

Value at Risk dan Tail Value at Risk dari Peubah Acak Besarnya Kerugian yang Menyebar Alpha Power Pareto

Ruhiyat^{1,*}, Berlian Setiawaty¹, Muwafiqo Zamzami Dhuha¹

¹Departemen Matematika, Fakultas MIPA, IPB University, Bogor 16680, Indonesia

*Corresponding author. Email: ruhiyat-mat@apps.ipb.ac.id

ABSTRAK

Value at Risk (VaR) dan *Tail Value at Risk* (TVaR) merupakan dua ukuran yang umum digunakan untuk menguantifikasi risiko yang terkait dengan suatu sebaran besarnya kerugian. Dalam tulisan ini, kedua nilai tersebut dihitung secara analitik dan diduga menggunakan simulasi Monte Carlo ketika peubah acak besarnya kerugian memiliki sebaran *alpha power* Pareto. Sebaran ini merupakan hasil dari *alpha power transformation* terhadap suatu sebaran Pareto. Bilangan-bilangan acak yang digunakan pada simulasi Monte Carlo dibangkitkan dari sebaran *alpha power* Pareto menggunakan teknik transformasi invers. Pada kasus khusus yang digunakan, nilai dugaan VaR dan TVaR yang diperoleh dari simulasi Monte Carlo untuk beberapa tingkat keamanan yang digunakan mendekati nilai VaR dan TVaR yang sebenarnya asalkan banyaknya bilangan acak yang dibangkitkan pada simulasi Monte Carlo cukup banyak.

Kata Kunci:

Sebaran *Alpha Power* Pareto; Simulasi Monte Carlo; *Tail Value at Risk*; *Value at Risk*

ABSTRACT

Value at Risk (VaR) and *Tail Value at Risk* (TVaR) are two measures that are commonly used to quantify the risk associated with a loss severity distribution. In this paper, both values are calculated analytically and estimated using a Monte Carlo simulation when the loss severity random variable has an *alpha power* Pareto distribution. This distribution is the result of *alpha power transformation* on a Pareto distribution. The random numbers used in the Monte Carlo simulation are generated from the *alpha power* Pareto distribution using the inverse transformation technique. In the special case used, the estimated VaR and TVaR values obtained from the Monte Carlo simulation for some security levels used are close to the actual VaR and TVaR values as long as the number of random numbers generated in the Monte Carlo simulation is sufficiently large.

Keywords:

Alpha Power Pareto Distribution; Monte Carlo Simulation; *Tail Value at Risk*; *Value at Risk*

Format Sitasi:

R. Ruhiyat, B. Setiawaty, and M. Z. Dhuha, "Value at Risk dan Tail Value at Risk dari Peubah Acak Besarnya Kerugian yang Menyebar Alpha Power Pareto", *Jambura J. Math.*, vol. 5, No. 1, pp. 67–82, 2023, doi: <https://doi.org/10.34312/jjom.v5i1.16586>

1. Pendahuluan

Dua buah ukuran risiko yang umum digunakan oleh para pengelola risiko adalah *Value at Risk* (VaR) dan *Tail Value at Risk* (TVaR). Menurut Jorion [1], VaR merangkum kerugian terburuk yang tidak akan terlampaui pada kurun waktu tertentu dengan tingkat kepercayaan tertentu. Secara lebih formal, VaR menggambarkan kuantil dari proyeksi sebaran besarnya kerugian pada periode waktu tertentu. VaR dapat digunakan dalam penentuan besarnya modal yang dibutuhkan untuk menanggulangi kerugian besar yang mungkin terjadi. Akan tetapi, menurut Klugman, *et al.* [2], VaR memiliki kekurangan. Ketika sebaran besarnya kerugian bukan sebaran normal, VaR tidak memenuhi sifat subaditivitas yang merupakan salah satu syarat agar suatu ukuran risiko disebut koheren. TVaR, atau disebut juga *Expected Shortfall* (ES), *Conditional Value at Risk* (CVaR), *Conditional Tail Expectation* (CTE), atau *Average Value at Risk* (AVaR), merupakan suatu ukuran risiko yang lebih informatif, lebih bermanfaat, dan koheren [3]. TVaR didefinisikan sebagai rata-rata dari semua kerugian yang melebihi VaR sehingga nilai TVaR seharusnya lebih besar daripada nilai VaR yang bersesuaian.

Beberapa penelitian terkait dengan VaR dan TVaR dari berbagai macam sebaran telah dilakukan. He *et al.* [4] menghitung VaR dari kerugian-kerugian keuangan dengan menerapkan sebaran *generalized* Pareto. Gebizlioglu, *et al.* [5] mencoba membandingkan metode-metode pendugaan VaR dari besarnya kerugian yang menyebar Weibull. Rockafellar dan Uryasev [6] menurunkan sifat-sifat dasar TVaR dari sebaran-sebaran kerugian di bidang keuangan. Vanduffel [7] melakukan aproksimasi optimal bagi ukuran-ukuran risiko, termasuk VaR dan TVaR, dari suatu jumlah peubah acak-peubah acak yang menyebar lognormal.

Beberapa sebaran yang dapat digunakan untuk memodelkan sebaran besarnya kerugian adalah sebaran eksponensial, sebaran Gamma, sebaran lognormal, dan sebaran Weibull [2], sebaran eksponensial campuran [8], sebaran Gamma-Lindley [9], sebaran Pareto [10], atau sebaran beta *prime* dan sebaran Burr [11]. Ihtisham, *et al.* [12] telah mencoba menerapkan sebaran *alpha power* Pareto (APP) untuk memodelkan suatu data besarnya kerugian dan sebaran APP ini merupakan model yang terbaik ketika dibandingkan dengan beberapa sebaran lainnya dalam memodelkan data tersebut. Sebaran APP ini merupakan hasil dari *alpha power transformation* (APT) terhadap sebaran Pareto. APT pertama kali diperkenalkan oleh Mahdavi dan Kundu [13] dan diterapkan pada sebaran eksponensial. Selanjutnya, Nassar, *et al.* [14] menerapkan APT pada sebaran Weibull.

Mahdavi dan Kundu [13], Nassar, *et al.* [14], serta Ihtisham, *et al.* [12] hanya menyajikan beberapa sifat-sifat sebaran hasil APT, seperti fungsi pembangkit momen, modus, statistik tataan, dan *mean residual function*. Belum ada penelitian yang membahas VaR dan TVaR dari sebaran-sebaran hasil APT. Oleh karena itu, penelitian ini menyajikan VaR dan TVaR dari salah satu sebaran hasil APT, yakni sebaran APP. Penelitian ini bertujuan untuk merumuskan dan menghitung nilai VaR dan TVaR dari suatu peubah acak kerugian yang memiliki sebaran APP secara analitik. Selain itu, nilai VaR dan TVaR dari peubah acak tersebut juga diduga dengan menggunakan simulasi Monte Carlo. Hasil dugaan tersebut kemudian dibandingkan dengan nilai-nilai yang sebenarnya untuk mengetahui seberapa bagus kinerja dari simulasi Monte Carlo dalam menduga nilai VaR dan TVaR dari sebaran APP.

