN. Koncentrirani moment se nalazi na polovici raspona kosog stupa, iznosa je 100kNm te djeluje u smjeru obrnutom od kretanja sata. Jednoliko opterećenje se rasprostire po cijeloj dužini grede raspona 6 metara te djeluje prema dolje u iznosu od 10 kN/m.

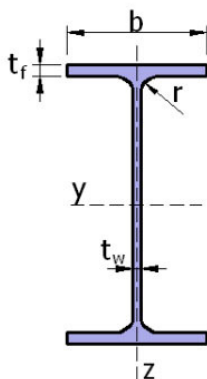


Slika 9. Okvir

Kao poprečni presjek korišten je IPE200 čelični poprečni presjek. Korišteni čelik u proračunu je S235 čija je granica popuštanja  $235 \text{ N/mm}^2$ , a gustoća  $78,5 \text{ kN/m}^3$ . Modul elastičnosti tako odabranog čelika iznosi  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ , a Poissonov koeficijent 0,3.

IPE	h mm	b mm	$t_w$ mm	$t_f$ mm	r mm	d mm	A cm <sup>2</sup>	G kg/m	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_{y,el}$ cm <sup>3</sup>	$W_{y,pl}$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm	$I_z$ cm <sup>4</sup>	$W_{z,el}$ cm <sup>3</sup>	$W_{z,pl}$ cm <sup>3</sup>	$i_z$ cm	$I_t$ cm <sup>4</sup>	$I_w \cdot 10^{-3}$ cm <sup>6</sup>
80	80	46	3,8	5,2	5	59,6	7,64	6,00	80,1	20,0	23,2	3,24	8,49	3,69	5,8	1,05	0,70	0,12
100	100	55	4,1	5,7	7	74,6	10,32	8,1	171,0	34,20	39,41	4,07	15,92	5,79	9,15	1,24	1,20	0,35
120	120	64	4,4	6,3	7	93,4	13,21	10,4	317,8	52,96	60,73	4,90	27,67	8,65	13,58	1,45	1,74	0,89
140	140	73	4,7	6,9	7	112,2	16,43	12,9	541,2	77,32	88,34	5,74	44,92	12,31	19,25	1,65	2,45	1,98
160	160	82	5,0	7,4	9	127,2	20,09	15,8	869,3	108,7	123,9	6,58	68,31	16,66	26,10	1,84	3,60	3,96
180	180	91	5,3	8,0	9	146,0	23,95	18,8	1317	146,3	166,4	7,42	100,9	22,16	34,60	2,05	4,79	7,43
200	200	100	5,6	8,5	12	159,0	28,48	22,4	1943	194,3	220,6	8,26	142,4	28,47	44,61	2,24	6,98	12,99
220	220	110	5,9	9,2	12	177,6	33,37	26,2	2772	252,0	285,4	9,11	204,9	37,25	58,11	2,48	9,07	22,67

Slika 10. Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka

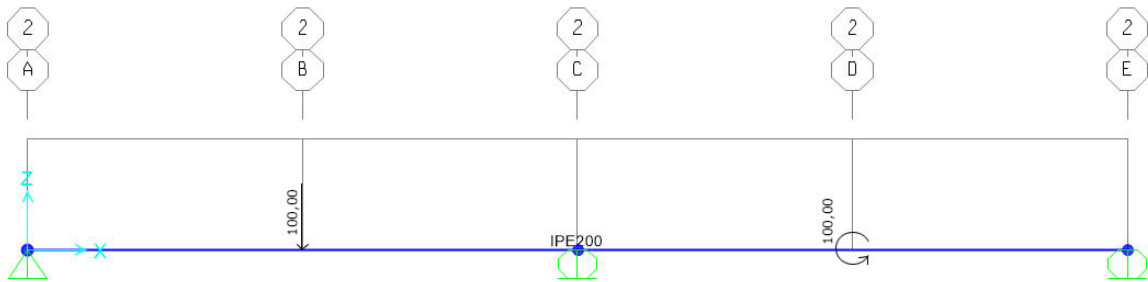


Slika 11. Oblik poprečnog presjeka IPE



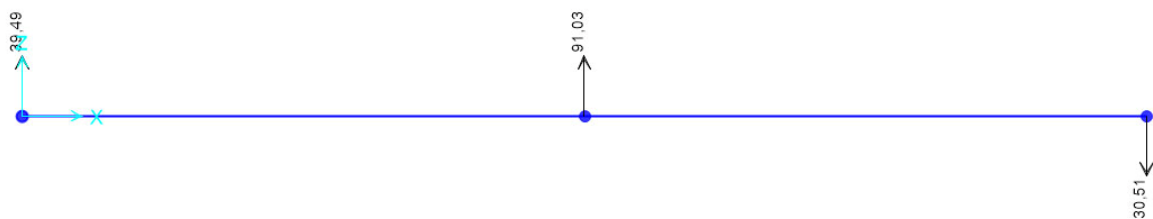
## 5. Linearni proračun grede

Koristeći SAP2000 v17.1.0 Evaluation izrađen je numerički model kontinuirane grede sa svim opterećenjima te sa vrijednošću vlastite težine elemenata postavljene na 'nula'.

