1

VENCIJE OSCILOVANJA RAMNE DIZALICE U HERCIMA

| ncije | Model bez koncentrisanih masa | Model sa koncentrisanim masama | Apsolutno odstupanje u % |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.50023 | 0.49684 | 0.68 |
| 2 | 1.60410 | 1.53190 | 4.71 |
| 3 | 2.97880 | 2.90430 | 2.57 |
| 4 | 3.68540 | 3.57400 | 3.12 |
| 5 | 4.22910 | 4.41280 | 4.16 |
| 6 | 36.13098 | 33.19546 | 8.84 |

. strukturi modela sa koncentrisanim masama u odnosu na model bez njih. Analizom iz ALGORA ustanovljeno je da je raspored naponskih stanja i njihovih brojnih modela praktično identičan. Tako je apsolutno odstupanje vrednosti dinamičkih poređena modela, najopterećenijeg zategnutog konačnog elementa 0.46%. (konačni ım nosaču kod krute noge), a najopterećenijeg pritisnutog elementa (na drugom netrično u odnosu na prethodni) 1.18%. Odstupanja svih drugih konačnih elemenata otpunosti zadovoljavaju traženu tačnost, a kod najvećeg broja se to odstupanje kreće ne tačnosti od ±5% [2].


lice, Mašinski fakultet, Beograd, 1992.

identifikaciji dinamičkog ponašanja ramne dizalice pri njenom kretanju, Magistarska fakultet, Beograd, 1996.

ić, N., Brkić, A.: O modeliranju mosnih dizalica za istraživanje dinamičkih pojava ıg kretanja, Tehnika, Mašinstvo, Vol.LI, No.3-4, str.1-6, Beograd, 1996.

ıresig, H., Kurth, F.: Unstetigförderer 2, Veb Verlag Technik, Berlin, 1977.

ć, N., Brkić, A.: Analiza dinamičkog ponašanja mosne dizalice u horizontalnoj ravni u ıtacionarnog kretanja, Proc. of XIII International Conference on Material Handling ıing, Mašinski fakultet, str. 316-321, Beograd, 1994.

Н., Фомичева, В., Ф.: Исследование динамики металлоконструкций козловых азгоне, Вестник Машиностроения, No.9, pp. 35-38, 1986.

Н., Фомичева, В., Ф.: Исследование динамических напряЭжений в Элементах ıанов, вызываемых пульсацияни скорости ветра, Вестник Машиностроения, 7, 1991.

МаЯтниковые колебания груза и длительность разгона механизма передвишения ıежки, Вестник Машиностроения, No.8, pp. 30-32, 1991.

Л.: Справочник по кранам, Машиностроение, Ленинград, 1988.

Усилия и нагрузки в дейСтвуЮЩих машинах, Машгиз, Москва, 1960.

kić, A., Zrnić, N.: The analysis of swing of the cargo and rigidity of driving shafts of ır moving to the dynamic behaviour of the bridge crane, Proc. of IX World congress y of Machines and Mechanisms, Vol.4, Politicnico di Milano, pp. 2862-2866, Milano,

Н., Фомичева, В., Ф.: К вопросу о динамическом воздействии ветра на козловые тник Машиностроения, No.5, pp. 32-35, 1983.



JДМ YUSM

ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ЗА МЕХАНИКУ 11000 - БЕОГРАД
Кнеза Милоша 9/I; Тел.: (+381 11) 342 273
YUGOSLAV SOCIETY OF MECHANICS, 11000 - BELGRADE
Kneza Miloša 9/I; Tel.: (+381 11) 342 273

JДМ YUSM

JYMEX '97 XXII ЈУГОСЛОВЕНСКИ КОНГРЕС ТЕОРИЈСКЕ И ПРИМЕЊЕНЕ МЕХАНИКЕ, ВРЊАЧКА БАЊА, 2 - 7 ЈУН 1997.
YUCTAM'97 XXII YUGOSLAV CONGRESS OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, JUNE 2-7, 1997, VRNJAČKA BANJA D.c.41.


# ANALIZA DINAMIČKOG PONAŠANJA GRAĐEVINSKE STUBNE DIZALICE[1]


Dr Davor Ostrić, red. prof., Mr Aleksandar Brkić, asist., Dr Aleksandar Obradović, doc., Mr Nenad Zrnić, asist.
Mašinski fakultet Beograd, 27. marta 80, Beograd.


# THE ANALYSIS OF THE TOWER CRANE DYNAMIC BEHAVIOUR


Ph.D Davor Ostrić, prof., M.Sc Aleksandar Brkić, asiss., Ph.D Aleksandar Obradović, as.prof., M.Sc Nenad Zrnić, asiss.
Faculty of Mechanical Engineering Belgrade, 27. marta 80, Belgrade.



Summary:

The tower crane dynamic behaviour during non-stationary regime of work of hoisting mechanism - acceleration of load during its hoisting, is discussed in this paper. The calculation case for dynamic analyses is the case when the carriage with load is at the position of maximum jib lenght. The carrying structure of tower crane, the load and driving mechanisms are modelled by equivalent concentrated masses. The paper presents the way for the setting of mathematical model by linearisating differential equations of the system motion. By solving the differential equations of system is obtained the searched dynamic behaviour of tower crane by using the analysis from the aspect of linear vibrations of the system with finit degrees of freedom (determination of own frequencies, main shapes of vibrations, etc.).


## 1. Uvod

Najveća opterećenja u nosećoj konstrukciji građevinskih stubnih dizalica nastala kao posledica dinamičkih procesa, javljaju se pri radu mehanizma za dizanje tereta. Dizanje tereta može se obavljati nezavisno od drugih kretanja ovih dizalica (obrtno kretanje strele ili stuba, kretanje dizalice, promena dohvata strele), ili u kombinaciji sa jednim od njih. Na osnovu eksperimentalnih istraživanja [1, 2] može se zaključiti da je dovoljno posmatrati pojedinačni rad mehanizama ovih dizalica radi definisanja maksimalnih dinamičkih opterećenja, nastalih kao posledica prelaznih režima rada pogonskih mehanizama dizalice [3]. U radu [3] pokazano je da se najveća opterećenja u nosećoj konstrukciji građevinskih dizalica javljaju u režimu ubrzanja mehanizma za dizanje tereta. S obzirom da je cilj ovog rada određivanje analitičkog rešenja sistema linearnih diferencijalnih jednačina kretanja dizalice, ono će biti traženo za najnepovoljniji režim rada sa stanovišta opterećenja noseće strukture - ubrzanje mehanizma za dizanje pri podizanju tereta. Takođe, jedan od ciljeva ovog rada je i određivanje adekvatnog dinamičkog modela građevinskih stubnih dizalica koje predstavljaju elastične sisteme, gde oscilovanje njihovih nosećih konstrukcija ima veliki uticaj na tačno definisanje dinamičkih opterećenja. Određivanje analitičkog rešenja sistema diferencijalnih jednačina kretanja biće urađeno za slučaj kada se pogonska sila modelira prema zakonu parabole drugog stepena, a teret se na početku procesa dizanja nalazi na određenoj visini obešen o istegljivo uže.