2. Metode

Tahapan yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan VaR dan TVaR dari suatu peubah acak besarnya kerugian yang menyebar APP.
2. Menyusun algoritma teknik transformasi invers untuk membangkitkan bilangan-bilangan acak yang berasal dari sebaran APP.
3. Menyusun algoritma simulasi Monte Carlo untuk menduga nilai VaR dan TVaR dari suatu peubah acak besarnya kerugian yang menyebar APP.
4. Menentukan banyaknya bilangan acak yang harus dibangkitkan agar diyakini bahwa bilangan-bilangan acak yang dibangkitkan memang berasal dari sebaran APP.
 - (a) Membangkitkan beberapa *datasets* dengan berbagai macam ukuran yang berasal dari sebaran APP dengan nilai parameter-parameter yang berbeda-beda.
 - (b) Mencoba memodelkan semua *datasets* pada Langkah 4 (a) dengan sebaran Pareto dan sebaran APP, yakni dengan menduga nilai parameter-parameternya dengan metode *maximum likelihood*. Khusus untuk parameter-parameter dari sebaran APP, nilai dugaannya dicari dengan bantuan metode Newton-Raphson.
 - (c) Menguji kesesuaian model-model pada Langkah 4 (b) dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov dan memilih model yang terbaik dengan menggunakan *Akaike Information Criteria*.
5. Menghitung nilai dugaan bagi VaR dan TVaR dari suatu peubah acak besarnya kerugian yang menyebar APP dengan nilai parameter-parameter tertentu menggunakan simulasi Monte Carlo.
6. Menghitung nilai VaR dan TVaR yang sebenarnya dari peubah acak pada Langkah 5 menggunakan rumus-rumus yang diperoleh pada Langkah 1.
7. Membandingkan nilai dugaan bagi VaR dan TVaR yang diperoleh pada Langkah 5 dengan nilai VaR dan TVaR yang diperoleh pada Langkah 6 dengan menghitung galat relatifnya.

Adapun beberapa teori yang digunakan pada penelitian ini disajikan pada subbab-subbab berikut.

2.1. Sebaran Pareto, Alpha Power Transformation, dan Sebaran Alpha Power Pareto

Berdasarkan Klugman, et al. [2], suatu peubah acak X dikatakan menyebar Pareto jenis pertama atau *single-parameter* Pareto dengan parameter bentuk $\beta > 0$ apabila fungsi sebaran kumulatif dari X dan fungsi kepekatan peluang yang bersesuaiannya berturut-turut adalah sebagai berikut:

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\beta, \quad \text{jika } x \geq \theta \text{ dengan } \theta > 0, \quad (1)$$

dan

$$f_X(x) = \frac{\beta\theta^\beta}{x^{\beta+1}}, \quad \text{jika } x \geq \theta \text{ dengan } \theta > 0. \quad (2)$$

Apabila data besarnya kerugian "dinormalisasi", yakni setiap besarnya kerugian dibagi dengan batas bawah yang dipilih, maka berdasarkan Philbrick [15], θ akan bernilai 1. Akibatnya, fungsi sebaran kumulatif pada Persamaan (1) dan fungsi kepekatan peluang pada Persamaan (2) berturut-turut akan menjadi sebagai berikut:

$$F_X(x) = 1 - x^{-\beta}, \quad \text{jika } x \geq 1, \quad (3)$$

dan

$$f_X(x) = \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, \quad \text{jika } x \geq 1. \quad (4)$$

Sebaran *alpha power* Pareto (APP) dapat diperoleh dengan melakukan *alpha power transformation* (APT) terhadap sebaran Pareto. Berdasarkan Mahdavi dan Kundu [13], APT dari $F_X(x)$ dan $f_X(x)$ untuk $x \in \mathbb{R}$ berturut-turut didefinisikan sebagai berikut:

$$F_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{F_X(x)} - 1}{\alpha - 1}, & \text{jika } \alpha > 0, \alpha \neq 1, \\ F_X(x), & \text{jika } \alpha = 1, \end{cases} \quad (5)$$

dan

$$f_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{\log \alpha}{\alpha - 1} f_X(x) \alpha^{F_X(x)}, & \text{jika } \alpha > 0, \alpha \neq 1, \\ f_X(x), & \text{jika } \alpha = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Dengan menyubstitusi Persamaan (3) dan Persamaan (4) ke Persamaan (5) dan Persamaan (6), diperoleh fungsi sebaran kumulatif dan fungsi kepekatan peluang dari sebaran APP berturut-turut sebagai berikut:

$$F_{APP}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{1-x^{-\beta}} - 1}{\alpha - 1}, & \text{jika } \alpha > 0, \alpha \neq 1, \\ 1 - x^{-\beta}, & \text{jika } \alpha = 1, \end{cases} \quad (7)$$

dan

$$f_{APP}(x) = \begin{cases} \frac{\beta \log \alpha}{\alpha - 1} x^{-\beta-1} \alpha^{1-x^{-\beta}}, & \text{jika } \alpha > 0, \alpha \neq 1, \\ \beta x^{-\beta-1}, & \text{jika } \alpha = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Beberapa sifat dari sebaran APP telah dibahas oleh Ihtisham, *et al.* [12].

2.2. Value at Risk dan Tail Value at Risk

Misalkan suatu peubah acak besarnya kerugian dilambangkan dengan X . Berdasarkan Klugman, *et al.* [2], *Value at Risk* (VaR) dari X pada tingkat keamanan $100p\%$ dilambangkan dengan $\text{VaR}_p(X)$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{VaR}_p(X) = \inf_{x \geq 0} \{x | F_X(x) \geq p\}, \quad \text{untuk } 0 < p < 1 \quad (9)$$

yang merupakan persentil ke- $100p$ dari sebaran dari peubah acak X . Sementara itu, *Tail Value at Risk* (TVaR) dari X pada tingkat keamanan $100p\%$ dilambangkan dengan $\text{TVaR}_p(X)$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{TVaR}_p(X) = \frac{\int_p^1 \text{VaR}_u(X) du}{1-p}, \text{ untuk } 0 < p < 1 \quad (10)$$

yang merupakan rata-rata dari semua nilai VaR di atas tingkat keamanan, p .

