JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 5, No. 1, pp. 95–114, February 2023
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom
DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i1.16304

Invers Moore-Penrose pada Matriks Turiyam Simbolik Real

Ani[1,*], Mashadi[1], Sri Gemawati[1]

[1]*Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau, Pekanbaru 28293, Indonesia*
[*]*Corresponding author. Email: ani832132@gmail.com*

ABSTRAK

Matriks Turiyam simbolik adalah matriks yang entri-entrinya berisi Turiyam simbolik. Invers matriks pada umumnya bisa ditentukan jika matriks tersebut merupakan matriks bujur sangkar yang *non-singular*. Saat ini invers dari matriks Turiyam simbolik yang berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$ dapat ditentukan dengan invers Moore-Penrose. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan algoritma invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real yang berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$. Operasi aljabar pada Turiyam simbolik adalah metode yang digunakan untuk memperoleh invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real yaitu dengan menerapkan operasi aljabar Turiyam simbolik pada konsep invers Moore-Penrose. Hasil utama yang diperoleh adalah algoritma invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real. Pada contoh demontrasi yang diberikan menunjukan bahwa invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real selalu ada walaupun matriksnya bukan matriks bujur sangkar.

Kata Kunci:
Invers Moore-Penrose; Matriks Turiyam Simbolik

ABSTRACT

The symbolic Turiyam matrix is a matrix whose entries contain symbolic Turiyam. Inverse matrices can generally be determined if the matrix is a non-singular square matrix. Currently the inverse of the symbolic Turiyam matrix of size $m \times n$ with $m \neq n$ can be determined by the Moore-Penrose inverse. The purpose of this research is to determine the inverse Moore-Penrose algorithm on a real symbolic Turiyam matrix of size $m \times n$ with $m \neq n$. Algebraic operations on symbolic Turiyam is a method used to obtain the Moore-Penrose inverse on real symbolic Turiyam matrices by applying symbolic Turiyam algebraic operations on the concept of Moore-Penrose inverses. The main result obtained is the inverse Moore-Penrose algorithm on the real symbolic Turiyam matrix. The demonstration example given shows that the Moore-Penrose inverse on a real symbolic Turiyam matrix always exists even though the matrix is not a square matrix.

Keywords:
Inverse Moore-Penrose; Turiyam Matrix Simbolic

Format Sitasi:

A. Ani, M. Mashadi, and S. Gemawati, "Invers Moore-Penrose pada Matriks Turiyam Simbolik Real", *Jambura J. Math.*, vol. 5, No. 1, pp. 95–114, 2023, doi: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i1.16304

Received: 3 September 2022 | Accepted: 1 December 2022 | Online: 1 February 2023

1. Pendahuluan

Matriks dan operasinya merupakan hal yang berkaitan erat dengan bidang aljabar linear. Matriks didefinisikan sebagai susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan yang disebut entri dalam matriks [1, 2]. Invers matriks pada umumnya, jika A matriks bujur sangkar dan terdapat matriks B dengan ukuran yang sama, sedemikian sehingga AB = BA = I, maka A disebut invertible (dapat dibalik) dan B disebut invers dari matrik A. Seperti yang diketahui bahwa invers matriks bisa ditemukan jika matriks tersebut merupakan matriks bujur sangkar dan *non-singular*. Suatu matriks yang berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$ dan matriks *singular* sudah pasti tidak memiliki invers, Namun ditemukan adanya invers untuk suatu matriks yang berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$ dan matriks *singular* yang disebut dengan invers Moore-Penrose [3]. Invers Moore-Penrose merupakan peluasan dari konsep invers matriks dan biasanya dinotasikan dengan A^+. Invers Moore-Penrose ada untuk setiap matriks baik matriks bujur sangkar yang singular maupun matriks yang tidak bujur sangkar [4]. Jika $A \in M_{nxm}$ maka terdapat dengan tunggal $A^+ \in M_{mxn}$. Invers Moore-Penrose merupakan invers dari suatu matrik jika memenuhi keempat persamaan Penrose [3, 5–7]. Salah satu kriterianya adalah ketika $AA^+ = (AA^+)^*$ atau yang disebut dengan matriks Hermitian.

Matriks Hermitian disebut sebagai matriks persegi kompleks yang sama dengan transpos konjugasinya sendiri [8]. Suatu matriks bujur sangkar A yang entri-entrinya bilangan kompleks disebut matriks Hermitian apabila $A = A^*$. Dan jika A adalah matriks real maka konjugat transpos A sama dengan transpos dari A, dengan demikian suatu matriks bujur sangkar A yang entri-entrinya bilangan real disebut matriks Hermitian apabila $A = A^T$. Artikel ini bertujuan untuk memperoleh algoritma invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real yang berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$.

Matriks turiyam bermula dari himpunan Turiyam, yang merupakan suatu data yang tidak terdefinisi secara pasti. Pada tahap awal himpunan Turiyam digunakan untuk membuat graf dari kondisi yang tidak pasti, kemudian juga untuk data yang tidak pasti dalam bentuk interval [9, 10]. Didalam matematika konsep Turiyam yang telah diteliti beberapa penulis, yaitu dalam bentuk vektor, ring dan group [11, 12]. Dari kondisi di atas, berkembang himpunan Turiyam ke matriks turiyam dengan tetap mempertahankan dalam bentuk simbolik.

Pengembangan konsep dan penerapan matriks turiyam simbolik ini baru dibahas oleh beberapa peneliti, dalam ilmu matematika konsep Turiyam yang telah dibahas yaitu, terkait pengantar Turiyam simbolik grup dan substruktur AH [13], pengantar konsep matriks Turiyam simbolik [14], pengantar ruang vektor dan bilangan kompleks Turiyam simbolik [15], representasi data dimensi keempat dan analisisnya menggunakan konteks Turiyam [9], pengantar Turiyam simbolik R-modulo dan modulo bilangan bulat Turiyam simbolik [14], Turiyam simbolik ring [10], Turiyam simbolik grup [13], representasi data dimensi keempat himpunan Turiyam [6], dan data dengan himpunan Turiyam untuk pengolahan informasi kuantum dimensi keempat [16]. Begitu juga penelitian mengenai invers Moore-Penrose telah dilakukan oleh beberapa peneliti yaitu, invers Moore-Penrose pada *free matrix* [4], invers Moore-Penrose sebagai invers matriks [17], invers Moore-Penrose pada matriks kompleks, invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar Max-Plus tersimetri [12], dan perhitungan cepat matriks invers Moore-Penrose [18]. Terlihat bahwa belum ada peneliti yang membahas tentang invers dari suatu matriks Turiyam. Suatu jenis matriks akan sangat cepat berkembang penggunaannya jika matriks tersebut terjamin mempunyai invers. Dalam kenyataan matriks Turiyam, kebanyakan bukan merupakan matriks bujur sangkar, sehingga tidak mempunyai invers. Maka salah satu alternatif yang dapat ditempuh adalah menggunakan invers Moore-Penrose dari matriks Turiyam simbolik real yang berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$. Dengan dapat ditentukannya invers dari matriks Turiyam simbolik real ini, diharapkan dapat bermanfaat untuk penerapannya dalam berbagai bidang yang direpresentasikan dalam bentuk matriks turiyam, misalnya masalah regresi ketidakpastian data, masalah mekanika quantum, berbagai masalah fuzzy dan lain sebagainya.