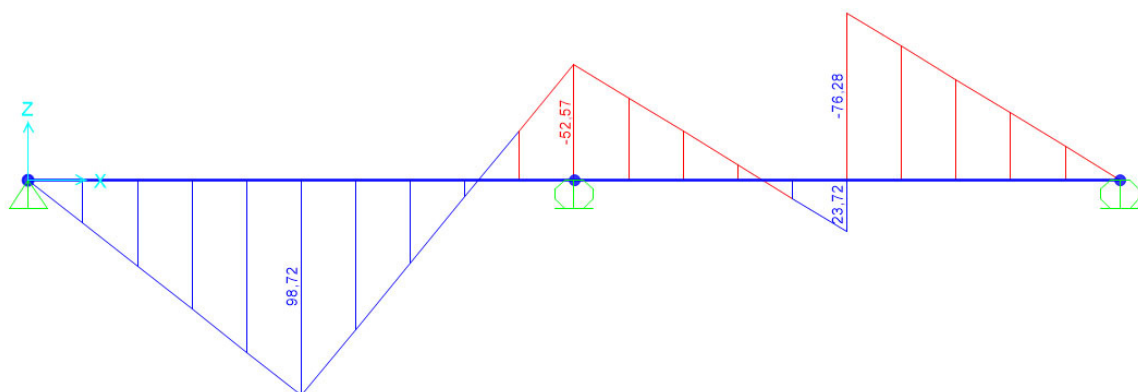


Slika 12. Numerički model grede

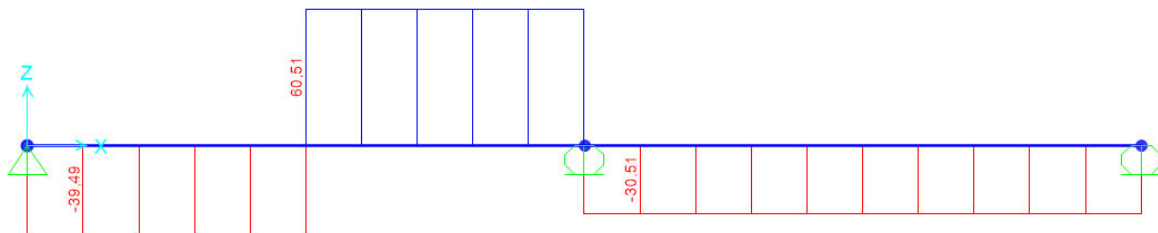
Nakon provedene linearne analize u računalnom programu, dobiveni su sljedeći rezultati reakcija, unutarnjih sila i deformacija:



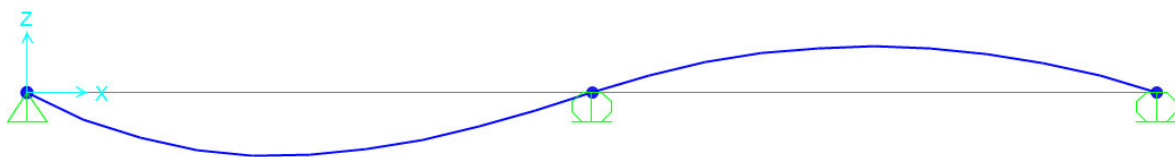
Slika 13. Smjer i iznos reakcija linearnog proračuna



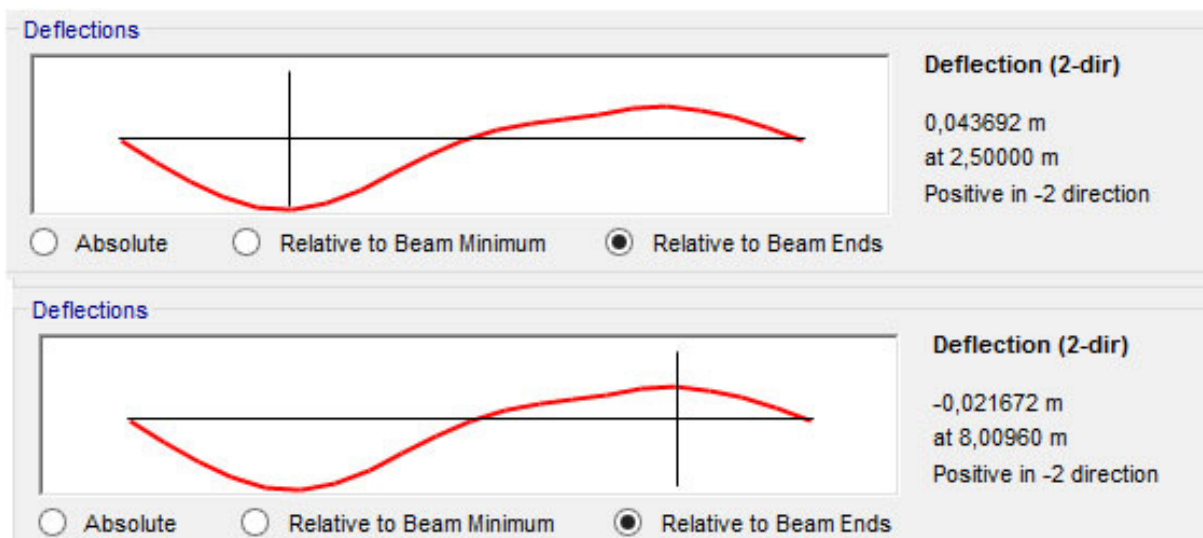
Slika 14. Momentni dijagram linearnog proračuna



Slika 15. Dijagram poprečnih sila linearnog proračuna



Slika 16. Prikaz deformacije grede



Slika 17. Vrijednosti progiba grede

Iz prikazanih rezultata jasno vidimo kako je zbroj vertikalnih reakcija sustava jednak iznosu od 100 kN, što odgovara djelovanju koncentrirane vanjske sile u istom tom iznosu, ali suprotnoga smjera. Maksimalna vrijednost momenta iznosi 98,72 kNm te se nalazi na mjestu sile. Minimalna vrijednost momenta iznosi 23,72 kNm, a nalazi se na mjestu djelovanja



momenta. Obje vrijednosti se nalaze u vlačnoj zoni. U dva krajnja ležaja vrijednost momenta je 0 kNm, dok u srednjem ležaju moment iznosi 52,57 kNm te se nalazi u tlačnoj zoni.

Dijagram poprečnih sila nam pokazuje maksimalnu vrijednost od 60,51 kN i minimalnu vrijednost od 30,51 kN sa druge strane grede.

Kako uzdužnih, odnosno kosih sila u sustavu nemamo, tako ne postoji ni dijagram istih.

Što se deformacija tiče, na slici 16 vidimo na koji se način greda deformira nakon što na nju nanese zadano opterećenje, a na slici 17 su prikazane vrijednosti maksimalnih deformacija koje iznose 4.36 mm i 2.16 mm. Također, osim deformacija grede, moramo u obzir uzeti i pomake i rotacije ležajeva. Oni su prikazani na slici 18.