2.3. Teknik Transformasi Invers

Misalkan X adalah suatu peubah acak kontinu dengan fungsi sebaran kumulatif F_X yang kontinu dan naik di mana $0 < F_X(x) < 1$. Berdasarkan Law [16], algoritma untuk membangkitkan sebuah bilangan acak yang merupakan suatu realisasi dari peubah acak X dengan teknik transformasi invers adalah sebagai berikut:

1. Bangkitkan sebuah bilangan acak u dari sebaran seragam $(0,1)$.
2. Hasilkan $x = F_X^{-1}(u)$ dengan F_X^{-1} adalah invers dari fungsi F_X .

2.4. Simulasi Monte Carlo

Misalkan X adalah suatu peubah acak yang memiliki sebaran F dan kuantitas yang ingin diduga adalah $\gamma = g(X)$ dengan g adalah suatu fungsi yang memetakan himpunan peubah acak ke himpunan bilangan real. Algoritma untuk menduga nilai γ dengan simulasi Monte Carlo adalah sebagai berikut:

1. Untuk iterasi ke- $i = 1, 2, \dots, m$, lakukan hal-hal berikut:
 - (a) Bangkitkan bilangan-bilangan acak $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ dari sebaran F .
 - (b) Hitung $\hat{\gamma}^{(i)}$ dari $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ dengan rumus yang bergantung pada definisi dari fungsi g .
2. Berdasarkan Thomas dan Luk [17], nilai dugaan bagi γ dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\gamma}^{(i)}. \quad (11)$$

2.5. Metode Maximum Likelihood

Misalkan $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ adalah fungsi kepekatan peluang bersama dari n peubah acak X_1, X_2, \dots, X_n dengan nilai-nilai sampel x_1, x_2, \dots, x_n . Berdasarkan Ramachandran dan Tsokos [18], fungsi *likelihood* dari sampel diberikan oleh rumus berikut:

$$L(\theta) = L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m; x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m). \quad (12)$$

Jika X_1, X_2, \dots, X_n merupakan peubah acak-peubah acak kontinu yang bebas stokastik identik dengan fungsi kepekatan peluang $f(x; \theta)$, maka fungsi *likelihood* pada Persamaan (12) dapat berubah menjadi seperti berikut:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta). \quad (13)$$

Penduga-penduga *maximum likelihood* adalah nilai parameter-parameter yang memaksimumkan fungsi *likelihood* pada Persamaan (12) atau Persamaan (13), yaitu

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(\theta). \quad (14)$$

Algoritma untuk mendapatkan nilai dugaan dari θ dengan metode *maximum likelihood* adalah sebagai berikut:

1. Definisikan fungsi *likelihood*, $L(\theta)$.
2. Sering lebih mudah untuk menentukan logaritma natural dari $L(\theta)$, yaitu $l(\theta) = \ln L(\theta)$.
3. Apabila bisa, turunkan $l(\theta)$ terhadap θ , kemudian samakan hasil turunannya dengan nol.
4. Selesaikan persamaan yang diperoleh pada Langkah 3 untuk θ sehingga diperoleh $\hat{\theta}$ yang sesuai dengan Persamaan (14).

Jika X_1, X_2, \dots, X_n merupakan peubah acak-peubah acak yang menyebar Pareto yang saling bebas dengan fungsi kepekatan peluang seperti pada Persamaan (2) dengan nilai-nilai sampel x_1, x_2, \dots, x_n , maka berdasarkan Bee, *et al.* [19], rumus bagi nilai dugaan *maximum likelihood* dari θ dan β berturut-turut diberikan oleh Persamaan (15) dan Persamaan (16) berikut:

$$\hat{\theta} = \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad (15)$$

dan

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\hat{\theta}}\right)}. \quad (16)$$

Akibatnya, jika X_1, X_2, \dots, X_n merupakan peubah acak-peubah acak yang menyebar Pareto yang saling bebas dengan fungsi kepekatan peluang seperti pada Persamaan (4) dengan nilai-nilai sampel x_1, x_2, \dots, x_n , maka nilai dugaan *maximum likelihood* dari β adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}. \quad (17)$$

Jika X_1, X_2, \dots, X_n merupakan peubah acak-peubah acak yang menyebar APP yang saling bebas dengan fungsi kepekatan peluang seperti pada Persamaan (8) dengan nilai-nilai sampel x_1, x_2, \dots, x_n , maka berdasarkan Ihtisham, *et al.* [12], nilai dugaan *maximum likelihood* dari α dan β dapat diperoleh dengan menyelesaikan kedua persamaan taklinear berikut secara bersamaan:

$$\frac{n(\alpha - 1 - \alpha \ln \alpha)}{\alpha(\alpha - 1) \ln \alpha} + \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i^{-\beta}}{\alpha} = 0, \quad (18)$$

dan

$$\frac{n}{\beta} + (\ln \alpha) \sum_{i=1}^n x_i^{-\beta} \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0. \quad (19)$$

2.6. Metode Newton-Raphson

Misalkan ingin diselesaikan sebuah sistem persamaan taklinear yang terdiri atas dua persamaan dan dua variabel berikut:

$$h_1(\alpha, \beta) = 0 \quad (20)$$

$$h_2(\alpha, \beta) = 0 \quad (21)$$

yakni mencari nilai α^* dan nilai β^* yang memenuhi $h_1(\alpha^*, \beta^*) = h_2(\alpha^*, \beta^*) = 0$. Berdasarkan Kisabo, et al. [20], algoritma untuk mendapatkan penyelesaian dari Persamaan (20) dan Persamaan (21) dengan metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut:

1. Tetapkan dua buah bilangan real positif yang sangat kecil sebagai batas toleransi kesalahan, yaitu ε_1 dan ε_2 .
2. Tetapkan $k = 0$ serta tetapkan nilai tebakan awal bagi α^* dan β^* , yaitu $\alpha^{(0)}$ dan $\beta^{(0)}$.
3. Selama $h_1(\alpha^*, \beta^*) > \varepsilon_1$ dan $h_2(\alpha^*, \beta^*) > \varepsilon_2$, lakukan hal-hal berikut:

(a) Hitung matriks Jacobi berikut:

$$J(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \alpha}(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) & \frac{\partial h_1}{\partial \beta}(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) & \frac{\partial h_2}{\partial \beta}(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

(b) Berdasarkan Persamaan (22), hitung invers dari matriks Jacobi tersebut, yaitu $J(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)})^{-1}$.

(c) Hitung

$$H(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) = \begin{pmatrix} h_1(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) \\ h_2(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

(d) Tetapkan $k = k + 1$.

(e) Dengan menggunakan hasil pada Langkah 3 (b) dan hasil dari Persamaan (23) pada Langkah 3 (c), hitung

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(k)} \\ \beta^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{(k-1)} \\ \beta^{(k-1)} \end{pmatrix} - J(\alpha^{(k-1)}, \beta^{(k-1)})^{-1} H(\alpha^{(k-1)}, \beta^{(k-1)}). \quad (24)$$

(f) Berdasarkan hasil dari Persamaan (24) pada Langkah 3 (e), tetapkan $\alpha^* = \alpha^{(k)}$ dan $\beta^* = \beta^{(k)}$.

