



Riesgo de Mercado en Portafolios Bancarios de Opciones de Divisas

Market Risk in Banking Portfolios of Currency Options

Carlos Alexander Grajales Correa

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Minas, Departamento de Ingeniería de la Organización
Medellín, Colombia
2022

Riesgo de Mercado en Portafolios Bancarios de Opciones de Divisas

Carlos Alexander Grajales Correa

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ingeniería

Director:
Ph.D. Santiago Medina Hurtado

Línea de Investigación:
Métodos y Modelos de Optimización
Grupo de Investigación:
Ingeniería Financiera y Gestión Empresarial (GIFIG)

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Minas, Departamento de Ingeniería de la Organización
Medellín, Colombia
2022

A mi Madre Tere,

a Apolo, Orión, y Luna,

Agradecimientos

Agradezco a mi alma máter Universidad de Antioquia por abrirme sus puertas y por su patrocinio para adelantar mis estudios. Agradezco a la Universidad Nacional de Colombia por permitirme hacer parte de su comunidad académica.

Un agradecimiento especial a mi asesor Profesor Santiago Medina Hurtado de la Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas. Me sentí más que honrado al recibir su guía y trabajar a su lado.

También agradezco a los evaluadores de la tesis: Profesores Javier F. Peña de la Universidad Carnegie Mellon - USA, Francisco Venegas Martínez del Instituto Politécnico Nacional - México, y César Augusto Gómez de la Universidad Nacional de Colombia - Colombia. Sus guías y observaciones me permitieron potenciar el alcance de este trabajo, además de continuar edificando en pro de una mejor sociedad.

Resumen

La regulación de Basilea FRTB para la gestión del riesgo mercado en la industria bancaria entra en vigencia en 2023. Esta plantea nuevos desafíos en materia de implementación, cuantificación de riesgos, e impactos en capital de reserva. Este trabajo propone una metodología para cuantificar las métricas de riesgo *expected shortfall*, *ES*, y valor en riesgo, *VaR*, de un portafolio de opciones sobre divisas en el marco de los modelos internos de FRTB, eligiendo como estrategia de valoración del portafolio un modelo tradicional, un modelo con tasa estocástica, o un modelo híbrido con tasa y volatilidad estocástica. La metodología define adaptaciones de las métricas de riesgo, la generación de escenarios de estrés, y precisa el mecanismo matemático para integrar la valoración del portafolio con dichas métricas. La metodología se implementa a través de tres aplicaciones para un portafolio de opciones sobre GBP/USD, se investigan impactos sobre capital, y se evalúa el desempeño de la métrica *VaR* por pruebas back-testing. En cada desarrollo, se evidencia que la metodología planteada es apropiada, aporta a la literatura científica, y puede escalarse como herramienta tecnológica.

Palabras clave: Regulación de Basilea FRTB, Capital de riesgo, Riesgo Mercado, Banca, Divisa, Valor en riesgo condicional, Opciones sobre divisas, Modelos híbridos, Tasa de interés estocástica, Volatilidad estocástica

Abstract

The Basel FRTB regulation for market risk management in the banking industry comes into effect in 2023. It poses new challenges in terms of implementation, risk quantification, and impacts on risk capital. This research proposes a methodology to quantify the risk metrics expected shortfall, *ES*, and value at risk, *VaR*, of a portfolio of foreign exchange options within the framework of FRTB's internal models, choosing as portfolio valuation strategy a traditional model, a stochastic interest rate model, or a stochastic interest rate and volatility model. The methodology defines adaptations of the risk metrics, the generation of stress scenarios, and specifies the mathematical mechanism to integrate the portfolio valuation with the risk measures. The methodology is implemented through three applications for a portfolio of options on GBP/USD, impacts on capital are investigated, and the performance of the *VaR* metric is evaluated via back-testing procedures. In each development, it is evident that the proposed methodology is appropriate, contributes to the scientific literature, and can be scaled as a technological tool.

Palabras clave: FRTB regulation, Risk capital, Market risk, Banking, Foreign exchange, Expected shortfall, FX options, Hybrid models, Stochastic interest rate, Stochastic volatility

Lista de Figuras

1-1. Probabilidades de transición en la prueba de back-testing CCI	20
2-1. <i>VaR</i> y <i>ES</i> bajo FRTB en opciones call sobre GBP/USD	42
2-2. Visualización dinámica de <i>VaR</i> y <i>ES</i> bajo FRTB. Nivel de confianza 0.975 .	43
4-1. Metodología - riesgo mercado <i>ES</i> en opciones sobre divisas bajo FRTB . . .	85
4-2. Calibración superficie de volatilidad implícita de mercado - modelo FX-HHW.	89
4-3. <i>VaR</i> y <i>ES</i> bajo FRTB en opciones call sobre GBP/USD - modelo FX-HHW	92
4-4. Visualización dinámica de <i>VaR</i> y <i>ES</i> bajo FRTB - modelo FX-HHW. Nivel de confianza 0.975	94

Lista de Tablas

2-1. Portafolio de opciones en la regulación bancaria de Basilea FRTB	35
2-2. Capital por riesgo delta (CAD) - Basilea FRTB, SA - SbM	36
2-3. Capital por riesgo vega (CAD) - Basilea FRTB, SA - SbM	36
2-4. Capital por riesgo de curvatura (CAD) - Basilea FRTB, SA - SbM	37
2-5. Datos de entrada métricas VaR y ES bajo FRTB	39
2-6. VaR y ES a N días bajo FRTB y VaR tradicional. Opciones call sobre GBP/USD	41
2-7. Back-testing VaR - FRTB vs VaR tradicional. Opción call sobre GBP/USD	45
3-1. Datos de entrada métricas VaR y ES bajo FRTB y modelo híbrido FX-BSHW1 .	60
3-2. VaR y ES a N días bajo FRTB, inclusión del modelo híbrido FX-BSHW1. Opciones call sobre GBP/USD	62
3-3. Efectos de incluir el modelo híbrido FX-BSHW1 en VaR y ES bajo FRTB .	64
3-4. Back-testing VaR - FRTB, inclusión del modelo híbrido FX-BSHW1. Opciones call sobre GBP/USD	66
4-1. Calibración modelo híbrido Heston Hull White para divisas, FX-HHW	87
4-2. Datos de entrada métricas VaR y ES bajo FRTB y modelo híbrido FX-HHW . .	88
4-3. VaR y ES a N días bajo FRTB, modelo híbrido FX-HHW. Opciones call GBP/USD @ ATM, T	91
4-4. Back-testing VaR - FRTB, inclusión del modelo híbrido FX-HHW. Opciones call sobre GBP/USD	93

Introducción

Importancia del estudio en la industria financiera. La regulación FRTB en BIS [2019], emitida por el Comité de Basilea para Supervisión Bancaria, es el referente global para la gestión del riesgo mercado en la industria bancaria, y su implementación entra en vigencia en enero de 2023. La regulación incorpora tres cambios sustanciales que impactarán el capital de riesgo o niveles de reserva de las instituciones: primero, la gestión de libros de negociación y bancarios, segundo el cálculo de capital bajo el modelo estándar, y finalmente, el cálculo de capital bajo los modelos internos. El impacto causado llevará a las instituciones a reestructurar sus portafolios y redefinir sus niveles de solvencia, gestionar diversas fuentes de riesgo y abrirse a nuevas oportunidades de negocio, todo en aras de favorecer su propia sostenibilidad.

De manera más general, el nuevo marco regulatorio trae procesos complejos y modernos, con visión de integrar y automatizar la gestión del riesgo financiero y responder a necesidades y deficiencias encontradas en pasadas crisis financieras. La implementación de estos procesos implica ampliar la capacidad tecnológica, involucrar recurso humano calificado, y actualizar programas en riesgo financiero en ambos ambientes, institucional y académico.

En particular, el capital de riesgo desde el modelo estándar está afectado por exposiciones de riesgo delta, vega y curvatura, que conjuntamente, definen el denominado método de sensibilidades, y cuya implementación será de obligatorio cumplimiento. Por su parte, desde los métodos internos, uno de los componentes que incide al capital de riesgo es el valor en riesgo condicional o también conocido como *expected shortfall*, *ES*.

Así, la medida valor en riesgo, *VaR*, ampliamente difundida en anteriores regulaciones, es sustituida por *ES* con fines de estimar reservas de capital, aunque el cálculo de la métrica *VaR* sigue presente en la realización de pruebas de tensión o back-testing requeridas en la nueva regulación.

Objeto de investigación y antecedentes. Bajo este último enfoque, el objeto de investigación en este trabajo es la valoración del riesgo mercado, *VaR* y *ES*, en portafolios de opciones financieras sobre divisas en el marco de modelos internos de FRTB. La relevancia en el mercado de este tipo de portafolios es visible. En CME Group [2022], los contratos abiertos en el mercado de futuros y opciones sobre divisas viene creciendo en los últimos años, acercándose a los 300 billones de dólares al final del 2021. Además, los mercados en bolsa y sobre mostrador ofrecen opciones sobre divisas como mecanismos de cobertura e incluso como componentes embebidos en productos comerciales como hipotecas, seguros de

vida, y planes de pensión (ver por ejemplo Hull [2018b] y Wystup [2017]). De otro lado, la administración de riesgos para portafolios de derivados es una realidad que se refleja en la regulación FRTB (ver BIS [2019], BCBS [2019], y BCBS [2020]) y en estudios de la literatura científica como en Bliss et al. [2018], Almudhaf [2018], Orgeldinger [2018], y Laurent et al. [2016].

Continuando con el enfoque anterior, la métrica de riesgo ES es propuesta en Artzner et al. [1999] como una medida coherente de riesgo, y su fundamentación matemática y financiera se sigue a partir de los trabajos en Rockafellar and Uryasev [2000, 2002, 2013]. Adicionalmente, algunos estudios comparativos de las métricas VaR y ES aparecen en Embrechts et al. [2020, 2018], diferentes métodos de cálculo del riesgo ES son documentados en Patton et al. [2019], y un conjunto de pruebas back-testing para evaluar el desempeño de la métrica VaR se reporta en Nieto and Ruiz [2016].

En este sentido, Lehar et al. [2002] establece que la medición del riesgo mercado en portafolios de derivados depende notablemente de la correcta valoración de sus instrumentos, y a partir de la investigación de Cheng et al. [2018], en la industria bancaria y de seguros, la valoración de derivados, especialmente de largo plazo, usualmente se realiza bajo modelos con tasa y/o volatilidad estocástica, y desde este tipo de modelos encuentran evidencia de un mejor desempeño en valoraciones de derivados.

El estudio en Cheng et al. [2018] también revela que el trabajo en Bakshi et al. [2000] generó una línea investigativa en referentes de valoración de precios conocidos como *modelos híbridos*, los cuales tienen múltiples factores, tienen un desempeño adecuado en valoración de derivados, y su aplicación está orientada en seguros, acciones, commodities y monedas. Por tanto, de acuerdo a las investigaciones en Bakshi et al. [2000], Lehar et al. [2002], y Cheng et al. [2018] se sugiere la pertinencia y beneficio de emplear un modelo híbrido de tasa y/o volatilidad estocástica de valoración de opciones en la cuantificación del riesgo mercado para un portafolio de opciones y bajo los lineamientos de la nueva regulación.

Entre los modelos híbridos propuestos en la literatura, Brigo and Mercurio [2007] presentan un modelo híbrido llamado *Black Scholes Hull White (BSHW)*, donde el precio es conducido según Black and Scholes [1973] (BS) y la tasa corta según Hull and White [1990] (HW). En adición, el estudio en Grzelak and Oosterlee [2012] presenta un modelo híbrido denominado *Heston Hull White para divisas (FX-HHW)*, en el cual la dinámica de la tasa de cambio y su volatilidad son conducidas por una especificación según Heston [1993], y las tasas doméstica y foránea por una especificación de tipo HW. En los anteriores modelos, los componentes HW y Heston son referentes en la industria financiera. El primero de ellos permite modelar tasas negativas presentes en períodos de crisis y adaptarse a estructuras temporales de mercado, y el segundo, permite modelar la sonrisa de volatilidad presente en los mercados de opciones financieras (ver Wang and Xu [2018], Cheng et al. [2018], Hull and White [2016], Grzelak and Oosterlee [2011]; Grzelak et al. [2012]).

Problema de investigación. En coherencia a lo anterior, para portafolios bancarios de opciones sobre divisas se hace necesario cuantificar las métricas de riesgo VaR y ES bajo la nueva regulación de Basilea para la industria bancaria FRTB, medir sus impactos, y relacionar dichas medidas con una valoración apropiada del portafolio, donde la tasa y/o volatilidad sean tratadas como variables de riesgo. Consecuentemente, la pregunta de investigación que se formula es: ¿cómo cuantificar el riesgo mercado de un portafolio de opciones sobre divisas en el marco de modelos internos de la regulación de Basilea, cuando tales derivados son valorados bajo un modelo de tasa y/o volatilidad estocástica?

Hipótesis. Es posible diseñar una metodología para valorar el riesgo mercado de un portafolio bancario de opciones de divisas, a través del uso de medidas VaR y ES , en coherencia con la regulación de Basilea para la industria bancaria. La metodología estimaría apropiadamente el capital de riesgo, cuando el portafolio es valorado vía modelos de tasa y/o volatilidad estocástica.

Objetivo General. Definir una metodología para valorar el riesgo mercado de un portafolio de opciones de divisas, a través del uso de medidas VaR y ES , en coherencia con la regulación de Basilea, y de tal manera que se estime apropiadamente el capital de riesgo del portafolio.

Objetivos específicos.

- I Identificar y comparar propiedades fundamentales de modelos híbridos en la literatura, en los cuales la volatilidad y/o tasa de interés son modelados de manera estocástica.
- II Analizar medidas de riesgo VaR y ES a la luz de la literatura y de acuerdo a las disposiciones de la regulación de Basilea, identificando el caso del tratamiento de portafolios que involucran divisas.
- III Analizar en el contexto bancario operaciones que involucran opciones de divisas y la manera usual como ellos miden su riesgo mercado.
- IV Establecer en la literatura referentes en primas de riesgo que permitan obtener medidas de probabilidad físicas, neutrales y medidas forward, con el fin de estimar métricas de riesgo y valorar portafolios de opciones.
- V Definir e implementar un modelo para valorar el riesgo mercado de un portafolio de opciones de divisas, donde las opciones sean valoradas bajo un modelo de tasa y/o volatilidad estocástica, y a través del uso de medidas VaR y ES .
- VI Contribuir a la eficiencia del modelo implementado para valorar el riesgo mercado, la cual puede conseguirse dependiendo del modelo usando la tecnología de cambio de medida de probabilidad, técnicas de inversión de la transformada de Fourier y/o cómputo paralelo.

VII Implementar pruebas back-testing para medir el desempeño de medidas de riesgo VaR y evaluar impactos de las métricas de riesgo calculadas.

Metodología. Consecuentemente, se diseña una metodología propia para responder la pregunta anterior, de modo que pueda proyectarse apropiadamente el capital de riesgo del portafolio. La metodología incluye los siguientes elementos. Primero, la generación de escenarios de estrés por crisis financieras para las variables precio y curvas cero de tasas de interés. Segundo, adaptaciones de las métricas VaR y ES a los requerimientos de FRTB vía simulación histórica. Tercero, elección del modelo de valoración del portafolio según sea Black Scholes (BS), el modelo híbrido Black Scholes Hull White (BSHW), o el modelo híbrido Heston Hull White para divisas (FX-HHW). Cuarto, calibración empírica o a mercado del respectivo modelo, de acuerdo a cambios apropiados de medidas de probabilidad, según sean físicas, neutrales o medidas forward. Quinto, directrices para evaluar el impacto a capital de riesgo a partir de la información de las métricas de riesgo estimadas. Finalmente como sexto punto, evaluación del desempeño de las métricas de riesgo a través de diferentes pruebas back-testing, tales como test de luces, de frecuencia, de independencia, y mixtos. La implementación de los anteriores elementos en un portafolio concreto puede indicarnos si la metodología definida es precedente.

Alcances y limitaciones. Dada la complejidad de los modelos de valoración de opciones y de la misma regulación FRTB en sus modelos internos, la implementación se realiza en primera instancia en un portafolio compuesto por una opción call con diferentes vencimientos. Por su parte, la elección de los modelos de valoración mencionados, también se hace en virtud de que ellos posibilitan la realización de cálculos y la calibración de sus parámetros de manera eficiente, empleando formulas cerradas, o realizando cambios de medida de probabilidad, o adoptando aproximaciones numéricas a partir de la transformada inversa de Fourier. Para la industria bancaria es de gran interés evaluar impactos en capital de riesgo para portafolios de mayor complejidad e incluir en el cálculo otros componentes nuevos que introduce la regulación.

Contribuciones. Primero, investigar y cuantificar el riesgo mercado de un portafolio de opciones de divisas cuando el portafolio se estima bajo un modelo de tasa y/o volatilidad estocástica. La valoración incluye medidas VaR y ES , es coherente con la regulación de Basilea, y su implementación es eficiente. Segundo, evaluar el desempeño por pruebas back-testing de la medida de riesgo VaR y determinar el impacto en capital de riesgo del portafolio a la luz de la literatura académica y la regulación de Basilea.

Repercusiones del estudio en el avance investigativo en la gestión del riesgo financiero y aplicaciones en la industria financiera. La metodología propuesta, como un programa de cuantificación de riesgos en la industria bancaria, concilia los últimos estándares regulatorios

en riesgo mercado con técnicas modernas para valorar instrumentos derivados, incluyendo la evaluación del desempeño de las métricas de riesgo estimadas. En la literatura científica no hay muchas investigaciones al respecto, por lo cual lo anterior supone un avance investigativo en el área de gestión de riesgos financieros. De otro lado, el trabajo presentado podría establecerse como un complemento en el estudio e implementación de modelos internos de la nueva regulación, dirigido a programas de gestión de riesgos en instituciones financieras nacionales, de la región, e incluso internacionales.

Adicionalmente, la metodología planteada puede configurarse en un punto de partida para el desarrollo de un prototipo tecnológico, desde el cual atendiendo las recuestas, desafíos y pautas dadas en Orgeldinger [2018], se haga posible el escalamiento de una plataforma inteligente de riesgo mercado, funcional en la industria bancaria, para prever el capital de riesgo en sus portafolios. A su vez, el programa metodológico acompañado de su automatización, promueven la toma de decisiones informadas en materia de riesgo, cobertura, inversión, sostenibilidad y transparencia en las instituciones.

Distribución de la tesis. Los anexos A y B presentan un análisis y fundamentación respecto a modelos de tasas de interés y al modelo de Heston. El capítulo 1 establece el marco de referencia y fundamentación teórica en medidas de riesgo, VaR y ES para portafolios con derivados, y pruebas back-testing. Posteriormente, cada uno de los capítulos que siguen cuentan con un resumen, introducción, marco teórico, diseño metodológico, aplicación, discusión, y conclusiones. De este modo, el capítulo 2 (asociado a un premio internacional) formula la metodología general, de manera consistente a la regulación FRTB en sus modelos internos, para estimar el capital de riesgo implicado por la métrica ES en un portafolio de opciones sobre divisas. Como valor agregado y por su naturaleza mandatoria en la regulación, el capítulo también formula una metodología para estimar el capital de riesgo vía el método de sensibilidades en el método estándar. El modelo de valoración de opciones empleado es BS.

Los capítulos 3 y 4, de manera respectiva, amplían la metodología definida en el capítulo 2, de modo que el portafolio de opciones pueda valorarse partiendo de los modelos híbridos BSHW y FX-HHW. La aplicación que se desarrolla en los capítulos 2, 3, y 4 cuantifica las métricas VaR y ES en el marco de la regulación FRTB para un portafolio de opciones sobre GBP/USD. Por su parte, los escenarios de estrés se construyen a partir de la crisis 2007-9 o 2020-1, se investigan impactos en capital de riesgo, y de manera respectiva, el portafolio se valora a partir de los modelos BS, BSHW, o FX-HHW. Adicionalmente, en cada uno de estos desarrollos, se ejecuta un conjunto de pruebas back-testing para la medida VaR y se concluye el carácter procedente de la metodología formulada. En particular, el capítulo 4 resume en un diagrama la metodología completa que se propone y proyecta una agenda futura de investigación. Bajo esta agenda, también como valor agregado en esta investigación, se referencia dos trabajos orientados al análisis y extracción de información en condiciones de incertidumbre. Bienvenidos!

1. Capítulo 1: Antecedentes en riesgo mercado

Este capítulo presenta una fundamentación teórica para la valoración de riesgo de mercado aplicada a portafolios compuestos por opciones financieras. De este modo, se desarrollan dos secciones que guían un cuerpo de referencias relevantes de la literatura, conceptos y formulaciones matemáticas, y que tratan conjuntamente temas de medidas de riesgo y pruebas estadísticas de back-testing para validar una métrica de riesgo. Las métricas a considerar son *valor en riesgo* (*value at risk - VaR*) y *valor en riesgo condicional* (*expected shortfall - ES*). Cada una de las secciones iniciará con una introducción de los tópicos a considerar y finalizará concluyendo aspectos o resultados esenciales.

1.1. Medidas de riesgo de mercado VaR y ES

Las medidas de riesgo de mercado *VaR* y *ES* son un insumo importante e imperativo en la gestión de riesgos para instituciones financieras, compañías aseguradoras, y empresas del sector real. En este sentido, la presente sección comienza abordando un conjunto de referencias relevantes, que potencian parte de la investigación actual, sobre diversas metodologías de estimación de estos riesgos. Posteriormente, a partir de un portafolio genérico de opciones financieras se exponen dos aproximaciones para *VaR* y dos para *ES*. Estas aproximaciones serán usadas en capítulos posteriores. La sección concluye con una discusión sobre las ventajas de evaluar las métricas *VaR* y *ES* desde la óptica de la nueva regulación de Basilea para riesgo de mercado que entra en vigencia en 2023 (*Fundamental Review of the Trading Book - FRTB*).

1.1.1. Referentes en medidas de riesgo

Seguidamente se plantean desde la literatura un conjunto de referencias para las métricas de riesgo *VaR* y *ES*.

- *Referentes en VaR*. La investigación en Nieto and Ruiz [2016] compendia un conjunto actualizado de metodologías fundamentales para estimar la métrica *VaR* así como la realización de pruebas back-testing. En relación al *VaR*, una primera clasificación cubre aquellos procedimientos que estiman de manera directa el *cuantil* de la distribución

de retornos asociado al VaR . La caracterización de la distribución es empírica. Al respecto, la metodología más popular y usada en la industria bancaria es la *simulación histórica* tal como se muestra en Berkowitz et al. [2011], Pérignon and Smith [2010a] and Pritsker [2006].

Adicionalmente, en Zikovic and Aktan [2011] se asigna una ponderación a cada observación que se hace mayor para datos recientes. También, el trabajo en Chavez-Demoulin et al. [2014] aparece entre los estudios que estiman el cuantil vía teoría de valor extremo, donde se usa una distribución generalizada de Pareto para observaciones extremas. Otra de las estimaciones disponibles en la literatura se relaciona con estimaciones del VaR vía métodos no paramétricos, como en Xu [2013], en el cual se emplean regresiones de cuantiles y se construyen intervalos de confianza para el VaR . Finalmente, en Engle and Manganelli [2004] se adopta un proceso autoregresivo condicional del VaR , denominado $CAViaR$, con tres especificaciones diferentes y donde los parámetros se ajustan por medio de una regresión cuantil (ver Komunjer [2005]).

De otro lado, una segunda clasificación contiene procedimientos que asumen un *modelo* de distribución para los retornos. A partir de allí, se estiman algunos de sus momentos, y luego el cuantil bajo interés. Respecto a la varianza, asociada al segundo momento, diversas propuestas modelan su dinámica a partir de modelos de la familia GARCH, como es el caso en Bali and Theodossiou [2007]. Adicionalmente, especificaciones de volatilidad estocástica aparecen por ejemplo en Chen et al. [2012], y estudios de volatilidad realizada se conducen en Louzis et al. [2013]. Finalmente, respecto a otros momentos estadísticos de alto orden, el estudio en Bali et al. [2008] estima el sesgo y curtosis sobre el modelo distribucional de retornos a partir de modelos autoregresivos y distribuciones t generalizadas.

Por su parte, para las estimaciones del cuantil se recurren a diversos métodos. En primer lugar, se encuentran los que asumen una distribución específica para los retornos. Entre ellos, las distribuciones paramétricas más usuales son la Gaussiana, la t de student, y la t de student sesgada, tal como se aplica por ejemplo en los trabajos de Pérignon and Smith [2010b] y Sajjad et al. [2008]. Para otras distribuciones alternativas, como la distribución de Laplace, Laplace asimétrica en RiskMetrics, Weibull asimétrica, mixturas Gaussianas, entre otras, puede consultarse en Nieto and Ruiz [2016].

En segundo lugar, la estimación del cuantil puede obtenerse por métodos de simulación, tales como la simulación histórica condicional en Hull and White [1998] y la simulación filtrada en Adesi et al. [2002]. Además, otras propuestas de estimación pueden lograrse a través de la teoría de valor extremo condicional formulada en McNeil and Frey [2000] o por métodos bayesianos en Hoogerheide and van Dijk [2010].

Por otra parte, un referente sobre el uso regulatorio del VaR puede consultarse en Emmer et al. [2015], BIS [2019] y Embrechts et al. [2020] con la referencias contenidas

allí.

- *Referentes en ES.* A partir de la regulación bancaria FRTB en BIS [2019], la métrica ES se postula como referente fundamental en la medición del riesgo de mercado en instituciones financieras. La medida ES (también denotada como $CVaR$) fue propuesta en Artzner et al. [1999] como una medida coherente de riesgo, y su fundamentación matemática y financiera se sigue a partir de los trabajos en Rockafellar and Uryasev [2000, 2002, 2013].

Adicionalmente, uno de los estudios comparativos entre las métricas VaR y ES se encuentra en Embrechts et al. [2020, 2018]. Además, una vasta investigación sobre diferentes métodos de estimación y modelos de ES se documentan, por ejemplo, en Patton et al. [2019], Nadarajah et al. [2014], Chen [2008] y Scaillet [2004]. De otro lado, un estudio de sensibilidades de ES aplicado a portafolios bancarios aparece en Fermanian and Scaillet [2005], y finalmente, un estudio reciente que provee la medida ES de una base axiomática está dado en Wang and Zitikis [2021].

De otro lado, algunos textos que abordan diferentes metodologías para aproximar las medidas VaR y ES , a un nivel comprensible y práctico, pueden consultarse en Hull [2018b], Christoffersen [2012], y McNeil et al. [2005, 2015].

Es de anotar que la literatura presenta otras medidas alternativas de VaR y ES . Por ejemplo, la métrica de riesgo ES no satisface la propiedad matemática de ser *elicitable* tal como se muestra en Gneiting [2011]. Una medida de riesgo resulta ser elicitable si existe una función de puntuación (*scoring*) para la medida que puede ser usada para comparar el desempeño de diferentes modelos que cuantifican dicho riesgo. En consecuencia, lo anterior involucra mayor complejidad en la tarea de realizar pruebas de validación back-testing sobre la medida ES en comparación a las pruebas sobre VaR . Una métrica de riesgo alternativa que satisface las propiedades de ser coherente, además ser elicitable, es conocida con el nombre *expectiles*, ver Kuan et al. [2009] y Bellini and Bernardino [2017].

1.1.2. Valor en riesgo, VaR

Algunos apartados de esta subsección y la siguiente son tomados de Grajales and Medina [2021a]. La medida valor en riesgo, denotada como VaR , responde a la pregunta: ¿cuál es la pérdida monetaria de un portafolio de modo que ésta sólo sea excedida con probabilidad $1 - \alpha$ en los próximos N días? De manera simbólica la medida monetaria (en dólares) $\$VaR$ en un horizonte de tiempo satisface la ecuación

$$Pr[\text{pérdida} > \$VaR] = 1 - \alpha \tag{1-1}$$

Si se asume que la pérdida es $-\Pi R$, donde Π es el valor inicial del portafolio y R su retorno en el horizonte de tiempo, entonces la ecuación (1-1) es equivalente a

$$Pr[R < -VaR] = 1 - \alpha, \quad (1-2)$$

donde $VaR = VaR_\alpha = \$VaR/\Pi$ y tal medida de riesgo es relativa al valor inicial del portafolio. En adelante, cuando se escriba VaR_α , su sentido monetario o relativo se infiere desde el contexto. Considere ahora que el portafolio está compuesto por n activos con precios $S_i, i = 1, \dots, n$, con una inversión monetaria α_i en el activo i , y donde cada uno de los activos retorna Δx_i en un horizonte de tiempo de 1 día. Entonces, el cambio en el valor del portafolio, $\Delta\Pi$, estaría dado por

$$\Delta\Pi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i, \quad (1-3)$$

y su media y varianza se escribirían como

$$\mathbf{E}(\Delta\Pi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{E}(\Delta x_i) \quad (1-4)$$

$$\sigma_{\Delta\Pi}^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \quad (1-5)$$

donde σ_i es la volatilidad diaria de Δx_i , ρ_{ij} es la correlación entre Δx_i y Δx_j , y \mathbf{E} es el operador de esperanza.

La implementación de las ecuaciones (1-4) y (1-5) se facilita al identificar que la primera de ellas es el producto interno $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\Delta x})$, mientras que la segunda de ellas se escribe en términos de la forma cuadrática $\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}$, donde $\boldsymbol{\Delta x} = [\Delta x_1, \dots, \Delta x_n]'$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]'$, y $\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de varianzas y covarianzas de los activos.

Una vez estimado el VaR monetario de $-\Delta\Pi$, el VaR relativo al valor del portafolio se consigue como fue descrito antes. De otro lado, si se emplean las ecuaciones (1-4) y (1-5) junto con formulaciones que aproximen la medida VaR , el modelo es conocido como de varianzas y covarianzas. Si los valores del portafolio Π son simulados y a partir de ellos se aproxima VaR , entonces el modelo es conocido como de simulación. Aquí es importante, además, el uso de la factorización de Cholesky para simular correlacionadamente los activos. Y si los valores del portafolio se consiguen replicando sus retornos históricos en una ventana de tiempo, el modelo es conocido como de simulación histórica. Los tres modelos pueden incluso ser combinados.

Seguidamente, se presentan dos aproximaciones a la medida *VaR* de un portafolio particular de n activos que serán usadas en capítulos siguientes. Específicamente, los activos del portafolio se tratan de opciones financieras, con el fin de aludir al tipo de instrumentos derivados que son de interés en este trabajo. La primera aproximación usa la letra Griega delta de cada opción, mientras que la segunda usa las letras delta, gamma y gamma cruzada de las opciones (ver Grajales and Perez [2011], Hull [2018b], y Grajales and Medina [2021a]).

- I *VaR lineal*. El portafolio consiste en n opciones financieras. La opción i tiene como subyacente el activo S_i . Ahora, denote la letra Griega delta de riesgo de la opción i como δ_i , de modo que $\delta_i = \frac{\partial \Pi}{\partial S_i}$. En consecuencia, la ecuación (1-3) se expresa como

$$\Delta \Pi = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \Delta x_i \quad (1-6)$$

Si se asume que los retornos Δx_i siguen una distribución normal multivariada, entonces $\Delta \Pi$ es normal, y la medida *VaR* a N días a un nivel de confianza α se aproxima linealmente por

$$VaR_\alpha = -\sigma_{\Delta \Pi} z_{1-\alpha} \sqrt{N} - \mathbf{E}(\Delta \Pi) N \quad (1-7)$$

donde $z_{1-\alpha}$ es el percentil $1 - \alpha$ de la distribución normal estándar, y la media y varianza de $\Delta \Pi$ toman la forma

$$\mathbf{E}(\Delta \Pi) = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \mathbf{E}(\Delta x_i), \text{ y} \quad (1-8)$$

$$\sigma_{\Delta \Pi} = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2 \delta_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n \rho_{ij} S_i \delta_i S_j \delta_j \sigma_i \sigma_j} \quad (1-9)$$

- II *VaR cuadrático*. A partir del mismo portafolio anterior, denote ahora la letra Griega gamma de riesgo de la opción i como γ_i y la letra gamma cruzada de las opciones i y j como γ_{ij} , de modo que $\gamma_i = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S_i^2}$ y $\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S_i \partial S_j}$. La aproximación cuadrática de $\Delta \Pi$ se consigue vía una expansión de Taylor de segundo orden usando las Griegas delta y gamma, de modo que

$$\Delta \Pi = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} S_i S_j \gamma_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \quad (1-10)$$

De otro lado, la estimación del percentil $1 - \alpha$ de $\Delta\Pi$ en la ecuación (1-10) puede conseguirse haciendo uso de la expansión de Cornish-Fisher con tres momentos para obtener que

$$Q_{1-\alpha}(\Delta\Pi) = \mathbf{E}(\Delta\Pi) + w_{1-\alpha}\sigma_{\Delta\Pi} \quad (1-11)$$

donde $w_{1-\alpha} = z_{1-\alpha} + \frac{1}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)\xi_{\Pi}$, $\xi_{\Pi} = \frac{1}{\sigma_{\Delta\Pi}^3}\mathbf{E}([\Delta\Pi - \mathbf{E}(\Delta\Pi)]^3)$. De este modo, VaR_{α} es calculado como

$$VaR_{\alpha} = -Q_{1-\alpha}(\Delta\Pi) \quad (1-12)$$

Ahora, los tres momentos involucrados en la ecuación (1-11) son calculados a partir de la ecuación (1-10) y asumiendo que $\mathbf{E}(\Delta x_i) = 0$ para cada i , obteniendo que

$$\mathbf{E}(\Delta\Pi) = \sum_{i,j} \beta_{ij}\sigma_{ij} \quad (1-13)$$

$$\mathbf{E}((\Delta\Pi)^2) = \sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j\sigma_{ij} + \sum_{i,j,k,l} \beta_{ij}\beta_{kl}(\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}) \quad (1-14)$$

$$\mathbf{E}((\Delta\Pi)^3) = 3 \sum_{i,j,k,l} \alpha_i\alpha_j\beta_{kl}(\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}) + \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6} \beta_{i_1i_2}\beta_{i_3i_4}\beta_{i_5i_6}Q \quad (1-15)$$

donde $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, ρ_{ij} es la correlación entre los activos i y j , $\alpha_i = S_i\delta_i$, $\beta_{ij} = \frac{1}{2}S_iS_j\gamma_{ij}$ y Q consiste en la suma de 15 términos de la forma $\sigma_{k_1k_2}\sigma_{k_3k_4}\sigma_{k_5k_6}$, y $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ son combinaciones tomadas de a dos de los elementos $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$.

1.1.3. Valor en riesgo condicional, ES

La nueva regulación bancaria FRTB en BIS [2019], respecto a la formulación de modelos internos, ha optado por seguir la medida ES para cuantificar el riesgo de mercado. A modo conceptual y para fines de realizar cálculos simples, si $-\Delta\Pi$ es el portafolio de pérdidas del portafolio Π en un horizonte de tiempo dado, entonces ES_{α} es la esperanza condicional de aquellas pérdidas que exceden VaR_{α} en la distribución de pérdidas de la variable $-\Delta\Pi$ y siendo α el nivel de confianza de la medida de riesgo.

De manera más precisa, siguiendo a Rockafellar and Uryasev [2002] considere que $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ representa el vector de asignaciones en el portafolio Π para un conjunto de restricciones X , y $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ denota el vector de valores futuros de m variables de mercado que afectan las ganancias y pérdidas del portafolio. Entonces la función de pérdida del portafolio se puede

representar como $z = f(x, y)$. Si $p(y)$ es la densidad de probabilidad de y sobre un horizonte temporal T , entonces ES_α para el portafolio $\Pi(x)$ en T está definido por

$$ES_\alpha(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{f(x,y) \geq VaR_\alpha(x)} f(x, y) p(y) dy \quad (1-16)$$

donde $VaR_\alpha(x) = \min\{\gamma \in \mathbb{R} : \Psi(x, y) \geq \alpha\}$, and $\Psi(x, y) = \int_{f(x,y) < \gamma} p(y) dy$.

Alternativamente, otras expresiones que definen ES_α en términos de la medida *VaR* aparecen en McNeil et al. [2005], y manteniendo su notación están dada por

$$ES_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR(L) du \quad (1-17)$$

$$= \frac{\mathbf{E}(LI_{L \leq q_\alpha(L)})}{1 - \alpha} \quad (1-18)$$

$$= \mathbf{E}(L | L \leq VaR_\alpha) \quad (1-19)$$

donde L es una función integrable con distribución continua que representa las pérdidas del portafolio, de modo que $L = -\Delta\Pi$, y la expresión I_A es la función indicadora del evento A . Adicionalmente, a partir de los trabajos en Rockafellar and Uryasev [2002] y McNeil et al. [2005], ES_α puede ser obtenido apelando a la ley de los grandes números en términos de órdenes estadísticos, de modo que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{\lfloor m(1-\alpha) \rfloor} L_{j,m}}{\lfloor m(1-\alpha) \rfloor} = ES_\alpha, \quad (1-20)$$

donde $\{L_{j,m}\}_{j=1}^m$ es una sucesión decreciente de órdenes estadísticos para las pérdidas $\{L_j\}_{j=1}^m$, y $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función piso aplicada en el argumento.

La ecuación (1-20) es conveniente en el cálculo de la métrica *ES* vía simulación histórica dado que se disponga de una distribución no paramétrica de pérdidas para el portafolio.

Ahora, de manera similar al párrafo anterior para la métrica *VaR*, se presentan dos aproximaciones a la métrica ES_α . La primera aproximación asume que la distribución de pérdidas es normal, mientras que la segunda usa una distribución t de student.

III *ES normal*. Si el portafolio de pérdidas, L , se ajusta a una distribución normal, $N(\mu, \sigma)$, entonces

$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{\Phi'(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}, \quad (1-21)$$

donde $\Phi(\cdot)$ representa la distribución normal estándar acumulada en el argumento.

iv *ES t de student*. Suponga que el portafolio de pérdidas, L , tiene una media μ y una desviación estándar σ , y que $\tilde{L} = \frac{L-\mu}{\sigma}$ distribuye como *t de student* estándar con ν grados de libertad, $\nu > 1$. Entonces la métrica en cuestión se calcula como

$$ES_{\alpha} = \mu + \sigma \frac{g_{\nu}(t_{\nu}^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left(\frac{\nu + (t_{\nu}^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \right) \quad (1-22)$$

donde t_{ν} es la función de distribución *t* estándar y g_{ν} su función densidad.