Joint Displacements				
Joint Object	Joint Element			
	1	2	3	
Trans	0,00000	0,00000	0,00000	
Rotn	0,00000	0,02767	0,00000	

Joint Displacements				
Joint Object	Joint Element			
	1	2	3	
Trans	0,00000	0,00000	0,00000	
Rotn	0,00000	-0,01670	0,00000	

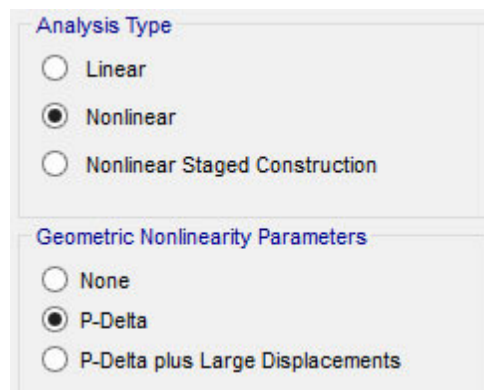
Joint Displacements				
Joint Object	Joint Element			
	1	2	3	
Trans	0,00000	0,00000	0,00000	
Rotn	0,00000	0,01551	0,00000	

Slika 18. Pomaci i rotacije ležajeva kontinuirane grede

Kako smo već utvrdili, u ovome slučaju ne postoje horizontalne ili kose sile koje djeluju na sustav pa stoga nemamo ni horizontalne pomake ležajeva, a kako je svim ležajevima spriječen vertikalni pomak, i te vrijednosti su nula. Jedino što nam preostaje su rotacije ležajeva. Krajnji desni ležaj, nepomični, se zarotirao za 0,027 radijana u smjeru kazaljke na satu. Srednji, horizontalno pomični ležaj, je doživio rotaciju od 0,0167 radijana u smjeru obrnutom od kretanja sata. Krajnji desni ležaj, također horizontalno pomični se zarotirao u smjeru kazaljke na satu za 0,0155 radijana.

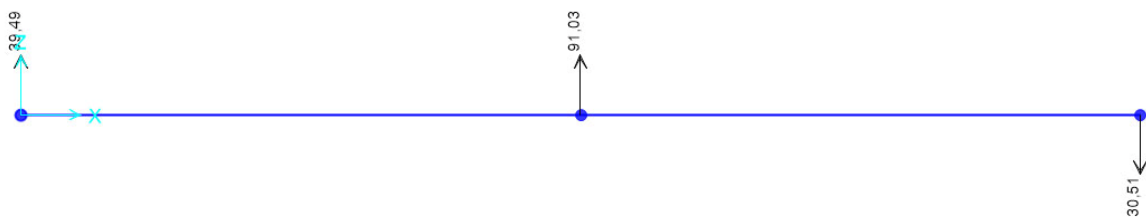
## 6. Nelinearni proračun grede

Zadržavši sve postavke materijala, presjeka i opterećenja ušli smo u novu analizu sustava. Međutim, ovaj put su promijenjene postavke tipa analize i geometrijskih nelinearnosti kao što je prikazano na slici 19. Materijalna nelinearnost nije uključena u proračun.

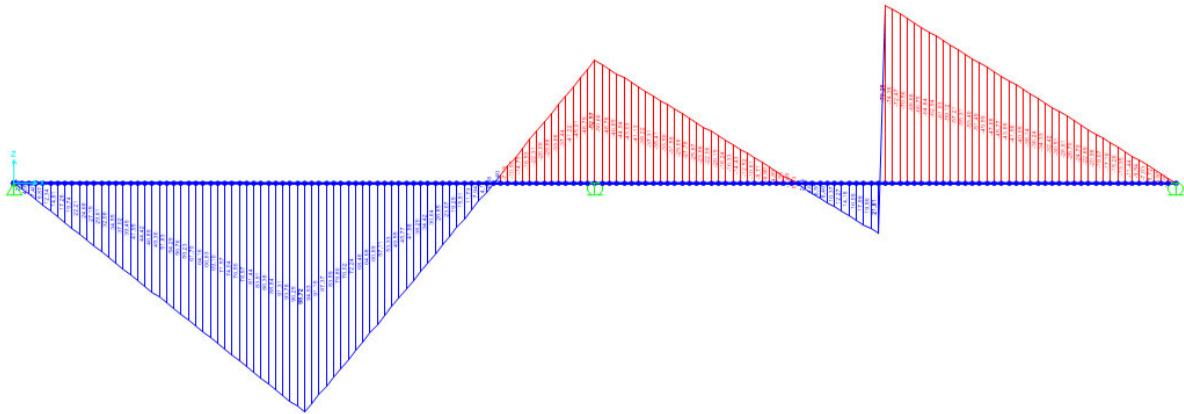


Slika 19. Osnovne postavke nelinearnog proračuna

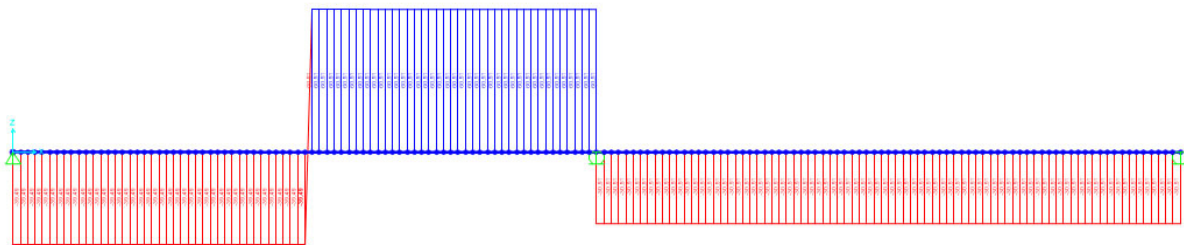
Greda je za ovaj slučaj proračuna podijeljena na više manjih segmenata kako bi osigurali što točnije rezultate analize. Nakon provedene nelinearne analize, dobivene su slijedeće vrijednosti reakcija, unutarnjih sila i deformacija sustava:



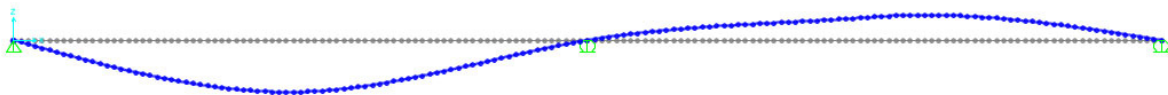
Slika 20. Smjer i iznos reakcija nelinearnog proračuna