[1] Rad je nastao kao rezultat istraživanja u okviru projekta "Istraživanje savremenih metoda za analizu i projektovanje složenih sistema i konstrukcija u mehanizaciji", br. 11M05PT1 (PP2) finansiranog od strane MNTR Srbije.

## 2. Formiranje dinamičkog i matematičkog modela

Na slici 1 prikazan je dinamički model dizalice (u nekom trenutku oscilovanja t) u vertikalnoj ravni koji opisuje dinamičko ponašanje dizalice pri radu mehanizma za dizanje tereta. Osnovni delovi noseće konstrukcije dizalice su: strela, kontrastrela, stub, zatega strele (spaja tačke 2 i 6, sl.1) i zatege kontrastrele (spoj tačaka 6 i 8, sl.1). Dinamički model formiran je na sledeći način. Kontinualno raspodeljena masa noseće konstrukcije svedena je na osam koncentrisanih masa ($m_1 \div m_8$), poštujući sledeći princip redukcije masa: "diskretizaciju sistema sa kontinualno raspoređenom masom treba izvršiti na način da bude zadovoljena jednakost kinetičkih energija modela i nediskretizovanog sistema kao elastičnog tela u prvom obliku oscilovanja, kao i jednakost momenata inercije modela i elastičnog tela za merodavni presek" [3]. Treba uzeti u obzir da se u vertikalnoj ravni, pri dizanju tereta, strela ponaša kao greda sa prepustom, kontrastrela kao gredni, a stub kao konzolni nosač [3]. Prema gore navedenom, i preporukama u [3], vrednosti dobijenih koncentrisanih masa dinamičkog modela iznose:

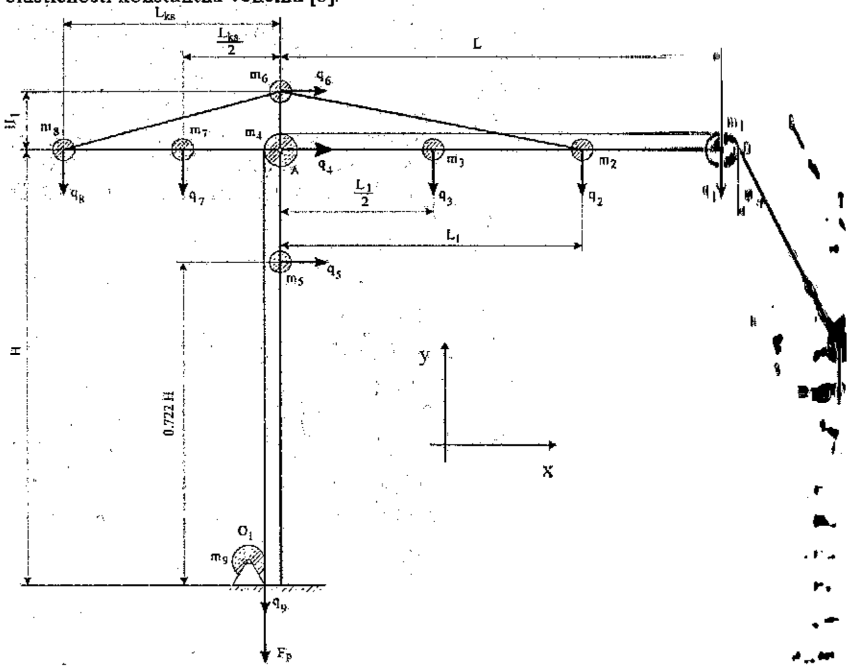
$$
\begin{aligned}
m_1 &= 0.48 \cdot m_{2B} + m_{kol},\\
m_2 &= 0.52 \cdot m_{2B} + 0.2535 \cdot m_{2A} + 0.5 \cdot m_{26},\\
m_3 &= 0.493 \cdot m_{2A},\\
m_4 &= 0.2535 \cdot m_{2A} + 0.5 \cdot m_{A6} + 0.2535 \cdot m_{A8},\\
m_5 &= 0.6395 \cdot m_{0A},\\
m_6 &= 0.5 \cdot m_{A6} + 0.5 \cdot m_{26} + 0.5 \cdot m_{6B},\\
m_7 &= 0.493 \cdot m_{A8},\\
m_8 &= 0.2535 \cdot m_{A8} + 0.5 \cdot m_{68} + m_{kt},
\end{aligned}
\qquad (1), [4,3]
$$

gde veličine $m_{rp}$ predstavljaju vrednosti kontinualno raspodeljene mase između tačaka r i p, prema sl. 1. Preostale dve koncentrisane mase razmatranog dinamičkog modela $m_9$ i $m_{10}$, predstavljaju masu obrtnih delova mehanizma za dizanje tereta svedenu na pravac užeta, odnosno masu tereta, respektivno, dok su sa $m_{kol}$ i mkt označene masa kolica i masa kontratega, respektivno. Veličina mase $m_9$ može se odrediti prema izrazu (2):

$$m_9 = 1.1 \cdot \frac{J_v \cdot i_m^2}{r_d^2 \cdot \eta_m} \qquad (2), [3,4].$$