Conclusiones: sobre las medidas de riesgo presentadas

A partir de las referencias anteriormente descritas, la investigación sobre medidas de riesgo de mercado muestra enorme profundidad, madurez, y crecimiento en el área de riesgos, hasta el punto, incluso, de impactar directamente una reforma a la regulación bancaria, emitida a través de la FRTB, y que está por implementarse internacionalmente en 2023. A su vez, los retos y necesidades específicas en esta industria también dinamizan la investigación, de modo que parte de ella pueda implementarse en condiciones de practicidad.

Las cuatro aproximaciones de riesgo presentadas en este apartado se posicionan desde la teoría en sus primeros fundamentos, considerando distribuciones normales o *t* de student para los retornos de un portafolio de opciones, así como las letras Griegas de riesgo delta y gamma asociadas a los instrumentos del portafolio. En algún grado, estas aproximaciones podrían capturar colas anchas en las distribuciones así como efectos de no linealidad en la dinámica del portafolio.

Conjuntamente, los cuatro procedimientos de estimación para *VaR* y *ES* pueden ser automatizados (por ejemplo en una hoja de cálculo) para un portafolio de opciones con fines comparativos y prácticos. En especial, si el activo subyacente en las opciones se trata de la tasa de cambio entre un par de divisas, el interés en los resultados podría ser perceptible, toda vez que el mercado de derivados sobre monedas internacionalmente es más que apreciable (ver CME Group, <https://www.cmegroup.com>), y en consecuencia, la respectiva gestión de riesgos demandaría inicialmente respuestas efectivas, confiables y eficientes.

1.2. Pruebas back-testing

Una prueba o test de back-testing es un procedimiento, usualmente de naturaleza estadística, que evalúa a partir de datos históricos la precisión de una medida de riesgo. Esta sección revisa desde la literatura algunos de estos procedimientos para la medida *VaR*, la cual es la métrica *indicada* por la regulación FRTB en BIS [2019] que es necesaria validar en un proceso de gestión de riesgo de mercado. De otro lado, la sección también referencia algunas pruebas back-testing para la medida *ES*, las cuales podrían ser implementadas a futuro y a modo exploratorio para modelos internos de gestión de riesgos.

Posteriormente, un conjunto de *nueve tests* son clasificados en pruebas de frecuencia, de independencia, mixtos, y de severidad. La conceptualización de las pruebas relacionadas se consigue a partir de un diseño de prueba de hipótesis que se fundamenta en un test estadístico conocido como *ratio de verosimilitud*. Una descripción conceptual y estadística se realiza para cinco de estos tests con el fin de ganar familiaridad en la ejecución de las pruebas y facilitar la comprensión de capítulos que siguen. Finalmente se concluye relacionando las pruebas back-testing expuestas con las metodologías de aproximación de *VaR* y *ES* ya discutidas en la sección 1.1.

1.2.1. Referentes en pruebas back-testing

Seguidamente se plantean desde la literatura un conjunto de referencias para pruebas back-testing orientadas a la validación de las métricas de riesgo *VaR* y *ES*.

- *Referentes en VaR*. El test de luces de Basilea (TL) en BCBS [1996, 2006, 2011a] es útil como punto de partida en la validación de un modelo *VaR*. Sin embargo, su fuerte limitación es que sólo considera el número de excepciones existentes a lo largo de un período de prueba. Por su parte, la prueba de frecuencias de cobertura incondicional de Kupiec (UC o POF) en Kupiec [1995] avanza planteando como hipótesis nula que el porcentaje de excepciones es igual al nivel p del *VaR*. No obstante, en casos de estudio que involucran instituciones bancarias internacionales representativas en la industria, como en Berkowitz and O'Brien [2002] y Pérignon et al. [2008], se encuentra que las estimaciones de *VaR* son altamente conservadoras, sobre-estimando el riesgo, y sugiriendo en consecuencia una limitación a la efectividad de esta prueba.

Adicionalmente, el test de cobertura condicional de Christoffersen (CC) en Christoffersen [1998, 2012] toma como hipótesis nula condiciones conjuntas de independencia (CCI) y frecuencia de fallas (UC). La característica de independencia es importante a considerar dado que un eventual agrupamiento de excepciones podría ocasionar múltiples pérdidas (posiblemente catastróficas) en corto tiempo para una institución financiera. Sin embargo, también en Berkowitz and O'Brien [2002] y luego en Pérignon and Smith [2010a] se señala la presencia de agrupamientos de fallas identificando como posible factor de causalidad, niveles bajos de información sobre la volatilidad futura. La condición de independencia podría no ser fácilmente satisfecha y en consecuencia en Pérignon and Smith [2010a] se sugiere la necesidad de continuar investigando sobre nuevas pruebas.

No obstante, los test UC y CC son referentes usuales en la industria bancaria, tal como se indica por ejemplo en Nieto and Ruiz [2016]. En la misma línea de tests de frecuencia e independencia, Berkowitz et al. [2011] plantean un test donde la característica de independencia se prueba para rezagos mayores que uno en la serie de fallas.

De otro lado, otras pruebas back-testing han sido propuestas con el fin de determinar la severidad de las excepciones o fallas. Entre este tipo de pruebas aparece un test en Colletaz et al. [2013] conocido como *mapa de riesgo*, en el cual se definen eventos denominados *super-excepciones* como aquellas excepciones que están ligadas a pérdidas extremas (el mapa de riesgo de hecho es un test general aplicado a riesgo de mercado, crediticio, operativo y sistémico). Finalmente, en Nieto and Ruiz [2016] y Campbell [2007] pueden consultarse otras pruebas back-testing que consideran múltiples niveles de confianza de *VaR* así como tests especializados en obtener un ranking entre diferentes tests.

- *Referentes en ES*. La complejidad en la realización de pruebas back-testing para *ES* es mayor respecto a las pruebas back-testing para la medida *VaR*. Mientras que en *VaR* el lenguaje se puede reducir binariamente a expresar que el retorno de un activo o bien excede o bien no excede la métrica *VaR* en un día, en la medida *ES* puede acontecer que el *VaR* es excedido en un factor x en un día, para $x \in \mathcal{R}$, $x > 1$.

De otro lado, en la métrica *ES* una tipología de pruebas de back-testing es basada en tests de severidad, tal como se plantea por ejemplo en Nolde and Ziegel [2017] y Kratz et al. [2018]. El concepto de severidad puede abordarse a través de dos ratios de severidad, uno observado y otro esperado. El primero es el valor esperado de ratios entre retorno (del portafolio) y *VaR* para aquellos días donde el retorno excede el *VaR*. Por su parte, el segundo es la expectativa de ratios entre *ES* y *VaR* para aquellos días donde el retorno excede el *VaR*. Intuitivamente, un administrador de riesgo de mercado esperaría que el ratio de severidad esperado no sea significativamente menor que el observado. A su vez, la expectativa de tales ratios dependerá de la información diaria distribucional de las colas para la serie de retornos. La complejidad de pruebas de back-testing para *ES* es pues notoria.

La literatura en este campo está avanzando recientemente. Por ejemplo, en Acerbi and Szekely [2014] se relacionan pruebas aproximadas de back-testing para la medida de riesgo *ES* que son incondicionales a la distribución del portafolio de pérdidas. Sin embargo, para decidir si el ratio de severidad esperado es significativamente menor que el ratio de severidad observado (rechazo del modelo *ES*), la prueba aproxima internamente la distribución de retornos o bien a una distribución normal o bien a una t de student con 3 grados de libertad. Con estas aproximaciones la prueba incondicional calcula un conjunto de valores críticos que hacen posible establecer la decisión. Otros avances más recientes en esta línea de trabajo, que dependen de información distribucional explícita para los retornos del portafolio, se muestran en Nolde and Ziegel [2017], Du and Escanciano [2017], Kratz et al. [2018], y Deng and Qiu [2021].

1.2.2. Back-testing para VaR.

Suponga que hoy es el día t . Si el retorno *ex post* en un día es excedido por el riesgo *VaR ex ante* estimado en el día $t - 1$ para un horizonte de un día, tal evento es llamado *excepción o falla*. De otro lado, el número de días, n , en el período de evaluación de la medida de riesgo se conoce como *período o ventana de prueba*. De modo, por ejemplo, que una medida *VaR* a un día y a un nivel de confianza de 97.5% pronosticaría, en promedio, 6.25 excepciones en un período de 250 días.

Una prueba back-testing considera en este caso la frecuencia, independencia, o severidad de las excepciones o fallas. El retorno, a su vez, podría ser calculado bajo el supuesto de que o bien el portafolio es estático (portafolio hipotético) o bien es cambiante durante el día t .

Ahora, en lo que sigue se antecede un test de verosimilitud y una notación especial que serán usados para describir un conjunto de nueve pruebas de back-testing, todas ellas orientadas a validar una métrica *VaR*.

Prueba de hipótesis para el ratio de verosimilitud y notación. El siguiente test y notación serán usados en el conjunto de pruebas de validación que se desarrolla adelante.

- *Estadístico para testear el ratio de verosimilitud*, ver Wilks [1938] y Casella and Berger [2002].

El test resulta adecuado para elegir entre dos modelos que compiten en el ajuste a un conjunto de datos. Suponga que \mathbf{x} es una muestra aleatoria de una población que tiene densidad o masa de probabilidad dada por $f(x|\theta)$, que $L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$ es la función de verosimilitud para los datos \mathbf{x} , y que Θ denota el espacio paramétrico para θ . El estadístico $\lambda(\mathbf{x})$ dado por

$$\lambda(\mathbf{x}) = -2 \ln \left(\frac{\sup_{\theta_o} L(\theta|\mathbf{x})}{\sup_{\theta} L(\theta|\mathbf{x})} \right) \quad (1-23)$$

se conoce como el ratio de verosimilitud para testear las hipótesis nula h_o versus la alternativa h_1 , donde

$$\begin{aligned} h_o &: \theta \in \Theta_o \\ h_1 &: \theta \in \Theta_o^c \end{aligned} \quad (1-24)$$

La función de verosimilitud $L(p) = \sup_{\theta_o} L(\theta|\mathbf{x})$ está asociada a la hipótesis nula y puede obtenerse a través de una restricción en los parámetros, mientras que $L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta} L(\theta|\mathbf{x})$ está asociada a la hipótesis alternativa y puede estimarse vía máxima verosimilitud. Si la función de verosimilitud con la restricción se ajusta a

los datos, el ratio $L(p)/L(\hat{\theta})$ se aproximaría a 1 sugiriendo el no rechazo del modelo en la hipótesis nula. El criterio formal de decisión sobre las hipótesis proviene del teorema de Wilks en Wilks [1938] , según el cual

$$s = -2 \ln[L(p)/L(\hat{\theta})] \sim \chi_{df}^2, \quad (1-25)$$

indicando que s distribuye asintóticamente como chi cuadrado con df grados de libertad, χ_{df}^2 , cuando el número de observaciones tiende a infinito, donde df son los grados de libertad del modelo en la hipótesis alternativa menos los grados de libertad del modelo en la hipótesis nula.

■ *Notación.* Sea:

α : nivel de confianza de la métrica VaR

a : nivel de significancia del test

$p = 1 - \alpha$: probabilidad de una excepción bajo el modelo VaR , en un día cualquiera

m : número de excepciones

$I_\alpha(t)$: proceso de fallas, definido por

$$I_\alpha(t) = 1[R(t) < -VaR_\alpha(t)], \quad t = 1, \dots, T, \quad (1-26)$$

donde $R(t)$ es el retorno del portafolio sobre el cual se aplica la medida VaR y $1[\cdot]$ es la función indicadora evaluada en su argumento. El proceso $I_\alpha(t)$ consiste en observaciones binarias *ex post* de violaciones a la medida VaR en el día t .

Test de validación. A continuación se presenta un conjunto de nueve pruebas estadísticas de back-testing para validar una métrica VaR , clasificando las pruebas según sean de frecuencia, de independencia, mixtas, o de severidad. Además, se describe el respectivo sustento estadístico para cinco de las pruebas.

I Tests de frecuencia

a) Test de luces (TL). Ver BCBS [1996, 2006, 2011a].

b) Test binomial (Bin, ver adaptación en Hull [2018b]).

El análisis para aplicar el test binomial se descompone en dos casos, para los cuales se plantean una hipótesis nula, h_0 , y una alternativa, h_1 . Adicionalmente se estima, en cada caso, el p -valor dado por p_{val} . Los dos casos se esbozan así:

caso $\frac{m}{n} < p$	caso $\frac{m}{n} > p$
$h_0 : Pr(\text{excepción}) = p$	$h_0 : Pr(\text{excepción}) = p$
$h_1 : Pr(\text{excepción}) < p$	$h_1 : Pr(\text{excepción}) > p$
$p_{val} = \sum_{k=0}^m \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$	$p_{val} = \sum_{k=m}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

A partir de la ecuación (1-26), la hipótesis nula, h_0 , puede escribirse equivalentemente como $h_0 : \mathbf{E}(I_\alpha(t)) = p$. Ahora, si la probabilidad p_{val} es menor que el nivel de significancia a entonces la hipótesis h_0 se rechaza, en caso contrario h_0 no se rechaza.

- c) Test de Kupiec para frecuencias de cobertura incondicional o proporción de fallas (UC o POF) en Kupiec [1995].

En el test UC (también referido como POF), de dos colas, la hipótesis nula h_0 expresa que la probabilidad de una excepción en un día cualquiera es p . El estadístico de prueba LR_{uc} asociado a la hipótesis nula y su distribución se establecen en coherencia al test para el ratio de verosimilitud dado en la ecuación (1-25),

$$LR_{uc} = -2 \ln[(1-p)^{n-m} p^m] + 2 \ln[(1-m/n)^{n-m} (m/n)^m] \sim \chi_1^2 \quad (1-27)$$

Consecuentemente, si LR_{uc} es mayor que $F_{\chi_1^2}^{-1}(1-a)$, la hipótesis nula h_0 es rechazada, donde $F_{\chi_1^2}(\cdot)$ representa la distribución de una variable χ_1^2 evaluada en el argumento. Equivalentemente, si el p -valor dado por $p_{val} = 1 - F_{\chi_1^2}(s)$ es menor que el nivel de significancia a , entonces h_0 es rechazada.

- d) Test de Kupiec para tiempo hasta la primera falla (TUFF). Ver Kupiec [1995]

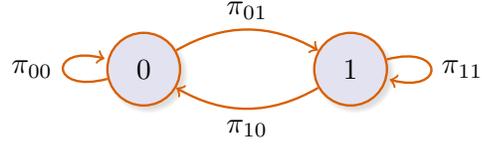
II Tests de independencia

- a) Test de cobertura condicional de independencia de Christoffersen (CCI) en Christoffersen [1998, 2012].

La especialidad de este test es evaluar si las excepciones ocurren de manera independiente a lo largo del período de prueba, y por tanto, las fallas ocurridas no se agrupan al rededor de una fecha particular. Para empezar, se parte de la secuencia binaria $I_\alpha(t)$ dada en la ecuación (1-26), de acuerdo a las fallas que se presenten en cada día en la ventana de prueba. De este modo, el valor de la secuencia en el día t es uno de dos posibles estados, el estado **cero** (0), si no hay falla en t , o el estado **uno** (1), si hay falla en t .

En segundo lugar, pueden definirse probabilidades de transición de estados en un día de modo que π_{01} es la probabilidad condicional de que ocurra una excepción en

Figura 1-1: Probabilidades de transición en la prueba de back-testing CCI



el día $t + 1$ dado que en el día t no aconteció una excepción, y π_{11} la probabilidad condicional de que ocurra una excepción en el día $t + 1$ dado que en el día t aconteció una excepción. De manera similar, la probabilidad de no falla siguiente a un evento de no falla es $\pi_{00} = 1 - \pi_{01}$ y la probabilidad de no falla siguiente a un evento de falla es $\pi_{10} = 1 - \pi_{11}$. Los estados y las probabilidades de transición se representan en la Figura 1-1.

Ahora, la secuencia $I_\alpha(t)$ puede ser descrita por un proceso de Markov de primer orden, Π_1 , con probabilidades de transición π_{ij} , $i, j = 0, 1$. Consecuentemente, la función de verosimilitud del proceso de Markov Π_1 está dada por

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}} \quad (1-28)$$

donde T_{ij} es el número de veces en las observaciones para las cuales el estado j sigue del estado i . La función de verosimilitud dada en (1-28) permite estimar las probabilidades de transición, $\hat{\pi}_{01}$ y $\hat{\pi}_{11}$, imponiendo condiciones de primer orden de optimalidad sobre las primeras derivadas de L respecto a cada probabilidad de transición. Procediendo así, la función de verosimilitud, $L(\hat{\Pi}_1)$, se estima a partir de la ecuación (1-28) donde la matriz estimada de probabilidades de transición es

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \hat{\pi}_{01} & \hat{\pi}_{01} \\ 1 - \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{00}}{T_{00} + T_{01}} & \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}} \\ \frac{T_{10}}{T_{10} + T_{11}} & \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}} \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

De otro lado, si se apela a la restricción de independencia entre las fallas indicadas en la secuencia $I_\alpha(t)$, entonces un evento de falla en $t + 1$ debe ser independiente de lo acontecido, falla o no, en t . En consecuencia, la hipótesis nula h_0 de independencia se plantea asumiendo que $\pi_{01} = \pi_{11}$. En este caso, la función de verosimilitud condicionada a la restricción de independencia, $L(\hat{\Pi})$, tiene una matriz de probabilidad de transición definida como

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

El estadístico de prueba LR_{cci} de decisión sobre la hipótesis nula, así como su distribución se sigue del ratio de verosimilitud en la ecuación (1-25), por lo cual se satisface que

$$LR_{cci} = -2 \ln[L(\hat{\Pi})/L(\hat{\Pi}_1)] \sim \chi_1^2 \quad (1-31)$$

Por tanto, el razonamiento para decidir sobre la hipótesis nula h_0 es el mismo que aquel implicado por la ecuación (1-27) en la prueba UC.

- b) Test de tiempo entre fallas para independencia de Hass (TBFI). Ver Haas [2001]

III Tests mixtos de frecuencia e independencia

- a) Test de cobertura condicional mixta de Christoffersen (CC) en Christoffersen [1998, 2012].

El objetivo de esta prueba es testear conjuntamente las condiciones de independencia y de frecuencia de fallas para una métrica VaR . A partir de los test UC y CCI, se plantea la hipótesis nula establecida como $\pi_{01} = \pi_{11} = p$, cuya decisión se toma de acuerdo al estadístico LR_{cc} , deducido a partir del ratio de verosimilitud en la ecuación (1-25), y que está dado por

$$LR_{cc} = -2 \ln[L(p)/L(\hat{\Pi}_1)] \quad (1-32)$$

El estadístico LR_{cc} distribuye como χ_2^2 , la expresión $L(p)$ corresponde a la función de verosimilitud de la hipótesis nula en el test UC y $L(\hat{\Pi}_1)$ es la función de verosimilitud en la hipótesis alternativa en el test CCI. El razonamiento para decidir sobre la hipótesis nula es análogo al establecido en el test CCI.

- b) Test mixto de tiempo entre fallas de Hass (TBF) Haas [2001]

IV Test de severidad

- a) Mapa de riesgo en Colletaz et al. [2013].

El test considera el número de excepciones producidas en una ventana de prueba, sus magnitudes, y la probabilidad de ocurrencia de pérdidas extremas, la cual sería considerablemente inferior a la probabilidad $p = 1 - \alpha$ asociada al nivel de confianza α del VaR . Los eventos de pérdidas extremas se denominan *super-excepciones*, y se definen como las pérdidas superiores a $VaR_{\alpha'}$, donde α' es mucho mayor que el nivel de confianza α .

La intuición del test radica en extender hacia una versión multivariada la prueba UC en Kupiec [1995], aplicada a la secuencia conjunta de excepciones (ligadas a

un nivel de confianza α) y super-excepciones (ligadas a un nivel de confianza α'). Posteriormente el p -valor de la prueba se representaría gráficamente en un mapa de riesgo 3D.

En detalle, si los días en una ventana de prueba son $t = 1, 2, \dots, T$, entonces el número de excepciones, m , y super-excepciones, m' , se obtienen a partir de la ecuación (1-26) como

$$m = \sum_{t=1}^T I_{\alpha}(t) \quad \text{y} \quad m' = \sum_{t=1}^T I_{\alpha'}(t) \quad (1-33)$$

La hipótesis nula que se plantea en el test consiste en una condición conjunta sobre el número de excepciones y super-excepciones dada por

$$h_0 : \mathbf{E}(I_{\alpha}(t)) = 1 - \alpha \quad \text{y} \quad \mathbf{E}(I_{\alpha'}(t)) = 1 - \alpha' \quad (1-34)$$

El estadístico de prueba para h_0 , LR_{muc} , se deduce a partir del test del ratio de verosimilitud dado en la ecuación (1-25) y en este contexto se expresa como

$$LR_{muc}(\alpha, \alpha') = -2 \ln [(\alpha)^{N_0} (\alpha' - \alpha)^{N_1} (1 - \alpha')^{N_2}] \\ + 2 \ln \left[\left(\frac{N_0}{T} \right)^{N_0} \left(\frac{N_1}{T} \right)^{N_1} \left(\frac{N_2}{T} \right)^{N_2} \right], \quad (1-35)$$

el cual distribuye χ_2^2 , donde $N_{i,t} = \sum_{t=1}^T J_{i,t}$ con $i = 0, 1, 2$, $J_{1,t} = I_{\alpha}(t) - I_{\alpha'}(t)$, $J_{2,t} = I_{\alpha'}(t)$, $J_{0,t} = 1 - J_{1,t} - J_{2,t}$, y con $I_{\alpha}(t)$ dado por la ecuación (1-26). Finalmente, el razonamiento para decidir sobre la hipótesis nula es análogo al establecido en el test CC.

De este modo, el mapa de riesgo define un test de luces sobre el espacio geométrico $\mathfrak{s} = \{(m, m'), m' \leq m\}$ dado por los colores *verde* () , *amarillo* () , y *rojo* () , y donde los colores se determinan de la siguiente forma,

- la celda $(m, m') \in \mathfrak{s}$ es color *verde* cuando no es posible rechazar la hipótesis nula h_0 a un 95 % de confianza,
- la celda $(m, m') \in \mathfrak{s}$ es color *amarillo* cuando se puede rechazar la hipótesis nula h_0 a un 95 % de confianza, pero no al nivel 99 %, y
- la celda $(m, m') \in \mathfrak{s}$ es color *rojo* cuando es posible rechazar la hipótesis nula h_0 a un 99 % de confianza.

Conclusiones: sobre las pruebas back-testing y las medidas de riesgo presentadas

Si una de las medidas VaR en cuestión *pasa* diferentes pruebas estadísticas de back-testing, entonces bajo el fundamento de esas pruebas la medida VaR se postularía como una métrica adecuada ante la FRTB para evaluar el riesgo del portafolio descrito.

Por otra parte, el conjunto de los nueve tests estadísticos presentados en esta sección para validar un modelo VaR , se constituyen como una guía básica hacia la evaluación del desempeño de las medidas de riesgo VaR , respecto a descriptores de frecuencia de excepciones y/o su independencia, así como también de severidad en dichas excepciones.

De otro lado, la regulación FRTB no requiere la ejecución de pruebas back-testing para la métrica de riesgo ES . Sin embargo, las pruebas back-testing para ES son un área actual de investigación sobre la cual tiene sentido explorar sus resultados en un portafolio, dado que se aplique un modelo interno de gestión de riesgos. Además, parece sensato pensar que estas pruebas podrían tener un protagonismo explícito en el futuro de la regulación, toda vez que la medida ES , en vez de la medida VaR , es sobre la que se proyecta el capital por riesgo en una institución cuando se emplean modelos internos.

En el próximo capítulo. Consistente con lo anterior, el siguiente capítulo presenta en el marco de la regulación FRTB dos propuestas metodológicas para cuantificar el riesgo mercado en portafolios de opciones financieras. Ambas propuestas permiten evaluar impactos en capital de riesgo.

2. Capítulo 2: Método de sensibilidades y expected shortfall para riesgo mercado bajo FRTB - Impactos en capital de riesgo

Este capítulo es una versión en español del trabajo en Grajales and Medina [2021a], ganador del primer puesto de artículo de investigación en el evento de Latino América *International Finance Conference* (IFC) 2021. La investigación presentada está alineada con los objetivos planteados en esta tesis.

Los cambios en la regulación de Basilea FRTB entran en vigencia en 2023 y expondrán a las instituciones bancarias a nuevos retos en materia de implementación, cuantificación de riesgos e impactos sobre capital de requerimiento. Este trabajo sugiere primero un algoritmo de implementación del modelo estándar (SA) de FRTB basado en el método de sensibilidades delta, vega y curvatura para estimar el capital por riesgo de mercado de un portafolio y presenta una ilustración aplicada a una posición en opciones. En segundo lugar, se propone una metodología para estimar el riesgo *expected short fall* (*ES*) de un portafolio de opciones de manera consistente a los requerimientos de modelos internos (IMA) en FRTB. Al respecto se desarrolla una aplicación donde se mide el impacto *ES* bajo FRTB vs *VaR* en un portafolio simple de opciones sobre divisas considerando escenarios de estrés tomados de las crisis 2007-9 y 2020-1. Las propuestas desarrolladas tejen un puente de comunicación entre modelos estándar e internos de FRTB que puede ser escalado institucionalmente.

2.1. Introducción

Desde la crisis financiera 2007-9 vienen desarrollándose cambios profundos en la regulación del sector bancario. La reforma de Basilea III en BCBS [2011b] y su versión consolidada en BIS [2017] introdujo cambios en relación al apalancamiento y requerimientos de capital, mejores estándares para la gestión y tratamiento del riesgo de mercado, crédito, operacional, liquidez y una supervisión basados en pruebas de tensión. Debido a las deficiencias significativas encontradas durante la crisis para las actividades de trading que derivaron en una alta exposición a riesgo mercado de la cartera, en 2019 el BCBS consolidó la Revisión Fun-

damental del libro de negociación en BIS [2019] (*Fundamental Review of the Trading Book - FRTB*), con el objetivo de mejorar el diseño y la coherencia de los estándares de capital para riesgo de mercado.

La regulación FRTB presenta una aproximación nueva a los modelos actuales de gestión de riesgo de mercado y su implementación está prevista a partir de 1 de enero de 2023. La regulación incorpora tres aspectos fundamentales. El primero de ellos es la diferenciación entre el libro de negociación y el libro bancario e identifica con precisión qué instrumentos son asignados a cada uno y evitar oportunidades de arbitraje entre los capitales de requerimiento estimados.

El segundo cambio se relaciona con los modelos internos (*internal models approach* - IMA) para medir el riesgo de mercado, los cuales deben ser previamente aprobados por el ente regulador. En este punto, la regulación reemplaza las medidas *VaR* y *sVaR* establecidas por Basilea 2.5 (ver BCBS [2011a]) y estima el requerimiento total de capital basado en la agregación de los siguientes tres componentes: el requerimiento basado en el valor en riesgo condicional (*expected shortfall* - *ES*), el requerimiento a cuenta de factores de riesgo no modelables (*non-modellable risk factors* - NMRF), y el requerimiento por riesgo de impago (*default risk capital* - DRC).

El tercer aspecto es la reformulación del método estándar para determinar el capital por riesgo de mercado el cual es de obligatorio cumplimiento (*standardised approach* - SA). El requerimiento de capital total es definido a su vez por la agregación de los siguientes tres componentes: El requerimiento de capital basado en las sensibilidades delta, vega y curvatura (*Sentitivities-based method* - SbM), el requerimiento por riesgo de impago (*standardised default risk capital requirement* - DRC), y el requerimiento por riesgo residual (*residual risk add-on* - RRAO).

De este modo, la implementación de la FRTB para 2023 constituye un proceso con un grado de complejidad importante, dado que incorpora soluciones a cuestionamientos fundamentales en materia de administración de riesgos como son: medidas de riesgo en condiciones de estrés en el mercado, estimaciones de sensibilidad o medidas *ES* que capturan la no linealidad en los cambios de precios de instrumentos, adaptación a la descripción de colas gruesas en distribuciones de pérdida de portafolios, inclusión de *volatilidades* de volatilidades en factores de riesgo así como la consideración de una dinámica correlativa entre ellos que sea coherente y consistente con un mercado cambiante, estresado e interactuante como sistema que es.

La FRTB impactará los niveles de capital de las instituciones financieras para el cubrimiento de riesgos, lo que implica presiones sobre excedentes y la re-estructuración de los portafolios sujetos a riesgo de mercado para incrementar los niveles de solvencia, que permita a las instituciones financieras estar mejor preparadas para afrontar períodos de crisis. En BCBS [2019] el Comité de Basilea para la Supervisión Bancaria estima en enero de 2019, y a partir de una muestra de Bancos, el impacto a futuro de la implementación de FRTB.

En el último estudio mencionado, los activos ponderados por riesgo aumentan de 4.4 % en Basilea 2.5 a 5.3 % en FRTB, ambos en relación al total de activos ponderados por riesgo en

Basilea III. Además, el incremento promedio de capital de riesgo es 22 % respecto a Basilea 2.5. Por su parte, en FRTB el capital por riesgo bajo SA es considerablemente mayor (sobre 60 % en promedio) que el respectivo capital bajo IMA. Y en el caso de pequeños bancos bajo SA, se estiman incrementos alarmantes para el capital por riesgo. Otro estudio adicional aparece en BCBS [2020], donde se analiza el impacto de FRTB, desde datos de finales del año 2019, para todos los componentes de las reformas recientes de Basilea III, incluyendo FRTB. De otro lugar, en EBA [2020] se hace un análisis preliminar del impacto de covid-19 sobre las reformas de Basilea III.

Finalmente, la implementación de la regulación FRTB en la industria bancaria para la presente década supone otros retos trascendentes para las instituciones, además del reto de solvencia. En este sentido, es menester un talento humano con fundamentación cuantitativa para tramitar los cambios, adopción de modelos estadísticos y no estadísticos para el estudio de modelos de incertidumbre, procesos y herramientas confiables que apoyen la toma de decisiones, habilidades tecnológicas en grandes volúmenes de información y computación, códigos y cómputos eficientes a realizarse en clústers, unidades GPUs y nubes, y sobre todo una actitud reflexiva y crítica frente a la transparencia de las instituciones bancarias. Los anteriores desafíos, plantean a su vez, una ruta de acceso y oportunidad a un mercado financiero moderno de alcance global para la banca, donde se estructuren nuevos portafolios, se gestione con las herramientas más actuales su riesgo financiero, y donde con solidez financiera y responsabilidad se respalden proyectos sociales de bienestar.

Frente a los anteriores retos se tienen algunos avances. Por ejemplo, respecto a los modelos internos de FRTB, la métrica ES es una medida coherente de riesgo que tiene sus fundamentos en los trabajos de Artzner et al. [1999] y Rockafellar and Uryasev [2000, 2002, 2013]. Un análisis comparativo entre la métrica más conocida VaR y ES puede verse en Embrechts et al. [2020, 2018], y diferentes métodos de estimación y modelos de ES se documentan, por ejemplo, en Patton et al. [2019], Nadarajah et al. [2014], Chen [2008] y Scaillet [2004]. En relación a lo anterior, FRTB requiere realizar pruebas de desempeño por back-testing para la medida del riesgo VaR . Un estudio amplio y práctico de estas pruebas aparece en Nieto and Ruiz [2016]. De otro lado, en Laurent et al. [2016] se analizan los fundamentos teóricos e implicaciones de la FRTB respecto al capital por riesgo de impago (DRC) en los modelos internos. Y en Orgeldinger [2018] se presentan algunas aproximaciones recientes para implementar industrialmente la regulación FRTB, bajo SA e IMA; también se analizan desafíos, requerimientos y consecuencias. La investigación en la nueva gestión de riesgo de mercado es fértil y tiene mucho camino por hacer.

En consecuencia a lo anterior, este trabajo presenta un algoritmo, desde la aproximación estándar (SA) de FRTB, para estimar el capital por riesgo de mercado relativo al método de sensibilidades delta, vega y curvatura (SbM). Desde este planteamiento se puede prever algunas condiciones fundamentales para su implementación, como son los procesos involucrados, su complejidad, y su alta demanda computacional. También se podría experimentar con portafolios hipotéticos para hallar su capital de riesgo bajo SA - SbM. Algunas de las

características del algoritmo guardan relación y extienden el trabajo de Orgeldinger [2018]. De otro lado, a interés de tejer puentes de comunicación entre los modelos estándar (SA) y los internos (IMA), se propone una metodología para estimar la métrica ES en un portafolio de opciones financieras, donde se consideran escenarios de estrés de manera coherente a las recuestas de FRTB. En este punto, creemos que el relacionamiento planteado de ES con FRTB es un avance que puede darse en la literatura, en la cual no hay muchos estudios referenciados al respecto, y puede configurar un anexo al documento en BCBS [2019]. Al final, se realiza una ilustración numérica para fomentar la comprensión del método de sensibilidades siguiendo el algoritmo propuesto y se desarrolla, además, una aplicación donde se mide el impacto ES bajo FRTB vs VaR en un portafolio simple de opciones sobre divisas. Al respecto, se consideran escenarios de estrés tomados de la crisis 2007-9 y 2020-1, y se ejecuta un conjunto de pruebas back-testing.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. La sección 2.2 presenta una revisión del marco teórico y la sección 2.3 define la metodología. Posteriormente, en la sección 2.4 se presentan resultados y discusiones de los hallazgos más relevantes. Finalmente, la sección 2.5 expone las conclusiones y limitaciones del trabajo.

2.2. Marco Teórico - Riesgo de Mercado

Un estudio de medidas de riesgo de mercado VaR y ES , así como sobre pruebas back-testing, aparecen en el capítulo 1 de esta tesis. Adicional a estos antecedentes, el siguiente apartado introduce cambios fundamentales de la nueva regulación bancaria FRTB.

2.2.1. Regulación FRTB

IMA - ES

Se consideran algunos detalles sobre los modelos internos (IMA) en lo que concierne a la métrica ES . El capital por riesgo correspondiente es estimado en condiciones de un mercado estresado, usando datos sobre un período de estrés de 12 meses (*stressed ES*), a un nivel de confianza de 97.5% y con un horizonte de tiempo que varía dependiendo de la liquidez de la variable o instrumento de riesgo bajo estudio.

Los horizontes de tiempo por liquidez se establecen como 10, 20, 40, 60, y 120 días. Sin embargo, todos los cálculos se basan en cambios en los factores de riesgo sobre períodos solapados de 10 días, y como consecuencia, cinco estimaciones de ES son necesarias para obtener el cálculo completo de ES . Este es un punto crucial, dado que las muestras producidas son conceptualmente dependientes.

Simbólicamente, si los factores de riesgo son clasificados en la categoría i de acuerdo al horizonte de liquidez LH_i establecido en la regulación FRTB, entonces la métrica de riesgo

de mercado ES ajustada por liquidez está dada por

$$ES = \sqrt{ES_1^2 + \sum_{j=2}^5 \left(ES_j \sqrt{\frac{LH_j - LH_{j-1}}{10}} \right)^2} \quad (2-1)$$

donde ES_i representa la medida de riesgo ES estimada para los factores de riesgo en las categorías $i, i + 1, \dots, 5$ y manteniendo los valores de factores de riesgo de las categorías $1, 2, \dots, i - 1$ constantes.

Seguidamente, para conseguir el capital de requerimiento, se calcula la métrica ponderada WES (*weighted expected shortfall*) dada por

$$WES = \lambda EST + (1 - \lambda) \sum_j ESP_j, \quad (2-2)$$

donde EST es la medida ES sobre el portafolio completo y ESP_j es la medida parcial ES de la mesa de operaciones j . Finalmente, usando la notación descrita antes, el capital CR por riesgo de mercado en el día t es

$$CR = \max(WES_{t-1} + NMRF_{t-1}, m_c WES_{avg} + NMRF_{avg}), \quad (2-3)$$

donde $NMRF$ indica el capital por requerimiento de aquellos factores de riesgo no modelables.

De otro lado, dos pruebas de desempeño (*back-testing* y *profit & loss*) son acordadas en la regulación. La primera de ellas debe ser realizada en el libro bancario, mientras que ambas pruebas deben ser efectuadas en el libro de negociación. De otro lado, en el libro de negociación la prueba *back-testing* está basada en la métrica 1-día VaR y a dos niveles de confianza 97.5% y 99%, la cual debe ser calibrada con datos actuales de mercado en 12 meses.

SA - SbM

La regulación FRTB en el modelo estándar (SA) incluye el método de sensibilidades, SbM, donde se estima el capital por riesgo de mercado a causa de los riesgo delta, vega y curvatura en los factores de riesgo de un portafolio, ver BIS [2019]. El proceso de cálculo de dicho capital involucra diversas tareas en las cuales se identifican clases de riesgos de exposición del portafolio, y según la sensibilidad objetivo, los factores se agrupan en buckets o categorías. Desde ellos, el capital se asigna por mecanismos de agregación de riesgos dentro y entre buckets, análisis de estrés de correlaciones, y por criterios bien definidos en cada una de las clases de riesgos.

Simbólicamente, usando la misma notación y formulación de la regulación FRTB en BIS [2019], si s_k es la sensibilidad neta de los instrumentos del portafolio para cada factor de riesgo k , y la sensibilidad s_k es ponderada por el peso RW_k , entonces la sensibilidad s_k ponderada, WS_k , viene dada por

$$WS_k = RW_k s_k, \quad (2-4)$$

y consecuentemente la agregación K_b de las posiciones de riesgo delta o vega en el bucket b se estima por

$$K_b = \sqrt{\max\left(0, \sum_k WS_k + \sum_k \sum_{k \neq l} \rho_{kl} WS_k WS_l\right)} \quad (2-5)$$

donde ρ_{kl} es la correlación entre WS_k y WS_l . Además, la agregación para el riesgo delta o vega entre diferentes buckets se calcula como

$$\text{delta (respectivamente vega)} = \sqrt{\sum_b K_b^2 + \sum_b \sum_{c \neq b} \gamma_{bc} S_b S_c} \quad (2-6)$$

donde $S_x = \sum_k WS_k$ para todos los factores de riesgo k en el bucket x , γ_{bc} es la correlación entre buckets, y a condición que el radicando sea no negativo.