2. Metode

Penelitian ini dilakukan dalam bentuk studi literatur tentang konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan matriks Turiyam simbolik dan invers Moore-Penrose dari berbagai sumber literatur seperti jurnal ilmiah, prosiding maupun dari sumber buku-buku teks. Berikut beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan topik yang dibahas pada penelitian ini.

2.1. Matriks Turiyam Simbolik

Dalam matriks Turiyam simbolik terdapat operasi penjumlahan dan perkalian yang eksistensinya penting dalam artikel ini, namun sebelumnya telah didefinisikan dalam [4, 14] bentuk umum dari matriks Turiyam adalah sebagai berikut:

Definisi 1. Didefinisikan Turiyam simbolik dengan :

$$T_u = [T, F, I, Y] \tag{1}$$

T :Benar, F :Salah, I :Ketidakpastian, Y :Kesadaran.

T_u ditulis juga dengan $T_u = [x_0 + x_1T + x_2F + x_3I + x_4Y]$ dengan x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 adalah bilangan real ataupun bilangan kompleks [1].

Contoh 1. Didefinisikan Turiyam simbolik $T_u = [3 + 4T + 4F + I - 2Y]$.

Definisi 2. Didefinisikan matriks Turiyam simbolik dengan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \text{ adalah bilangan turiyam simbolik.}$$

Jika a_{ij} adalah bilangan real turiyam simbolik, maka A dikatakan matriks turiyam simbolik real. Jika a_{ij} adalah bilangan kompleks turiyam simbolik, maka A dikatakan matriks turiyam simbolik kompleks.

Contoh 2. Didefinisikan matriks Turiyam simbolik real yang berukuran 3 x 2,

$$T_u = \begin{bmatrix} T + 2Y & Y \\ F & 2 \\ T & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.1. *Rank* Matriks pada Matriks Turiyam Simbolik

Definisi 3. Untuk sebarang matriks Turiyam simbolik T_u, didefinisikan *rank* dari matriks T_u yang dinotasikan dengan $rk(T_u)$ sebagai jumlah baris tak nol dari bentuk eselon baris tereduksi matriks T_u.

2.1.2. Transpos Matriks pada Matriks Turiyam Simbolik

Definisi 4. Jika T_u adalah sebarang matriks Turiyam simbolik $m\ x\ n$, maka transpos T_u dilambangkan dengan T_u^T yang didefinisikan sebagai matriks $n\ x\ m$ yang dihasilkan dengan menukar baris-baris dan kolom-kolom pada matriks Tu.

2.1.3. Operasi Aljabar pada Turiyam Simbolik

Operasi aljabar antar simbol di Turiyam simbolik didefinisikan dalam [9], sebagai berikut:

$T \times T = T^2 = T$	$F \times F = F^2 = F$	$I \times I = I^2 = I$
$Y \times Y = Y^2 = Y$	$T \times Y = Y \times T = Y$	$T \times F = F \times T = F$
$F \times Y = Y \times F = Y$	$T \times I = I \times T = I$	$Y \times I = I \times Y = I$
$F \times I = I \times F = I$		

Misalkan $x = \{x_0 + x_1T + x_2F + x_3I + x_4Y\}$ dan $y = \{y_0 + y_1T + y_2F + y_3I + y_4Y\}$ adalah dua elemen sembarang di Turiyam simbolik, maka penjumlahan dan perkalian antara dua elemen Turiyam simbolik dapat didefinisikan sebagai berikut [9]:

Penjumlahan

$$x + y = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1\})T + (x_2 + y_2)F + (x_3 + y_3)I + (x_4 + y_4)Y.$$

Perkalian

$$\begin{aligned} x.y &= x_0.y_0 + T(x_0.y_1 + x_1.y_0 + x_1.y_1) + F(x_0.y_2 + x_1.y_2 + x_2.y_0 + x_2.y_2 + x_2.y_1) \\ &\quad + I(x_0.y_3 + x_1.y_3 + x_2.y_3 + x_3.y_3 + x_3.y_1 + x_3.y_2 + x_3.y_3 + x_3.y_4 + x_4.y_3) \\ &\quad + Y(x_0.y_4 + x_1.y_4 + x_2.y_4 + x_3.y_4 + x_4.y_1 + x_4.y_2 + x_4.y_4). \end{aligned}$$

2.2. *Invers Moore-Penrose*

Pada bagian ini diberikan definisi dan teorema tentang invers Moore-Penrose. Invers Moore Penrose yang didefinisikan dalam [3, 5, 7, 18] adalah sebagai berikut:

Definisi 5. Jika $A \in \mathbb{M}_{nxm}$, maka terdapat dengan tunggal $A^+ \in \mathbb{M}_{mxn}$ yang memenuhi ke-4 kondisi Penrose:

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $A^+A = (A^+A)^*$ (Hermitian).
4. $AA^+ = (AA^+)^*$ (Hermitian).

Dengan A^*merupakan konjugat transpos dari matriks A.

Jika terdapat matriks A yang non singular maka invers dari A merupakan Invers Moore-

Penrose, dengan kata lain invers matriks sama dengan Invers Moore-Penrose [16].

Definisi 6. Untuk semua matriks $A \in \mathbb{M}_{nxm}$, pasti terdapat $A^+ \in \mathbb{M}_{mxn}$ yang memenuhi keempat kondisi Penrose [3, 5].

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Invers Moore-Penrose pada Matriks Turiyam Simbolik Real

Jika T_u adalah sebuah matriks Turiyam simbolik, maka invers Moore-Penrose dari T_u memiliki beberapa sifat, salah satunya sifat tunggal yang dinyatakan dalam definisi dan teorema sebagai berikut.

Definisi 7. Jika $T_u \in \mathbb{M}_{nxm}$ merupakan matriks Turiyam simbolik, maka terdapat tepat satu $T_u^+ \in \mathbb{M}_{mxn}$ yang memenuhi ke-4 kondisi Penrose:

1. $T_u T_u^+ T_u = T_u$.
2. $T_u^+ T_u {T_u}^+ = {T_u}^+$.
3. ${T_u}^+ T_u = \left({T_u}^+ T_u\right)^*$ (Hermitian).
4. $T_u {T_u}^+ = \left(T_u {T_u}^+\right)^*$ (Hermitian).