U izrazu (2) sa $i_m$ i $\eta_m$ označeni su prenosni odnos i stepen korisnosti mehanizma za dizanje tereta, sa $J_v$ moment inercije obrtnih masa na pogonskom vratilu, a sa $r_d$ poluprečnik doboša. Preostale oznake na sl.1 imaju sledeća značenja: L - raspon strele; $L_1$ - rastojanje tačke na streli za koju je vezana zatega; $L_{KS}$ - dužina kontrastrele; H - visina stuba; $H_1$ - visina glave stuba; $H_2$=0.722·H, predstavlja visinu tačke na stubu u koju je redukovana masa stuba; l - dužina užeta na kome visi teret u početnom položaju; $f_{st}$ - statičko izduženje užeta [3]. Na redukovanu masu mehanizma za dizanje tereta deluje pogonska sila čiji je zakon promene prikazan izrazom (3): $F_p = Q + F_{din} \cdot (1 - \frac{t^2}{T^2})$ (3), [4,3],

gde je sa Q označena nosivost dizalice na datom rasponu, sa T vreme ubrzanja mehanizma za dizanje tereta, a sa $F_{din}$ dinamička sila koja se izračunava prema [5]. Teret koji se podiže nalazi se na nekoj visini, i umiren je. Noseća konstrukcija dizalice je deformisana i nalazi se u položaju ravnoteže oko koga će oscilovati kada mehanizam za dizanje tereta bude pušten u rad. Uže za dizanje tereta istegnuto je za veličinu statičke deformacije $f_{st}$, usled težine tereta okačenog o njega [3]. Za istraživanje dinamičkog ponašanja ove dizalice u nestacionarnom režimu ubrzanja pri dizanju tereta usvojene su sledeće pretpostavke [3]: u horizontalnom pravcu pomeranja imaju sve koncentrisane mase izuzev mase $m_9$ koja predstavlja mehanizam za dizanje tereta; strela i kontrastrela su krute i neistegljive u aksijalnom pravcu, pa koncentrisane mase $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$, $m_7$ i $m_8$ u horizontalnom pravcu ostvaruju identično generalisano pomeranje $q_4$; stub i glava su kruti i nedeformabilni po vertikalnom pravcu te koncentrisane mase $m_4$, $m_5$ i $m_6$ po tom pravcu nemaju pomeranja; pomeranja [illegible] koncentrisanih masa u vertikalnom pravcu su međusobno nezavisna i različita; krutost [illegible] da je konstantna veličina. Poslednja navedena pretpostavka može se obrazložiti na [illegible] promenu veličine $c_u$ uticaj imaju sledeći parametri: modul elastičnosti užeta, i promena [illegible] u režimu dizanja tereta. Usled nedostatka eksperimentalnih podataka usvaja se da je [illegible] elastičnosti konstantna veličina [3].




Slika 1,[3]: Dinamički model građevinske stubne dizalice u vertikalnoj ravni

Visina dizanja se zanemarljivo malo menja prema ukupnoj dužini užeta u vr[illegible] istražuje, pa se zbog toga može usvojiti da je $c_u$=const. [3]. Na sl.1 prikazani su [illegible] generalisanih koordinata razmatranog dinamičkog modela. Pravolinijska [illegible] odgovarajućih koncentrisanih masa predstavljena su simbolima $q_i$, dok je [illegible] ravni predstavljeno ugaonim pomeranjem φ mase $m_{10}$. Generalisana nepotencijalna [illegible] deluje po pravcu užeta za dizanje tereta [3,4]. Prigušenja u sistemu su zanemarena [illegible] jednačine kretanja koje opisuju dinamičko ponašanje dizalice, postavljene su [illegible]

pomoću Lagrange-ovih jednačina II vrste [6], i za ovaj slučaj glase: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right)$ [illegible]

$E_K$ - kinetička energija sistema kao funkcija generalisanih koordinata i brzina [illegible] sistema kao funkcija generalisanih koordinata; $Q_i$ - generalisane nepotencijalne [illegible]

Kinetička energija sistema određena je izrazom (5). Detaljan postupak [illegible] kinetičku, kao i potencijalnu energiju sistema prikazan je u [3], a u ovom [illegible] konačni izrazi bez postupka izvođenja.

ičkog i matematičkog modela

ikazan je dinamički model dizalice (u nekom trenutku oscilovanja t) u vertikalnoj ıamičko ponašanje dizalice pri radu mehanizma za dizanje tereta. Osnovni delovi dizalice su: strela, kontrastrela, stub, zatega strele (spaja tačke 2 i 6, sl.1) i zatege ıčaka 6 i 8, sl.1). Dinamički model formiran je na sledeći način. Kontinualno ıoseće konstrukcije svedena je na osam koncentrisanih masa ($m_1 \div m_8$), poštujući kcije masa: "diskretizaciju sistema sa kontinualno raspoređenom masom treba ıude zadovoljena jednakost kinetičkih energija modela i nediskretizovanog sistema prvom obliku oscilovanja, kao i jednakost momenata inercije modela i elastičnog resek" [3]. Treba uzeti u obzir da se u vertikalnoj ravni, pri dizanju tereta, strela ı prepustom, kontrastrela kao gredni, a stub kao konzolni nosač [3]. Prema gore ukama u [3], vrednosti dobijenih koncentrisanih masa dinamičkog modela iznose:

ol,

$$535 \cdot m_{2A} + 0.5 \cdot m_{26},$$

$$0.5 \cdot m_{A6} + 0.2535 \cdot m_{A8}, \qquad (1), [4,3]$$

$$m_{26} + 0.5 \cdot m_{6B},$$

$$0.5 \cdot m_{68} + m_{kt},$$

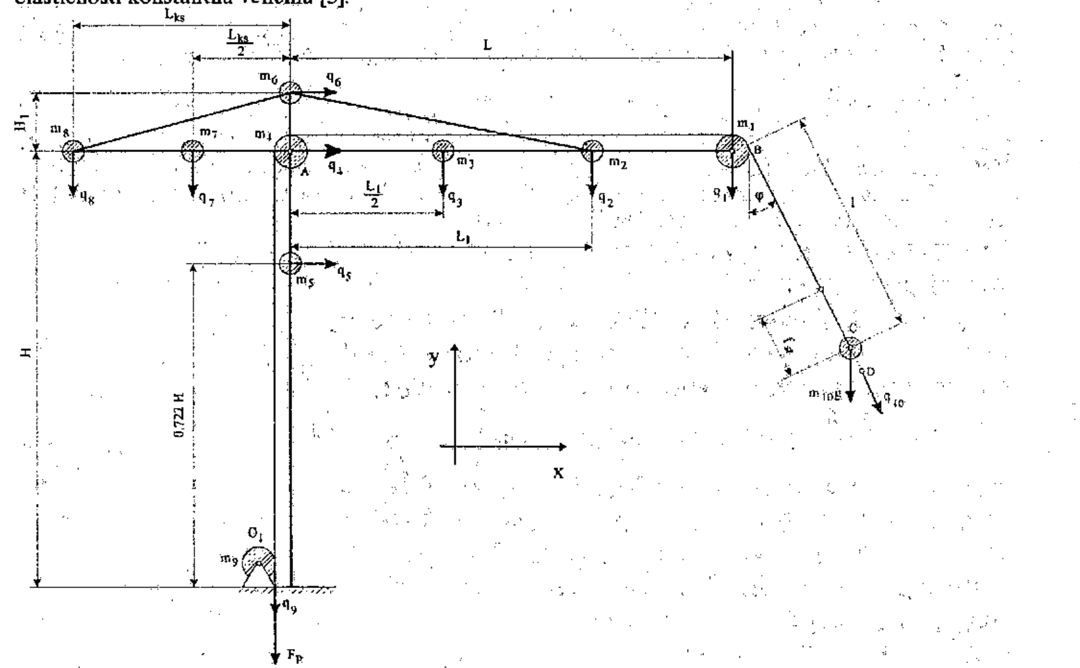
lstavljaju vrednosti kontinualno raspodeljene mase između tačaka r i p, prema sl. 1. ntrisane mase razmatranog dinamičkog modela $m_9$ i $m_{10}$, predstavljaju masu obrtnih a dizanje tereta svedenu na pravac užeta, odnosno masu tereta, respektivno, dok su ne masa kolica i masa kontratega, respektivno. Veličina mase $m_9$ može se odrediti

