Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Desarrollo del pensamiento lógico matemático a través de la matemática recreativa en el primer ciclo de secundaria

Development of the mathematical logical thought through recreational mathematics at the lower secondary school level

Autora
Isabel Usón Lozano

Director
Sergio Martínez Juste

FACULTAD DE EDUCACIÓN
2022

Índice

1. Introducción y contexto **1**

1.1. Sobre el objeto de estudio 1

1.2. Justificación 3

2. Sobre su estado de enseñanza-aprendizaje **8**

2.1. Cómo se trata el objeto de estudio en el ámbito escolar 8

2.2. Cómo afecta el estado de la enseñanza en el aprendizaje alumno 14

3. Sobre sus razones de ser **18**

3.1. La componente creativa de la matemática y los juegos 19

3.2. La componente de *inutilidad* de la matemática y los juegos 20

3.3. El papel de la motivación 21

3.4. Influencia (directa) de la matemática recreativa en el desarrollo de la matemática formal 23

3.5. Categorías del pensamiento lógico-matemático y su relación con los juegos . 26

3.6. Etapas de resolución de un problema y los juegos 27

4. Propuesta didáctica **29**

4.1. Principios metodológicos 29

4.2. Desarrollo de la propuesta 34

4.3. Evaluación 57

Referencias **61**

Apéndice **64**

1. Introducción y contexto

El objeto de estudio en torno al que desarrollaremos la propuesta de Trabajo de Fin de Máster es *el pensamiento lógico-matemático* enfocado desde la perspectiva de *la matemática recreativa*. Contextualizamos nuestro objeto de estudio en el primer ciclo de secundaria, específicamente en la asignatura de matemáticas del segundo curso.

Basamos la elección del nivel de 2º de ESO en los siguientes motivos:

1. primero, creemos que es importante analizar el estado de la cuestión y llevar a cabo una propuesta aplicable en una etapa en que se desarrollan las bases del proceso de aprendizaje y enseñanza de los estudiantes, puesto que sobre estas bases se construirá el aprendizaje futuro;

2. y segundo, en estas edades se ubica el despertar del razonamiento formal (Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, s.f.), y es fundamental fomentar el desarrollo de las habilidades lógicas cuando nos encontramos en plena evolución de nuestras capacidades racionales;

3. y tercero, los alumnos, en este nivel, ya habrán trabajado con métodos más clásicos y podremos utilizar esto para hacer comparaciones metodológicas y reforzar el valor de nuestra propuesta.[1]

1.1. Sobre el objeto de estudio

1.1.1. El pensamiento lógico-matemático

El desarrollo del pensamiento lógico es fundamental para un aprendizaje *real* de matemáticas. El *pensamiento lógico-matemático* constituye la base del quehacer matemático: sin un buen desarrollo de esta capacidad, toda técnica o aprendizaje que un individuo pueda alcanzar se quedará *falta de significado*; sin un desarrollo profundo de esta capacidad, el *conocimiento* no puede transformarse en *saber*, y se queda en territorio de un *saber mecánico* que no llega a ser un *saber real*, asentado, que implique una verdadera comprensión de "lo que se hace".

Travieso y Hernández (2017) describen el *pensamiento lógico* como un "tipo de pensamiento dirigido a la solución de problemas y situaciones" cuyo fundamento son los conceptos

[1] La matemática recreativa no es la metodología clásica de enseñanza en las aulas de los institutos (ver *2.1*). Los estudiantes no están acostumbrados a esta metodología, y usamos esta realidad de la docencia para llevar a cabo un estudio de cómo se percibe esta propuesta didáctica en comparación con experiencias previas con la asignatura de matemáticas (ver *4.3.2*).

y las operaciones lógicas. Este tipo de pensamiento se desarrolla en forma de *procedimientos lógicos* que se componen de *acciones (lógicas)* y se relacionan con distintas *funciones (de carácter lógico)*. Siguiendo esta terminología, podríamos catalogar «la demostración» como un ejemplo de procedimiento lógico integrado por acciones (lógicas), como **la clasificación dicotómica, la deducción de consecuencias o el concepto de propiedades obligatorias**, que está relacionado con funciones (lógicas) como **la verificación, la explicación, la sistematización, el descubrimiento y la comunicación**.

