

UNIVERSITE DU QUEBEC A TROIS-RIVIERES

Analyse comparative des méthodes de contrôle pour les systèmes sous actionnés

MEMOIRE PRESENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA
MAITRISE EN GENIE ELECTRIQUE

PAR
MOUTTAKI AYYOUB
AOUT 2022

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

MAITRISE EN GENIE ELECTRIQUE (M. Sc. A.)

Direction de recherche :

Prof. Alben Cardenas

Prénom Nom

directeur de recherche

Prof. Messaoud Ahmed Ouameur

Prénom Nom

codirecteur de recherche

Jury d'évaluation

Prof. Messaoud Ahmed Ouameur

Codirecteur, Évaluateur

Prénom Nom

Fonction du membre de jury

Prof. Mamadou Lamine Doumbia

Évaluateur

Prénom Nom

Fonction du membre de jury

Prof. Afef Ben Abdelghani Bennani

Évaluatrice externe

Prénom Nom

Fonction du membre de jury

Résumé

Les robots d'aujourd'hui sont encore trop conservateurs et n'effectuent qu'une fraction des tâches en utilisant des systèmes de contrôle qui tentent de maintenir une autorité de contrôle totale à tout moment. Pour que le robot ait plus de liberté de mouvement, de nombreuses recherches ont donc été menées. Parmi les sujets intéressants en robotique, nous pouvons citer le pendule inversé. Particulièrement, le pendule inversé avec chariot, reste un sujet important à analyser étant donné la nature non linéaire et instable de sa dynamique.

Le pendule inversé sur chariot est un problème classique de la dynamique et de la théorie du contrôle. Celui-ci est largement utilisé comme système fondamental dans le but de tester les algorithmes de contrôle émergents. Malgré la structure simple adaptée au développement de la réalisation en temps réel, l'étude de la stabilité du pendule inversé sera souvent utilisée comme point de départ du problème de la théorie de contrôle. Cet intérêt s'explique en raison des caractéristiques dynamiques, dont l'instabilité, la non-linéarité, les retards, les bifurcations, le chaos, les oscillations, les cycles limites et les incertitudes.

Le pendule inversé est connu comme non linéaire en raison de la nature de sa dynamique. C'est un système couplé très instable et sous actionné.

Quel que soit l'objectif : concevoir, simuler ou contrôler un système de pendule inversé, il est nécessaire d'avoir des modèles du mécanisme. En théorie, le mécanisme de fonctionnement est très clair : à la suite du retour du pendule de sa plus basse position à sa plus haute position, le tout nécessite une certaine stabilité du pendule. Afin de réaliser cette intention, le chariot se doit de détenir le pendule dans une position adéquate dans le but de conserver une position d'équilibre. Même si la construction du système peut sembler simple

pour beaucoup de gens, elle implique de nombreux défis. L'un de ces défis consiste à équilibrer le pendule inversé lorsque le chariot se déplace à une vitesse plus élevée.

L'objectif principal de ce projet est d'étudier, de mettre en œuvre et d'évaluer les méthodes de contrôle classiques et modernes pour le système composé d'un pendule inversé sur un chariot qui se déplace ; afin de trouver le contrôleur qui fonctionne le mieux avec notre système en termes d'effort, d'efficacité, de rendement et de finesse.

Le point de départ pour aborder notre sujet est le modèle mathématique du pendule inversé. Nous utilisons une maquette expérimentale de pendule inversé avec chariot fabriquée par l'entreprise de Quanser que nous simulons dans l'environnement MATLAB/Simulink.

Ce mémoire abordera donc l'état de l'art sur les systèmes sous actionnés, la théorie mathématique du modèle du pendule inversé et la définition des contrôleurs que nous pouvons utiliser pour sa stabilisation.

Des résultats de simulation et de tests expérimentaux ont permis de faire une comparaison des performances de trois contrôleurs ; soit les contrôleurs linéaires quadratiques (LQR), le régulateur proportionnel intégral dérivé (PID) et le contrôleur par logique floue (FLC). Cette étude comprend l'analyse théorique du système et l'évaluation de méthodes de contrôle sur une configuration réelle.

Les résultats de la simulation et des tests expérimentaux indiquent que chaque contrôleur a ses avantages et ses inconvénients.

En effet, les lois de commande utilisées dans ce type de système peuvent être adaptées et appliquées à différents cas. Par exemple : fauteuils roulants, bras industriels, applications aérospatiales, etc.

Remerciements

C'est avec grand plaisir que je remercie mon superviseur et professeur à l'Université du Québec à Trois-Rivières, au département de génie électrique et d'informatique, Prof. Alben Cardenas, pour son suivi et ses conseils pour me guider, mon Co-superviseur, Prof. Messaoud Ahmed Ouameur, les professeurs du département de génie électrique et génie informatique, le jury et bien sûr, l'Université du Québec à Trois-Rivières.

Je souhaite également remercier ma famille Khalid, Hamid, Souad, Abdellah Mouttaki, ma mère Khaddouj Cherqui et plus particulièrement mon frère Hakim Mouttaki pour toute l'aide financière et mentale qu'il m'a apportées tout au long de mes études.

Avant-propos

Mon cheminement académique à l'Université du Québec à Trois-Rivières m'a permis de développer une expérience importante dans plusieurs domaines du génie électrique et informatique telle que la programmation, le traitement de signal numérique (DSP) et la théorie du contrôle. Pour un projet de maîtrise en génie électrique, j'espérais intégrer des techniques de conception issues de plusieurs domaines pour créer un système. Comme mes intérêts actuels portent sur la théorie du contrôle, j'ai décidé d'étudier un système instable puis d'implémenter un contrôleur qui le stabiliserait en utilisant différentes techniques. La plupart de mes expériences en matière de contrôle ont consisté à simuler des modèles mathématiques à l'aide de MATLAB.

Table des matières

Résumé	1
Remerciements	3
Avant-propos	4
Table des matières	5
Liste des tableaux	8
Liste des figures	9
Liste des symboles	13
CHAPITRE 1 - INTRODUCTION	14
1. Contexte et problématique :	14
2. Objectifs :	14
3. Contribution de ce mémoire :	15
4. Méthodologie et organisation	16
CHAPITRE 2 - REVUE DE LA LITTÉRATURE	18

I. Systèmes sous actionnes :	18
II. Historique de la commande du système de pendule inversé	20
 CHAPITRE 3 - MODÉLISATION ET COMMANDE DU PENDULE INVERSÉ	 26
I. Introduction :	26
II. Modèle d'espace d'état :	30
III. Le modèle linéaire du pendule inversé (state-space) :	31
IV. Conception du contrôleur :	33
a) PID (proportionnel, intégral, dérivé)	33
b) LQR (régulateur linéaire quadratique)	34
c) Contrôleur par logique floue (FLC)	37
d) MPC - Contrôleur prédictif basé sur modèle	39
 CHAPITRE 4 - ANALYSE COMPARATIVE DE METHODES DE COMMANDE	 41
I. Étude du modèle théorique :	44
1. Représentation Simulink des deux équations du mouvement et de l'équation de la force	44
2. Régulateur linéaire quadratique avec l'utilisation de l'équation de la force	47
3. Régulateur linéaire quadratique sans l'utilisation de l'équation de force	49
4. Combinaison de deux contrôleurs par logique floue.	51
5. Combinaison du régulateur linéaire quadratique et le PID	52
6. Combinaison de deux contrôleurs PID	53
7. Régulateur linéaire quadratique en présence de bruit	54

8.	Combinaison de deux contrôleurs PID en présence de bruit :	56
9.	Combinaison de deux contrôleur par logique floue en présence de bruit	58
10.	Comparaison des différents contrôleurs :	59
II.	Implémentation et validation expérimentale :	62
1.	Comparaison entre le système non linéaire, linéaire et réel :	63
2.	Indices de performances :	66
CHAPITRE 5 - CONCLUSION.....		71
Références.....		73

Liste des tableaux

Tableau 1 :Techniques de contrôle pour la commande du pendule inversé	25
Tableau 2 : Paramètres et variables du pendule inversé [36].	27
Tableau 3 : Performance selon l'angle	61
Tableau 4 : Performances selon l'effort du contrôleur.....	67
Tableau 5 : Performances selon l'effort du contrôleur en présence d'un bruit	67
Tableau 6 : Performance selon la position.....	68
Tableau 7 : Performance selon la position en présence d'un bruit	68
Tableau 8 : Performance selon l'angle	68
Tableau 9 : Performance selon l'angle en présence d'un bruit	69

Liste des figures

Figure 1 : Pendule inversé sur un chariot [12].....	20
Figure 2 : Pendule inversé sur deux roues [27]	20
Figure 3 : Schéma d'un pendule forcé inversé.	22
Figure 4 : Systèmes de coordonnées pour le système d'une trottinette autoéquilibrée (Hoverboard en anglais) [29]	24
Figure 5 : Schéma de principe d'un pendule inversé	27
Figure 6 : Schéma du contrôleur PID	34
Figure 7 : Schéma du contrôleur LQR.....	35
Figure 8 : Structure du contrôleur flou	37
Figure 9 : Fonction d'appartenance de l'erreur et du taux d'erreur.	38
Figure 10 : Règles floues (en anglais : fuzzy rules).....	38
Figure 11 : Fonctions d'appartenance de la sortie de notre contrôleur FLC [outil de MATLAB]	39

Figure 12 : Mappage de pôles et zéros du modèle de pendule inversé sur chariot et réponses impulsionnelle et échelon du système.....	43
Figure 13 : Schéma Simulink du modèle - deux équations de mouvement (Entrée du système : tension appliquée au moteur).	46
Figure 14 : Diagramme schématique du modèle Simulink du pendule inversé utilisant le contrôleur LQR. (Entrée du système : tension appliquée au moteur).....	47
Figure 15 : Réponse de l'angle, de la position, de la vitesse angulaire et de la vitesse du chariot en utilisant la commande LQR. Modèle avec l'équation de force (Entrée du système : tension appliquée au moteur).	48
Figure 16: Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant le contrôleur LQR. (Entrée du système : force appliquée au chariot)	49
Figure 17 : Réponse de l'angle, de la position, de la vitesse angulaire et de la vitesse du chariot en utilisant le LQR. Modèle sans l'utilisation de la fonction de la force (Entrée du système : force appliquée au chariot).....	50
Figure 18 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant deux contrôleurs pour Contrôler la position et l'angle.	51
Figure 19 : Réponse de l'angle, de la position, de la vitesse angulaire et de la vitesse du chariot en utilisant la logique floue.....	51
Figure 20 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant LQR.	52

Figure 21 : Réponse du système en utilisant le LQR et PID	53
Figure 22 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant deux contrôleurs PID.	54
Figure 23 : Réponse du système en utilisant deux PID	54
Figure 24 : Diagramme schématique du modèle Simulink du pendule inversé utilisant LQR en présence d'un bruit	55
Figure 25 : La réponse du système en utilisant le contrôleur LQR avec l'utilisation de la fonction de la force en présence de bruit. (Entrée du système : tension appliquée au moteur).....	56
Figure 26 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant deux contrôleurs PID en présence d'un bruit.....	57
Figure 27 : La réponse du système en utilisant deux contrôleurs PID en présence de bruit.	57
Figure 28 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant deux contrôleurs par logique floue.	58
Figure 29 : La réponse du système en utilisant deux contrôleurs FLC en présence de bruit	58

Figure 30 : Comparaison de la réponse du système à une variation dans la consigne de position pour les différentes techniques (LQR+FLC, LQR, PID, LQR+PID, FLC+PID).	60
Figure 31 : Comparaison de la réponse du système en présence de bruit à une variation dans la consigne de position pour les différentes techniques (LQR+FLC, LQR, PID, LQR+PID, FLC).	62
Figure 32 : Réponses réelle, théorique et simulée de l'angle de modèle non linéaire et linéaire utilisant le contrôleur LQR	63
Figure 33 : Réponses réelle, théorique et simulée de l'angle de modèle non linéaire et linéaire utilisant le contrôleur PID.....	64
Figure 34 : Réponses réelle, théorique et simulée de l'angle de modèle non linéaire et linéaire utilisant le contrôleur FLC	64
Figure 35 : Pendule inversé simple monté sur une station de test Quanser IP02 [56].	65

Liste des symboles

PID : Régulateur proportionnel intégral dérivé

LQR : Régulateur linéaire quadratique

FLC : Contrôleur par logique floue

MPC : Contrôle prédictif basé sur modèle

LQG : Régulateur linéaire quadratique Gaussien

PI : Pendule inversé

IAE : Valeur absolue de l'erreur

ISE : Valeur carrée absolue de l'erreur

ITAE : Valeur absolue de l'erreur pondérée dans le temps

Chapitre 1 - Introduction

1. Contexte et problématique :

L'objet d'étude dans ce mémoire, soit le pendule inversé sur chariot, est intrinsèquement instable puisque la moindre perturbation entraînerait la chute du pendule. Ainsi, un système de contrôle est nécessaire afin de le maintenir équilibré. Un contrôleur idéal maintiendrait le pendule équilibré avec très peu de changement dans l'angle et peu de déplacement du chariot. Évidemment, des limitations seraient imposées en fonction des paramètres réels du système ainsi que de la méthode de mise en œuvre du contrôleur. La conception du contrôleur proche de l'idéal est, en effet, un problème de conception intéressant à étudier.

Un pendule inversé est une clé de lecture que chaque étudiant en robotique touche une fois. En effet, la stabilisation d'un système instable en boucle ouverte et sa mise en œuvre en temps réel sont la base de tous les problèmes théoriques de contrôle et de robotique. C'est aussi une bonne application pour aider à l'apprentissage de tout nouvel algorithme de contrôle. Dans ce scénario, le but de ce projet est de stabiliser le pendule inversé en utilisant différents contrôleurs, et de faire une comparaison des résultats pour dévoiler les avantages et les inconvénients de chaque contrôleur.

2. Objectifs :

Les objectifs de ce travail de recherche sont les suivants :

- Étudier les systèmes sous actionnés et particulièrement celui constitué par un pendule inversé sur chariot.
- Étudier, implémenter et simuler des contrôleurs permettant la stabilisation du système de pendule inversé sur chariot.
- Valider expérimentalement et réaliser une comparaison des performances obtenues avec chaque contrôleur.

3. Contribution de ce mémoire :

La première question venant à notre esprit se trouve à être la suivante : « Pourquoi acquérir la théorie du contrôle ? » et une deuxième serait « Comment son apprentissage nous aidera-t-il à découvrir de nouvelles réalisations dans notre monde et à rendre notre vie meilleure qu'elle ne l'est déjà ? ».

En quelque sorte, la théorie du contrôle peut être perçue comme la clé reliant les divers domaines de l'ingénierie. Cette théorie, comprenant les principes fondamentaux de contrôle, permet de résoudre aisément plusieurs problèmes d'ingénierie, et ce, non pas seulement que pour les ingénieurs en contrôle, mais pour tous les ingénieurs.

Que ce soit, par exemple, pour les ingénieurs électriciens, ils se doivent d'être capables de concevoir des régulateurs de tension à découpage se trouvant dans presque tous les appareils électriques, qui dépendent de la rétroaction et peuvent être instables s'ils sont mal conçus [1].

Tandis que pour l'ingénieur en télécommunications, il peut concevoir un circuit de commande automatique de gain, augmentant ainsi automatiquement le gain dans les signaux faibles et en diminuant tous les signaux forts [2].

De même que les ingénieurs civils pourraient construire un système d'amortissement actif ou passif pour les grands bâtiments et les zones sismiques [3] [4]. Et finalement, en ingénierie aérospatiale, une résolution de problème de flottement d'avion pourrait être envisagée [5][6]. Ces quelques exemples ne font que démontrer de l'importance de la théorie de contrôle dans ce domaine, permettant aux ingénieurs de réaliser de nouveaux accomplissements dans maintes disciplines et de surpasser plusieurs défis.

La contribution principale de ce travail de recherche est de réaliser une comparaison des techniques de contrôle appliquées au problème classique du pendule inversé sur chariot.

4. Méthodologie et organisation

Le développement de cette recherche a passé par plusieurs phases:

Revue de littérature : La première phase a consisté à réaliser une revue de la littérature scientifique sur le pendule inversé avec ses différentes applications, un point historique sera également attribué, les contrôleurs que nous utiliserons et dont nous parlerons dans les autres phases sont le contrôleur linéaire quadratique (LQR), le régulateur proportionnel intégral dérivé (PID) et le contrôleur par logique floue (FLC).

Simulation du pendule inversé sous Python : En raison de mon expérience en programmation, j'ai décidé de commencer en python afin de comprendre le système et la façon dont je peux le manipuler, une phase de modélisation et simulation sous Python a donc été réalisée. Cette partie a permis de bien comprendre le système avant de transformer les modèles pour utilisation avec MATLAB pour obtenir une compatibilité avec la plateforme de tests.

Simulation du pendule inversé sous MATLAB et validation expérimentale: Enfin, la dernière phase est consacrée à la modélisation du système de pendule inversé sous MATLAB

avec l'utilisation des trois contrôleurs mentionnés précédemment. Ceci a permis de faire la comparaison des résultats et des performances des contrôleurs en simulation et par voie expérimentale.

Le contenu de ce mémoire est structuré comme suit :

Une présentation de la revue de la littérature scientifique est faite dans le deuxième chapitre pour étudier plus en profondeur le problème du pendule inversé. Ceci permettra de présenter les règles de la théorie de contrôle et de mieux comprendre le problème classique du pendule inversé tout en présentant d'autres problèmes de contrôle.

Le troisième chapitre explique la première phase de modélisation, dans laquelle on réalise une présentation et une explication des équations de mouvement du système. Par la suite, cette partie présente également la transformation du modèle du système non linéaire vers un modèle linéaire sous la forme de représentation d'état (state-space). Après cela, le fonctionnement du modèle du système et le calcul des coefficients des contrôleurs PID, LQR, FLC et MPC sont présentés.

Le quatrième chapitre abordera les résultats des simulations sous MATLAB et des tests expérimentaux. La conclusion de ce chapitre présente une comparaison détaillée des performances des différents contrôleurs utilisant le même système.