Dengan ${T_u}^*$merupakan konjugat transpos dari matriks T_u.

Definisi 8. Untuk semua matriks Turiyam simbolik $T_u \in \mathbb{M}_{nxm}$, pasti terdapat $T_u^+ \in \mathbb{M}_{mxn}$ yang memenuhi keempat kondisi Penrose.

Teorema 1. *Untuk matriks Turiyam simbolik $T_u \in \mathbb{M}_{nxm}$, terdapat dengan tunggal matriks Turiyam simbolik ${T_u}^+ \in \mathbb{M}_{mxn}$.*

Bukti. Misalkan matriks Turiyam simbolik $T_u \in \mathbb{M}_{nxm}$, terdapat ${T_u}^+$ dan ${S_u}^+$ yang merupakan invers Moore-Penrose dari T_u. Matriks ${T_u}^+$dan ${S_u}^+$ pasti memenuhi keempat kondisi Penrose pada definisi 7. Untuk menunjukan ketunggalannya, ditunjukkan bahwa $T_u^+ = S_u^+$.

${T_u}^+$ adalah invers Moore-Penrose, ${T_u}^+$bisa ditulis dalam bentuk $T_u^+ T_u {T_u}^+$ sesuai dengan kondisi Penrose 2,

$${T_u}^+ = T_u^+ T_u {T_u}^+$$

${T_u}^+$ adalah invers Moore-Penrose, $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^*$ pasti berlaku sesuai dengan kondisi Penrose 3,

$${T_u}^+ = T_u^+ T_u {T_u}^+$$

$${T_u}^+ = T_u^+ \left(T_u {T_u}^+\right)^*$$

S_u^+ adalah invers Moore-Penrose maka T_u bisa ditulis dalam bentuk $T_u = T_u S_u^+ T_u$ sesuai pada kondisi Penrose 1,

$${T_u}^+ = T_u^+ T_u {T_u}^+$$

$${T_u}^+ = T_u^+ \left(T_u {T_u}^+\right)^*$$

$${T_u}^+ = T_u^+ \left(\left(T_u {S_u}^+ T_u\right) T_u^+\right)^*$$

${T_u}^+$ dan S_u^+ adalah invers Moore-Penrose, pasti memenuhi kriteria ke 3 Penrose yaitu, matriks Hermitian,

$${T_u}^+ = T_u^+ T_u {T_u}^+$$

$${T_u}^+ = T_u^+ \left(T_u {T_u}^+\right)^*$$

$$T_u{}^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u{}^{+} T_u\right) T_u^{+}\right)^{*}$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$

Karena berlaku matriks hermitian pada kondisi 3 dan 4, maka pada sifat konjugat transpos, matriks $T_u^{+} = S_u^{+}$ berlaku sifat komutatif.

$$T_u{}^{+} = T_u^{+} T_u T_u{}^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+}\left(T_u T_u{}^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u{}^{+} T_u\right) T_u^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u T_u S_u^{+}\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u T_u T_u^{+}\right) S_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u T_u^{+} T_u\right) S_u^{+}\right).$$

Karena berlaku matriks hermitian pada kondisi 3 dan 4, maka pada sifat konjugat transpos, matriks $T_u^{+} = S_u^{+}$ berlaku sifat komutatif.

$$T_u{}^{+} = T_u^{+} T_u T_u{}^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+}\left(T_u T_u{}^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u{}^{+} T_u\right) T_u^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u T_u S_u^{+}\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u T_u T_u^{+}\right) S_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u T_u^{+} T_u\right) S_u^{+}\right).$$
$$T_u{}^{+} = \left(T_u^{+} T_u T_u^{+}\right) T_u S_u^{+}.$$

$T_u{}^{+}$adalah invers Moore-Penrose, T_u bisa ditulis dalam bentuk $T_u = T_u^{+} T_u T_u{}^{+}$ sesuai dengan kondisi Penrose 2.

$$T_u{}^{+} = T_u^{+} T_u T_u{}^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+}\left(T_u T_u{}^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u{}^{+} T_u\right) T_u^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u T_u S_u^{+}\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u T_u T_u^{+}\right) S_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+}\left(\left(T_u T_u^{+} T_u\right) S_u^{+}\right).$$

$$T_u{}^{+} = \left(T_u^{+} T_u T_u^{+}\right) T_u S_u^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = (T_u^{+}) T_u S_u{}^{+}$$

$T_u{}^{+}$ dan $S_u{}^{+}$adalah invers Moore-Penrose, berlaku kondisi Penrose 3

$$T_u{}^{+} = T_u^{+} T_u T_u{}^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+} \left(T_u T_u{}^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u S_u{}^{+} T_u\right) T_u^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u T_u S_u^{+}\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u T_u T_u^{+}\right) S_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u T_u^{+} T_u\right) S_u^{+}\right).$$
$$T_u{}^{+} = \left(T_u^{+} T_u T_u^{+}\right) T_u S_u^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = (T_u^{+}) T_u S_u{}^{+}$$
$$T_u{}^{+} = (T_u^{+} T_u)^{*} S_u^{+}$$

S_u^{+} adalah invers Moore-Penrose maka T_u bisa ditulis dalam bentuk $T_u = T_u S_u^{+} T_u$.

$$T_u{}^{+} = T_u^{+} T_u T_u{}^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+} \left(T_u T_u{}^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u S_u{}^{+} T_u\right) T_u^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u S_u^{+} T_u\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u T_u S_u^{+}\right) T_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u T_u T_u^{+}\right) S_u^{+}\right).$$
$$T_u^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u T_u^{+} T_u\right) S_u^{+}\right).$$
$$T_u{}^{+} = \left(T_u^{+} T_u T_u^{+}\right) T_u S_u^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = (T_u^{+}) T_u S_u{}^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = (T_u^{+} T_u)^{*} S_u^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = \Big((T_u^{+} (T_u S_u^{+} T_u)\Big)^{*} S_u^{+}).$$

$T_u{}^{+}$ dan $S_u{}^{+}$adalah invers Moore-Penrose, berlaku kondisi Penrose 3,

$$T_u{}^{+} = T_u^{+} T_u T_u{}^{+}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+} \left(T_u T_u{}^{+}\right)^{*}.$$
$$T_u{}^{+} = T_u^{+} \left(\left(T_u S_u{}^{+} T_u\right) T_u^{+}\right)^{*}.$$