El *pensamiento matemático* requiere de este conjunto de elementos lógicos −procedimientos, acciones, funciones− que componen el pensamiento lógico. No pretendemos presentar como equivalentes *lógica* y *matemática*, sólo queremos evidenciar su relación y fundamentar (parte de) nuestro trabajo en esta relación esencial. La lógica forma parte de la matemática; no habría pensamiento matemático sin pensamiento lógico. No obstante, si bien forma parte de su fundamento, el quehacer matemático se nutre también de otras habilidades del pensamiento como, por ejemplo, la capacidad creativa e inventiva. Al fin y al cabo, la matemática es también *invención*. En palabras de Miguel de Guzmán: "los más grandes matemáticos han sido observadores, *inventores* y desarrolladores de juegos". En *3.1* hablamos de ello.

En definitiva, el pensamiento matemático se compone de múltiples procesos con **fundamento lógico** y de habilidades adicionales relacionadas con, entre otras cosas, la **capacidad de creación**. Hacemos hincapié en la importancia de estos procesos y habilidades por distintos motivos:

- Un correcto uso de la lógica, así como el desarrollo de nuestras capacidades creativas e imaginativas, es imprescindible en la práctica matemática −no así el total de contenidos específicos que se establecen en los currículos oficiales−.

  El aprendizaje matemático requiere de ciertos contenidos específicos pero, a nuestro parecer, no deberían ser la piedra angular de su enseñanza. Hace casi treinta años, ya defendía de Guzmán (1993) la importancia de la "transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más bien que la mera transferencia de contenidos". En este caso, Guzmán alude no sólo al fundamento del pensamiento lógico sino también a la rapidez en que evolucionan las sociedades y cómo al mismo ritmo se transforman los contenidos de los currículos. Remarca: "los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez [como los contenidos], es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros jóvenes. (...) La matemática es, sobre todo, *saber hacer*, es una ciencia en la que **el método claramente predomina sobre el contenido**".

- La matemática recreativa es un recurso ideal para trabajarlas.

1.1.2. Matemática recreativa

La matemática *es* en esencia también un juego (de Guzmán, 1993). Creemos que es fundamental transmitir esta idea a los alumnos tanto para que sean capaces de apreciar la riqueza y belleza de la práctica matemática en sí misma, como para fomentar actitudes positivas hacia ella (en lugar del tradicional rechazo).

La actividad matemática está profundamente relacionada con la actividad lúdica, más allá de justificaciones utilitarias. Huizinga (1954) destaca los rasgos principales de la actividad lúdica, entre otros: es una actividad que se lleva a cabo con una motivación intrínseca; con el juego, el niño aprende y el adulto se evade y se relaja; el juego ha de tomarse en serio, no es lo mismo *juego* que *broma*; produce *placer* a través de su ejecución y contemplación; se dan ciertos elementos de tensión cuya *catarsis* causa placer; *crea* a través de sus propias normas. Estamos hablando de motivación intrínseca de la propia práctica, de sensación de desafío y satisfacción al conseguir resolver los retos, y de una componente creativa e inventiva. Dice Guzmán, y estamos de acuerdo, que todas estas características forman parte también del quehacer matemático.

Desde un punto de vista más utilitario, la *matemática recreativa*, que propone como recurso principal las actividades lúdicas, es un recurso con mucho potencial en el proceso de desarrollo del pensamiento lógico y, en general, del aprendizaje matemático. Fundamentamos este potencial sobre dos pilares.

- Las similitudes que se dan entre enfrentarse a un juego y resolver un problema (aspecto esencial del quehacer matemático que requiere del uso de la lógica y otras habilidades del pensamiento). Desarrollamos esta idea en *3.6*.
- La componente motivadora de la actividad lúdica (aspecto afectivo-emocional hacia la práctica matemática). Hablamos de ello en *3.3*.

Así, el fundamento del aprendizaje *a través de* la resolución de problemas supone un fundamento suficiente, junto con el complemento del aspecto motivacional, para la práctica de la matemática recreativa como recurso docente.

1.2. Justificación

1.2.1. Aspectos legislativos

A nivel legislativo, nos apoyamos en la Orden ECD/489/2016. El currículo oficial hace hincapié en la importancia del desarrollo competencial del alumno:

> En esta orden, que tiene carácter básico, se plantea la importancia de las metodologías activas y contextualizadas para el desarrollo competencial del alumno y se establece que **las competencias clave deben estar estrechamente vinculadas a los objetivos** para que la consecución de los mismos lleve implícita el desarrollo de las competencias.