Une conclusion est proposée comme dernier chapitre ainsi qu'une discussion sur les résultats obtenus, les travaux futurs et les améliorations à apporter pour développer des études futures.

Chapitre 2 - Revue de la littérature

I. Systèmes sous-actionnés :

Le pendule inversé est un problème de contrôle important que les chercheurs étudient dans le monde entier depuis plusieurs décennies.

D'un point de vue historique, le problème du pendule inversé a été exploité pour la première fois par les sismologues pour la conception d'un "sismomètre" en 1844 en Grande-Bretagne. Comme le système est intrinsèquement en équilibre instable lorsqu'il est monté sur un fil rigide, il peut détecter la moindre vibration [7].

Grâce aux diverses recherches dans le domaine de la robotique, la découverte d'un type de robot appelé "robot sous-actionné" a été possible [8][9].

À l'aide d'un contrôleur PID, une étude du pendule inversé a été réalisée en utilisant une trajectoire circulaire [10].

Un robot sous-actionné est un robot ayant moins d'actionneurs (entrées de commande) que de variables décrivant sa configuration (degrés de liberté) [11].

Certains robots ont inévitablement cette propriété tandis que d'autres sont spécifiquement conçus de cette manière. Citons par exemple un chariot à balancier inversé, une voiture, un robot qui marche et une main de robot sous-actionnée.

L'étude de la robotique sous-actionnée se concentre sur la construction de systèmes de

contrôle qui utilisent la dynamique naturelle des machines pour tenter d'atteindre des performances extraordinaires en termes de vitesse, d'efficacité ou de robustesse.

Le pendule inversé est connu comme un problème classique qui combine plusieurs domaines de recherche comme la robotique, le contrôle par ordinateur, la théorie du contrôle, etc., c'est un système non linéaire et instable. Ce qui le rend particulièrement intéressant à étudier.

Il est largement utilisé dans les laboratoires pour mettre en œuvre et valider de nouvelles idées dans l'ingénierie du contrôle, ce qui en fait un problème de contrôle classique. Ce problème est similaire à celui qui consiste à essayer d'équilibrer une personne sur une planche gyroskopique ou « hoverboard ». De nombreuses techniques sont proposées dans différents ouvrages pour stabiliser et équilibrer les systèmes de pendule inversé, comme le régulateur linéaire quadratique (LQR), le contrôleur par logique floue, le contrôleur neuronal flou, le contrôleur PID (Proportionnel-Intégral-Dérivé) ou l'utilisation de contrôleurs prédictifs non linéaires basés sur modèle.

La dynamique du pendule inversé ressemble à celle des lanceurs de missiles, des *pendubots*, *hoverboard*, ou le problème de l'équilibre d'un *segway*. Les Figures 1, 2 et 3 montrent respectivement des modèles de pendule inversé + chariot et de pendule inversé sur deux roues.

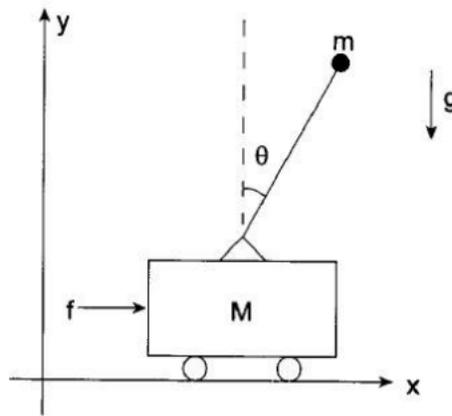


Figure 1 : Pendule inversé sur un chariot [12]

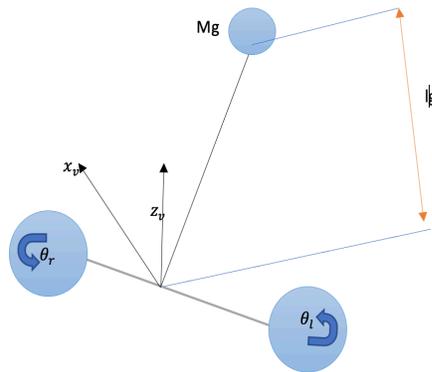


Figure 2 : Pendule inversé sur deux roues [27]

II. Historique de la commande du système de pendule inversé

La stabilité dynamique a été étudiée pour la première fois par Andrew Stephenson en 1908, qui a déterminé que la stabilité peut être encouragée par des oscillations périodiques et appliquées à un pendule avec un support vibrant rapidement, de sorte que le point de pivot vibre dans une direction verticale, de haut en bas et qui a établi en 1909 les conditions de stabilité pour le double et le triple pendule inversé [14].

En 1932, la chercheuse Edith Rita Lowenstern a été la première à développer les équations générales de mouvement pour les pendules inversés [15]. Mais pour avoir une

meilleure idée et plus d'explications sur le pendule inversé, c'est en 1960 que James Kerr Roberge a démontré une solution initiale au système de pendule inversé unique au MIT dans sa thèse intitulée "The Mechanical Seal" [16].

En 1963, Donald Higdon et Robert Cannon décrivent des systèmes de pendules inversés multiples et indépendants à l'Université de Stanford [17].

À la fin des années 60, le pendule inversé est devenu un système de plus en plus populaire, en partie parce que sa difficulté et son instabilité en faisaient un modèle classique, c'est-à-dire un défi de stabilisation, un problème de basculement vers le haut, et chaque chercheur a présenté un moyen de le contrôler [18 -25].

En 1996, les chercheurs Keigo Noguchi, Masaki Izutsu, Norihiro Kamamichi, Tetsuo Shiotsuki, Jun Ishikawa et Katsuhisa Furuta ont proposé un moyen de mettre en œuvre la loi de contrôle pour faire monter le pendule : leur contrôle est basé sur la méthode de Lyapunov [19]. Ils proposent une fonction de Lyapunov de l'énergie quadratique du pendule et montrent que la dérivée de l'énergie par rapport au temps diminue tant que la vitesse de l'angle polaire et le cosinus de l'angle polaire ne sont pas égaux à zéro : cela signifie que le pendule ne se balance vers le haut que lorsqu'il a une position initiale à la position basse.

Après avoir cherché dans de nombreuses bases de données, nous trouverons de nombreux articles de recherche, dont certains utilisent le même modèle.

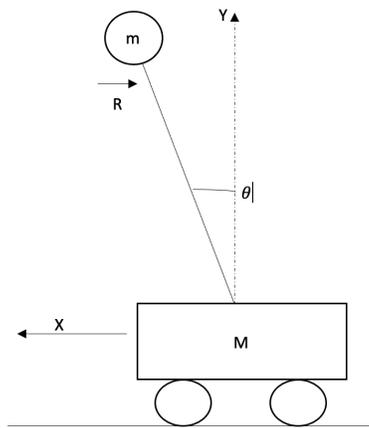


Figure 3 : Schéma d'un pendule forcé inversé.

En 2002 un excellent article intitulé « JOE : a mobile, inverted pendulum » a été présenté par quatre auteurs Felix Grasser, Silvio Colombi, Aldo d'Aririgo et Alfred Rufer [26]. Ils ont expliqué que le robot Joe n'était rien de plus qu'une idée de génie lorsqu'ils ont commencé le travail de simulation. L'idée était de construire un véhicule capable d'équilibrer son conducteur (lorsqu'il se penche en avant, le véhicule avance et vice versa).

Le système de contrôle utilisé pour garantir la stabilité du système est basé sur deux contrôleurs à espace d'état, interfacés via une unité de découplage aux deux moteurs à courant continu. Ils ont montré les performances du système, sa capacité à rejeter les perturbations de force et angulaires et sa capacité à suivre un pilote.

Le système est à trois degrés de liberté (DOF). En effet, cette idée était la clé pour inventer la machine *Segway* [54].

Il est essentiel de noter que la structure simple du modèle à pendule inversé permettant d'effectuer des validations expérimentales est l'une des principales motivations de l'utilisation de ce point de référence dans l'éducation et la recherche. De plus, personne ne niera que ce que SpaceX (<https://www.spacex.com/>) a fait en décembre 2015, en faisant

atterrir trois fusées sur terre et en mer ce qui était un chef-d'œuvre en ingénierie. SpaceX développe depuis plusieurs années des technologies visant à faciliter la reprise complète et rapide des lanceurs spatiaux. Si l'on se concentre sur la dynamique des systèmes, nous constaterons que la théorie de contrôle utilisée est similaire à celle de l'équilibrage du pendule inversé.

En 2012 le chercheur Goegoes Dwi a réalisé la conception d'un pendule inversé avec une trajectoire circulaire [19]. Dans cette étude, le pendule inversé a été conçu comme un pendule inversé circulaire ou rotatif pour éliminer la limite de longueur de la trajectoire contenue dans le pendule inversé avec la trajectoire transversale.

En 2016 Hasan Huseyin Bilgic, Muhammed Arif Sen, Mete Kalyoncu proposent un algorithme nommé "The Bees Algorithm" pour stabiliser le pendule inversé en utilisant le contrôleur LQR, étant une méthode de diversité pour optimiser un contrôleur. Le but de l'algorithme des abeilles est d'ajuster les paramètres du correcteur afin d'optimiser la réponse du système [20].

Au cours de la même année 2016, la chercheuse Emese Kennedy et le chercheur Hien Tran ont présenté un moyen pour monter le pendule inversé en utilisant son énergie, en se basant sur les travaux d'Astrom et Furuta et en utilisant la configuration actuelle de Quanser, ce qui leur a permis d'équilibrer le pendule inversé en 15 secondes [28].

Multiples alternatives sont divulguées dans la littérature dans le but de résoudre le problème classique du pendule inversé. D'autre part, les points de repère du pendule inversé sont utilisés pour illustrer presque toutes les idées novatrices des techniques de la théorie du contrôle.

La trottinette autoéquilibrée, comme le montre la Figure 4, a été une découverte fascinante et la majorité du monde pensait qu'il était impossible que celle-ci puisse soutenir quelqu'un : alors, qu'est-ce que cela signifie ? Une trottinette autoéquilibrée (également appelée hoverboard, planche autoéquilibrée) est un moyen de transport personnel autoéquilibré composé de deux roues motorisées reliées à une paire de patins articulés sur lesquels le conducteur place ses pieds. Le conducteur contrôle la vitesse en se penchant vers l'avant ou l'arrière et la direction du déplacement en tournant les patins.

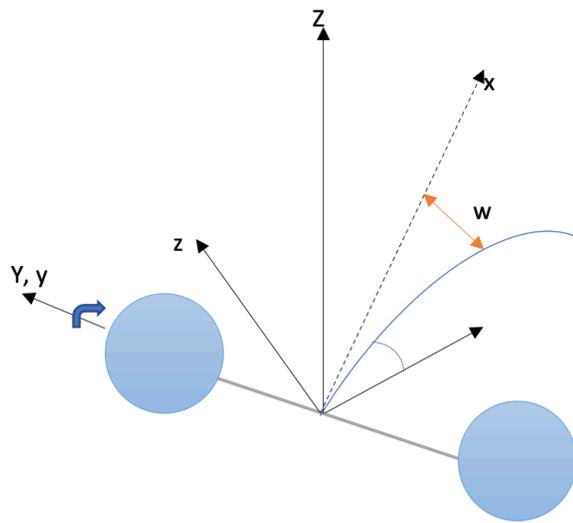


Figure 4 : Systèmes de coordonnées pour le système d'une trottinette autoéquilibrée (Hoverboard en anglais) [29]

En réalité, il est similaire à l'équilibre d'un pendule inversé sur un chariot, cet hoverboard utilise un contrôleur pour maintenir sa position, sa vitesse et éviter de tomber. Cependant, tout système a ses imperfections, car nous avons vu beaucoup de vidéos de gens qui tombent alors comment pouvons-nous le rendre plus parfait ?

La réponse est que nous effectuons toujours des recherches sur la théorie du contrôle.

Dans le Tableau 1, nous donnerons une source de recherche pour chaque contrôleur pour plus d'explications.

Tableau 1 : Techniques de contrôle pour la commande du pendule inversé

Technique de contrôle	Modèle mathématique	Référence
Réseau neural	Pendule inversé sur un chariot	[21]
La linéarisation de la rétroaction	Un pendule de roue d'inertie	[23]
Contrôle adaptatif	Pendule inversé à roues	[25]
MPC (Contrôleur prédictif basé sur modèle)	Pendule inversé sur un chariot	[30]
LQG (contrôle linéaire quadratique gaussien)	Pendule inversé sur un chariot	[35]
PID (proportionnel, intégral, dérivé)	Pendule inversé sur un chariot	[37]
Contrôleur par logique floue	Pendule inversé sur un chariot	[39]
LQR (Régulateur linéaire quadratique)	Pendule inversé sur un chariot	[40]
Contrôle basé sur l'énergie	Pendule Furuta	[54]

Conclusion :

Bien que la structure des systèmes pendulaires déjà présentée dans la littérature semble être assez simple, nous avons également parlé de son histoire et d'autres problèmes qui nous ont conduits à l'importance de notre problème. Le chapitre suivant parlera du modèle mathématique pour que nous puissions aborder notre problème afin de mieux comprendre sa dynamique.

Chapitre 3 - Modélisation et commande du pendule inversé

I. Introduction :

Afin d'étudier correctement le comportement dynamique du système non linéaire du pendule inversé, il est d'abord impératif de considérer la mécanique générale du système. Par la suite, il serait préférable de considérer le système par un modèle non linéaire dans le but d'offrir une meilleure compréhension. De cette manière, il sera possible d'étudier la linéarité du système.

Ayant comme objectif de rendre le tout plus concret, la Figure 5 représente le fonctionnement d'un pendule inversé. Tel qu'observé, le pivot du pendule est mesuré à l'aide d'un encodeur de pendule.

L'angle du pendule α est égal à zéro, uniquement lorsqu'il est parfaitement équilibré en position inversée. Alors que lorsqu'il est tourné dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, il augmente positivement. J_p est le moment d'inertie autour du centre de la masse, m_p est la masse du pendule. Lorsque l'on fait face au chariot, le déplacement linéaire positif du chariot est vers la droite.

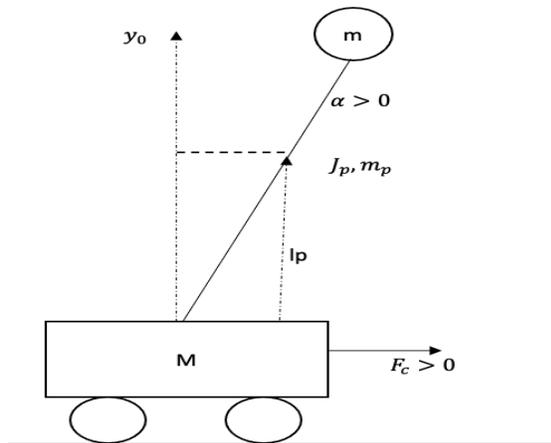


Figure 5 : Schéma de principe d'un pendule inversé

Le Tableau 2 représente chaque terme et la signification de l'abréviation avec leurs unités et les valeurs que nous avons utilisées pour les expériences.

Tableau 2 : Paramètres et variables du pendule inversé [36].

x_c	Position du chariot	m
\dot{x}_c	Vitesse du chariot	m/ s
\ddot{x}_c	Accélération du chariot	m/ s ²
F_c	Force linéaire appliquée au chariot par le servomoteur	N
V_m	Tension du servomoteur, entrée de commande	V
α	Angle du pendule	rad
$\dot{\alpha}$	Vitesse angulaire du pendule	rad/ s
$\ddot{\alpha}$	Accélération angulaire du pendule	rad/ s ²
g	Constante de gravité	9.81 m/ s ²
l_{p_l}	Distance entre le pivot et le centre de gravité du long pendule Pl	0.3302 m
l_{p_m}	Distance entre le pivot et le centre de gravité du moyen pendule Pm	0.1778 m
r_{mp}	Rayon de pignon du moteur	6.35×10^{-3} m
$B_{eq M_c}$	Coefficient d'amortissement visqueux équivalent vu sur le pignon du moteur	0.7485 Ns/m

$B_{eq M_w}$	Coefficient d'amortissement visqueux équivalent vu sur le pignon du moteur avec M_w	0.94 Ns/m
B_p	Coefficient d'amortissement visqueux vu sur l'axe du pendule	0.0024 Ns/rad
J_{eq}	Masse volumique de chariot $J_{eq} = M_c$	06731 kg
J_{p_l}	Moment d'inertie de PI en son centre	0.0079 kg. m^2
η_m	Efficacité du moteur	0.95
J_{p_m}	Moment d'inertie de Pm en son centre.	0.0012 kg. m^2
η_g	Efficacité de la boîte de vitesses	1.0
$V_{m_{max}}$	Saturation de la tension V_m	5V
R_m	Résistance d'induit du moteur	2.6 Ω
M_{p_m}	Masse de Pm	0.1270 kg
M_{p_l}	Masse de PI	0.2300 kg
M_w	Masse additionnelle déposée sur le chariot	0.37 kg
M_c	Masse du chariot avec 3 câbles connectés	0.54 kg
L_l	Longueur du rail	0.8 m
L_{p_m}	Longueur totale de Pm	0.3365 m
L_{p_l}	Longueur totale de PI	0.6413 m
K_t	Constante de couple du courant du moteur	7.68x kg. 10^{-3} Nm/A
K_m	Constante de force contre-électromotrice du moteur	7.68 x 10^{-3} Vs/ rad
K_g	Rapport d'engrenage	3.71

La présentation du système non linéaire du pendule inversé peut se faire à l'aide de deux équations de mouvement non linéaires :

L'équation (1) de mouvement correspond à celle de l'accélération du chariot et l'équation (2) à l'accélération angulaire du pendule [5].

$$\ddot{x}_c = \frac{1}{J_T}(-J_P + M_P l_p^2) B_{eq} \dot{x}_c - M_p l_p B_p \dot{\alpha} + M_p^2 l_p^2 g \dot{\alpha} + (J_P + M_P l_p^2) F_C. \quad (1)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J_T}(-M_P l_p B_{eq}) \dot{x}_c - (J_{eq} + M_P) B_p \dot{\alpha} + (J_{eq} + M_P) M_P l_p g \alpha + M_P l_p F_C \quad (2)$$

Les valeurs de J_T , J_{eq} de F_C sont calculées comme suit :

$$J_T = J_{eq} J_p + M_p J_p + J_{eq} M_p l_p^2 \quad (3)$$

$$J_{eq} = M_c + \frac{\eta_g K_g^2 J_m}{r_{mp}^2} \quad (4)$$

$$F_C = \left(\frac{\eta_g K_g K_t}{R_m r_{mp}} \right) \left(\frac{-K_g K_m \dot{x}_c}{r_{mp}} + \eta_m V_m \right) \quad (5)$$

Pour le modèle linéaire du pendule inversé, les variables d'état sont définies par :

$$X^T = [x_c \quad \alpha \quad \dot{x}_c \quad \dot{\alpha}]$$

Les variables d'état sont :

$$x_1 = x_c \quad x_2 = \alpha,$$

$$x_3 = \dot{x}_c \quad x_4 = \dot{\alpha}$$

Le modèle du système se présente alors comme suit :

$$x_c = x_1 \quad \alpha = x_2$$

$$\dot{x}_c = x_3 \quad \dot{\alpha} = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{J_T}(-J_P + M_P l_p^2) B_{eq} x_3 - M_p l_p B_p x_4 + M_p^2 l_p^2 g x_2 + (J_P + M_P l_p^2) u. \quad (6)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J_T}(-M_P l_p B_{eq}) x_3 - (J_{eq} + M_P) B_p x_4 + (J_{eq} + M_P) M_P l_p g x_2 + M_P l_p u \quad (7)$$

II. Modèle d'espace d'état :

Un modèle d'espace d'état permet la représentation de la dynamique d'un modèle d'ordre N comme une équation différentielle de premier ordre dans un vecteur $X(t)$ étant appelé l'état.