(2), [3,4].

$_m$ označeni su prenosni odnos i stepen korisnosti mehanizma za dizanje tereta, sa $J_v$ tnih masa na pogonskom vratilu, a sa $r_d$ poluprečnik doboša. Preostale oznake na ačenja: L - raspon strele; $L_1$ - rastojanje tačke na streli za koju je vezana zatega; $L_{KS}$ ; H - visina stuba; $H_1$ - visina glave stuba; $H_2$=0.722·H, predstavlja visinu tačke na ıkovana masa stuba; l - dužina užeta na kome visi teret u početnom položaju; $f_{st}$ - eta [3]. Na redukovanu masu mehanizma za dizanje tereta deluje pogonska sila čiji ikazan izrazom (3): $F_p = Q + F_{din} \cdot (1 - \frac{t^2}{T^2})$ (3), [4,3],

ıa nosivost dizalice na datom rasponu, sa T vreme ubrzanja mehanizma za dizanje ımička sila koja se izračunava prema [5]. Teret koji se podiže nalazi se na nekoj Noseća konstrukcija dizalice je deformisana i nalazi se u položaju ravnoteže oko ıda mehanizam za dizanje tereta bude pušten u rad. Uže za dizanje tereta istegnuto čke deformacije $f_{st}$, usled težine tereta okačenog o njega [3]. Za istraživanje ıja ove dizalice u nestacionarnom režimu ubrzanja pri dizanju tereta usvojene su [3]: u horizontalnom pravcu pomeranja imaju sve koncentrisane mase izuzev mase ı mehanizam za dizanje tereta; strela i kontrastrela su krute i neistegljive u ıa koncentrisane mase $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$, $m_7$ i $m_8$ u horizontalnom pravcu ostvaruju ıo pomeranje $q_4$; stub i glava su kruti i nedeformabilni po vertikalnom pravcu te

koncentrisane mase $m_4$, $m_5$ i $m_6$ po tom pravcu nemaju pomeranja; pomeranja svih ostalih koncentrisanih masa u vertikalnom pravcu su međusobno nezavisna i različita; krutost užeta $c_u$ uzima se da je konstantna veličina. Poslednja navedena pretpostavka može se obrazložiti na sledeći način. Na promenu veličine $c_u$ uticaj imaju sledeći parametri: modul elastičnosti užeta, i promenljiva dužina užeta u režimu dizanja tereta. Usled nedostatka eksperimentalnih podataka usvaja se da je veličina modula elastičnosti konstantna veličina [3].




Slika 1,[3]: Dinamički model građevinske stubne dizalice u vertikalnoj ravni.

Visina dizanja se zanemarljivo malo menja prema ukupnoj dužini užeta u vremenskom intervalu koji se istražuje, pa se zbog toga može usvojiti da je $c_u$=const. [3]. Na sl.1 prikazani su pretpostavljeni smerovi generalisanih koordinata razmatranog dinamičkog modela. Pravolinijska nezavisna pomeranja odgovarajućih koncentrisanih masa predstavljena su simbolima $q_i$, dok je klaćenje tereta u vertikalnoj ravni predstavljeno ugaonim pomeranjem φ mase $m_{10}$. Generalisana nepotencijalna pogonska sila $F_p$ deluje po pravcu užeta za dizanje tereta [3,4]. Prigušenja u sistemu su zanemarena [3]. Diferencijalne jednačine kretanja koje opisuju dinamičko ponašanje dizalice, postavljene su energetskom metodom pomoću Lagrange-ovih jednačina II vrste [6], i za ovaj slučaj glase: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i$, (4), gde su:

$E_K$ - kinetička energija sistema kao funkcija generalisanih koordinata i brzina; $E_P$ - potencijalna energija sistema kao funkcija generalisanih koordinata; $Q_i$ - generalisane nepotencijalne sile.

Kinetička energija sistema određena je izrazom (5). Detaljan postupak određivanja izraza za kinetičku, kao i potencijalnu energiju sistema prikazan je u [3], a u ovom radu biće navedeni samo konačni izrazi bez postupka izvođenja.

$$E_K = \frac{1}{2}((m_1 + m_{10}) \cdot \dot{q}_1^2 + m_2 \cdot \dot{q}_2^2 + m_3 \cdot \dot{q}_3^2 + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7 + m_8 + m_{10}) \cdot \dot{q}_4^2 +$$
$$+ m_5 \cdot \dot{q}_5^2 + m_6 \cdot \dot{q}_6^2 + m_7 \cdot \dot{q}_7^2 + m_8 \cdot \dot{q}_8^2 + (m_9 + m_{10}) \cdot \dot{q}_9^2 + m_{10} \cdot \dot{q}_{10}^2 + m_{10} \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \quad (5),[3]$$
$$+ 2 \cdot m_{10} \cdot (\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_{10} - \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_9 - \dot{q}_9 \cdot \dot{q}_{10} + l \cdot \dot{q}_4 \cdot \dot{\varphi}))$$

Potencijalna energija sistema sastoji se iz tri komponente, i to potencijalne energije strukture koja vrši poprečno oscilovanje, užeta i tereta, i predstavljena je izrazom (6) koji je dobijen posle sprovedene linearizacije razvijanjem funkcija u red sa tačnošću do malih veličina drugog reda.

$$E_p = \frac{1}{2}\{q\} \cdot [C] \cdot \{q\}^T + \frac{1}{2} c_u \cdot (q_{10} + f_{st})^2 + m_{10} \cdot g \cdot (l \cdot \frac{\varphi^2}{2} - q_1 + q_9 - q_{10} + \frac{1}{2H} \cdot q_4^2) \quad (6), [4],$$

gde su : $\{q\}=\{q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8\}$ - vektor generalisanih koordinata, a $[C]=[\beta_{ij}]_{8x8}$ - matrica Maksvelovih dualnih koeficijenata.