Para otras formulaciones complementarias, así como aquellas relacionadas con estimaciones de capital de requerimiento por riesgo de curvatura, se referencia directamente a la regulación en BIS [2019].

Clases de riesgo equity y FX Respecto a las mediciones delta y vega, si k es un factor de riesgo en las clases de riesgo equity o de cambio de divisas, X_k es su precio asociado, y V es el valor de mercado de un instrumento que depende de X_k , entonces la sensibilidad delta es la razón de cambio de V cuando el precio del subyacente X_k cambia 0.01, y la sensibilidad vega es el producto $(\partial v / \partial \sigma) \sigma$, donde σ es la volatilidad implícita de opciones las cuales tienen como subyacente X_k y como madurez al menos un elemento del conjunto *tenor* de vencimientos anuales $\{0.5, 1, 3, 5, 10\}$.

2.3. Metodología: evaluación de riesgo mercado bajo la regulación de Basilea FRTB

La nueva regulación de Basilea para gestión de riesgo mercado está consolidada en FRTB (BIS [2019]) y entra en vigencia en el año 2023. Ésta incorpora tres cambios significativos

respecto a la regulación actual dada en Basilea 2.5. Los cambios orientan con precisión la gestión de libros de negociación y bancarios, el modelo estándar (SA) y el modelo interno (IMA) para la evaluación de los riesgos.

2.3.1. Modelo estándar FRTB - método de sensibilidades

Tal como fue planteado en la sección 2.1 y el apartado 2.2.1, en FRTB el método estándar (SA) a su vez tiene tres componentes. Una de ellas se refiere al método de sensibilidades, SbM, en los cuales se debe estimar el capital mínimo de requerimiento de un portafolio por riesgos delta, vega y curvatura.

Los diferentes instrumentos de un portafolio en el libro de negociación (por ejemplo, instrumentos en mercado accionario, renta fija, materias primas, divisas, bienes raíces, mercado de derivados) se relacionan con *factores de riesgo*, los cuales determinan su precio. Los factores de riesgo pueden ser el precio de un activo, una tasa repo, una estructura de tasas de interés o de volatilidades, una curva de diferencial de crédito, el precio de un commodity, el precio de una divisa, una tasa forward, entre otros.

A su vez, los factores de riesgo se hacen corresponder a siete *clases de riesgos*: riesgo de tasas de interés (GIRR), tres tipologías de riesgo de diferencial de crédito (CSR), riesgo equity (bursátil), riesgo commodity y riesgo de tasa de cambio de divisas (FX).

Adicionalmente, en cada una de las clases de riesgos, los respectivos factores de riesgo se agrupan en *buckets* o categorías. Tales buckets, por ejemplo para la clase de riesgo equity, pueden ser definidos según la capitalización de un activo, su pertenencia a un determinado sector de la industria y su pertenencia a su un mercado o desarrollado o emergente. Los buckets también se pueden especificar de acuerdo a una divisa de negociación, a la calidad crediticia de una institución, al tipo de un commodity (grano, energía, metales, etc), según una tasa de cambio entre dos monedas, entre otros.

Posteriormente, el enfoque SbM requiere estimar tres exposiciones de riesgo vía *sensibilidades delta, vega, y curvatura* para cada factor, las cuales están relacionadas con las letras Griegas de riesgo delta, vega, y gamma de un instrumento financiero. Respecto a la sensibilidad vega, su ponderación por riesgo considera el horizonte de liquidez de la respectiva clase de riesgo a la cual pertenece el factor.

Según la regulación FRTB, las sensibilidades deben ser *agregadas* bajo correlaciones prescritas, a nivel bucket y entre buckets de una misma clase. Finalmente, el *capital de requerimiento* del portafolio inicial es calculado para cada una de las siete clases de riesgos y luego agregados por suma simple. El procedimiento se repite en tres escenarios de correlaciones entre los factores de riesgo denominados *escenario bajo, medio, y alto*, a fin de considerar variaciones de correlación en todo el portafolio en períodos de estrés financiero. El capital de requerimiento final es el mayor resultado arrojado en los tres escenarios.

De esta manera, la estructura lógica de los procesos implicados en el cálculo del capital por riesgo, CR, en el método de sensibilidades de FRTB es *compleja*. A continuación, por tanto,

se propone el Algoritmo 1, el cual representa una versión preliminar para una implementación en la industria bancaria del método SbM. El algoritmo extiende en parte en trabajo de Orgeldinger [2018] y se alinea a la necesidad de automatizar, a partir del año 2023, procesos modernos estándares en gestión de riesgo mercado. La implementación, además, podría facilitar la experimentación en el cálculo de capital por riesgo, bajo SA-SbM en la regulación FRTB, para portafolios hipotéticos.

Algorithm 1 Estimar capital por riesgo bajo Basilea FRTB, SA - SbM

Require: datos del portafolio, parámetros a necesidad

Ensure: CR bajo FRTB, modelo estándar, método sensibilidades

```

1: identifique factores de riesgo {MAR 10.9}
2: identifique clases de riesgo {MAR 21.1}
3:  $esc = \{medio, bajo, alto\}$  {MAR 21.6}
4: for  $i = 1$  to 3 do
5:    $escenario = esc(i)$  {MAR 21}
6:   for all clase de riesgo do
7:     for all sensibilidad delta, vega, y curvatura do
8:       for all factor de riesgo en la clase de riesgo do
9:         estime la sensibilidad del factor de riesgo
10:        asigne al factor de riesgo un bucket
11:        identifique pesos ponderados por riesgo
12:        identifique correlaciones nivel bucket y entre buckets (escenario)
13:      end for
14:      reporte: ciclo precedente según sensibilidad
15:      reporte: correlaciones bajo estrés escenarios medio, bajo, y alto
16:      for all buckets en la sensibilidad do
17:        estime CR: agregación nivel bucket (escenario)
18:      end for
19:      estime CR: agregación entre buckets (escenario)
20:    end for
21:    estime CR según clase de riesgo (escenario)
22:  end for
23:  reporte: CR por clase de riesgo y sensibilidad (escenario)
24: end for
25: estime CR Modelo estándar - SbM {MAR 21.7}
```

Las líneas del Algoritmo 1, a excepción de aquellas indicadoras de ciclos o bucles, indican *procesos* que conducirían a sus propios algoritmos de implementación. La cantidad de ciclos **for** reflejan la alta complejidad y demanda computacional de todo el proceso. Las líneas 1, 2, 3 y 25, están comentadas en gris, indicando ítems específicos de la regulación FRTB a

los que se apela para realizar el proceso correspondiente. Las demás líneas son consecuencia de una visión integrada del capítulo MAR21 en FRTB. Finalmente, las líneas 17, 19, y 25 involucran procesos de cálculo para agregar riesgos nivel y entre buckets, así como la selección de capital de riesgo por análisis de escenarios según correlaciones entre buckets. Las formulaciones técnicas fueron descritas o referenciadas en la sección 2.2.1.

2.3.2. Modelos internos FRTB - métrica expected shortfall

Como fue descrito en la sección 2.1 y el apartado 2.2.1, en FRTB los modelos internos (IMA) reúnen tres cambios substanciales, uno de los cuales involucra el cálculo de riesgo mercado vía la métrica *expected short fall*, ES. En coherencia, a continuación se *propone* una adaptación del método tradicional de simulación histórica para estimar las métricas de riesgo *VaR* y *ES* de un portafolio de opciones financieras de manera consistente con los requerimientos de la regulación FRTB en modelos internos. Las relaciones construidas permiten, además, trazar puentes de comunicación entre modelos SA e IMA en dicha regulación.

En primera instancia se *plantea* una aproximación a la medida *VaR* consistente con FRTB para un portafolio de n opciones financieras.

Definición 2.3.1 (Escenarios para precios de una opción). *Considere un portafolio con valor inicial Π compuesto por n opciones financieras, donde la opción i tiene como subyacente el activo S_i , $i = 1, \dots, n$. Denote el precio de la opción i en el día j por $f_{i,j}$ y suponga que hoy es el día m . Si se tienen $m + N$ observaciones de precios para cada opción, es posible estimar m escenarios factibles de precios $f_{i,j,m}^N$ de la opción en el día $m + N$, definidos de modo que el j -ésimo escenario es*

$$f_{i,j,m}^N = f_{i,m} \frac{f_{i,j}}{f_{i,j-N}}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m \quad (2-7)$$

Proposición 2.3.1 (*VaR* histórico de un portafolio de opciones). *Asuma que hoy es el día m y que se genera para el día $m + N$ un conjunto de m escenarios de precios para cada opción i de un portafolio de n opciones, el cual tiene valor inicial Π , y donde los escenarios son construidos según la ecuación (2-7) en la definición 2.3.1, $i = 1, \dots, n$. Entonces, la distribución de pérdidas en el día $m + N$ de los cambios en $-\Delta\Pi$ en N días, está dada por el siguiente espacio de pérdidas equiprobables*

$$p_j^N = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{f_{i,j,m}^N}{f_{i,m}}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m \quad (2-8)$$

donde α_i es la inversión colocada en la opción i . De este modo, la medida monetaria de riesgo VaR histórico a N días y a un nivel de confianza α del portafolio se estima como el percentil α , Q_α , de $\{\mathbf{p}_j^N\}_{j=1}^m$, esto es,

$$VaR_\alpha = Q_\alpha(\{\mathbf{p}_j^N\}_{j=1}^m) \quad (2-9)$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, asuma que $N = 1$. La verdad de la ecuación (2-8) se establece argumentando según el método inductivo. Sea $P(k)$ la proposición dada para un portafolio con k opciones. La proposición resulta cierta para $k = 1$. En efecto, la pérdida \mathbf{p}_j^1 del portafolio en el día $m + 1$, dado el j -ésimo escenario, se calcula como $-\alpha_1 \cdot \text{retorno}$, donde $\text{retorno} = \frac{f_{1,j}}{f_{1,j-1}} - 1$. Así que

$$\mathbf{p}_j^1 = \alpha_1 - \alpha_1 \frac{f_{1,j}}{f_{1,j-1}} \quad (2-10)$$

$$= \alpha_1 - \alpha_1 \frac{f_{1,m}(f_{1,j}/f_{1,j-1})}{f_{1,m}} \quad (2-11)$$

$$= \alpha_1 - \alpha_1 \frac{f_{1,j,m}^1}{f_{1,m}}. \quad (2-12)$$

Asuma ahora que $P(k)$ es cierto. El condicional *si* $P(k)$ entonces $P(k + 1)$ es tautológico dado que $P(k + 1) = P(k) + P(1)$. Finalmente, a partir de la definición de la medida VaR y la ecuación (1-1), VaR_α es el percentil α de $\{\mathbf{p}_j^1\}_{j=1}^m$. Esto termina el argumento. \square

Comentario 2.3.1 (*VaR-normal y VaR-t*). *Alternativamente, es posible ajustar una distribución paramétrica al portafolio de pérdidas $\{\mathbf{p}_j^N\}_{j=1}^m$ y obtener así las respectivas medidas de riesgo VaR . VaR -normal y VaR -t son obtenidos, respectivamente, ajustando una distribución Gaussiana o una t de student con ν grados de libertad.*

En segundo lugar, se *propone* una adaptación al método de simulación histórica para estimar ES en un portafolio de n opciones de modo compatible a los requerimientos de la FRTB.

Proposición 2.3.2 (*ES-histórico de un portafolio de opciones*). *Partiendo de la misma ambientación dada en la definición 2.3.1 y proposición 2.3.1, la métrica ES_α se aproxima por*

$$ES_\alpha \approx \frac{\sum_{j=1}^{\lfloor m(1-\alpha) \rfloor} \mathbf{p}_j^N}{\lfloor m(1-\alpha) \rfloor} \quad (2-13)$$

Demostración. La estimación se logra apelando a la ecuación 1-20, haciendo que las pérdidas $\{L_{j,m}\}_{j=1}^m$ sean iguales a las pérdidas $\{\mathbf{p}_j^N\}_{j=1}^m$ establecidas en la ecuación (2-8) de la proposición 2.3.1. De este modo, cuando m se hace grande, la métrica ES_α se aproxima por la ecuación (2-13). \square

Comentario 2.3.2 (*ES-normal y ES-t*). *Alternativamente, es posible ajustar una distribución paramétrica al portafolio de pérdidas $\{p_j^N\}_{j=1}^m$ y así obtener las respectivas medidas de riesgo ES. ES-normal y ES-t son obtenidas, respectivamente, ajustando una distribución Gaussiana o una t de student con ν grados de libertad.*

Comentario 2.3.3 (relación *ES y VaR* con Basilea FRTB). *Las anteriores métricas ES y VaR (en las versiones histórica, normal, y t) se hacen compatibles a los requerimientos de la FRTB cuando $m = 250$, $\alpha = 97.5\%$, el horizonte de liquidez N en días es tal que $N \in \{10, 20, 40, 60, 120\}$, y los escenarios para los precios $f_{i,j,m}^N$ en la ecuación (2-7) de la definición 2.3.1 se logran a partir de $m + N$ observaciones de precios en un período de estrés de mercado. Esta manera de proceder es similar a los requerimientos establecidos en IMA-ES, ver BIS [2019].*

Comentario 2.3.4 (escenarios de estrés a considerar en FRTB). *Los escenarios de estrés contruidos a partir de la definición 2.3.1 pueden ser logrados a partir de la crisis financiera global 2007-9 y la crisis por pandemia 2020-1. Las medidas resultantes, VaR y ES adaptadas a FRTB, además de implicar capitales de riesgo del portafolio, son objetos a través de los cuales se hace posible medir y analizar impactos de ambas crisis, aportando información a la toma de decisiones respecto a libros de negociación en instituciones bancarias.*

2.4. Resultados

2.4.1. Ilustración: riesgo mercado por método de sensibilidades en Basilea FRTB

La regulación bancaria de Basilea FRTB para riesgo mercado documenta en BCBS [2019] dos ejemplos simples para estimar el capital por riesgo de mercado usando el método estándar de sensibilidades, SA - SbM, buscando promover un nivel de comprensión para su implementación en la industria bancaria. Sin embargo, los ejemplos son notablemente resumidos y poco explícitos en sus cálculos.

Uno de los ejemplos mencionados es aplicado a un portafolio de una opción financiera, y es sobre este ejemplo que se presenta esta ilustración, la cual: sigue los pasos del algoritmo 1 sugerido en la sección 2.3.1, complementa algunas estimaciones por realizar en hojas de cálculo, e indican explícitamente los artículos de la regulación FRTB a utilizar. Estas características adicionales sirven pues de guía auxiliar al fomento en la comprensión y estudio de la regulación oficial FRTB.

El portafolio en cuestión se compone de una opción put sobre el activo hipotético Telco en posición corta de un banco, el cual reporta en divisa canadiense (CAD). La Tabla 2-1 muestra los datos esenciales del portafolio y reproduce la Tabla A2.1 en BCBS [2019].

En consecuencia, las Tablas 2-2, 2-3, y 2-4 estiman, en hojas de cálculo, el capital de riesgo delta, vega y curvatura siguiendo las pautas del algoritmo 1 bajo escenarios de correlaciones

Tabla 2-1.: Portafolio de opciones en la regulación bancaria de Basilea FRTB

Instrumento	Divisa	Madurez	Industria	Tipo de opción	precio (CAD)
opción put @ Telco	EUR	2 años	Telecomunicaciones	Europea	-0.38

medias. La notación usada en las anteriores tablas fue introducida en la sección 2.2.1. En la columna derecha de cada hoja de cálculo se referencia los ítems específicos de FRTB que respaldan los cálculos. Cuando se repiten los cálculos correspondientes a delta y vega bajo escenarios de correlaciones bajas y altas, generando hojas de cálculo similares, el capital por riesgo delta se conserva en CAD 0.21, mientras que el capital de vega incrementa a CAD 0.9567. De otro lado, al igual que ocurre en BCBS [2019], se asume que el capital por riesgo de curvatura por estrés de correlaciones se conserva en CAD 1.75. En la hoja de cálculo representada en la Tabla **2-4**, los cálculos en las celdas marcadas con # se omiten. Sin embargo, las magnitudes correspondientes son calculadas de manera usual en valoración de derivados. El capital por riesgo bajo el método de sensibilidades, SbM, resulta ser CAD 2.9167. Como comparación, los resultados mostrados coinciden con los reportados en BCBS [2019] para riesgos vega y curvatura en escenarios de correlación media. Allí, los demás cálculos referidos no aparecen.

Para concluir, en primer lugar se nota que el capital por riesgo total es significativamente mayor que el valor de la opción (en un factor de 7.6). De otro lado, el bucket asociado a la opción es b6 (celda B3 en la Tabla **2-2**), lo que significa que el activo subyacente, afiliado al sector de telecomunicaciones, tiene una capitalización alta (\geq USD 2 billones, FRTB - MAR 21.74) y proviene de una economía avanzada (países relacionado en FRTB - MAR 21.75). De lo anterior, se infiere que el capital por riesgo de la opción sería mayor que el calculado previamente para activos coligados a capitalizaciones bajas o pertenecientes a una economía emergente. Aún cuando esta ilustración es hipotética, se basa en un ejemplo con datos idénticos construido en BCBS [2019], por lo cual, la situación descrita constituye una aproximación de posibles impactos que pueden acaecer con la implementación del componente SbM en la regulación FRTB de Basilea para la gestión de riesgo mercado.

Por último, el algoritmo 1 propuesto posibilita construir hojas de cálculo, como las representadas en las Tablas **2-2** a **2-4**, para portafolios más complejos con múltiples clases de riesgo, factores y buckets. El desarrollo del algoritmo 1 a gran escala, superando los retos que esto supone, posibilitaría el acceso a una plataforma para medir el riesgo mercado y sus posibles impactos en un portafolio vía el método SbM en FRTB.

Tabla 2-2.: Capital por riesgo delta (CAD) - Basilea FRTB, SA - SbM

	A	B	C
1	Factor de riesgo	opción put @ Telco	
2	Clase de riesgo	EQUITY	
3	Bucket	b6	FRTB MAR 21.72
4	Valor de mercado	-0.38	
5	Sensibilidad	s1	
6	delta	0.6	FRTB MAR 21.21
7	Riesgo ponderado - RWs	35.00 %	FRTB MAR 21.77
8	Sensibilidad ponderada - WS	0.2100	
9	Agregación nivel bucket	correlaciones medias	FRTB MAR 21.6
10	correlación nivel bucket	25 %	FRTB MAR 21.78
11	Riesgo delta en bucket	Kb1	
12	CR nivel bucket	0.2100	FRTB MAR 21.4
13	Agregación entre bucket		
14	correlaciones entre bucket	15 %	FRTB MAR 21.80
15	suma WSs en bucket	Sb1	
16		0.2100	
17	CR por riesgo delta en clase	0.2100	FRTB MAR 21.4

Tabla 2-3.: Capital por riesgo vega (CAD) - Basilea FRTB, SA - SbM

	A	B	C	D	E
1	Factor de riesgo	opción put @ Telco			
2	Clase de riesgo	EQUITY			
3	Bucket	b6			MAR 21.91
4	Sensibilidad	s1	s2	s3	
5	puntos tenor	0.5	1	3	MAR 21.12
6	vega	0	-0.63	-0.6	MAR 21.25
7	Riesgo ponderado - RWs	77.78 %			MAR 21.92
8	Sensibilidad ponderada - WS	0.0000	-0.4900	-0.4667	
9	Agregación nivel bucket	correlaciones medias			MAR 21.6
10	correlaciones nivel bucket	1.0000	0.9900	0.9512	MAR 21.94
11		0.9900	1.0000	0.9802	
12		0.9512	0.9802	1.0000	
13	Riesgo vega en bucket	Kb1			
14	CR nivel bucket	0.9519			MAR 21.4
15	Agregación entre bucket				
16	correlaciones entre bucket	15 %			MAR 21.95
17	suma WSs en bucket	Sb1			
18		-0.9567			
19	CR por riesgo vega en clase	0.9519			MAR 21.4

Tabla 2-4.: Capital por riesgo de curvatura (CAD) - Basilea FRTB, SA - SbM

	A	B	C	D	E
1	Factor de riesgo	opción put @ Telco			
2	Clase de riesgo	EQUITY			
3	Bucket	b6			MAR 21.97
4	Valor de mercado	-0.38			
5	Sensibilidad	s1			
6	delta	#			
7	Riesgo ponderado - RWs	35%			MAR 21.98
8	Choque a factor de riesgo				
9	$[x^-, x, x^+]$	#	#	#	MAR 21.98
10	Precio de instrumento				
11	$[V(x^-), V(x), V(x^+)]$	#	#	#	
12	Curvatura en factor				
13	$[CVR^-, CVR^+]$	#		#	MAR 21.98
14	Agregación nivel bucket	correlaciones medias			MAR 21.6
15	correlaciones nivel bucket	6.25%			MAR 21.100
16	Curvatura nivel bucket				
17	$[Kb^-, Kb^+]$	0.90		1.75	MAR 21.5
18	Riesgo curvatura en bucket	Kb			
19	CR nivel bucket	1.75			MAR 21.5
20	Agregación entre bucket				
21	correlaciones entre bucket	2.25%			MAR 21.101
22	suma CVR^\pm en bucket	Sb			
23		#			
24	CR por riesgo curvatura en clase	1.75			MAR 21.5

2.4.2. Aplicación: riesgo ES bajo FRTB vs VaR en una opción call de divisas

Se considera un portafolio compuesto por una opción call Europea sobre GBP/USD en estado ATM y vencimiento anual $T \in \{0.5, 1\}$. En primer lugar, de acuerdo a la sección metodológica 2.3.2, se estiman riesgos VaR y ES de la opción a través de una adaptación propuesta al método de simulación histórica, coherente con requerimientos de modelos internos (IMA) de FRTB. La estimación debe realizarse sobre la construcción de escenarios de estrés para el activo subyacente, y para ello se eligen dos marcos de referencia, uno desde la crisis financiera global 2007-9 y otro desde la crisis por pandemia covid-19 2020-1.

De otro lado, las medidas de riesgo estimadas son comparadas respecto a medidas VaR y ES obtenidas por ajustes de distribuciones de probabilidad para el portafolio de pérdidas y respecto a métricas convencionales VaR vía letras Griegas de la opción. Los resultados permiten evaluar posibles impactos sobre capital de riesgo en opciones de divisas sobre GBP/USD a través de cada una de las métricas de riesgo, y de paso prever cuál escenario de crisis, 2007-9 o 2020-1, resulta generar mayor afectación a capital.

Finalmente, de acuerdo a la sección 1.2, se ejecutan pruebas back-testing para las métricas de riesgo VaR consideradas, bajo FRTB vs versiones tradicionales. Los resultados sugieren que la metodología planteada en la sección 2.3.2 es idónea.

Datos de mercado y escenarios de estrés

En lo que sigue, las fechas se escriben en el formato dd/mm/yyyy. Los datos usados corresponden a la tasa de cambio GBP/USD y las curvas del tesoro para la tasa cero cupón en USA y UK correspondientes a los tenores anuales $T = 0.5$ y $T = 1$. Los datos son obtenidos de Bloomberg en el rango de fechas 03/01/2000 hasta 03/06/2021. Por otra parte, los períodos de estrés referidos en las métricas de riesgo son los siguientes,

- I Período i, crisis financiera 2007-9. Se considera la tasa de cambio GBP/USD durante 03/02/2009 - 18/01/2010.
- II Período ii, crisis por covid-19 2020-1. El rango de fechas considerado es 10/02/2020 - 22/01/2021.

Información para el cómputo de VaR y ES

La Tabla 2-5 resume la información necesaria para medir las métricas de riesgo en cuestión. Allí, la fecha de valoración t para las métricas de riesgo VaR y ES representa un día cualquiera entre 22/01/2021 y 03/06/2021. En este caso, se eligen dos fechas. Los escenarios de estrés son los períodos i y ii anteriormente descritos.

Tabla 2-5.: Datos de entrada métricas VaR y ES bajo FRTB

Fechas de valoración de métricas de riesgo (t)		
22/01/2021, 03/06/2021		
Escenarios de estrés	Período i	03/02/2009 - 18/01/2010
	Período ii	10/02/2020 - 22/01/2021
Call sobre GBP/USD	Modelo de valoración	Black Scholes
	Valor subyacente	tasa de cambio en t
	Vencimiento anual	$T \in \{0.5, 1\}$
	Strike	precio del subyacente en t
	Volatilidad GBP/USD	sobre 250 días previos a t
	Tasas local y foránea	curvas cero en USA y UK
Métricas de riesgo	VaR tradicional	delta, delta-gamma
	VaR y ES - FRTB	normal, t-student, histórico
Nivel de confianza y horizonte de riesgo	$\alpha = 0.975$; $N = 1, 10$, y 20 días	

Por su parte, para valorar las opciones call se selecciona el modelo de valoración y se ingresan de manera dinámica (día a día) los parámetros de mercado para la tasa de cambio en t , el tiempo de madurez, el precio strike, la volatilidad del subyacente, y las tasas local y foránea. Además, las métricas de riesgo VaR y ES estimadas son las siguientes. Primero, se estiman métricas VaR convencionales delta y delta-gamma, las cuales son independientes de los escenarios de estrés. Segundo, medidas VaR y ES adaptadas a FRTB por ajuste normal y t-student de la distribución de pérdidas a N días del portafolio, de acuerdo a los comentarios 2.3.1 y 2.3.2. Luego, se estiman las medidas VaR y ES adaptadas a FRTB vía simulación histórica, que fueron propuestas en la sección 2.3.2, ecuaciones 2-9 y 2-13. Finalmente, se establece el nivel de confianza α y el horizonte N de las métricas de riesgo. Según FRTB, el nivel α es 0.975 y N depende de la liquidez del activo subyacente al instrumento financiero.

Métricas de riesgo, comparaciones e impactos

Para empezar se establece la siguiente notación,

VaR convencionales medidas VaR delta y delta-gamma: $VaR \delta$ y $VaR \delta\gamma$.

VaR FRTB medidas VaR normal, t-student, e histórico: $VaR \mathcal{N}$, $VaR \mathcal{T}_\nu$, $VaR \mathcal{H}$. ν representa los grados de libertad para la distribución t-student.

ES FRTB medidas ES normal, t-student, e histórico: $ES \mathcal{N}$, $ES \mathcal{T}_\nu$, $ES \mathcal{H}$.

Posteriormente, con la información dada en la Tabla 2-5 y la metodología definida en la sección 2.3.2, se estiman en términos relativos las métricas de riesgo convenidas, las cuales

se exponen en la Tabla **2-6**. Allí se muestra que para cada fecha t las métricas de riesgo se computan a modo tradicional, vía letras Griegas, y usando escenarios de estrés por crisis 2007-9 y 2020-1, vía FRTB; considerando además tres posibles horizontes N y dos posibles vencimientos T de la opción.

Para efectos de comparación, los resultados en la Tabla **2-6** pueden ser representados en diagramas de áreas de acuerdo a la pareja (t, N) . Por ejemplo, los resultados correspondientes a los pares $(t_2, 1)$ y $(t_2, 10)$ son ilustrados en la Figura **2-1**. Se observa el siguiente patrón aproximado en la Tabla **2-6**.

Vencimiento T: las métricas de riesgo VaR y ES son mayores para la opción call con el menor vencimiento ($T = 0.5$ años).

VaR convencionales: $VaR \delta$ y $VaR \delta\gamma$ son independientes de los escenarios de estrés planteados.

VaR - FRTB: En ambos períodos de crisis, 2007-9 y 2020-1, $VaR \mathcal{H} \lesssim VaR \mathcal{N} \approx VaR \mathcal{T}_6$. Léase la relación \lesssim como ‘menor o aproximado’. Por tanto, VaR histórico conduciría a un menor capital por riesgo respecto a las versiones normal y t-student.

VaR: Respecto a la crisis 2020-1, las medidas VaR convencionales son \lesssim que la medida VaR histórico. Así, el capital de riesgo por $VaR \mathcal{H}$ vía FRTB es aproximado o mayor que el correspondiente usando las contrapartidas convencionales $VaR \delta$ y $VaR \delta\gamma$.

Escenarios de estrés por crisis - FRTB: $VaR \mathcal{H}$ y $ES \mathcal{H}$ muestran que los impactos sobre capital de riesgo, vía crisis 2007-9, son \lesssim que las respectivas contrapartidas, vía crisis 2020-1. Sin embargo, para las otras métricas de riesgo, los impactos sobre capital de riesgo, vía crisis 2007-9, son \gtrsim que las respectivas contrapartidas, vía crisis 2020-1. Así, la crisis 2020-1 tiene mayor afectación sobre las medidas históricas VaR y ES , mientras que la crisis 2007-9 la tiene sobre las medidas normal y t-student de VaR y ES .

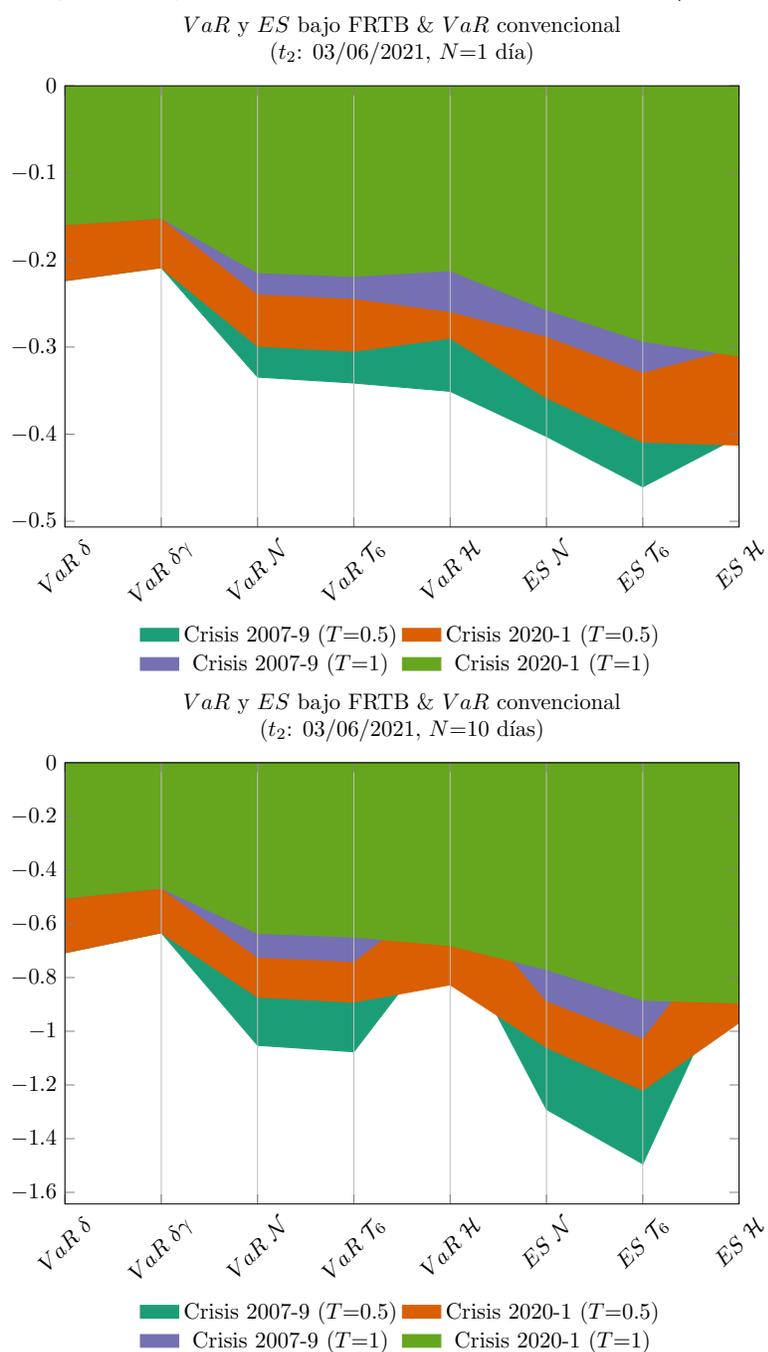
VaR y ES - FRTB En cada uno de los períodos de crisis, las medidas ES son $>$ que las respectivas medidas VaR . La diferencia es menos notable para las medidas de riesgo históricas.

Horizonte N: A mayor horizonte N , sólo las métricas $VaR \mathcal{H}$ y $ES \mathcal{H}$ están acotadas por la restricción de que la pérdida potencial no puede superar el 100% del valor del portafolio. Además, los datos sugieren que es impreciso emplear el factor \sqrt{N} para estimar el riesgo a N días a partir de aquel a 1 día.

Tabla 2-6.: *VaR* y *ES* a N días bajo FRTB y *VaR* tradicional. Opciones call sobre GBP/USD

$t_1: 22/01/2021$		$N=1$ día		$N=10$ días		$N=20$ días	
		$T=0.5$	$T=1$	$T=0.5$	$T=1$	$T=0.5$	$T=1$
Griegas	$VaR \delta$	-0.2249	-0.1601	-0.7112	-0.5064	-1.0058	-0.7161
	$VaR \delta\gamma$	-0.2101	-0.1528	-0.6375	-0.4700	-0.8785	-0.6533
Crisis 2007-9	$VaR \mathcal{N}$	-0.2421	-0.1726	-0.7475	-0.5144	-1.1062	-0.7467
	$VaR \mathcal{T}_6$	-0.2470	-0.1760	-0.7640	-0.5257	-1.1308	-0.7633
	$VaR \mathcal{H}$	-0.2621	-0.1911	-0.4821	-0.3546	-0.6432	-0.4812
	$ES \mathcal{N}$	-0.2908	-0.2072	-0.9113	-0.6271	-1.3515	-0.9126
	$ES \mathcal{T}_6$	-0.3321	-0.2367	-1.0503	-0.7228	-1.5597	-1.0534
	$ES \mathcal{H}$	-0.3032	-0.2225	-0.5837	-0.4414	-0.7055	-0.5423
Crisis 2020-1	$VaR \mathcal{N}$	-0.2174	-0.1554	-0.6560	-0.4795	-0.8455	-0.6068
	$VaR \mathcal{T}_6$	-0.2216	-0.1584	-0.6696	-0.4894	-0.8630	-0.6193
	$VaR \mathcal{H}$	-0.2149	-0.1556	-0.6977	-0.5454	-0.8296	-0.6696
	$ES \mathcal{N}$	-0.2601	-0.1859	-0.7908	-0.5776	-1.0196	-0.7318
	$ES \mathcal{T}_6$	-0.2964	-0.2118	-0.9053	-0.6608	-1.1673	-0.8379
$t_2: 03/06/2021$		$N=1$ día		$N=10$ días		$N=20$ días	
		$T=0.5$	$T=1$	$T=0.5$	$T=1$	$T=0.5$	$T=1$
Griegas	$VaR \delta$	-0.2238	-0.1594	-0.7077	-0.5041	-1.0009	-0.7129
	$VaR \delta\gamma$	-0.2088	-0.1519	-0.6332	-0.4669	-0.8722	-0.6487
Crisis 2007-9	$VaR \mathcal{N}$	-0.3344	-0.2392	-1.0525	-0.7239	-1.5624	-1.0574
	$VaR \mathcal{T}_6$	-0.3413	-0.2441	-1.0765	-0.7403	-1.5988	-1.0818
	$VaR \mathcal{H}$	-0.3508	-0.2592	-0.6086	-0.4621	-0.7731	-0.6072
	$ES \mathcal{N}$	-0.4026	-0.2877	-1.2912	-0.8868	-1.9245	-1.3006
	$ES \mathcal{T}_6$	-0.4605	-0.3289	-1.4939	-1.0251	-2.2320	-1.5071
	$ES \mathcal{H}$	-0.4027	-0.3003	-0.7172	-0.5649	-0.8282	-0.6725
Crisis 2020-1	$VaR \mathcal{N}$	-0.2989	-0.2146	-0.8730	-0.6354	-1.1183	-0.8050
	$VaR \mathcal{T}_6$	-0.3049	-0.2189	-0.8918	-0.6489	-1.1429	-0.8224
	$VaR \mathcal{H}$	-0.2898	-0.2122	-0.8271	-0.6809	-0.9300	-0.8036
	$ES \mathcal{N}$	-0.3585	-0.2572	-1.0606	-0.7700	-1.3632	-0.9788
	$ES \mathcal{T}_6$	-0.4091	-0.2933	-1.2199	-0.8842	-1.5710	-1.1264
	$ES \mathcal{H}$	-0.4126	-0.3103	-0.9686	-0.8948	-0.9800	-0.9080

Figura 2-1.: VaR y ES bajo FRTB en opciones call sobre GBP/USD (ver Tabla 2-6)



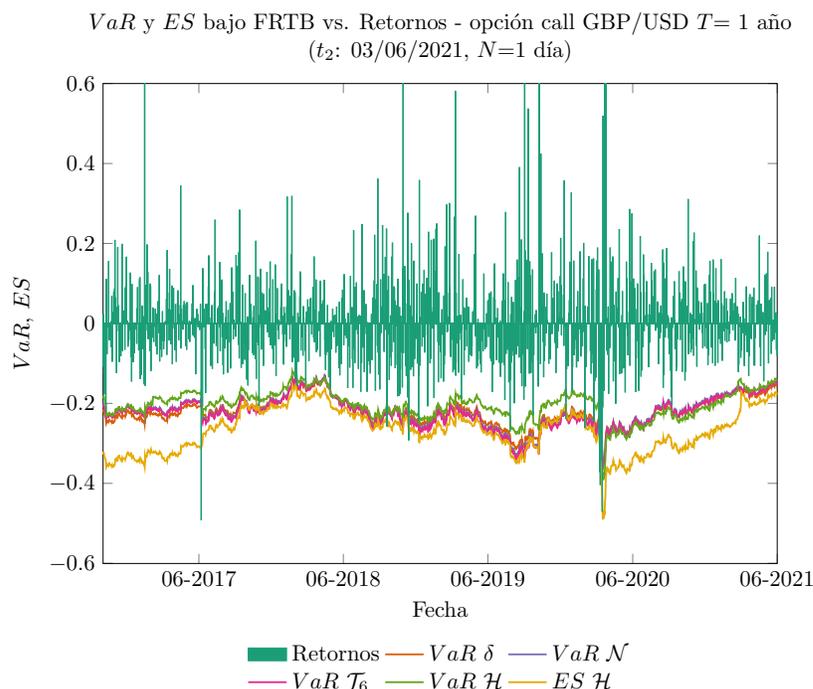


Figura 2-2.: Visualización dinámica de VaR y ES bajo FRTB. Nivel de confianza 0.975

Backtesting

La Figura 2-2 muestra los retornos de la opción call sobre GBP/USD para $T = 1$ vs métricas VaR y ES bajo FRTB así como la métrica tradicional VaR por la Griega delta. Allí, puede visualizarse el comportamiento dinámico de las medidas de riesgo.