Además, conceptualiza las competencias como un **"saber hacer"** aplicable a contextos académicos, sociales y profesionales, contextos educativos formales, no formales e informales. Nos preguntamos si el *saber mecánico* que se alcanza por métodos repetitivos y memorísticos, falto de comprensión, característico de la enseñanza tradicional, puede clasificarse como el "saber hacer" al que se refiere el currículo. Si tenemos en cuenta que "para que la transferencia a distintos contextos sea posible, **resulta indispensable una comprensión del conocimiento** presente en las competencias y la vinculación de este con las habilidades prácticas o destrezas que las integran", la respuesta evidente a la pregunta que nos hacíamos es *No*.

Contenidos generales

Debido al carácter fundamental que representa el pensamiento lógico-matemático en el quehacer matemático y a la versatilidad de la matemática recreativa, nuestro objeto de trabajo puede abarcar numerosos contenidos del currículo −podríamos decir que (casi) cualquiera de los contenidos establecidos en la ley mencionada−. Con la propuesta que presentamos nos centramos en el Bloque 1 de contenidos, esto es, en los *procesos, métodos y actitudes en matemáticas*. También trabajaremos contenidos de los demás bloques (de hecho, las actividades que componen la propuesta cubren gran parte de los contenidos del currículo), como especificamos en *4*, pero abogamos por un desarrollo del Bloque 1 como eje principal del proceso de aprendizaje de los alumnos, y consideramos el resto de bloques como *recursos* con los que desarrollar estos procesos, métodos y actitudes matemáticos.

Destacamos los siguientes contenidos como los más significativos de la propuesta:

Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en

contextos matemáticos.
Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
Planificación del proceso de resolución de problemas.

El carácter de este primer bloque de contenidos es más abstracto que el de los demás y, aunque en el currículo se establezcan al tiempo una serie de criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, es evidente que esta particularidad [el carácter abstracto] hace que tanto su enseñanza como su evaluación puedan resultar más complicadas −sobretodo si estamos acostumbrados a un sistema educativo en que la enseñanza se fundamenta en el formato de *clase expositiva y aprendizaje por repetición* y en que el tipo de evaluación se basa en calificaciones en una escala de 0 a 10 de una colección de ejercicios, problemas o cuestiones concretas que el estudiante resuelve−.

Creemos que este particular grado de abstracción es clave en el habitual paso superficial por los contenidos del bloque, dando por sentado en muchas ocasiones que *se trabaja y evalúa de forma transversal*. Mientras, los esfuerzos docentes se centran en trabajar de forma directa el resto de bloques. Es más fácil asumir que los contenidos que establece el bloque 1 son *menos importantes* que el resto, pues se aleja de esa visión formal, concreta y fácilmente medible en términos numéricos.

Nuestra perspectiva es la opuesta: creemos que es importante trabajar de forma directa el primer bloque, mientras que el resto de contenidos deberían formar parte del proceso de aprendizaje de los alumnos de forma indirecta. Consideramos que trabajar de forma directa los *procesos, métodos y habilidades matemáticas* debería ser un objetivo principal en la docencia de las matemáticas, dotando de importancia a los aspectos motivacionales de quienes aprenden esta ciencia, y que otros contenidos más específicos deberían trabajarse de forma indirecta. Por ejemplo: en lugar de proponer una colección de *ejercicios* de divisibilidad, se puede plantear un *juego* que requiera, entre otras cosas, de conocimientos de divisibilidad para abordarlo.

Destacamos también el desarrollo de competencias (más allá de la matemática) y de objetivos generales de Matemáticas:

Competencia lingüística: lectura detallada de la información presente en los enunciados, en la verbalización y correcta exposición de los razonamientos empleados y de las conclusiones.
Competencia digital: apoyo a la resolución del problema y comprobación de la solución.
Competencia de aprender a aprender: sentirse capaz de aprender, aumentando su autonomía y responsabilidad y compromiso personal.

Competencias sociales y cívicas: el trabajo en grupo, la puesta en común de soluciones y la aceptación de los errores propios y de las soluciones ajenas potencian la función sociabilizadora de la educación.
Competencia de sentido de la iniciativa: se anima al alumno a plantearse nuevos problemas a partir de uno resuelto variando datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos y estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
Competencia de conciencia y expresiones culturales: en referencia a figuras destacadas de la historia de las Matemáticas.