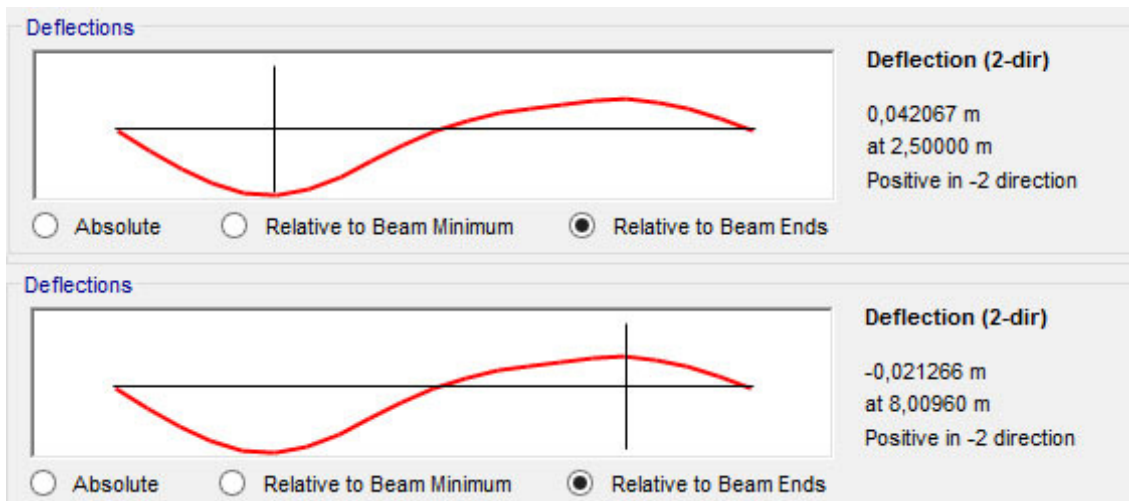
*Slika 21. Momentni dijagram nelinearnog proračuna*



*Slika 22. Dijagram poprečnih sila nelinearnog proračuna*



*Slika 23. Prikaz deformacije grede*



*Slika 24. Vrijednosti progiba grede*

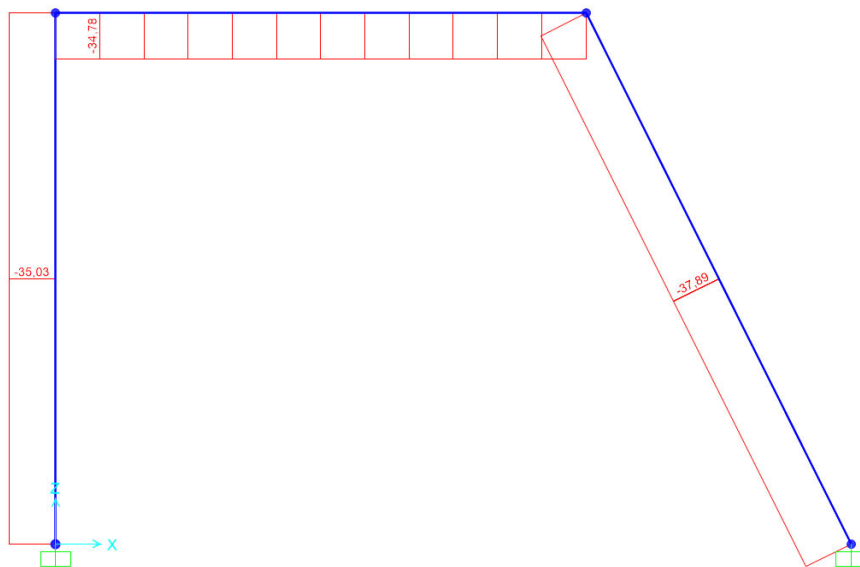
Iz rezultata nelinearne analize odmah u startu uočavamo neke promjene u odnosu na linearnu analizu sustava. Dok su reakcije u ležajevima ostale jednake onima iz linearne analize, dijagram momenta i poprečnih sila nisu ostali u potpunosti jednaki. Kako gredu dijelimo na veći broj manjih segmenata, tako su vrijednosti momentnog dijagrama sve bliže onima iz linearne analize. Maksimalni moment se i u ovome slučaju nalazi na mjestu djelovanja koncentrirane sile te iznosi 98,72 kNm. Vrijednosti sila na mjestu koncentriranog momenta se približavaju onima iz linearne analize, ali u ovome slučaju nisu u potpunosti dosegle njihove vrijednosti.

Što se samog oblika momentnog dijagrama tiče, on je veoma blizak onome iz linearne analize. Što je veći broj segmenata na koje je greda podijeljena, to se oblik dijagrama sve više približava onome iz linearne analize. Kod dijagrama poprečnih sila vrijednosti su ostale jednake kao u linearnom pro računu, ali kao i kod momentnog dijagrama, oblik se malo promijenio te on ovisi o segmentima na koje je greda podijeljena.

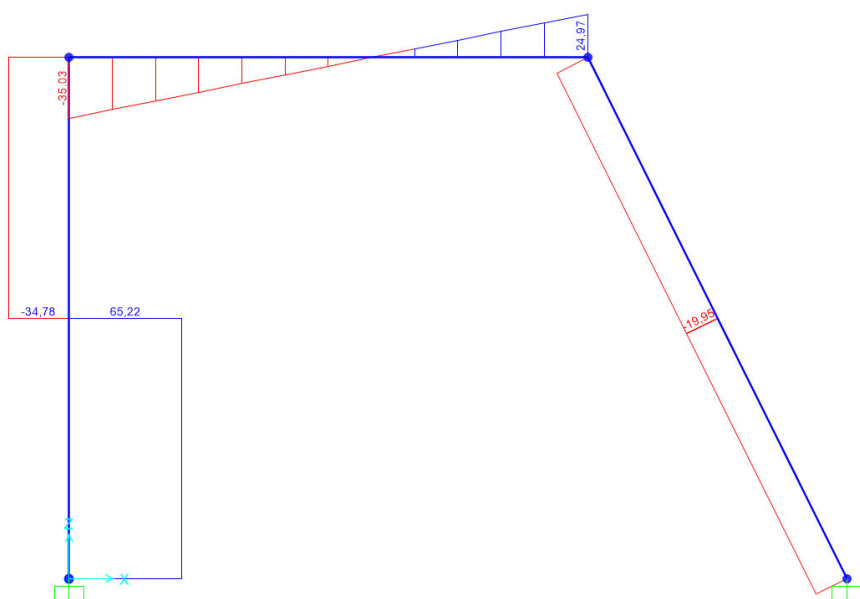
Što se deformacija i progiba tiče, one se minimalno razlikuju od prethodno prikazanih. Sada maksimalni progibi iznose 4.2 mm i 2.12 mm. Dakle, malo su manji od onih u linearnoj analizi. Rotacije i pomaci ležajeva su ostali nepromijenjeni u odnosu na linearnu analizu.