Para terminar la sección, la Tabla 2-7 reporta ocho pruebas backtesting para el riesgo VaR de la opción call sobre GBP/USD con $T = 1$, dadas por TL, Bin, UC, TUF, CC, CCI, TBF, y TBFI, y que fueron descritas en la sección 1.2. Las métricas tradicionales VaR , vía letras Griegas, son $VaR \delta$ y $VaR \delta\gamma$. Y aquellas vía FRTB son $VaR \mathcal{N}$, $VaR \mathcal{T}_6$, y $VaR \mathcal{H}$. El cómputo de las métricas de riesgo se logra con la asistencia de códigos propios en Matlab, y la ejecución de las pruebas back-testing se consigue con la ayuda de su *toolbox* de gestión de riesgo financiero.

En la primera columna de la Tabla 2-7 aparecen dos fechas de valoración denotadas por $t = t_1$ y $t = t_2$, que coinciden con aquellas dadas en la Tabla 2-6, para las cuales se desea realizar las pruebas. Dichas pruebas se ejecutan sobre dos periodos sucesivos de 250 días previos a t , los cuales se denotan por A, B, C, y D. De otro lado, en la segunda columna se identifican las medidas VaR consideradas, y en los respectivos nombres se agrega el número 975 o 99, según sea el nivel de confianza, 97.5% o 99%, de la métrica de riesgo.

Adicionalmente, la tercera columna contiene el número de excepciones encontradas para cada métrica a lo largo del período; luego aparece el número esperado de excepciones a encontrar, el ratio de los últimos dos valores, y finalmente símbolos de banderas que indican el resultado

de la prueba. El color verde () significa que la prueba se acepta, esto es, que la respectiva hipótesis nula de la prueba no se rechaza a un nivel de significancia de 5 %; el color rojo () indica que la prueba es rechazada; y el color amarillo (), en el test TL, indica la zona de advertencia establecida por dicha prueba.

El desempeño general de todas las medidas de riesgo bajo pruebas backtesting es bueno. Sin embargo, creemos que comparativamente es mejor para la métrica histórica adaptada a FRTB. En efecto, $VaR \mathcal{H}975$ y $VaR \mathcal{H}99$ muestran ser medidas satisfactorias bajo pruebas de frecuencia e independencia, mientras que $VaR \mathcal{H}99$ resulta ser razonable para pruebas mixtas. Adicionalmente, la métrica en cuestión pasa un mayor número de procedimientos back-testing, lo cual se refleja por la cantidad mayor de banderas verdes asignadas.

En resumen, las observaciones previas y los resultados presentados en la sección 2.4.2 sugieren que las métricas históricas ES y VaR bajo FRTB-IMA, propuestas en este trabajo, son razonables para la gestión de riesgo de las opciones call consideradas. Las métricas en cuestión fueron definidas en las ecuaciones 2-9 y 2-13 de la sección 2.3.2.

Por su parte, los resultados en la columna Ratio para la fecha t_2 sugiere que todas las medidas VaR estimadas están sobrevaloradas, lo cual resulta ser un efecto de la crisis actual. Validaciones a través de pruebas backtesting de severidad para VaR , así como pruebas para ES son parte de agendas futuras de investigación.

2.5. Conclusiones

- Con la puesta en marcha de la nueva regulación de Basilea FRTB para riesgo mercado en el año 2023, las instituciones bancarias deben prepararse para futuros impactos reales y retos complejos en materia de: gestión del conocimiento, implementación de recursos tecnológicos y humanos, marcos éticos y contables, re-estructuración de portafolios, y capital de la institución. Así mismo, las economías emergentes pueden visualizar, además de retos, posibles oportunidades de generación de nuevos portafolios sobre la base de un programa de gestión en riesgo mercado moderno y actual. De otro lado, los programas de formación académica en gestión de riesgos deben adaptarse a los cambios recientes planteados por Basilea y fomentar su análisis y comprensión.
- Se ha propuesto un algoritmo orientado al cálculo de capital de riesgo bajo la regulación de Basilea FRTB, en el marco de modelos estándar vía método de sensibilidades (FRTB-SA-SbM). Una ilustración, sobre una posición hipotética en opciones, muestra una posible implementación del algoritmo en hojas de cálculo mostrando los apartados específicos de la regulación que sustentan los cálculos, y donde se evalúan posibles impactos en capital de riesgo sobre el valor de la posición en diferentes contextos económicos. Para una economía avanzada, el experimento muestra que el cociente anterior es mayor a 7, lo que sugiere que para economías emergentes los impactos serían más drásticos. De otro lado, el desarrollo del algoritmo propuesto a gran escala, su-

Tabla 2-7.: Back-testing VaR - FRTB vs VaR tradicional. Opción call GBP/USD $T = 1$

	VaR ID	Fallas	Esperado	Ratio	TL	Bin	UC	TUF	CC	CCI	TBF	TBFI
$t_1: 22/01/2021$												
	$\delta 975$	3	6.25	0.48								
	$\delta \gamma 975$	3	6.25	0.48								
	$\mathcal{N} 975$	2	6.25	0.32								
2020. A:	$\mathcal{T}_6 975$	2	6.25	0.32								
25/02/2019	$\mathcal{H} 975$	6	6.25	0.96								
-												
07/02/2020	$\delta 99$	2	2.5	0.8								
	$\delta \gamma 99$	2	2.5	0.8								
	$\mathcal{N} 99$	2	2.5	0.8								
	$\mathcal{T}_6 99$	0	2.5	0								
	$\mathcal{H} 99$	2	2.5	0.8								
-												
	$\delta 975$	6	6.25	0.96								
	$\delta \gamma 975$	7	6.25	1.12								
	$\mathcal{N} 975$	5	6.25	0.8								
2021. B:	$\mathcal{T}_6 975$	5	6.25	0.8								
10/02/2020	$\mathcal{H} 975$	6	6.25	0.96								
-												
22/01/2021	$\delta 99$	5	2.5	2								
	$\delta \gamma 99$	5	2.5	2								
	$\mathcal{N} 99$	4	2.5	1.6								
	$\mathcal{T}_6 99$	3	2.5	1.2								
	$\mathcal{H} 99$	3	2.5	1.2								
-												
	VaR ID	Fallas	Esperado	Ratio	TL	Bin	UC	TUF	CC	CCI	TBF	TBFI
$t_2: 03/06/2021$												
	$\delta 975$	8	6.25	1.28								
	$\delta \gamma 975$	9	6.25	1.44								
	$\mathcal{N} 975$	8	6.25	1.28								
2020. C:	$\mathcal{T}_6 975$	7	6.25	1.12								
05/07/2019	$\mathcal{H} 975$	11	6.25	1.76								
-												
18/06/2020	$\delta 99$	5	2.5	2								
	$\delta \gamma 99$	7	2.5	2.8								
	$\mathcal{N} 99$	3	2.5	1.2								
	$\mathcal{T}_6 99$	3	2.5	1.2								
	$\mathcal{H} 99$	5	2.5	2								
-												
	$\delta 975$	0	6.25	0								
	$\delta \gamma 975$	1	6.25	0.16								
	$\mathcal{N} 975$	0	6.25	0								
2021. D:	$\mathcal{T}_6 975$	0	6.25	0								
19/06/2020	$\mathcal{H} 975$	0	6.25	0								
-												
03/06/2021	$\delta 99$	0	2.5	0								
	$\delta \gamma 99$	0	2.5	0								
	$\mathcal{N} 99$	0	2.5	0								
	$\mathcal{T}_6 99$	0	2.5	0								
	$\mathcal{H} 99$	0	2.5	0								

perando los retos que esto supone, posibilitaría el acceso a una plataforma para medir el riesgo mercado y sus posibles impactos en un portafolio vía el método SbM en FRTB.

- Se ha propuesto además una metodología formal para calcular el riesgo *expected shortfall* de un portafolio de opciones coherente a los requerimientos de la regulación de Basilea FRTB en el marco de modelos internos (FRTB-IMA-ES), donde se considera la construcción de escenarios de estrés de mercado. En correspondencia, se desarrolla una aplicación que evalúa el impacto *ES* vs *VaR* bajo FRTB en una posición de mercado de opciones sobre GBP/USD, tomando períodos de estrés comprendidos por la crisis financiera 2007-9 y por pandemia 2020-1. Desde dos fechas recientes de valoración y bajo FRTB, se encuentra que *VaR* histórico conduce a un menor capital por riesgo respecto a las versiones normal y t-student. Además, dicha métrica tuvo un mejor desempeño por pruebas backtesting que sus contrapartidas normal y t-student, y que sus contrapartidas convencionales *VaR* delta y *VaR* delta gamma.
- La crisis 2020-1 tuvo mayor afectación sobre las medidas históricas *VaR* y *ES*, mientras que la crisis 2007-9 la tuvo sobre las medidas normal y t-student de *VaR* y *ES*. Los resultados muestran que la métrica *ES* histórico bajo FRTB vía construcción de escenarios de estrés por la actual crisis, sugieren que metodología desarrollada es confiable, en el marco de un proceso de gestión actualizado a la nueva regulación. Finalmente, a mayor horizonte N , sólo las métricas $VaR_{\mathcal{H}}$ y $ES_{\mathcal{H}}$ están acotadas por la restricción de que la pérdida potencial no puede superar el 100 % del valor del portafolio. Además, los datos sugieren que es impreciso emplear el factor \sqrt{N} para estimar el riesgo a N días a partir de aquel a 1 día.
- Con respecto a la estructura del marco regulatorio FRTB se observa una independencia del modelo estándar y los modelos internos para la estimación del capital en riesgo en instrumentos de libros de negociación. Al respecto, creemos que ambas aproximaciones son robustas y pueden tener puntos comunes que pueden aprovecharse. En coherencia, las dos propuestas presentadas pueden trazar puentes de comunicación entre ambos modelos, lo cual resulta conveniente para robustecer los procesos de gestión de riesgos de las instituciones. La implementación de las propuestas puede constituirse en una herramienta tecnológica para la industria bancaria o en una plataforma de experimentación para explorar posibles impactos marginales respecto al componente SbM o *ES* en la regulación FRTB.

2.5.1. Limitaciones

- Los niveles de complejidad tanto técnica como de gestión implicados en la regulación de Basilea FRTB, la cual entra en vigencia a partir de 2023, son hoy un foco de atención para las instituciones y académicos. Si bien se han desarrollado aproximaciones a los

impactos que la norma tendrá en los niveles de capital regulatorio de las instituciones, mostrando que estos se incrementan significativamente para las operaciones en libros de negociación, es todavía de gran interés evaluar los impactos que la norma tendrá para portafolios específicos y complejos, como portafolios de acciones, derivados, títulos, monedas, commodities, entre otros.

- Este trabajo se enfoca en los componentes FRTB-SA-SbM y FRTB-IMA-ES de la regulación FRTB para riesgo mercado. Quedan pendientes de medir los efectos que sobre el capital de riesgo de las instituciones tienen los componentes: SA-DRC, SA-RRAO, IMA-NMRF, y IMA-DRC.
- Respecto al componente IMA-NMRF de FRTB, donde se evalúa el riesgo mercado por modelos internos vía variables de riesgo no modelables estadísticamente, se abre todo un campo de exploración de nuevas teorías basadas en la *incertidumbre*. El aspecto subjetivo en cuestión no había sido tratado en regulaciones anteriores de Basilea.

En el próximo capítulo. A partir de la metodología definida en este capítulo, se propone una ampliación en el marco de modelos internos de FRTB. Desde este nuevo enfoque, se hace posible cuantificar el riesgo mercado ES y medir sus impactos en un portafolio de opciones de divisas incluyendo un modelo híbrido de tasa estocástica, denominado Black Scholes Hull White adaptado a divisas, para valorar el portafolio.

3. Capítulo 3: Riesgo mercado ES bajo FRTB en opciones sobre divisas - inclusión de un modelo híbrido de tasa estocástica

En el marco de los modelos internos de la regulación FRTB para riesgo mercado, que entra en vigencia en 2023, este capítulo define una metodología para cuantificar diferentes métricas de riesgo *VaR* y *ES* de un portafolio de opciones sobre divisas. El procedimiento introduce, como mecanismo de valoración del portafolio, una adecuación para divisas del modelo híbrido de tasa estocástica Black Scholes Hull White. Posteriormente, se desarrolla una aplicación fundamentada en la metodología que considera opciones sobre GBP/USD y donde se generan escenarios de estrés basados en la crisis 2020-1. Las medidas estimadas permiten investigar impactos en capital de riesgo según la madurez de las opciones y el horizonte de riesgo, y en particular, analizar aquellos impactos causados por la inclusión del modelo híbrido. Las pruebas back-testing realizadas confirman un buen desempeño de las métricas de riesgo, y por tanto se sugiere que la metodología formulada es procedente.

3.1. Introducción

La regulación FRTB en BIS [2019], consolidada por el Comité de Basilea para Supervisión Bancaria (BCBS), es el referente global para la gestión de riesgo mercado en la industria bancaria y sus preceptos entran en vigor el 1 de enero de 2023.

La nueva regulación incorpora cambios sustanciales en la gestión de libros de negociación y bancarios, así como dos nuevas aproximaciones para cuantificar el capital de requerimiento por riesgo de mercado, o bien desde el modelo estándar (SA) o bien desde modelos internos (IMA).

Respecto al modelo estándar, cuya implementación es obligatoria para las instituciones bancarias, el capital de requerimiento es la suma de capitales por exposición de riesgo a través de tres componentes: método de sensibilidades (SbM), requerimiento por riesgo de impago (DRC), y requerimiento por riesgo residual (RRAO).

En relación a los modelos internos, el capital de requerimiento se calcula a su vez por la

suma directa de las exposiciones debidas a tres componentes: *expected shortfall* (ES), requerimiento por factores de riesgo no modelables estadísticamente (NMRF), y requerimiento por riesgo de impago (DRC).

Los impactos sobre capital de riesgo que traerá la regulación FRTB son notables y las implicaciones están relacionadas con un incremento en niveles de solvencia de las instituciones que les permita *mejorar su estabilidad financiera en tiempos de crisis*.

Entre los estudios que cuantifican a nivel global estos impactos, se encuentran los trabajos en BCBS [2019, 2020], donde de manera respectiva se puntualiza que el incremento promedio de capital en FRTB es 22 % comparado con Basilea 2.5, y donde los impactos son medidos respecto a todos los componentes de las reformas de Basilea III (BIS [2017]).

Por su parte, en Laurent et al. [2016] se analizan fundamentos teóricos e implicaciones de modelos internos de FRTB en relación al capital por riesgo de impago en portafolios sensibles a riesgo de crédito. Además, en Orgeldinger [2018] se presentan algunas aproximaciones recientes para implementar industrialmente la regulación FRTB, bajo SA e IMA, formalizando un análisis de los desafíos y requerimientos a tener en cuenta.

Por otra parte, en Grajales and Medina [2021a] (ver alternativamente el capítulo 2 del presente trabajo) se proponen dos aproximaciones metodológicas para evaluar el impacto en portafolios de opciones financieras, a partir de estimaciones de capital de riesgo vía SbM y ES de FRTB. En particular, el riesgo ES se calcula para un portafolio de opciones de divisas sobre GBP/USD y se muestran resultados que evidencian el carácter procedente de la propuesta en el estudio.

Sin embargo, en el trabajo anterior, cuando se estima la métrica ES del portafolio, una limitación metodológica es que el modelo de valoración de opciones se deja abierto. Al respecto, es pertinente hacer las siguientes observaciones:

Primero, en Bakshi et al. [2000] se señala que las extensiones usuales que mejoran el desempeño del modelo clásico en Black and Scholes [1973] pueden conseguirse mediante el uso (*posiblemente combinado*) de modelos de volatilidad estocástica, modelos de tasas de interés estocástica, o modelos de saltos aleatorios.

Segundo, Lehar et al. [2002] establecen que la medición de riesgo mercado en un portafolio de derivados depende de manera significativa de la correcta valoración de sus instrumentos.

Tercero, la investigación en Cheng et al. [2018] precisa que en la industria bancaria y de seguros, la valoración de derivados, especialmente de largo plazo, usualmente se realiza bajo modelos con tasa y/o volatilidad estocástica, y desde este tipo de modelos encuentra evidencia de un mejor desempeño en valoraciones de derivados. El estudio también señala que a partir de los resultados en Bakshi et al. [2000], surgió una clase de modelos conocidos como *modelos híbridos* de valoración de precios, que tienen múltiples factores y que están dedicados principalmente a seguros, acciones, commodities y monedas.

Finalmente, uno de los primeros modelos híbridos en la literatura, llamado *Black Scholes Hull White* ($BSHW$), aparece en Brigo and Mercurio [2007] y consiste en un sistema estocástico de dos factores donde la dinámica de precios de un activo sigue el modelo Black Scholes y

la evolución de la tasa corta doméstica de interés sigue el modelo Hull White.

Consecuentemente, a partir de la limitación señalada arriba y de las observaciones anteriores, el propósito de este capítulo es diseñar una metodología, en el marco de modelos internos de FRTB, para cuantificar el riesgo mercado ES y medir sus impactos en un portafolio de opciones de divisas, eligiendo el modelo híbrido de tasa estocástica BSHW como referente para valorar el portafolio.

Con el objetivo trazado, se adopta la metodología dada en el capítulo 2 ampliando su alcance mediante la consideración de escenarios de estrés para precios y tasas de interés, así como presentando una conceptualización e implementación del modelo BSHW para valorar el portafolio.

Al final, se presenta una aplicación donde se implementa la metodología propuesta para medir los riesgos VaR y ES y evaluar sus impactos en un portafolio de opciones sobre GBP/USD. Los escenarios de estrés son obtenidos a partir de la crisis 2020-1 y los efectos de incorporar el modelo híbrido para valorar las opciones son medidos. Por último, las pruebas back-testing realizadas aportan evidencia que sugiere la idoneidad de la metodología aquí definida.

La sección 3.2 presenta una fundamentación del modelo híbrido de tasa estocástica BSHW. Luego, la sección 3.3 presenta una metodología de cuantificación del riesgo mercado ES bajo FRTB en un portafolio de opciones de divisas, donde se incorpora una adecuación del modelo BSHW para valorar las opciones. La sección 3.4 desarrolla una aplicación a partir de la metodología y discute los resultados. La sección 3.5 expone las conclusiones y las contribuciones esenciales del capítulo.

3.2. Modelo híbrido Black Scholes Hull White (BSHW)

Se presenta una fundamentación de un modelo de valoración de opciones que incluye dos factores de riesgo estocásticos, el precio de un activo y la tasa corta de interés. En este enfoque preliminar, el activo no paga dividendo.

La fundamentación presentada servirá para ampliar y robustecer la metodología de valoración de riesgo mercado en portafolios de divisas bajo FRTB que fue propuesta en la sección 2.3.2 del capítulo 2. La ampliación metodológica se pondrá a prueba en una aplicación al final del capítulo.

El modelo híbrido Black Scholes Hull White (BSHW) en Brigo and Mercurio [2007] representa una de las extensiones realizadas sobre el modelo *seminal* en Black and Scholes [1973] (BS), en donde la tasa de interés libre de riesgo es estocástica y está conducida por el modelo de un factor de tasa corta en Hull and White [1990] (HW). El modelo BSHW también representa una extensión del modelo *seminal* de valoración de opciones sobre divisas (FX -options) dado en Garman and Kohlhagen [1983].

El modelo BSHW, bajo una *medida de probabilidad T-forward*, denotada por \mathbb{Q}^T , proporciona una fórmula analítica para el precio de una opción call Europea, y además, tal formulación

resulta ser *independiente* de la evolución estocástica de la tasa de interés. La fórmula analítica sólo dependerá de los parámetros de la opción y de los parámetros del modelo BSHW en el universo \mathbb{Q}^T . Dicha independencia es una ventaja de expresar el modelo bajo ésta medida. Lo anterior facilita así el cálculo de la volatilidad implícita para la opción. De otro lado, el modelo BSHW no capturará la sonrisa de volatilidad presente en los mercados de opciones, pero sí permitirá capturar una estructura temporal de volatilidad.

3.2.1. Caracterización matemática del modelo BSHW

Las notas y argumentaciones presentadas aquí son de elaboración propia y están inspiradas en los trabajos de Brigo and Mercurio [2007], Grzelak and Oosterlee [2011], Cheng et al. [2018], y Oosterlee and Grzelak [2020].

Definición 3.2.1 (Modelo BSHW). *Si $S(t)$ es el precio de un activo en el tiempo t y $r(t)$ es la tasa corta libre de riesgo, entonces el modelo BSHW bajo la medida de riesgo neutral \mathbb{Q} describe la dinámica del vector de estado $\mathbf{X}(t) = [S(t), r(t)]$ mediante el sistema*

$$\begin{aligned} dS(t)/S(t) &= r(t)dt + \sigma dW_x(t) \\ dr(t) &= \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r(t), \end{aligned} \tag{3-1}$$

donde $S(t_0) = S_0$, $r(t_0) = r_0$, los parámetros σ , λ y η son constantes y tienen los significados usuales correspondientes a los modelos BS y HW, $\theta(t)$ es una función dependiente del tiempo elegida para que el modelo se ajuste en t a la estructura temporal de tasas de interés en el mercado, y donde la correlación del sistema es $\rho_{x,r}$.

Una introducción al modelo de un factor de Hull y White, HW, aparece en el anexo A. Allí, la forma funcional $\theta(t)$ se lee en la ecuación (A-34).

Ahora, un argumento retórico para encontrar analíticamente el precio de una opción call Europea que tiene como activo subyacente $S(t)$ es el siguiente.

Se define la medida de probabilidad T -forward, \mathbb{Q}^T , por la derivada de Radon-Nikodym,

$$\lambda_{\mathbb{Q}^T}^{\mathbb{Q}}(t) = \frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{P(t, T)}{P(t_0, T)} \frac{M(t_0)}{M(t)} \tag{3-2}$$

donde el numerario $M(t)$ es el valor por unidad monetaria de una cuenta bancaria que crece exponencialmente en tiempo continuo, y $P(t, T)$ es el valor en t de un bono cero cupón y cuyo valor en el vencimiento T es una unidad monetaria. Así mismo, $\mathcal{F}(t)$ es una filtración que describe la información disponible del proceso definido en (3-2) hasta el tiempo t ¹.

Las ventajas de considerar la medida \mathbb{Q}^T definida en la ecuación (3-2) son básicamente dos:

¹Una colección de σ -álgebras $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ es una filtración sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $0 \leq s \leq t$. Ésta definición así como una introducción a la teoría de la medida para finanzas aparece en Grajales [2006]

Precio forward primero, a partir de las ecuaciones en (3-1), si las dinámica de $S(t)$ y $P(t, T)$ se expresan bajo la medida \mathbb{Q}^T , entonces el precio forward del activo dado por

$$S_F(t, T) = S(t)/P(t, T) \quad (3-3)$$

resulta ser una martingala bajo la medida T -forward \mathbb{Q}^T , especificado por un movimiento browniano geométrico (ver proposición 3.2.1).

Expectativa en \mathbb{Q}^T segundo, a partir del Teorema de Feynman-Kac y del cambio de medida $\lambda_{\mathbb{Q}}^T(t)$ en la ecuación (3-2), la ecuación para obtener el valor de un derivado de tipo europeo, $V(t_0, S)$, se simplifica como

$$V(t_0, S) = P(t_0, T) \mathbf{E}^T[H(T, S)|\mathcal{F}(t_0)] \quad (3-4)$$

donde $H(T, S)$ es el *payoff* del derivado. Esta fórmula de valoración es con mucho más simple que aquella asociada bajo la medida en riesgo neutral \mathbb{Q} , en la cual

$$V(t_0, S) = M(t_0) \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{M(T)} H(T, S)|\mathcal{F}(t_0)\right] \quad (3-5)$$

Posteriormente, note que bajo la medida \mathbb{Q}^T la distribución de S_T es la misma que aquella para $S_F(T, T)$, y que por tanto el valor de una opción call Europea puede conseguirse directamente apelando al modelo de Black Scholes (BS).

Para formalizar el hecho de que $S_F(t, T)$ es una \mathbb{Q}^T -martingala, se enuncia la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1 (Precio forward como martingala). *El proceso $S_F(t, T)$ en la ecuación (3-3) es una martingala dada por*

$$\frac{dS_F(t, T)}{S_F(t, T)} = \sigma_F(t) dW_F^T(t) \quad (3-6)$$

donde

$$\sigma_F(t) = \sqrt{\sigma^2 + \eta^2 B_r^2(t, T) - 2\rho_{x,r} \sigma \eta B_r(t, T)} \quad (3-7)$$

$$B_r(t, T) = \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda(T-t)} - 1). \quad (3-8)$$

Demostración. Ver Brigo and Mercurio [2007]. □

Por otra parte, dado que la volatilidad $\sigma_F(t)$ en la ecuación (3-7) es una función del tiempo t , puede definirse un valor de volatilidad constante, σ_c , para el activo forward tal que

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \sigma_F^2(z) dz} \quad (3-9)$$

Valor de una opción call bajo BSHW

Por consiguiente, en el ambiente híbrido BSHW el valor de una opción call Europea, con *payoff* dado por $H(T, S) = \max(S(T) - K, 0)$, se consigue a partir de la ecuación (3-4) y de una aplicación directa del modelo BS o del modelo Black-76,

$$\begin{aligned} V(t_0, S) &= P(t_0, T) \mathbb{E}^T [\max(S_F(T, T) - K, 0) | \mathcal{F}(t_0)] \\ &= S_F(t_0, T) P(t_0, T) \mathcal{N}(d_1) - K P(t_0, T) \mathcal{N}(d_2) \end{aligned} \quad (3-10)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_F(t_0, T)/K) + 0.5\sigma_c^2(T - t_0)}{\sigma_c \sqrt{T - t_0}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma_c \sqrt{T - t_0}, \end{aligned} \quad (3-11)$$

siendo $\mathcal{N}(x)$ la distribución normal estándar acumulada en x y σ_c la volatilidad dada en la ecuación (3-9). Los demás parámetros que aparecen han sido definidos previamente.

Finalmente, una vez conseguido el valor de la opción call por el modelo BSHW, la volatilidad implícita de la opción, σ_I , puede estimarse mediante el modelo en Black [1976]. Respecto a las letras Griegas delta (δ), gamma (γ) y vega (ν) de la opción call bajo BSHW, éstas se calculan de manera usual a como se hace en el modelo BS.

3.3. Metodología. Riesgo mercado ES bajo FRTB e inclusión del modelo híbrido FX-BSHW1

La sección 2.3.2 del capítulo 2 propone una metodología para cuantificar el riesgo mercado ES de un portafolio de opciones *en el marco* de modelos internos, IMA- ES , bajo la regulación FRTB en BIS [2019]. El diseño de la metodología toma en consideración, consistentemente, la construcción de escenarios de estrés y la validación de la métrica VaR a través de pruebas back-testing.

Además, alineado a FRTB, la metodología formula *adaptaciones* para versiones histórica (o analítica), normal y t de student de las métricas ES y VaR . Sin embargo, entre las

limitaciones de la propuesta metodológica se observa que el modelo de valoración de opciones se deja abierto.

De acuerdo a las sección 3.1, la investigación en Bakshi et al. [2000], Lehar et al. [2002], y Cheng et al. [2018] sugiere la pertinencia y beneficio de emplear un modelo híbrido de tasa o volatilidad estocástica de valoración de opciones en la cuantificación del riesgo mercado en un portafolio de opciones.

Por tanto, a partir de la sección 3.2 y las referencias allí citadas, y con el propósito de ampliar la metodología descrita, el modelo híbrido BSHW en Brigo and Mercurio [2007] se toma como referente para valorar el portafolio de opciones.

En lo que sigue, se *plantea* un ajuste necesario al modelo BSHW, de modo que pueda aplicarse en valoración de opciones sobre divisas y se discuten detalles sobre la calibración del modelo. Posteriormente, se precisa el procedimiento para generar escenarios de estrés y computar el riesgo mercado *ES* del portafolio bajo FRTB.

3.3.1. Modelo híbrido BSHW adaptado a divisas (FX-BSHW1)

El modelo BSHW establecido en la sección 3.2 aplica para activos que no pagan dividendo. Por tanto, se *plantea* una adecuación del modelo de modo que pueda aplicarse, en primera instancia, al caso que el activo subyacente sea una tasa de cambio, $y(t)$. Los siguientes puntos establecen este hecho.

Definición 3.3.1 (Modelo BSHW adaptado a divisas, FX-BSHW1). *A partir del modelo BSHW dado en la definición 3.2.1, si $y(t)$ es la tasa de cambio entre dos divisas, doméstica y foránea, $r_d(t)$ es la tasa libre de riesgo doméstica, y r_f es una constante que representa la tasa libre de riesgo foránea, entonces el sistema BSHW adaptado para divisas, bajo la medida de riesgo neutral \mathbb{Q} , describe la dinámica del vector de estado $\mathbf{X}(t) = [y(t), r_d(t)]$ mediante el sistema*

$$\begin{aligned} dy(t)/y(t) &= (r_d(t) - r_f)dt + \sigma dW_x(t) \\ dr_d(t) &= \lambda(\theta(t) - r_d(t))dt + \eta dW_r(t), \end{aligned} \tag{3-12}$$

donde $y(t_0) = y_0$, $r_d(t_0) \in \mathfrak{R}^+$, los parámetros σ , λ y η son constantes y tienen los significados usuales correspondientes a los modelos BS y HW, $\theta(t)$ es una función dependiente del tiempo elegida para que el modelo se ajuste en t a la estructura temporal de tasas de interés doméstica en el mercado, y donde la correlación del sistema es $\rho_{y,d}$.

El anexo A expone una breve introducción del modelo en un factor de Hull y White, HW. Específicamente, la relación $\theta(t)$ aparece en la ecuación (A-34).

Proposición 3.3.1 (Precio forward en divisas). *De manera similar a la proposición 3.2.1, se define en primer lugar el precio forward de la tasa de cambio $y(t)$ por*

$$y_F(t, T) = y(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d(t, T)}, \quad (3-13)$$

donde $P_d(t, T)$ y $P_f(t, T)$ son los valores en t de dos bonos cero cupón doméstico y foráneo, respectivamente, con vencimiento en T , y para los cuales la dinámica de $P_d(t, T)$ es estocástica mientras que la de $P_f(t, T)$ es determinística e igual a $e^{-r_f T}$.

Ahora, si se expresan las dinámicas de $y(t)$ y $P_d(t, T)$ asociadas al sistema (3-12) bajo la medida T -forward doméstica \mathbb{Q}^T , cuya definición aparece en la ecuación (3-2), con $P(t, T) = P_d(t, T)$, entonces $y_F(t, T)$ es una martingala dada por

$$\frac{dy_F(t, T)}{y_F(t, T)} = \sigma_F(t) dW_F^T(t) \quad (3-14)$$

donde $\sigma_F(t)$ está dada en la ecuación (3-7).

Demostración. Similar a la prueba de la proposición 3.2.1. □

El sentido de definir el precio forward de la tasa de cambio, $y_F(t, T)$, por la ecuación (3-13), se justifica por la definición del precio forward dado antes en la formulación de la ecuación (3-3) (forward de un activo que no paga dividendo en ambiente de tasa estocástica) y a partir de la discusión dada en Shreve [2004] (sección 5.5) para lograr obtener martingalas sobre un activo que paga dividendo.

Calibración del modelo FX-BSHW1

En este apartado se adopta la siguiente aproximación. La calibración en el día m del modelo dado por el sistema de ecuaciones (3-12), supone en primer lugar ajustar la volatilidad σ a la desviación estándar anual de los retornos diarios de $y(t)$ en una ventana de 250 días anteriores a m . Posteriormente, se ajustan los parámetros λ y η en el componente HW del sistema, y finalmente se estima de manera empírica la correlación $\rho_{y,d}$. Una medida sobre el desempeño de esta calibración se discute adelante.

A continuación se exponen detalles para lograr la calibración mencionada. En la literatura, el ajuste de los parámetros λ y η en el componente HW se realiza a partir de instrumentos financieros como *caps*, *floors* o *swaptions* de tasas de interés a precios de mercado, ver por ejemplo Hull and White [2001] y Sun [2015]. Sin embargo, en este contexto el ajuste de λ y η es efectuado vía el modelo de equilibrio en Vasicek [1977], el cual es un caso especial del modelo HW donde $\theta(t)$ es constante. Específicamente, la técnica de calibración se detalla en la sección A.3 del Anexo A.

Por su parte, el ajuste en el día m de la correlación $\rho_{y,d}$ es estimada empíricamente a través de la correlación de Pearson en ventanas de 250 días entre las siguientes series históricas,

- $(y_n)_{n \leq m}$: tasa de cambio,
- $(r_{d,n})_{n \leq m}$: tasa doméstica, observada para el plazo 3 meses,

Los siguientes comentarios puntualizan la calibración descrita.

Comentario 3.3.1 (Calibración λ, η). *Bajo la medida de riesgo neutral \mathbb{Q} , los parámetros λ y η en las ecuaciones (3-12) del modelo FX-BSHW1 son calibrados en el día m siguiendo la estrategia de estimación de parámetros en el modelo de Vasicek definida en la sección A.3, Anexo A. Allí, la información necesaria de mercado en el día m para ejecutar la estimación es la estructura temporal de tasas de interés doméstica. Además, la respectiva tasa corta se tomará como la tasa de plazo para 3 meses.*

Comentario 3.3.2 (Correlación del sistema). *A partir de las series históricas hasta el día m para la tasa de cambio y la tasa corta doméstica, la correlación $\rho_{y,d}$ en las ecuaciones (3-12) del modelo FX-BSHW1, en el día m , puede ser estimada empíricamente a partir de la siguiente expresión,*

$$\rho = \text{corr} \left[\begin{pmatrix} y_{m-249} \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{d,m-249} \\ \vdots \\ r_{d,m} \end{pmatrix} \right], \quad (3-15)$$

donde el simbolismo $\text{corr}(\cdot, \cdot)$ indica la correlación entre sus argumentos.

En el comentario 3.3.2, se asume que la correlación observable del sistema, $\rho_{y,d}$, es la misma en la medida física, \mathbb{P} , y en la medida de riesgo neutral, \mathbb{Q} .

Desempeño calibración Por ahora, podría medirse el desempeño de la calibración descrita para los parámetros λ y η por medio de una medida de error, por ejemplo el error cuadrático medio (MSE), entre la curva cero de tasas de interés doméstica modelada vía Vasicek y la correspondiente curva real de mercado. Si la medida de error resulta ser menor que un valor de tolerancia dado, entonces puede afirmarse que la valoración de las opciones sobre la divisa, vía modelo FX-BSHW1, toma en consideración al menos una aproximación aceptable del comportamiento en el mercado de la estructura de tasa de interés doméstica.

Un procedimiento de calibración mejorado para un modelo híbrido, más realista para la industria financiera, que tiene en consideración además volatilidades implícitas de mercado, y que ofrece medidas satisfactorias de desempeño en tanto que replica con una tolerancia aceptable la superficie de volatilidad del día, se presentará en el próximo capítulo.

3.3.2. Riesgo mercado ES bajo FRTB

El procedimiento para cuantificar el riesgo mercado VaR y ES de un portafolio de opciones sobre divisas, cuando se introduce el modelo FX-BSHW1 en la valoración de las opciones, se establece a continuación. Además, se presentan directrices para evaluar el impacto de las medidas de riesgo.

Proposición 3.3.2 (Precio opción call vía FX-BSHW1). *El precio de una opción call Europea, $V(t_0, y)$, sobre la tasa de cambio $y(t)$, con precio strike K , y madurez T , bajo el modelo híbrido de tasa estocástica FX-BSHW1, descrito en las ecuaciones (3-12), se consigue a través de las siguientes igualdades,*

$$V(t_0, y) = y_F(t_0, T)P_d(t_0, T)\mathcal{N}(d_1) - KP_d(t_0, T)\mathcal{N}(d_2) \quad (3-16)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(y_F(t_0, T)/K) + 0.5\sigma_c^2(T - t_0)}{\sigma_c\sqrt{T - t_0}} \quad (3-17)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_c\sqrt{T - t_0},$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \sigma_F^2(z) dz} \quad (3-18)$$

$$\sigma_F(t) = \sqrt{\sigma^2 + \eta^2 B_r^2(t, T) - 2\rho_{x,r}\sigma\eta B_r(t, T)}$$

$$B_r(t, T) = \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda(T-t)} - 1),$$

y $y_F(t, T)$ está dada en la ecuación (3-13).

Demostración. Por la proposición 3.3.1, $y_F(t, T)$ es una martingala respecto a la medida T -forward \mathbb{Q}^T , y dado que $y_F(t, T)$ es un movimiento browniano geométrico, el precio de la opción $V(t_0, y)$ se deduce directamente del modelo Black Scholes o Black-76.