Persamaan (18) dan Persamaan (19) dapat diselesaikan secara bersamaan dengan

menggunakan Metode Newton-Raphson tersebut sehingga diperoleh nilai dugaan *maximum likelihood* bagi parameter-parameter sebaran APP.

2.7. Uji Kolmogorov-Smirnov

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah peubah acak-peubah acak yang saling bebas dan ingin diuji hipotesis nol berikut:

$H_0 : X_1, X_2, \dots, X_n$ memiliki fungsi sebaran kumulatif yang sama, yaitu F yang merupakan suatu fungsi sebaran kumulatif kontinu yang diberikan.

Berdasarkan Ross [21], algoritma untuk menguji hipotesis nol tersebut dengan uji Kolmogorov-Smirnov (K-S) adalah sebagai berikut:

1. Tentukan fungsi sebaran kumulatif empiris berikut:

$$F_e(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x), \quad (25)$$

dengan I adalah sebuah fungsi indikator yang akan bernilai 1 jika $X_i \leq x$ benar, tetapi akan bernilai 0 jika $X_i \leq x$ salah.

2. Berdasarkan hasil dari Persamaan (25) pada Langkah 1, hitung statistik uji K-S berikut:

$$d = \max_{x \in \mathbb{R}} |F_e(x) - F(x)|, \quad (26)$$

3. Berdasarkan hasil dari Persamaan (26) pada Langkah 2, hitung *p-value* dengan rumus berikut:

$$p - \text{value} = \Pr(D > d) \quad (27)$$

di bawah asumsi bahwa H_0 benar (F adalah sebaran yang mendasarinya). Nilai ini dapat dihipotesis dengan menggunakan sebuah simulasi.

4. Putuskan tolak H_0 jika *p-value* yang dihasilkan dari Persamaan (27) rendah, misalnya kurang dari 0,1. Nilai ini biasanya disebut dengan taraf nyata.

2.8. Akaike Information Criteria

Berdasarkan Snipes dan Taylor [22], skor *Akaike Information Criteria* (AIC) didefinisikan dengan rumus berikut:

$$AIC = 2K - 2l(\hat{\theta}), \quad (28)$$

dengan K adalah banyaknya parameter yang diduga (derajat bebas) dan $l(\hat{\theta})$ adalah nilai logaritma natural dari fungsi *likelihood* saat dimasukkan nilai dugaan parameter-parameter yang telah diperoleh dengan metode *maximum likelihood*. Model dengan skor AIC terkecil adalah model yang terbaik.

2.9. Galat Relatif

Berdasarkan Emeter [23], galat relatif adalah rasio dari galat mutlak dengan nilai yang sebenarnya di mana galat mutlak adalah selisih antara nilai dugaan dengan nilai yang

sebenarnya. Galat relatif dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{galat relatif} = \frac{|\text{nilai dugaan} - \text{nilai yang sebenarnya}|}{\text{nilai yang sebenarnya}}. \quad (29)$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Rumus VaR dan TVaR Sebaran Alpha Power Pareto

Misalkan X adalah suatu peubah acak besarnya kerugian yang menyebar Alpha Power Pareto (APP) dengan fungsi sebaran kumulatif seperti pada Persamaan (7) dengan $\alpha \neq 1$. Dengan menggunakan Persamaan (7) dan Persamaan (9), diperoleh rumus VaR dari X pada tingkat $100p\%$ sebagai berikut:

$$\text{VaR}_p(X) = \left(1 - \frac{\ln(p(\alpha - 1) + 1)}{\ln \alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \text{untuk } 0 < p < 1. \quad (30)$$

Kemudian, dengan menggunakan Persamaan (10) dan Persamaan (30), diperoleh rumus TVaR dari X pada tingkat $100p\%$ sebagai berikut:

$$\text{TVaR}_p(X) = \frac{\int_p^1 \left(1 - \frac{\ln(u(\alpha - 1) + 1)}{\ln \alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}} du}{1 - p}, \quad \text{untuk } 0 < p < 1. \quad (31)$$

3.2. Algoritma Teknik Transformasi Invers untuk Membangkitkan Sebaran APP

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah peubah acak-peubah acak besarnya kerugian yang saling bebas dan semuanya menyebar APP dengan fungsi sebaran kumulatif seperti pada Persamaan (7) dengan $\alpha \neq 1$. Algoritma untuk membangkitkan n buah bilangan acak yang merupakan nilai-nilai sampel dari peubah acak-peubah acak X_1, X_2, \dots, X_n dengan teknik transformasi invers adalah sebagai berikut:

1. Bangkitkan n buah bilangan acak u_1, u_2, \dots, u_n dari sebaran seragam $(0, 1)$.
2. Hasilkan $x_1 = F_{APP}^{-1}(u_1), x_2 = F_{APP}^{-1}(u_2), \dots, x_n = F_{APP}^{-1}(u_n)$ dengan menggunakan rumus pada Persamaan (32) berikut:

$$F_{APP}^{-1}(u) = \left(\frac{\ln(\alpha / (u(\alpha - 1) + 1))}{\ln \alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}}. \quad (32)$$

3.3. Algoritma Simulasi Monte Carlo untuk Menduga VaR dan TVaR Sebaran APP

Misalkan X adalah suatu peubah acak besarnya kerugian yang memiliki sebaran APP dengan fungsi sebaran kumulatif seperti pada Persamaan (7) dengan $\alpha \neq 1$. Algoritma untuk menduga nilai $\text{VaR}_p(X)$ dan $\text{TVaR}_p(X)$ untuk $0 < p < 1$ dengan simulasi Monte Carlo adalah sebagai berikut:

1. Untuk iterasi ke- $i = 1, 2, \dots, m$, berdasarkan Klugman, et al. [2], lakukan hal-hal berikut:
 - (a) Bangkitkan n buah bilangan acak $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ dari sebaran APP.
 - (b) Urutkan n buah bilangan acak tersebut dari yang terkecil hingga yang terbesar. Apabila didefinisikan $x_{(j)}^{(i)}$ adalah nilai terkecil ke- j dari $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots,$

$x_n^{(i)}$, maka hasil pengurutannya adalah $x_{(1)}^{(i)}, x_{(2)}^{(i)}, \dots, x_{(n)}^{(i)}$.