Le modèle linéaire du système dynamique en temps continu le plus général a la forme suivante :

$$\dot{X}(t) = A(t) * X(t) + B(t) * u(t)$$

$$Y(t) = C(t) * X(t) + D(t) * u(t)$$

Avec :

$t \in \mathbb{R}$ désigne le temps

$X(t)$: l'état (vecteur)

$Y(t)$: la sortie

$U(t)$: l'entrée ou la commande

$A(t)$: la matrice de dynamique

$B(t)$: la matrice d'entrée

$C(t)$: la matrice de sortie 'capteur'

$D(t)$: est la matrice de traversée.

Si les deux matrices A et B sont contrôlables, alors nous pouvons appliquer la méthode d'optimisation linéaire quadratique régulière pour trouver le gain de contrôle de rétroaction de notre système.

Nous avons souvent un ensemble de dynamique non linéaire donné par $\dot{X}(t) = F(x(t), u(t))$.

L'endroit où se situe X est le vecteur d'état, u est l'entrée et $F(.,.)$ est une fonction vectorielle non linéaire décrivant la dynamique du système.

III. Le modèle linéaire du pendule inversé (state-space) :

La forme linéaire de notre système peut être écrite comme ceci :

$$\dot{X}(t) = A(t) * X(t) + B(t) * u(t)$$

$$Y(t) = C(t) * X(t) + D(t) * u(t)$$

$$x_c = x_1 \qquad \alpha = x_2$$

$$\dot{x}_c = x_3 \qquad \dot{\alpha} = x_4$$

$$\dot{X}_1 = X_3 = f_1(x, u) \tag{8}$$

$$\dot{X}_2 = X_4 = f_2(x, u) \tag{9}$$

$$\dot{X}_3 = f_3(x, u) = \frac{1}{J_T} (- (J_P + M_P l_p^2) B_{eq} x_3 - M_P l_p B_p x_4 + M_P^2 l_p^2 g x_2 + (J_P + M_P l_p^2) u). \tag{10}$$

$$\dot{X}_4 = f_4(x, u) = \frac{1}{J_T} (- (M_P l_p B_{eq}) x_3 - (J_{eq} + M_P) B_p x_4 + (J_{eq} + M_P) M_P l_p g x_2 + M_P l_p u) \tag{11}$$

Calculons d'abord les matrices A, B, C, D à partir des équations 6 et 7 :

Après avoir trouvé les deux fonction de mouvement (8) et (9) et les fonction f1, f2, f3 et f4 , nous allons les analyser individuellement pour effectuer l'expansion de la série de Taylor afin d'obtenir les matrices A,B,C et D .

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

Nous avons l'équation (8) donc pour trouver la première colonne, nous allons faire l'expansion de Taylor. Il faut d'abord calculer la partielle de f_1 par rapport à x_1 ; x_1

n'apparaît pas réellement dans cette fonction donc elle est égale à 0, et par la suite la même chose pour f_1, f_3 et f_4

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0$$

x_2 n'apparaît pas dans la fonction f_1 et f_2 donc la dérivée égale à 0.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

f_3 est l'équation (10), donc la dérivée de f_3 par rapport a x_2 est :

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{1}{J_T} M_p^2 l_p^2 g$$

f_4 est l'équation (11), donc la dérivée de f_4 par rapport a x_2 est

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{1}{J_T} (J_P + M_P) M_P l_P g$$

Si on prend les équations (8) et (9) et on applique la dérivée par rapport a x_3 , on trouve :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0$$

Et idem pour le reste :

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{1}{J_T} (-(J_P + M_P l_p^2) B_{eq}) \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{1}{J_T} (-M_P l_P B_{eq})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = 1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{1}{J_T} (-M_P l_p B_p) \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{1}{J_T} (-(J_{eq} + M_P) B_p)$$

Finalement, la matrice A sera :

$$A = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & M_p^2 l_p^2 g & -(J_P + M_P l_p^2) B_{eq} & -M_p l_p B_p \\ 0 & (J_P + M_P) M_P l_p g & -M_P l_p B_{eq} & -(J_{eq} + M_P) B_p \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial u_1} = \frac{1}{J_T} (J_P + M_P l_p^2), \quad \frac{\partial f_4}{\partial u_1} = \frac{1}{J_T} (M_P l_p).$$

La matrice B sera :

$$B = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_P + M_P l_p^2 \\ M_P l_p \end{bmatrix} \quad (13)$$

Nous devons savoir que dans l'équation de sortie, on mesure seulement la position du chariot et l'angle du pendule, alors sur cette base, les matrices C et D seront

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14) \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

IV. Conception du contrôleur :

a) PID (proportionnel, intégral, dérivé)

Le contrôle PID se présente dans notre quotidien de plusieurs manières, par exemple, avec le régulateur de vitesse dans le véhicule. Une fois la vitesse désirée atteinte, le régulateur de vitesse sera réglé et va envoyer des signaux de sortie à l'accélérateur pour réguler la vitesse. Le capteur de vitesse fournit donc une rétroaction de boucle de contrôle afin d'indiquer au régulateur de vitesse si la voiture doit accélérer ou ralentir ou combien d'accélération en plus ou en moins doit être fournie. La Figure 6 montre le schéma d'un contrôleur PID.

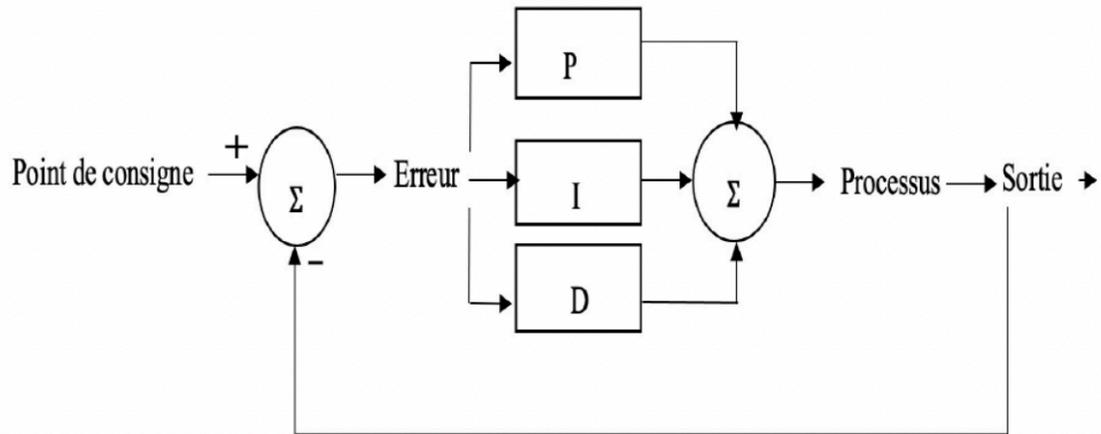


Figure 6 : Schéma du contrôleur PID

Les valeurs que nous avons utilisées pour notre contrôleur ont été trouvées en utilisant l'accordeur manuel offert par la boîte à outils de PID de MATLAB. Après avoir effectué quelques simulations, nous avons trouvé que ces valeurs donnent la meilleure réponse de notre système au niveau de la stabilité et du temps de réponse pour que le système soit stable.

Pour l'angle : $P= 10800, I=0, D= 0.0078$.

Pour la position : $P= -130 I=-1.7, D=-1000$.

b) LQR (régulateur linéaire quadratique)

Le problème du régulateur linéaire quadratique (LQR) est un type particulier de contrôle optimal qui traite des systèmes linéaires (en état et en contrôle) et de la minimisation de la fonction de coût étant quadratique. Logiquement, la méthode a été trouvée sur la base de la méthode de placer les pôles. L'ajustement du régulateur consiste à trouver le gain de rétroaction K optimal qui inclut la position, l'angle, la vitesse de l'angle et la vitesse de la position du système [20][33].

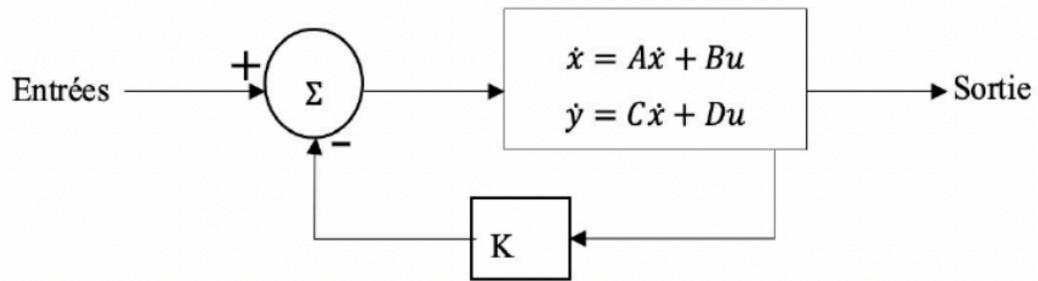


Figure 7 : Schéma du contrôleur LQR

La sélection des matrices de conception Q et R est faite souvent par essais erreur puisque peu de littérature a été produite. Cependant, il est toujours possible d'utiliser en premier lieu la règle de Bryson qui consiste à mettre 1 dans la diagonale de la matrice Q et de prendre R=1. Après il est possible de commencer à faire des tests et au fur et à mesure jusqu'à trouver les coefficients optimaux pour nos deux matrices Q et R [38].

Avec l'utilisation de notre modèle linéaire que nous avons obtenu dans (10), (11), (12) et (13), nous avons effectué quelques tests en nous basant sur les règles de Bryson [38]. Afin de trouver les coefficients optimaux, nous obtenons les matrices Q et R suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} 42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 420 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.10 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Et $R=0.04.$ (17)

Ces matrices nous permettent, dans un premier temps, d'obtenir une réponse stable et rapide.

q1, q2, q3 et q4 sont des coefficients de la matrice Q et R affectent le gain K de la manière suivante :

- La matrice R est typiquement le coût associé à l'effort de contrôle (par exemple, la dépense en carburant d'une voiture). Ainsi, R doit être définie positivement. L'augmentation des valeurs de la matrice R entraînera une diminution de l'entrée de contrôle, pour notre cas nous avons pris $R=0.04$
- L'augmentation de q_1 augmente l'importance relative de l'erreur de position du chariot, et donc augmente le gain proportionnel du chariot 'premier coefficient de notre gain K '. Cela accélère la réponse de la position du chariot, car cela diminue le temps de stabilisation. C'est-à-dire que nous aurons une réponse rapide pour la position de la matrice choisie, $q_1=42$.
- q_2 augmente le poids relatif de l'erreur d'angle du pendule en augmentant le gain proportionnel du pendule " deuxième coefficient de notre gain K ". Il faut noter que le gain du pendule q_2 doit avoir le plus grand poids puisque l'objectif principal du contrôleur est de garder le pendule équilibré dans la position inversée, nous avons choisi que $q_2=420$.
- L'augmentation de q_3 augmente la vitesse linéaire de la position du chariot, ce qui a peu d'effet sur le système. Le paramètre q_3 doit avoir très peu de poids puisque les spécifications doivent dépasser les exigences, pour notre cas nous avons pris $q_3=0.10$.
- L'augmentation de q_4 augmente la vitesse angulaire du pendule. Le paramètre q_4 doit également avoir un poids relativement faible puisque cette exigence n'est pas critique pour notre système. Cela étant, nous pouvons voir que les éléments q_1 et q_2 ont le plus grand effet sur la réponse.

c) Contrôleur par logique floue (FLC)

Les fonctions d'appartenance ont été introduites pour la première fois en 1965 par Lotfi A. Zadeh dans son premier article de recherche sur les ensembles flous [39][52]. Les fonctions d'appartenance contiennent toutes les informations d'un ensemble flou, que les éléments de cet ensemble soient discrets ou continus, et représentent le degré de vérité dans un système de logique floue.

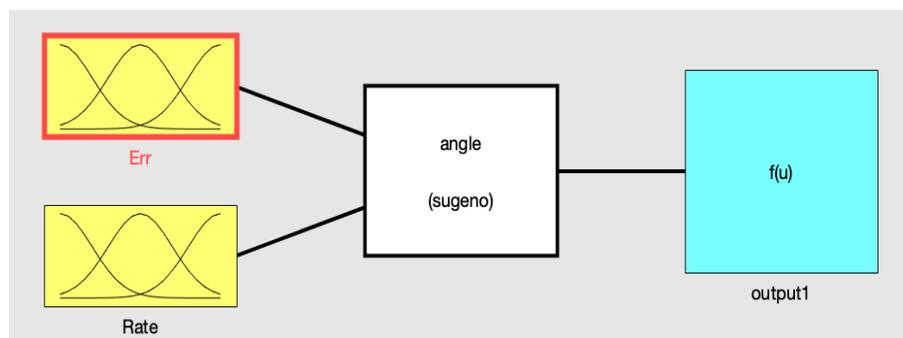


Figure 8 : Structure du contrôleur flou

Afin de concevoir nos deux contrôleurs à logique floue, nous devons assurer la stabilité et la précision de l'ensemble des systèmes de contrôle. Pour déterminer le contrôleur, nous nous basons sur les valeurs du contrôleur PD que nous avons ajusté précédemment (section PID) :

$$K_p=10800$$

$$K_i=0$$

$$K_d=0.0078.$$

Le contrôleur a deux entrées qui sont l'erreur (e) et le taux de changement de l'erreur (de). L'erreur est la différence entre la valeur de référence et mesure obtenue de la variable contrôlée alors que le taux d'erreur est la différence entre l'erreur au temps t et $(t-1)$.

Les entrées ont trois fonctions d'appartenance pour l'erreur qui seront Négative (N), Zéro (Z) et Positive (P). Le même type de fonction d'appartenance est défini pour le taux d'erreur.

Pour la sortie, nous avons pris la valeur de K_p et l'avons divisée par 2 et -2 . Nous aurons donc 5 fonctions d'appartenance avec des valeurs constantes :

$$-2 * K_p, -K_p, 0, K_p \text{ et } 2 * k_p.$$

Résultats de la sortie : Constantes : $-21600 = -2 * K_p$, $-10800 = -K_p$, 0 , $10800 = K_p$, $21600 = 2 * k_p$ et nous utiliserons la même démarche pour l'angle.

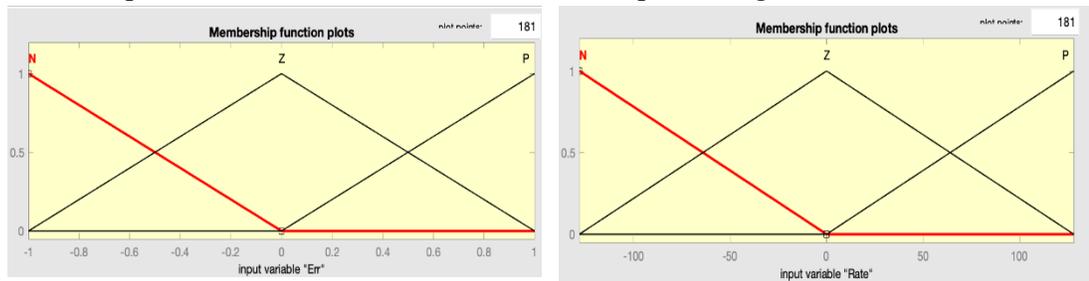


Figure 9 : Fonction d'appartenance de l'erreur et du taux d'erreur.