Así, la expresión que calcula $V(t_0, y)$ está implicada por las ecuaciones (3-9), (3-10), y (3-11), en las cuales $S_F(t_0, T)$ es reemplazado por $y_F(t_0, T)$ y $P(t_0, T) = P_d(t_0, T)$. \square

Comentario 3.3.3 (Calibración del modelo). *La calibración del modelo FX-BSHW1 se realiza según las indicaciones de la sección 3.3.1.*

Definición 3.3.2 (Escenarios de precios y tasas). *Sea y_j un precio que representa la tasa de cambio entre dos divisas en el día j . Además, sean $R_{d,j}(T)$ y $R_{f,j}(T)$ las curvas cero libres de riesgo doméstica y foránea respectivamente en el día j , donde $R_{i,j}(T)$ está definida para un conjunto de valores del tenor T , $i \in \{d, f\}$.*

Si hoy es el día m y se dispone de $m + N$ observaciones, previas al día m , para el precio y las curvas cero, entonces es posible construir m escenarios proyectados al día $m + N$ para el precio, $\eta_{j,m}^N$, y cada curva, $\mathfrak{R}_{i,j,m}^N(T)$, definidos de modo que el j -ésimo escenario sea, respectivamente,

$$\eta_{j,m}^N = y_m \frac{y_j}{y_{j-N}}, j = 1, \dots, m \quad (3-19)$$

$$\mathfrak{R}_{i,j,m}^N(T) = R_m(T) + R_j(T) - R_{j-N}(T), i \in \{d, f\}, j = 1, \dots, m \quad (3-20)$$

Definición 3.3.3 (Escenarios de opciones). *Suponga que hoy es el día m y se tiene una opción sobre la tasa de cambio $y(t)$, con precio strike K , y madurez T .*

A partir de los escenarios de precios y tasas indicados respectivamente en las ecuaciones (3-19) y (3-20), es posible construir m escenarios proyectados al día $m + N$ para el precio de la opción, $f_{j,m}^N$, definidos de modo que el j -ésimo escenario se computa bajo el modelo FX-BSHW1 de acuerdo a lo establecido en la proposición 3.3.2. Así, se tiene que

$$f_{j,m}^N = y_F^*(t_0, \tau) P_d^*(t_0, \tau) \mathcal{N}(d_1) - K P_d^*(t_0, \tau) \mathcal{N}(d_2) \quad (3-21)$$

donde

$$\begin{aligned} y_F^*(t_0, \tau) &= \eta_{j,m}^N \frac{P_f^*(t_0, \tau)}{P_d^*(t_0, \tau)}, j = 1, \dots, m \\ P_i^*(t_0, \tau) &= \exp(\mathfrak{R}_{i,j,m}^N(\tau) * \tau), i \in \{d, f\}, j = 1, \dots, m \\ d_1 &= \frac{\ln(y_F^*(t_0, \tau)/K) + 0.5\sigma_c^2(\tau - t_0)}{\sigma_c \sqrt{\tau - t_0}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma_c \sqrt{\tau - t_0}, \end{aligned} \quad (3-22)$$

además, $\tau = T - N/252$ es el vencimiento de la opción y σ_c se estima a partir de las ecuaciones en (3-18),

Definición 3.3.4 (Riesgo ES bajo FRTB). *La metodología para estimar los riesgos VaR y ES bajo la regulación FRTB de un portafolio de divisas, incluyendo el modelo FX-BSHW1 como referente para valorar el portafolio, es aquella definida en la sección 2.3.2, para la cual los escenarios de precios de la opción con subyacente $y(t)$, que fueron denotados por $f_{j,m}^N$ en la definición 2.3.1, son reemplazados por los escenarios $f_{j,m}^N$ conseguidos mediante las ecuaciones (3-21), (4-38), y (3-18). La valoración del día para el portafolio se sigue del modelo FX-BSHW1.*

Ahora, se exponen dos directrices para evaluar el impacto de las métricas VaR y ES.

Impacto en la región $T \times N$. El impacto de las métricas de riesgo *VaR* y *ES* sobre el portafolio puede estimarse variando el tenor o vencimiento de las opciones, T , y variando el horizonte de liquidez para el riesgo, N . De esta manera, se puede identificar la dinámica del riesgo en opciones a corto, mediano y largo plazo, además de prever el aumento del riesgo para valores altos de N , los cuales están asociados a economías emergentes en la regulación FRTB.

Impacto por inclusión del modelo FX-BSHW1. La valoración de opciones del portafolio a través del modelo híbrido en cuestión afecta las medidas *VaR* y *ES*. Estimar sobre la región $T \times N$, antes descrita, aquellas diferencias del riesgo vía el modelo híbrido, con el respectivo riesgo vía el modelo seminal BS, donde ambos modelos son usados para valorar el portafolio, establecería un indicador pertinente y novedoso en la literatura y la industria. Lo anterior ofrecería claridad sobre la inclusión de modelos de más de un factor en programas de gestión de riesgo.

3.4. Aplicación: riesgo *ES*-FRTB para opciones sobre divisas con tasa estocástica

Se considera un portafolio compuesto por una opción call europea sobre GBP/USD en estado ATM y vencimiento anual en el conjunto de tenores $T \in \{0.5, 1, 3, 5, 10\}$. Siguiendo el planteamiento metodológico de la sección 3.3, se procede a estimar los riesgos *VaR* y *ES* del portafolio en el marco de modelos internos de la regulación FRTB y del modelo híbrido de tasa estocástica FX-BSHW1 de valoración de opciones.

El procedimiento toma en consideración la generación de escenarios de estrés para el precio de la divisa y para las curvas cero de tasas de interés doméstica y foránea. Las condiciones de estrés se obtienen a partir de la crisis mundial de salud pública 2020-1. Adicionalmente, el procedimiento incluye la realización de un conjunto de pruebas back-testing para la métrica *VaR*. Lo anterior permitirá evidenciar si la metodología propuesta de cuantificación de riesgo mercado del portafolio es razonable.

3.4.1. Datos de mercado y escenarios de estrés

Las fechas que se presentan están en formato dd/mm/yyyy. Los datos usados corresponden a la tasa de cambio GBP/USD y las curvas del tesoro para las tasas cero cupón en USA y UK correspondientes a los tenores anuales $T = 0.5, 1, 3, 5, 10$. Los datos son obtenidos de Bloomberg ² en el rango de fechas 03/01/2000 hasta 03/06/2021.

Por otra parte, el período de estrés referido en las métricas de riesgo se referencia a la crisis por covid-19 2020-1. El rango de fechas considerado es 10/02/2020 - 22/01/2021.

²Un agradecimiento especial a la Universidad de Medellín, CO, por su colaboración con el uso de Bloomberg

Tabla 3-1.: Datos de entrada métricas VaR y ES bajo FRTB y modelo híbrido FX-BSHW1

Fecha de valoración de métricas de riesgo (t)		03/06/2021			
Escenarios de estrés	Período i	10/02/2020 - 22/01/2021			
Call sobre GBP/USD	Modelo de valoración	Híbrido FX-BSHW1			
	Valor subyacente	tasa de cambio en t			
	Vencimiento anual	$T \in \{0.5, 1, 3, 5, 10\}$			
	Strike	precio del subyacente en t			
	Volatilidad GBP/USD	sobre 250 días previos a t			
	Tasas local y foránea	curvas cero en USA y UK			
	Factores de riesgo	$y(t), r_d(t)$			
	Parámetros modelo	σ	λ	η	ρ_{yd}
		0.0778	0.1512	0.0129	-0.9168
	Desempeño calibración	MSE		MAE	
	λ, η vía Vasicek	3.41×10^{-6}		1.61×10^{-3}	
Métricas de riesgo	VaR y ES - FRTB	normal, t-student, histórico			
Nivel de confianza y horizonte de riesgo en días		$\alpha = 0.975; N = 1, 10, 20, 40, 60$			

3.4.2. Información para el cómputo de VaR y ES

La Tabla 3-1 muestra la información requerida para computar las medidas de riesgo. La fecha t representa el día del reporte de las mediciones. De acuerdo a la sección 3.3, el modelo híbrido de valoración de opciones es FX-BSHW1, definido en el sistema de ecuaciones (3-12). Además, en la tabla se indican los parámetros calibrados y dos medidas de desempeño, el error cuadrático medio (MSE) y el error absoluto medio (MAE).

Ambas medidas de desempeño, respecto a los parámetros λ y η , representan una medida de bondad de ajuste de la curva cero doméstica del mercado y la curva cero doméstica modelada a través del modelo Vasicek. Los parámetros λ y η son necesarios para valorar el portafolio de opciones bajo FX-BSHW1 (ver ecuaciones (3-16), (3-17), y (3-18)), sin embargo la función $\theta(t)$ que aparece en su especificación, garantiza que el ajuste del modelo a la curva cero del mercado sea exacta (ver Anexo A).

Por su parte, los valores T y N representan, respectivamente, el tenor o vencimiento (anual) de las opciones y el horizonte en el cómputo de las métricas de riesgo. La configuración de sus valores, coherente con los lineamientos de FRTB, hacen posible evaluar el impacto en capital de riesgo para opciones a corto, mediano y largo plazo, así como apreciar efectos del riesgo ante diferentes horizontes de liquidez. La información restante que aparece en la Tabla 3-1 es como se ha discutido en las secciones previas.

3.4.3. Métricas de riesgo, comparaciones e impactos

Las métricas de riesgo computadas se denotan como sigue,

VaR FRTB medidas *VaR* normal, *t*-student, e histórico: $VaR \mathcal{N}$, $VaR \mathcal{T}$, $VaR \mathcal{H}$.

ES FRTB medidas *ES* normal, *t*-student, e histórico: $ES \mathcal{N}$, $ES \mathcal{T}$, $ES \mathcal{H}$.

Bajo los comentarios 2.3.1 y 2.3.2 en la sección 2.3.2, el coeficiente ν , que expresa los grados de libertad para la distribución *t*-student, se obtiene de manera dinámica mediante el ajuste de tal distribución al portafolio de pérdidas en el horizonte de N días. En consecuencia y como es usual, ν se aproxima por

$$\nu = \left\lfloor \max \left(5, \frac{4 * kur(X) - 6}{kur(X) - 3} \right) \right\rfloor \quad (3-23)$$

donde $kur(X)$ indica la curtosis de la variable X y $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función *floor* aplicada en su argumento.

De esta manera, de acuerdo a la información dispuesta en la Tabla **3-1**, la Tabla **3-2** muestra las mediciones, en términos relativos, de las métricas *VaR* y *ES* bajo FRTB a partir de la metodología descrita en la sección 3.3. Desde aquella, el portafolio de opciones se valora por el modelo híbrido FX-BSHW1, los escenarios de estrés se construyen a partir de la crisis 2020-1, y se considera, además, un conjunto de cinco valores factibles para el tenor (anual) T y cinco para el horizonte de riesgo (en días) N .

Las siguientes observaciones, que impactan directamente al capital de riesgo asociado al portafolio, pueden deducirse de los resultados en la Tabla **3-2**.

Vencimiento T: las métricas *VaR* y *ES* son decrecientes con el tenor o tiempo de vencimiento T de las opciones. El efecto es más notable con el crecimiento del horizonte N . Así, para economías emergentes, para las cuales $N \in \{40, 60, 120\}$ días, es sugerente que el capital de riesgo de opciones de corto plazo es significativamente mayor respecto a otros plazos.

VaR y ES - FRTB, I: $VaR \mathcal{H}$ y $ES \mathcal{H}$ implican un menor capital de riesgo comparado con las respectivas versiones normal y *t*-student, en todos los valores del tenor T y para el horizonte $N = 60$ días. Tal relación se mantiene cierta para $T = 0.5, 1$ años en $N = 40$ días. En los demás tenores, el capital de riesgo en cuestión es aproximadamente igual.

VaR y ES - FRTB, II: las métricas *ES* son mayores que las respectivas métricas *VaR*. Sin embargo, la diferencia entre $VaR \mathcal{H}$ y $ES \mathcal{H}$ es apreciablemente menos volátil comparada con las respectivas contrapartidas normal y *t*-student, lo cual es cierto en la toda la región $T \times N$, excepto para $N = 1$ día.

ES - FRTB: En relación a la métrica *ES* y los horizontes $N = 40, 60$, en general las versiones paramétricas, normal y *t*-student, sobrevaloran el riesgo al ser comparadas con la versión histórica. Esto puede explicarse del hecho que la simulación histórica no

Tabla 3-2.: VaR y ES a N días bajo FRTB, inclusión del modelo híbrido FX-BSHW1.
Opciones call sobre GBP/USD @ ATM, T

$t: 03/06/2021$							
	T	$VaR \mathcal{N}$	$VaR \mathcal{T}$	$VaR \mathcal{H}$	$ES \mathcal{N}$	$ES \mathcal{T}$	$ES \mathcal{H}$
$N = 1$	0.5	-0.3102	-0.3153	-0.3018	-0.3720	-0.4358	-0.4265
	1	-0.2290	-0.2327	-0.2226	-0.2744	-0.3213	-0.3333
	3	-0.1498	-0.1522	-0.1377	-0.1793	-0.2098	-0.2248
	5	-0.1266	-0.1286	-0.1080	-0.1514	-0.1771	-0.1896
	10	-0.1060	-0.1078	-0.1007	-0.1268	-0.1483	-0.1738
$N = 10$	0.5	-0.9103	-0.9264	-0.8475	-1.1062	-1.3085	-0.9745
	1	-0.6827	-0.6946	-0.7382	-0.8276	-0.9772	-0.9177
	3	-0.4738	-0.4819	-0.5761	-0.5718	-0.6730	-0.7915
	5	-0.4141	-0.4211	-0.5241	-0.4986	-0.5859	-0.7381
	10	-0.3341	-0.3397	-0.4770	-0.4017	-0.4716	-0.6504
$N = 20$	0.5	-1.1632	-1.1889	-0.9448	-1.4189	-1.6360	-0.9865
	1	-0.8689	-0.8881	-0.8573	-1.0572	-1.1924	-0.9406
	3	-0.6105	-0.6224	-0.7240	-0.7387	-0.8085	-0.8319
	5	-0.5377	-0.5486	-0.6931	-0.6486	-0.7174	-0.7964
	10	-0.4543	-0.4638	-0.6209	-0.5472	-0.6137	-0.7334
$N = 40$	0.5	-1.4345	-1.4609	-0.9734	-1.7542	-2.0843	-0.9959
	1	-1.0692	-1.0887	-0.8967	-1.3045	-1.5473	-0.9667
	3	-0.7743	-0.7878	-0.7748	-0.9382	-1.1075	-0.8807
	5	-0.6954	-0.7073	-0.7520	-0.8396	-0.9883	-0.8569
	10	-0.6119	-0.6223	-0.6972	-0.7370	-0.8660	-0.8111
$N = 60$	0.5	-1.8591	-1.8935	-0.9843	-2.2761	-2.7065	-0.9990
	1	-1.3685	-1.3934	-0.8984	-1.6706	-1.9825	-0.9773
	3	-0.9824	-0.9996	-0.7638	-1.1905	-1.4054	-0.8926
	5	-0.8891	-0.9043	-0.7330	-1.0727	-1.2622	-0.8660
	10	-0.7823	-0.7953	-0.6773	-0.9403	-1.1033	-0.8149

asume formas de la distribución de retornos. Como es fácil verificar, las distribución de rendimientos tiene características de alta curtosis, colas pesadas y sesgos. Lo anterior sugiere la exploración de otras distribuciones de probabilidad a considerar, por ejemplo la Cauchy o aquellas de tipo fractal como la alfa-estable.

Horizonte N: a mayor horizonte N , sólo las métricas $VaR \mathcal{H}$ y $ES \mathcal{H}$ están acotadas por la restricción de que la pérdida potencial no puede superar el 100% del valor del portafolio. Además, los datos sugieren que es impreciso emplear el factor \sqrt{N} para estimar el riesgo a N días a partir de aquel a 1 día.

Este hecho se alinea a la discusión sobre los supuestos usados en los modelos de riesgo y asociados al concepto que el riesgo crece con la raíz del tiempo, el cual surge de considerar la independencia de la autocorrelación de los precios. Esta discusión aparece, por ejemplo, en Daníelsson and Zigrand [2006], y en el contexto de la regulación FRTB, en Pederzoli and Torricelli [2021]. Adicionalmente, los avances en campos de la teoría fractal propuesta por Mandelbrot sugieren que la persistencia o anti-persistencia en los precios llevan a que el riesgo no se incremente con la raíz cuadrada del tiempo (Mandelbrot [2005]).

Modelo híbrido FX-BSHW1: a partir de los modelos internos de FRTB para cuantificar los riesgos VaR y ES , el impacto de incluir el modelo de tasa estocástica FX-BSHW1 en la valoración del portafolio de opciones sobre divisas puede medirse a lo largo de la región $T \times N$.

Para ello, la Tabla **3-3** muestra $5 \times 5 \times 6$ (150!) posibles diferencias de las seis métricas de riesgo VaR y ES - en sus versiones histórica, normal, y t -student - bajo los modelos Black Scholes y FX-BSHW1 en la región $T \times N$. Para ayudar a captar las diferencias se usan bandas de $\pm 5\%$ como guía.

Los resultados en la tabla evidencian que cada una de las seis medidas de riesgo es mayor en el ambiente del modelo de tasa estocástica considerado, siendo más marcado el distanciamiento con el aumento del tenor T . Esta aseveración es más contundente para la métrica ES en sus versiones normal y t -student. Por otra parte, con el crecimiento de N , como es de esperar, las diferencias aumentan notablemente.

Respecto a la métrica histórica ES , su respuesta es menos sensible al modelo de valoración de opciones con vencimientos en el corto plazo. En general, puede apreciarse que las métricas de riesgo VaR y ES consideradas aumentan más de un 5% en la región $T \times N$ ($N \neq 1$) cuando se incluye el modelo de tasa estocástica FX-BSHW1. Las diferencias anteriores, pues, reflejan el contraste entre las características de las distribuciones del portafolio de pérdidas a N días para cada tenor T .

Con una mirada prospectiva, una pequeña institución habituada a calcular la métrica VaR en su versión histórica para portafolios sin posición en opciones, con productos a

Tabla 3-3.: Efectos de incluir el modelo híbrido FX-BSHW1 en VaR y ES bajo FRTB

t : 03/06/2021

N	Riesgo _{FX-BSHW1} - Riesgo _{BS}					
	$\Delta VaR \mathcal{N}$	$\Delta VaR \mathcal{T}$	$\Delta VaR \mathcal{H}$	$\Delta ES \mathcal{N}$	$\Delta ES \mathcal{T}$	$\Delta ES \mathcal{H}$
1						
10						
20						
40						
60						

barras en tenores $T = 0.5, 1, 3, 5, 10$. Bandas $\pm 5\%$.

corto plazo, a horizontes de uno o diez días, y bajo criterios inscritos en una regulación pre-FRTB, no vería muy necesario incluir un modelo de dos factores como vehículo de valoración. Sin embargo, abrirse hacia la configuración de nuevos portafolios demandaría todo un laboratorio técnico para adaptarse a la nueva regulación y encontrar de seguro oportunidades en su negocio.

En este sentido, tener la visión hacia modelos de más de un factor está alineado con el trabajo en Laurent et al. [2016], desde el cual se introduce un modelo de dos factores como requisito mandatorio en el marco de la regulación FRTB para estimar el capital por riesgo de impago en modelos internos (DRC). Además, la implementación de este tipo de modelos está de acuerdo con el estudio de Orgeldinger [2018], donde se establecen directrices orientadas a la implementación de programas modernos en gestión de riesgo.

3.4.4. Back-testing

El desempeño de la métrica VaR debe ser evaluado en el marco de modelos internos de FRTB. Consecuentemente, para una opción call Europea sobre GBP/USD en condición ATM y vencimiento anual $T \in \{0.5, 1, 3, 5, 10\}$, la Tabla 3-4 reporta para el día t ocho pruebas back-testing para las métricas $VaR \mathcal{N}$, $VaR \mathcal{T}$, y $VaR \mathcal{H}$, a niveles de confianza 97.5% y 99%. Las pruebas referidas son TL, Bin, UC, TUF, CC, CCI, TBF, y TBF1, que corresponden a aquellas definidas en la sección 1.2 del capítulo 1, y son realizadas en 4 períodos sucesivos de 250 días antes de t .

La tabla muestra puntos en color que representan el resultado del respectivo test. Así, un punto verde indica que el test en cuestión es aceptado, esto es, que la hipótesis nula del test

no se rechaza bajo un nivel de significancia del 5%. Por su parte, un punto rojo significa que el test se rechaza, y uno amarillo indica la zona de advertencia del test TL.

En general, los resultados de los ocho test son satisfactorios para los períodos (años) 1 y 2, siendo mejores para la medida histórica VaR . Los resultados de las pruebas son relativamente buenos para el período 3, pese a que la crisis 2020-1 ya estaba presente. Por su parte, en el año 4, los resultados son satisfactorios para el nivel de confianza 99%, aunque dicha crisis estaba en su plenitud. También, en este mismo año, los resultados de las pruebas son satisfactorios para las opciones a largo plazo con $T=5, 10$ años. En los últimos dos años, el desempeño de la métrica histórica VaR sigue siendo mejor.

Lo anterior sugiere que las medidas VaR , en general, reaccionan oportunamente a los efectos de la crisis sobre los retornos de las opciones, y que la medida histórica VaR tiene mejor desempeño. A su vez, puede afirmarse que para el portafolio de opciones considerado, el programa metodológico propuesto en este capítulo resulta procedente.

3.5. Conclusiones

Este capítulo ha presentado una metodología para cuantificar el riesgo mercado *expected shortfall*, en versiones histórica, normal, y *t*-student, para un portafolio de opciones en divisas en el marco de modelos internos de la nueva regulación FRTB, la cual entra en vigencia en 2023. La metodología incluye, en primer lugar, la generación de escenarios de estrés para la tasa de cambio y las curvas cero de tasas de interés doméstica y foránea. En segundo lugar, incluye una especificación del modelo híbrido de tasa estocástica Black Scholes Hull White adaptado a divisas, con objeto de valorar el portafolio. Tal inclusión responde a la tendencia en la literatura científica y la industria de emplear, en programas de gestión de riesgos, modelos con factores propios en volatilidad y/o tasa de interés.

Así mismo, se desarrolla una aplicación, a partir de la metodología definida, donde se computa las medidas de riesgo VaR y ES en un portafolio de opciones sobre GBP/USD, y desde la que se ejecuta un conjunto de pruebas back-testing de desempeño para las medidas. El período de estrés se toma de la crisis global 2020-1, y la calibración del modelo híbrido se logra con datos de mercado para las mismas variables en que se generan los escenarios de estrés. La aplicación concebida puede ser un paso inicial hacia un prototipo tecnológico para la gestión del riesgo ES en la arena financiera a la luz de la nueva regulación.

Los resultados permiten identificar impactos relacionados al capital de riesgo del portafolio desde las siguientes vías. Primero, ante variaciones en el vencimiento T de las opciones, desde el corto, mediano, y el largo plazo. Segundo, ante variaciones en el horizonte N de riesgo, el cual está asociado a economías desarrolladas o emergentes en la regulación FRTB. Tercero, frente a la elección del modelo estocástico para valorar el portafolio. En el último aspecto, la inclusión del modelo híbrido de tasa estocástica introduce un incremento, respecto a la contrapartida Black Scholes - en las métricas de riesgo de al menos 5% a lo largo de la región $T \times N$ estudiada. En todas las vías anteriores se observa que la métrica histórica ES es la

Tabla 3-4.: Back-testing *VaR* - FRTB, inclusión del modelo híbrido FX-BSHW1. Opciones call sobre GBP/USD

<i>t</i> : 03/06/2021						
VaR	$\mathcal{N}97.5$	$\mathcal{T}97.5$	$\mathcal{H}97.5$	$\mathcal{N}99$	$\mathcal{T}99$	$\mathcal{H}99$
Año 1						
$T = 0.5$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 1$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 3$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 5$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 10$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
Año 2						
$T = 0.5$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 1$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 3$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 5$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 10$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
Año 3						
$T = 0.5$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 1$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 3$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 5$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 10$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
Año 4						
$T = 0.5$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 1$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 3$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 5$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●
$T = 10$	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●

●●●●●●●● pruebas back-testing TL, Bin, UC, TUF, CC, CCI, TBF, TBF1

Año 1: 04 ago 2017 - 19 jul 2018 Año 2: 20 jul 2018 - 04 jul 2019

Año 3: 05 jul 2019 - 18 jun 2020 Año 4: 19 jun 2020 - 03 jun 2021

más estable, en términos de cambio, además de implicar el menor capital de riesgo. Finalmente, durante cuatro años consecutivos previos a la fecha 03 Junio 2021, se realizaron ocho pruebas back-testing sobre tres medidas VaR adaptadas a FRTB. En este experimento, se obtienen resultados satisfactorios para el desempeño de las métricas de riesgo en los dos períodos, antes de crisis, y en los dos períodos, durante crisis. Los resultados expuestos sugieren que la metodología definida en este capítulo es procedente.

En el próximo capítulo. A partir de la metodología definida en el capítulo 2, se propone una última ampliación en el marco de modelos internos de FRTB. Desde este nuevo enfoque, se hace posible cuantificar el riesgo mercado ES y medir sus impactos en un portafolio de opciones de divisas incluyendo un modelo híbrido de tasa y volatilidad estocástica, denominado Heston Hull White para divisas, para valorar el portafolio. Desde este modelo, la superficie de volatilidad implícita sigue de cerca la respectiva superficie en el mercado real.

4. Capítulo 4: Riesgo mercado ES bajo FRTB en opciones sobre divisas - inclusión de un modelo híbrido de tasa y volatilidad estocástica

Este capítulo define una metodología para cuantificar el riesgo mercado ES de un portafolio de opciones sobre divisas a la luz de los modelos internos de la regulación FRTB, la cual entra en vigencia en 2023. La valoración de portafolios es efectuada a través del modelo híbrido de tasa y volatilidad estocástica Heston Hull White para divisas, para el cual se establecen criterios de calibración y medidas de desempeño a precios de mercado.

Luego, la metodología se implementa mediante una aplicación en la cual el portafolio se compone de opciones sobre GBP/USD. A partir de datos históricos para la tasa de cambio, curvas cero de tasas de interés, y volatilidades implícitas, se realiza la calibración del modelo y se obtiene un desempeño satisfactorio. Por su parte, los escenarios de estrés son construidos con referencia a la crisis 2020-1. Las medidas estimadas permiten investigar impactos en capital de riesgo según la madurez de las opciones y el horizonte de riesgo. Las pruebas back-testing realizadas evidencian el buen desempeño de las métricas de riesgo definidas, y por tanto se sugiere que la metodología formulada es procedente.

Además, el capítulo presenta un diagrama que resume la metodología desarrollada a lo largo de este trabajo y proyecta una agenda futura de investigación.

4.1. Introducción

La regulación FRTB en BIS [2019], consolidada por el Comité de Basilea para Supervisión Bancaria (BCBS), es el referente global para la gestión de riesgo mercado en la industria bancaria y sus preceptos entran en vigencia el 1 de enero de 2023.

Uno de los cambios fundamentales que considera la regulación es el cálculo del capital de riesgo de un portafolio vía modelos internos. Dicho capital se conforma por la suma de tres requerimientos implicados por: *expected shortfall* (ES), factores de riesgo no modelables estadísticamente, y riesgo de impago. Otros cambios, análisis de impactos, y un conjunto de referencias sobre la nueva regulación han sido estudiados en los capítulos 1, 2, y 3.

En este contexto, bajo la regulación FRTB, los capítulos 2 y 3 de este trabajo aportan, conjuntamente, una metodología para estimar la métrica ES de un portafolio de opciones sobre divisas, permitiendo medir futuros impactos en el capital de riesgo. En el primero de estos capítulos, el referente para valorar el portafolio de opciones es el modelo en Black and Scholes [1973] (BS), mientras que en el segundo, se adopta el modelo híbrido de tasa estocástica Black Scholes Hull White en Brigo and Mercurio [2007] (BSHW).

La consideración de *referentes* para valorar el portafolio de opciones adquiere interés investigativo en el área de gestión de riesgos, lo que permite a su vez robustecer la metodología planteada, antes descrita. Según Lehar et al. [2002], la medición del riesgo mercado de un portafolio de derivados *depende* notablemente de una correcta valoración de sus instrumentos. La medición del riesgo se hace compleja dada la no linealidad de los contratos y las características, como el sesgo y la curtosis, en la distribución de retornos del portafolio.

Por su parte, Bakshi et al. [2000] señalan que el desempeño del modelo seminal en Black and Scholes [1973] puede mejorar mediante el uso (*posiblemente combinado*) de modelos de volatilidad estocástica, modelos de tasas de interés estocástica, o modelos de saltos aleatorios. Adicionalmente, la investigación en Cheng et al. [2018] indica que en la industria bancaria y de seguros, la valoración de derivados, especialmente de largo plazo, usualmente se realiza bajo modelos con tasa y/o volatilidad estocástica, y desde este tipo de modelos encuentra evidencia de un mejor desempeño en valoraciones de derivados. El estudio también señala que a partir de los resultados en Bakshi et al. [2000], surgió una clase de modelos conocidos como *modelos híbridos* de valoración de precios, que tienen múltiples factores y que están dedicados principalmente a seguros, acciones, commodities y monedas.

En esta dirección, la literatura tiene investigaciones sobre modelos con volatilidad y/o tasa estocástica. Brigo and Mercurio [2007] presentan un modelo híbrido llamado *Black Scholes Hull White (BSHW)*, donde el precio es conducido según BS y la tasa corta según Hull and White [1990] (HW). En Ahlip [2008] y Ahlip and Rutkowski [2013] se proponen modelos con volatilidad y tasa estocástica. Ambos trabajos consiguen resultados analíticos para el precio de opciones Europeas sobre divisas y mejoran el desempeño del modelo en Heston [1993].

De otro lado, Grzelak and Oosterlee [2011] y Grzelak et al. [2012] proponen dos modelos híbridos, en tasa y volatilidad, denominados Heston Hull White (HHW) y Heston CIR (Heston/CIR, para el modelo CIR ver Cox et al. [1985]). En estos trabajos se obtienen *funciones características altamente eficientes y aproximaciones afines de precios de derivados*, lo cual se hace relevante para propósitos de calibración y valoración de derivados. Es de anotar que las técnicas de simulación Monte Carlo pueden no ser viables en tareas de calibración para modelos de múltiples factores.

El estudio en Grzelak and Oosterlee [2012] extiende su trabajo previo y presenta dos modelos especializados de divisas. El primero se denomina *Heston Hull White para divisas (FX-HHW)*, en el cual la dinámica de la tasa de cambio y su volatilidad son conducidas por una especificación de Heston, y las tasas doméstica y foránea por una especificación de tipo HW. El segundo modelo se prescribe según especificaciones de Heston y LMM (para el modelo

LMM ver Heath et al. [1992], Brace et al. [1997], Jamshidian [1997], y Miltersen et al. [1997]). Ambas propuestas cuentan con volatilidad estocástica y tasas doméstica y foránea correlacionadas, y además proveen formulas semi-analíticas para valorar opciones Europeas. Adicionalmente, el estudio en van Haastrecht and Pelsser [2011] presenta un modelo híbrido con volatilidad y tasa estocástica orientado a valorar opciones de divisas, dando como resultado fórmulas cerradas y eficientes para computar el precio de opciones vanilla y realizar gestión de riesgos en portafolios de gran tamaño.

De otro lado, Recchioni and Sun [2016] propone una innovación a partir del trabajo en Grzelak and Oosterlee [2011] logrando resultados analíticos de valoración y un procedimiento de estimación y validación de parámetros. Sus resultados numéricos superan el modelo de Heston en valoración de opciones. Otros estudios interesantes relacionados con modelos híbridos para volatilidad y tasa estocástica, aparecen por ejemplo en Haentjens and In 't Hout [2012], Briani et al. [2017], He and Zhu [2018], Soleymani and Itkin [2019], Guo [2019], y Liang and Xu [2020].

En consecuencia de lo anterior, este capítulo define una metodología, bajo los modelos internos de FRTB, para cuantificar el riesgo mercado ES de un portafolio de opciones sobre divisas, y tomando como referente de valoración el modelo híbrido de tasa y volatilidad estocástica Heston Hull White para divisas.

Con esta finalidad, se parte de la metodología planteada en el capítulo 2, se generan escenarios bajo estrés para precios y tasas de interés, se calibra el modelo híbrido a precios de mercado, y se implementa su uso para valorar el portafolio.

Posteriormente, se desarrolla una aplicación de la metodología formulada donde se miden los riesgos VaR y ES y se evalúan sus impactos en un portafolio de opciones sobre GBP/USD. En particular, los escenarios de estrés son construidos a partir de la crisis 2020-1 y la calibración del modelo híbrido es efectuada de modo que aproxima, satisfactoriamente, la superficie de volatilidad de mercado. Finalmente, las pruebas back-testing realizadas confirman que la metodología definida es procedente.

La sección 4.2 avanza hacia el análisis y fundamentación del modelo Heston Hull White para divisas, FX-HHW. Luego, la sección 4.3 formula la metodología para estimar el riesgo mercado ES en portafolios de opciones de divisas incorporando el modelo de valoración FX-HHW. Además, se resume la metodología lograda a lo largo de este trabajo. La sección 4.4 presenta una aplicación de la metodología y discute los hallazgos más relevantes. Por último, la sección 4.5 expone las conclusiones, orienta y documenta una agenda futura de investigación.

4.2. Modelo Híbrido Heston Hull White para Divisas (FX-HHW)

El trabajo en Grzelak and Oosterlee [2012] desarrolla dos modelos híbridos especializados de divisas, entre los cuales uno se conoce como *Heston Hull White para divisas (FX-HHW)*.

Allí, la dinámica de la tasa de cambio y su volatilidad son conducidas por una especificación de Heston (Heston [1993]), y las curvas cero de tasas de interés doméstica y foránea por una especificación de tipo Hull White (HW, Hull and White [1990]).

El modelo FX-HHW puede ser expresado bajo la *medida de probabilidad T -forward doméstica*, denotada por \mathbb{Q}^T , y luego correctamente aproximado por un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas que satisfaga condiciones de afinidad.

Una vez lograda esta transformación, la función característica del nuevo sistema puede ser calculada, y a partir de tal función, el precio de una opción call Europea sobre divisas puede conseguirse *eficientemente* mediante técnicas de inversión de la transformada de Fourier.

De manera similar a la sección 3.2 del capítulo 3 en el universo \mathbb{Q}^T , el precio de la opción será independiente de la evolución estocástica de la tasa de interés doméstica, y sólo los parámetros del modelo serán necesarios de considerar.

El modelo FX-HHW capturará la sonrisa y estructura de volatilidades implícitas presentes en los mercados de opciones, por lo que su introducción en un sistema de gestión de riesgo puede permitir la cuantificación, de manera razonable, del riesgo mercado en portafolios de opciones sobre divisas a la luz de los modelos internos de la nueva regulación de Basilea FRTB.

Un análisis de fundamentos teóricos esenciales para los modelos Hull White y de Heston, necesarios para comprender la próxima sección, aparecen respectivamente en el Anexo A y Anexo B.

4.2.1. Caracterización matemática del modelo FX-HHW

Las notas y argumentaciones presentadas aquí son de elaboración propia y están inspiradas en los trabajos de Bjork [2009], Grzelak and Oosterlee [2011, 2012], Guo et al. [2013], Cheng et al. [2018], y Oosterlee and Grzelak [2020].

Definición 4.2.1 (modelo FX-HHW). *Sea $y(t)$ es el número de unidades de una divisa doméstica pagada por una unidad de divisa foránea en el tiempo t . Además, considere que $r_d(t)$ y $r_f(t)$ son las tasas de interés libres de riesgo doméstica y foránea, respectivamente, y que $v(t)$ es la varianza de $y(t)$. Entonces el modelo FX-HHW bajo la medida de riesgo neutral doméstica \mathbb{Q} describe la dinámica del vector de estado $X(t) = [y(t), v(t), r_d(t), r_f(t)]$ mediante el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas*

$$\begin{aligned}
 dy(t)/y(t) &= (r_d(t) - r_f(t))dt + \sqrt{v(t)}dW_y^{\mathbb{Q}}(t) \\
 dv(t) &= \kappa(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t) \\
 dr_d(t) &= \lambda_d(\theta_d(t) - r_d(t))dt + \eta_d dW_d^{\mathbb{Q}}(t) \\
 dr_f(t) &= \left(\lambda_f(\theta_f(t) - r_f(t)) - \eta_f \rho_{y,f} \sqrt{v(t)} \right) dt + \eta_f dW_f^{\mathbb{Q}}(t),
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

donde $y(t_0)$, $v(t_0)$, $r_d(t_0)$, y $r_f(t_0)$ son valores en \mathfrak{R}^+ , los parámetros κ , \bar{v} , y γ son constantes que tienen los significados usuales a aquellos en el modelo de Heston, mientras que λ_d , η_d , λ_f , y η_f son constantes con los significados usuales en el modelo HW. Además, $\theta_d(t)$ y $\theta_f(t)$ son funciones temporales de tasas de interés doméstica y foránea, respectivamente, elegidas de modo que las estructuras de tasas doméstica y foránea en el modelo HW se ajusten a las respectivas estructuras de mercado en t , y donde la matrix de correlación del sistema está dada por la correlación del vector browniano $[W_y^{\mathbb{Q}}(t), W_v^{\mathbb{Q}}(t), W_d^{\mathbb{Q}}(t), W_f^{\mathbb{Q}}(t)]$, la cual se prescribe como

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{y,v} & 1 & \cdot & \cdot \\ \rho_{y,d} & \rho_{v,d} & 1 & \cdot \\ \rho_{y,f} & \rho_{v,f} & \rho_{d,f} & 1 \end{pmatrix} \quad (4-2)$$

Una introducción al modelo de un factor de Hull y White, HW, aparece en el anexo A, y al modelo de Heston, en el anexo B. La forma funcional $\theta_i(t)$, $i \in \{d, f\}$, se lee en la ecuación (A-34).

Cuando un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas satisface condiciones de afinidad, su función característica puede determinarse mediante una función exponencial en variable compleja. Una vez conseguida dicha función, el valor de una opción call europea sobre el activo subyacente atado al sistema puede conseguirse de manera eficiente mediante técnicas numéricas de inversión de la transformada de Fourier.

El sistema híbrido FX-HHW dado en (4-1) no es afín. En consecuencia, la manera de ajustarlo a esta condición, de estimar así la función característica asociada al sistema, y de calcular finalmente el valor de una opción call europea, se logra a través del siguiente hilo argumental. Un procedimiento matemático detallado aparece en Grzelak and Oosterlee [2012].

Tasa de cambio forward se define la tasa de cambio forward, $y_F(t, T)$, mediante la relación

$$y_F(t, T) = y(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d(t, T)}, \quad (4-3)$$

donde $P_d(t, T)$ y $P_f(t, T)$ son los valores en t de dos bonos cero cupón doméstico y foráneo, respectivamente, con vencimiento en T , cuyas dinámicas ambas son estocásticas y se expresan bajo la medida de riesgo neutral doméstica \mathbb{Q} (ver Piterbarg [2006], Heath et al. [1992]). De manera similar al análisis realizado respecto a la ecuación (3-3) en el capítulo 3, la tasa $y_F(t, T)$ es una martingala bajo la medida T -forward doméstica, denotada por \mathbb{Q}^T .