$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u S_u^+ T_u\right) T_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u S_u^+ T_u\right) T_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u T_u S_u^+\right) T_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u T_u T_u^+\right) S_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u T_u^+ T_u\right) S_u^+\right).$$
$$T_u{}^+ = \left(T_u^+ T_u T_u^+\right) T_u S_u^+.$$
$$T_u{}^+ = (T_u^+) T_u S_u{}^+.$$
$$T_u{}^+ = (T_u^+ T_u)^* S_u^+.$$
$$T_u{}^+ = \left((T_u^+ (T_u S_u^+ T_u)\right)^* S_u^+).$$
$$T_u{}^+ = \left(T_u^+ T_u S_u^+ T_u\right) S_u^+.$$

Karena berlaku matriks hermitian pada kondisi Penrose 3 dan 4,

$$T_u{}^+ = T_u^+ T_u T_u{}^+.$$
$$T_u{}^+ = T_u^+ \left(T_u T_u{}^+\right)^*.$$
$$T_u{}^+ = T_u^+\left(\left(T_u S_u{}^+ T_u\right) T_u^+\right)^*.$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u S_u^+ T_u\right) T_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u S_u^+ T_u\right) T_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u T_u S_u^+\right) T_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u T_u T_u^+\right) S_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u T_u^+ T_u\right) S_u^+\right).$$
$$T_u{}^+ = \left(T_u^+ T_u T_u^+\right) T_u S_u^+.$$
$$T_u{}^+ = (T_u^+) T_u S_u{}^+.$$
$$T_u{}^+ = (T_u^+ T_u)^* S_u^+.$$
$$T_u{}^+ = \left((T_u^+ (T_u S_u^+ T_u)\right)^* S_u^+).$$
$$T_u{}^+ = \left(T_u^+ T_u S_u^+ T_u\right) S_u^+.$$

T_u adalah invers Moore-Penrose, $T_u T_u^+ T_u$ bisa ditulis dalam bentuk $T_u T_u^+ T_u = T_u$ sesuai dengan kondisi Penrose 1,

$$T_u{}^+ = T_u^+ T_u T_u{}^+.$$
$$T_u{}^+ = T_u^+ \left(T_u T_u{}^+\right)^*.$$
$$T_u{}^+ = T_u^+\left(\left(T_u S_u{}^+ T_u\right) T_u^+\right)^*.$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u S_u^+ T_u\right) T_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u S_u^+ T_u\right) T_u^+\right).$$
$$T_u^+ = T_u^+\left(\left(T_u T_u S_u^+\right) T_u^+\right).$$

$$T_u^+ = T_u^+((T_uT_uT_u^+)\,S_u^+).$$
$$T_u^+ = T_u^+((T_uT_u^+T_u)\,S_u^+).$$
$${T_u}^+ = (T_u^+T_uT_u^+)\,T_uS_u^+.$$
$${T_u}^+ = (T_u^+)T_u{S_u}^+.$$
$${T_u}^+ = (T_u^+T_u)^*S_u^+.$$
$${T_u}^+ = \left((T_u^+(T_uS_u^+T_u)\right)^*S_u^+).$$
$${T_u}^+ = (T_u^+T_uS_u^+T_u)\,S_u^+$$
$$T_u = S_u^+T_uS_u^+.$$

S_u^+ adalah invers Moore-Penrose maka $S_u^+T_uS_u^+$ bisa ditulis dalam bentuk $S_u^+T_uS_u^+ = S_u^+$.

$${T_u}^+ = T_u^+T_u{T_u}^+.$$
$${T_u}^+ = T_u^+(T_u{T_u}^+)^*.$$
$${T_u}^+ = T_u^+((T_u{S_u}^+T_u)\,T_u^+)^*.$$
$$T_u^+ = T_u^+((T_uS_u^+T_u)\,T_u^+).$$
$$T_u^+ = T_u^+((T_uS_u^+T_u)\,T_u^+).$$
$$T_u^+ = T_u^+((T_uT_uS_u^+)\,T_u^+).$$
$$T_u^+ = T_u^+((T_uT_uT_u^+)\,S_u^+).$$
$$T_u^+ = T_u^+((T_uT_u^+T_u)\,S_u^+).$$
$${T_u}^+ = (T_u^+T_uT_u^+)\,T_uS_u^+.$$
$${T_u}^+ = (T_u^+)T_u{S_u}^+.$$
$${T_u}^+ = (T_u^+T_u)^*S_u^+.$$
$${T_u}^+ = \left((T_u^+(T_uS_u^+T_u)\right)^*S_u^+).$$
$${T_u}^+ = (T_u^+T_uS_u^+T_u)\,S_u^+$$
$$T_u = S_u^+T_uS_u^+.$$
$$T_u^+ = S_u^+.$$

Karena terpenuhi $T_u^+ = S_u^+$, invers Moore-Penrose dari matriks T_u terbukti tunggal. □

Jika invers matriks yang sudah kita kenal adalah invers dari suatu matriks bujur sangkar dan nonsingular, maka invers Moore-Penrose ada untuk setiap matriks baik bujur sangkar yang singular maupun tidak bujur sangkar. Sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap sebarang matriks pasti mempunyai invers Moore-Penrose. Jika $T_u \in \mathbb{R}_{mxm}$ matriks nonsingular maka ${T_u}^{-1} = {T_u}^+$, ini dijelaskan pada Teorema 2.

Teorema 2. *Jika $T_u \in \mathbb{M}_{mxm}$ merupakan matriks Turiyam simbolik non-singular maka invers dari T_u merupakan invers Moore-Penrose matriks Turiyam simbolik, dengan kata lain invers matriks T_u sama dengan invers Moore-Penrose matriks Turiyam simbolik (${T_u}^{-1} = {T_u}^+$).*

Bukti. Misalkan matriks T_u merupakan matriks Turiyam simbolik *non-singular*, sehingga matriks T_u memiliki invers yang dimisalkan dengan matriks S_u. Ditunjukkan bahwa untuk setiap matriks $T_u \in \mathbb{M}_{mxm}$ memiliki invers yang sama dengan invers Moore-Penrose, dengan demikian matriks $S_u = T_u^{-1}$ harus memenuhi keempat kriteria invers Moore-Penrose seperti yang telah didefinisikan pada definisi 7 agar terbukti $S_u = {T_u}^{-1} = {T_u}^{+}$.

Untuk kondisi Penrose 1, S_u bisa ditulis dalam bentuk $T_u = T_u S_u T_u$,

$T_u S_u T_u = T_u T_u^{-1} T_u = (T_u T_u^{-1})T_u = IT_u = T_u$ (terbukti terpenuhi kondisi Penrose 1)

Untuk kondisi Penrose 2, S_u bisa ditulis dalam bentuk $S_u = T_u S_u T_u$,

$S_u T_u S_u = T_u^{-1} T_u {T_u}^{-1} = {T_u}^{-1} I = T_u^{-1}$(terbukti terpenuhi kondisi Penrose 2).