- (c) Hitung $k = \lfloor pn \rfloor + 1$.
- (d) Hitung

$$\widehat{\text{VaR}}_p^{(i)}(X) = x_{(j)}^{(i)}, \tag{33}$$

dan

$$\widehat{\text{TVaR}}_p^{(i)}(X) = \frac{1}{n - k + 1} \sum_{j=k}^n x_{(j)}^{(i)}. \tag{34}$$

- 2. Berdasarkan Persamaan (11) dan dengan menggunakan hasil dari Persamaan (33) dan Persamaan (34) pada semua iterasi, nilai dugaan bagi $\text{VaR}_p(X)$ dan $\text{TVaR}_p(X)$ untuk $0 < p < 1$ berturut-turut dapat dihitung dengan rumus pada Persamaan (35) dan Persamaan (36) berikut:

$$\widehat{\text{VaR}}_p(X) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \widehat{\text{VaR}}_p^{(i)}(X), \tag{35}$$

dan

$$\widehat{\text{TVaR}}_p(X) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \widehat{\text{TVaR}}_p^{(i)}(X). \tag{36}$$

3.4. Penentuan Banyaknya Nilai Sampel yang Harus Dibangkitkan

Beberapa *datasets* dibangkitkan dari sebaran APP dengan menggunakan teknik transformasi invers dengan ukuran yang bervariasi, yaitu $n = 100$, $n = 1000$, dan $n = 10000$ serta dengan nilai parameter-parameter yang juga bervariasi, yaitu $(\alpha, \beta) = (0.5, 2)$, $(\alpha, \beta) = (0.5, 3)$, $(\alpha, \beta) = (1.5, 2)$, dan $(\alpha, \beta) = (1.5, 3)$. Dengan menggunakan kombinasi ukuran dan nilai parameter-parameter tersebut, diperoleh 12 *datasets* seperti yang tersaji pada Tabel 1. Nilai minimum dan nilai maksimum dari setiap *datasets* diberikan di bawah nama *dataset*.

Tabel 1. *Datasets* yang dibangkitkan

Dataset	(α, β)			
	(0.5, 2)	(0.5, 3)	(1.5, 2)	(1.5, 3)
100	Dataset 1a (min = 1.0002, maks = 3.9618)	Dataset 1b (min = 1.002, maks = 3.3195)	Dataset 1c (min = 1.0068, maks = 43.82)	Dataset 1d (min = 1.0036, maks = 4.1531)
	1000	Dataset 2a (min = 1.0006, maks = 21.109)	Dataset 2b (min = 1, maks = 13.44)	Dataset 2c (min = 1, maks = 24.12)
10000		Dataset 3a (min = 1, maks = 38.568)	Dataset 3b (min = 1, maks = 26.024)	Dataset 3c (min = 1, maks = 147.67)

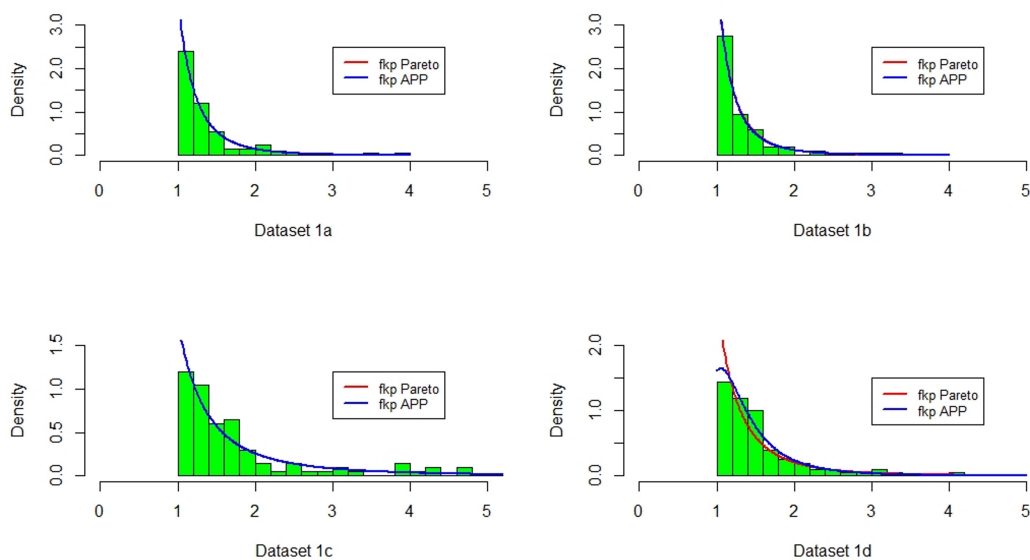
Semua *datasets* yang dibangkitkan pada Tabel 1 dicoba untuk dimodelkan dengan sebaran Pareto dengan fungsi kepekatan peluang seperti pada Persamaan (4) dan sebaran APP dengan fungsi kepekatan peluang seperti pada Persamaan (8). Hasil pendugaan parameter sebaran Pareto dan sebaran APP dengan menggunakan metode *maximum likelihood* untuk semua *datasets* disajikan pada Tabel 2. Untuk pendugaan

parameter sebaran Pareto, digunakan Persamaan (17), sedangkan untuk pendugaan parameter-parameter sebaran APP, digunakan Persamaan (18) dan Persamaan (19).

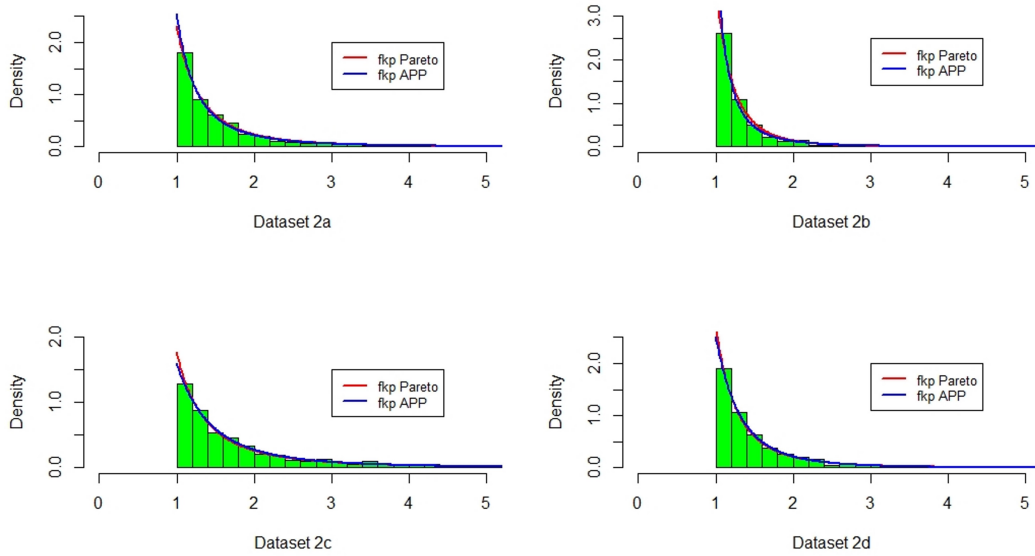
Tabel 2. Hasil pendugaan parameter sebaran Pareto dan sebaran APP