Konačno, postupajući prema izrazu (4), dobija se sistem linearnih nehomogenih diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima (7).

$$(m_1 + m_{10}) \cdot \ddot{q}_1 - m_{10}\ddot{q}_9 + m_{10}\ddot{q}_{10} + \beta_{11}q_1 + \beta_{12}q_2 + \beta_{13}q_3 + \beta_{14}q_4 + \beta_{15}q_5 +$$
$$\beta_{16}q_6 + \beta_{17}q_7 + \beta_{18}q_8 - m_{10}g = 0,$$
$$m_2\ddot{q}_2 + \beta_{21}q_1 + \beta_{22}q_2 + \beta_{23}q_3 + \beta_{24}q_4 + \beta_{25}q_5 + \beta_{26}q_6 + \beta_{27}q_7 + \beta_{28}q_8 = 0,$$
$$m_3\ddot{q}_3 + \beta_{31}q_1 + \beta_{32}q_2 + \beta_{33}q_3 + \beta_{34}q_4 + \beta_{35}q_5 + \beta_{36}q_6 + \beta_{37}q_7 + \beta_{38}q_8 = 0,$$
$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7 + m_8 + m_{10}) \cdot \ddot{q}_4 + m_{10} \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + \beta_{41}q_1 + \beta_{42}q_2 +$$
$$\beta_{43}q_3 + \left(\beta_{44} + \frac{m_{10}g}{H}\right) \cdot q_4 + \beta_{45}q_5 + \beta_{46}q_6 + \beta_{47}q_7 + \beta_{48}q_8 = 0,$$
$$m_5\ddot{q}_5 + \beta_{51}q_1 + \beta_{52}q_2 + \beta_{53}q_3 + \beta_{54}q_4 + \beta_{55}q_5 + \beta_{56}q_6 + \beta_{57}q_7 + \beta_{58}q_8 = 0,$$
$$m_6\ddot{q}_6 + \beta_{61}q_1 + \beta_{62}q_2 + \beta_{63}q_3 + \beta_{64}q_4 + \beta_{65}q_5 + \beta_{66}q_6 + \beta_{67}q_7 + \beta_{68}q_8 = 0,$$
$$m_7\ddot{q}_7 + \beta_{71}q_1 + \beta_{72}q_2 + \beta_{73}q_3 + \beta_{74}q_4 + \beta_{75}q_5 + \beta_{76}q_6 + \beta_{77}q_7 + \beta_{78}q_8 = 0,$$
$$m_8\ddot{q}_8 + \beta_{81}q_1 + \beta_{82}q_2 + \beta_{83}q_3 + \beta_{84}q_4 + \beta_{85}q_5 + \beta_{86}q_6 + \beta_{87}q_7 + \beta_{88}q_8 = 0,$$
$$-m_{10}\ddot{q}_1 + (m_9 + m_{10}) \cdot \ddot{q}_9 - m_{10}\ddot{q}_{10} + m_{10}g = F_p, \quad (7), [1]$$
$$m_{10}\ddot{q}_1 - m_{10}\ddot{q}_9 + m_{10}\ddot{q}_{10} + c_u q_{10} = 0,$$
$$m_{10} \cdot l \cdot \ddot{q}_4 + m_{10} \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + m_{10} \cdot g \cdot l \cdot \varphi = 0.$$

## 3. Rešenje modela primenom simboličkog interpretera "MATHEMATICA"[7]

Sistem diferencijalnih jednačina (7) može se predstaviti u matričnom obliku (8):

$$[A] \cdot \{\ddot{q}\} + [C] \cdot \{q\} = \{Q\} \quad (8),$$

gde su: [A] - matrica inercije, [C] - matrica krutosti, $\{q\}$ - vektor generalisanih koordinata i $\{Q\}$ - vektor generalisanih sila. Na osnovu poznatih matrica [A] i [C], primenjujući programe [8] za sopstvene neprigušene oscilacije (napisane za "MATHEMATICA" simbolički interpreter [7]), dobijaju se vrednosti sopstvenih kružnih frekvencija: $\omega_1 = 0\ s^{-1}$; $\omega_2 = 0.4711\ s^{-1}$; $\omega_3 = 1.5238\ s^{-1}$; $\omega_4 = 3.8349\ s^{-1}$; $\omega_5 = 6.5292\ s^{-1}$; $\omega_6 = 11.2399\ s^{-1}$; $\omega_7 = 20.2964\ s^{-1}$; $\omega_8 = 25.1477\ s^{-1}$; $\omega_9 = 31.9312\ s^{-1}$; $\omega_{10} = 61.6629\ s^{-1}$; $\omega_{11} = 197.53\ s^{-1}$, kao i modalna matrica [S]. Uvođenjem vektora $\{\xi\}$ glavnih koordinata, linearnom transformacijom (9):

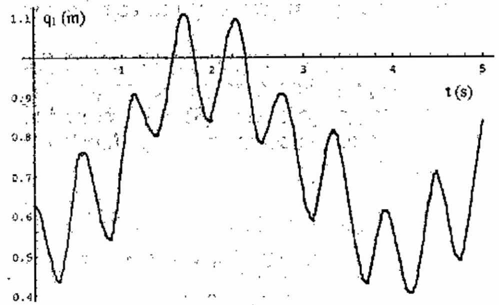
$$\{q\} = [S] \cdot \{\xi\} \quad (9),$$

dobijaju se diferencijalne jednačine u glavnim koordinatama (10):

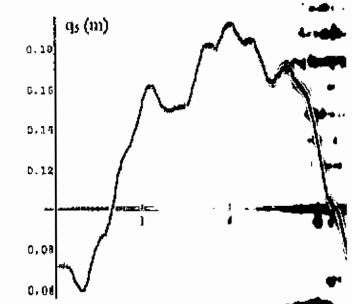
$$[A'] \cdot \{\ddot{\xi}\} + [C'] \cdot \{\xi\} = \{Q'\} \quad (10),$$