1. If (Err is N) and (Rate is N) then (output1 is NN) (1)
2. If (Err is N) and (Rate is Z) then (output1 is N) (1)
3. If (Err is N) and (Rate is P) then (output1 is Z) (1)
4. If (Err is Z) and (Rate is N) then (output1 is N) (1)
5. If (Err is Z) and (Rate is Z) then (output1 is Z) (1)
6. If (Err is Z) and (Rate is P) then (output1 is P) (1)
7. If (Err is P) and (Rate is N) then (output1 is Z) (1)
8. If (Err is P) and (Rate is Z) then (output1 is P) (1)
9. If (Err is P) and (Rate is P) then (output1 is PP) (1)

Figure 10 : Règles floues (en anglais : fuzzy rules)

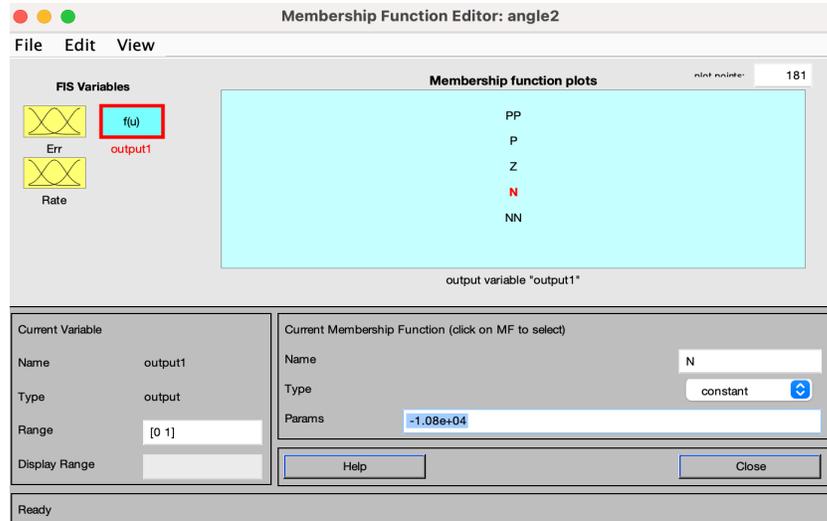


Figure 11 : Fonctions d'appartenance de la sortie de notre contrôleur FLC [outil de MATLAB]

d) MPC - Contrôleur prédictif basé sur modèle

La commande prédictive basée sur modèle (MPC) est également appelée commande à horizon mobile ou commande à horizon décroissant. Elle présente un principe de base visant à prédire le comportement futur du système contrôlé sur un horizon temporel fini puis à calculer une commande optimale. Sa portée assure en grande majorité la satisfaction de contraintes du système donnée puis minimise en outre une fonction de coût définie. En bref, la commande est calculée en procédant, à chaque instant d'échantillonnage, un problème de commande optimale en boucle ouverte à horizon fini. De prime abord, la première partie de la trajectoire d'entrée optimale résultante se voit être appliquée au système jusqu'au moment du prochain échantillonnage seulement : où le positionnement de l'horizon est déplacé et toute la procédure est répétée. Cette méthode se voit à être particulièrement efficace, notamment dû à sa capacité à incorporer explicitement des contraintes d'état et d'entrée ainsi qu'au critère de performance approprié dans la conception du contrôleur.

Conclusion :

Il existe de nombreuses façons de manipuler le comportement d'un système dynamique, et ces approches de contrôle peuvent être trouvées dans la littérature scientifique. Les contrôleurs les plus utilisés sont le LQR et le PID, nous avons donné dans ce chapitre une brève explication sur chaque contrôleur et la façon de l'utiliser. Le prochain chapitre nous verrons la façon dont nous les utiliserons dans notre système et nous donnerons une comparaison entre eux.

Chapitre 4 - Analyse comparative de méthodes de commande

I. Introduction

Il est primordial de bien saisir que donner un modèle mathématique d'un système et se voir demander de concevoir un contrôleur spécifique s'avère périlleux : bien qu'il soit possible de le faire lorsque celui-ci concerne le pendule inversé. Cependant, le problème se présente nébuleux puisqu'il peut y avoir plus qu'une bonne réponse. Il faut donc, en premier lieu, opter pour un point de départ clair et concis et y déterminer une méthode. Mais après avoir travaillé sur ce problème, nous pouvons dire qu'il n'y a jamais une seule bonne façon de résoudre un problème de système de contrôle, il y a beaucoup de différents types de contrôleurs qui produiront des résultats satisfaisants et il y a plusieurs façons de modéliser, de tester et d'implémenter ce contrôleur, et une bonne solution doit considérer la performance, la stabilité, le coût, et la puissance. Dans ce chapitre, nous décrirons notre approche et la méthode que nous avons suivie.

Le point de départ est de voir si le système est instable, et si nous pouvons le stabiliser.

Avant de commencer à étudier le comportement de notre contrôleur, nous devons commencer par trouver la fonction de transfert du système. Nous avons vu que le fonctionnement de notre système était décrit, de façon approximative, par les deux équations différentielles (8) et (9).

Afin de contrôler le pendule sur sa position verticale haute, le modèle (8)-(9) a été linéarisé autour de sa position d'équilibre.

Nous avons pris le système linéaire de l'équation $\dot{x} = Ax + Bu$ $x \in R^n$, x est un état vectoriel avec n composant. Alors que A est une matrice qui indique de quelle manière \dot{x} est une fonction de x . Le moyen entrepris est de sélectionner les valeurs propres et les vecteurs propres du modèle d'espace d'état à l'aide de la fonction pzmap (Graphique, pôle zéro du système dynamique). Nous avons pu tracer les pôles de notre système afin de voir s'il est stable ou non : en réalité l'objectif visé est d'observer ce que le système fait quand le temps va à l'infini ?

Le modèle d'espace d'état de notre système peut être converti en fonction de transfert à l'aide de la commande 'tf'. En revanche, le modèle de fonction de transfert peut être converti sous forme d'espace d'état à l'aide de la commande 'ss'.

La fonction de transfert du système en temps continu est :

$$G_1(s) = x(s)/u(s) = \frac{0.7775 s^2 + 0.01582 s - 21.34}{s^4 + 5.945 s^3 - 38.79 s^2 - 162.3 s} \quad (18)$$

$$G_2(s) = \theta(s)/u(s) = \frac{2,175 s - 8,991e-15}{s^3 + 5.945 s^2 - 38.79 s - 162.3} \quad (19)$$

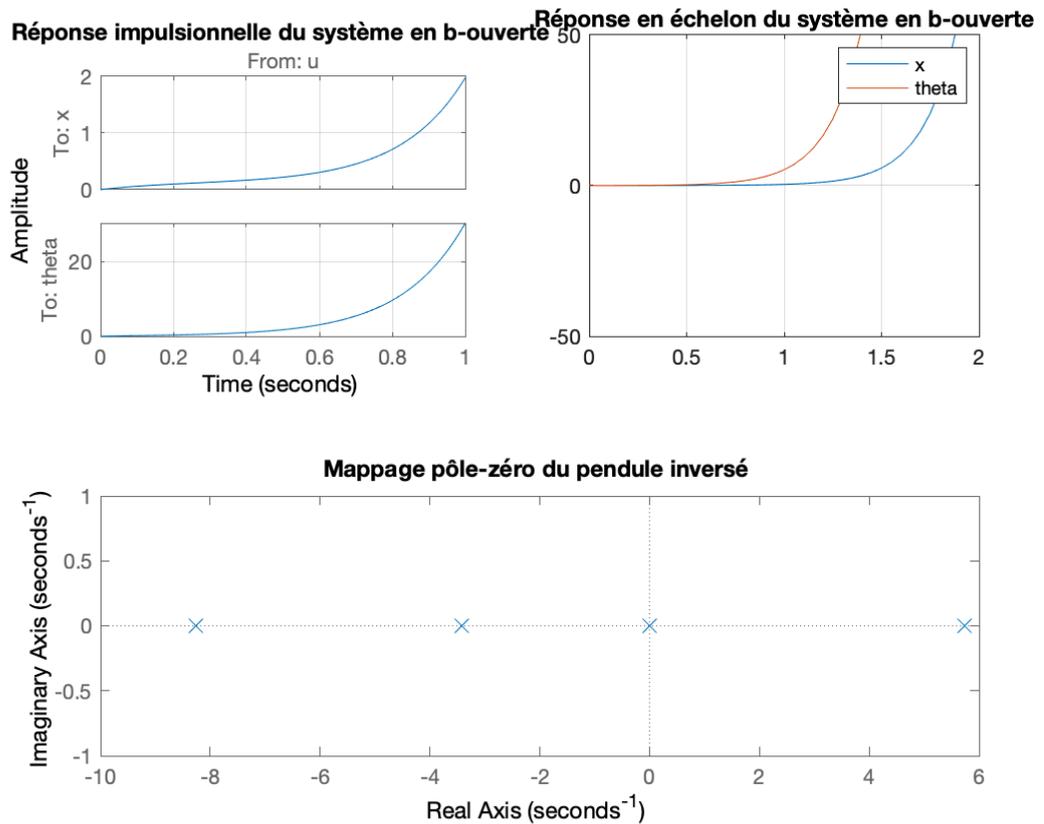


Figure 12 : Mappage de pôles et zéros du modèle de pendule inversé sur chariot et réponses impulsionnelle et échelon du système

Comme nous pouvons le voir dans la Figure 12, il y a un pôle dans le plan droit. Les pôles de la boucle ouverte sont -8.2620 , -3.4232 , 0 et 5.7401 . Pour équilibrer le pendule dans la position inversée, nous avons besoin d'un contrôleur qui déplace tous les pôles de la boucle fermée vers le plan gauche.

Après cela, nous verrons si le système est contrôlable et s'il est observable. À l'aide des fonctions `ctrb()` et `obsv()`, il est possible de réaliser que le tout est observable puisque nous avons trouvé que :

$$\text{La contrôlabilité} = 4$$

L'observabilité = 4

Puisque rang (observabilité) = 4 = n = rang complet le système est contrôlable et observable.

II. Étude du modèle théorique :

1. Représentation Simulink des deux équations du mouvement et de l'équation de la force

À partir des deux équations de mouvement (8), et (9) nous avons construit le schéma de simulation sous MATLAB/Simulink de l'assemblage présenté par la Figure 13.

Pour l'expérience théorique, nous pouvons utiliser uniquement l'entrée comme une force, mais pour l'implémentation en temps réel, nous devons la convertir en entrée de tension en utilisant l'équation suivante :

Nous pouvons introduire la relation tension-force sous la forme de l'équation (14)[56]

$$F_c = -\frac{\eta_g \eta_m K_g^2 K_t K_m \dot{x}_c}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t V_m}{R_m r_{mp}} \quad (14)$$

Cette forme nous permet de transformer le modèle afin de pouvoir l'utiliser pour le test expérimental où c'est la tension du moteur que nous pouvons imposer avec le contrôleur.

Afin de traduire l'accélération du pivot en une tension d'asservissement :

La relation force-accélération peut être introduite comme suit (15)[56]

$$V_m = \frac{F_c R_m r_{mp} u}{\eta_g \eta_m K_g K_t} + \frac{K_g K_m \dot{x}_c}{r_{mp}} \quad (15)$$

Avec F_c la force linéaire appliquée au chariot par le servomoteur

V_m : Tension d'induit du moteur

R_m : Résistance d'induit du moteur

r_{mp} : Rayon du pignon moteur

K_g : Rapport de transmission du réducteur planétaire

K_m : Constante de force contre-électromotrice du moteur

η_g : Rendement du réducteur vitesse planétaire

η_m : Rendement du moteur.

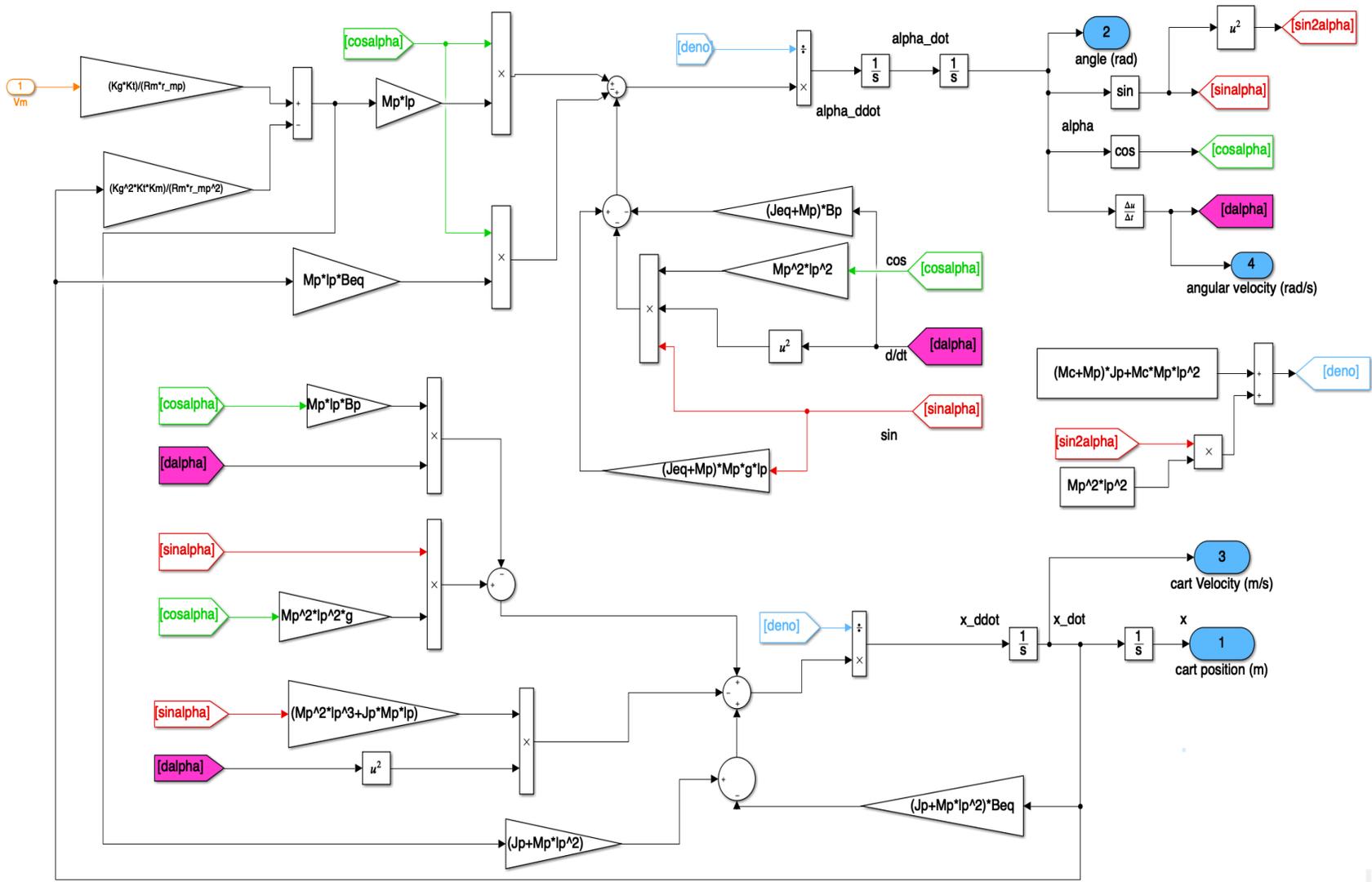


Figure 13 : Schéma Simulink du modèle - deux équations de mouvement (Entrée du système : tension appliquée au moteur).

2. Régulateur linéaire quadratique avec l'utilisation de l'équation de la force

La méthode LQR est une technique efficace pour concevoir des contrôleurs pour des systèmes complexes. Ceux-ci ont des exigences de performance strictes dans le but de minimiser la fonction de coût.

L'objectif principal du schéma LQR est d'attraper, dans un premier temps, le pendule et de le maintenir équilibré dans la position inversée. Dans la figure 14, nous avons utilisé le LQR afin de faire en sorte que le chariot linéaire suive un point de consigne de position désiré (un signal d'entrée en échelon) et en même temps, le contrôleur doit également minimiser l'effort de contrôle. L'objectif du contrôle optimal est de permettre le meilleur compromis entre la performance et le coût du contrôle. Pour l'entrée du sous-système (Figure 13) sera une tension V_m .

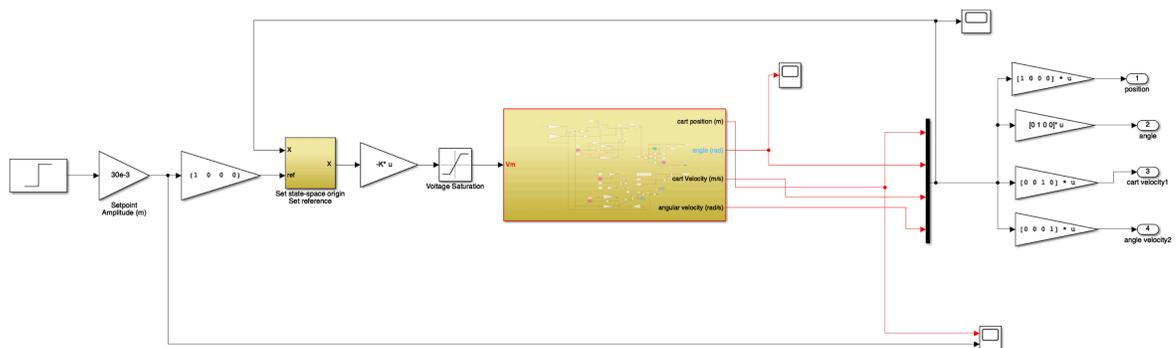


Figure 14 : Diagramme schématique du modèle Simulink du pendule inversé utilisant le contrôleur LQR. (Entrée du système : tension appliquée au moteur).

Par la suite, il sera possible d'observer, grâce à la Figure 15, les réponses obtenues en utilisant la commande LQR (Figure 14).

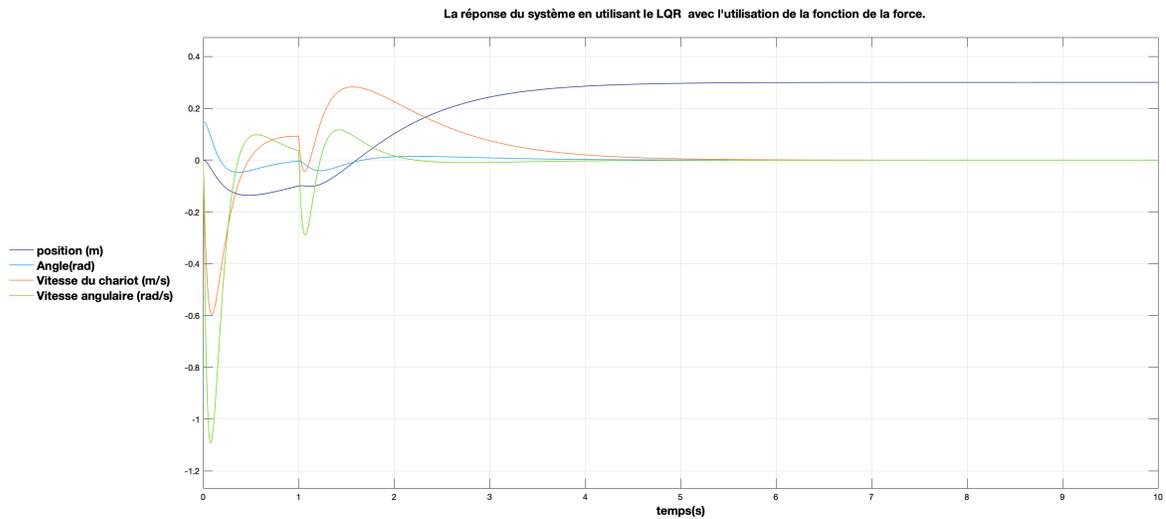


Figure 15 : Réponse de l'angle, de la position, de la vitesse angulaire et de la vitesse du chariot en utilisant la commande LQR. Modèle avec l'équation de force (Entrée du système : tension appliquée au moteur).

