ISSN 2237-9460
DOI:10.24065/2237-9460.2023v13n1ID2126

DIDÁTICO-TECNOLÓGICO COM OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS EM ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

George Christ Caraveo[1]

José Carlos de Souza Pereira[2]

José Messildo Viana Nunes[3]

RESUMO
O processo de estudo de funções logarítmicas apresenta grande importância para o currículo escolar, para a formação matemática e na construção de modelos descritivos de fenômenos que permitem várias conexões dentro e fora da matemática contribuindo para o exercício da cidadania. Nesta pesquisa realizamos reflexões referentes as correlações entre o didático-tecnológico com ostensivos e não ostensivos em organizações praxeológicas de funções logarítmicas. Enfocamos o processo de (re)construção e gestão de Organizações Matemáticas e Didáticas no estudo de funções logarítmicas em livros didáticos do ensino médio e superior e tarefas idealizadas para ambientes informatizados. Assim evidenciamos modelos de referência nos dois ambientes tratados e suas implicações na manipulação de algumas noções do objeto logaritmo referentes a dialética ostensivo não ostensivo. Dessa forma, constatamos que a articulação de modelos presentes em livros didáticos, característico de uso de lápis e papel ao ambiente informatizado permite a visualização e manipulação de modelos matemáticos computacionais que podem contribuir com o processo de estudo das funções logarítmicas e possivelmente dos mais variados objetos matemáticos, por meio da relação entre suas expressões analíticas e gráficas, dentre outras. Os resultados indicam que o ambiente informatizado pode promover por um lado, condições favoráveis ao aprendizado e por outro geraram restrições, tais fatos indicam a necessidade de (re)construções das Organizações Matemáticas e Didáticas nesses ambientes.

Palavras-chave: Praxeologia em livros didáticos. Ostensivos e não ostensivos. modelos para funções logarítmicas.

[1] Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará (UFPA); Secretaria de Estado de Educação (SEDUC-PA) - Brasil; Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática; Orcid iD: https://orcid.org/0000-0001-7049-2205. E-mail: george.christ@hotmail.com

[2] Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará (UFPA); Secretaria de Estado de Educação (SEDUC-PA) - Brasil; Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM). Orcid iD: https://orcid.org/0000-0003-4797-0023. E-mail: jsouzaper@gmail.com

[3] Doutor em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP); Universidade Federal do Pará (UFPA) - Brasil; Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM); Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM); Orcid iD: https://orcid.org/0000-0001-9492-4914. E-mail: messildo@ufpa.br

DIDACTIC-TECHNOLOGICAL WITH OSTENSIVE AND NON-OSTENTIVE IN PRAXEOLOGICAL ORGANIZATIONS OF LOGARITHMIC FUNCTIONS

ABSTRACT
The process of studying logarithmic functions is of great importance for the school curriculum, for mathematical training and for the construction of descriptive models of phenomena that allow various connections within and outside mathematics, contributing to the exercise of citizenship. In this research, we reflect on the correlations between the didactic-technological and the ostensive and non-ostensive in praxeological organizations of logarithmic functions. We focus on the process of (re)construction and management of Mathematical and Didactic Organizations in the study of logarithmic functions in high school and higher education textbooks and tasks designed for computerized environments. Thus, we evidence reference models in the two treated environments and their implications in the manipulation of some notions of the logarithm object referring to ostensive non-ostensive dialectics. In this way, we found that the articulation of models present in textbooks, characteristic of the use of pencil and paper in the computerized environment, allows the visualization and manipulation of computational mathematical models that can contribute to the process of studying logarithmic functions and possibly the most varied objects mathematicians, through the relationship between their analytical and graphic expressions, among others. The results indicate that the computerized environment can promote, on the one hand, favorable conditions for learning and, on the other hand, they generate restrictions, such facts indicate the need for (re) constructions of Mathematical and Didactic Organizations in these environments.

Keywords: Praxeology in textbooks. ostensive and non-ostensive. Models for logarithmic functions.

DIDÁCTICO-TECNOLÓGICO CON OSTENSIVO Y NO OSTENTIVO EN ORGANIZACIONES PRAXEOLÓGICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

RESUMEN
El proceso de estudio de las funciones logarítmicas es de gran importancia para el currículo escolar, para la formación matemática y para la construcción de modelos descriptivos de fenómenos que permitan diversas conexiones dentro y fuera de las matemáticas, contribuyendo al ejercicio de la ciudadanía. En esta investigación reflexionamos sobre las correlaciones entre lo didáctico-tecnológico y lo ostensivo y no ostensivo en organizaciones praxeológicas de funciones logarítmicas. Nos enfocamos en el proceso de (re)construcción y manejo de Organizaciones Matemáticas y Didácticas en el estudio de funciones logarítmicas en libros de texto de secundaria y educación superior y tareas diseñadas para ambientes computarizados. Así, evidenciamos modelos de referencia en los dos ambientes tratados y sus implicaciones en la manipulación de algunas nociones del objeto logaritmo referentes a la dialéctica ostensiva no ostensiva. De esta forma, encontramos que la articulación de modelos presentes en los libros de texto, característica del uso de lápiz y papel en el ambiente computarizado, permite la visualización y manipulación de modelos matemáticos computacionales que

pueden contribuir al proceso de estudio de funciones logarítmicas y posiblemente la los más variados objetos matemáticos a través de la relación entre sus expresiones analíticas y gráficas, entre otros. Los resultados indican que el entorno informatizado puede promover, por un lado, condiciones favorables para el aprendizaje y, por otro lado, generar restricciones, tales hechos indican la necesidad de (re)construcciones de Organizaciones Matemáticas y Didácticas en estos entornos.

Palabras clave: Praxeología en libros de texto. Ostensivos y no ostensivos. Modelos para funciones logarítmicas.

INTRODUÇÃO

O estudo das funções logarítmicas ganha, particular importância, pois está associado a fenômenos naturais que possam relacionar duas grandezas em que uma varia em progressão geométrica enquanto a outra, em progressão aritmética. Tais funções modelam inúmeros fenômenos naturais, científicos e sociais que relacionam: o tempo e a população de uma região, o nível e a intensidade sonora, o tempo e o montante no regime de capitalização de juros compostos, a intensidade de um terremoto e a energia liberada por ele, a magnitude de uma estrela e a distância de observação, dentre outros. A importância e aplicabilidade destas funções são salientadas por Almouloud (2011) porque estão no currículo do Ensino Médio e em outras áreas de conhecimentos.