Obj.MA.1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático. Utilizar correctamente el lenguaje matemático con el fin de comunicarse de manera clara, concisa, precisa y rigurosa.
Obj.MA.2. Reconocer, plantear y resolver situaciones de la vida cotidiana utilizando estrategias, procedimientos y recursos propios de la actividad matemática. Analizar la adecuación de las soluciones obtenidas y valorar los procesos desarrollados.
Obj.MA.5. Utilizar los métodos y procedimientos estadísticos y probabilísticos para interpretar la realidad de manera crítica, representarla de forma gráfica y numérica, formarse un juicio sobre la misma y sostener conclusiones a partir de datos recogidos en el mundo de la información.
Obj.MA.6. Reconocer los elementos matemáticos, presentes en todo tipo de información y utilizar los conocimientos y herramientas matemáticas, adquiridas para facilitar la comprensión de dichas informaciones.
Obj.MA.8. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo y situaciones concretas con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista, la perseverancia en la búsqueda de soluciones, la precisión y el rigor en la presentación de los resultados, la comprobación de las soluciones, etc.
Obj.MA.9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito. Desarrollar técnicas y métodos relacionados con los hábitos de trabajo, con la curiosidad y el interés para investigar y resolver problemas y con la responsabilidad y colaboración en el trabajo en equipo. Adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las Matemáticas.
Obj.MA.10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas materias de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
Obj.MA.11. Valorar las Matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde

un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual

1.2.2. Aspectos político-sociales: pensamiento original, pensamientos preparados y la paralización del pensamiento crítico

Queremos aprovechar este apartado para reforzar nuestra perspectiva docente aludiendo a la componente social. Para elaborar esta idea tomamos como texto de referencia, debido a su claridad expositiva y su capacidad de síntesis, el clásico *Miedo a la libertad* de Erich Formm. En esta obra, Fromm elabora un amplio análisis sobre la situación del "hombre moderno", y la paradójica contradicción que se genera entre *libertad* y *esclavitud*, en una sociedad marcada por su sistema productivo y su consecuente filosofía del consumo.

En uno de los capítulos, se habla de la educación y de la importancia y efectos del *pensamiento propio* de los individuos. El texto es tan claro y expresa de forma tan acertada la idea que queremos transmitir, que nos limitaremos a citar un conjunto de fragmentos de forma literal.

> Una tergiversación idéntica a la de los sentimientos y emociones sufre el *pensamiento original*. Desde los comienzos mismos de la educación, el pensamiento original es desaprobado, llenándose la cabeza de la gente con *pensamientos preparados*.
>
> (...) [enumero] algunos métodos educativos hoy en uso que dificultan el pensamiento original. El primero es la importancia concedida a los hechos o, deberíamos decir, la información. Prevalece la superstición patética de que sabiendo más y más hechos es posible llegar a un conocimiento de la realidad. De este modo se descargan los hechos aislados e inconexos; todo su tiempo y **toda su energía se pierden en aprender cada vez más hechos, de manera que les queda muy poco lugar para ejercitar el pensamiento**. Es cierto que el pensar carente de un conocimiento adecuado de los hechos sería vacío y ficticio; pero la «información» sin teoría puede representar un obstáculo para el pensamiento tanto como su carencia.
>
> (...) Existen otros factores que, de una manera activa, contribuyen a confundir lo que en el individuo medio queda de la capacidad de pensamiento original. Con respecto a todos los problemas básicos de la vida individual y social, a las cuestiones psicológicas, económicas, políticas y morales, un amplio sector de nuestra cultura ejerce una sola función: la de confundir las cosas. Un tipo de cortina de humo consiste en afirmar que los problemas son demasiado complejos para la