Dataset	n	(α, β)	Dugaan parameter sebaran Pareto	Dugaan parameter sebaran APP	
			$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
Dataset 1a	100	(0.5, 2)	3.6291	1.0346	3.6602
Dataset 1b	100	(0.5, 3)	4.0626	0.7694	3.7994
Dataset 1c	100	(1.5, 2)	1.7807	0.9604	1.7623
Dataset 1d	100	(1.5, 3)	2.7191	4.6248	3.8068
Dataset 2a	1000	(0.5, 2)	2.3050	0.6500	2.0634
Dataset 2b	1000	(0.5, 3)	3.7461	0.2513	2.5615
Dataset 2c	1000	(1.5, 2)	1.7672	1.4360	1.9287
Dataset 2d	1000	(1.5, 3)	2.7140	1.3411	2.9168
Dataset 3a	10000	(0.5, 2)	2.4085	0.5132	2.0252
Dataset 3b	10000	(0.5, 3)	3.6554	0.4892	3.0313
Dataset 3c	10000	(1.5, 2)	1.8071	1.5499	2.0096
Dataset 3d	10000	(1.5, 3)	2.7095	1.6873	3.0738

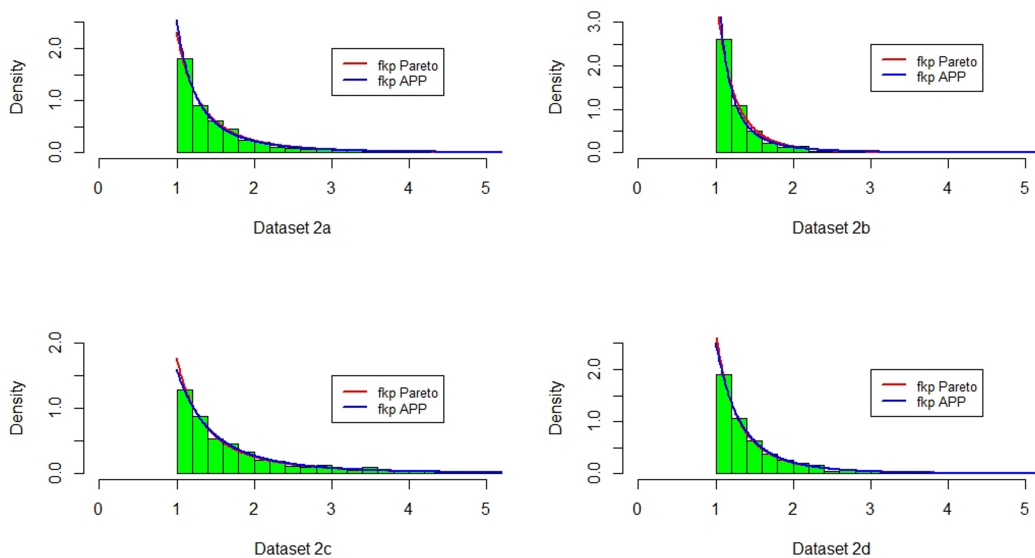
Dari Tabel 2, dapat dilihat bahwa untuk nilai α yang sama, nilai dugaan parameter sebaran Pareto membesar ketika nilai β membesar. Sementara untuk nilai β yang sama, nilai dugaan parameter sebaran Pareto justru mengecil ketika nilai α membesar. Kemudian, tidak dapat disimpulkan bahwa semakin besar n , semakin dekat nilai dugaan parameter sebaran Pareto ke nilai β . Untuk sebaran APP, dapat diamati bahwa secara umum, semakin banyak data yang dibangkitkan, semakin dekat pula nilai dugaan parameter-parameternya ke nilai parameter-parameter yang digunakan untuk membangkitkan data.



Gambar 1. Histogram *datasets* 1a, 1b, 1c, dan 1d beserta grafik fungsi kepekatan peluang (fkp) sebaran Pareto dan sebaran APP



Gambar 2. Histogram *datasets* 2a, 2b, 2c, dan 2d beserta grafik fungsi kepekatan peluang (fkp) sebaran Pareto dan sebaran APP



Gambar 3. Histogram *datasets* 3a, 3b, 3c, dan 3d beserta grafik fungsi kepekatan peluang (fkp) sebaran Pareto dan sebaran APP

Gambar 1, Gambar 2, dan Gambar 3 menampilkan histogram dari semua *datasets* beserta grafik fungsi kepekatan peluang (fkp) sebaran Pareto dan sebaran APP yang nilai parameter-parameternya diambil dari Tabel 2. Untuk semua *datasets* kecuali *dataset* 1d, sekilas terlihat bahwa grafik fkp sebaran Pareto cukup dekat dengan grafik fkp sebaran APP, walaupun secara umum semakin besar ukuran datanya, semakin nampak perbedaan antara kedua grafik fkp tersebut. Apabila data dan model hanya

dibandingkan secara visual, sepintas nampak bahwa kedua sebaran dapat digunakan untuk memodelkan semua *datasets*. Akan tetapi, hal ini perlu diuji lebih lanjut dengan uji formal. Pada penelitian ini, digunakan uji K-S untuk menguji apakah kedua sebaran tersebut memang dapat memodelkan semua *datasets*.

Untuk setiap *datasets*, dilakukan dua kali uji K-S. Pada uji K-S yang pertama, hipotesis nol yang diuji adalah sebagai berikut:

H_0 : *Dataset* mengikuti sebaran Pareto.

Sementara pada uji K-S yang kedua, hipotesis nol yang diuji adalah sebagai berikut:

H_0 : *Dataset* mengikuti sebaran APP.

Tabel 3. Hasil uji K-S terhadap semua *datasets*

Dataset	Model			
	Sebaran Pareto		Sebaran APP	
	<i>p-value</i>	Keputusan	<i>p-value</i>	Keputusan
Dataset 1a	0.9120	Terima H_0	0.9032	Terima H_0
Dataset 1b	0.5994	Terima H_0	0.7810	Terima H_0
Dataset 1c	0.7197	Terima H_0	0.7298	Terima H_0
Dataset 1d	0.0958	Tolak H_0	0.9674	Terima H_0
Dataset 2a	0.3701	Terima H_0	0.7786	Terima H_0
Dataset 2b	0.0244	Tolak H_0	0.7939	Terima H_0
Dataset 2c	0.4231	Terima H_0	0.9441	Terima H_0
Dataset 2d	0.4851	Terima H_0	0.9812	Terima H_0
Dataset 3a	6.291×10^{-9}	Tolak H_0	0.8689	Terima H_0
Dataset 3b	2.821×10^{-10}	Tolak H_0	0.5846	Terima H_0
Dataset 3c	5.404×10^{-7}	Tolak H_0	0.3986	Terima H_0
Dataset 3d	9.652×10^{-8}	Tolak H_0	0.5319	Terima H_0