Maintes consignes doivent être suivies par notre contrôleur et utilisées dans tous les modèles proposés : doit stabiliser l'angle à 0 ; et pour la position, avoir un signal d'entrée en échelon d'une amplitude de 0.3m. Comme nous pouvons le voir dans la Figure 15, la réponse de la position (signal bleu foncé) et de l'angle (bleu turquoise) est très bonne, notre contrôleur stabilise la position après 4 secondes et l'angle après 1 seconde. Nous pouvons également voir qu'il a fallu moins que 1 seconde pour que le contrôleur commence à se comporter de manière fluide (aucune agressivité), si nous prenons comme référence que le temps de montée de la position du chariot doit être $t_r < 1.5s$ [56].

3. Régulateur linéaire quadratique sans l'utilisation de l'équation de force.

Dans la figure 16, nous avons utilisé le régulateur quadratique linéaire avec la force (sans la convertir vers tension) comme entrée du système F_c .

La différence entre la Figure 14 et la Figure 16 est que dans cette dernière, nous avons utilisé la force comme entrée de notre système et dans la première comme tension, mais les deux conceptions utilisent le contrôleur LQR.

L'avantage est que nous pouvons utiliser la première conception pour la validation expérimentale en temps réel.

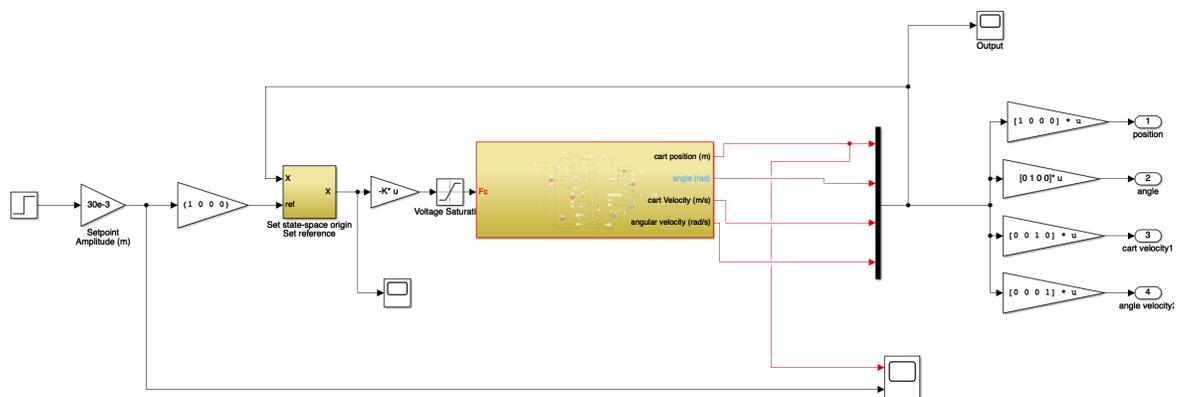


Figure 16: Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant le contrôleur LQR. (Entrée du système : force appliquée au chariot)

La figure 17 contiendra le résultat de la simulation de notre système utilisant le régulateur linéaire quadratique avec la force appliquée au chariot comme entrée du système.

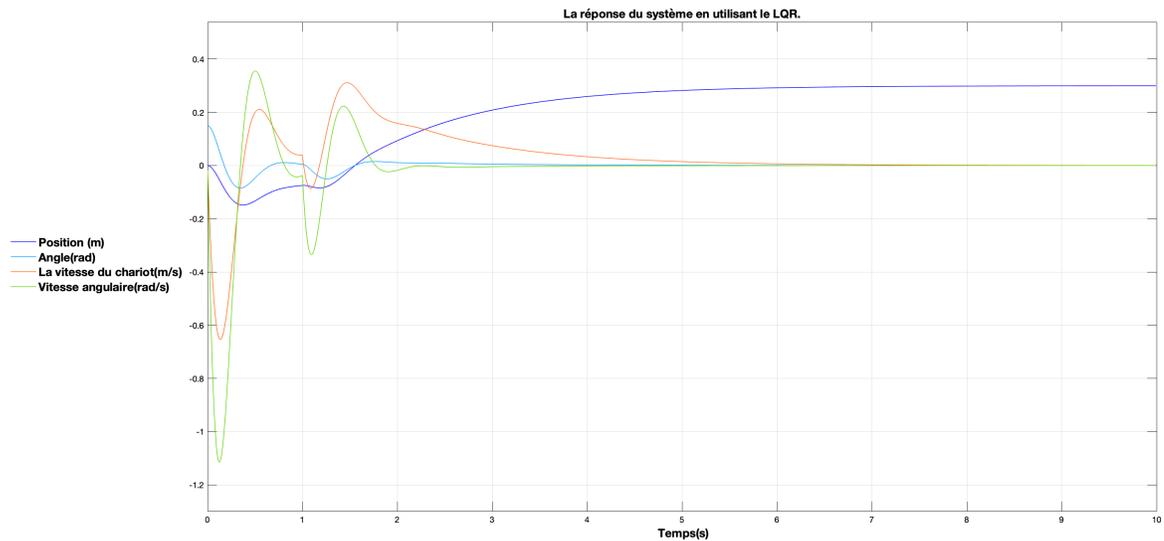


Figure 17 : Réponse de l'angle, de la position, de la vitesse angulaire et de la vitesse du chariot en utilisant le LQR. Modèle sans l'utilisation de la fonction de la force (Entrée du système : force appliquée au chariot).

Comme nous pouvons le voir, la réponse de la position et de l'angle est très bonne si nous prenons en considération le temps de stabilisation et la façon dont le contrôleur réagit et l'effort qu'il faut pour réaliser ce processus, notre contrôleur stabilise la position après 4.5 secondes et l'angle après 1.3 secondes avec un temps de montée des quatre réponses inférieures à 1 seconde.

Afin de comparer les deux figures (17) et (15), nous avons utilisé les mêmes consignes. Nous pouvons remarquer que la réponse que nous obtenons en utilisant la fonction de force (équation 15) est similaire à la Figure 14 (équation 14) où nous avons utilisé la force appliquée au chariot comme entrée du système. Ce qui signifie que pour l'expérience théorique nous pouvons travailler sans l'utiliser, mais pour l'implémentation en temps réel nous devons utiliser la tension.

4. Combinaison de deux contrôleurs par logique floue.

Dans la Figure 18, nous avons utilisé deux contrôleurs par logique floue. Le premier est employé pour contrôler l'angle et le deuxième pour la position. Nous avons fixé un point de consigne de position du chariot à onde carrée de 30 cm pour la position et de 0 rad pour l'angle.

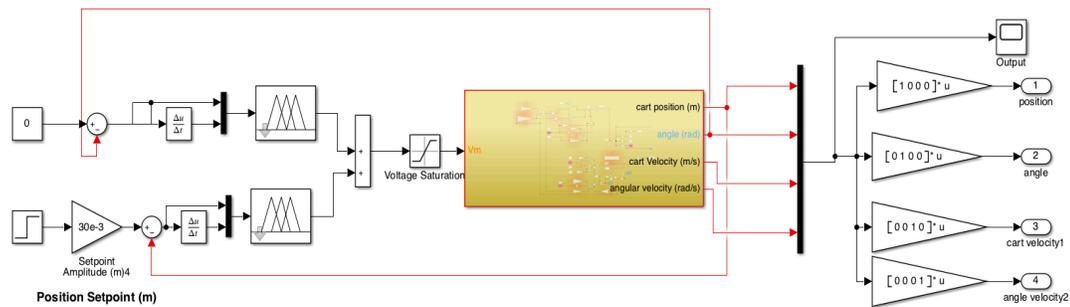


Figure 18 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant deux contrôleurs pour Contrôler la position et l'angle.

Après avoir effectué quelques tests en utilisant la conception de la Figure 18, la réponse du système est présentée dans la Figure 19.

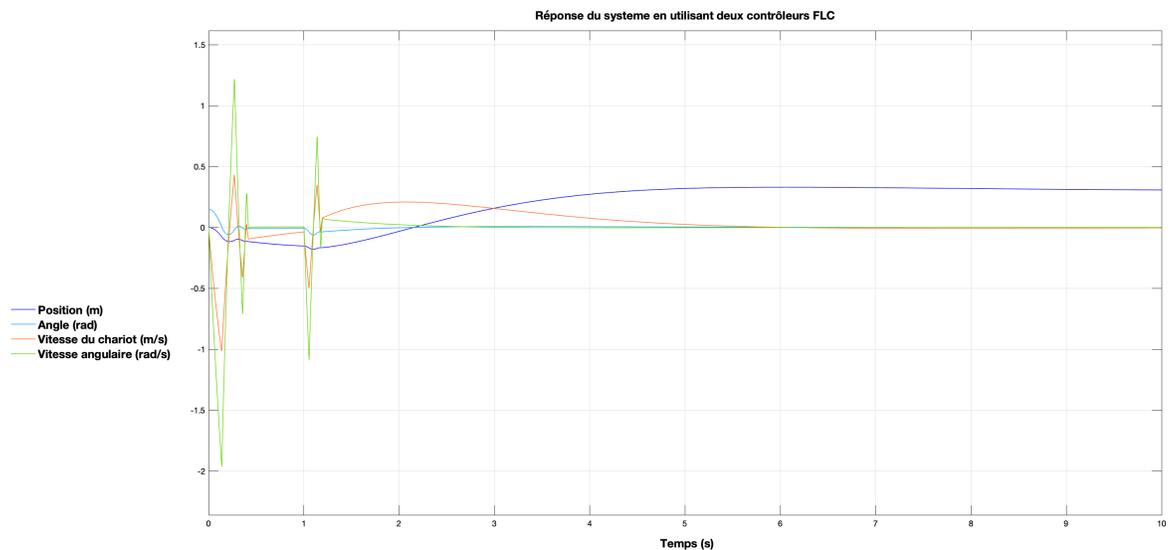


Figure 19 : Réponse de l'angle, de la position, de la vitesse angulaire et de la vitesse du chariot en utilisant la logique floue.

Nous pouvons voir que la réponse est un peu agressive (le contrôleur tente de stabiliser le système en peu de temps avec une vitesse élevée) par rapport à la vitesse de l'angle avec un pic de vitesse angulaire égal à -1.9 rad/s. Mais la réponse de l'angle est encore bonne, car nous pouvons voir qu'il ne faut que 0.3 s pour le stabiliser à 0 .

5. Combinaison du régulateur linéaire quadratique et le PID

La Figure 20 montre une combinaison de PID et LQR. Plus spécifiquement, un contrôleur PID et un LQR ont été utilisés dans cette conception afin de voir si nous pouvons améliorer le résultat de la stabilisation de l'angle. Le contrôleur LQR est utilisé pour la commande de position et le PID pour la stabilisation du pendule (angle).

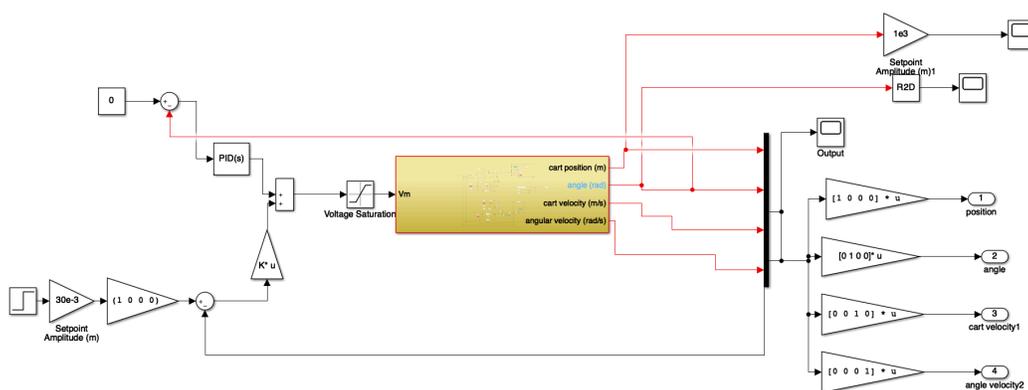


Figure 20 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant LQR.

Après avoir simulé notre système en utilisant LQR et PID, les résultats seront listés dans la Figure 21.

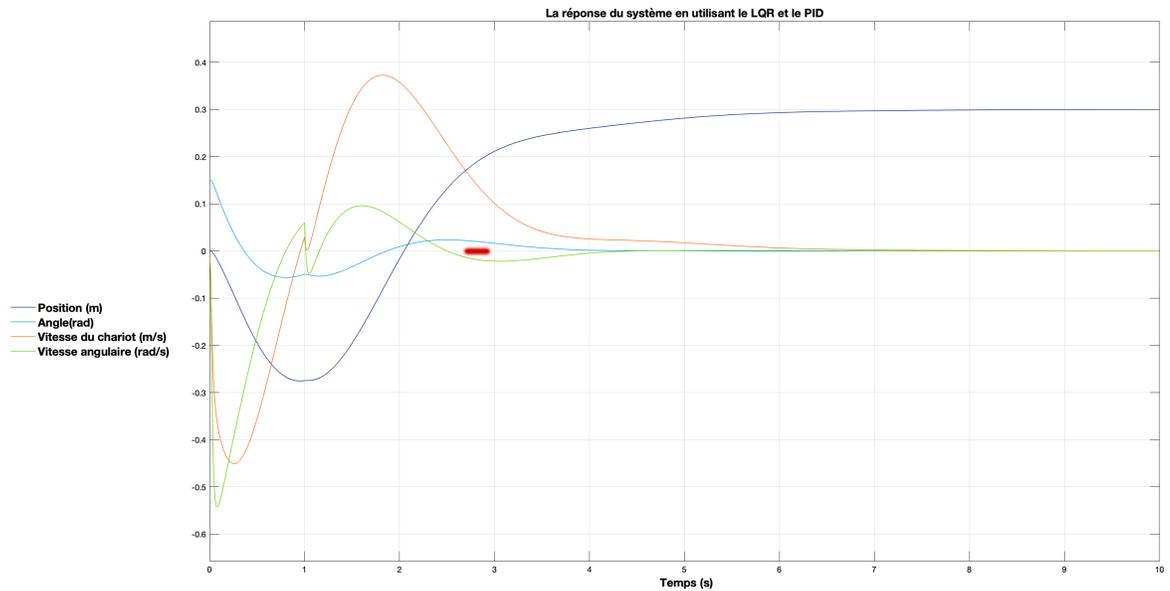


Figure 21 : Réponse du système en utilisant le LQR et PID

Comme nous pouvons le voir à l'aide de la Figure 21, nous avons obtenu une meilleure réponse de l'angle en utilisant la combinaison PID – LQR. Il faut moins de 3 secondes pour qu'il commence à stabiliser l'angle à 0 et on n'observe pas de changements brusques dans la vitesse angulaire.

6. Combinaison de deux contrôleurs PID

La Figure 22 montre une combinaison de deux contrôleurs PID utilisant le système non linéaire, le premier contrôleur pour contrôler l'angle et le deuxième pour la position.

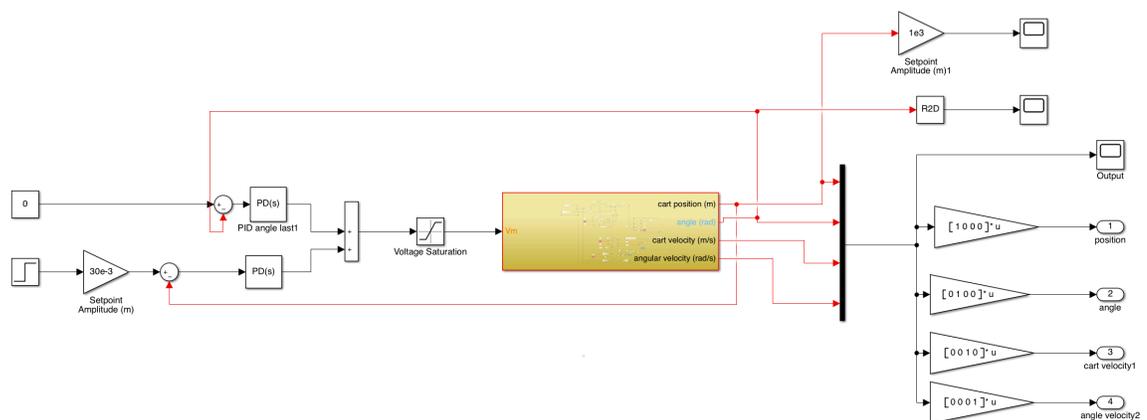


Figure 22 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant deux contrôleurs PID.

Après avoir exécuté la simulation de notre système en utilisant la combinaison de deux contrôleurs PID, l'un pour l'angle et le deuxième pour contrôler la position, les résultats seront présentés dans la Figure 23.