Entendemos que o referido estudo também está relacionado ao *eixo cognitivo* componente da Matriz de Referência do Enxame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o de compreensão de fenômenos (BRASIL, 2011, p. 1). O desenvolvimento e fortalecimento deste eixo ao longo da vida acadêmica dos alunos promove um cidadão que, por exemplo, ao tomar conhecimento de uma notícia sobre terremotos, em um telejornal ou outro veículo de comunicação, compreende que o aumento de um ponto de intensidade na escala Richter corresponde a um aumento dezenas de vezes maiores na quantidade de energia liberada, ou seja, um aumento relativamente pequeno na intensidade do terremoto está relacionado a um aumento significativo em termos de energia. Deste modo, temos no estudo deste objeto matemático uma grande valia na promoção de uma melhor relação entre os cidadãos e o mundo no qual estão inseridos.

Para que o professor de matemática possa proporcionar aos alunos tais relações com o mundo, é necessário, ao longo do processo de estudo, propor *tarefas*[4] que ao serem realizadas contribuem para a apropriação e desenvolvimento de noções relacionadas à função, e em particular à função logarítmica. Entenda-se que as tarefas estão imersas em *tipos de tarefas* presentes no currículo de matemática do Ensino Médio, como por exemplo: construir o gráfico de funções logarítmicas, confirmar características de funções logarítmicas a partir de seu gráfico e lei de formação, identificar funções logarítmicas crescentes e decrescentes a partir de seu gráfico e lei de formação, verificar a simetria entre os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, dentre outras (DANTE, 2011).

No enfrentamento das *tarefas*, emergem muitas questões que podem ser exploradas no intuito de ampliar a compreensão dos alunos: O que ocorre com uma das grandezas quando a outra aumenta ou diminui e vice-versa? Qual a taxa de crescimento de uma das grandezas em relação à outra? E mais, quando a relação entre duas grandezas de um determinado fenômeno pode ser expressa algebricamente por uma função logarítmica, o uso de um computador, munido de um *software* educativo[5] gráfico, cria um ambiente de visualização e manipulação do gráfico da função logarítmica associada a uma lei de formação analítica que pode contribuir para a compreensão do fenômeno em questão.

Destacamos que o uso de *softwares* educativos também é defendido pelos PCN de Matemática (BRASIL, 2000, p. 117-120) ao recomendarem que, no estudo de função, não se faça uma abordagem excessivamente formal desse conceito e sim; propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos; a investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica

[4] *Tarefas* são expressas por um verbo de ação específica. Por exemplo: determinar as raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 6$.
[5] É o conjunto de recursos informáticos desenvolvidos com o objetivo de serem usados em contextos de ensino-aprendizagem (ALMOULOUD, 2005, p. 52).

para descrevê-las simbolicamente; utilizar letras como variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas; propor situações-problema sobre variação de grandezas para que o aluno possa desenvolver a noção de função; utilizar *software* educativo, que apresentam planilhas ou gráficos.

Considerando a importância das funções logarítmicas, as dificuldades relativas ao ensino e a aprendizagem desse tema e as potencialidades do uso de um *dispositivo informático*[6] no processo de estudo, elaboramos uma proposta de ensino que partindo do ambiente *papel e lápis* visava a implementação do ambiente *informatizado* para tratar sobre funções logarítmicas na qual adotamos a perspectiva de Borba e Penteado (2010, p. 37) sobre o uso de *dispositivos informáticos*, quando argumentam que as novas mídias, a exemplo de "computadores com softwares gráficos", são propícias para que o aluno realize experiências simulatórias, antes de estudarem os conteúdos matemáticos, por exemplo, gráficos de funções polinomiais do 2º grau.

Vislumbramos que o ambiente *informatizado* estabelecido pelo computador e *software* educativo gráfico contribuiria, em primeira instância, para a introdução do estudo das funções logarítmicas a partir do ambiente *papel e lápis* e em seguida para o avanço do estudo nos âmbitos algébrico e gráfico, além da compreensão da relação entre as duas grandezas envolvidas no fenômeno abordado pela situação-problema.

Para Chevallard (1999), quando um tema matemático é eleito para estudo, considera-se sucessivamente, a realidade matemática deste tema que se pode construir em um grupo de estudo, ou seja, a *praxeologia matemática* ou *organização matemática* (OM) e a maneira como essa realidade matemática pode ser construída para o ensino, nomeada *praxeologia didática* ou *organização didática* (OD). Nessas organizações praxeológicas (OM e OD) ocorre a dialética de objetos ostensivos e não ostensivos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999), da tal forma que esses objetos estão

[6] É o complexo formado pelo *hardware e software*, que fazem o funcionamento do computador em seu sentido mais amplo (BALACHEFF, 1994, p. 364).

na essência do estudo e do ensino de funções logarítmicas, conforme veremos mais adiante. Assim, nosso objetivo, neste artigo, é refletir sobre as correlações entre o didático-tecnológico com ostensivos e não ostensivos em organizações praxeológicas de funções logarítmicas.

Para alcançar esse objetivo recorremos a pesquisa qualitativa, porque nos permiti transitar por vários tipos de estudos: interpretativos, holísticos, naturalistas, interacionistas simbólicos, construtivistas, etnográficos, fenomenológicos e antropológicos (MOREIRA, 2011). Além disso, a pesquisa bibliográfica (MATTAR, 2017) também está contemplada nas bases de construção de dados analisados.

Neste artigo interessa-nos explicitar a dialética entre ostensivos e não ostensivos em ambiente informatizado, que está interrelacionado aos *softwares Winplot*[7] e *Graphmatica*[8], denotados, respectivamente, por A_w e A_g. Esses dois *softwares* serviram de base para o estudo de tarefas t_i de logaritmos e no desdobramento da Transposição Didática Interna (TDI) para a compreensão de funções logarítmicas.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Há muitos modelos teóricos que podem ser articulados ou não, de acordo com a necessidade, no intuito de investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática, além de permitir o estudo de *condições* que favoreçam sua aquisição pelos alunos e as *restrições* que não favorecem tal aquisição. Dentre esses modelos, encontra-se a *Teoria Antropológica do Didático* (TAD) proposta por Chevallard (1992) a partir de reflexões feitas sobre a *Transposição Didática* (TD) (CHEVLLARD, 1985).

De acordo com Chevallard (1992), a TAD admite que toda atividade humana regularmente realizada em uma *instituição*[9] pode ser descrita com

[7] https://winplot.br.download.it/download
[8] http://www.graphmatica.com/
[9] Para Chevallard, uma instituição é um dispositivo social. Assim uma classe é uma instituição (incluindo duas posições essenciais que são a de professor e aluno), bem como a escola (de onde emergem outras posições) e além destas uma que as engloba, o sistema educacional, dentre outras.