Untuk kondisi Penrose 3 berlaku,

$(T_u S_u)^* = \left(T_u T_u^{-1}\right)^* = I^* = I = T_u T_u^{-1} = T_u S_u$ (terbukti terpenuhi kondisi Penrose 3).

Untuk kondisi Penrose 4 berlaku,

$(S_u T_u)^* = \left(T_u^{-1} T_u\right)^* = I^* = I = T_u^{-1} T_u = S_u T_u$ (Terbukti terpenuhi kondisi Penrose 4).

Matriks S_u memenuhi keempat kondisi Penrose, sehingga terbukti invers matriks T_u sama dengan invers Moore-Penrose matriks Turiyam simbolik $(S_u = {T_u}^{-1} = {T_u}^{+})$. □

Langkah awal dalam menentukan invers Moore-Penrose adalah menentukan *rank* dari matriks tersebut. *Rank* dari matriks sebagai jumlah maksimum vektor-vektor baris atau kolom yang bebas linear. Terdapat kategori untuk menentukan invers Moore-Penrose $\left({T_u}^{+}\right)$ pada matriks yang *full rank*. Namun jika rank dari matriks A tidak *full rank*, maka gunakan formula ${T_u}^{+} = G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T$. Ini dinyatakan dalam Teorema 3.

Teorema 3. *Diberikan matriks $T_u \in \mathbb{R}_{mxn}$ dengan rank $(T_u) > 0$. Jika matriks $T_u = F_u G_u$ maka ${T_u}^{+} = G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T$ merupakan Invers Moore-Penrose.*

Bukti. Matriks $T_u = F_u G_u$ dan ${T_u}^{+} = G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T$ merupakan Invers Moore-Penrose jika memenuhi keempat kondisi Penrose yang didefinisikan pada Definisi 7, Teorema ini buktikan dengan menunjukan T_u^{+} memenuhi keempat kondisi Penrose sebagai berikut.

1. Kondisi Penrose 1

$$
\begin{aligned}
T_u T_u^{+} T_u &= F_u G_u G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T F_u G_u. \\
T_u T_u^{+} T_u &= F_u (G_u G_u^T) \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} (F_u^T F_u) G_u. \\
T_u T_u^{+} T_u &= F_u G_u. \\
T_u T_u^{+} T_u &= T_u. \text{ (Kondisi Penrose 1 Terpenuhi.)}
\end{aligned}
$$

2. Kondisi Penrose 2

$$T_u^+ T_u T_u^+ = G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T F_u G_u G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T.$$
$$T_u^+ T_u T_u^+ = G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} (F_u^T F_u)(G_u G_u^T) \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T.$$
$$T_u^+ T_u T_u^+ = G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T.$$
$$T_u^+ T_u T_u^+ = T_u^T. \text{ (Kondisi Penrose 2 Terpenuhi.)}$$

3. Kondisi Penrose 3

$$(T_u T_u^+)^* = \left((F_u G_u) \left(G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T\right)\right)^*.$$
$$(T_u T_u^+)^* = \left(G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T\right)^* (F_u G_u)^*.$$
$$\left(((T_u T_u^+)^*\right)^* = \left(\left(G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T\right)^* (F_u G_u)^*\right)^*.$$
$$(T_u T_u^+) = \left((F_u G_u) \left(G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T\right)\right)^*.$$
$$(T_u T_u^+) = T_u T_u^+. \text{ (Kondisi Penrose 3 Terpenuhi.)}$$

4. Kondisi Penrose 3

$$(T_u^+ T_u)^* = \left(\left(G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T\right) (F_u G_u)\right)^*.$$
$$(T_u^+ T_u)^* = \left((F_u G_u)^* \left(G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T\right)\right)^*.$$
$$\left((T_u^+ T_u)^*\right)^* = \left(\left((F_u G_u)^* \left(G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T\right)\right)^*\right)^*.$$
$$(T_u^+ T_u) = \left(\left(G_u^T (G_u G_u^+)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T\right) (F_u G_u)\right).$$
$$(T_u^+ T_u) = (T_u^+ T_u). \text{ (Kondisi Penrose 4 Terpenuhi.)}$$

Karena T_u^+ memenuhi keempat kondisi Penrose, $T_u{}^+ = G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T$ merupakan Invers Moore-Penrose. □

3.2. Menentukan Invers Moore-Penrose pada Matriks Turiyam Simbolik Real

Adapun algoritma dalam menentukan invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik yang berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$ sebagai berikut.

1. Mendefinisikan matriks T_u yang merupakan sebarang matriks Turiyam simbolik real yang berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$.

$$T_u = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dengan a_{mn} adalah bilangan Turiyam simbolik real.

2. Menentukan *rank* pada matriks Turiyam simbolik real. Jika suatu matriks T_u tidak *full rank*, adapun langkah-langkah untuk mencari invers Moore-Penrose dari matriks tersebut adalah sebagai berikut:

   (a) Mereduksi matriks T_u tersebut menjadi matriks eselon baris tereduksi dan memisalkan matriks itu sebagai matriks baru dengan notasi Y_u:

$$Y_u = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

   (b) Lihat kolom yang memuat satu utama dari matriks Y_u dan pilih kolom tersebut dari matriks T_u. Kolom yang dipilih dari matriks T_u dibentuk menjadi matriks baru yang dinotasikan dengan matriks F_u:

$$F_u = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

   (c) Menentukan F_u^T *dan* $\left(F_u^T F_u\right)^{-1}$:

$$F_u^T = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & \dots & c_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

$$F_u^T F_u = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & \dots & c_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

$$F_u^T F_u = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\left(F_u^T F_u\right)^{-1} = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & \dots & e_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \dots & e_{mn} \end{pmatrix}.$$

   (d) Memilih baris tak nol dari matriks Y_u dan misalkan dengan matriks G_u:

$$G_u = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

(e) Menghitung nilai G_u^T *dan* $\left(G_u G_u^T\right)^{-1}$:

$$G_u^T = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & \cdots & f_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\left(G_u G_u^T\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & \cdots & f_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}\right)^{-1},$$

$$\left(G_u G_u^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix}.$$

(f) Menghitung $T_u^+ = G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T$:

$$T_u^+ = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & \cdots & f_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$T_u^+ = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}.$$

T_u^+ adalah invers Moore-Penrose jika memenuhi keempat kondisi Penrose.