Tabel 4. Skor AIC kedua sebaran bagi *datasets* tertentu

Dataset	Skor AIC		Model terbaik
	Sebaran Pareto	Sebaran APP	
Dataset 1a	-0.6882	1.309	Sebaran Pareto
Dataset 1b	-29.14	-27.27	Sebaran Pareto
Dataset 1c	198.9	200.9	Sebaran Pareto
Dataset 2a	1199	1198	Sebaran APP
Dataset 2c	1995	1994	Sebaran APP
Dataset 2d	742.1	742.2	Sebaran Pareto

Taraf nyata yang digunakan untuk semua uji K-S yang dilakukan adalah sama, yakni sebesar 0.1, sehingga pada semua uji K-S, hipotesis nol ditolak apabila *p-value* yang dihasilkan lebih kecil dari 0.1. Tabel 3 menyajikan hasil semua uji K-S terhadap semua *datasets*. Untuk semua *datasets* yang berukuran 100 atau 1000, kecuali *dataset* 1d dan *dataset* 2b, baik sebaran Pareto maupun sebaran APP cocok untuk memodelkan *dataset* walaupun sebagian besar *p-value* pada uji K-S untuk sebaran APP lebih besar daripada *p-value* pada uji K-S untuk sebaran Pareto. Sementara itu, untuk semua *datasets* yang berukuran 10000, hanya sebaran APP yang cocok dalam memodelkan *dataset*. Tidak ada *dataset* yang berukuran 10000 yang cocok dimodelkan dengan sebaran Pareto. Untuk *datasets* yang dapat dimodelkan baik dengan sebaran Pareto maupun dengan sebaran APP, digunakan skor AIC yang rumusnya disajikan pada Persamaan (28) untuk

memilih model yang terbaik.

Tabel 4 menyajikan skor AIC kedua sebaran bagi *datasets* yang cocok untuk dimodelkan oleh kedua sebaran tersebut. Berdasarkan Tabel 4, untuk sebagian besar *datasets*, sebaran Pareto merupakan model yang terbaik walaupun *datasets* tersebut dibangkitkan dari sebaran APP.

Dari hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa apabila ukuran data yang dibangkitkan hanya 100 atau 1000, maka tidak diyakini bahwa data memiliki sebaran APP. Jadi, agar diyakini bahwa data yang dibangkitkan memiliki sebaran APP, ukuran datanya harus 10000. Akibatnya, saat menghitung nilai dugaan VaR dan TVaR dari suatu peubah acak besarnya kerugian yang memiliki sebaran APP dengan simulasi Monte Carlo, digunakan ukuran sampel sebesar 10000.

3.5. Nilai VaR dan TVaR Sebaran APP Secara Analitik dan Menggunakan Simulasi Monte Carlo

Misalkan X adalah suatu peubah acak besarnya kerugian yang memiliki sebaran APP dengan nilai parameter-parameter $\alpha = 145.04$ dan $\beta = 1.2773$. Nilai parameter-parameter tersebut diperoleh dari hasil pendugaan dengan metode *maximum likelihood* terhadap data 40 besarnya kerugian yang diakibatkan oleh bencana yang berhubungan dengan angin pada tahun 1977 yang diambil dari Hogg dan Klugman [24]. Ihtisham, *et al.* [12] telah menunjukkan bahwa sebaran APP adalah model yang terbaik untuk memodelkan data tersebut ketika dibandingkan dengan sebaran Pareto, *generalized* Pareto, Kumaraswamy Pareto, *exponentiated generalized* Pareto, dan *inverse* Pareto.

Untuk menghitung nilai VaR dan TVaR dari peubah acak X baik secara analitik dengan menggunakan Persamaan-Persamaan (30) dan (31) maupun dengan menggunakan simulasi Monte Carlo, digunakan enam nilai tingkat keamanan, yakni $p = 0.900$, $p = 0.925$, $p = 0.950$, $p = 0.975$, $p = 0.990$, dan $p = 0.999$. Pada simulasi Monte Carlo, banyaknya iterasi yang digunakan adalah sebesar $m = 1000$ dan ukuran sampel yang dibangkitkan pada setiap iterasinya adalah sebesar $n = 10000$. Tabel 5 dan Tabel 6 berturut-turut menyajikan hasil penghitungan nilai VaR dan TVaR dari peubah acak X beserta galat relatifnya. Galat-galat relatif tersebut dihitung dengan menggunakan rumus pada Persamaan (29).

Tabel 5. Nilai VaR dari peubah acak besarnya kerugian X beserta galat relatif

p	Nilai dugaan $VaR_p(X)$ dengan simulasi Monte Carlo	Nilai $VaR_p(X)$ sebenarnya	Galat relatif
0.900	20.5797	20.5742	0.03%
0.925	26.0457	26.0431	0.01%
0.950	36.1830	36.1419	0.11%
0.975	63.0831	62.8132	0.43%
0.990	130.5021	129.4724	0.80%
0.999	844.6064	788.1822	7.16%

Berdasarkan Tabel 5, untuk tingkat keamanan mulai dari 0.900 hingga 0.990, nilai dugaan VaR dari peubah acak X yang diperoleh dengan metode simulasi Monte Carlo sangat mendekati nilai yang sebenarnya, sedangkan untuk tingkat keamaan 0.999, nilainya agak sedikit berbeda. Secara umum, semakin besar tingkat keamanan yang digunakan, semakin besar pula galat relatifnya.

Tabel 6. Nilai TVaR dari peubah acak besarnya kerugian X beserta galat relatif

p	Nilai dugaan TVaR $_p(X)$ dengan simulasi Monte Carlo	Nilai TVaR $_p(X)$ sebenarnya	Galat relatif
0.900	100.3051	98.0113	2.34%
0.925	126.0505	122.9894	2.49%
0.950	173.8329	169.2394	2.71%
0.975	300.8357	291.7067	3.13%
0.990	620.7146	598.3523	3.74%
0.999	3828.0450	3632.0459	5.40%

Berdasarkan Tabel 6, untuk tingkat keamanan mulai dari 0.900 hingga 0.990, sama seperti halnya nilai dugaan VaR, nilai dugaan TVaR dari peubah acak X yang diperoleh dengan metode simulasi Monte Carlo juga mendekati nilai yang sebenarnya, sedangkan untuk tingkat keamanan 0.999, nilainya agak sedikit berbeda. Untuk nilai TVaR pun, semakin besar tingkat keamanan yang digunakan, semakin besar pula galat relatifnya. Walaupun begitu, semua galat relatifnya masih dalam batasan yang wajar.