> comprensión del hombre común. Por el contrario, nos parecería que muchos de los problemas básicos de la vida individual y social son muy simples, tan simples que deberíamos suponer que todos se hallan en condiciones de comprenderlos. Hacerlos aparecen tan monstruosamente complicados que sólo un «especialista» puede entenderlos **produce desconfianza en los individuos con respecto a su propia capacidad**.
>
> (...) Este tipo de influencia produce un doble resultado: por un lado, **escepticismo y cinismo** frente a todo lo que se diga o escriba [lo que conlleva una falta de confianza hacia informaciones y comunicaciones que sí deberían ser dignas de confianza y tenidas en cuenta], y por el otro, **aceptación infantil de lo que se afirme con autoridad**.
>
> Otro modo de paralizar la capacidad de pensar críticamente lo hallamos en la destrucción de toda imagen estructurada del mundo (...); cada hecho no es otra cosa que *un hecho más*, y todo lo que importa es si sabemos más o menos. (...) A causa de todo esto [bombardeo informativo y mezcla absurda de hechos con importancia social y moral y datos insignificantes publicitarios, propagandísticos y de carácter superficial y mercantil] **dejamos de interesarnos** sinceramente por lo que oímos. Dejamos de excitarnos, nuestras emociones y nuestro juicio crítico se ven dificultados, y con el tiempo nuestra actitud con respecto a lo que ocurre en el mundo va tomando un carácter de indiferencia y chatedad. (Fromm, 2020)

La conexión del texto con el contenido de esta memoria es evidente y creemos que no es necesario desarrollar los puntos que se mencionan. No obstante, por si pudiera quedar algún resto de duda, resaltamos los puntos más significativos con respecto a la propuesta: aprendizaje *real* y no aprendizaje de información sin sentido; ejercicio del pensamiento lógico y propio; confianza en las capacidades propias de análisis y razonamiento lógicos; motivación por aprender y por *pensar*.

2. Sobre su estado de enseñanza-aprendizaje

2.1. Cómo se trata el objeto de estudio en el ámbito escolar

Con un análisis de libros de texto y el refuerzo de mi propia experiencia durante el periodo de prácticas, he podido corroborar la impresión que tenía sobre cómo se enfoca nuestro objeto de estudio en el ámbito escolar. La realidad académica sobre la enseñanza y aprendizaje específicos del pensamiento lógico-matemático es bastante decepcionante; la realidad académica sobre el uso de la matemática recreativa, también.

La matemática recreativa se percibe y utiliza como instrumento complementario con el que "entretener" en ocasiones puntuales, en absoluto como herramienta con potencial didáctico en el aula. El desarrollo del pensamiento lógico-matemático, por su parte, se contempla desde una lejanía indirecta; no se diseñan e implementan actividades específicas para fomentarlo ni se refiere a ello directamente, por el contrario, no se tiene en cuenta como contenido ni como objetivo docente. Extraigo, debido a la ausencia de disposición a su enseñanza, que se entiende que esta "habilidad" se adquiere de forma indirecta a través de los métodos repetitivos y memorísticos que imperan en el aula. Es sorprendente el poco esfuerzo que se dedica a trabajar este aspecto, a mi entender y creo que a entender de todo matemático, fundamental de la práctica matemática.

En el grueso de los libros de texto no hay contenido relacionado con la matemática recreativa ni enfocado específicamente al desarrollo del pensamiento lógico. En general, gobierna la propuesta expositiva de teoría poniendo todo el peso en los aspectos técnicos, acompañados de ejemplos y ejercicios sencillos resueltos con los que replicar las teorías previamente presentadas. La presencia de tecnologías es escasa, predominando la exposición de la técnica en "formato algorítmico", esto es, como una receta a seguir más que como un procedimiento con un cierto sentido lógico.

Un fundamento del pensamiento lógico-matemático es *entender*, comprender en profundidad aquello que se hace. A través de una enseñanza con predominante ausencia de tecnologías que justifiquen las técnicas que se presentan, no se puede fomentar un desarrollo del pensamiento lógico-matemático de forma adecuada.

En conjunto, el análisis de libros de texto y mi experiencia durante el periodo de prácticas reafirman que predomina un modelo de *enseñanza tradicional*. En el aula, el profesor, con apoyo de un libro de texto, presenta los objetos matemáticos, los describe, muestra cómo se usan para resolver *problemas* [ejercicios][2] y después pide a los alumnos que se ejerciten en tareas similares a las ya explicadas (Cid y Muñoz, s.f.). Esta metodología de enseñanza se encuentra en absoluta oposición a cualquier formato que potencie el desarrollo del pensamiento lógico-matemático que buscamos y, sin duda, a cualquier formato que incluya matemática recreativa como recurso docente.