Modelo híbrido FX-HHW en \mathbb{Q}^T si se transforma el sistema dado en (4-1), en términos de la tasa de cambio forward $y_F(t, T)$ definida en la ecuación (4-3), mediante un cambio de medida de \mathbb{Q} a \mathbb{Q}^T , entonces la dinámica de $y_F(t, T)$ se describe por el nuevo sistema

$$\begin{aligned}
\frac{dy_F(t, T)}{y_F(t, T)} &= \sqrt{v(t)}dW_y^T(t) - \eta_d B_d(t, T)dW_d^T(t) + \eta_f B_f(t, T)dW_f^T(t) \\
dv(t) &= \left(\kappa(\bar{v} - v(t)) + \gamma\rho_{v,d}\eta_d B_d(t, T)\sqrt{v(t)} \right) dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^T(t) \\
dr_d(t) &= \left(\lambda_d(\theta_d(t) - r_d(t)) + \eta_d^2 B_d(t, T) \right) dt + \eta_d dW_d^T(t) \\
dr_f(t) &= \left(\lambda_f(\theta_f(t) - r_f(t)) - \eta_f\rho_{y,f}\sqrt{v(t)} + \eta_d\eta_f\rho_{d,f}B_d(t, T) \right) dt + \eta_f dW_f^T(t),
\end{aligned} \tag{4-4}$$

donde la matriz de correlación C del sistema es idéntica a la matriz dada en la ecuación (4-2), y las funciones $B_d(t, T)$ y $B_f(t, T)$ se formulan como

$$\begin{aligned}
B_d(t, T) &= \frac{1}{\lambda_d}(e^{-\lambda_d(T-t)} - 1) \\
B_f(t, T) &= \frac{1}{\lambda_f}(e^{-\lambda_f(T-t)} - 1)
\end{aligned} \tag{4-5}$$

Además, de manera similar a la relación establecida en la ecuación (3-4) del capítulo 3, el precio de un derivado de tipo europeo sobre la tasa de cambio $y(t)$, $V^{FX}(t, y(t))$, se simplifica bajo la medida de probabilidad \mathbb{Q}^T por

$$\begin{aligned}
V^{FX}(t, y(t)) &= P_d(t, T)\mathbf{E}^T[H(T, y(T))|\mathcal{F}(t)] \\
&= P_d(t, T)\mathbf{E}^T[H(T, y_F(T, T))|\mathcal{F}(t)],
\end{aligned} \tag{4-6}$$

donde $H(T, y(T)) = H(T, y_F(T, T))$ es el *payoff* del derivado.

Consecuentemente, el modelo FX-HHW, expresado bajo la *medida de probabilidad T-forward doméstica* \mathbb{Q}^T , describe la dinámica del vector de estado dado por

$$X(t) = [y_F(t, T), v(t), r_d(t), r_f(t)], \tag{4-7}$$

definido por el sistema (4-4), y a partir del cual se observa que la evolución temporal de la tasa de cambio forward, $y_F(t, T)$, resulta ser *independiente* de la evolución estocástica de las tasas de interés doméstica y foránea.

El proceso $y_F(t, T)$ dependerá de los parámetros del sistema FX-HHW en el universo \mathbb{Q}^T , de la evolución estocástica de $v(t)$, y de las innovaciones brownianas asociadas a la tasa de cambio y a las tasas de interés doméstica y foránea. Adicionalmente, respecto a la valoración de una opción call europea bajo el modelo híbrido FX-HHW, la ecuación (4-6) indica que su valor dependerá de la expectativa de su *payoff* bajo \mathbb{Q}^T sin considerar factores de descuento estocásticos en la tasa doméstica. Lo anterior revela, nuevamente (ver sección 3.2), la ventaja de expresar el modelo inicial bajo la medida \mathbb{Q}^T .

Función característica forward del híbrido FX-HHW1 la condición de afinidad del sistema (4-4) se consigue si se introduce la aproximación del término no-afín $\sqrt{v(t)}$ por medio de su primer momento, de modo que

$$\sqrt{v(t)} \approx G(t) := \mathbf{E}^T \left[\sqrt{v(t)} \right] \quad (4-8)$$

Una expresión analítica para el cómputo de la aproximación $G(t)$ es estudiada en Grzelak and Oosterlee [2011] y aparece en el ítem que sigue.

De este modo, la aproximación introducida, $G(t)$, genera el modelo (afín) híbrido conocido como FX-HHW1. Consecuentemente, su función característica para el logaritmo de la tasa de cambio forward, $X(t) = \ln y_F(t, T)$, bajo la medida \mathbb{Q}^T , se expresa como

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{X}}(u; t, T) &= \mathbf{E}^T \left[e^{iu\mathbf{X}(T)} | \mathcal{F}(t) \right] \\ &= e^{A(u, \tau) + B(u, \tau)X(t) + C(u, \tau)v(t)} \end{aligned} \quad (4-9)$$

donde i es la unidad imaginaria y $\tau = T - t$. Las soluciones para A , B , y C son las siguientes

$$B(u, \tau) = iu, \quad (4-10)$$

$$C(u, \tau) = \frac{1 - e^{-d\tau}}{\gamma^2(1 - ge^{-d\tau})} (k - \rho_{y,v}\gamma iu - d), \quad (4-11)$$

donde

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(\rho_{y,v}\gamma iu - \kappa)^2 - \gamma^2 iu(iu - 1)} \\ g &= \frac{\kappa - \gamma\rho_{y,v}iu - d}{\kappa - \gamma\rho_{y,v}iu + d} \end{aligned} \quad (4-12)$$

Finalmente,

$$A(u, \tau) = \int_0^\tau [\kappa\bar{v} + \rho_{v,d}\gamma\eta_d G(T-z)B_d(z) - \rho_{v,d}\gamma\eta_d G(T-z)B_d(z)iu + \rho_{v,f}\gamma\eta_f G(T-z)B_f(z)iu]C(z)dz + (u^2 + iu) \int_0^\tau \zeta(z, G(T-z))dz \quad (4-13)$$

donde $G(t)$ está definido en la ecuación (4-8), B_d y B_f en las ecuaciones (4-5), y la función ζ está definida por

$$\zeta(t, \sqrt{v(t)}) = (\rho_{y,d}\eta_d B_d(t, T) - \rho_{y,f}\eta_f B_f(t, T)) \sqrt{v(t)} + \rho_{d,f}\eta_d\eta_f B_d(t, T)B_f(t, T) - \frac{1}{2} (\eta_d^2 B_d^2(t, T) + \eta_f^2 B_f^2(t, T)) \quad (4-14)$$

Aproximación $G(t)$ para lograr afinidad del sistema híbrido FX-HHW Si $v(t)$ es un proceso tipo CIR que representa la varianza de un activo bajo riesgo neutral, entonces

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t)) dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t), \quad (4-15)$$

cuya prescripción e interpretación de los simbolismos que aparecen son las misma que en el modelo de Heston, ver ecuación (B-4) del Anexo B. Ahora, la aproximación $G(t) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{v(t)} \right]$ está dada por

$$G(t) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sqrt{v(t)} | \mathcal{F}(t_0) \right] = \sqrt{2\bar{c}(t, 0)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1+\delta}{2})}{\Gamma(\frac{\delta}{2})} \cdot {}_1F_1 \left(\frac{-1}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{-\bar{\kappa}(t, 0)}{2} \right), \quad (4-16)$$

donde ${}_1F_1(a, b, z)$ es la función hipergeométrica confluyente de Kummer de primer orden dada en Kummer [1836]. Esta función se computa como

$${}_1F_1(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}, \quad (4-17)$$

para la cual los coeficientes $(a)_k$ representan los símbolos de Pochhammer,

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \cdots (a+k-1) \quad (4-18)$$

Por su parte, los valores $\bar{c}(t, 0)$, δ , y $\bar{\kappa}(t, 0)$ se calculan como,

$$\bar{c}(t, 0) = \frac{1}{4\kappa} \gamma^2 (1 - e^{-\kappa t}) \quad (4-19)$$

$$\delta = \frac{4\kappa \bar{v}}{\gamma^2} \quad (4-20)$$

$$\bar{\kappa}(t, 0) = \frac{4\kappa v(0) e^{-\kappa t}}{\gamma^2 (1 - e^{-\kappa t})}, \quad (4-21)$$

y siendo Γ la función Gamma dada por $\Gamma(c) = \int_0^\infty t^{c-1} e^{-t} dt$.

Precio de una opción europea por inversión de Fourier a partir de la función característica del modelo FX-HHW1, expresada en la ecuación (4-9), se hace posible computar de manera eficiente el precio de una opción europea numéricamente adoptando una inversión de Fourier, tal como se establece en el trabajo seminal desarrollado por Carr and Madan [1999].

En este contexto, Fang and Oosterlee [2008] desarrollan una técnica de inversión, moderna y seminal en finanzas, mediante una expansión en series de Fourier en términos de la función coseno para valorar opciones de tipo europeo. Siguiendo el aporte de este último trabajo, el valor de una opción europea bajo el modelo FX-HHW se estima por una expansión de N términos dada por

$$V(t_0, \mathbf{x}) \approx \mathbf{K} \cdot P_d(t_0, T) \cdot \Re \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} ' \varphi_{\mathbf{x}} \left(\frac{k\pi}{b-a}, T \right) U_k \exp \left(ik\pi \frac{\mathbf{x} - a}{b-a} \right) \right\} \quad (4-22)$$

donde \mathbf{K} representa el precio strike, T el vencimiento de la opción, \mathbf{x} es el logaritmo del precio forward del activo subyacente normalizado por \mathbf{K} , y $\varphi_{\mathbf{x}}$ está asociado a la función característica forward dada en la ecuación (4-9), de modo que

$$\phi_{\mathbf{x}}(u; t_0, T) = \varphi_{\mathbf{x}}(u, T) \cdot e^{iuX(t_0)} \quad (4-23)$$

Además, U es un vector de N coeficientes que corresponden a una expansión de Fourier en coseno para el *payoff* de la opción, a y b se estiman en términos de un factor de tolerancia de truncamiento, y el símbolo $'$ cerca del símbolo \sum indica que el primer término de la suma se pondera por 0.5. Adicionalmente, el precio de la opción call puede ser valorado eficientemente (milisegundos) si se ingresa la información \mathbf{x} y \mathbf{K} de manera multivaluada en dos vectores, haciendo una *única* ejecución de la fórmula (4-22). Para otros detalles, se referencia directamente el artículo en Fang and Oosterlee [2008].

4.3. Metodología. Riesgo mercado ES bajo FRTB e inclusión del modelo híbrido FX-HHW

La metodología planteada a continuación es una *extensión* de la metodología propuesta en la sección 2.3.2 del capítulo 2, la cual está orientada a la valoración del riesgo mercado ES de un portafolio de opciones sobre divisas en el marco de modelos internos de la regulación de Basilea FRTB en BIS [2019].

De esta manera, como elemento adicional se designa el modelo híbrido, con tasa y volatilidad estocástica, Heston Hull White para divisas, FX-HHW, dado en Grzelak and Oosterlee [2012] como referente para valorar el portafolio de opciones. La fundamentación del modelo ha sido establecida en la sección 4.2.

Así pues, en los siguientes apartados se inicia evocando la notación propia del modelo, luego se discute en detalle su calibración y respectivas medidas de desempeño a precios de mercado, y posteriormente se precisa el procedimiento para la construcción de escenarios de estrés y la medición y evaluación de impactos del riesgo ES en el portafolio.

Metodología en un diagrama. El último apartado presenta un diagrama que resume los elementos y relaciones esenciales de la metodología que ha sido formulada a lo largo de este trabajo. Allí, además, se esbozan elementos que permiten continuar su construcción y escalamiento tecnológico.

4.3.1. Notación

Por el bien de la claridad, se resume la notación abordada hasta este punto sobre el modelo de valoración de opciones que será empleado en esta metodología. Seguidamente aparecen los simbolismos usados y su respectiva interpretación.

Específicamente, la valoración de una opción call Europea sobre divisas, con tasa de cambio y , precio strike K , y madurez T , se realiza partiendo del modelo híbrido Heston Hull White para divisas, FX-HHW, dado en la definición 4.2.1. El modelo describe la dinámica del vector de estado $X(t) = [y(t), v(t), r_d(t), r_f(t)]$ - tasa de cambio, varianza de la tasa de cambio, tasa corta doméstica, tasa corta foránea - bajo la medida de riesgo neutral doméstica \mathbb{Q} , y su formulación aparece en las ecuaciones (4-1) y (4-2). Ver sección 4.2.

- I. *Funciones temporales de tasas en Hull White:* $\theta_d(t), \theta_f(t)$. Funciones dependientes del tiempo en el modelo HW en los ambientes doméstico y foráneo, respectivamente, que son elegidas de modo que las estructuras temporales de tasas doméstica y foránea en el modelo se ajusten a las respectivas estructuras temporales de tasas de interés en el mercado. La expresión analítica de $\theta_i(t)$, $i \in \{d, f\}$, está dada en la ecuación (A-34).
- II. *Parámetros asociados al componente Hull White:* $\lambda_d, \eta_d, \lambda_f, \eta_f$. El par λ_i, η_i representa, respectivamente, la velocidad de reversión de la tasa corta $r_i(t)$ a su media $\theta_i(t)$ y

volatilidad de la tasa corta $r_i(t)$, donde $i \in \{d, f\}$.

- III. *Parámetros asociados al componente Heston*: $\kappa, \bar{v}, \gamma, v_0$. La varianza $v(t)$ revierte a la media \bar{v} a velocidad κ . La volatilidad de la varianza $v(t)$ es γ y la varianza inicial es v_0 .
- IV. *Correlación del sistema FX-HHW*: C . Representa la matriz de correlaciones definida en la ecuación (4-2).

4.3.2. Calibración del modelo híbrido FX-HHW

De acuerdo con Grzelak and Oosterlee [2011, 2012] y Oosterlee and Grzelak [2020], la calibración de los parámetros del modelo FX-HHW para el día m se realiza en dos fases sucesivas. La primera, involucra los parámetros en el componente Hull White; la segunda, los parámetros en el componente de Heston. En esta metodología, la implementación de estas dos fases, además de la estimación de las correlaciones del sistema, se explicita en lo que sigue.

Calibración de parámetros HW y estimación de correlaciones observables del sistema

En la primera fase, se realiza un ajuste los parámetros del modelo HW y se estima el conjunto de correlaciones observables del sistema.

- Velocidades de reversión y volatilidades, doméstica y foránea: $\lambda_d, \lambda_f, \eta_d, \eta_f$.

En la literatura, la calibración del par $\lambda_i, \eta_i, i \in \{d, f\}$, se realiza a partir de instrumentos financieros como *caps*, *floors* o *swaptions* de tasas de interés a precios de mercado, ver por ejemplo Hull and White [2001] y Sun [2015].

Sin embargo, en este trabajo el ajuste de estos parámetros se aproxima a partir del modelo de equilibrio para tasa corta en Vasicek [1977], el cual es un caso especial del modelo HW donde $\theta_i(t), i \in \{d, f\}$, es constante. Ver Anexo A.

Así pues, *manteniendo* las condiciones originales de variabilidad de $\theta_i(t)$, y por tanto *manteniendo* la presencia y formalidad del modelo HW, los parámetros λ_i y η_i se aproximarán con la asistencia del modelo Vasicek. En otras palabras, el valor ajustado por Vasicek para la constante que representa el nivel de reversión de la tasa corta (doméstica o foránea) se ignora y se mantiene en su lugar la función $\theta_i(t)$.

La pre-calibración de λ_i, η_i para el modelo FX-HHW bajo el enfoque anterior es razonable dadas las siguientes observaciones. Primero, para todo par de valores λ_i, η_i (en su dominio financiero), el modelo HW replicará la estructura de plazos de mercado. Además, las opciones de tasa de cambio consideradas son tipo vanilla, por lo que puede tomarse el procedimiento estipulado como una primera instancia de calibración de λ_i, η_i . Por otra parte, la información de mercado necesaria a este punto se orienta sólo a las estructuras de plazos doméstica y foránea. La información de mercado para *caps*,

floors o *swaptions* es valiosa. Finalmente, por practicidad en el desarrollo de la presente metodología, la aproximación anterior se supone como un punto de partida.

Los siguientes comentarios precisan, respectivamente, la calibración del par λ_i, η_i , y la elección de las funciones temporales $\theta_i(t)$.

Comentario 4.3.1 (*Calibración λ_i, η_i*). Bajo la medida de riesgo neutral \mathcal{Q} , los parámetros $\lambda_i, \eta_i, i \in \{d, f\}$, en las ecuaciones (4-1) del modelo FX-HHW son calibrados en el día m siguiendo la estrategia de estimación de parámetros en el modelo de Vasicek definida en la sección A.3, Anexo A. Allí, en ambos ambientes, doméstico y foráneo, la información necesaria de mercado en el día m para ejecutar la estimación son las estructuras temporales de tasas de interés. Además, la respectiva tasa corta se tomará como la tasa de plazo para 3 meses.

Comentario 4.3.2 (*Elección de funciones $\theta_i(t)$*). Las funciones $\theta_i(t), i \in \{d, f\}$, en las ecuaciones (4-1) del modelo FX-HHW son establecidas en el día m de acuerdo a la ecuación (A-34), Anexo A. Allí, en ambos ambientes, doméstico y foráneo, la información necesaria de mercado en el día m para establecer las funciones temporales $\theta_i(t)$ son las estructuras temporales de tasas de interés.

- Correlaciones observables en el vector de estado $X(t)$: $\rho_{y,d}, \rho_{y,f}, \rho_{v,d}, \rho_{v,f}, \rho_{d,f}$.

El ajuste en el día m de las correlaciones mencionadas, $\rho_{i,j}, i, j \in \{y, v, d, f\}, (i, j) \neq (y, v)$, se hará empíricamente a través de la correlación de Pearson en ventanas de 250 días entre las siguientes series históricas,

- $(y_n)_{n \leq m}$: tasa de cambio,
- $(v_n)_{n \leq m}$: varianza tasa de cambio, dada a partir de retornos discretos de $(y)_n$,
- $(r_{d,n})_{n \leq m}$: tasa doméstica, dada por la tasa doméstica de plazo 3 meses,
- $(r_{f,n})_{n \leq m}$: tasa foránea, dada por la tasa foránea de plazo 3 meses,

En coherencia, el siguiente comentario describe la estimación de las correlaciones en cuestión.

Comentario 4.3.3 (*Correlaciones observables*). Considere la matriz de correlaciones C definida en la ecuación (4-2) del modelo FX-HHW. A partir de las series históricas hasta el día m para la tasa de cambio, su varianza, la tasa corta doméstica, y la tasa corta foránea, las correlaciones $\rho_{y,d}, \rho_{y,f}, \rho_{v,d}, \rho_{v,f}, \rho_{d,f}$, en el día m , pueden ser estimadas empíricamente a partir de las siguientes igualdades,

$$\rho_{y,i} = \text{corr} \left[\begin{pmatrix} y_{m-249} \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{i,m-249} \\ \vdots \\ r_{i,m} \end{pmatrix} \right], i \in \{d, f\} \quad (4-24)$$

$$\rho_{v,i} = \text{corr} \left[\begin{pmatrix} v_{m-249} \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{i,m-249} \\ \vdots \\ r_{i,m} \end{pmatrix} \right], i \in \{d, f\} \quad (4-25)$$

$$\rho_{d,f} = \text{corr} \left[\begin{pmatrix} r_{d,m-249} \\ \vdots \\ r_{d,m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{f,m-249} \\ \vdots \\ r_{f,m} \end{pmatrix} \right], \quad (4-26)$$

donde $v_n = \text{std}_n^2$, $\text{std}_n = \text{std}(\text{ret}_{n-249}, \dots, \text{ret}_n)$, $\text{ret}_n = \frac{y_n}{y_{n-1}} - 1$, $n \leq m$. El simbolismo $\text{corr}(\cdot, \cdot)$ indica la correlación entre sus argumentos, y std indica la desviación estándar de su argumento.

En el comentario 4.3.3, se asume que las correlaciones observables en cuestión son iguales en la medida física, \mathbb{P} , y en la medida de riesgo neutral, \mathbb{Q} .

Calibración en el componente Heston y estimación de ρ_{yv}

En la segunda fase, se precisa la calibración de los parámetros en el modelo de Heston, la cual incluye la correlación ρ_{yv} en el sistema FX-HHW.

Definición 4.3.1 (Opciones de mercado). *Sea*

$$\mathcal{KIV} = \{(K_1, IV_1), \dots, (K_q, IV_q)\} \quad (4-27)$$

la información de mercado en el día m para la volatilidad implícita de q opciones call sobre divisas con subyacente y y madurez T , donde el nodo (K_i, IV_i) , en el plano $K \times IV$, representa el precio strike y la volatilidad implícita de la opción i , $i = 1, \dots, q$.

Si $y_F(t, T)$ es la \mathbb{Q}^T -martingala que representa la tasa de cambio forward definida en la ecuación (4-3), entonces los precios de opciones sobre divisas en el mercado, relativos a \mathcal{KIV} , están dados en la información

$$\mathcal{KV}^{mkt} = \{(K_1, V_1^{mkt}), \dots, (K_q, V_q^{mkt})\}, \quad (4-28)$$

donde el precio V_i^{mkt} , $i = 1, \dots, q$, se calcula bajo la medida \mathbb{Q}^T a partir del modelo Black76.

Definición 4.3.2 (Opciones vía modelo FX-HHW). *Respecto a la información \mathcal{KITV} de la ecuación (4-27), los precios de opciones de divisas bajo el modelo FX-HHW están dados en la información*

$$\mathcal{KV}^{mod} = \{(K_1, V_1^{mod}), \dots, (K_q, V_q^{mod})\}, \quad (4-29)$$

donde V_i^{mod} , $i = 1, \dots, q$, se calcula bajo la medida \mathbb{Q}^T mediante la expansión en series de Fourier dada en la ecuación (4-22).

Definición 4.3.3 (Calibración $\bar{v}, \gamma, v_0, \rho_{yv}$). *A partir de las relaciones (4-28) y (4-29), considere la función objetivo*

$$g = (\mathbf{V}^{mkt} - \mathbf{V}^{mod})^T \cdot (\mathbf{V}^{mkt} - \mathbf{V}^{mod}) \quad (4-30)$$

donde $\mathbf{V}^{mkt} = [V_1^{mkt}, \dots, V_q^{mkt}]$ y $\mathbf{V}^{mod} = [V_1^{mod}, \dots, V_q^{mod}]$.

Bajo la medida de probabilidad T -forward, \mathbb{Q}^T , los parámetros $\bar{v}, \gamma, v_0, \rho_{yv}$, en las ecuaciones (4-4), (4-5), (4-2) del modelo FX-HHW, son calibrados en el día m de acuerdo al problema de optimización,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & g(\bar{v}, \gamma, v_0, \rho_{yv}) \\ \text{s.t.} \quad & \kappa = \kappa_0 \\ & lb = [lb_1, \dots, lb_4] \\ & ub = [ub_1, \dots, ub_4] \end{aligned} \quad (4-31)$$

donde κ es constante y está definido en el modelo en cuestión, lb y ub son cotas inferiores y superiores, respectivamente, para los parámetros en los argumentos de g , y donde los demás parámetros del modelo han sido previamente calibrados de acuerdo a los comentarios 4.3.1, 4.3.2, y 4.3.3.

Desempeño de calibración

El desempeño de calibración de parámetros del modelo FX-HHW puede ser evaluado a través de diferentes medidas de error sensibles a las distancias entre los precios de las opciones o entre las volatilidades implícitas, donde tales precios y volatilidades son obtenidos en el mercado y en el modelo en cuestión.

En este sentido, si z y \hat{z} corresponden, respectivamente, a un conjunto de q observaciones empíricas y a un conjunto muestral para aproximar tales observaciones, dos medidas de error usuales entre z y \hat{z} son el error cuadrático medio (MSE) y el error absoluto medio (MAE). En adición, dos tipos de error, locales y convenientes para hacer comparaciones, están dados por el primero y segundo valor máximo de las distancias euclídeas entre las componentes de z y \hat{z} (errores absolutos máximos, MaAE_k). Estos errores están definidos por

$$MSE = \frac{1}{q} \sum_i (z_i - \hat{z}_i)^2 \quad (4-32)$$

$$MAE = \frac{1}{q} \sum_i |z_i - \hat{z}_i| \quad (4-33)$$

$$MaAE_k = k\text{-máx}\{|z_i - \hat{z}_i|, \forall i\}; k = 1, 2 \quad (4-34)$$

Por tanto, las medidas de error MSE y MAE entre los precios de las opciones se obtienen a partir de las ecuaciones (4-32) y (4-33), donde z_i representa el precio de mercado V_i^{mkt} (ver ecuación (4-28)) y \hat{z}_i es el precio estimado bajo el modelo.

Además, las medidas MSE, MAE, $MaAE_1$, y $MaAE_2$ entre las volatilidades implícitas se calculan a partir de las ecuaciones (4-32), (4-33), y (4-34), donde z_i es la volatilidad implícita de mercado IV_i (ver ecuación (4-27)), y \hat{z}_i es la volatilidad implícita computada bajo el modelo.

Si las anteriores medidas de error resultan ser menores que un valor de tolerancia razonable, entonces puede afirmarse que la valoración de las opciones sobre divisas, vía el modelo FX-HHW, es consistente con la sonrisa de volatilidad presente en el mercado. Así mismo, si esta condición es cierta para diferentes vencimientos de las opciones, entonces la valoración realizada refleja refleja las características estilizadas de la superficie de volatilidad del día.

4.3.3. Riesgo mercado ES bajo FRTB

Se precisan detalles para cuantificar los riesgos VaR y ES bajo FRTB en un portafolio de opciones sobre divisas, cuando el portafolio se valora por el modelo FX-HHW. Al final se presenta un criterio para evaluar el impacto de las medidas.

Comentario 4.3.4 (Precio opción call vía FX-HHW). *El precio de una opción call Europea, $V(t_0, y)$, sobre la tasa de cambio $y(t)$, con precio strike K , y madurez T , bajo el modelo híbrido Heston Hull White para divisas, FX-HHW, definido en el sistema de ecuaciones (4-1) y (4-2), se computa a partir de la expansión en series de Fourier definida en las ecuaciones (4-22) y (4-23).*

Comentario 4.3.5 (Calibración del modelo). *La calibración del modelo Heston Hull White para divisas, FX-HHW, se realiza según las indicaciones de la sección 4.3.2.*

Definición 4.3.4 (Escenarios de precios y tasas). *Sea y_j un precio que representa la tasa de cambio entre dos divisas en el día j . Además, sean $R_{d,j}(T)$ y $R_{f,j}(T)$ las curvas cero libres de riesgo doméstica y foránea respectivamente en el día j , donde $R_{i,j}(T)$ está definida para un conjunto de valores del tenor T , $i \in \{d, f\}$.*

Si hoy es el día m y se dispone de $m + N$ observaciones, previas al día m , para el precio y las curvas cero, entonces es posible construir m escenarios proyectados al día $m + N$ para

el precio, $\eta_{j,m}^N$, y cada curva, $\mathfrak{R}_{i,j,m}^N(T)$, definidos de modo que el j -ésimo escenario sea, respectivamente,

$$\eta_{j,m}^N = y_m \frac{y_j}{y_{j-N}}, j = 1, \dots, m \quad (4-35)$$

$$\mathfrak{R}_{i,j,m}^N(T) = R_m(T) + R_j(T) - R_{j-N}(T), i \in \{d, f\}, j = 1, \dots, m \quad (4-36)$$

Definición 4.3.5 (Escenarios de opciones). *Suponga que hoy es el día m y se tiene una opción sobre la tasa de cambio $y(t)$, con precio strike K , y madurez T .*

A partir de los escenarios de precios y tasas indicados respectivamente en las ecuaciones (4-35) y (4-36), es posible construir m escenarios proyectados al día $m + N$ para el precio de la opción, $f_{j,m}^N$, definidos de modo que el j -ésimo escenario se computa bajo el modelo FX-HHW a partir de una expansión en series de Fourier según el comentario 4.3.4. Así, se tiene que

$$f_{j,m}^N = K \cdot P_d^*(t_0, \tau) \cdot \Re \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_{x^*} \left(\frac{k\pi}{b-a}, \tau \right) U_k \exp \left(ik\pi \frac{x^* - a}{b-a} \right) \right\} \quad (4-37)$$

donde

$$\begin{aligned} x^* &= \ln(y_F^*(t_0, \tau)/K) \\ y_F^*(t_0, \tau) &= \eta_{j,m}^N \frac{P_f^*(t_0, \tau)}{P_d^*(t_0, \tau)}, j = 1, \dots, m \\ P_i^*(t_0, \tau) &= \exp(\mathfrak{R}_{i,j,m}^N(\tau) * \tau), i \in \{d, f\}, j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4-38)$$

además, $\tau = T - N/252$ es el vencimiento de la opción, φ_x es la función característica definida en la ecuación (4-23), y los demás simbolismos que aparecen son los mismos discutidos respecto a la ecuación (4-22).

Definición 4.3.6 (Riesgo *ES* bajo FRTB). *La metodología para estimar los riesgos VaR y ES bajo la regulación FRTB de un portafolio de divisas, incluyendo el modelo FX-HHW como referente para valorar el portafolio, es aquella definida en la sección 2.3.2, para la cual los escenarios de precios de la opción con subyacente $y(t)$, que fueron denotados por $f_{j,m}^N$ en la definición 2.3.1, son reemplazados por los escenarios $f_{j,m}^N$ establecidos en la definición 4.3.5. La valoración del día para el portafolio se sigue del modelo FX-HHW.*

Análisis de impacto en las medidas de riesgo

El impacto de las métricas de riesgo VaR y ES sobre el portafolio puede estimarse variando el tenor o vencimiento de las opciones, T , y variando el horizonte de liquidez para el riesgo, N . De esta manera, se puede identificar la dinámica del riesgo en opciones a corto, mediano y largo plazo, además de prever el aumento del riesgo para valores altos de N , los cuales están asociados a economías emergentes en la regulación FRTB.

4.3.4. Resumen y extensiones metodológicas

La sección 2.3.2 del capítulo 2 propone una metodología para cuantificar el riesgo de mercado ES de un portafolio de opciones sobre divisas, en el marco de modelos internos de la regulación FRTB.

En coherencia, los capítulos 3 y 4 han propuesto ampliaciones de esta metodología de modo que el portafolio de opciones pueda valorarse a través de modelos híbridos con tasa y/o volatilidad estocástica. El capítulo 1 y los anexos A y B proveen fundamentos necesarios y elementos integradores de la propuesta.

Una visión holística de la metodología propuesta hasta aquí es resumida en la Figura 4-1. Allí, el círculo central enmarca el contexto metodológico: *Riesgo mercado bajo FRTB en opciones de divisas* (🏛️), desde el cual se originan cuatro componentes: Riesgo (📊), Opción (👛), Back-testing (📈), y Extensiones (💡).

Entre ellas, las primeras tres han sido estudiadas a lo largo de este trabajo, mientras que la cuarta plantea un nuevo frente para extender la metodología con fines de robustecerla y continuar hacia su escalamiento aplicado y tecnológico. En la sección de conclusiones se encontrará una breve discusión al respecto.

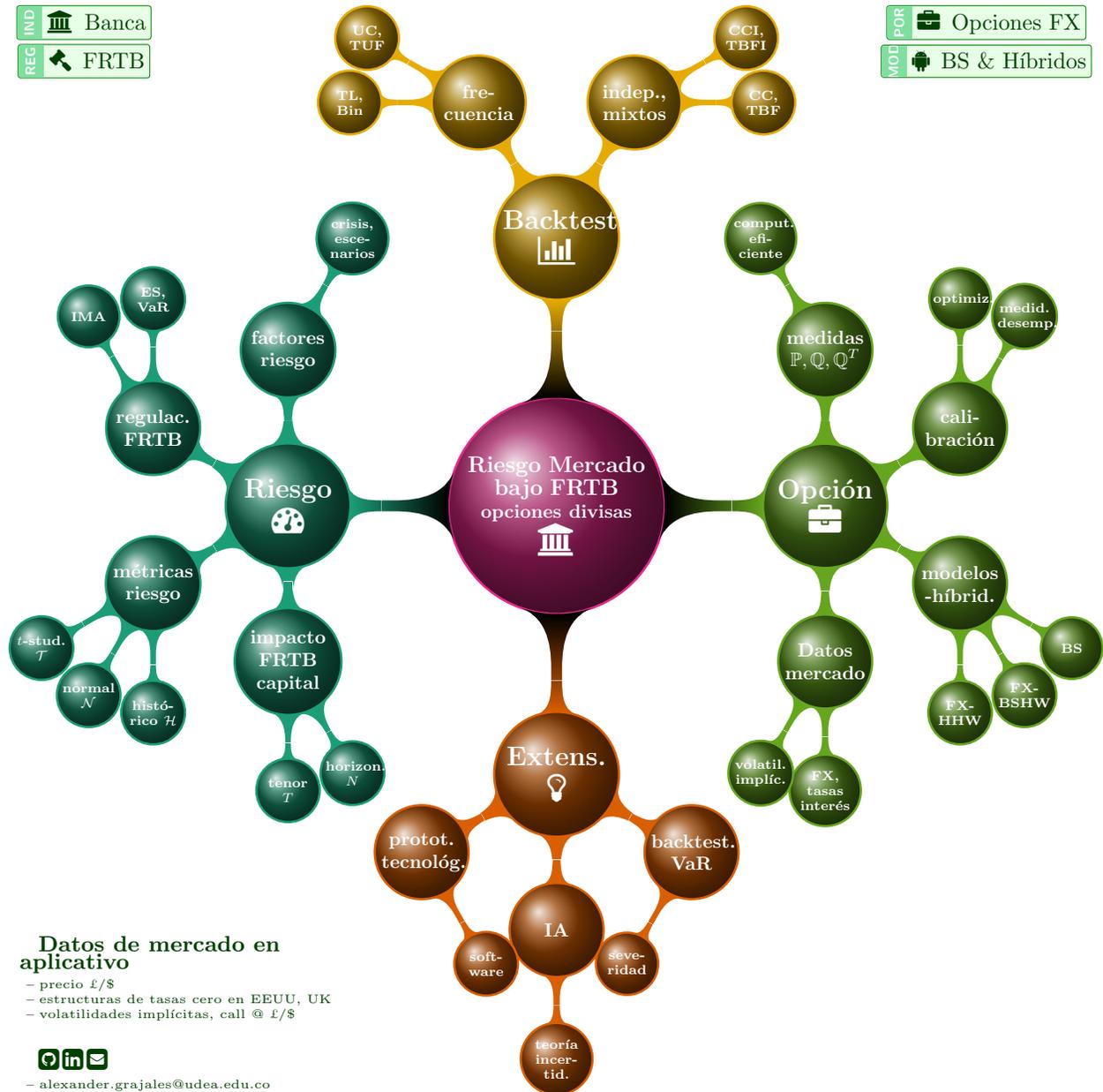
4.4. Aplicación: riesgo ES-FRTB para opciones sobre divisas con tasa y volatilidad estocástica

Se considera un portafolio compuesto por una opción call europea sobre GBP/USD en estado ATM y con vencimiento anual $T \in \{0.5, 1, 3, 5, 10\}$. Las métricas de riesgo VaR y ES del portafolio son estimadas bajo la propuesta metodológica de la sección 4.3, la cual es consistente con los modelos internos de la regulación de Basilea FRTB.

El procedimiento toma en consideración la valoración eficiente del portafolio de acuerdo al modelo híbrido Heston Hull White para divisas, FX-HHW, volatilidades implícitas de mercado, la tasa de cambio entre las monedas, y las curvas cero de tasas de interés doméstica y foránea.

Además, los escenarios de estrés para el precio de la divisa y las curvas cero se construyen a partir de la crisis mundial 2020-1. Finalmente, un conjunto de pruebas back-testing es

Figura 4-1.: Metodología - riesgo mercado *ES* en opciones sobre divisas bajo FRTB



realizado sobre la métrica VaR. Los resultados encontrados sugieren que la metodología de cuantificación de riesgo mercado es efectiva para el portafolio considerado.

4.4.1. Datos de mercado y escenarios de estrés

Los datos de mercado, tomados de Bloomberg en las fechas dadas, son los siguientes. Las fechas están en formato dd/mm/aaaa.

- Tasa de cambio GBP/USD en el período 03/01/2000 - 03/06/2021.
- Curvas soberanas de tasas cero cupón en U.S.A. y U.K., para los tenores $T \in \{0.5, 1, 3, 5, 10\}$, y en el período 03/01/2000 - 03/06/2021.
- Volatilidades implícitas de opciones sobre GBP/USD, con sensibilidades $\delta = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$, para los tenores $T \in \{0.5, 1, 3, 5, 10\}$, y en el período 15/02/2019 - 03/06/2021.

Por su parte, el período de estrés para la estimación de las métricas de riesgo se toma en el período de crisis por pandemia 2020-1 durante 10/02/2020 - 22/01/2021.

4.4.2. Calibración modelo híbrido FX-HHW

La calibración del modelo FX-HHW se logra a partir de la sección 4.3.2 y los resultados aparecen en la Tabla 4-1. Allí, se muestra el día t en que se genera el reporte (03/06/2021) y la matriz de volatilidades implícitas de mercado para opciones call sobre GBP/USD en términos del tenor o vencimiento T y riesgo δ .

Técnicamente, es necesario realizar un mapeo de los valores de riesgo δ en respectivos valores de precios strike, K_δ , antes de aplicar los criterios de calibración definidos. Tales valores son extraídos a partir de la formulación de la letra Griega delta en el modelo Black-76.

Por otra parte, la optimización establecida en la definición 4.3.3 se logra vía el algoritmo *multistart* con cómputo paralelo en Matlab (2022a, 8 instancias) y alternativamente vía el algoritmo *basin-hopping* en Python (3.9), usando un nivel de tolerancia (bajo) para la función objetivo de 10^{-3} . Ambas rutinas convergen exitosamente para al menos un mínimo local y proporcionan resultados similares para los parámetros. Respecto a la expansión en series de Fourier, en la definición 4.3.2, se toma $N = 1000$ y $L = 15$.