ISSN 2237-9460

um modelo único, que é resumido com a palavra *praxeologia*. Este termo vem do grego: *práxis* e *logos* significam, respectivamente, prática e razão. Toda atividade humana e, por conseguinte matemática realizada no seio de uma *instituição* vem acompanhada de um discurso mais ou menos desenvolvido, ou seja, um *logos* que a justifica, acompanha e lhe dá razão. A relação dialética entre *práxis* e *logos* caracterizada pela diferença e coexistência destes dois níveis permite modelar as atividades matemáticas por meio de *praxeologias* ou *organizações praxeológicas*. Chevallard esclarece a estrutura de uma *praxeologia* como segue:

> A estrutura praxeológica mais simples (chamada de "pontual") consiste em um tipo de *tarefas T*, de uma *técnica* τ, maneira de como realizar as *tarefas t* do tipo *T*, de uma *tecnologia* θ o discurso racional (logos) sobre a *técnica* (tekhnê), que é suposto para tornar τ inteligível como um meio para realizar as *tarefas* do tipo *T*, finalmente – por último, mas não menos importante – um componente teórico Θ, o qual governa (regula) a *tecnologia* θ em si (e, portanto, todos os componentes da *praxeologia*). Tal *praxeologia pontual* (o "ponto" aqui é o tipo de *tarefas* T) é denotada por $[T/\tau/\theta/\Theta]$ [...] (CHEVALLARD, 2009b, p. 4, tradução nossa).

As noções de *tarefa t* e de *tipos de tarefas T* compõem a raiz da noção de *praxeologia* e quando uma *tarefa t* forma parte de um *tipo de tarefas T*, escrevemos $t \in T$. Uma *tarefa t* e um *tipo de tarefas T* são expressos por um verbo, por exemplo, determinar o valor numérico de uma expressão algébrica, construir o gráfico de uma função, identificar a ordenada de um ponto pertencente ao gráfico, são tipos de tarefas *T*. Os tipos de tarefas *T* possuem tarefas t_i (i = 1, 2, 3, ..., n), neste caso, podemos denotar tipos de tarefas T_i (i = 1, 2, 3, ..., n}. Além das tarefas t_i, dos tipos de tarefas T_i, há os gêneros de tarefas, estes são caracterizados apenas por um verbo indicativo de ação: calcular, determinar, resolver, construir, analisar, subir, descer, correr entre outros (CHEVALLARD, 1999). Essa linguagem simbólica das tarefas, tipos de tarefas e gêneros de tarefas estão nos exercícios dos livros didáticos de matemática, mas na forma implícita, o que para um leitor sem as devidas

ISSN 2237-9460

compreensões dos elementos da TAD, não a compreenderá, porque são simbologias da própria teorização da TAD. Assim, mostramos na Figura 1 três tarefas t_i de um tipo de tarefas T e de certo gênero de tarefas (determinar). As tarefas t_i foram extraídas de um livro didático de matemática do Ensino Médio, adotado nas escolas públicas e particulares.

Figura 1 - tipo de tarefas T e tarefas t_i

Determine:

a) $\log_2 128$ b) $\log_{\sqrt{3}} 9$ c) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$

Fonte: Dante (2011, p. 249).

Da Figura 1 extraímos o tipo de tarefas T: determinar o logaritmo de *b* na base *a* ou log_a^b. As tarefas t_i pertencente T são: 1) t_1: determinar log_2^{128}; 2) t_2: determinar $log_{\sqrt{3}}^9$ e 3) t_3: determinar $log_{\frac{1}{9}}^{3\sqrt{3}}$. Então, temos o tipo de tarefas T que precisa de uma maneira para solucionar as t_1, t_2 e t_3. Essa maneira para solucionar as tarefas é a técnica τ (simbolizada pela letra grega "tau" minúscula). Na Figura 2 temos a maneira como Dante (2011) soluciona a tarefa t_2, ou seja, a técnica τ aplicada por ele.

Figura 2 - solução da tarefa t_2 pela técnica τ

b) $\log_{\sqrt{3}} 9 = x \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^x = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$

Logo, $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$.

Fonte: Dante (2011, p. 249).

O enfrentamento da *tarefa* t_2 (Figura 2) consiste em estabelecer uma relação de igualdade entre o logaritmando 9 e a base $\sqrt{3}$, para em seguida aplicar a *técnica* τ da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de igualde de potência[10], isto é, transformar

[10] Preferimos denominar esta *técnica* sem utilizar o termo "forma exponencial" no lugar de "forma de potência" porque as praxeologias matemáticas relativas aos logaritmos nem

ISSN 2237-9460

$\log_{\sqrt{3}} 9 = x$ na equação exponencial $\left(\sqrt{3}\right)^{x} = 9$. Posteriormente, Dante (2011) utiliza uma *técnica* τ de resolução de equações exponenciais que consiste em igualar as bases das potências $3^{\frac{x}{2}}$ e 3^{2} para obter a igualdade entre os expoentes $\frac{x}{2}$ e 2, e desta forma $x = 4$ que é o valor de $\log_{\sqrt{3}} 9$. Esta é uma *técnica* comum nos livros de matemática para o Ensino Médio e consiste, de modo geral, na articulação de duas *técnicas* que são: a aplicação da *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e em seguida a *técnica* de resolução de equações exponenciais.

Na resolução da tarefa t_2 percebemos, como orienta Chevallard (2009a, 2009b), que há pelo menos uma técnica τ associada à cada *praxeologia* apresentada. Porém, para que essa técnica funcione há uma tecnologia θ (letra grega "teta" minúscula) que é o discurso racional sobre a *técnica* τ (CHEVALLARD, 1999, 2009a, 2009b). Esse discurso tem como primeiro objetivo justificar racionalmente a *técnica* τ no intuito de assegurar-se de que esta permite realizar a *tarefa* do *tipo T*. Por outro lado, pode existir uma *técnica* canônica que em princípio seja a única conhecida e empregada na instituição a qual será conferido o status de *técnica autotecnológica*, isto é, o uso da *técnica* não requer justificação, porque é a boa maneira de atuar na instituição. O discurso racional para a técnica τ aplicada na resolução da tarefa t_2 é a definição de logaritmo.

De acordo com Chevallard (2008), a *tecnologia* apresenta mais duas funções. Uma delas é a de explicar, ou tornar inteligível a *técnica*. Consiste em expor porque a *técnica* é correta. Tradicionalmente a função tecnológica de justificação da *técnica* predomina por meio de uma exigência de

---

sempre recaem numa equação exponencial, o que ocorre, por exemplo, na tarefa $\log 2_{x} = 3$ que resulta em $x^{3} = 2$.