Mi conclusión al respecto es la siguiente: la enseñanza de las materias de matemáticas *no enseñan matemáticas*, sólo conceptos y procedimientos mecánicos que forman parte de las matemáticas en cuanto a contenidos y técnicas específicas, sin un valor fundamental o

[2]Más adelante hablamos sobre qué entendemos por "verdadero problema" y cómo diferenciamos entre un *verdadero problema* y un *ejercicio contextualizado*.

esencial de la misma; las materias de matemáticas *no enseñan a pensar* matemáticamente, *sólo a hacer (mecánicamente)*.

Presento a continuación un desarrollo de los análisis a los que remito.

2.1.1. Análisis de libros de texto

Hemos tomado como referencia tres libros de texto, de las editoriales Santillana, SM y Vicens Vives. Su análisis confirma la poca importancia que se da al desarrollo del pensamiento lógico y a la matemática recreativa en el ámbito escolar.

Presentamos en esta sección un breve informe sobre el tratamiento de:

1. El desarrollo del pensamiento lógico;

   teniendo en cuenta el formato expositivo de los contenidos, las actividades propuestas y las referencias específicas a *pensamiento lógico* o *pensamiento matemático*. Estas referencias se incluyen en dos tipos de apartado: los referentes a resolución de problemas para *mejorar el pensamiento matemático*, incluidos normalmente en secciones con nombres tipo "Saber hacer"; y los referidos a pruebas PISA, que se incluyen en secciones con nombres tipo "Competencia matemática".

2. La matemática recreativa;

   teniendo en cuenta las actividades propuestas y el enfoque que dan los libros a la motivación, pues es éste uno de sus fundamentos.

El *saber hacer* y los "problemas" de los libros de texto

En la introducción de este trabajo ya aludía al "saber hacer", y diferenciaba entre un *saber hacer mecánico*, falto de comprensión, y un *saber hacer (real)* que implica un verdadero entendimiento de "lo que se hace". En esta línea, podemos especificar que las secciones de *Saber hacer* de los libros de texto se dedican en su totalidad al planteamiento de técnicas, sin referencias a las tecnologías que las justifican, y a la propuesta de ejercicios o "problemas" que se resuelven mediante procedimientos mecánicos. Es decir, cabría clasificarlas como secciones de "Saber hacer mecánico" y no como secciones de "Saber hacer (real)".

Entrecomillo el término «problemas» porque creo que es importante profundizar en él. En lugar de asumir lo que entendemos por *problema*, optamos por intentar dar una descripción ajustada. Hemos encontrado una referencia a lo que podemos entender por *verdadero* *problema*. Esta descripción fue propuesta por Miguel de Guzmán[3] en *Tendencias innovadoras en educación matemática*: "tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida otras un tanto confusamente perfilada, y **no conozco el camino** que me puede llevar de una a otra" (de Guzmán, 1993). Es importante remarcar la última parte de la descripción: una situación supone un verdadero problema cuando *no se conoce el medio de resolución* −si se conociera la técnica que resuelve la situación, no sería un problema real; no supondría un **reto**−.

Los "problemas" que aparecen en los libros de texto no coinciden con las descripción de *problema verdadero* de Guzmán, pues se resuelven con métodos mecánicos previamente presentados en el libro de texto y por el profesor: "el alumno tiene los caminos bien marcados; si no es capaz de resolver un problema semejante, ya sabe que lo que tiene que hacer es aprenderse la lección primero" (de Guzmán, 1993). Aquellos alumnos que no saben cómo resolver una actividad, lo único que tienen que hacer es revisar la teoría para dar con la técnica con la que podrán dar con la solución. En otras palabras, no cumplen la condición de *desconocimiento* y de *reto* y *desafío* de los verdaderos problemas, y se denota como *problema* aquello que simplemente es un *ejercicio contextualizado*.

Este tipo de actividades, faltas de desafío, no fomentan el desarrollo del pensamiento matemático, simplemente sirven como herramienta para entrenar técnicas ya aprendidas.

Los apartados de *competencia matemática* y las pruebas PISA

Los apartados de *competencia matemática* están principalmente dedicados, en teoría, al desarrollo de razonamiento matemático. Sin embargo, teniendo en cuenta el tipo de actividades que se proponen, podemos decir que no refuerzan específicamente las habilidades del pensamiento matemático sino que, una vez más, se centran en el manejo de técnicas repetitivas. Se componen de diversos "ejercicios contextualizados" −a los que llaman problemas− cuyo planteamiento no evidencia ningún tipo de guía o ayuda en el proceso de aprendizaje del alumno.