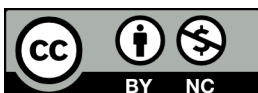
4. Kesimpulan

Rumus *Value at Risk* (VaR) dan *Tail Value at Risk* (TVaR) dari suatu peubah acak besarnya kerugian yang memiliki sebaran *Alpha Power Pareto* (APP) berhasil diperoleh sehingga nilai VaR dan TVaR yang sebenarnya dapat dihitung. Nilai VaR dan TVaR dari peubah acak tersebut juga dapat diduga dengan menggunakan simulasi Monte Carlo. Nilai-nilai sampel yang dibangkitkan pada setiap iterasi pada simulasi Monte Carlo harus cukup banyak agar diyakini memang berasal dari sebaran APP. Untuk suatu contoh kasus peubah acak besarnya kerugian, nilai dugaan VaR dan TVaR yang diperoleh dengan menggunakan simulasi Monte Carlo mendekati nilai VaR dan TVaR yang sebenarnya terutama pada tingkat keamanan-tingkat keamanan yang lebih rendah. Secara umum, galat relatifnya membesar seiring dengan membesarnya tingkat keamanan yang digunakan.

Referensi

- [1] P. Jorion, *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3rd ed. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc., 2007.
- [2] S. A. Klugman, H. H. Panjer, and G. E. Willmot, *Loss Models: From Data to Decisions*, 5th ed. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., 2019.
- [3] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath, "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, vol. 9, no. 3, pp. 203–228, jul 1999, doi: 10.1111/1467-9965.00068.
- [4] Y. He, L. Peng, D. Zhang, and Z. Zhao, "Risk Analysis via Generalized Pareto Distributions," *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 40, no. 2, pp. 852–867, apr 2022, doi: 10.1080/07350015.2021.1874390.
- [5] O. L. Gebizlioglu, B. Şenoğlu, and Y. M. Kantar, "Comparison of certain value-at-risk estimation methods for the two-parameter Weibull loss distribution," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 235, no. 11, pp. 3304–3314, apr 2011, doi: 10.1016/j.cam.2011.01.044.
- [6] R. Rockafellar and S. Uryasev, "Conditional value-at-risk for general loss distributions," *Journal of Banking & Finance*, vol. 26, no. 7, pp. 1443–1471, jul 2002, doi: 10.1016/S0378-4266(02)00271-6.
- [7] S. Vanduffel, X. Chen, J. Dhaene, M. Goovaerts, L. Henrard, and R. Kaas, "Optimal approximations for risk measures of sums of lognormals based on conditional expectations,"

- Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 221, no. 1, pp. 202–218, nov 2008, doi: 10.1016/j.cam.2007.10.050.
- [8] D. C. Nath and J. Das, “Modeling of claim severity through the mixture of exponential distribution and computation of its probability of ultimate ruin,” *Thailand Statistician*, vol. 15, no. 2, pp. 128–148, 2017.
- [9] A. Moumeesri and T. Pongsart, “Bonus-Malus Premiums Based on Claim Frequency and the Size of Claims,” *Risks*, vol. 10, no. 9, pp. 181–202, sep 2022, doi: 10.3390/risks10090181.
- [10] N. E. Frangos and S. D. Vrontos, “Design of Optimal Bonus-Malus Systems With a Frequency and a Severity Component On an Individual Basis in Automobile Insurance,” *ASTIN Bulletin*, vol. 31, no. 1, pp. 1–22, may 2001, doi: 10.2143/AST.31.1.991.
- [11] Y. Wang and I. Hobæk Haff, “Focussed selection of the claim severity distribution,” *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2019, no. 2, pp. 129–142, feb 2019, doi: 10.1080/03461238.2018.1519847.
- [12] S. Ihtisham, A. Khalil, S. Manzoor, S. A. Khan, and A. Ali, “Alpha-Power Pareto distribution: Its properties and applications,” *PLOS ONE*, vol. 14, no. 6, p. e0218027, jun 2019, doi: 10.1371/journal.pone.0218027.
- [13] A. Mahdavi and D. Kundu, “A new method for generating distributions with an application to exponential distribution,” *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 46, no. 13, pp. 6543–6557, jul 2017, doi: 10.1080/03610926.2015.1130839.
- [14] M. Nassar, A. Alzaatreh, M. Mead, and O. Abo-Kasem, “Alpha power Weibull distribution: Properties and applications,” *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 46, no. 20, pp. 10 236–10 252, oct 2017, doi: 10.1080/03610926.2016.1231816.
- [15] S. W. Philbrick, “A practical guide to the single parameter Pareto distribution,” in *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. LXXII, 1985, pp. 44–84.
- [16] A. M. Law, *Simulation Modeling and Analysis*, 5th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2015.
- [17] D. B. Thomas and W. Luk, “Estimation of sample mean and variance for Monte-Carlo simulations,” in *2008 International Conference on Field-Programmable Technology*. IEEE, dec 2008, pp. 89–96, doi: 10.1109/FPT.2008.4762370.
- [18] K. M. Ramachandran and C. P. Tsokos, *Mathematical Statistics with Applications in R*, 2nd ed. London: Elsevier, 2015, doi: 10.1016/C2012-0-07341-3.
- [19] M. Bee, R. Benedetti, and G. Espa, “On maximum likelihood estimation of a Pareto mixture,” *Computational Statistics*, vol. 28, no. 1, pp. 161–178, feb 2013, doi: 10.1007/s00180-011-0291-z.
- [20] A. B. Kisabo, N. C. Uchenna, and F. A. Adebimpe, “Newton’s Method for Solving Non-Linear System of Algebraic Equations (NLSAEs) with MATLAB/Simulink® and MAPLE®,” vol. 2, no. 4, pp. 117–131, 2017, doi: 10.11648/j.ajmcm.20170204.14.
- [21] Sheldon Ross, *Simulation*, 6th ed. Cambridge, Massachusetts: Elsevier, 2022.
- [22] M. Snipes and D. C. Taylor, “Model selection and Akaike Information Criteria: An example from wine ratings and prices,” *Wine Economics and Policy*, vol. 3, no. 1, pp. 3–9, jun 2014, doi: 10.1016/j.wep.2014.03.001.
- [23] M. E. Emeter, *Numerical Methods in Environmental Data Analysis*. Amsterdam: Elsevier, 2022, doi: 10.1016/C2018-0-04933-6.
- [24] R. V. Hogg and S. A. Klugman, “On the estimation of long tailed skewed distributions with actuarial applications,” *Journal of Econometrics*, vol. 23, no. 1, pp. 91–102, sep 1983, doi: 10.1016/0304-4076(83)90077-5.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Editorial of JJoM: Department of Mathematics, Universitas Negeri Gorontalo, Jln. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Moutong, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Provinsi Gorontalo 96554, Indonesia.