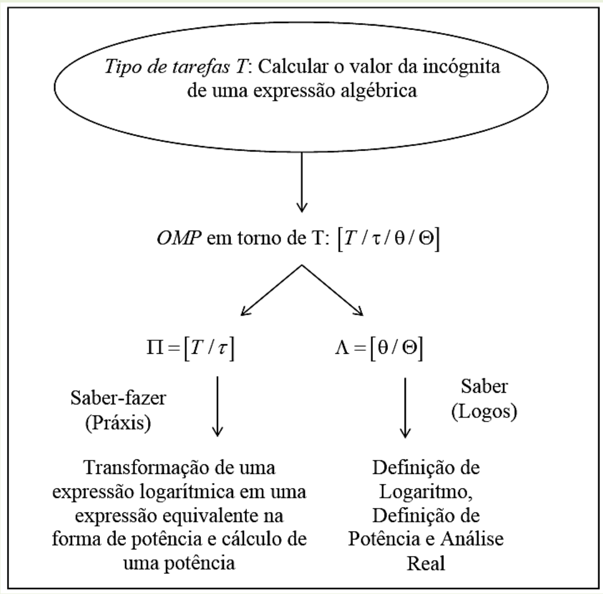
ISSN 2237-9460

demonstração dessa funcionalidade. A outra função da *tecnologia* corresponde à produção de novas *técnicas* τ_i (i = i, 2, 3, ..., n), ou seja, há *tecnologias* em potencial para gerar novas técnicas.

Assim como a *técnica* é justificada-explicada-produzida pela *tecnologia*, o discurso tecnológico contém afirmações, mais ou menos explicitas que podem necessitar de um nível superior de justificação-explicação-produção, chamado de *teoria* Θ (letra grega "teta" maiúscula), que está para a *tecnologia* assim como esta está para a *técnica*. Inferimos que as *tecnologias* da definição de potências e logaritmos são justificadas por uma *teoria* que é a Análise Real.

A organização praxeológica mais simples é a Organização Matemática Pontual (OMP) que se estrutura em torno do tipo de *tarefas T* constituída pelo bloco $[T/\tau/\theta/\Theta]$. Essa organização praxeológica é composta de um bloco *prático-técnico* $\Pi=[T/\tau]$ que constitui o *saber-fazer* (a práxis) e de um bloco *tecnológico-teórico* $\Lambda=[\theta/\Theta]$ que se identifica habitualmente como do *saber* (o logos). Na Figura 3 resumimos as características de uma OMP.

Figura 3 - Organização Matemática Pontual em torno do Tipo de tarefas T



Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

10

De acordo com Chevallard (1999), na realização de *tarefas* do *tipo T* de modo geral, em uma *instituição*, o predomínio do saber nunca é inesperado, porém

> [...] se encontra raramente em *organizações pontuais*. Uma *teoria* Θ responde a várias *tecnologias* θ_j, cada uma das quais por sua vez justifica e torna inteligíveis várias *técnicas* τ_{ij}, correspondentes a outros tantos tipos de *tarefas* T_{ij}. As *organizações pontuais* vão combinar-se, em primeiro lugar, em *organizações locais*, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, centradas sobre uma determinada *tecnologia* θ, e depois em *organizações regionais*, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, formadas ao redor de uma *teoria* Θ. Uma *organização global* é um complexo praxeológico obtido, $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$, em uma dada *instituição*, pela agregação de várias *organizações regionais* correspondentes a várias *teorias* Θ_k. A passagem de uma *praxeologia pontual* $[T, \tau, \theta, \Theta]$ a uma *praxeologia local* $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ é marcada por uma *tecnologia* θ, da mesma maneira que a passagem para uma *praxeologia regional* será marcada por uma *teoria* Θ. Nestes casos, a visibilidade do bloco do saber aumenta em detrimento do bloco do *saber-fazer* [...] (CHEVALLARD, 1999, p. 6, tradução nossa).

As *Praxeologias Didáticas ou Organizações Didáticas* (OD), segundo Chevallard (1999), são *organizações* que visam reescrever as Organizações Matemática (OM) e como tal são as respostas de como estudar e ensinar determinado *tema*. As OD são construídas numa determinada época e são balizadas por (re)construções presentes em documentos oficiais, nos livros didáticos e manuais de formação docente. Estas (re)construções sofrem influências de *condições* e *restrições* de várias ordens e, submetido a elas, o problema do professor é fazer funcionar esta OD no intuito de solucionar tipos de tarefas T_i propostas aos alunos. Para Chevallard (1999, p. 19, tradução nossa):

> Uma organização didática ∂O comporta múltiplos níveis de especificações, dos quais nenhum deveria ser negligenciado e que dependem, pelo menos em alguns aspectos, da didática. Assim, em um primeiro nível, situam-se as condições e restrições próprias de um *sistema de ensino e de seus centros*, que pouco ou muito se aplicam aa todas as matérias que ali se estudam [...].

ISSN 2237-9460

Abstraímos a partir da citação que as condições e restrições de organizações praxeológicas, sejam elas OM ou OD, possuem condições e restrições atreladas ao caráter ostensivo e não ostensivo inerentes aos objetos matemáticos. Assim, para ensinarmos logaritmos e função logarítmica, a dialética ostensivos e não ostensivos (CHEVALLARD, BOSCH, 1999) comanda o processo de transposição didática interna do professor.

Chevallard (1985) enfatiza a existência do que chama de *saber ensinado* que tem por base o *saber a ensinar* e ocorre na sala de aula e demais ambientes de ensino-aprendizagem tais como biblioteca e laboratório de informática. O *saber ensinado* é resultado da atuação do professor em relação aos grupos de alunos no âmbito de um *sistema didático*[11], isto é permeado pela prática docente e suas especificidades. Chevallard (2009a) identifica esta etapa como fenômeno da Transposição Didática Interna (TDI) e subdivide-a em dois momentos: o primeiro caracterizado pela construção do "texto de saber" e o segundo por colocar as *praxeologias* deste texto em ação na sala de aula por meio de um *sistema didático*, ou seja, a ação docente põe em jogo reconstrução da Organização Matemática (OM) pela Organização Didática (OD) do "texto de saber" elaborado pelo professor.

Nessa pródiga relação OM e OD surgem situações que demandam certas abstrações interpretativas para materializar as ideias implícitas nos objetos matemáticos, estamos nos referindo aos objetos ostensivos e não ostensivos que permeiam essas organizações praxeológicas.

Chevallard e Bosch (1999) ao tratarem da dialética entre ostensivos e não ostensivos esclarecem que a ostensão se refere, de forma mais específica, à visão, porém eles usarão o adjetivo ostensividade de maneira mais abrangente, inclusive, referindo-se a todos os sentidos. Essa expansão da

[11] Segundo D'amore (2007, p. 232), estes três elementos (aluno, saber e professor) entram em contato entre si, física ou metaforicamente, no momento da ação didática e são perceptíveis três relações: professor – aluno, que é uma relação pedagógica; aluno – saber que é do âmbito das concepções culturais, da escola e de saber; professor – saber, onde está em jogo a epistemologia do professor.

ostensividade conforma-se com que eles pretendem explicitar de ostensivos e não ostensivos.