Los apartados de *pruebas PISA*, concretamente, plantean enunciados de estas evaluaciones internacionales. De nuevo, estas actividades se centran en la fase de *prueba*, en la fase de evaluación del resultado, en lugar de utilizarse como contexto guiado a partir del cual el

[3]Miguel de Guzmán (1936-2004) es un referente de las matemáticas, en general, y particularmente de la educación matemática y la matemática recreativa. A lo largo de su vida escribió numerosos artículos y libros sobre matemáticas y su enseñanza, siendo la matemática recreativa uno de sus temas centrales. Fue fundador del proyecto EsTalMat, acrónimo de *estimulación del talento matemático*, un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales fundamentado en la idea de cultivar el talento matemático precoz (*Miguel de Guzmán Ozámiz*, s.f.) y cuya metodología de enseñanza se basa en la matemática recreativa.

alumno deba llevar a cabo un proceso de análisis y desarrollo de estrategias de resolución.

En general, con las actividades propuestas el alumno se ve en una situación en la que tiene que recurrir a la teoría y a técnicas repetitivas para resolverlas, no al desarrollo de sus propias habilidades del pensamiento matemático.

GeoGebra y MateMagia

Solamente en uno de los libros analizados hemos encontrado apartados dedicados a actividades con un cierto componente lúdico.

Del libro de texto de la editorial SM destacamos el peso que da a los materiales dinámicos a través de la herramienta *GeoGebra*. Cada pocas páginas aparece alguna actividad propuesta para realizar con esta aplicación, aunque es cierto que estas actividades aparecen totalmente como secundarias −pequeños cuadrados en los márgenes− y es muy probable que se pasen por alto y no se les preste atención ni adquieran peso a lo largo del curso.

Creemos que, en el contexto de la matemática recreativa, el uso de *GeoGebra* puede ser muy positivo para fomentar la **intuición espacial** y el aprendizaje de geometría de forma amena y más adecuada que con métodos tradicionales basados en los dibujos con tiza en una pizarra. El aprender a manejarse con *GeoGebra* supone también un acercamiento a los recursos digitales *en primera persona* por parte de los alumnos, es decir, como **agentes activos** que toman parte en su proceso de aprendizaje. Además, aprender a manejar esta herramienta supondrá al mismo tiempo un avance en el desarrollo del pensamiento lógico, pues como usuarios de la aplicación tenemos que: o bien saber qué queremos representar y a partir de ahí deducir cómo hacerlo paso a paso, con qué objetos geométricos y en qué orden; o bien analizar una representación y desarrollar una interpretación propia sobre lo que está representado.

Otros apartados que nos han llamado positivamente la atención son los dedicados a magia. Sin embargo, a lo largo de todo el libro se proponen muy pocas actividades de este tipo −tres, concretamente−, una cantidad absolutamente insuficiente e insignificante en relación al total de contenidos. También en este caso pensamos que es muy probable que estas actividades se pasen por alto y no adquieran peso a lo largo del curso.

En estos apartados se plantea un truco de magia y se guía al estudiante a analizar “el truco” (matemáticamente). El planteamiento de estas actividades es acorde a la perspectiva que queremos proponer con nuestro trabajo: como punto de partida se propone un truco de magia, que no es más que **un juego con una componente de reto que desafía al estudiante** a querer averiguar más, y a partir de ahí se guía al alumno para analizar la situación, sacar ideas, probar esas ideas y hacer una reflexión sobre si funcionan o no hasta dar con la solución que desvela el truco.

El proceso que se sigue para adivinar el truco es análogo al descrito por Polya en su libro sobre resolución de problemas y su "traducción" al contexto de los juegos que describo en *3.6*.

Los juegos de magia que propone este libro de texto suponen *verdaderos problemas*, y no la mayoría de ejercicios contextualizados que llenan los libros de texto a título de "problema".