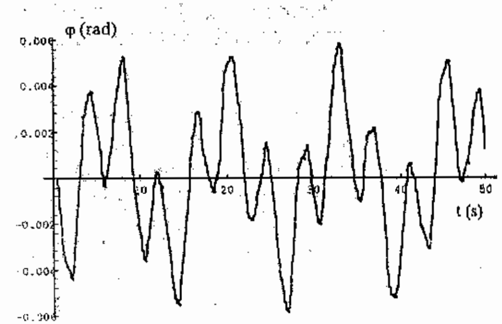
gde su: $[A'] = [S]^T \cdot [A] \cdot [S]$, $[C'] = [S]^T \cdot [C] \cdot [S]$, $\{Q'\} = [S]^T \cdot \{Q\}$ (11).

Obzirom na ortogonalnost glavnih oblika oscilovanja, matrice [A'] i [C'] su dijagonalne [illegible] (10) predstavlja 11 običnih nehomogenih diferencijalnih jednačina drugog reda [illegible] koeficijentima. Njihovim rešavanjem, uz početne uslove: $\{\xi_0\} = [S]^{-1} \cdot \{q_0\}$, $\{\dot{\xi}_0\}$ = [illegible] su $\{q_0\}$ i $\{\dot{q}_0\}$ početne vrednosti generalisanih koordinata i brzina, dobijaju se tačna [illegible] za glavne koordinate. Zamenom rešenja u (9) dobijaju se i tačna analitička [illegible] koordinata. Ovde treba napomenuti da se proces rešavanja morao sprovoditi u dve [illegible] i $t \in [0.5,5]$ s zbog različitih oblika funkcija $Q_9 = Q_9(t)$. Neka od karakterističnih [illegible] sl.2, 3, 4 i 5. Takođe, treba napomenuti da je najniža frekvencija jednaka nuli, [illegible] [C] matrica semidefinitne kvadratne forme, i kao takva ne ispunjava uslove [illegible] Za razliku od ostalih, homogeni deo rešenja glavne koordinate $\xi_1$ nije harmonijska [illegible] vremena. Međutim, analizirajući modalni vektor koji odgovara kružnoj frekvenciji [illegible] ulazi jedino u izraz za generalisanu koordinatu $q_9$, koja odgovara namotavanju [illegible].

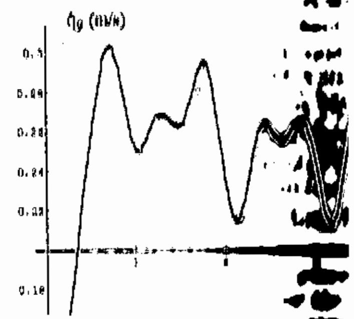



Slika 2.




Slika 4.




Na sl.2. prikazana je promena koordinate $q_1$ tokom unapred [illegible] od 5 s. Vreme nestacionarnog režima kretanja - ubrzanja mehanizma za [illegible] zatim se oscilovanje dizalice nastavlja, i vrednosti napona u nosećoj konstrukciji [illegible] vreme nestacionarnog kretanja [3]. Na sl.3. prikazana je promena koordinate [illegible] intervalu vremena. Koordinata $q_1$ prikazuje oscilovanje vrha strele, i [illegible]

$_0)\cdot\dot{q}_1^2+m_2\cdot\dot{q}_2^2+m_3\cdot\dot{q}_3^2+(m_1+m_2+m_3+m_4+m_7+m_8+m_{10})\cdot\dot{q}_4^2+$

$+m_7\cdot\dot{q}_7^2+m_8\cdot\dot{q}_8^2+(m_9+m_{10})\cdot\dot{q}_9^2+m_{10}\cdot\dot{q}_{10}^2+m_{10}\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}^2+$ (5),[3]

$-\dot{q}_1\cdot\dot{q}_9-\dot{q}_9\cdot\dot{q}_{10}+l\cdot\dot{q}_4\cdot\dot{\varphi}))$

ıa energija sistema sastoji se iz tri komponente, i to potencijalne energije strukture oscilovanje, užeta i tereta, i predstavljena je izrazom (6) koji je dobijen posle ıacije razvijanjem funkcija u red sa tačnošću do malih veličina drugog reda.

$^T+\frac{1}{2}c_u\cdot(q_{10}+f_{st})^2+m_{10}\cdot g\cdot(l\cdot\frac{\varphi^2}{2}-q_1+q_9-q_{10}+\frac{1}{2H}\cdot q_4^2)$ (6), [4],

$q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8\}$ - vektor generalisanih koordinata, a $[C]=[\beta_{ij}]_{8x8}$ - matrica ıh koeficijenata.

ıostupajući prema izrazu (4), dobija se sistem linearnih nehomogenih diferencijalnih ıda sa konstantnim koeficijentima (7).

$_0\ddot{q}_9+m_{10}\ddot{q}_{10}+\beta_{11}q_1+\beta_{12}q_2+\beta_{13}q_3+\beta_{14}q_4+\beta_{15}q_5+$

$_8-m_{10}g=0,$

$_2+\beta_{23}q_3+\beta_{24}q_4+\beta_{25}q_5+\beta_{26}q_6+\beta_{27}q_7+\beta_{28}q_8=0,$

$_2+\beta_{33}q_3+\beta_{34}q_4+\beta_{35}q_5+\beta_{36}q_6+\beta_{37}q_7+\beta_{38}q_8=0,$

$+m_7+m_8+m_{10})\cdot\ddot{q}_4+m_{10}\cdot l\cdot\ddot{\varphi}+\beta_{41}q_1+\beta_{42}q_2+$

$)\cdot q_4+\beta_{45}q_5+\beta_{46}q_6+\beta_{47}q_7+\beta_{48}q_8=0,$

$_2+\beta_{53}q_3+\beta_{54}q_4+\beta_{55}q_5+\beta_{56}q_6+\beta_{57}q_7+\beta_{58}q_8=0,$

$_3+\beta_{63}q_3+\beta_{64}q_4+\beta_{65}q_5+\beta_{66}q_6+\beta_{67}q_7+\beta_{68}q_8=0,$