> [...] ressaltemos que, além de sua perceptibilidade, o que parece ser próprio dos objetos ostensivos é o fato de poderem ser "manipulados" pelo sujeito humano: um som pode ser emitido (e recebido), um grafismo pode ser desenhado (e lido), um gesto pode ser feito (e percebido), qualquer objeto material pode ser manipulado concretamente de diversas maneiras. Por extensão de seu significado comum, utilizaremos o termo genérico *manipulação* para designar os diversos usos possíveis, pelo sujeito humano, de objetos ostensivos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 10-11, tradução nossa).

É perceptível na citação que o substantivo *manipulação* ganha um status abrangente quando este se refere aos objetos ostensivos. Nessa expansão de ideias, a construção de uma OD, em nível escolar, está submetida as condições de existência dos objetos ostensivos e as condições e restrições implícitas dos não ostensivos para que ocorra essa "manipulação". Assim, se o uso de papel e lápis constituírem a primeira etapa da OD para estudarem função logarítmica, esses são objetos ostensivos materiais. Se a segunda etapa da OD for o ambiente informatizado com uso de algum *software*, por exemplo, o *Winplot*[12], então, o manuseio de computadores ou outros dispositivos tecnológicos serão necessários e a dialética ostensivos e não ostensivos possuirá outras características manipulativas. Chevallard e Bosch (1999) recorrem a notação "*log*" e palavra "logaritmo" para explicarem o que são objetos ostensivos e não ostensivos.

> É pelo fato de os objetos ostensivos poderem ser manipulados que se diferenciam dos não ostensivos. A notação *log* e a palavra "logaritmos" são objetos ostensivos. Entretanto, a *noção* de logaritmo é um objeto *não ostensivo* que não pode ser manipulado no sentido anterior. Pode-se, somente, "torná-lo presente" – *representá-lo* – pela manipulação de certo número de objetos ostensivos associados, como, por exemplo, a notação *log*. Na maioria dos casos, os objetos institucionais estarão associados a um objeto ostensivo privilegiado, seu *nome*, o que permitirá uma evocação mínima (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p. 11).

[12] É um *software de plotagem que pode desenhar e animar curvas e superfícies.*

Na seção a seguir discutiremos o didático-tecnológico, trataremos com maiores detalhes dos objetos ostensivos e não ostensivos, voltados para o estudo de função logarítmica.

DIDÁTICO-TECNOLÓGICO COM OBJETOS OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS

Nesta seção nossa atenção se volta para uma discussão analítica que envolve objetos ostensivos e não ostensivos em três tipos de modelos epistemológicos de logaritmos e o estudo das funções logarítmicas mediado por *dispositivos informáticos*.

Os três modelos epistemológicos denominados, por nós, de Logaritmo como Expoente (MELCE), Logaritmo como Série (MELCS) e Logaritmo como Área (MELCA). Nestes modelos encontramos diferentes maneiras de calcular o logaritmo de um número real, porém utilizamos apenas os dois primeiros ao analisar os dados construídos. A presença de dois *modelos epistemológicos* distintos associados ao ambiente *informatizado* contribuiu para estruturarmos a Organização Didática, vinculada ao texto do saber da TDI.

O MELCE figura como dominante nos livros didáticos de matemática para o Ensino Médio de circulação no Brasil e dentre eles, os livros das coleções aprovadas no PNLD 2012. Esse modelo epistemológico consta nas coleções Matemática – Contexto e Aplicações (DANTE, 2011), Conexões com a Matemática (BARROSO, 2010), Matemática (PAIVA, 2012), Matemática – Ciência e Aplicações (IEZZI et al., 2010), Matemática – Ciência, Linguagem e Tecnologia (RIBEIRO, 2010), Matemática – Ensino Médio (SMOLE, 2010) e Matemática – Novo Olhar (SOUZA, 2010). Estas obras abordam os logaritmos em seus volumes 1 sempre após o estudo das potências e das funções exponenciais. Nessas obras, verificamos, a partir de elementos da TAD, que são compostas por Organizações Matemáticas e Didáticas (OMD) (DELGADO, 2006).

Escolhemos o livro de Dante (2011) para mostrarmos a ocorrência do MELCE no *Tipo de tarefas* T_1 (Figura 4). Esse tipo de tarefas exemplifica uma organização praxeológica pontual, composto por *tarefas* (Figura 4) que são realizadas pela *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência. Neste caso, a *tecnologia* que torna a *técnica* inteligível é a definição de logaritmo.

Figura 4 - Tipo de tarefas T_1 e tarefas t

Usando potência, determine o equivalente a cada logaritmo:

a) $\log_2 7 = x$ b) $m = \log_p r$ c) $\log 0{,}1 = -1$

Fonte: Dante (2011, p. 250).

Observa-se na Figura 4 as tarefas que denotaremos por t_a, t_b e t_c. As três tarefas são distintas e possuem a dialética entre ostensivos e não ostensivos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999). A tarefa t_a requer que se identifique a base, o logaritmando e valor do logaritmo, expressos pelos ostensivos 2, 7 e x; implícitos estão os não ostensivos associados ao significado de base, logaritmando e logaritmo. Essa dialética estabelecida entre ostensivos e não ostensivos mostram a funcionalidade da *técnica* que consiste na aplicação da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência, da qual surge uma equação exponencial para em seguida aplicar a *técnica* de resolução deste tipo de equação. As *tecnologias* que tornam esta *técnica* inteligível são as definições de logaritmo e potências, além das propriedades das potências.

Nas tarefas t_a, t_b e t_c, o bloco *prático-técnico* ([T/τ]) deixa evidente ligação do MELCE com as potências. Daí a necessidade de se propor o estudo dos logaritmos e funções logarítmicas após o estudo de potências, equações exponenciais e funções exponenciais, pelo fato de a tecnologia θ(definição de logaritmos) mobilizar a manipulação de ostensivos que depende de não ostensivos associados a potenciação e resolução de equações exponenciais.

Para ilustrar um pouco mais, vejamos a tarefa t_b: $m = \log_p r$. Essa tarefa parece ser simples, mas sem compreensão do bloco tecnológico-teórico ([θ/Θ]), a tarefa fica sem sentindo para o estudo de função logarítmica. Assim, devemos questionar: 1) quais valores pode assumir *m*, 2) quais as condições e restrições para *p* e *r*, que permita a existência de *m*? Novamente os não

ISSN 2237-9460

ostensivos precisam ser materializados pelos ostensivos para respondermos os dois questionamentos, ou seja, *m* (logaritmo) existirá se *p* for positivo e diferente de 1 e *r* for positivo, em notação simbólica ostensiva: $p > 0$, $p \neq 1$; $r > 0$.