Sve razlike između rezultata dva načina proračuna grede se mogu preciznije pogledati u tablici 1 na stranici 29 ovoga rada.

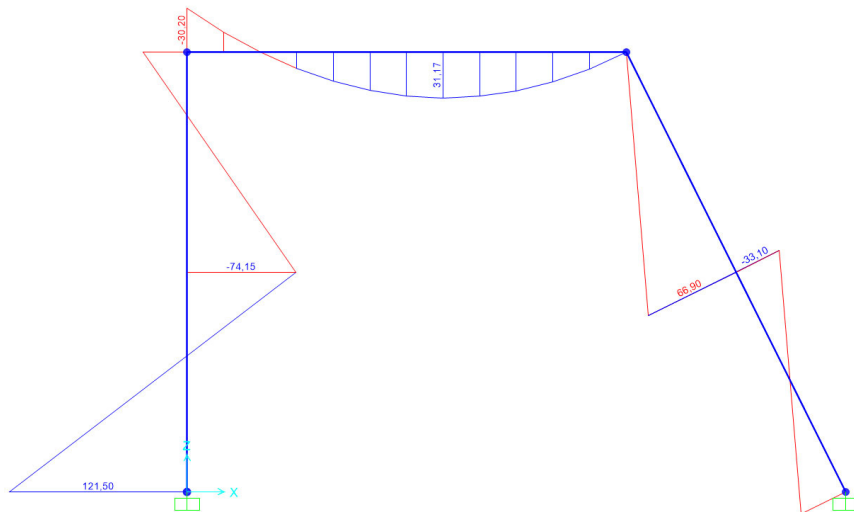




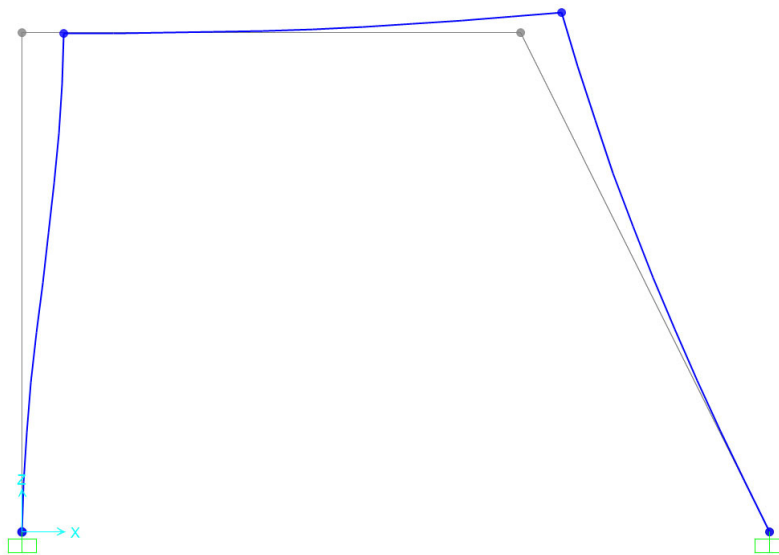
Slika 27. Vrijednosti dijagrama uzdužnih sila



Slika 28. Vrijednosti dijagrama poprečnih sila

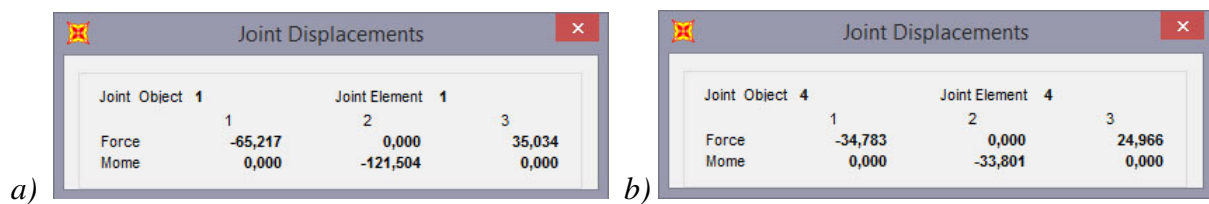


Slika 29. Vrijednosti momentnog dijagrama



Slika 30. Prikaz deformacije sustava

Iz priloženih slika uočavamo očekivane rezultate jedne linearne analize ovakvog sustava. U upetim ležajevima se pojavljuju horizontalne i vertikalne reakcije kao i moment čije su vrijednosti prikazane u očitavanju na slici 31a i 31b.



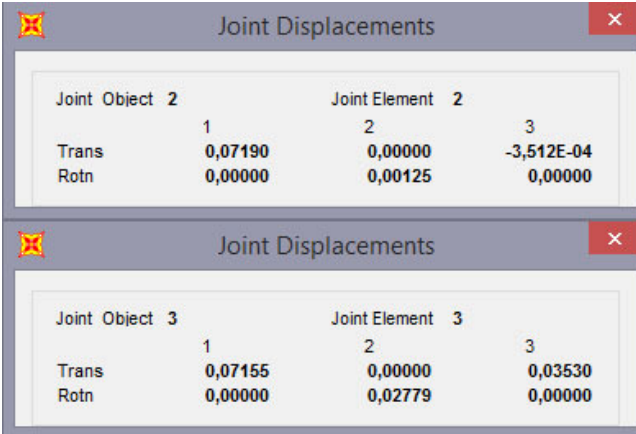
Slika 31a i 31b

Vrijednost reaktivnog momenta u lijevom ležaju iznosi 121.5 kNm, a u desnom ležaju 33.8 kNm. Oba momenta imaju smjer suprotan od smjera vrtnje kazaljki na satu.

Maksimalni moment sustava se nalazi upravo u lijevom ležaju i iznosa je reakcije. Na lijevom stupu moment je linearnog oblika sa jednom lomom na mjestu djelovanja vanjske sile. Moment na gredi ima oblik krivulje te mu je na desnom kraju grede vrijednost 0 kNm radi zgloba koji se nalazi na spoju grede i desnog kosog stupa.

Dijagram poprečnih sila ima konstantan oblik na stupovima, a linearni oblik na gredi, dok je uzdužni dijagram na cijelom sustavu konstantan. Maksimalna poprečna sila iznosi 65.22 kN, a maksimalna uzdužna 37.89 kN.

Dva spoja grede i stupova su se pomaknuli horizontalno i vertikalno. Vrijednosti tih pomaka se mogu očitati sa slike 32.