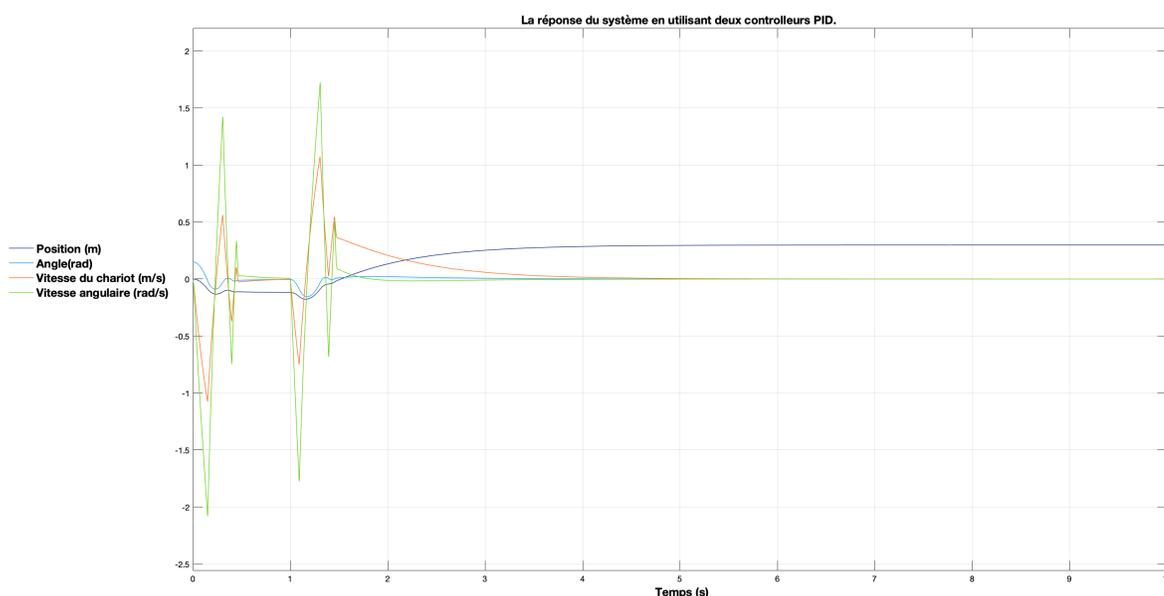


Figure 23 : Réponse du système en utilisant deux PID

Dans ce cas, nous avons décidé d'utiliser deux contrôleurs PID, un pour l'angle et le deuxième pour la position, comme nous pouvons le voir dans la Figure 23, les deux contrôleurs interagissent bien entre eux et nous donnent une réponse un peu plus agressive que le LQR mais la réponse est plus rapide pour la position, l'angle, vitesse du chariot et la position angulaire.

7. Régulateur linéaire quadratique en présence de bruit

À partir de cette section nous allons introduire un bruit blanc dans notre système pour étudier davantage nos contrôleurs (la capacité à rejeter les bruits, la stabilité ...). Le bruit est

ajouté à la commande pour simuler une perturbation externe (p.ex., une force ou une tension externe appliquée). Nous allons commencer par le premier contrôleur le régulateur linéaire quadratique avec une consigne de position du chariot à onde carrée de 30 cm. Comme l'indique la Figure 24.

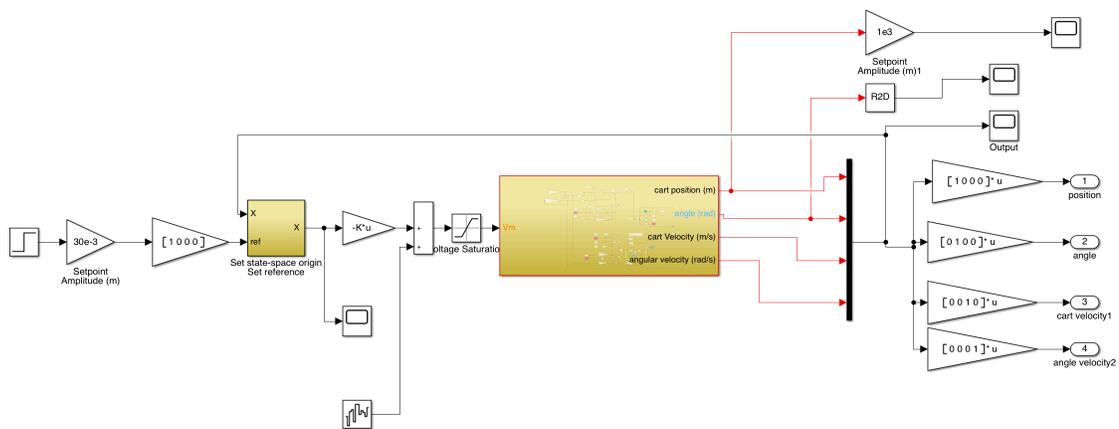


Figure 24 : Diagramme schématique du modèle Simulink du pendule inversé utilisant LQR en présence d'un bruit

Pour décider quel contrôleur a le plus de capacité à rejeter les perturbations, nous décidons d'introduire un bruit blanc ayant une puissance de charge de 0.2 dBW à l'entrée de notre contrôleur. En ce qui concerne le temps de corrélation du bruit, celui-ci est égal à 0.1.

Après avoir ajouté le bruit blanc dans notre conception, les résultats de la simulation sont indiqués dans la Figure 25.

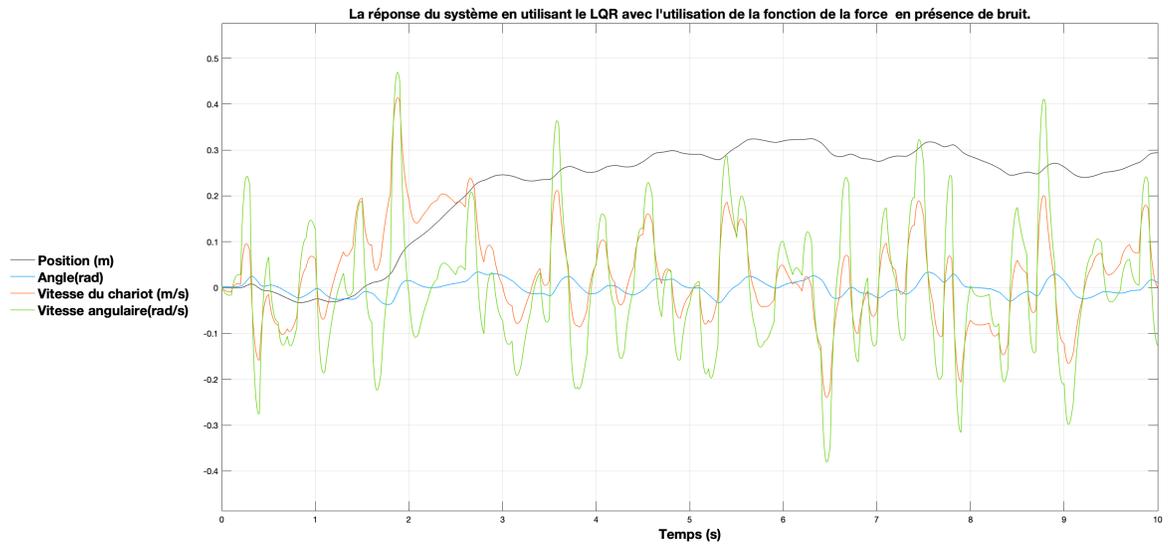


Figure 25 : La réponse du système en utilisant le contrôleur LQR avec l'utilisation de la fonction de la force en présence de bruit. (Entrée du système : tension appliquée au moteur)

Pour le contrôleur LQR, nous pouvons voir dans la figure 25 qu'il est capable de maintenir la stabilité malgré le bruit, cependant il y a toujours des tremblements.

Nous pouvons voir que la vitesse angulaire a de très grandes valeurs faisant en sorte que notre contrôleur dépense plus d'énergie pour stabiliser le pendule à 0.

8. Combinaison de deux contrôleurs PID en présence de bruit :

Comme nous pouvons le voir dans la Figure 26, nous utiliserons la combinaison de deux PID et nous y ajouterons un bruit blanc, pour étudier la capacité des contrôleurs PID à rejeter les perturbations.

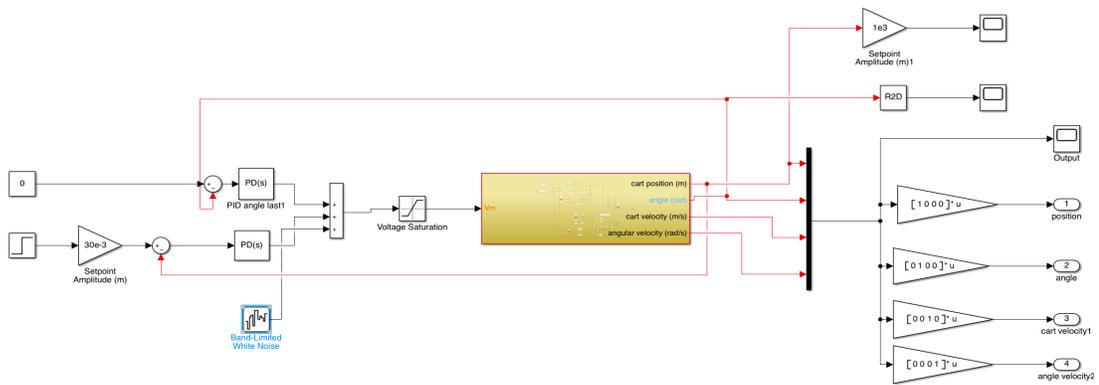


Figure 26 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant deux contrôleurs PID en présence d'un bruit.

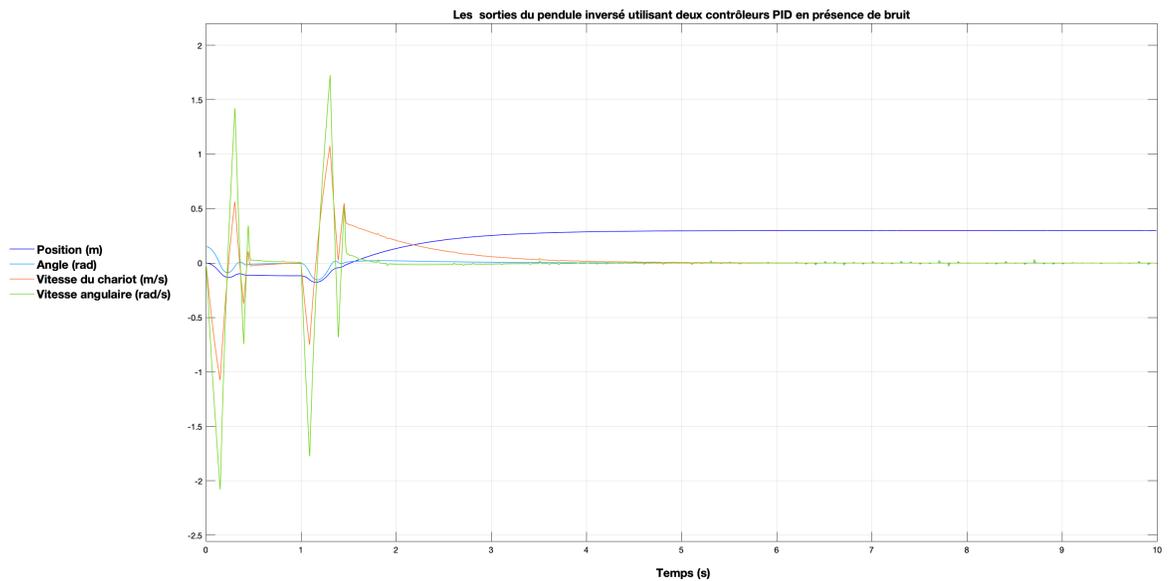


Figure 27 : La réponse du système en utilisant deux contrôleurs PID en présence de bruit.

Les mêmes caractéristiques de bruit ont été utilisées ici également pour l'entrée de notre contrôleur.

Si nous comparons la figure 27 et la figure 23, sachant que nous utilisons les mêmes consignes, on peut dire que la réponse reste très similaire à celle obtenue sans l'utilisation du

bruit. Nous pouvons donc dire en général que ce type de contrôleur répond bien à la présence de bruit blanc.

9. Combinaison de deux contrôleurs par logique floue en présence de bruit

La Figure 28 montre la conception utilisant deux contrôleurs par logique floue avec l'ajout de bruit blanc, pour étudier davantage le contrôleur (la capacité des contrôleurs PID à rejeter la distorsion, la stabilité de notre sortie, l'effort du contrôleur...).

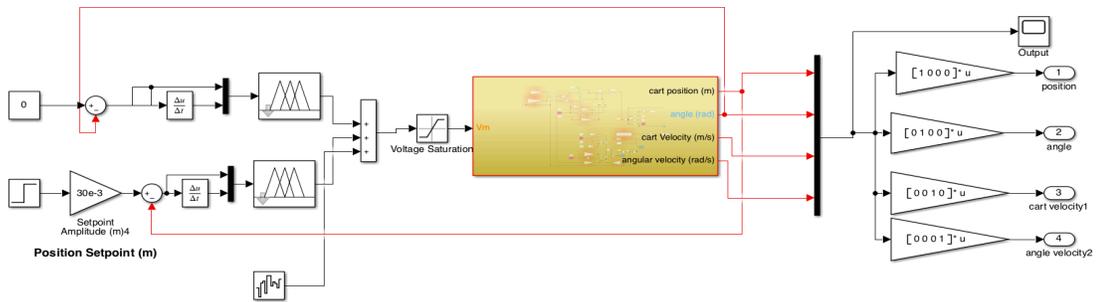


Figure 28 : Le diagramme schématique Modèle Simulink du pendule inversé utilisant deux contrôleurs par logique floue.

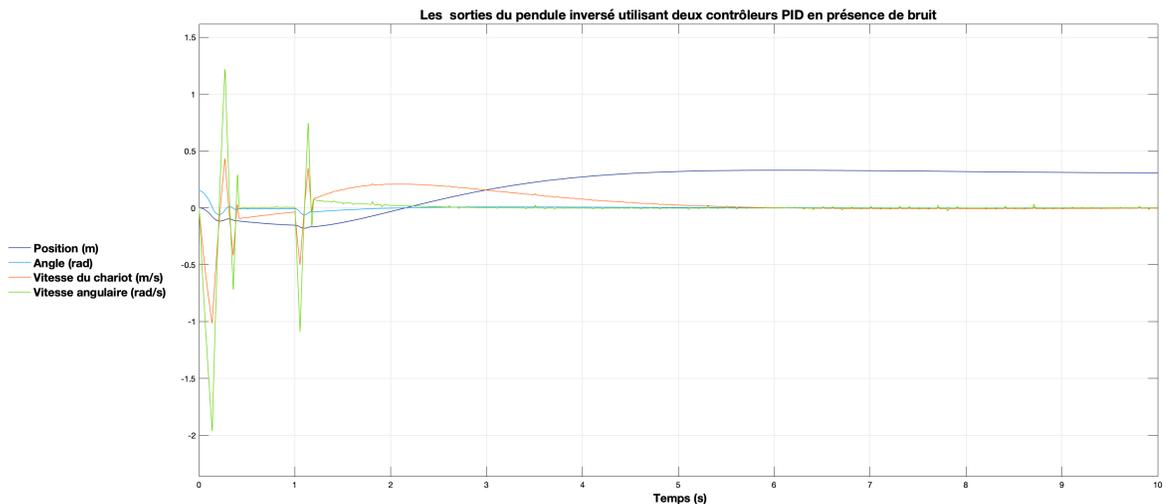


Figure 29 : La réponse du système en utilisant deux contrôleurs FLC en présence de bruit

Le même bruit a été utilisé ici aussi pour le contrôleur FLC. Si nous comparons le résultat de la Figure 29 avec celui de la Figure 19 où nous n'avions pas ajouté le bruit blanc, nous pouvons voir que la réponse du système reste similaire à celle obtenue sans l'ajout du bruit. En général les contrôleurs FLC et PID répondent bien face aux perturbations, a noté que on a utilisé les mêmes consignes.

10. Comparaison des différents contrôleurs :

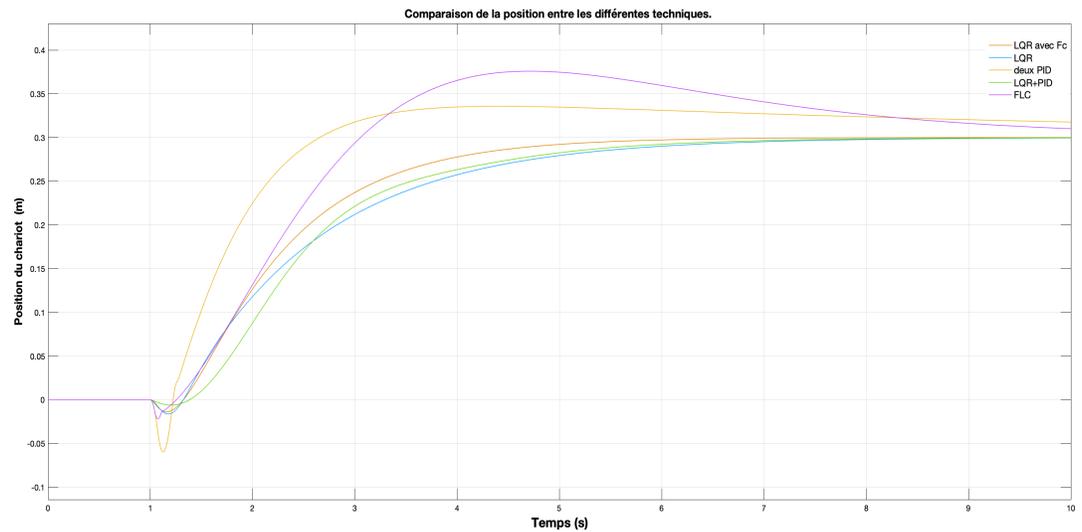
Nous avons tracé les courbes de réponse obtenues pour chaque contrôleur sous la même figure de manière à pouvoir les comparer. La Figure 30(a), montre que la position du pendule inversé devient stable après 5 secondes, sauf pour le contrôleur par logique floue qui prend plus de temps pour devenir stable et suivre notre signal de référence.

La réponse de l'angle du pendule montre une plus grande variation lorsqu'une force externe est exercée sur lui, car le pendule s'éloigne alors de ces points d'équilibre. Comme nous pouvons le voir sur la figure 30(b), la réponse varie faiblement après 1,5 seconde. L'amplitude de la fluctuation est ensuite progressivement réduite jusqu'à atteindre zéro.