Jika suatu matriks T_u *full rank*, adapun langkah-langkah untuk mencari invers Moore-Penrose dari matriks adalah sebagai berikut:

(a) Bila matriks T_u merupakan *full row rank*, maka invers Moore-Penrose dapat dihitung dengan:

$$T_u^+ = T_u^T \left(T_u T_u^T\right)^{-1}.$$

(b) Bila matriks T_u merupakan *full columns rank*, maka invers Moore-Penrose dapat dihitung dengan:

$$T_u{}^+ = \left(T_u{}^T T_u\right)^{-1} T_u{}^T.$$

3. Tunjukan $T_u{}^+$memenuhi keempat kondisi Penrose, jika terpenuhi maka didapatkan invers Moore-Penrose dari matriks T_u yaitu $T_u{}^+$:

$$T_u^+ = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}.$$

T_u^+ merupakan Invers Moore-Penrose jika memenuhi ke-empat kriteria Penrose:

(a) $T_u T_u^+ T_u = T_u$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(b) $T_u^+ T_u T_u^+ = T_u^+$.

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}.$$

(c) $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$ (Hermitian).

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right)^*.$$

(d) $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^*$ (Hermitian).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix} \right)^*.$$

3.3. Beberapa Contoh Soal

Contoh 3. Menentukan invers Moore-Penrose pada matriks T_u yang *full columns rank* $3 \ x \ 2$,

$$T_u = \begin{bmatrix} T+2Y & Y \\ F & 2 \\ T & 0 \end{bmatrix}.$$

Solusi. Penentuan solusi mengikuti langkah-langkah berikut:

- **Langkah 1**. Tentukan *rank* dari matriks T_u,

  bentuk eselon baris dari T_u adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *rank* $T_u = 2$ (*full columns rank*).

- **Langkah 2**. Gunakan rumus ${T_u}^+ = \left({T_u}^T T_u\right)^{-1} {T_u}^T$ untuk menghitung Invers Moore-Penrose dari T_u,

$$T_u = \begin{bmatrix} T+2Y & Y \\ F & 2 \\ T & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } T_u^T = \begin{bmatrix} T+2Y & F & T \\ Y & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_u^T.T_u = \begin{bmatrix} 2T^2+4TY+4Y^2+F^2 & TY+2Y^2+2F \\ TY+2Y^2+2F & Y^2+4 \end{bmatrix}.$$

Gunakan operasi aljabar pada turiyam matriks sehingga diperoleh,

$$T_u^T.T_u = \begin{bmatrix} 2T+8Y+F & 3Y+2F \\ 3Y+2F & Y+4 \end{bmatrix}$$

$$\left(T_u^T.T_u\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{(Y+4)}{-2TY-8T-32Y+11FY-4F+4F^2} & \frac{(3Y+2F)}{-2TY-8T-32Y+11FY-4F+4F^2} \\ \frac{(3Y+2F)}{-2TY-8T-32Y+11FY-4F+4F^2} & -\frac{(2T+8Y+F)}{-2TY-8T-32Y+11FY-4F+4F^2} \end{bmatrix}.$$

Gunakan operasi aljabar pada Turiyam matriks sehingga diperoleh,

$$\left(T_u^T.T_u\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-(Y+4)}{-22Y-8T} & \frac{3Y+2F}{-22Y-8T} \\ \frac{3Y+2F}{-22Y-8T} & -\frac{(2T+8Y+F)}{-22Y-8T} \end{bmatrix}$$

$$\left(T_u^T.T_u\right)^{-1} T_u^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{(-6Y-4T)}{11Y+4T} & \frac{1}{2}\frac{Y\ (F-6)}{11Y+4T} & \frac{\frac{1}{2}\ T(Y+4)}{11Y+4T} \\ -\frac{1}{2}\frac{(2Y+2F)}{11Y+4T} & -\frac{1(}{2}\frac{-13Y-4T)}{11Y+4T} & -\frac{\frac{1}{2}\ T\ (3Y+2F)}{11Y+4T} \end{bmatrix},$$

sehingga $\left({T_u}^T T_u\right)^{-1} {T_u}^T = \ {T_u}^+$.

- **Langkah 3**. Cek apakah ${T_u}^+$ memenuhi keempat kriteria Penrose,

1. $T_u T_u^+ T_u = T_u$.

$$T_u T_u^+ T_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{8T+82Y}{11Y+4T} & \frac{Y\ (14Y+F)}{11Y+4T} \\ \frac{1}{2}\frac{8F+22Y}{11Y+4T} & \frac{8F+22Y}{11Y+4T} \\ \frac{\frac{1}{2}\ T\ (8T+22Y)}{11Y+4T} & \frac{TY\ (2T+3Y+F-6)}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

Cek entri t_{u11} untuk mengetahui $T_u T_u^+ T_u = T_u$

$$\frac{1}{2}\frac{8T+82Y}{11Y+4T} = T+2Y$$

$$8T+82Y = T+2Y(22Y+8T)$$

$$8T+82Y = 38Y+44Y+8T$$

$$8T+82Y = 8T+82Y$$

Diperoleh bahwa entri t_{u11} pada $T_u T_u^+ T_u$ sama dengan t_{u11} pada T_u dan coba dengan cara yang sama, sehingga diperoleh matriks $T_u T_u^+ T_u = T_u$ (terpenuhi kriteria 1).

2. $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$.

$$T_u^+ T_u T_u^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{16T+132Y+2TY}{(11Y+4T)^2} & \frac{1}{4}\frac{Y(16T-80T-86Y)}{(11Y+4T)^2} & \frac{1}{4}\frac{T(118Y+32T)}{(11Y+4T)^2} \\ \frac{1}{2}\frac{-46Y-4F-6TY-4TF}{(11Y+4T)^2} & -\frac{1}{4}\frac{(-482Y+4YF-32T)}{(11Y+4T)^2} & \frac{1}{4}\frac{T(-134Y-16F)}{(11Y+4T)^2} \end{bmatrix}$$

Cek salah satu entri, misalkan ambil entri t_{u23} pada $T_u^+ T_u T_u^T$ untuk mengetahui $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$

$$\begin{aligned} \frac{T(-134Y-16F)}{4(11Y+4T)^2} &= -\frac{T\,(3Y+2F)}{2(11Y+4T)} \\ \frac{(-134TY-16TF)}{484Y^2+352TY+64T^2} &= -\frac{\frac{1}{2}\,T\,(3Y+2F)}{11Y+4T} \\ -1474TY^2-536T^2Y-176FTY-64FT^2 &= -726TY^3-484FTY^2-528T^2Y^2 \\ &\quad -352FT^2Y-96T^3Y-64FT^3 \\ -1474Y-536Y-176Y-64F &= -726Y-484Y-528Y \\ &\quad -352Y-96Y-64F \\ -2186Y-64F &= -2186Y-64F \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa entri t_{u23} pada $T_u^+ T_u T_u^T$ sama dengan t_{u23} pada T_u^+ dan coba dengan cara yang sama, sehingga diperoleh matriks $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$(terpenuhi kriteria 2).