Verificamos que as *praxeologias* que modelam o estudo de logaritmos em Dante (2011) caracterizam o MELCE, pois apresentam blocos *prático-técnicos* $\Pi_i = [T_i/\tau_i]$ marcados por *técnicas* que requerem o conhecimento de *técnicas* relativas, em grande parte, ao estudo de potências e equações exponenciais, ou seja, há a necessidade do estudo de tais objetos antecipadamente e a segunda, que enfatiza a definição de logaritmo como expoente. A presença desta definição como *tecnologia* em todos os blocos *tecnológico-teóricos* $\Lambda_i = [\theta_i/\Theta_i]$ garante que o saber requerido nas *praxeologias* estabelecidas exige, mesmo que não exclusivamente, o uso da definição de logaritmo para solucionar diferentes tipos de tarefas T_i, os quais vão invocar objetos ostensivos e evocar não ostensivos.

O Modelo Epistemológico de Logaritmos como Série (MELCS) diferencia-se do MELCE em vários pontos, dentre os quais a possibilidade de sua implementação em *dispositivos informáticos*. Esse é um modelo epistemológico pertencente as organizações praxeológicas locais e regionais do Ensino Superior. Nesses tipos de organizações praxeológicas o bloco do logos ($[\theta/\Theta]$) movimenta noções matemáticas bem mais sofisticadas para que o bloco da práxis ($[T/\tau]$) realize o trabalho das técnicas na solução dos tipos de tarefas T.

De acordo com Boyer e Merzbach (2012, p. 269) uma das fórmulas de aproximação (Figura 5) para logaritmos, conhecida como "Série de Mercator", foi apresentada por Nicolaus Mercator (1620-1687) em sua obra intitulada Logarithmotechnia (1668).

ISSN 2237-9460

Figura 5 - Série de Mercator para o cálculo aproximado do logaritmo natural de 1 + x

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right) dx = \ln(1+x)$$
$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Fonte: Boyer e Merzbach (2012, p. 269).

Parece um *ilusionismo* o que está mostrado na Figura 5, porém, as simbologias ostensivas escondem os não ostensivos específicos das noções que regem a Organização Matemática (OM) de logaritmos naturais. Nessa OM o discurso associado ao ostensivo $log\, x$, no qual a base é 10 (x), muda para a base "e", ou seja, termos os ostensivos $x\ = lnx$ (x > 0). Mas o que é esse "e"? Possui algum valor numérico? Como ele surgiu? As respostas para esses questionamentos estão no estudo da OM dos logaritmos naturais.

A Figura 5 possui uma variedade de não ostensivos implícitos nos ostensivos visualizados, por exemplo, a integral definida $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$ (cujo intervalo vai de 0 a x), a notação $\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{1+x}\, dx$ (dx ↦ derivada). Além disso, quando se tem $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$, busca-se a função antidevirada da função $\frac{1}{1+x}$, que é $ln\,(1+x)$. A dialética entre ostensivos-não ostensivos, em $ln\,(1+x)$, leva a série $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Essa série é constituída de um trabalho da técnica, associado a vários ostensivos e nãos ostensivos, vejamos isso a seguir quando n = {1, 2, 3, 4, 5, ...}.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{(-1)^{1+1}}{1} x^1 + \frac{(-1)^{2+1}}{2} x^2 + \frac{(-1)^{3+1}}{3} x^3 + \cdots = \frac{(-1)^2}{1} x + \frac{(-1)^3}{2} x^2 + \frac{(-1)^4}{3} x^3 + \cdots = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \cdots$$

Se x = 0, então, $ln\,(1+x) = ln\, 1 = \frac{0}{1} - \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{4} - \frac{0^4}{5} + \frac{0^5}{6} + \cdots = 0$. De ideias anteriores, podemos representar $ln\,(1+x) = \log_e(1+x)$, aplicando-se a definição de logaritmo, temos que: $(1+x)\ = b \leftrightarrow e^b = 1+x$. Tomando-se x = 0, $e^b = 1 \leftrightarrow e^b = e^0 \leftrightarrow b = 0$. Talvez, fique a pergunta: por que 1 = e^0? Isso

ISSN 2237-9460

decorre da potenciação e da propriedade do quociente de mesma base, por exemplo, $1 = e \div e = e^1 \div e^1 = e^{1-1} = e^0$. O que fizemos, mostra o quanto a dialética entre ostensivos e não ostensivos sedimenta o estudo de organizações matemáticas, para se realizar a TDI, na elaboração de organizações didáticas. Entenda-se que o MELCS compõe *praxeologias* distintas das apresentadas no MELCE devido a definição de logaritmo ser apresentada como série e não como expoente.

O *modelo epistemológico do logaritmo como área* (MELCA) é uma organização praxeológica dos livros de cálculo diferencial e integral e define o logaritmo como uma integral para em seguida apresentar a função exponencial como sua inversa, como afirma Stewart (2006, p. 420): "Em vez de começar com a^x e definir $\log_a x$ como sua inversa, vamos definir $\ln x$ como uma integral e a partir daí definir a função exponencial como sua função inversa [...]". O logaritmo natural, definido como uma integral, é mostrado na Figura 6:

Figura 6 - Definição de logaritmo no MELCA

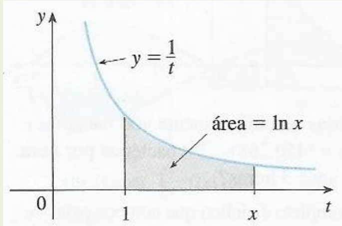
Definição **Função logaritmo natural** é definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad x > 0$$

Fonte: Stewart (2006, p.420).

A função $\frac{1}{t}$ é contínua para valores reais, tais que $t > 0$ e, consequentemente, sua integral sempre existe, isto é, assim como nas outras definições de logaritmo deve-se ter $x > 0$. Se $x > 1$, então $ln\, x$ pode ser interpretada geometricamente como a área sob a hipérbole $\frac{1}{t}$ de $t = 1$ até $t = x$ como mostra a Figura 7.

Figura 7 - Interpretação geométrica de $\boldsymbol{ln\,x}$.



Fonte: Stewart (2006, p. 420).

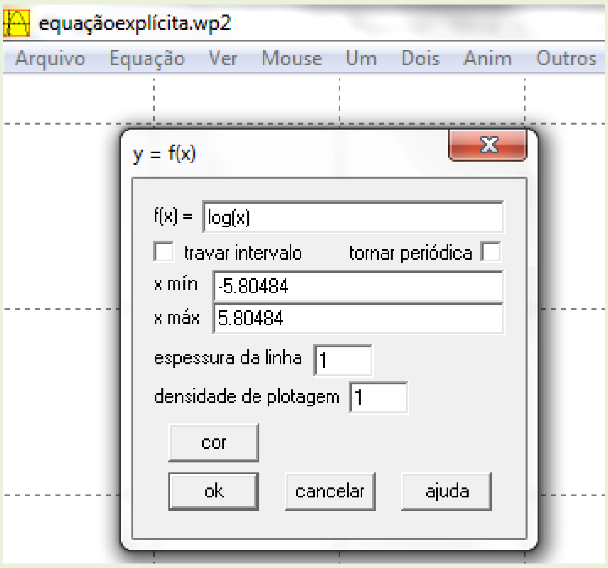
A compreensão da modelagem praxeológica da Figura 7 requer noções matemáticas implícitas (objetos não ostensivos) e interpretação geométrica e algébrica visual (objetos ostensivos), de tal forma, que a utilização de uma técnica τ que articula o cálculo de área do retângulo e do trapézio a do cálculo do valor numérico de uma função, cujas tecnologias θ são áreas de figuras planas, funções e a definição de logaritmo como a área sob a hipérbole. As teorias Θ são da Geometria Euclidiana Plana e Análise Real.