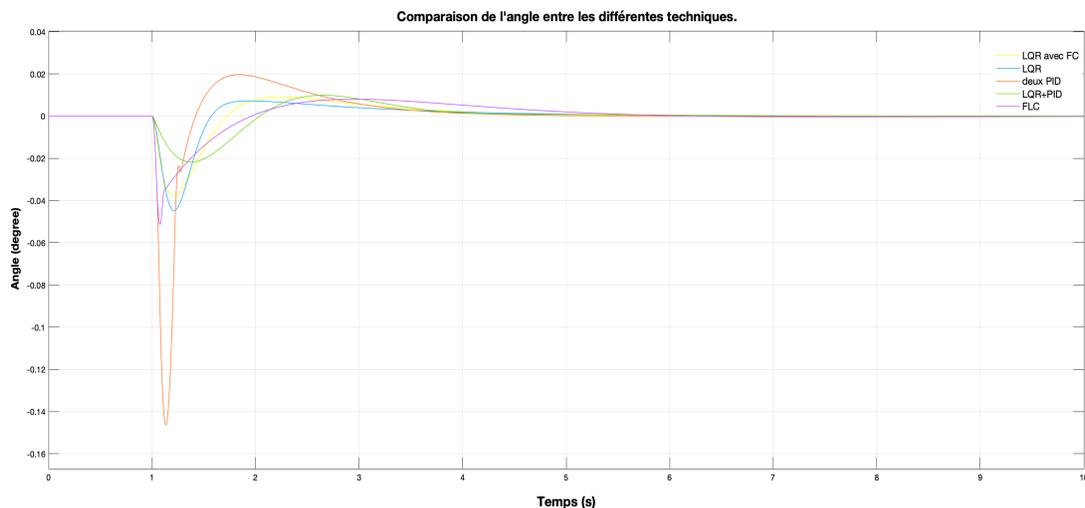
Les résultats montrent que la conception utilisant la logique floue semble plus stable et a moins de variation, le LQR a une variation, mais elle est faible, le PID a la plus grande variation, mais ils se stabilisent tous en même temps.

Suite à l'application d'une puissance de bruit égale à 0,1 mW et ce, pour évaluer la robustesse des contrôleurs basé sur la comparaison entre la sortie de l'angle de tous les contrôleurs., il est essentiel de voir à quel point il est facile de rejeter les perturbations. En fait, rien qu'en se basant sur les résultats obtenus dans la Figure 31 nous pouvons voir que l'utilisation des deux PID et le contrôleur FLC sont plus appropriés pour rejeter les

perturbations et rester stables. Dans la figure 31(b), nous pouvons voir l'impact du bruit blanc sur l'angle du pendule, en conséquence, nous voyons qu'il n'a pas beaucoup d'impact sur les deux contrôleurs FLC et le PID en raison de leur robustesse et de leur capacité à le rejeter, mais pour le LQR a un peu d'impact, car nous pouvons voir qu'une variation dans l'angle entre 0,03 et -0,003 degrés apparaît.



(a) Position du chariot



(b) Angle du pendule inversé

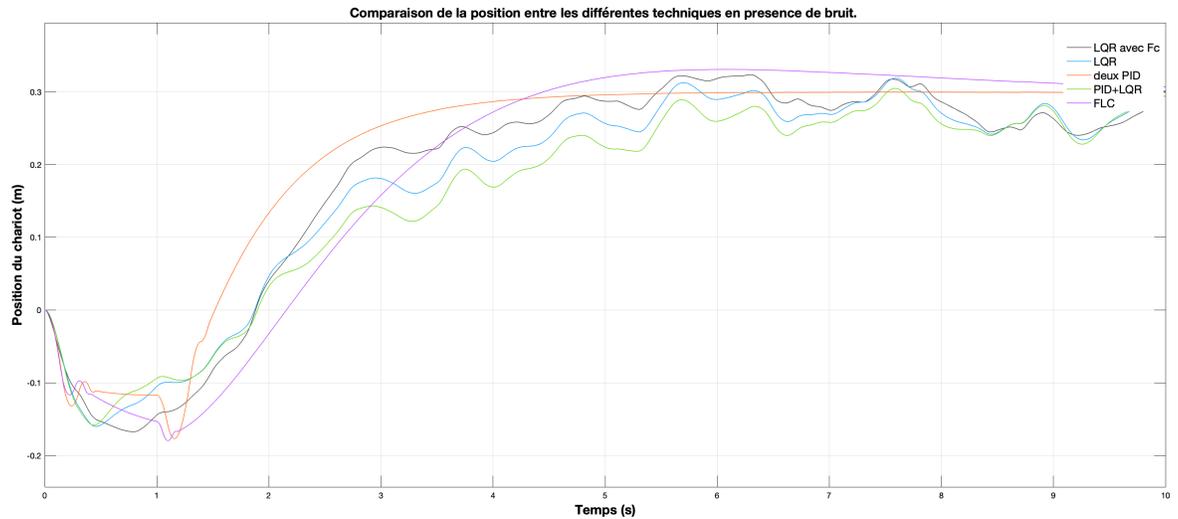
Figure 30 : Comparaison de la réponse du système à une variation dans la consigne de position pour les différentes techniques (LQR+FLC, LQR, PID, LQR+PID, FLC+PID).

Le Tableau 3 résume le résultat de l'angle en l'absence de bruit blanc. Il est clair, d'après les résultats du tableau, que le LQR a un dépassement et un sous-dépassement plus faibles que les contrôleurs PID et FLC, ce qui montre en fait que le pendule atteint la position d'équilibre plus rapidement. Cependant, le dépassement de l'angle du pendule est plus élevé dans le cas du PID par rapport au contrôleur LQR et FLC. Le contrôleur PID est capable d'amener le pendule à la position verticale presque en même temps que les autres contrôleurs.

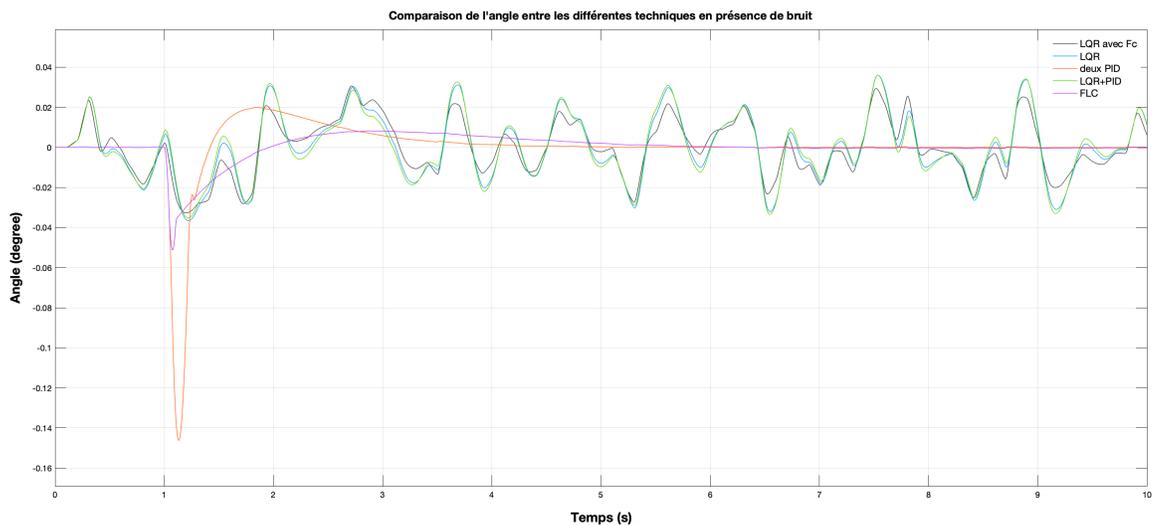
Les trois contrôleurs ont une très bonne capacité à contrôler l'angle du pendule à partir de l'état initial, mais le contrôleur PID peut réagir rapidement même si le sous-dépassement est plus élevé que les autres contrôleurs.

Tableau 3 : Performance selon l'angle

Contrôleur	Dépassement	Sous dépassement	Temps de stabilisation
LQR	0.009 degré	-0.038 degré	4 s
PID	0.02 degré	-0.14 degré	4.5s
FLC	0.01 degré	-0.05 degré	5s



(a) Position du chariot



(b) Angle du pendule inversé

Figure 31 : Comparaison de la réponse du système en présence de bruit à une variation dans la consigne de position pour les différentes techniques (LQR+FLC, LQR, PID, LQR+PID, FLC).

III. Implémentation et validation expérimentale :

L'étape suivante consistera à implémenter les contrôleurs en utilisant la configuration temps réel de Quanser dans le laboratoire de l'Université du Québec à Trois Rivières. Avant de l'implémenter les contrôleurs, il faut vérifier leur fonctionnement correctement dans le

système théorique. Nous avons utilisé les modèles linéaire et non linéaire du pendule inversé pour valider.

1. Comparaison entre le système non linéaire, linéaire et réel :

La société Quanser a créé une installation réelle, un pendule inversé sur un chariot de simulation IP02 afin que les étudiants en théorie du contrôle puissent étudier le comportement des contrôleurs et découvrir de nouvelles méthodes pour équilibrer le pendule inversé. Sur cette base, nous avons implémenté les contrôleurs dans le système réel pour étudier la différence et les comparer.

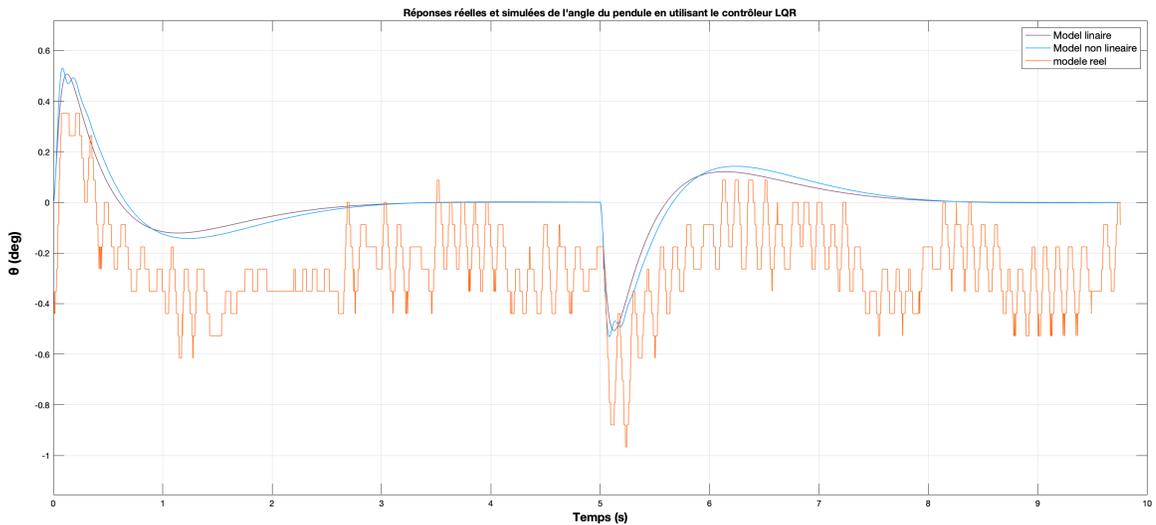


Figure 32 : Réponses réelle, théorique et simulée de l'angle de modèle non linéaire et linéaire utilisant le contrôleur LQR

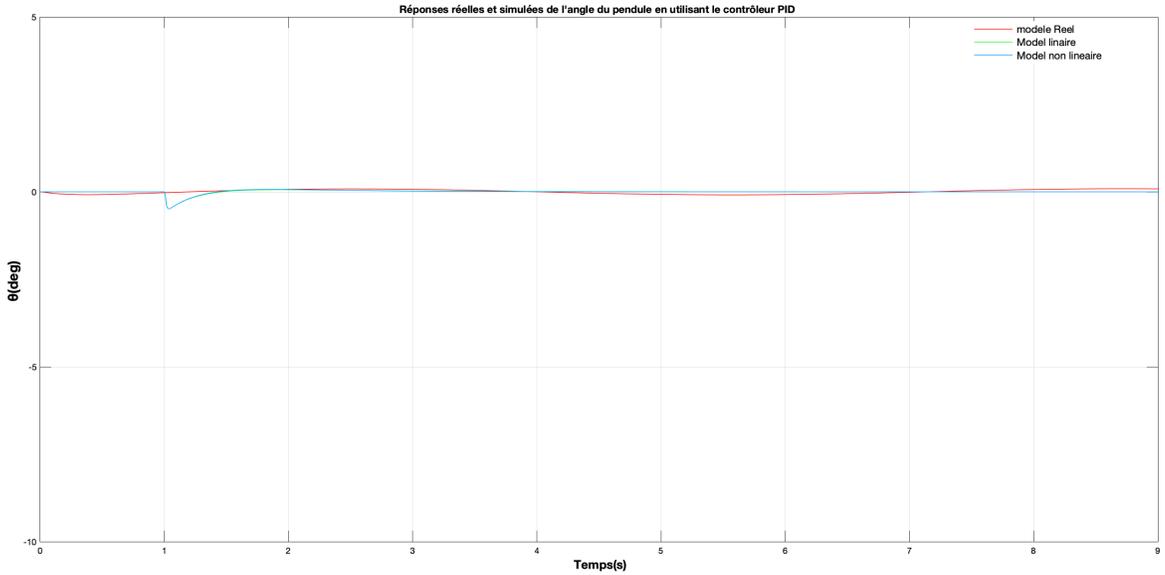


Figure 33 : Réponses réelle, théorique et simulée de l'angle de modèle non linéaire et linéaire utilisant le contrôleur PID.

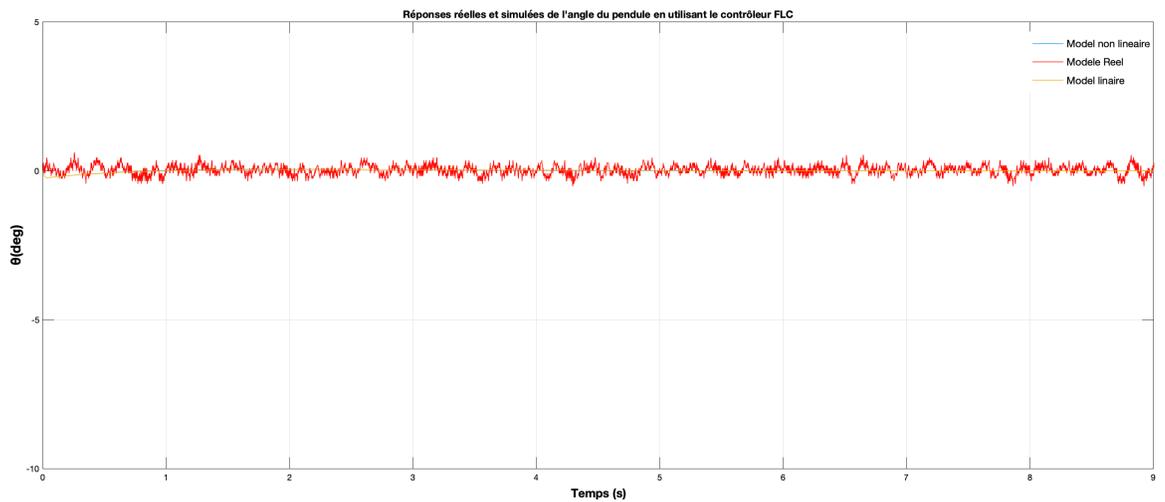


Figure 34 : Réponses réelle, théorique et simulée de l'angle de modèle non linéaire et linéaire utilisant le contrôleur FLC

Comme on peut observer dans les Figures 32, 33 et 34, les résultats de la simulation entre le système non linéaire et linéaire est le même, mais lorsque nous passons à l'implémentation

dans le système réel de Quanser, il y a un peu de différence dans l'amplitude due à beaucoup d'éléments. Nous avons remarqué que lorsque nous utilisons les contrôleurs basés sur le PID ou la logique floue, le système devient plus robuste, même si on touche le pendule inversé, il ne tombera pas. En revanche, le contrôleur LQR équilibre le pendule inversé d'une manière plus douce, le moteur ne fait pas beaucoup de travail pour équilibrer le pendule inversé. D'autre part, en ce qui concerne le PID et le FLC, il est perceptible de voir que le contrôleur travaille d'une manière agressive et fait davantage d'efforts pour l'équilibrer.



Figure 35 : Pendule inversé simple monté sur une station de test Quanser IP02 [56].

2. Indices de performances :

Afin de comparer l'efficacité des contrôleurs, nous avons utilisé une bibliothèque Simulink créée par Yi Cao [40]. Cette bibliothèque permet d'obtenir trois mesures d'indice de performance basée sur l'erreur : IAE, ISE et ITAE.

L'indice IAE nous offre la possibilité d'examiner les performances d'un système de manière générale en tenant compte de l'erreur. Ainsi, plus l'erreur est importante, plus il faut de temps pour le stabilisateur et plus cet indice sera élevé.

L'indice ISE est similaire à l'IAE, mais comme les valeurs sont élevées au carré, cet indice pénalise davantage les erreurs plus importantes. Quant à l'indice de performance ITAE, il est équivalent à l'IAE, mais les valeurs sont multipliées par le temps. Ce qui signifie que plus le système met de temps à se stabiliser et annuler l'erreur, plus cet indice sera élevé.

- Intégrale de la valeur absolue de l'erreur (IAE)

$$IAE = \int |e(t)| dt$$

- Intégrale de la valeur carrée absolue de l'erreur (ISE)

$$ISE = \int e^2 dt$$

- Intégrale de la valeur absolue de l'erreur pondérée dans le temps (ITAE)

$$ITAE = \int t|e(t)| dt$$

Les Tableaux 4 et 5 présentent les résultats des indices pour chaque contrôleur selon son effort (effort du contrôleur). Le Tableau 4 montre les résultats sans bruit, et le Tableau 5 en présence de bruit. Cette analyse nous permet d'avoir une meilleure idée du contrôleur qui obtient de meilleurs résultats et qui a plus de capacité à rejeter les perturbations.

Comme nous pouvons le voir dans le Tableau 4, les résultats montrent que LQR a un meilleur résultat pour la valeur absolue de l'erreur et pour la valeur absolue de l'erreur

pondérée, mais pour la valeur carrée absolue de l'erreur la combinaison de PID et LQR a un meilleur résultat.