De este modo, la Tabla 4-1 muestra la calibración de parámetros en el componente Hull White y las correlaciones observables del modelo FX-HHW. También, se leen los parámetros en el componente Heston, los cuales esta vez dependen del tenor T .

Adicionalmente, se expone el desempeño de la calibración a través de diferentes medidas de error, MSE, MAE, MaAE₁, y MaAE₂, mostrando una alta precisión de ajuste de los parámetros para los primeros tres tenores.

Por ejemplo, note que en $T = 3$, las medidas MaAE₁ y MaAE₂ indican que, en la dimensión del precio strike, K_δ , la volatilidad implícita modelada que más se aleja del mercado lo hace

Tabla 4-1.: Calibración modelo híbrido Heston Hull White para divisas, FX-HHW

Fecha calibración modelo híbrido FX-HHW (t): 03/06/2021									
Instrumento financiero: opción call GBP/USD @ ATM, T ; $T = 0.5, 1, 3, 5, 10$ años									
Volatilidades implícitas de mercado									
$IV(\%) \backslash \delta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
T									
0.5	7.4030	7.1800	7.1030	7.1190	7.2100	7.3810	7.6540	8.0720	8.7380
1	7.8830	7.5500	7.4420	7.4660	7.5850	7.7990	8.1400	8.6750	9.5480
3	8.8000	8.4670	8.3740	8.4250	8.5770	8.8430	9.2530	9.8800	10.8950
5	9.4050	9.1500	9.1090	9.2030	9.3980	9.7070	10.1660	10.8500	11.9300
10	10.3120	10.1180	10.1000	10.1970	10.3850	10.6710	11.0930	11.7190	12.7270

Componente Hull White y correlaciones observables del sistema									
λ_d	η_d	λ_f	η_f	$\rho_{y,d}$	$\rho_{y,f}$	$\rho_{v,d}$	$\rho_{v,f}$	$\rho_{d,f}$	
0.1512	0.0129	0.0644	0.0058	-0.9168	0.1143	0.8335	-0.5866	-0.3001	

Componente Heston, con $\kappa = 0.5$, y desempeño de calibración										
T	γ	\bar{v}	v_0	ρ_{yv}	Error opciones (\$)		Error volatilidad implícita (%)			
					MSE	MAE	MSE	MAE	$MaAE_1$	$MaAE_2$
0.5	0.1798	0.0310	0.0033	-0.3122	8.0×10^{-10}	2.6×10^{-5}	1.5×10^{-4}	0.0099	0.0290	0.0117
1	0.1636	0.0238	0.0035	-0.3828	6.8×10^{-9}	6.6×10^{-5}	7.2×10^{-4}	0.0184	0.0698	0.0251
3	0.1327	0.0193	0.0046	-0.5297	1.5×10^{-7}	3.2×10^{-4}	5.7×10^{-3}	0.0530	0.1869	0.0945
5	0.0926	0.0074	0.0319	-0.5936	3.7×10^{-7}	5.0×10^{-4}	9.1×10^{-3}	0.0669	0.2363	0.1219
10	0.1046	0.0224	0.0134	-0.6546	9.4×10^{-7}	8.1×10^{-4}	1.4×10^{-1}	0.1770	1.0899	0.2135

Tabla 4-2.: Datos de entrada métricas *VaR* y *ES* bajo FRTB y modelo híbrido FX-HHW

Fecha de valoración de métricas de riesgo (t)		03/06/2021
Escenarios de estrés	Período i	10/02/2020 - 22/01/2021
Call sobre GBP/USD	Modelo de valoración	Híbrido FX-HHW
	Valor subyacente	tasa de cambio en t
	Vencimiento anual	$T \in \{0.5, 1, 3, 5, 10\}$
	Strike	precio del subyacente en t
	Factores de riesgo	$y(t), v(t), r_d(t), r_f(t)$
	Parámetros modelo	$\lambda_d, \eta_d, \lambda_f, \eta_f, \rho_{yd}, \rho_{yf}, \rho_{vd}, \rho_{vf}, \rho_{df}$ $\kappa, \gamma, \bar{v}, v_0, \rho_{y,v}$
Métricas de riesgo	<i>VaR</i> y <i>ES</i> - FRTB	normal, t-student, histórico
Nivel de confianza y horizonte de riesgo en días		$\alpha = 0.975$; $N = 1, 10, 20, 40, 60$

con un error de 0.1869 %, mientras que para las demás (ocho) volatilidades, el distanciamiento es menor que 0.0945 %.

Para los tenores $T = 5, 10$, los resultados son buenos. Note que en $T=10$, $\text{MaAE}_2=0.2135$ %. En los dos tenores anteriores, el desempeño pueden mejorar configurando la precisión de los algoritmos mencionados y bajo la disposición de procesadores dedicados a correr las rutinas, pues el tiempo de ejecución aumenta con el tenor T .

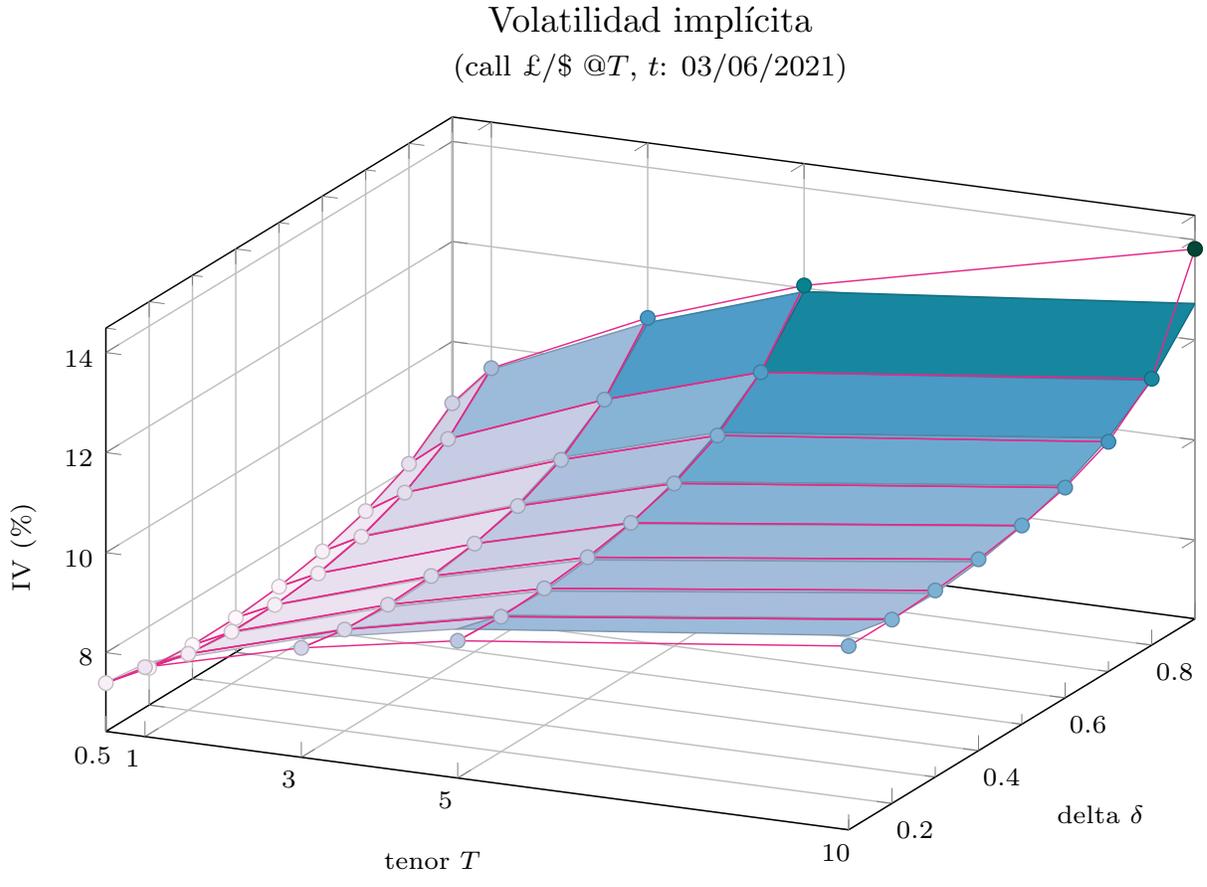
Por último, la Figura 4-2 muestra, arriba, las superficies de volatilidad implícita del mercado y aproximada por el modelo FX-HHW, donde puede apreciarse el ajuste discutido antes. Además, en la parte inferior, se muestra el desempeño de calibración MaAE_1 y MaAE_2 , para los tenores $T \in \{0.5, 1, 3, 5\}$, y durante el período observado de volatilidades implícitas de mercado descrito antes (15/02/2019 - 03/06/2021). Los resultados son satisfactorios a nivel teórico en la literatura académica y a nivel práctico en la industria financiera.

4.4.3. Información para el cómputo de VaR y ES

La Tabla 4-2 expone la información necesaria para calcular las medidas *VaR* y *ES* del portafolio de opciones sobre GBP/USD bajo FRTB, siguiendo la metodología de la sección 4.3. Las mediciones se realizan en la fecha t (03/06/2021), el período de estrés se toma de la crisis 2020-1, el portafolio se valora según el modelo FX-HHW, y la calibración de parámetros se muestra en la Tabla 4-1.

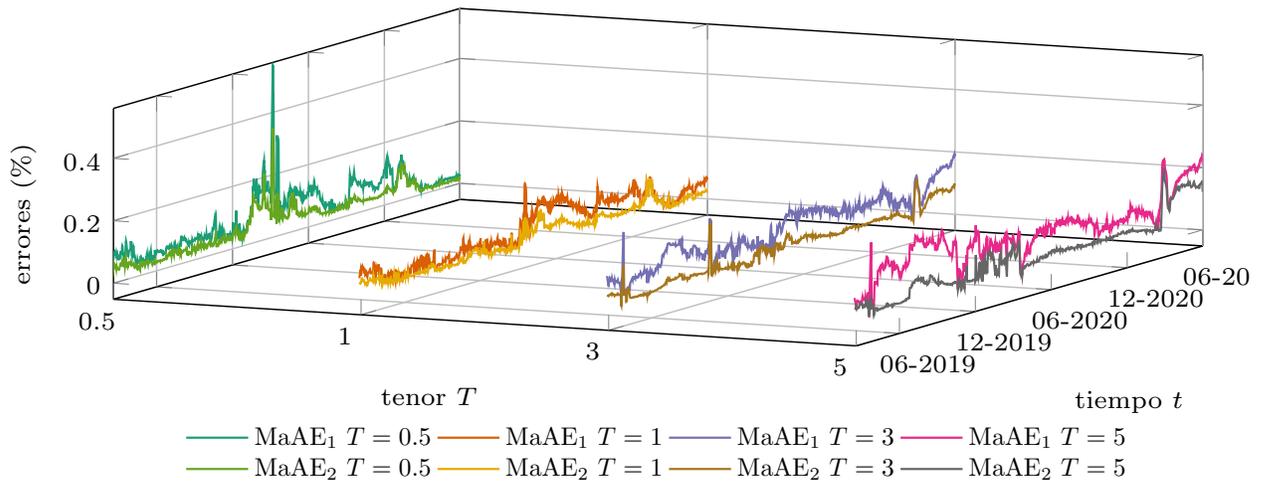
Adicionalmente, los valores T y N representan, respectivamente, el tenor o vencimiento (anual) de las opciones y el horizonte de liquidez para las métricas de riesgo. La selección de sus valores, coherente con los lineamientos de FRTB, permiten evaluar el impacto en capital de riesgo para opciones a corto, mediano y largo plazo, así como apreciar efectos del riesgo ante diferentes horizontes de liquidez. La información restante que aparece en la Tabla 4-2 es como se ha discutido en las secciones previas.

Figura 4-2.: Calibración superficie de volatilidad implícita de mercado - modelo FX-HHW.



Mercado (fuente Bloomberg)
 Modelo híbrido FX-HHW

Desempeño calibración modelo híbrido FX-HHW
(volatilidades implícitas de mercado call £/\$ @ T)



4.4.4. Métricas de riesgo, comparaciones e impactos

Las métricas de riesgo computadas se denotan como sigue,

VaR FRTB medidas VaR normal, t -student, e histórico: $VaR \mathcal{N}$, $VaR \mathcal{T}$, $VaR \mathcal{H}$.

ES FRTB medidas ES normal, t -student, e histórico: $ES \mathcal{N}$, $ES \mathcal{T}$, $ES \mathcal{H}$.

El coeficiente de grados de libertad, ν , para la distribución t -student se calcula de manera similar a lo expuesto en la sección 3.4.3.

Consecuentemente, a partir de la información suministrada en la Tabla 4-2 y la metodología establecida en la sección 4.3, los resultados de las métricas de riesgo VaR y ES bajo FRTB se muestran en la Tabla 4-3.

Las siguientes observaciones pueden hacerse sobre estos resultados, los cuales impactan directamente el capital de riesgo del portafolio.

Vencimiento T: las métricas VaR y ES son decrecientes con el tenor o tiempo de vencimiento T de las opciones. El efecto permanece con el crecimiento del horizonte N . Así, para economías emergentes, para las cuales $N \in \{40, 60, 120\}$ días, es sugerente que el capital de riesgo de opciones de corto plazo es significativamente mayor respecto a otros plazos.

VaR y ES - FRTB, I: $VaR \mathcal{H}$ y $ES \mathcal{H}$ implican un menor capital de riesgo comparado con las respectivas versiones normal y t -student, en todos los valores del tenor T y para el horizonte $N = 60$ días. Tal relación se mantiene cierta para $T = 0.5, 1$ años en $N = 40$ días.

VaR y ES - FRTB, II: las métricas ES son mayores que las respectivas métricas VaR. Sin embargo, la diferencia entre $VaR \mathcal{H}$ y $ES \mathcal{H}$ es apreciablemente menos volátil comparada con las respectivas contrapartidas normal y t -student, lo cual es cierto en la región $T \times N$, excepto para $N = 1, 10$ días.

Horizonte N: a mayor horizonte N , sólo las métricas $VaR \mathcal{H}$ y $ES \mathcal{H}$ están acotadas por la restricción de que la pérdida potencial no puede superar el 100% del valor del portafolio. Además, los datos sugieren que es impreciso emplear el factor \sqrt{N} para estimar el riesgo a N días a partir de aquel a 1 día.

Con fines comparativos, los resultados en la Tabla 4-3 son representados en la Figura 4-3, la cual muestra diagramas de áreas asociadas a las medidas de riesgo de acuerdo al tenor T y al horizonte de riesgo N . Allí se corroboran las observaciones anteriores.

Tabla 4-3.: VaR y ES a N días bajo FRTB, modelo híbrido FX-HHW. Opciones call GBP/USD @ ATM, T

$t: 03/06/2021$							
	T	$VaR \mathcal{N}$	$VaR \mathcal{T}$	$VaR \mathcal{H}$	$ES \mathcal{N}$	$ES \mathcal{T}$	$ES \mathcal{H}$
$N = 1$	0.5	-0.3397	-0.3465	-0.3394	-0.4074	-0.4649	-0.4545
	1	-0.2328	-0.2374	-0.2366	-0.2789	-0.3181	-0.3351
	3	-0.1209	-0.1233	-0.1152	-0.1446	-0.1648	-0.1837
	5	-0.0871	-0.0885	-0.0769	-0.1042	-0.1218	-0.1336
	10	-0.0600	-0.0610	-0.0578	-0.0717	-0.0838	-0.1005
$N = 10$	0.5	-0.9837	-1.0012	-0.8978	-1.1956	-1.4143	-0.9713
	1	-0.6901	-0.7047	-0.7706	-0.8358	-0.9595	-0.8994
	3	-0.3926	-0.4006	-0.5245	-0.4722	-0.5398	-0.6933
	5	-0.2966	-0.3015	-0.4109	-0.3562	-0.4178	-0.5747
	10	-0.2007	-0.2040	-0.2946	-0.2407	-0.2820	-0.4229
$N = 20$	0.5	-1.2553	-1.2834	-0.9568	-1.5308	-1.7285	-0.9841
	1	-0.8807	-0.8992	-0.8610	-1.0697	-1.1869	-0.9243
	3	-0.5071	-0.5167	-0.6427	-0.6106	-0.6670	-0.7351
	5	-0.3843	-0.3922	-0.5339	-0.4622	-0.5180	-0.6269
	10	-0.2684	-0.2738	-0.3788	-0.3221	-0.3678	-0.4740
$N = 40$	0.5	-1.5503	-1.5787	-0.9828	-1.8945	-2.2497	-0.9955
	1	-1.0916	-1.1111	-0.9028	-1.3277	-1.5714	-0.9558
	3	-0.6497	-0.6606	-0.6990	-0.7819	-0.9183	-0.7934
	5	-0.4999	-0.5083	-0.5946	-0.6011	-0.7054	-0.6933
	10	-0.3594	-0.3640	-0.4403	-0.4310	-0.4534	-0.5437
$N = 60$	0.5	-1.9814	-2.0180	-0.9926	-2.4249	-2.8826	-0.9990
	1	-1.3874	-1.4123	-0.9177	-1.6879	-1.9980	-0.9701
	3	-0.8226	-0.8364	-0.7035	-0.9889	-1.1604	-0.8098
	5	-0.6335	-0.6440	-0.5861	-0.7606	-0.8918	-0.6998
	10	-0.4536	-0.4609	-0.4329	-0.5424	-0.6340	-0.5414

Figura 4-3.: VaR y ES bajo FRTB en opciones call sobre GBP/USD - modelo FX-HHW

*VaR y ES bajo FRTB - Modelo híbrido FX-HHW
(call £/\$ @T, t: 03/06/21, crisis: 10/02/20 - 22/01/21)*

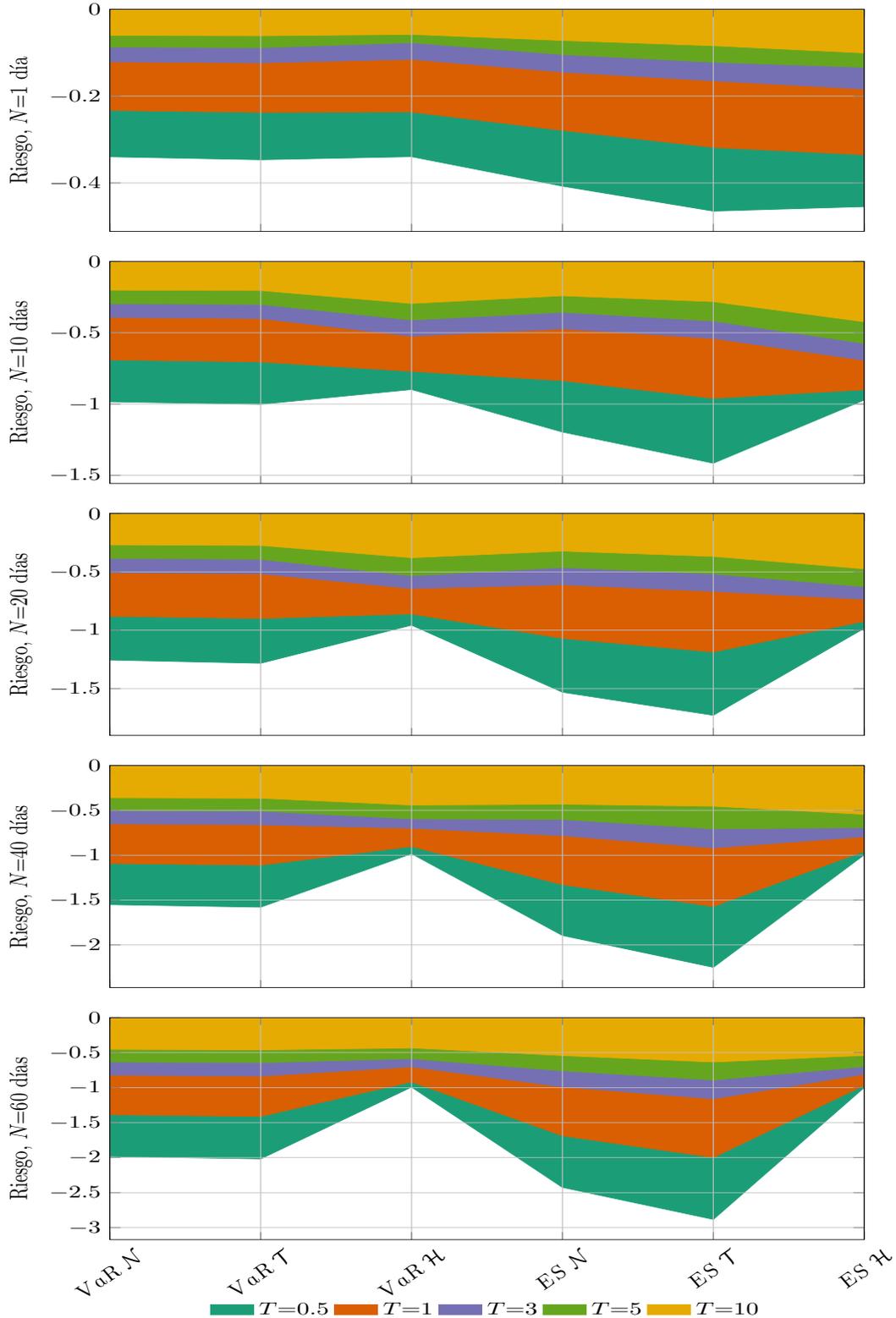


Tabla 4-4.: Back-testing VaR - FRTB, inclusión del modelo híbrido FX-HHW. Opciones call sobre GBP/USD

t : 03/06/2021	VaR	$\mathcal{N}97.5$	$\mathcal{T}97.5$	$\mathcal{H}97.5$	$\mathcal{N}99$	$\mathcal{T}99$	$\mathcal{H}99$
Año 1							
$T = 0.5$	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●
$T = 1$	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●
$T = 3$	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●
$T = 5$	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●
Año 2							
$T = 0.5$	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●
$T = 1$	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●
$T = 3$	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●
$T = 5$	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●

●●●●●●●●●● pruebas back-testing TL, Bin, UC, TUF, CC, CCI, TBF, TBFI

Año 1: 05 jul 2019 - 18 jun 2020 Año 2: 19 jun 2020 - 03 jun 2021

4.4.5. Back-testing

La Figura 4-4 ilustra la dinámica del comportamiento de los retornos de las opciones sobre GBP/USD con vencimiento $T \in \{0.5, 1, 3, 5\}$ y sus medidas de riesgo VaR y ES bajo FRTB, cuando las opciones son valoradas a través del modelo FX-HHW. Puede apreciarse que las medidas de riesgo cambian oportunamente dependiendo de los cambios en los retornos. Además, se observa que durante el período comprendido entre marzo de 2020 y febrero de 2021 (plena crisis), en los tenores $T = 3, 5$, la métrica $ES \mathcal{H}$ implica un mayor capital de riesgo que las contrapartidas $ES \mathcal{N}$ y $ES \mathcal{T}$.

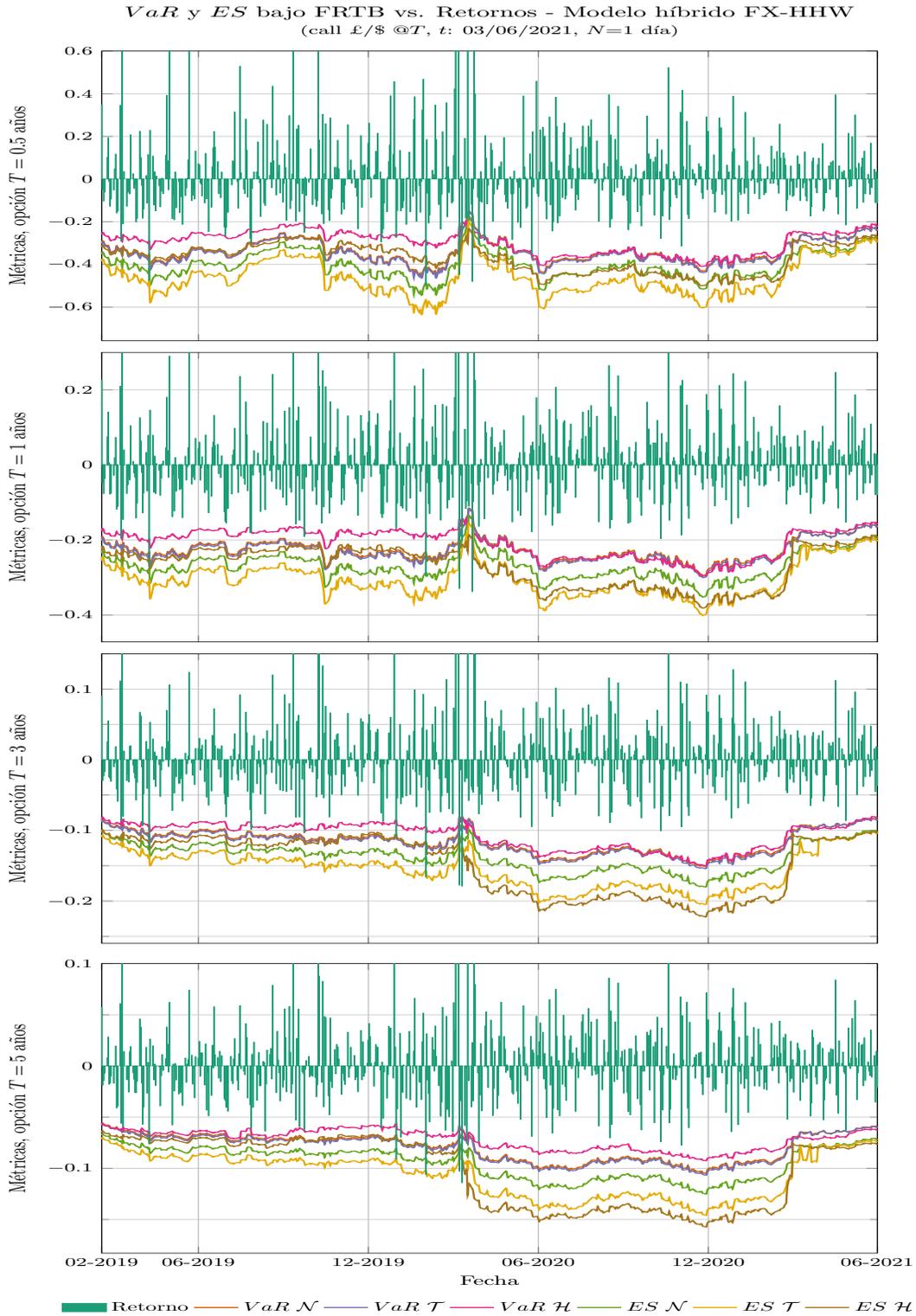
El desempeño para la métrica VaR es evaluado en el marco de modelos internos de la regulación FRTB y los resultados se muestran en la Tabla 4-4.

La tabla reporta para el día t ocho pruebas back-testing para las métricas $VaR \mathcal{N}$, $VaR \mathcal{T}$, y $VaR \mathcal{H}$, a niveles de confianza 97.5% y 99%. Las pruebas referidas son TL, Bin, UC, TUF, CC, CCI, TBF, y TBFI, que corresponden a aquellas definidas en la sección 1.2 del capítulo 1, y son realizadas en 2 períodos sucesivos de 250 días antes de t .

La tabla muestra puntos en color que representan el resultado del respectivo test. Así, un punto verde indica que el test en cuestión es aceptado, esto es, que la hipótesis nula del test no se rechaza bajo un nivel de significancia del 5%. Por su parte, un punto rojo significa que el test se rechaza, y uno amarillo indica la zona de advertencia del test TL.

Los resultados de las ocho pruebas son satisfactorios en el primer año, siendo mejores para las versiones t -student e histórica del VaR. En el año 2, para el nivel de confianza 97.5%, el desempeño del VaR, en versiones normal, t -student, e histórica, es el mismo, y las únicas pruebas aceptadas son TL y CCI. La segunda de ellas indica la independencia de excepciones

Figura 4-4.: Visualización dinámica de *VaR* y *ES* bajo FRTB - modelo FX-HHW. Nivel de confianza 0.975



en el período de prueba.

También, en el año 2, para el nivel de confianza 99%, el desempeño de las métricas de riesgo VaR sigue siendo el mismo, pero esta vez satisfactorio. Las únicas pruebas rechazadas son UC y TBF. Puede afirmarse, que para un nivel de confianza 99%, los resultados de las pruebas son satisfactorios en los dos períodos de prueba, y que en general, la métrica t -student e histórica del VaR tienen un mejor desempeño.

A partir de las observaciones anteriores, y de manera análoga a los dos capítulos anteriores, puede afirmarse que la medida histórica del VaR tiene un buen desempeño, y que la metodología fundada en este capítulo es adecuada para la gestión de riesgo mercado en el portafolio considerado.

4.5. Conclusiones

La metodología fundada en este capítulo cuantifica el riesgo mercado ES de un portafolio de opciones de divisas de acuerdo a los modelos internos de la regulación de Basilea FRTB que entra en vigor en 2023. La propuesta metodológica integra el modelo híbrido Heston Hull White para divisas, FX-HHW, como referente para obtener los precios del portafolio.

La inclusión de este modelo responde a lineamientos académicos y prácticos en la industria financiera, donde la medición de riesgos en portafolios con derivados debe contar con modelos que describan dinámicas de factores de riesgo como tasas de interés y volatilidad.

La metodología centra la atención en la calibración del modelo híbrido y evaluación de su desempeño a precios de mercado, la generación de escenarios de estrés para precios y tasas de interés, y la subsiguiente medición de métricas de riesgo VaR y ES .

Siguiendo las pautas metodológicas, se desarrolla una aplicación para medir el riesgo ES de un portafolio de opciones sobre GBP/USD, donde el período de estrés para la construcción de escenarios se define a partir de la crisis 2020-1.

Como resultados se encuentra que la calibración del modelo híbrido se aproxima satisfactoriamente a la superficie de volatilidad implícita en el mercado, con lo cual la valoración del portafolio se dota de realismo. Por su parte, las métricas de riesgo se estiman variando el vencimiento T de las opciones y variando el horizonte N de riesgo, permitiendo medir impactos sobre el capital de riesgo implicado.

Las estimaciones evidencian que para horizontes de 40, 60 o 120 días, asignados a economías emergentes en FRTB, el riesgo de opciones a corto plazo es significativamente mayor comparado con otros plazos. Este hecho abre la discusión sobre la relación entre la variable duración y el capital de riesgo en la estructuración de nuevos portafolios.

Además, las mediciones evidencian que, en largos horizontes de riesgo, la métrica histórica ES implica menores capitales de requerimiento comparados con las respectivas métricas en versión normal y t -student. Así mismo, se encuentra que la métrica histórica ES es la que tiene menos variabilidad. Por otra parte, se evidencia que el escalamiento del riesgo por medio de la raíz cuadrada del tiempo no es una aproximación válida.

La aplicación finaliza evaluando el desempeño del riesgo *VaR* durante dos períodos anuales en los cuales está incluida la crisis 2020-1. Para ello, se emplean ocho pruebas back-testing y se evidencia que el desempeño en general es apropiado, es aún mejor bajo un nivel de confianza del 99 %, y la medida histórica *VaR* concretamente tiene un buen desempeño. Los resultados anteriores sugieren, pues, que la metodología propuesta aquí es procedente.

Agenda futura. El diagrama en la Figura 4-1 esboza un componente relacionado con la extensibilidad de la metodología formulada. El primer aspecto está relacionado con la inclusión de pruebas back-testing de severidad. La sección 1.2 en el capítulo 1 avanza en este punto mediante un marco teórico para una prueba denominada mapa de riesgo en Colletaz et al. [2013]. La crisis 2020-1 deja evidencia de pérdidas extremas que pueden ser analizadas desde el concepto de super-excepciones estudiadas allí.

En segundo lugar, la creación de un prototipo de base tecnológica para la cuantificación del riesgo mercado bajo FRTB, vía *ES* o método de sensibilidades, puede ser iniciada a la luz de los análisis y mediciones presentados en este trabajo. Se precisaría contar, en primera instancia, con una fuente de suministro de datos en tiempo real, infraestructura a nivel de software y hardware, talento humano, y por supuesto la integración y liderazgo de instituciones financieras.

Por último, a partir de volúmenes de datos extraídos sobre medidas de riesgo, sus posibles relaciones, análisis de impactos, referentes de un modelo u otro, construcción de escenarios de estrés, entre otros, puede ser apropiado la consideración de herramientas de minería en ambientes inciertos, de modo que la información pueda brindar mayor significado y con ello habilitar una mejor toma de decisiones. En este sentido, la teoría de la incertidumbre en Liu [2007] y Liu [2010], es un campo que se inscribe en la actualidad en la fundamentación de la inteligencia artificial.

Concretamente, y como un valor agregado de esta tesis, dos trabajos de investigación en relación a la minería incierta y su aplicación directa en cuantificación de riesgos financieros han sido logrados y están disponibles en Grajales and Medina [2021b] y Grajales and Medina [2022].

A. Modelos de tasa corta de interés

A.1. Fundamentación

En la modelación de la tasa corta de interés ocurre que la prima de riesgo de mercado Λ para un bono es positiva (esto es, el riesgo sistemático del bono es positivo) y en consecuencia la prima de riesgo de las tasas de interés es negativa. Este hecho es importante para entender el comportamiento de la tasa corta bajo las medidas de probabilidad física \mathbb{P} y en riesgo neutral \mathbb{Q} .

En relación a la prima de riesgo de mercado de un bono, Keynes [1930] argumenta que, si un coberturista tiende a tomar posiciones cortas y un especulador tiende a mantener posiciones largas, entonces sucederá un *normal - backwardation*, esto es, el precio futuro del activo será inferior que el valor esperado del precio spot.

De otro lado, en relación a la modelación de la tasa corta (ver por ejemplo Hull and White [1993], Brigo and Mercurio [2007], y Hull [2018a]), se asume que el proceso seguido por la tasa corta r , anual en composición continua, bajo la medida en riesgo neutral \mathbb{Q} satisface el siguiente proceso de Itô,

$$dr = m(r)dt + s(r)dw \tag{A-1}$$

y según el teorema de Girsanov (ver Bjork [2009]) el proceso de la tasa r bajo la medida física de probabilidad \mathbb{P} será

$$dr = [m(r) + \Lambda s(r)]dt + s(r)dw \tag{A-2}$$

Otro aspecto adicional para la modelación de la tasa corta r está relacionado con la estructura temporal de tasas de interés, denotada por $R(t, T)$. Algunas relaciones satisfechas por $R(t, T)$ pueden encontrarse a partir de las siguientes líneas argumentales. Primero, el principio de riesgo neutral implica que el precio en el tiempo t de un derivado de tasa de interés que paga f_T en T es

$$f_t = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\bar{r}(T-t)} f_T] \tag{A-3}$$

Adicionalmente, si $R(t, T)$ se interpreta como una tasa de interés libre de riesgo, en composición compuesta continua y para el plazo $T - t$, entonces el precio $P(t, T)$ de un bono cero cupón libre de riesgo con pago \$1 en T es

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (\text{A-4})$$

En consecuencia, la estructura de plazo $R(t, T)$ puede ser obtenida a partir del proceso en riesgo neutral para r dado por

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \\ &= -\frac{1}{T-t} \ln \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\bar{r}(T-t)}] \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

De otro lado, la investigación en Duffie and Kan [1996] muestra que el precio libre de arbitraje del bono es *exponencialmente afín*, lo cual significa que

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (\text{A-6})$$

donde $A(t, T)$ y $B(t, T)$ satisfacen un conjunto de condiciones indicadas en tal investigación. Lo anterior implica que la tasa cero $R(t, T)$ tomaría la forma

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T-t} B(t, T)r(t) \quad (\text{A-7})$$

A partir de la ecuación (A-6) para el precio de un bono, el \mathbb{Q} -proceso de Itô para $P(t, T)$ podría ser obtenido a partir de establecer su tendencia como $r(t)P(t, T)$ y su volatilidad, según el lema de Itô, como

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + s(r)\frac{\partial P(t, T)}{\partial r(t)}dw \quad (\text{A-8})$$

A.2. Modelos de equilibrio para la tasa corta

Esta clase de modelos pueden ajustarse de manera aproximada a la estructura de plazos de tasas de interés del día actual en el mercado, y el ajuste puede ser suficientemente adecuado para tasas de interés de largo plazo. Lo anterior podría ser logrado, por ejemplo, usando simulación Monte Carlo y análisis de escenarios. Dos modelos populares para la tasa corta r en este contexto se desarrollan en Vasicek [1977] y en Cox et al. [1985] (modelo CIR). Ambos

modelos tienen reversión a la media y producen fórmulas cerradas para el cálculo del precio de un bono.

A partir de las relaciones (A-1), (A-2), y (A-6), el modelo de Vasicek satisface las siguientes relaciones,

$$\mathbb{Q}\text{-medida: } dr = a(b - r)dt + \sigma dw \quad (\text{A-9})$$

$$\mathbb{P}\text{-medida: } dr = a(b^* - r)dt + \sigma dw \quad (\text{A-10})$$

$$B_{vas}(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (\text{A-11})$$

$$A_{vas}(t, T) = \exp \left[\frac{(B(t, T) - T + t)(a^2b - \sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right] \quad (\text{A-12})$$

$$\mathbb{Q}\text{-medida: } dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt - \sigma B_{vas}(t, T)P(t, T)dw \quad (\text{A-13})$$

$$\mathbb{P}\text{-medida: } dP(t, T) = [r(t) - \Lambda\sigma B_{vas}]P(t, T)dt - \sigma B_{vas}(t, T)P(t, T)dw \quad (\text{A-14})$$

donde a , b , y σ son constantes, y $b^* = b + \Lambda\sigma/a$. Además, si $a = 0$ entonces $B(t, T) = T - t$ y $A(t, T) = \exp[\sigma^2(T - t)^3/6]$.