$_2+\beta_{73}q_3+\beta_{74}q_4+\beta_{75}q_5+\beta_{76}q_6+\beta_{77}q_7+\beta_{78}q_8=0,$

$_2+\beta_{83}q_3+\beta_{84}q_4+\beta_{85}q_5+\beta_{86}q_6+\beta_{87}q_7+\beta_{88}q_8=0,$

$)\cdot\ddot{q}_9-m_{10}\ddot{q}_{10}+m_{10}g=F_p,$ (7), [1]

$_0\ddot{q}_{10}+c_u q_{10}=0,$

$\ddot{\varphi}+m_{10}\cdot g\cdot l\cdot\varphi=0.$

primenom simboličkog interpretera "MATHEMATICA"[7]

ıencijalnih jednačina (7) može se predstaviti u matričnom obliku (8):

$\}=\{Q\}$ (8),

ı inercije, [C] - matrica krutosti, $\{q\}$ - vektor generalisanih koordinata i $\{Q\}$ - vektor Na osnovu poznatih matrica [A] i [C], primenjujući programe [8] za sopstvene ıije (napisane za "MATHEMATICA" simbolički interpreter [7]), dobijaju se ı kružnih frekvencija: $\omega_1$= 0 s$^{-1}$; $\omega_2$= 0.4711 s$^{-1}$; $\omega_3$= 1.5238 s$^{-1}$; $\omega_4$= 3.8349 s$^{-1}$; $\omega_5$= 99 s$^{-1}$; $\omega_7$= 20.2964 s$^{-1}$; $\omega_8$= 25.1477 s$^{-1}$; $\omega_9$= 31.9312 s$^{-1}$; $\omega_{10}$= 61.6629 s$^{-1}$; $\omega_{11}$= 197.53 s$^{-1}$, ıca [S]. Uvođenjem vektora $\{\xi\}$ glavnih koordinata, linearnom transformacijom (9):

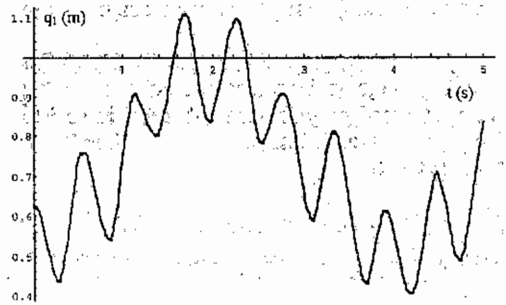
(9),

ıjalne jednačine u glavnim koordinatama (10):

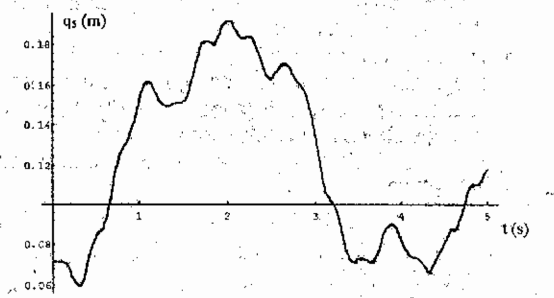
$\}=\{Q'\}$ (10),

$A]\cdot[S], [C']=[S]^T\cdot[C]\cdot[S], \{Q'\}=[S]^T\cdot\{Q\}$ (11).

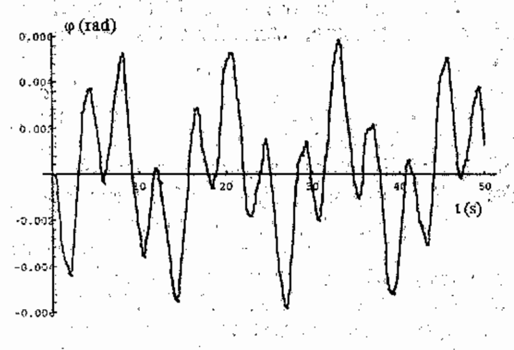
Obzirom na ortogonalnost glavnih oblika oscilovanja, matrice [A'] i [C'] su dijagonalne, tako da izraz (10) predstavlja 11 običnih nehomogenih diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njihovim rešavanjem, uz početne uslove: $\{\xi_0\}=[S]^{-1}\cdot\{q_0\}$, $\{\dot{\xi}_0\}=[S]^{-1}\cdot\{\dot{q}_0\}=0$, gde su $\{q_0\}$ i $\{\dot{q}_0\}$ početne vrednosti generalisanih koordinata i brzina, dobijaju se tačna analitička rešenja za glavne koordinate. Zamenom rešenja u (9) dobijaju se i tačna analitička rešenja generalisanih koordinata. Ovde treba napomenuti da se proces rešavanja morao sprovoditi u dve etape: za t∈[0,0.5] s, i t∈[0.5,5] s zbog različitih oblika funkcija $Q_9=Q_9(t)$. Neka od karakterističnih rešenja prikazana su na sl.2, 3, 4 i 5. Takođe, treba napomenuti da je najniža frekvencija jednaka nuli, što je uvek slučaj kada je [C] matrica semidefinitne kvadratne forme, i kao takva ne ispunjava uslove Silvester-ovog kriterijuma. Za razliku od ostalih, homogeni deo rešenja glavne koordinate $\xi_1$ nije harmonijska već linearna funkcija vremena. Međutim, analizirajući modalni vektor koji odgovara kružnoj frekvenciji $\omega_1=0$, vidi se da $\xi_1$ ulazi jedino u izraz za generalisanu koordinatu $q_9$, koja odgovara namotavanju užeta.



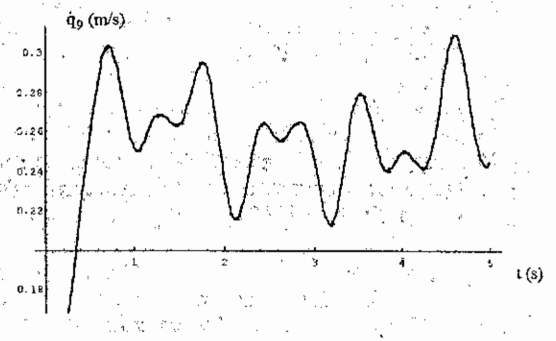

Slika 2.




Slika 3.




Slika 4.




Slika 5.