As praxeologias estabelecidas no estudo dos logaritmos balizadas pelo MELCE, MELCS e MELCA são diferentes tanto no que se refere ao *bloco prático-técnico* quanto ao *tecnológico-teórico* impondo *condições* e *restrições* ao estudo do logaritmo. No Ensino Médio, por exemplo, é necessário o estudo prévio de potências e equações exponenciais para garantir o estudo dos logaritmos enquanto no curso de cálculo diferencial e integral (ES) as praxeologias prévias são outras, mas a dialética ostensivos e não ostensivos prevalece.

Após as discussões necessárias sobre MELCE, MELCS e MELCA, veremos agora a ostensividade e não ostensividade da função $log\,x$ no ambiente informatizado, mediado pelos *softwares Winplot* (A_w) e *Graphmatica* (A_g).

No ambiente *informatizado* A_w no intuito de introduzir o estudo gráfico das funções logarítmicas. As *condições* e *restrições* impostas pelo ambiente *informatizado* A_w provocaram uma mudança praxeológica na realização da tarefa t: esboçar o gráfico da função f(x) = $log\,x$. Essas condições e restrições são reveladas pela própria interface do *Winplot*, algo que contrasta quando esboçamos o gráfico da função f(x) = $log\,x$, na tecnologia do papel e lápis ou no quadro de escrever. A Figura 8 mostra algumas ostensividades da interface do A_w.

Figura 8 - Captura da *interface* do *software* feita pelos autores



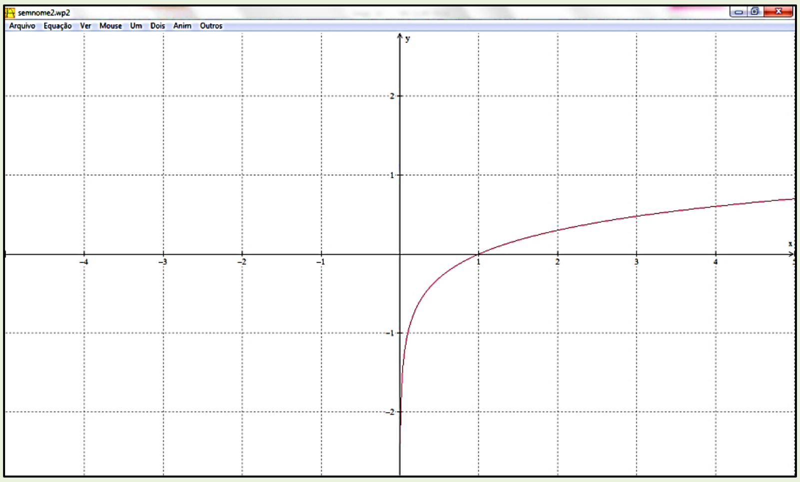
Fonte: Acervo dos autores (2022)

Neste ambiente, a *tarefa* de construir o gráfico de uma função pode ser enfrentada por meio da ferramenta *Equação Explícita*, acessada na barra de *menus*, onde o usuário digita a expressão algébrica correspondente a $y = f(x)$ e o *Winplot* traça o gráfico (Figura 9). Porém, sem compreensão dos ostensivos solicitados na janela do *software*, digamos que as lacunas a serem preenchidas, são objetos não ostensivos que o *software* quer que sejam materializados (digitados) nas lacunas. Além disso, a malha quadriculada do eixo cartesiano é um ostensivo visual que aproxima com o gráfico traçado no papel e lápis. O que não é revelado na interface do *Winplot* é a modelagem matemática embutida na estrutura algorítmica do *software*, inclusive pode ser um dos modelos epistemológicos que expomos nesta seção ou outro próprio da computação matemática. Assim, existem condições e restrições imposta pelo *dispositivo informático* que é um efeito colateral da *transposição informática* apresentada por Balacheff (1994) – que consiste na transposição do saber a ensinar para um modelo computacional que permite sua manipulação num dispositivo informático – e o diferente *modelo*

ISSN 2237-9460

epistemológico de logaritmos utilizado nesses dispositivos informáticos. Isso só é perceptível quando se consegue "abrir" o pacote não ostensivo do algoritmo do *software*.

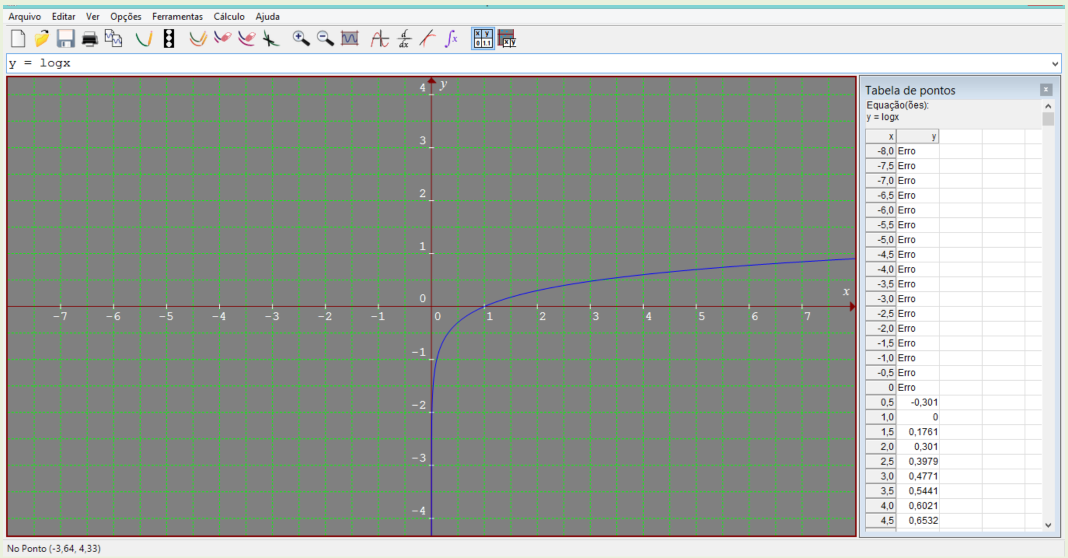
Figura 9 - Captura da *interface* do *software* feita pelos autores



Fonte: Acervo dos autores (2022)

A Figura 10 mostra o gráfico gerado pelo *Graphmatica* (A_g) para a função $y = log\,x$. Percebe-se que a ostensividade do gráfico da Figura 9 é semelhante com a da Figura 10. Mas o visual exibido na Figura 10 é diferente, há o gráfico e uma tabela de pontos. Essa tabela é obtida clicando-se no *menu Ver*, em seguida, *Tabela de Pontos*.