The image shows two screenshots of a software interface titled 'Joint Displacements'. Each screenshot displays a table of displacement values for a specific joint.

Joint Object	1	2	3
Trans	0,07190	0,00000	-3,512E-04
Rotn	0,00000	0,00125	0,00000

Joint Object	1	2	3
Trans	0,07155	0,00000	0,03530
Rotn	0,00000	0,02779	0,00000

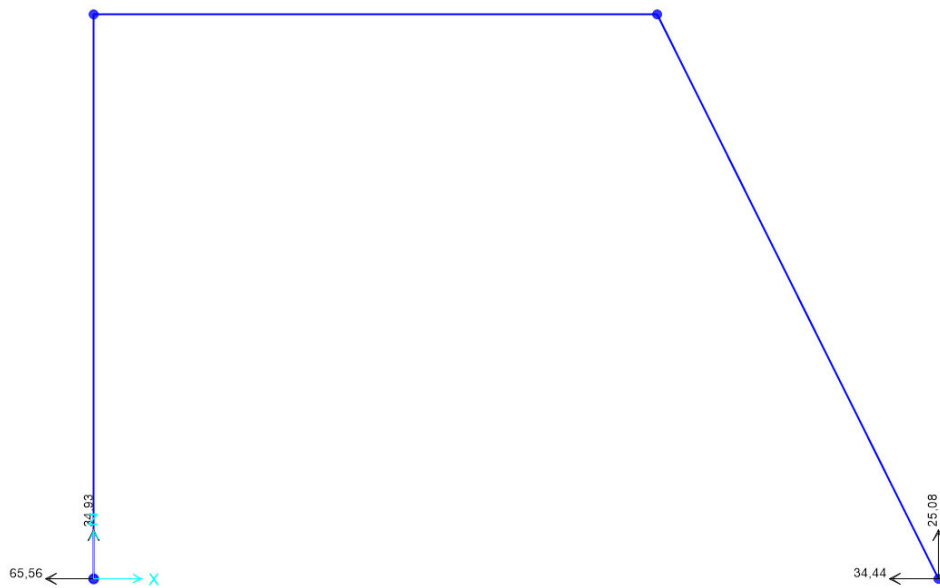
*Slika 32. Pomaci unutarnjih veza okvira*

Lijevi, kruti, spoj je poprimio horizontalni pomak od 7.19 cm te minimalni vertikalni pomak prema dolje. Desni spoj, zglob, se pomaknuo u desnu stranu za 7.15 cm te prema gore za 3.53 cm. Oba su se spoja i zarotirala kao što je vidljivo na slici.

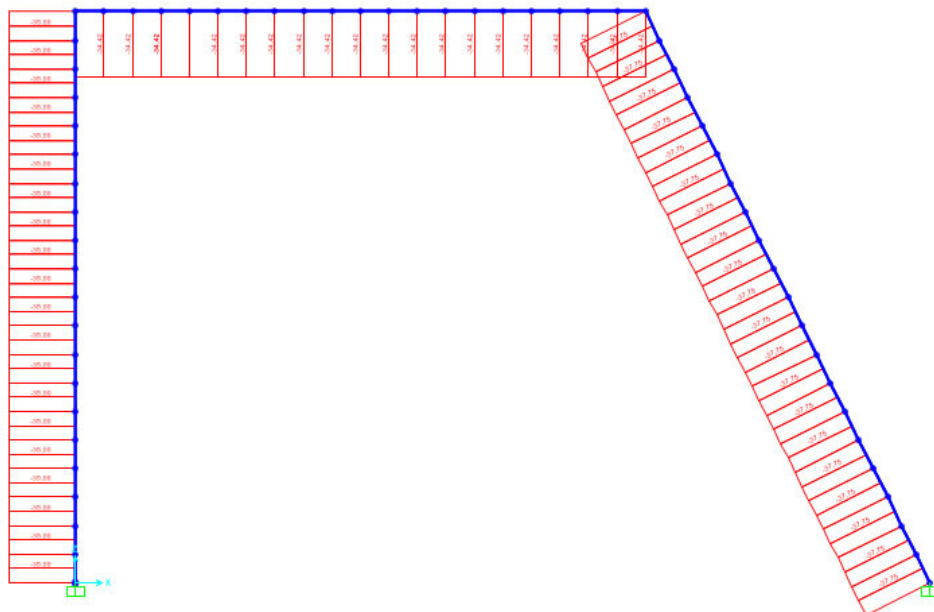


## 8. Nelinearni proračun okvira

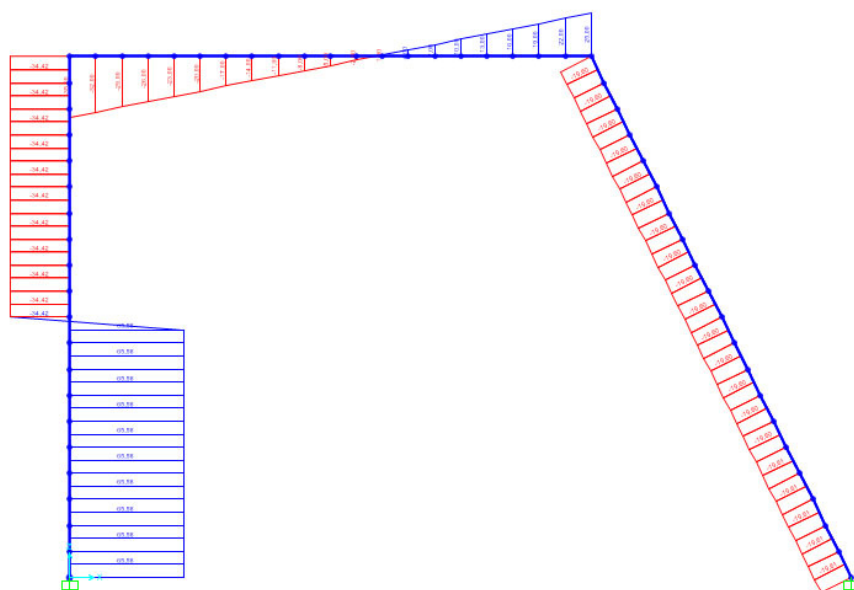
Kao i u nelinearnom proračunu grede, ovdje je odabran nelinearni tip analize sa P-Delta efektom geometrijske nelinearnosti (Slika 19). Također su svi elementi sustava podijeljeni na veći broj manjih segmenata radi osiguranja boljih rezultata proračuna. Rezultati analize su prikazani na sljedećim slikama.