3. $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$ (Hermitian).
Untuk matriks real, transpos konjugat (hermitian) akan sama dengan operasi transpos biasa [1, h. 438].

$$T_u^+ T_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ \frac{8T+22Y}{11Y+4T} & \frac{Y(2T+3Y+F-6)}{11Y+4T} \\ 0 & -\frac{(-11Y-4T)}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

$$(T_u^+ T_u)^* = (T_u^+ T_u)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ \frac{8T+22Y}{11Y+4T} & 0 \\ \frac{Y(2T+3Y+F-6)}{11Y+4T} & -\frac{(-11Y-4T)}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

Agar $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$ Hermitian maka entri t_{u12} pada $T_u^+ T_u$ harus sama nilainya dengan t_{u12} pada $(T_u^+ T_u)^*$ Hermitian.

$$\frac{Y(2T+3Y+F-6)}{11Y+4T} = \frac{2Y+3Y+Y-6Y}{11Y+4T} = \frac{0}{11Y+4T} = 0$$

sehingga diperoleh $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$ Hermitian (kriteria 3 terpenuhi).

4. $T_uT_u^+ = (T_uT_u^+)^*$ (Hermitian).

$$T_uT_u^+ = \begin{bmatrix} -\frac{(-2T-11Y)}{11Y+4T} & \frac{1}{2}\frac{Y\,(F-2T+3Y)}{11Y+4T} & -\frac{1}{2}\frac{T\,(-6Y-4T)}{11Y+4T} \\ \frac{Y}{11Y+4T} & \frac{1}{2}\frac{21Y+8T}{11Y+4T} & \frac{\frac{1}{2}\,TY\,(F-6)}{11Y+4T} \\ \frac{T(2T+3Y)}{11Y+4T} & \frac{\frac{1}{2}\,TY\,(F-6)}{11Y+4T} & \frac{1}{2}\frac{(Y+4)T}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

$$\left(T_uT_u^+\right)^*\text{Hermitian} = \left(T_uT_u^+\right)^T = \begin{bmatrix} -\frac{(-2T-11Y)}{11Y+4T} & \frac{Y}{11Y+4T} & \frac{T(2T+3Y)}{11Y+4T} \\ \frac{1}{2}\frac{Y\,(F-2T+3Y)}{11Y+4T} & \frac{1}{2}\frac{21Y+8T}{11Y+4T} & \frac{\frac{1}{2}\,TY\,(F-6)}{11Y+4T} \\ -\frac{1}{2}\frac{T\,(-6Y-4T)}{11Y+4T} & \frac{\frac{1}{2}\,TY\,(F-6)}{11Y+4T} & \frac{1}{2}\frac{(Y+4)T}{11Y+4T} \end{bmatrix}$$

Agar $T_uT_u^+ = (T_uT_u^+)^*$Hermitian, entri t_{u12} pada $T_uT_u^T$ harus sama nilainya dengan t_{u12} pada $T_uT_u^{T^*}$ Hermitian dan entri t_{u13} pada $T_uT_u^T$ harus sama nilainya dengan t_{u13} pada $T_uT_u^{T^*}$ Hermitian.

$$\begin{aligned} t_{u12} &= t_{u12} \\ \frac{Y}{11Y+4T} &= \frac{1}{2}\frac{Y\,(F-2T+3Y)}{11Y+4T} \\ Y\,(22Y+8T) &= (11Y+4T)(YF-2TY+3Y^2) \\ 22Y+8Y &= 22Y^2+8TY \\ 22Y+8Y &= 22Y+8Y \\ t_{u13} &= t_{u13} \\ \frac{T(2T+3Y)}{11Y+4T} &= -\frac{1}{2}\frac{T\,(-6Y-4T)}{11Y+4T} \\ 68Y+66Y+16T &= 66Y^2+68TY+16T^2 \\ 68Y+66Y+16T &= 68Y+66Y+16T \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $T_uT_u^+ = (T_uT_u^+)^*$ Hermitian (kriteria 4 terpenuhi).
T_u^+ memenuhi keempat kriteria Penrose maka invers Moore-Penrose dari matriks T_u adalah

$$T_u^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{(-6Y-4T)}{11Y+4T} & \frac{1}{2}\frac{Y\,(F-6)}{11Y+4T} & \frac{T(Y+4)}{2(11Y+4T)} \\ -\frac{1}{2}\frac{(2Y+2F)}{11Y+4T} & -\frac{1}{2}\frac{(-13Y-4T)}{11Y+4T} & -\frac{T\,(3Y+2F)}{2(11Y+4T)} \end{bmatrix}.$$

Contoh 4. Menentukan invers Moore-Penrose pada matriks T_u yang *full columns rank* $2\ x\ 3$,

$$T_u = \begin{bmatrix} 2T & 2Y & 4F \\ T & Y & 2F \end{bmatrix}.$$

Solusi. Penentuan solusi mengikuti langkah-langkah berikut:

- **Langkah 1**. Tentukan *rank* dari matriks T_u.
  Bentuk eselon baris dari T_u adalah $\begin{bmatrix} 1 & \frac{Y}{T} & \frac{2F}{T} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *rank* $T_u = 1$.
- **Langkah 2**. Mereduksi matriks T_u menjadi matriks eselon baris tereduksi dan memisalkan matriks tersebut sebagai matriks baru dengan notasi Y_u:

$$Y_u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y}{T} & \frac{2F}{T} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Langkah 3**.Lihat kolom yang memuat satu utama dari matriks Y_u dan pilih kolom tersebut dari matriks T_u. Kolom yang dipilih dari matriks T_u dibentuk menjadi matriks baru yang dinotasikan dengan matriks F_u:

$$F_u = \begin{bmatrix} 2T \\ T \end{bmatrix}.$$

- **Langkah 4**. Memilih baris tak nol dari matriks Y_u dan misalkan dengan matriks G_u:

$$G_u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{Y}{T} & \frac{2F}{T} \end{bmatrix}.$$

- **Langkah 5**. Menghitung $T_u^+ = G_u^T (G_u G_u^T)^{-1} (F_u^T F_u)^{-1} F_u^T$:

$$G_u^T \left(G_u G_u^T\right)^{-1} \left(F_u^T F_u\right)^{-1} F_u^T = \begin{bmatrix} \frac{2T}{5(T+Y+4F)} & \frac{T}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2Y}{5(T+Y+4F)} & \frac{Y}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2F}{5(T+Y+4F)} & \frac{2F}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

- **Langkah 6**. Cek apakah ${T_u}^+$ memenuhi keempat kondisi Penrose:

1. $T_u T_u^+ T_u = T_u$.

$$T_u T_u^+ T_u = \begin{bmatrix} 2T & 2Y & 4F \\ T & Y & 2F \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks $T_u T_u^+ T_u = T_u$ (terpenuhi kriteria 1).