Tableau 4 : Performances selon l'effort du contrôleur

Effort du Contrôleur	LQR	LQR avec l'utilisation de l'équation de force	LQR+PID	Deux PID	FLC
IAE	3.662	4.214	4	10.10	5.229
ISE	10.96	9.563	8.664	90.11	42.29
ITAE	4.234	6.291	5.497	8.86	4.195

Tableau 5 : Performances selon l'effort du contrôleur en présence d'un bruit

Effort du Contrôleur	LQR	LQR avec l'utilisation de l'équation de force	LQR+PID	Deux PID	FLC
IAE	10.94	9.275	11.32	10.72	5.768
ISE	23.92	18.13	25.06	91.88	43.08
ITAE	49.73	38.76	51.42	12.69	7.431

Les Tableaux 6 et 7 présentent les indices pour la commande de position. Nous remarquons que le contrôleur PID est plus performant que les autres contrôleurs pour la valeur absolue de l'erreur et pour la valeur absolue de l'erreur pondérée. Toutefois, pour la valeur carrée absolue de l'erreur (ISE) et la valeur absolue de l'erreur (IAE), les deux indices prennent la valeur absolue. Donc quand l'erreur passe à une valeur négative, les deux indices retournent toujours une valeur positive. Puisque le PID est rapide à réagir, il va avoir la capacité de stabiliser l'erreur sans s'éloigner du point de la stabilisation de l'erreur.

Au niveau de la robustesse, nous remarquons que les valeurs n'augmentent pas trop lorsque nous ajoutons un bruit.

Tableau 6 : Performance selon la position

Position	LQR	LQR avec l'utilisation de l'équation de force	LQR+PID	Deux PID	FLC
IAE	0.6615	0.5843	0.9272	0.5381	0.7028
ISE	0.1374	0.1361	0.3084	0.1295	0.08887
ITAE	1.316	0.9526	1.67	0.8465	1.919

Tableau 7 : Performance selon la position en présence d'un bruit

Position	LQR	LQR avec l'utilisation de l'équation de force	LQR+PID	Deux PID	FLC
IAE	0.74.46	0.6926	0.8296	0.5373	0.7045
ISE	0.1484	0.1507	0.1645	0.1295	0.08917
ITAE	1.903	1.705	2.203	0.8421	1.928

Les Tableaux 8 et 9 montrent les indices pour le contrôle d'angle, comme nous pouvons le voir ici, les résultats montrent que la combinaison de deux PID a un meilleur résultat pour tous les indices en présence de bruit, ceci confirme notre théorie que la logique floue a plus de capacité à rejeter les perturbations.

Tableau 8 : Performance selon l'angle

Angle	LQR	LQR avec l'utilisation de l'équation de force	LQR+PID	Deux PID	FLC
IAE	0.07881	0.0731	0.01122	0.08749	0.03777
ISE	0.004166	0.002951	0.005617	0.006268	0.002025
ITAE	0.09084	0.09337	0.1497	0.1121	0.04016

Tableau 9 : Performance selon l'angle en présence d'un bruit

Angle	LQR	LQR avec l'utilisation de l'équation de force	LQR+PID	Deux PID	FLC
IAE	0.1717	0.1535	0.1695	0.08781	0.03777
ISE	0.0065875	0.004391	0.006	0.006264	0.002026
ITAE	0.7037	0.6025	0.7027	0.1149	0.04013

Conclusion :

Ce chapitre présente la comparaison de différentes techniques de stabilisation du pendule inversé en utilisant le contrôleur à logique floue, le régulateur linéaire quadratique et le régulateur PID. Dans cette section, une comparaison utilisant les performances de l'indice a été effectuée.

D'après les résultats de Tableau 9, le dépassement du LQR était vraiment élevé en présence de bruit par rapport au PID et au FLC en raison de sa réponse optimale.

Du côté de la robustesse, les contrôleurs PID et FLC possèdent plus de capacité à rejeter les perturbations (plus robuste).

Chapitre 5 - Conclusion

L'objectif de ce projet était de réaliser une comparaison des performances de différents contrôleurs pouvant être utilisés pour la stabilisation d'un pendule inversé. Le système étudié était composé d'un pendule inversé sur chariot. Ce système est vu comme un bon exemple de système sous actionné. L'étude réalisée comprend l'analyse théorique et la validation pratique sur une maquette expérimentale disponible à l'Université du Québec à Trois-Rivières.

Nous avons choisi trois types de contrôleurs pour réaliser la comparaison, le contrôleur PID, le contrôleur linéaire quadratique LQR et le contrôleur par logique floue FLC. Bien que chaque contrôleur ait offert une performance spécifique, sans compter la première seconde que le contrôleur prend pour déplacer le chariot, nous nous sommes concentrés sur l'analyse de l'erreur de l'angle du pendule plutôt que sur l'erreur de position du chariot.

Les résultats de la simulation et des tests expérimentaux indiquent que chaque contrôleur a ses avantages et ses inconvénients. Lorsque nous parlons de robustesse, les résultats montrent que le contrôleur par la logique floue est le meilleur, quand on parle de la performance selon l'effort de la commande le contrôleur LQR devient plus intéressant comme choix. Enfin, lorsque nous parlons du temps de stabilisation, le contrôleur PID est le plus rapide pour stabiliser le pendule.

Toute la conception de nos contrôleurs a été basée sur un modèle non linéaire du pendule inversé, compte tenu des non-linéarités et des incertitudes élevées présentes dans le système réel. En outre, une comparaison des performances avec l'utilisation du modèle linéaire, non linéaire et réel a été réalisée.

Ce projet nous a permis de faire une comparaison entre trois contrôleurs LQR, PID et FLC. Les méthodes analysées dans cette étude étant classiques nous donnent un point de départ, pour valider dans des travaux futurs d'autres contrôleurs. Nous pouvons mentionner comme travaux futurs l'étude des contrôleurs prédictifs et basés sur des réseaux neuronaux pour les systèmes sous actionnés.

Références

- [1] V. Šimák, D. Nemeč and J. Hrbček, "Linear control of naturally unstable system using PID regulator," 2014ELEKTRO, 2014, pp.494-499, doi: 10.1109/ELEKTRO.2014.6848944.
- [2] W. Yang, Q. H. Meng, J. L. Hu, P. Lin, and M. Zeng, "Proportional-integral-differential-based automatic gain control circuit for ultrasonic ranging systems," Proc. - 2013 5th Conf. Meas. Technol. Mechatronics Autom. ICMTMA 2013, pp. 831–834, 2013, doi: 10.1109/ICMTMA.2013.208.
- [3] P. Bin Xu, Y. F. Ren, R. Z. Wen, and H. W. Wang, "Regional Variability of Ground-Motion of MS6.0-7.0 Earthquakes between the North-South Seismic Zone in China and California Region," Proc. 2019 13th Symp. Piezoelectricity, Acoust. Waves, Device Appl. SPAWDA 2019, pp. 1–5, 2019, doi: 10.1109/SPAWDA.2019.8681809.
- [4] T. Kimura, E. Araki, Y. Machida, and K. Kawaguchi, "Seismic Velocity Monitoring Using Cabled Seafloor and Borehole Seismic Observatories in the Nankai Trough, Japan," 2019 IEEE Underwater Technology (UT), 2019, pp. 1-6, doi: 10.1109/UT.2019.8734284.
- [5] M. K. Filyashkin, "Study of Contacting of a Tanker Aircraft to the Remote-Controlling and "Floating Up" Drogue of the Air-to-Air Refueling System," 2019 IEEE 5th International Conference Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Developments (APUAVD), 2019, pp. 278-281, doi: 10.1109/APUAVD47061.2019.8943854

- [6] J. E. Moses, I. Jennitta and G. J. J. Wessley, "Controllable aircraft rescue system: Rescue system using multi parachute for passenger aircrafts with case study," 2017 First International Conference on Recent Advances in Aerospace Engineering (ICRAAE), 2017, pp. 1-6, doi: 10.1109/ICRAAE.2017.8297210.
- [7] D. Oldroyd, F. Amador, J. Kozák, A. Carneiro, and M. Pinto, "The study of earthquakes in the hundred years following the Lisbon earthquake of 1755," *Earth Sci. Hist.*, vol. 26, no. 2, pp. 321–370, 2007, doi: 10.17704/eshi.26.2.h9v2708334745978.
- [8] N. Minouchehr and S. K. Hosseini-Sani, "Design of Model Predictive Control of two-wheeled inverted pendulum robot," *Int. Conf. Robot. Mechatronics, ICROM 2015*, pp. 456–462, 2015, doi: 10.1109/ICRoM.2015.7367827.
- [9] S. Kim and S. Kwon, "Nonlinear Optimal Control Design for Underactuated Two-Wheeled Inverted Pendulum Mobile Platform," pp. 595–599, 2017.
- [10] G. D. Nusantoro, M. A. Muslim, P. Purwanto, and R. I. C., "Rancang Bangun Rotary Inverted Pendulum (RIP) dengan Menggunakan Kontrol PID," *J. EECCIS Vol 6 No 2* 2012, 2013.
- [11] N. Optimal and C. Design, "Short papers Inverted Pendulum Mobile Platform," vol. 22, no. 6, pp. 2803–2808, 2017.
- [12] H. Ludvigsen A. Shiriaev, A. Pogromsky and O. Egeland. On global properties of passivitybased control of an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, (10) :283–300, 2000.
- [13] Castro A. Modeling and dynamic analysis of a two-wheeled inverted pendulum. Master Science thesis, Georgia Institute of Technology Publication, Atlanta, USA; 2012.

- [14] A. P. Stephenson, "XX. On induced stability," *Philos. Mag. Ser. 1*, vol. 15, pp. 233–236.
- [15] Lowenstern E.R. 'Stabilizing effect of imposed oscillations on a dynamical system'. *Philosophical Magazine*. 1932; 13: 458–486.
- [16] Roberge J.K. The mechanical seal. Bachelor's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge; 1960.
- [17] Donald T.H., Robert H.C. 'On the control of unstable multiple-output mechanical systems. ASME Publication 63-WA-148; American Society of Mechanical Engineers, New York, 1963.
- [18] Yoshida K. (ed.) 'Swing-up control of an inverted pendulum by energy-based methods. Proceedings of the American Control Conference; San Diego, CA, June 1999. pp. 4045–4047.
- [19] G. D. Nusantoro, m. A. Muslim, p. Purwanto, and r. I. C., "rancang bangun rotary inverted pendulum (rip) dengan menggunakan kontrol pid," *j. Eeccis* vol 6 no 2 2012, 2013.
- [20] H. H. Bilgic, M. A. Sen, and M. Kalyoncu, "Tuning of LQR controller for an experimental inverted pendulum system based on the bees algorithm," *J. Vibroengineering*, vol. 18, no. 6, pp. 3684–3694, 2016, doi: 10.21595/jve.2016.16787.
- [21] Anderson C.W. 'Learning to control an inverted pendulum using neural networks. *IEEE Control Systems Magazine*. 1989; 9(3): 31–37
- [22] Lundberg K.H., Barton T.W. 'History of inverted pendulum systems. *IFAC Proceedings Volumes*. 2010; 42(24): 131–135.
- [23] Xin X., Kaneda M. 'Analysis of the energy-based swing-up control of the Acrobot'. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2007; 17(16): 1503–1524

- [24] C. Yang, Z. Li and J. Li, "Trajectory Planning and Optimized Adaptive Control for a Class of Wheeled Inverted Pendulum Vehicle Models," in *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 43, no. 1, pp. 24-36, Feb. 2013, doi: 10.1109/TSMCB.2012.2198813.
- [25] M. Yamakita, M. Iwashiro, Y. Sugahara and K. Furuta, "Robust swing up control of double pendulum," *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95*, 1995, pp. 290-295 vol.1, doi: 10.1109/ACC.1995.529255
- [26] F. Grasser, A. D'Arrigo, S. Colombi, and A. C. Rufer, "JOE: A mobile, inverted pendulum," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 49, no. 1, pp. 107–114, 2002, doi: 10.1109/41.982254.
- [27] T. Takahashi and S.H. Jeong. 'Wheeled inverted pendulum type assistant robot: Inverted mobile, standing, and sitting motions. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, San Diego, CA, USA, 2007'.
- [28]. E. Kennedy and H. Tran, "Swing-up of an inverted pendulum on a cart using a modified energy-based approach," in *Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2016, IMECS 2016, Hong Kong, 16-18 March 2016*, pp. 185–190, ISBN: 978–988–19 253–8–1, ISSN: 2078–0958 (Print); ISSN: 2078–0966 (Online).
- [29] A. Mehrvarz, M. J. Khodaei, W. Clark, and N. Jalili, "modeling and dynamics analysis of a beam-hoverboard self-transportation system," in *Proc. ASME 2018 Dynamic System and Control Conference*, Atlanta, Georgia, USA, 2018: ASME.
- [30] N. Minouchehr and S. K. Hosseini-Sani, "Design of Model Predictive Control of two-wheeled inverted pendulum robot," *Int. Conf. Robot. Mechatronics, ICROM 2015*, pp. 456–462, 2015, doi: 10.1109/ICRoM.2015.7367827.
- [31] S. Kim and S. Kwon, "Nonlinear Optimal Control Design for Underactuated Two-

Wheeled Inverted Pendulum Mobile Platform,” pp. 595–599, 2017.

[32] G. D. Nusantoro, M. A. Muslim, P. Purwanto, and R. I. C., “Rancang Bangun Rotary Inverted Pendulum (RIP) dengan Menggunakan Control PID,” J. EECCIS Vol 6 No 2 2012, 2013.

[33] N. Optimal and C. Design, “Short papers Inverted Pendulum Mobile Platform,” vol. 22, no. 6, pp. 2803–2808, 2017.

[34] H. Ludvigsen A. Shiriaev, A. Pogromsky and O. Egeland. On global properties of passivitybased control of an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, (10) :283–300, 2000.

[35] C. Mahapatra, S. Chauhan and B. Hemakumar, "Servo control and Stabilization of Linear Inverted Pendulum on a Cart using LQG," 2018 International Conference on Power Energy, Environment, and Intelligent Control (PEEIC), 2018, pp. 783-788, doi: 10.1109/PEEIC.2018.8665634.

[36] M. J. Blondin, “Méthode d’optimisation hybride pour la commande de systèmes non linéaires avec contraintes multiples et mécanismes d’anti-saturation,” thèse, Université du Québec à Trois-Rivières, 2018.

[37] E. S. Varghese, A. K. Vincent, and V. Bagyaveereswaran, “Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC,” IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 263, p. 052007, nov 2017, <https://doi.org/10.1088/1757-899x/263/5/052007>.

[38] A. E. Bryson, Y. C. Ho, Y. C. Ho, and D. P. Cantwell, *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*. Hemisphere Publishing Corporation, 1975.

- [39] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Inf. Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965, doi: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).
- [40] Yi Cao (2022). Simulink Library: PerformanceIndex (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/17287-simulink-library-performance-index>), MATLAB Central File Exchange. Retrieved March 10, 2022.
- [41] M. A. K. El-Shafei, M. I. El-Hawwary and H. M. Emara, "Implementation of fractional-order PID controller in an industrial distributed control system," 2017 14th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), 2017, pp. 713-718, doi: 10.1109/SSD.2017.8167004.
- [42] A. Ghosh, T.R. Krishnan, and B. Subudhi, "Robust PID compensation of an inverted cart-pendulum system: an experimental study", *IET Control Theory and Applications*, vol. 6, pp. 1145-1152, 2012.
- [43] Kumar R, Singh RB, Das J (2013) Modeling and simulation of inverted pendulum system using matlab: overview. *Int J Mech Prod Eng* 1(4). ISSN:2320-2092.
- [44] Chen Wei Ji, Fang Lei and Lei Kam Kin, "Fuzzy logic controller for an inverted pendulum system," 1997 IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems (Cat. No.97TH8335), 1997, pp. 185-189 vol.1, doi: 10.1109/ICIPS.1997.672762.
- [45] G. L. Anderson and I. G. Tadjbakhsh, "Stabilization of Ziegler's pendulum by means of the method of vibrational control," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 143, no. 1, pp. 198–223, 1989, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(89\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0022-247X(89)90036-X).
- [46] K. Furuta, T. Okutani, and H. Sone, "Computer control of a double inverted pendulum," *Comput. Electr. Eng.*, vol. 5, no. 1, pp. 67–84, 1978, doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7906\(78\)90018-6](https://doi.org/10.1016/0045-7906(78)90018-6).

- [47] G. DeJong and M. W. Spong, "Swinging up the Acrobot: an example of intelligent control," Proceedings of 1994 American Control Conference - ACC '94, 1994, pp. 2158-2162 vol.2, doi: 10.1109/ACC.1994.752458.
- [48] M. Alamir and A. Murilo, "Swing-up and stabilization of a Twin-Pendulum under state and control constraints by a fast NMPC scheme," Autom., vol. 44, pp. 1319–1324, 2008.
- [49] M. ROBILLARD, "Commande de pendule inversé sur rail lineaire," trois-rivières, 2020.
- [50] W. Zhong and H. Röck. Energy and passivity-based control of the double inverted pendulum on a cart. In Proceedings of the 2001 IEEE international conference on control applications, Mexico City, Mexico, 2001.
- [51] A. Mehrvarz, M. J. Khodaei, W. Clark, and N. Jalili, "modeling and dynamics analysis of a beam-hoverboard self-transportation system," in Proc. ASME 2018 Dynamic System and Control Conference, Atlanta, Georgia, USA, 2018: ASME.
- [52] L. A. Zadeh, "Fuzzy algorithms," Inf. Control, vol. 12, no. 2, pp. 94–102, 1968, doi: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(68\)90211-8](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(68)90211-8).
- [53] L. A. Zadeh, "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes," in IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-3, no. 1, pp. 28-44, Jan. 1973, doi: 10.1109/TSMC.1973.5408575.
- [54] Astrom K.J., Furuta K. 'Swinging up a pendulum by energy control'. Automatica. 2000; 36(2): 287–295. February 2000
- [55] Bagdanoff J.L., Citron S.J. 'Experiments with an inverted pendulum subject to random parametric excitation'. The Journal of the Acoustical Society of America. 1965; 38: 447–452

[56] J. Apkarian, H. Lacheray, and P. Martin, "Quanser IP02 Workbook," 2012.
<https://www.quanser.com/>.

[57] R. Babazadeh, A. G. Khiabani and H. Azmi, "Optimal control of Segway personal transporter," 2016 4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA), 2016, pp. 18-22, doi: 10.1109/ICCIAutom.2016.7483129.