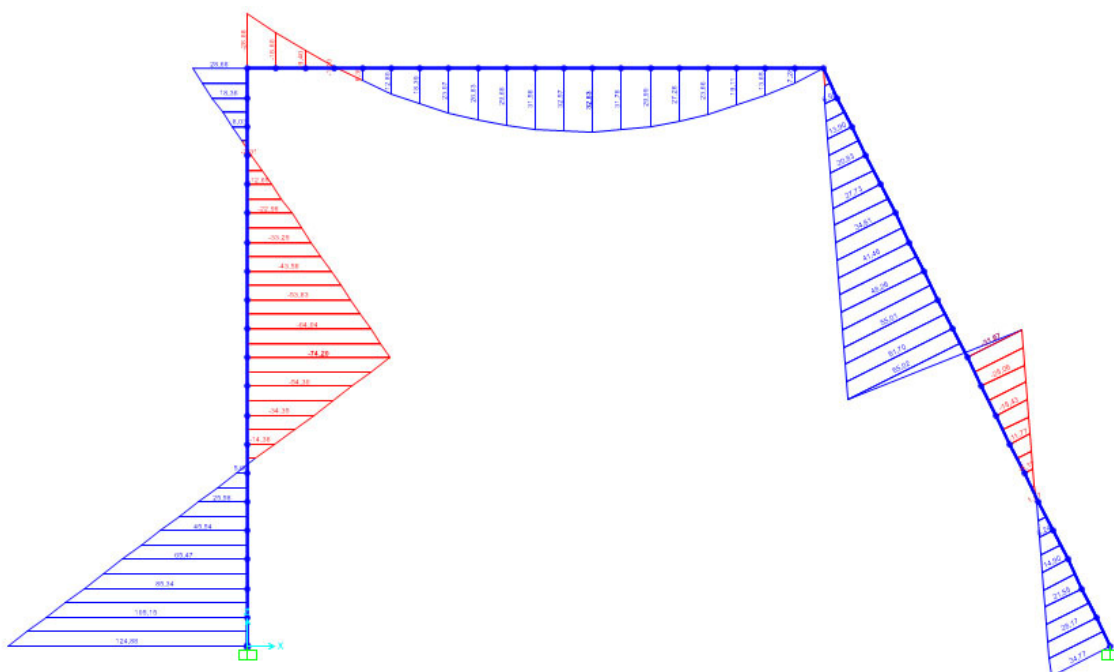
Slika 33. Nelinearne reakcije sustava



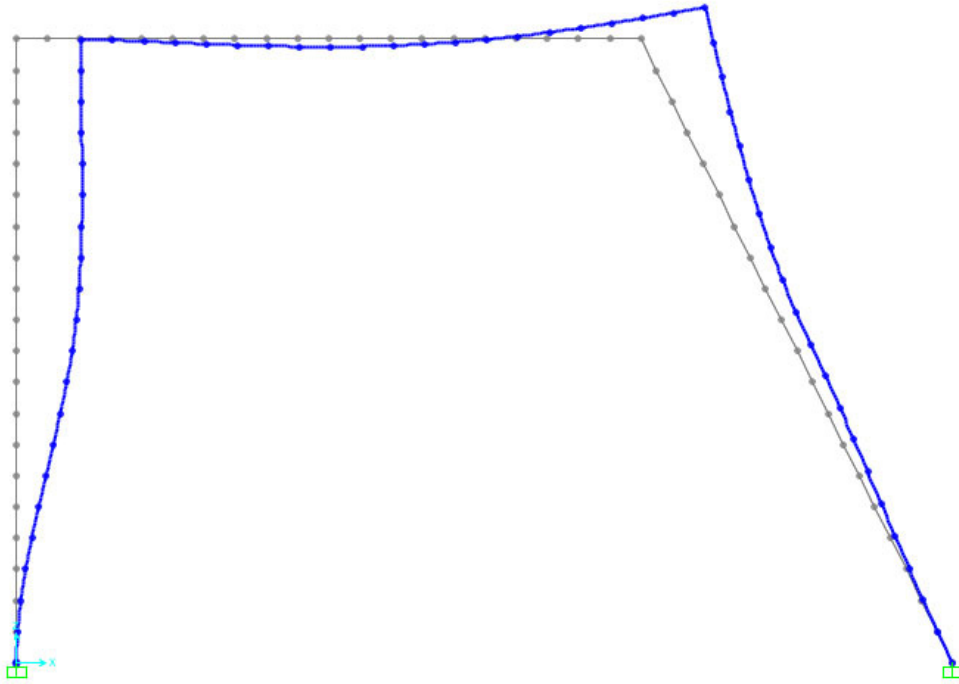
Slika 34. Dijagram uzdužnih sila nelinearne analize



Slika 35. Dijagram poprečnih sila nelinearne analize



Slika 36. Momentni dijagram nelinearne analize



Slika 37. Deformacije sustava nakon nelinearne analize

Joint Displacements			
Joint Object	Joint Element		
2	1	2	3
Trans	0,07776	0,00000	-3,501E-04
Rotn	0,00000	0,00190	0,00000

Joint Displacements			
Joint Object	Joint Element		
3	1	2	3
Trans	0,07741	0,00000	0,03823
Rotn	0,00000	0,02952	0,00000

Slika 38. Pomaci spojeva stup-greda nakon nelinearne analize

Ako krenemo od promatranja reakcija vidimo da se u ovome slučaju i one razlikuju, makar je ta razlika minimalna te ovisi o količini segmenata na koje su elementi podijeljeni.. U slučaju lijevog ležaja najveća promjena se dogodila kod reaktivnog momenta - sa 121.5 kNm je narastao na 124.878 kNm. Kod desnog ležaja situacija je slična, reaktivni moment je narastao sa 33.8 kNm na 34.77 kNm.

The image shows two screenshots of a software interface titled 'Joint Displacements'. Each screenshot contains a table with reaction values for Force and Moment (Mome) across different joint objects and elements.

Joint Object	1	2	3
Force	-65,580	0,000	35,001
Mome	0,000	-124,878	0,000

Joint Object	1	2	3
Force	-34,420	0,000	24,999
Mome	0,000	-34,770	0,000

Slika 39. Vrijednosti reakcija u ležajevima

Kod dijagrama unutarnjih uzdužnih sila vrijednosti su se minimalno promijenile, odnosno, minimalno su se smanjile u odnosu na vrijednosti linearnog proračuna.