2. $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$.

$$T_u^+ T_u T_u^T = \begin{bmatrix} \frac{2T}{5(T+Y+4F)} & \frac{T}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2Y}{5(T+Y+4F)} & \frac{Y}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2F}{5(T+Y+4F)} & \frac{2F}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks $T_u^+ T_u T_u^T = T_u^+$ (terpenuhi kriteria 2).

3. $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$ (Hermitian).

Untuk matriks real, transpos konjugat (hermitian) akan sama dengan operasi transpos biasa [1, h. 438].

$$T_u^+ T_u = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{(T+Y+4F)} & \frac{TY}{(T+Y+4F)} & \frac{2TF}{(T+Y+4F)} \\ \frac{TY}{(T+Y+4F)} & \frac{Y^2}{(T+Y+4F)} & \frac{2YF}{(T+Y+4F)} \\ \frac{2TF}{(T+Y+4F)} & \frac{2YF}{(T+Y+4F)} & \frac{4F^2}{(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

$$(T_u^+ T_u)^* = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{(T+Y+4F)} & \frac{TY}{(T+Y+4F)} & \frac{2TF}{(T+Y+4F)} \\ \frac{TY}{(T+Y+4F)} & \frac{Y^2}{(T+Y+4F)} & \frac{2YF}{(T+Y+4F)} \\ \frac{2TF}{(T+Y+4F)} & \frac{2YF}{(T+Y+4F)} & \frac{4F^2}{(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $T_u^+ T_u = (T_u^+ T_u)^*$ Hermitian (kriteria 3 terpenuhi).

4. $T_u T_u^+ = (T_u T_u^+)^*$ (Hermitian).

$$T_u T_u^+ = \begin{bmatrix} \frac{4\left(T^2+Y^2+4F^2\right)}{5(T+Y+4F)} & \frac{2\left(T^2+Y^2+4F^2\right)}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2\left(T^2+Y^2+4F^2\right)}{5(T+Y+4F)} & \frac{\left(T^2+Y^2+4F^2\right)}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

$$\left(T_u T_u^+\right)^* = \begin{bmatrix} \frac{4\left(T^2+Y^2+4F^2\right)}{5(T+Y+4F)} & \frac{2\left(T^2+Y^2+4F^2\right)}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2\left(T^2+Y^2+4F^2\right)}{5(T+Y+4F)} & \frac{\left(T^2+Y^2+4F^2\right)}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $T_u T_u^+ = \left(T_u T_u^+\right)^*$Hermitian (kriteria 4 terpenuhi).
T_u^+ memenuhi keempat kriteria Penrose maka invers Moore-Penrose dari matriks T_u adalah

$$T_u^+ = \begin{bmatrix} \frac{2T}{5(T+Y+4F)} & \frac{T}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2Y}{5(T+Y+4F)} & \frac{Y}{5(T+Y+4F)} \\ \frac{2F}{5(T+Y+4F)} & \frac{2F}{5(T+Y+4F)} \end{bmatrix}.$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan mengenai Invers Moore-Penrose pada matriks Turiyam simbolik real bahwa untuk matriks T_u yang berukuran $m \times n$ dengan $m \neq n$ selalu memiliki Invers Moore-Penrose secara tunggal. Dengan kata lain invers dari matriks yang non *invertible* baik yang singular maupun yang berukuran tidak bujur sangkar bisa dihitung dengan invers Moore-Penrose, ini bisa dilihat dari contoh demonstrasi pada pembahasan.

Referensi

[1] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, 11th ed. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., 2013.

[2] S. Syarifuddin, M. Mikrayanti, and M. Muslim, *Aljabar Linear*, M. Z. Aminy and S. Sudarsono, Eds. Mataram: LPP Mandala, 2016.

[3] R. Macausland, *The Moore-Penrose Inverse and Least Squares*. Tacoma, Washington: University of Puget Sound, 2014.

[4] T. Britz, "The Moore-Penrose inverse of a free matrix," *The Electronic Journal of Linear Algebra*, vol. 16, pp. 208–215, jan 2007, doi: 10.13001/1081-3810.1196.

[5] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, ser. CMS Books in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2003, doi: 10.1007/b97366.

[6] P. K. Singh, "Turiyam Set a Fourth Dimension Data Representation," *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 09, no. 07, pp. 1821–1828, 2021, doi: 10.4236/jamp.2021.97116.

[7] H. Yanai, K. Takeuchi, and Y. Takane, *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. New York, NY: Springer New York, 2011, doi: 10.1007/978-1-4419-9887-3.

[8] L. Salaka, H. W. M. Patty, and M. W. Talakua, "Sifat-Sifat Dasar Matriks Skew Hermitian," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 7, no. 2, pp. 19–26, dec 2013, doi: 10.30598/barekengvol7iss2pp19-26.

[9] P. Courrieu, "Fast Computation of Moore-Penrose Inverse Matrices," *Neural and Evolutionary Computing*, vol. 8, no. 2, pp. 25–29, 2008, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.0804.4809.

[10] P. K. Singh, K. D. Ahmad, M. Bal, and M. Aswad, "On The Symbolic Turiyam Rings," *Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems*, p. 03559108, 2021, doi: 10.54216/JNFS.010204.

[11] A. A. Basheer, K. D. Ahmad, and R. Ali, "Symbolic Turiyam Groups," *Preprint Paper*, pp. 30–43, 2022, doi: 10.13140/RG.2.2.28244.07045.

[12] S. Suroto, "Invers Moore-Penrose pada Matriks Atas Aljabar Max-Plus Tersimetri," *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, vol. 6, no. 2, pp. 198–209, sep 2021, doi: 10.25157/teorema.v6i2.5514.

[13] A. A. Basheer, K. D. Ahmad, and R. Ali, "An Introduction to The Symbolic Turiyam Groups and AH-Substructures," *Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 2, pp. 43–52, 2022, doi: 10.54216/JNFS.030205.

[14] M. Bal, P. K. Singh, and K. D. Ahmad, "A Short Introduction To The Concept Of Symbolic Turiyam Matrix," *Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems*, vol. 2, pp. 88–99, 2022, doi: 10.54216/JNFS.020108.
[15] ——, "An Introduction To The Symbolic Turiyam R-Modules and Turiyam Modulo Integers," *Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems*, pp. 8–19, 2022, doi: 10.54216/JNFS.020201.
[16] P. K. Singh, "Four Way Human Quantum Turiyam Cognition Analysis," *Journal of Artificial Intelligence and Technology*, vol. 2, no. 4, pp. 1–8, aug 2022, doi: 10.37965/jait.2022.0123.
[17] Y. Yanti, H. Helmi, and M. Kiftiah, "Invers Moore-Penrose Sebagai Invers Matriks," *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 8, no. 4, pp. 951–958, oct 2019, doi: 10.26418/bbimst.v8i4.36731.
[18] S. L. Campbell and C. D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, jan 2009, doi: 10.1137/1.9780898719048.