De manera análoga, el modelo CIR satisface las siguientes relaciones,

$$\mathbb{Q}\text{-medida: } dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw \quad (\text{A-15})$$

$$\mathbb{P}\text{-medida: } dr = a^*(b^* - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw \quad (\text{A-16})$$

$$B_{cir}(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \quad (\text{A-17})$$

$$A_{cir}(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2ab/\sigma^2} \quad (\text{A-18})$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \quad (\text{A-19})$$

$$\mathbb{Q}\text{-medida: } dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt - \sigma\sqrt{r(t)}B_{cir}(t, T)P(t, T)dw \quad (\text{A-20})$$

$$\mathbb{P}\text{-medida: } dP(t, T) = [r(t) - \kappa\sigma B_{cir}r(t)]P(t, T)dt - \sigma\sqrt{r(t)}B_{cir}(t, T)P(t, T)dw \quad (\text{A-21})$$

donde a , b , y σ son constantes, $a^* = a - \kappa\sigma$, $b^* = ab/a^*$, y $\Lambda = \kappa\sqrt{r}$

A.3. Estimación de parámetros - Modelo de Vasicek

Considere el modelo de Vasicek (ver Vasicek [1977]) bajo la medida física \mathbb{P} descrito en la ecuación (A-10). Los parámetros asociados pueden ser calibrados tomando el modelo de regresión

$$y = \alpha + \beta r_t + e_t, \quad (\text{A-22})$$

donde

$$y = \delta r_t \tag{A-23}$$

$$\alpha = ab^* \delta t \tag{A-24}$$

$$\beta = -a \delta t \tag{A-25}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(e_t)/\delta t} \tag{A-26}$$

De manera usual en el mercado se toma $\delta t = 1$ día. De esta manera, δr_t es regresado contra r_t . Como resultado, los parámetros podrían ser ajustados por

$$a = -\beta/\delta t \tag{A-27}$$

$$b^* = -\alpha/\beta \tag{A-28}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(e_t)/\delta t} \tag{A-29}$$

Finalmente, si hay 250 observaciones de r_t por año, entonces $\delta t = 1/250$ años, y así un escalamiento conveniente de parámetros sería $a \mapsto 250a$, $b^* \mapsto b^*$, y $\sigma \mapsto \sqrt{250}\sigma$. Así, los \mathbb{P} -parámetros dados en las ecuaciones (A-27), (A-28), y (A-29) indican que la tasa corta r_t revierte a b^* con tasa de reversión a y que $\text{vol}(r_t) = \sigma/r_t$.

Alternativamente, el conjunto Φ de parámetros en Vasicek puede ser obtenido vía máxima verosimilitud. Si r_t es una muestra de tamaño m espaciada por δt , entonces

$$\delta r_t \sim N[a(b^* - r_t), \sigma^2 \delta t] \tag{A-30}$$

La función de verosimilitud está dada por $\mathcal{L}(\Phi; r_t)$, o equivalentemente, la función log-verosimilitud es $\ell(\Phi; r_t)$, donde

$$\mathcal{L}(\Phi; r_t) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\delta t}} \exp\left[\frac{r_i - r_{i-1} - a(b^* - r_i)}{2\sigma^2\delta t}\right] \tag{A-31}$$

$$\ell(\Phi; r_t) = \sum_{i=1}^m \left[-\ln(\sigma^2\delta t) - \frac{(r_i - r_{i-1} - a(b^* - r_i)\delta t)^2}{\sigma^2\delta t} \right] \tag{A-32}$$

Ahora, los respectivos \mathbb{Q} -parámetros del modelo de Vasicek pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (A-9) y (A-10) y por calibración de la prima de riesgo Λ . Este último parámetro podría ser estimado empíricamente aproximando el bono cero cupón a precio de mercado con el respectivo precio según el modelo a través de las ecuaciones (A-7), (A-11), y (A-12) y mediante el uso, por ejemplo, del error medio cuadrático.

A.4. Modelo de un factor de Hull y White

El modelo de no arbitraje para la tasa corta $r = r(t)$ en Hull and White [1990] (HW) representa una extensión del modelo en Vasicek [1977] y ofrece un ajuste exacto a la estructura de plazos $R(t, T)$ de mercado del día. El modelo para la tasa corta $r(t)$, bajo la medida de riesgo neutral \mathbb{Q} , se describe por la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \eta dW_r(t) \quad (\text{A-33})$$

donde $r(0) = r_0$, λ es la velocidad de reversión de $r(t)$ a su media $\theta(t)$, y η es la volatilidad de la tasa corta. La media $\theta(t)$ representa la tendencia en el tiempo de la tasa corta, la cual ajusta el modelo de modo que pueda replicar el precio de un bono a precios de mercado, y su formulación en términos de la curva *forward* instantánea, $f^r(0, t)$, está dada por

$$\theta(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} f^r(0, t) + f^r(0, t) + \frac{\eta^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda t}), \quad (\text{A-34})$$

donde

$$f^r(0, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln P(0, t), \quad (\text{A-35})$$

siendo $P(0, t)$ el precio del bono cero cupón definido en la ecuación (A-4). De otro lado, el precio de un bono cero cupón puede calcularse analíticamente mediante las siguientes formulaciones,

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (\text{A-36})$$

donde

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \quad (\text{A-37})$$

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)f^r(0, t) - \frac{1}{4\lambda^3} \eta^2 (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda t})^2 (e^{2\lambda t} - 1) \quad (\text{A-38})$$

B. Modelo de Heston

B.1. Fundamentación

El modelo en Heston [1993] considera que la dinámica para el precio de un activo $S(t)$ y su varianza $v(t) = \sigma(t)^2$, bajo una medida de probabilidad física \mathbb{P} , es conducida por el sistema bivariado de ecuaciones diferenciales estocásticas (SDE)

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_x^{\mathbb{P}}(t) \quad (\text{B-1})$$

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t)) dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{P}}(t) \quad (\text{B-2})$$

donde μ, θ, κ y σ son constantes. El valor $S(t)$ depende de los valores iniciales $S(0), v(0)$, y del proceso $\{v(s), 0 \leq s \leq t\}$. El Parámetro μ es el retorno esperado anual de $S(t)$, la varianza revierte a la media θ a una tasa κ , y σ es la volatilidad de $v(t)$ conocida como v-vol (otros detalles pueden consultarse en Grajales [2006]).

Los procesos $W_x^{\mathbb{P}}(t)$ y $W_v^{\mathbb{P}}(t)$ son movimientos Brownianos con correlación ρ . Puede notarse que la ecuación (B-2) corresponde a un proceso del tipo Cox-Ingersoll-Ross. Adicionalmente, la condición de Feller establece que $\{v(t)\}$ es positivo si $2\kappa\theta > \sigma^2$. De otro lado, si se hace $\sigma = 0$ y $v(0) = \theta$, el modelo de Heston se reduce al modelo en Black and Scholes [1973] (BS) para el cual $\sigma_{BS} = \sqrt{v(0)}$.

Por otra parte, a partir del teorema de Girsanov (ver Bjork [2009]), bajo la medida de probabilidad en riesgo neutral \mathbb{Q} , las ecuaciones (B-1) y (B-2) se escriben como

$$dS(t) = r S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_x^{\mathbb{Q}}(t) \quad (\text{B-3})$$

$$dv(t) = \kappa^*(\theta^* - v(t)) dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t) \quad (\text{B-4})$$

donde r es la tasa libre de riesgo, $\kappa^* = \kappa + \lambda$, $\theta^* = \kappa\theta/(\kappa + \lambda)$, y λ es la prima de riesgo de la volatilidad.

En el caso que $\lambda = 0$, las medidas de probabilidad física y neutral, \mathbb{P} y \mathbb{Q} , coinciden. Ahora, para obtener la PDE que describe la dinámica de un derivado financiero $U = U(t, S_t, v_t)$ bajo el modelo de Heston, se plantea la siguiente estrategia: se conforma un portafolio autofinanciado y cubierto formado por un derivado V , δ unidades de S y ϕ unidades de U , lo cual cubrirá los movimientos en el precio y también la volatilidad. El lema de Itô provee una manera de obtener los procesos para V y U , y es también posible escoger posiciones

convenientes δ y ϕ que hagan el portafolio libre de riesgo y en consecuencia rente a la tasa libre de riesgo r . Aquí finaliza la estrategia.

Punto seguido, haciendo $x = \ln S_t$ (el subíndice t es otra manera de expresar la dependencia de la variable con el tiempo), la dinámica de U es conducida por

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) \frac{\partial U}{\partial x} + \rho\sigma v_t \frac{\partial^2 U}{\partial v_t \partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 v_t \frac{\partial^2 U}{\partial v_t^2} + [\kappa(\theta - v_t) - \lambda v_t] \frac{\partial U}{\partial v_t} - rU = 0 \quad (\text{B-5})$$

Las condiciones de frontera de esta ecuación dependen de U . Si U es el precio $C = C(S_t, v_t, t)$ de una opción call Europea con precio strike K y fecha de madurez T , entonces

$$C = S_t P_1(x, v_t, t) - K e^{-r\tau} P_2(x, v_t, t) \quad (\text{B-6})$$

donde $\tau = T - t$, P_1 y P_2 son, respectivamente, probabilidades que la opción madure dentro del dinero y bajo dos medidas de probabilidad diferentes, dadas respectivamente por \mathbb{Q}^S y \mathbb{Q} . La nueva medida \mathbb{Q}^S usa el precio del activo S_t como numerario.

El precio de la opción C en (B-6) satisface la ecuación (B-5) y en consecuencia dos PDE en términos de P_1 y P_2 que deben ser resueltas. Siguiendo la argumentación presentada en Heston [1993] y detallada en Rouah [2013], Heston resuelve este problema por medio de la función característica para x y asumiendo que tal función toma la forma log-lineal:

$$f_j(\phi; x, v_t) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_t + i\phi x_t) \quad (\text{B-7})$$

for $j = 1, 2$. Usando el teorema de Feynman-Kac, f_j seguirá la respectiva PDE asociada a P_j . Las soluciones para $C_j(\tau, \phi)$ y $D_j(\tau, \phi)$ están dadas por

$$C(\tau, \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2 \ln \left[\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right] \right\}, \quad (\text{B-8})$$

$$D(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right], \quad (\text{B-9})$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi i - d_j}, \quad (\text{B-10})$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}, \quad (\text{B-11})$$

$$u_1 = 1/2, \quad u_2 = -1/2, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa + \lambda \quad (\text{B-12})$$

Finalmente, una vez las funciones características f_j son encontradas, las probabilidades P_j en la ecuación (B-6) son obtenidas tomando la respectiva transformada inversa de Fourier, vía el teorema de inversión de Gil Pelaez en Gil-Pelaez [1951], obteniendo

$$P_j(x, v_t; \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(x, v, t; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (\text{B-13})$$

Consecuentemente, el valor de la opción call Europea en la ecuación (B-6) puede ser calculado. En el caso que el activo subyacente a la opción call genere una tasa continua anual q como dividendo, entonces en la ecuación (B-6) S_t es reemplazado por $S_t e^{-qt}$ y en la ecuación (B-8) r es sustituido por $r - q$.

B.2. Probabilidad ITM en el modelo de Heston

Las probabilidades en la ecuación (B-13) de que una opción call Europea termine dentro del dinero (ITM) al vencimiento en el modelo de Heston resultan ser expresiones fundamentales en la valoración de opciones de tipo Europeo y en la estimación de sus letras Griegas de riesgo. Esta clase de probabilidades ilustran además el uso de medidas de probabilidad diferentes para su cálculo (\mathbb{Q}^S y \mathbb{Q}), así como la utilidad de la transformada de Fourier en la valoración moderna de derivados y riesgos financieros. De esta manera, esta ilustración muestra una secuencia de pasos argumentales para deducir las probabilidades en la ecuación (B-13). Las bases del argumento se toman en Carr and Madan [1999] y Rouah [2013].

En primer lugar, dada una variable aleatoria x con función densidad $f(x)$, su transformada de Fourier coincide con la función característica de x , y dichas relaciones se expresan como

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= \int_{\mathcal{R}} e^{iux} f(x) dx \\ &= \mathbf{E}[e^{iux}] \end{aligned}$$

Además, la función f puede ser obtenida a partir de $\hat{f}(u)$ a través de la transformada inversa de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}} e^{-iux} \hat{f}(u) du$$

Ahora, considere una opción call Europea sobre un activo de precio S_t con precio strike K y vencimiento T . Si p es la probabilidad de que que la opción termine ITM en el tiempo T (bajo cualquiera de las medidas de probabilidad), entonces

$$\begin{aligned} p &= Pr[\ln S_T > k] \\ &= \int_k^\infty f(x) dx \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

donde k es el log-strike de la opción y $f(x)$ la distribución del precio del subyacente en T . Además, si $\varphi(u)$ es la función característica de la variable aleatoria $x = \ln S_T$, entonces la fórmula para transformada inversa de Fourier para la densidad f está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \varphi(u) du \quad (\text{B-15})$$

y en consecuencia, la probabilidad p en las ecuaciones (B-14) se puede escribir como

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi} \int_k^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \varphi(u) du \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_k^{\infty} e^{-iux} \varphi(u) dx du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \int_k^{\infty} e^{-iux} dx du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \left(\frac{e^{-iuk}}{iu} - \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{e^{-iuH}}{iu} \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \frac{e^{-iuk}}{iu} du - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \lim_{H \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \frac{e^{-iuH}}{iu} du}_{I_2}. \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

De otro lado, la expresión I_2 en la última ecuación de las relaciones en (B-16) puede calcularse haciendo uso reiterado de la transformada de Fourier sobre $\varphi(u)$, de la identidad trigonométrica de Euler dada por $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, de la función signo representada por $\text{sgn}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{R}} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, y del hecho que la función coseno es par y la función seno es impar.

De esta manera I_2 se computa como

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{H \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx \right) \frac{e^{-iuH}}{iu} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{H \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iu(x-H)}}{iu} du \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{H \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[u(x-H)] + i \sin[u(x-H)]}{iu} du \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{H \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[u(x-H)]}{u} du \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{H \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \operatorname{sgn}(x-H) f(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{H \rightarrow \infty} \left(\int_H^{\infty} \operatorname{sgn}(x-H) f(x) dx - \int_{-\infty}^H \operatorname{sgn}(H-x) f(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{H \rightarrow \infty} (1 - F(H) - F(H)) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{B-17}$$

Finalmente reemplazando la última ecuación en (B-17) en la última ecuación de (B-16) se obtiene que

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \frac{e^{-iuk}}{iu} du \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left[\varphi(u) \frac{e^{-iuk}}{iu} \right] du \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \left[\varphi(u) \frac{e^{-iuk}}{iu} \right] du,
\end{aligned} \tag{B-18}$$

lo cual da como resultado una expresión para p equivalente a la ecuación (B-13).

Bibliografía

- Carlo Acerbi and Balazs Szekely. Backtesting Expected Shortfall. Technical report, MSCI Inc., 2014.
- Giovanni Barone Adesi, Kostas Giannopoulos, and Les Vosper. Backtesting derivative portfolios with filtered historical simulation (FHS). *European Financial Management*, 8(1): 30–58, 2002. doi: 10.1111/1468-036X.00175.
- R Ahlip. Foreign exchange options under stochastic volatility and stochastic interest rates. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 11(03):277–294, 2008. doi: 10.1142/S0219024908004804. URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219024908004804>.
- R Ahlip and M Rutkowski. Pricing of foreign exchange options under the Heston stochastic volatility model and CIR interest rates. *Quantitative Finance*, 13(6):955–966, 2013. doi: 10.1080/14697688.2013.769688. URL <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84879696221&partnerID=40&md5=a847d3f87614c1943437162fbb4cf8f2>.
- F. Almudhaf. Backtesting expected shortfall: evidence from European securitized real estate. *Applied Economics Letters*, 25(3):176–182, 2018. doi: 10.1080/13504851.2017.1307928.
- P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228, 1999. doi: 10.1111/1467-9965.00068.
- G. Bakshi, C. Cao, and Z. Chen. Pricing and hedging long-term options. *Journal of Econometrics*, 94(1-2):277–318, 2000. doi: 10.1016/S0304-4076(99)00023-8.
- Turan G. Bali and Panayiotis Theodossiou. A conditional-SGT-VaR approach with alternative GARCH models. *Annals of Operations Research*, 151(1):241–267, 2007. ISSN 02545330. doi: 10.1007/s10479-006-0118-4.
- Turan G. Bali, Hengyong Mo, and Yi Tang. The role of autoregressive conditional skewness and kurtosis in the estimation of conditional VaR. *Journal of Banking and Finance*, 32(2):269–282, 2008. ISSN 03784266. doi: 10.1016/j.jbankfin.2007.03.009.
- Basel Committee on Banking Supervision BCBS. Supervisory Framework for the Use of 'Backtesting' in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital

- Requirements. Technical report, Bank for International Settlements, 1996. URL <https://www.bis.org/publ/bcbs22.htm>.
- Basel Committee on Banking Supervision BCBS. Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework - Comprehensive Version. Technical report, Bank for International Settlements, 2006. URL <https://www.bis.org/publ/bcbs128.htm>.
- Basel Committee on Banking Supervision BCBS. Revisions to the Basel II Market Risk Framework. Technical report, Bank for International Settlements, 2011a. URL <https://www.bis.org/publ/bcbs193.pdf>.
- Basel Committee on Banking Supervision BCBS. Basel III: A Global Regulatory Framework for More Resilient Banks and Banking Systems. Technical report, Bank for International Settlements, 2011b. URL <https://www.bis.org/publ/bcbs189{ }dec2010.pdf>.
- Basel Committee on Banking Supervision BCBS. Explanatory note on the minimum capital requirements for market risk. Technical report, Bank for International Settlements, 2019.
- Basel Committee on Banking Supervision BCBS. Basel III Monitoring Report. Technical report, Bank for International Settlements, 2020. URL <https://www.bis.org/bcbs/publ/d512.pdf>.
- Fabio Bellini and Elena Di Bernardino. Risk management with expectiles. *The European Journal of Finance*, 23(6):487–506, 2017. doi: 10.1080/1351847X.2015.1052150. URL <https://doi.org/10.1080/1351847X.2015.1052150>.
- J. Berkowitz and J. O’Brien. How accurate are value-at-risk models at commercial banks? *Journal of Finance*, 57(3):1093–1111, 2002. doi: 10.1111/1540-6261.00455.
- Jeremy Berkowitz, Peter Christoffersen, and Denis Pelletier. Evaluating Value-at-Risk Models with Desk-Level Data Evaluating Value-at-Risk Models with. *Management Science*, 57(12):2213–2227, 2011. doi: 10.1287/mnsc.1080.0964.
- Bank for International Settlements BIS. Basel III: Finalising post-crisis reforms. Technical report, Bank for International Settlements, 2017. URL <https://www.bis.org/bcbs/publ/d424.htm>.
- Bank for International Settlements BIS. Minimum capital requirements for market risk. Technical report, Bank for International Settlements, 2019. URL <https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.htm>.
- Tomas Bjork. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Number 9780199574742 in OUP Catalogue. Oxford University Press, 2009. ISBN ARRAY(0x4ed42c58). URL <https://ideas.repec.org/b/oxp/obooks/9780199574742.html>.

- F. Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2): 167–179, 1976. doi: 10.1016/0304-405X(76)90024-6.
- F. Black and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973. ISSN 00223808, 1537534X. URL <http://www.jstor.org/stable/1831029>.
- B A Bliss, J A Clark, and R J Delisle. Bank risk, financial stress, and bank derivative use. *Journal of Futures Markets*, 2018. doi: 10.1002/fut.21902.
- A. Brace, D. Gatarek, and M. Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, 7(2):127–155, 1997. doi: 10.1111/1467-9965.00028.
- M. Briani, L. Caramellino, and A. Zanette. A hybrid tree/finite-difference approach for heston-hull-white-type models. *Journal of Computational Finance*, 21(3):1–45, 2017. doi: 10.21314/JCF.2017.333.
- Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer Verlag, 2nd edition, 2007. doi: 10.1007/978-3-540-34604-3. URL <http://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-540-68688-0.pdf>.
- S. Campbell. A review of backtesting and backtesting procedures. *Journal of Risk*, 9(2): 1–17, 2007. doi: 10.21314/JOR.2007.146.
- Peter Carr and Dilip Madan. Option valuation using the fast Fourier transform. *The Journal of Computational Finance*, 2(4):61–73, 1999. ISSN 14601559. doi: 10.21314/jcf.1999.043.
- George Casella and R Berger. *Statistical inference*. Duxbury Thomson Learning, second edition, 2002.
- V. Chavez-Demoulin, P. Embrechts, and S. Sardy. Extreme-quantile tracking for financial time series. *Journal of Econometrics*, 181(1):44–52, 2014. ISSN 03044076. doi: 10.1016/j.jeconom.2014.02.007. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jeconom.2014.02.007>.
- Cathy W.S. Chen, Richard Gerlach, Edward M.H. Lin, and W. C.W. Lee. Bayesian forecasting for financial risk management, pre and post the global financial crisis. *Journal of Forecasting*, 31(8):661–687, 2012. ISSN 02776693. doi: 10.1002/for.1237.
- Song Xi Chen. Nonparametric estimation of expected shortfall. *Journal of Financial Econometrics*, 6(1):87–107, 2008. ISSN 14798409. doi: 10.1093/jjfinec/nbm019.
- B. Cheng, C.S. Nikitopoulos, and E. Schlögl. Pricing of long-dated commodity derivatives: Do stochastic interest rates matter? *Journal of Banking and Finance*, 95:148–166, 2018. doi: 10.1016/j.jbankfin.2017.05.012.

- Peter Christoffersen. *Elements of Financial Risk Management*. Academic Press - Elsevier, second edition, 2012. ISBN 9780123744487. doi: 10.1016/C2009-0-22827-3.
- Peter F. Christoffersen. Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, 39(4):841–862, 1998.
- CME Group. The FX Report January 2022. Technical report, 2022. URL <https://www.cmegroup.com/trading/fx/fx-report/2022-q1-fx-report.html>.
- Gilbert Colletaz, Christophe Hurlin, and Christophe Pérignon. The Risk Map: A new tool for validating risk models. *Journal of Banking and Finance*, 37(10):3843–3854, 2013. ISSN 03784266. doi: 10.1016/j.jbankfin.2013.06.006. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.06.006>.
- John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985. doi: 10.2307/1911242.
- J. Danielsson and J.-P. Zigrand. On time-scaling of risk and the square-root-of-time rule. *Journal of Banking and Finance*, 30(10):2701–2713, 2006. doi: 10.1016/j.jbankfin.2005.10.002.
- K. Deng and J. Qiu. Backtesting expected shortfall and beyond. *Quantitative Finance*, 2021. doi: 10.1080/14697688.2020.1834120.
- Zaichao Du and Juan Carlos Escanciano. Backtesting expected shortfall: Accounting for tail risk. *Management Science*, 63(4):940–958, 2017. ISSN 15265501. doi: 10.1287/mnsc.2015.2342.
- Darrell Duffie and Rui Kan. A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, 6(4):379–406, 1996. ISSN 09601627. doi: 10.1111/j.1467-9965.1996.tb00123.x.
- European Banking Authority EBA. Basel III reforms: Updated impact study. Technical report, European Banking Authority, 2020. URL https://www.eba.europa.eu/sites/default/documents/files/document_{ }library/Publications/Reports/2020/961423/BaselIIIreforms-2019Q4updateandCovidimpact.pdf.
- P. Embrechts, H. Liu, T. Mao, and R. Wang. Quantile-based risk sharing with heterogeneous beliefs. *Mathematical Programming*, 181(2):319–347, 2020. doi: 10.1007/s10107-018-1313-1.
- Paul Embrechts, Haiyan Liu, and Ruodu Wang. Quantile-based risk sharing. *Operations Research*, 66(4):936–949, 2018. ISSN 15265463. doi: 10.1287/opre.2017.1716.
- S. Emmer, M. Kratz, and D. Tasche. What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures. *Journal of Risk*, 18(2):31–60, 2015. doi: 10.21314/JOR.2015.318.

- R.F. Engle and S. Manganelli. CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business and Economic Statistics*, 22(4):367–381, 2004. doi: 10.1198/073500104000000370.
- F. Fang and C.W. Oosterlee. A novel pricing method for european options based on fourier-cosine series expansions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(2):826–848, 2008. doi: 10.1137/080718061.
- Jean David Fermanian and Olivier Scaillet. Sensitivity analysis of VaR and Expected Shortfall for portfolios under netting agreements. *Journal of Banking and Finance*, 29(4):927–958, 2005. ISSN 03784266. doi: 10.1016/j.jbankfin.2004.08.007.
- M.B. Garman and S.W. Kohlhagen. Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance*, 2(3):231–237, 1983. doi: 10.1016/S0261-5606(83)80001-1.
- J Gil-Pelaez. Note on the Inversion Theorem. *Biometrika*, 38(3/4):481–482, 1951. ISSN 00063444. URL <http://www.jstor.org/stable/2332598>.
- Tilmann Gneiting. Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106(494):746–762, 2011. ISSN 01621459. doi: 10.1198/jasa.2011.r10138.
- C. Grajales. Modelación Estocástica de la tasa de Cambio COP / USD, 2006. URL <http://hdl.handle.net/10784/137>.
- C. Grajales and S. Medina. Sensitivities-Based Method and Expected Shortfall for Market Risk Under FRTB and Its Impact on Options Risk Capital. *SSRN*, Preprint, 2021a. doi: 10.2139/ssrn.3926342.
- C. Grajales and S. Medina. Uncertainty linguistic summarizer to evaluate the performance of investment funds. In *New Perspectives on Enterprise Decision-Making Applying Artificial Intelligence Techniques*, chapter 3, pages 55–74. Springer Verlag, 2021b. doi: 10.1007/978-3-030-71115-3_3.
- C. Grajales and S. Medina. Uncertainty and stochastic theories on European options valuation and their delta and vega risks. *SSRN*, Preprint:1–19, 2022. doi: 10.2139/ssrn.3998282.
- C. Grajales and F. Perez. Valor en riesgo para un portafolio con opciones financieras. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 9(17):105–118, 2011. URL <https://revistas.udem.edu.co/index.php/ingenierias/article/view/16>.
- L.A. Grzelak and C.W. Oosterlee. On Cross-Currency Models with Stochastic Volatility and Correlated Interest Rates. *Applied Mathematical Finance*, 19(1):1–35, 2012. doi: 10.1080/1350486X.2011.570492.

- Lech A Grzelak and Cornelis W Oosterlee. On the Heston Model with Stochastic Interest Rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2(1):255–286, 2011. doi: 10.1137/090756119. URL <http://dx.doi.org/10.1137/090756119>.
- Lech A Grzelak, Cornelis W Oosterlee, and Sacha Van Weeren. Extension of stochastic volatility equity models with the Hull White interest rate process. *Quantitative Finance*, 12(1):89–105, 2012. doi: 10.1080/14697680903170809. URL <http://dx.doi.org/10.1080/14697680903170809>.
- Shimin Guo, Lech A. Grzelak, and Cornelis W. Oosterlee. Analysis of an affine version of the Heston-Hull-White option pricing partial differential equation. *Applied Numerical Mathematics*, 72:143–159, 2013. ISSN 01689274. doi: 10.1016/j.apnum.2013.06.004. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2013.06.004>.
- Z. Guo. Option pricing under the Heston model where the interest rate follows the Vasicek model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 2019. doi: 10.1080/03610926.2019.1678643.
- Marcus Haas. New Methods in Backtesting. Technical report, Financial Engineering, Research Center Caesar, Bonn, 2001.
- T. Haentjens and K.J. In 't Hout. Alternating direction implicit finite difference schemes for the Heston–Hull–White partial differential equation. *Journal of Computational Finance*, 16(1):83–110, 2012. doi: 10.21314/JCF.2012.244.
- X.-J. He and S.-P. Zhu. A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 335:323–333, 2018. doi: 10.1016/j.cam.2017.12.011.
- David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60(1):77–105, 1992. ISSN 00129682, 14680262. URL <http://www.jstor.org/stable/2951677>.
- Steven L Heston. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, apr 1993. doi: 10.1093/rfs/6.2.327. URL <http://rfs.oxfordjournals.org/content/6/2/327.abstract>.
- Lennart Hoogerheide and Herman K. van Dijk. Bayesian forecasting of Value at Risk and Expected Shortfall using adaptive importance sampling. *International Journal of Forecasting*, 26(2):231–247, 2010. ISSN 01692070. doi: 10.1016/j.ijforecast.2010.01.007. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijforecast.2010.01.007>.

- J. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, 10th edition, 2018a.
- J. Hull. *Risk Management and Financial Institutions*. Prentice Hall, 5th edition, 2018b.
- J. Hull and A. White. One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(2):235–254, 1993. doi: 10.2307/2331288.
- J. Hull and A White. Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk. *Journal of Risk*, 1(1):5–19, 1998. doi: 10.21314/JOR.1998.001.
- J. Hull and A. White. The General Hull-White Model and Supercalibration. *Financial Analysts Journal*, 57(6):34–43, 2001. doi: 10.2469/faj.v57.n6.2491.
- John Hull and Alan White. Pricing Interest Rate Derivative Securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4):573–592, 1990. doi: 10.1093/rfs/3.4.573. URL <https://ideas.repec.org/a/oup/rfinst/v3y1990i4p573-92.html>.
- John Hull and Alan White. Multi-curve Modelling Using Trees. In Kathrin Glau, Zorana Grbac, Matthias Scherer, and Rudi Zagst, editors, *Innovations in Derivatives Markets*, pages 171–189, Cham, 2016. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-33446-2.
- Farshid Jamshidian. LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics*, 1(4):293–330, 1997. ISSN 0949-2984. doi: 10.1007/s007800050026. URL <https://doi.org/10.1007/s007800050026>.
- John Maynard Keynes. *A Treatise on Money: The Applied Theory of Money*. AMS Press, 1930. ISBN 9781139520652.
- Ivana Komunjer. Quasi-maximum likelihood estimation for conditional quantiles. *Journal of Econometrics*, 128(1):137–164, 2005. ISSN 03044076. doi: 10.1016/j.jeconom.2004.08.010.
- Marie Kratz, Yen H Lok, and Alexander J McNeil. Multinomial VaR backtests: A simple implicit approach to backtesting expected shortfall. *Journal of Banking and Finance*, 88: 393–407, mar 2018. ISSN 0378-4266. doi: 10.1016/j.jbankfin.2018.01.002.
- C.-M. Kuan, J.-H. Yeh, and Y.-C. Hsu. Assessing value at risk with CARE, the Conditional Autoregressive Expectile models. *Journal of Econometrics*, 150(2):261–270, 2009. doi: 10.1016/j.jeconom.2008.12.002.
- E.E. Kummer. 3. Über die hypergeometrische Reihe. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1836(15):39–83, 1836. doi: 10.1515/crll.1836.15.39.
- P. Kupiec. Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models. *Journal of Derivatives*, 3:73–84, 1995. doi: 10.3905/jod.1995.407942.

- J.-P. Laurent, M. Sestier, and S. Thomas. Trading book and credit risk: How fundamental is the Basel review? *Journal of Banking and Finance*, 73:211–223, 2016. doi: 10.1016/j.jbankfin.2016.07.002.
- A. Lehar, M. Scheicher, and C. Schittenkopf. GARCH vs. stochastic volatility: Option pricing and risk management. *Journal of Banking and Finance*, 26(2-3):323–345, 2002. doi: 10.1016/S0378-4266(01)00225-4.
- Y. Liang and C. Xu. An efficient conditional Monte Carlo method for European option pricing with stochastic volatility and stochastic interest rate. *International Journal of Computer Mathematics*, 97(3):638–655, 2020. doi: 10.1080/00207160.2019.1584671.
- B. Liu. *Uncertainty Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2nd edition, 2007.
- B. Liu. *Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty*. Springer Verlag, Berlin, 2010.
- Dimitrios P. Louzis, Spyros Xanthopoulos-Sisinis, and Apostolos P. Refenes. The role of high-frequency intra-daily data, daily range and implied volatility in multi-period value-at-risk forecasting. *Journal of Forecasting*, 32(6):561–576, 2013. ISSN 02776693. doi: 10.1002/for.2249.
- B.B. Mandelbrot. The inescapable need for fractal tools in finance. *Annals of Finance*, 1(2): 193–195, 2005. doi: 10.1007/s10436-004-0008-1.
- A.J. McNeil and R. Frey. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3-4):271–300, 2000. doi: 10.1016/S0927-5398(00)00012-8.
- A.J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative risk management: Concepts, techniques, and tools*. Princeton University Press, 2005. ISBN 9780691122557.
- A.J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools: Revised edition*. Princeton University Press, 2015. ISBN 9781400866281.
- Kristian R Miltersen, Klaus Sandmann, and Dieter Sondermann. Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates. *The Journal of Finance*, 52(1):409–430, 1997. ISSN 00221082, 15406261. URL <http://www.jstor.org/stable/2329571>.
- S. Nadarajah, B. Zhang, and S. Chan. Estimation methods for expected shortfall. *Quantitative Finance*, 14(2):271–291, 2014. doi: 10.1080/14697688.2013.816767.

- Maria Rosa Nieto and Esther Ruiz. Frontiers in VaR forecasting and backtesting. *International Journal of Forecasting*, 32(2):475–501, 2016. ISSN 01692070. doi: 10.1016/j.ijforecast.2015.08.003.
- N. Nolde and J.F. Ziegel. Elicitability and backtesting: Perspectives for banking regulation. *Annals of Applied Statistics*, 11(4):1833–1874, 2017. doi: 10.1214/17-AOAS1041.
- Cornelis W Oosterlee and Lech A Grzelak. *Mathematical Modeling and Computation in Finance*. World Scientific Publishing Co., jan 2020. URL <https://ideas.repec.org/b/wsi/wsbook/q0236.html>.
- J. Orgeldinger. Recent issues in the implementation of the new basel minimum capital requirements for market risk. *Emerging Science Journal*, 2(2):65–77, 2018. doi: 10.28991/esj-2018-01129.
- Andrew J. Patton, Johanna F. Ziegel, and Rui Chen. Dynamic semiparametric models for expected shortfall (and Value-at-Risk). *Journal of Econometrics*, 211(2):388–413, 2019. ISSN 18726895. doi: 10.1016/j.jeconom.2018.10.008.
- C. Pederzoli and C. Torricelli. An assessment of the fundamental review of the trading book: The capital requirement impact on a stylised financial portfolio. *International Journal of Banking, Accounting and Finance*, 12(4):389–403, 2021. doi: 10.1504/IJBAAF.2021.118588.
- Christophe Pérignon and Daniel R. Smith. The level and quality of Value-at-Risk disclosure by commercial banks. *Journal of Banking and Finance*, 34(2):362–377, 2010a. ISSN 03784266. doi: 10.1016/j.jbankfin.2009.08.009. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbankfin.2009.08.009>.
- Christophe Pérignon and Daniel R. Smith. Diversification and Value-at-Risk. *Journal of Banking and Finance*, 34(1):55–66, 2010b. ISSN 03784266. doi: 10.1016/j.jbankfin.2009.07.003. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbankfin.2009.07.003>.
- Christophe Pérignon, Zi Yin Deng, and Zhi Jun Wang. Do banks overstate their Value-at-Risk? *Journal of Banking and Finance*, 32(5):783–794, 2008. ISSN 03784266. doi: 10.1016/j.jbankfin.2007.05.014.
- Vladimir Piterbarg. Smiling hybrids. *Risk*, 19:66–70, 2006.
- Matthew Pritsker. The hidden dangers of historical simulation. *Journal of Banking and Finance*, 30(2):561–582, 2006. ISSN 03784266. doi: 10.1016/j.jbankfin.2005.04.013.
- M C Recchioni and Y Sun. An explicitly solvable Heston model with stochastic interest rate. *European Journal of Operational Research*, 249(1):359–377, 2016. doi: 10.1016/j.ejor.2015.09.035.

- R. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *The Journal of Risk*, 2(3):21–41, 2000. doi: 10.21314/JOR.2000.038.
- R. Rockafellar and S. Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, 26(7):1443–1471, 2002. doi: 10.1016/S0378-4266(02)00271-6.
- R. Rockafellar and S. Uryasev. The fundamental risk quadrangle in risk management, optimization and statistical estimation. *Surveys in Operations Research and Management Science*, 18(1-2):33–53, 2013. ISSN 18767354. doi: 10.1016/j.sorms.2013.03.001. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.sorms.2013.03.001>.
- Fabrice Rouah. *The Heston Model and its extensions in Matlab and C#*. Wiley Finance, 2013.
- Rasoul Sajjad, Jerry Coakley, and John C. Nankervis. Markov-switching GARCH modelling of value-at-risk. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 12(3), 2008. ISSN 15583708. doi: 10.2202/1558-3708.1522.
- O. Scaillet. Nonparametric estimation and sensitivity analysis of expected shortfall. *Mathematical Finance*, 14(1):115–129, 2004. doi: 10.1111/j.0960-1627.2004.00184.x.
- Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance, 2004. ISBN 0387401016.
- F. Soleymani and A. Itkin. Pricing foreign exchange options under stochastic volatility and interest rates using an RBF–FD method. *Journal of Computational Science*, 37, 2019. doi: 10.1016/j.jocs.2019.101028.
- Heng Sun. Hull-White Model Calibration Notes. *SSRN Electronic Journal*, 2015. doi: 10.2139/ssrn.2578774.
- Alexander van Haastrecht and Antoon Pelsser. Generic pricing of FX, inflation and stock options under stochastic interest rates and stochastic volatility. *Quantitative Finance*, 11(5):665–691, 2011. doi: 10.1080/14697688.2010.504734. URL <http://dx.doi.org/10.1080/14697688.2010.504734>.
- O Vasicek. An equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977.
- G. Wang and W. Xu. A unified willow tree framework for one-factor short-rate models. *Journal of Derivatives*, 25(3):33–54, 2018. doi: 10.3905/jod.2018.25.3.033.
- R. Wang and R. Zitikis. An axiomatic foundation for the expected shortfall. *Management Science*, 67(3):1413–1429, 2021. doi: 10.1287/mnsc.2020.3617.

-
- S. S. Wilks. The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, 9(1):60–62, 1938. ISSN 0003-4851. doi: 10.1214/aoms/1177732360.
- Uwe Wystup. *FX Options and Structured Products*. Wiley Finance, second edi edition, 2017.
- Ke Li Xu. Nonparametric inference for conditional quantiles of time series. *Econometric Theory*, 29(4):673–698, 2013. ISSN 02664666. doi: 10.1017/S0266466612000667.
- Sasa Zikovic and Bora Aktan. Decay factor optimisation in time weighted simulation - evaluating var performance. *International Journal of Forecasting*, 27(4):1147–1159, 2011. ISSN 01692070. doi: 10.1016/j.ijforecast.2010.09.007.