Dijagram poprečnih sila se također minimalno promijenio u vrijednostima. Oblikom je gotovo identičan dijagramu iz linearne analize. Na mjestu horizontalne koncentrirane sile promjena dijagrama je blago linearna. Da je stup podijeljen na veći broj segmenata, odnosno, da je analiza još preciznija, ta bi promjena, odnosno skok u vrijednosti unutarnjih sila, bila jednaka kao u linearnoj analizi.

Momentni dijagram ima blago promijenjene vrijednosti u odnosu na linearni proračun. Vrijednosti na svakom mjestu dijagrama su poprilično bliske linearnim, međutim, ipak se razlikuju. Točnija odstupanja svih unutarnjih sila se mogu očitati iz tablice 2.

Što se deformacija i pomaka čvorova tiče, također je došlo do promjena. Kruti spoj je doživio veći horizontalni pomak i veću rotaciju, a zglob je dobio veći horizontalni i vertikalni pomak, kao i veću rotaciju.

		SILE						REAKCIJE			POMACI			ROTACIJE				
		M [kNm]		T [kN]		N [kN]		Ležaj A [kN]	Ležaj B [kN]	Ležaj C [kN]	Ležaj A [cm]	Ležaj B [cm]	Ležaj C [cm]	Ležaj A [rad]	Ležaj B [rad]	Ležaj C [rad]		
		min	max	min	max	min	max											
<b>GREDA</b>	LINEARNO	23.72	98.72	60.51	(-)	30.51	-	-	39.49	91.03	30.51	-	-	-	0.027	(-)	0.0167	0.0155
	NELINEARNO	21.81	98.72	60.51	(-)	30.51	-	-	39.49	91.03	30.51	-	-	-	0.027	(-)	0.0167	0.0155
<b>RAZLIKA</b>		8.05%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tablica 1. Razlike u silama, reakcijama, pomacima i rotacijama proračuna grede

		SILE						REAKCIJE						POMACI				ROTACIJE										
		M [kNm]		T [kN]		N [kN]		LEŽAJ A [kN;kNm]			LEŽAJ B [kN; kNm]			ČVOR 1 [cm]		ČVOR 2 [cm]		LEŽAJ A	ČVOR 1 [rad]	ČVOR 2 [rad]	LEŽAJ B							
		max	min	max	min	max	min	Hor	vert	mom	hor	vert	mom	hor	vert	hor	vert											
<b>OKVIR</b>	LINEARNO	121.5	(-)	30.20	65.22	19.95	(-)	(-)	37.89	34.78	(-)	(-)	65.22	35.03	121.5	34.78	24.97	33.8	(-)	(-)	7.19	0.03	7.15	3.53	-	0.0012	0.0277	-
	NELINEARNO	124.8	(-)	28.68	65.58	19.60	(-)	(-)	37.75	34.42	65.58	35.01	124.8	34.42	24.99	34.77	7.78	0.03	7.75	3.82	-	0.0019	0.0295	-	-	-	-	-
<b>RAZLIKA</b>		2.7%	5.0%	0.5%	1.7%	0.37%	1.03%	0.52%	0.05%	2.72%	1.03%	0.08%	2.87%	8.20%	-	8.39%	8.21%	-	52%	6.23%	-	-	-	-	-	-	-	-

Tablica 2. Razlike u silama, reakcijama, pomacima i rotacijama proračuna okvira

## 9. Zaključak

Tablice 1 i 2 na stranici 29 prikazuju sve razlike rezultata zadanih sustava nakon linearnog i nelinearnog proračuna. Prikazane su maksimalne te minimalne vrijednosti na dijagramima unutarnjih sila kao i vrijednosti reakcija u ležajevima. Također prikazuju izmjerene pomake i rotacije čvorova sustava. Razlike su prikazane u obliku postotka. Postotak prikazuje koliko se vrijednost rezultata nelinearne analize razlikuje od rezultata linearne, odnosno, koliko su se vrijednosti povećale ili smanjile. Zelena boja u redu sa postotcima prikazuje povećanje vrijednosti, a crvena boja smanjenje vrijednosti. Crvena boja unutar tablice označava veću vrijednost od dvije izmjerene.

Iako su primjeri prikazani u ovome radu poprilično jednostavni, razlike u rezultatima između linearnog i nelinearnog proračuna su jasno vidljive. Kod proračuna kontinuirane grede razlike postoje. Iako su one u malome broju, postotci koji prikazuju promjene nisu zanemarivi. U slučaju okvira, razlike se nalaze u gotovo svakom aspektu dobivenih rezultata. Okvir je složeniji sustav od grede. Sastoji se od više spojeva te više elemenata, opterećen je većim brojem te različitim opterećenjima. Također je i više puta statički neodređen u odnosu na gredu. Sve to doprinosi razlikama u rezultatima. Jednako tako, početne postavke u korištenome softveru također određuju točnost rezultata.

Dakle, dokle god se radi o jednostavnijim statičkim sustavima, linearna analiza će uz početne pretpostavke uvijek biti dovoljno točna za njihov proračun. Nelinearna analiza će i dalje ostati usko područje statike rezervirano samo za složenije probleme te za specijalizirane inženjere.

## 10. Literatura

Ali H. Nayef, P. Frank Pai - Linear and nonlinear structural mechanics, 2004

Paulo B. Laurengo - Types of analysis, 2010

Krešimir Fresl, Predavanja, 2014

Mladen Meštrović, Bilješke i skice s predavanja, 2014

[wiki.csiamerica.com/display/SAP2000/Home](http://wiki.csiamerica.com/display/SAP2000/Home) / Rujan 2015.

[wiki.csiamerica.com/display/tutorials/SAP2000](http://wiki.csiamerica.com/display/tutorials/SAP2000) / Rujan 2015.

[http://www.staticstools.eu/profil\\_IPE.php?profil=IPE200&act=zobraz](http://www.staticstools.eu/profil_IPE.php?profil=IPE200&act=zobraz) / Rujan 2015.

<http://www.gfos.unios.hr/portal/images/stories/studij/sveucilisni-preddiplomski/metalne-konstrukcije-i/tablice-celicnih-profila.pdf> / Rujan 2015.