Figura 10 - Captura da *interface* do *software* feita pelos autores



Fonte: Acervo dos autores (2022)

Temos na Figura 11 alguns ostensivos que possibilitaram o *Graphmatica* gerar o gráfico da função $log\, x$. Entretanto, os não ostensivos do algoritmo que estão implícitos nos ostensivos visual da Figura 11, escondem várias noções matemática mostradas anteriormente em relação ao cálculo de logaritmos, principalmente, a condição de existência do logaritmo relativa a base e o logaritmando, ou seja, a base tem que ser positiva e diferente de 1; o logaritmando deve ser também positivo.

Figura 11 - Elaborada pelos autores a partir da *interface* do *Graphmatica*

Tabela de pontos
Equação(ões):
y = logx

x	y
-4,0	Erro
-3,5	Erro
-3,0	Erro
-2,5	Erro
-2,0	Erro
-1,5	Erro
-1,0	Erro
-0,5	Erro
0	Erro

Tabela de pontos
Equação(ões):
y = logx

x	y
0,5	-0,301
1,0	0
1,5	0,1761
2,0	0,301
2,5	0,3979
3,0	0,4771
3,5	0,5441
4,0	0,6021
4,5	0,6532

Fonte: Acervo dos autores (2022).

As características da função $log\, x$ não estão todas reveladas nas Figuras 10 e 11, mas podemos revelar algumas, didaticamente necessárias para se compreender o processo de transposição informática em conexão com a TDI. Nesse sentido,

> O que, habitualmente, se costuma denominar sob o termo informatização, não constitui uma simples transliteração, os ambientes informáticos de aprendizagem resultam de uma construção que é o local de novas transformações de objetos de ensino. Chamamos esse processo de *transposição informática* em andamento (BALACHEFF, 1994, p. 1, tradução nossa).

Inferimos que o processo didático do texto de saber, no ambiente informático, vive sob condições específicas da modelagem computacional (BALACHEFF, 1994). Assim, a função y = $log\, x$ está modelada pela noção matemática associada a "Equação(ões):". Acrescente-se ainda que $log\, x = \log_{10} x$, então, a definição de logaritmo recai sobre o logaritmando (x > 0). É justamente essa não ostensividade que implica nos resultados com erro, mostrado pelos ostensivos na “tabela de pontos”. Isso significa que a modelagem matemática computacional está imersa na dialética entre ostensivos e não ostensivos, algo que é interno a programação algorítmica do *software*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao investigar o processo de (re)construção de *organizações matemáticas* e *didáticas* no estudo de funções logarítmicas mediado pelo ambiente *informático* evidenciamos a necessidade de reflexões sobre a dialética ostensivo e não ostensivo e suas implicações na construção de conhecimentos referentes a noções matemática nessa ambiência. Tais reflexões revelaram como as *condições* e *restrições* impostas pelo ambiente *informatizado* influenciam na (re)construção das *Organizações Matemáticas* e *Didáticas*, tomando como exemplo, o estudo de funções logarítmicas nos modelos epistemológicos MELCE, MELCS e MELCA.

Nesse sentido, destacamos a importância do professor se manter alerta ao fenômeno de transposição didática, mais especificamente a transposição informática, pois o uso de livros didáticos de matemática publicados no Brasil promove o estudo de um modelo que permeia a construção das organizações que deve ser transposto, com os devidos cuidados, ao se reconstruírem tarefas em ambientes informáticos como o *Winplot* e *Graphmatica*.

Em função dos avanços tecnológicos e programas governamentais para a implementação de salas de informática nas escolas, a presença de *dispositivos informáticos* em processos de estudos tende a ser cada vez maior e o desenvolvimento de *praxeologias* adequadas ao enfrentamento de *tarefas* em ambientes *informático* torna-se necessário. Inferimos que pesquisas como esta tendem a alertar para mudanças no currículo de matemática frente ao uso de *tecnologias*.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Informática e Educação Matemática. **Revista de Matemática Aplicada**, Ano I, Nº 1, São Caetano do Sul, 2005.

ALMOULOUD, S. A. As Transformações do Saber Científico ao Saber Ensinado, O Caso do Logaritmo. **Educar em Revista, Curitiba**, n. Especial, p. 191-210, jan. 2011.

BALACHEFF. N. La Transposition Informatique. Note sur un Nouveau Problème pour la Didactique. *In:* ARTIGUE, M. *et al.* (org.). **Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France.** p. 364-370, 1994. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/32231148. Acesso em: 20 abr. 2010.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática – v. 1**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BORBA, M. C.; PENTEADO. M. G. P. **Informática e Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2010.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 2. Ed. São Paulo: E. Blücher. 2012.

BRASIL, **Ministério da Educação e dos Desportos**. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio. Parte I – Bases Legais, Distrito Federal, 2000.

BRASIL, **Ministério da Educação e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Matriz de Referência para o ENEM 2009. Brasília, Distrito Federal, 2011.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux da la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Genoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 12.1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Genoble: Le Pensée Sauvage-Éditions, v. 19.2, p. 221-265, 1999

CHEVALLARD, Y. Un concept en émergence: la dialectique des médias et des milieux. GUEUDET, D. G.; MATHERON, Y. (Éds). **Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques**. Paris: Lalina Coulange, 2008. p. 344-366.

CHEVALLARD. Y. **La notion de PER:** problèmes et avancées. Toulouse, 2009a. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161. Acesso em: 20 abr. 2010.

CHEVALLARD. Y. **La TAD face au professeur de mathématiques**, Toulouse, 29 de abril, 2009b , Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162. Acesso em: 8 out. 2009.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. **La sensibilité de l'activité athematiques aux ostensifs.** 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf. Acesso em: 25 maio 2018.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 2011.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos**: função exponencial, função logarítmica e sequências. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

DELGADO, T. A. S. **Lo Matemático en el Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes**. Memoria para optar al Grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Madrid, 2006

IEZZI. G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática ciência e aplicações**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, v. 1, 2010.

MATTAR, J. **Metodologia científica na era digital**. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

MOREIRA. M. A. **Metodologia de pesquisa em ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

PAIVA, M. **Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2012.

RIBEIRO, J. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**. 1. ed. São Paulo: Scipione, v. 1, 2010.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: ensino médio**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, v. 1, 2010.

SOUZA, J. R.; **Novo Olhar Matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, v. 1, 2010.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

Recebido em: 29de agosto de 2022.
Aprovado em: 26 de outubro de 2022.
Publicado em: 25 de janeiro de 2023.