Na sl.2. prikazana je promena koordinate $q_1$ tokom unapred određenog vremenskog intervala od 5 s. Vreme nestacionarnog režima kretanja - ubrzanja mehanizma za dizanje tereta traje 0.5 s, a zatim se oscilovanje dizalice nastavlja, i vrednosti napona u nosećoj konstrukciji mogu biti veći nego za vreme nestacionarnog kretanja [3]. Na sl.3. prikazana je promena koordinate $q_5$ u posmatranom intervalu vremena. Koordinata $q_1$ prikazuje oscilovanje vrha strele, i njome se definiše ugib strele dizalice koji je jedan od najvažnijih parametara pri projektovanju dizalica. Veličina $q_5$ prikazuje oscilovanje stuba dizalice, i njena maksimalna vrednost ujedno pokazuje trenutak u kome se javlja maksimalna vrednost naponskog stanja u stubu dizalice, što je ujedno i maksimalna vrednost napona u nosećoj strukturi dizalice [3]. Na sl.4. prikazana je promena ugla otklona tereta, a na sl.5. promena brzine namotavanja užeta na doboš mehanizma za dizanje tereta. Sa sl.4. se može videti da je ugao otklona tereta veoma mali, pa je time opravdana pretpostavka o malim oscilacijama sistema.

## 4. Zaključak

U radu je prikazan način modeliranja noseće strukture građevinske stubne dizalice, formiran je dinamički i matematički model, i pokazan je način analitičkog rešavanja sistema nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Na osnovu brojnih vrednosti za konkretnu građevinsku stubnu dizalicu koje su preuzete iz [3], može se zaključiti sledeće:

- Kontinualno raspodeljena masa noseće strukture građevinske stubne dizalice svedena je na koncentrisane mase u granicama inženjerske tačnosti, a redukcija je izvedena za najopterećenije elemente noseće konstrukcije. Detaljan brojni primer koji potvrđuje ovaj zaključak nalazi se u [3].
- Aproksimativni izrazi za potencijalnu energiju tereta (detaljno razrađeno u [3]) određeni su striktno prema teoriji oscilacija, sa pretpostavkom da se zanemaruje pomeranje tačke A u vertikalnom pravcu. Ovaj postupak je moguće i dalje pojednostaviti zanemarivanjem člana $m_{10}$·g/H, čija je vrednost znatno manja od koeficijenta krutosti $\beta_{44}$ [3].
- Najveći uticaj na dinamička naprezanja noseće konstrukcije ove dizalice imaju inercijalne sile koje deluju u horizontalnom pravcu, što je pokazano i u [3,4], a eksperimentalno potvrđeno u [9]. Takođe, pokazuje se da najveći naponi nastaju u nižim delovima stuba građevinske stubne dizalice, i da oni i do 2.5 puta premašuju vrednosti napona u istim elementima dobijenim prema opterećenju koje je definisano standardom.
- Analizu diferencijalnih jednačina malih oscilacija pogodnije je vršiti koristeći simboličko programiranje u odnosu na njihovo numeričko rešavanje koje je korišćeno pri rešavanju istog sistema diferencijalnih jednačina u [3]. Numeričkom integracijom jednačina (8) dobijaju se ista rešenja, ali u njima ostaju skrivene vrednosti veličina koje karakterišu linearne oscilacije, kao što su sopstvene kružne frekvencije, modalni vektori i modalna matrica.

## 5. Literatura


[1] Коган, И. Я.: Строительные башенные краны, 3-е изд, Машиностроение, Москва, 1971.

[2] Невзоров, Л. А., Зарецкий, А. А., Волин, Л. М., и други: Башенные краны, Машиностроение, Москва, 1979.

[3] Brkić,A.: Prilog identifikaciji dinamičkog ponašanja građevinske stubne dizalice u režimu rada mehanizma za dizanje tereta, magistarska teza, Mašinski fakultet Beograd, Beograd, 1996.

[4] Ostrić,D., Brkić,A, Zrnić,N.: Supplement for research on the influence of height and speed of hoisting the load on dynamic behaviour of a tower crane structure, International Conference on MTM' 97, China, 1997 (rad prihvaćen za objavljivanje).

[5] Ostrić, D.: Dizalice, Mašinski fakultet Beograd, Beograd, 1992.

[6] Setto, W.: Theory and Problems of Mechanical Vibrations, Schaum publishing Co., New York, 1964.

[7] Volfram,S.: Matehematica, Adison - Vesli, Redvud Siti, Kalifornija, 1988.

[8] Obradović,A., Marković,S.: Zbirka zadataka iz Teorije oscilacija, Narodna knjiga, Beograd, 1996.

[9] Kogan, J.: Die praktische Berechnung der dynamischen Belastungen beim Lasthub, Fördern und Heben, No.4, pp.337-342, 1980.



ЈДМ
YUSM

ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ЗА МЕХАНИКУ 11000 - БЕОГРАД
Кнеза Милоша 9/1; Тел.: (+381 11) 342 273
YUGOSLAV SOCIETY OF MECHANICS, 11000 - BELGRADE
Kneza Miloša 9/1; Tel.: (+381 11) 342 273

ЈУМЕХ '97 XXII ЈУГОСЛОВЕНСКИ КОНГРЕС ТЕОРИЈСКЕ И ПРИМЕЊЕНЕ МЕХАНИКЕ, ВРЊАЧКА
YUCTAM'97 XXII YUGOSLAV CONGRESS OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, JUNE 2-7, 1997, VRNJAČKA BANJA


# KRITIČNA SILA IZVIJANJA TELESKOPSKE STRELE AUTO


Dr Ratko Šelmić, redovni profesor
Saobraćajni fakultet, Beograd


# CRITICAL FORCE OF TRUCK CRANE TELESCOPIC BOOM


Prof. dr Ratko Šelmić
Faculty of Transport and Traffic Engineering, University of Belgrade



***Summary***

*First, in this paper mechanical model of truck crane telescopic boom is [illegible] purpose of static stability analysis - defining of critical force of telescopic boom [illegible] of professional literature, and also in published author's works, truck crane telescopic [illegible] is a beam of unstable cross section, but the following important facts are not taken [illegible]*

*- segments (telescopes) get one into another, so in some areas of boom [illegible] double cross sections with enlarged mass exist,*

*- in the plane of smaller moment of inertia of telescopic boom cross section [illegible] the seizure of final rigidness.*

*That is the reason for introducing the concept of modulo as a part [illegible] with which the load is defined much more closely, bends, states, of tension. For the mechanical model defined in this way, composed of appropriate modulus, [illegible] equation of elastic line is being established. By application of appropriate [illegible] cross section and elastic seizure of the boom are taken into account, so the [illegible] form of determinant of the tenth order is achieved.*