Los recursos motivadores: vida cotidiana

Para motivar a los alumnos, en el grueso del libro se incluyen breves apartados a título de "Vida cotidiana" (en los tres libros analizados). En ellos, se describen situaciones que no forman parte de la vida cotidiana *de los alumnos*. Dado que uno de los dos objetivos principales de estos apartados es generar interés y motivación en los estudiantes[4], creemos que este formato no tiene sentido. Para que una situación contextualizada en la vida cotidiana resulte llamativa e interesante a estudiantes de 13 o 14 años, ésta tiene que formar parte de *su* quehacer cotidiano; de nada sirve si no es así. Tampoco le vemos el sentido motivador a los ejercicios contextualizados que plantean situaciones que nada tienen que ver con la vida de lo jóvenes, por ejemplo, "problemas" sobre qué coche comprar según el precio de un combustible u otro, o qué cantidad de uvas garnacha se necesitan para hacer una determinada cantidad de vino; los alumnos, ni tienen dinero ni edad de plantearse el coste de un vehículo, ni les interesan los distintos tipos de uva.

Así pues, los apartados dedicados a motivar a los estudiantes, creemos, no cumplen su objetivo principal. Si realmente se quiere motivar a alguien, tiene que hacerse a través de un contexto que realmente le *afecte* −en el caso de nuestra propuesta, las actividades lúdicas−.

2.1.2. Experiencia en el periodo de prácticas: cómo afecta al alumnado la metodología de enseñanza observada

Otra fuente de información que he tenido en cuenta para analizar el estado de la enseñanza y aprendizaje del pensamiento lógico-matemático a través de la matemática recreativa ha sido mi estancia en el IES Río Arba (Tauste) durante los dos períodos de prácticas estipulados por los estudios del máster.

Tuve la oportunidad de asistir a clases no sólo de mi tutora de prácticas asignada sino

[4]El otro objetivo principal sería dar a conocer la utilidad de las matemáticas en la vida real.

también a clases del resto de compañeros del departamento. Pude observar con claridad que la metodología de todos ellos es la misma de clase tradicional: el profesor presenta la teoría y algún ejercicio como ejemplo, y a partir de ahí pide a los alumnos que repliquen la técnica con tareas análogas.

Por otro lado, a título del departamento de matemáticas, a lo largo del curso se llevan a cabo varias actividades educativas más allá de las sesiones tradicionales que se imparten en el aula. Los objetivos de estas experiencias incluyen desde dar a conocer distintos aspectos histórico-culturales de matemáticas hasta el desarrollo del pensamiento lógico-matemático a través de la matemática recreativa. Entre otras, se organiza una *gymkana matemática* donde los alumnos, por grupos, tienen que resolver pruebas de carácter matemático que incluyen, por ejemplo, actividades de criptografía (descifrar códigos). Esta actividad, llevada a cabo durante varios años en el centro, tiene siempre un efecto muy positivo en los alumnos, que se divierten e involucran activamente en la resolución de las pruebas.

Este tipo de actividades fomenta el gusto por la matemática y hace ver a los estudiantes que esta ciencia no se trata sólo de teoría, definiciones y símbolos que no terminan de comprender, ejercicios repetitivos faltos de interés y procedimientos mecánicos de resolución −ellos mismos lo manifiestan−. Sin embargo, estas propuestas son puntuales y no se utilizan como *método de enseñanza*; al contrario, se llevan a cabo como actividades de entretenimiento, por ejemplo, días de fin de trimestre. De esta manera, **se construye la idea de que la *matemática divertida* no forma parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje serios**, sino que se concibe como una herramienta ligada al pasatiempo; la clase de matemáticas sigue asociada al aburrimiento.

La diversidad del alumnado en cuanto a capacidades e intereses es tal que hacer una generalización que englobe a todos no sería adecuado. No obstante, el interés general de los estudiantes es *aprobar* y, salvo excepciones puntuales, tienen interiorizado que no hace falta *entender* los contenidos para aprobar los exámenes. De esta manera, se centran en memorizar las técnicas que sirven para resolver mecánicamente los ejercicios en lugar de profundizar en las tecnologías que las justifican; **aprenden a memorizar y a replicar métodos, no a pensar matemáticamente**.

2.2. Cómo afecta el estado de la enseñanza en el aprendizaje alumno

Del apartado anterior extraemos las siguiente conclusiones:

- Los estudiantes aprenden a memorizar y a replicar métodos, no a pensar matemáticamente.
- Se construye la idea de que la *matemática divertida* no forma parte de los procesos de

enseñanza y aprendizaje serios, sino que se concibe como una herramienta ligada al pasatiempo; la clase de matemáticas sigue asociada al aburrimiento.

En esta sección desarrollamos los efectos que pueden tener estos dos puntos en el aprendizaje del alumno.

2.2.1. Posibles dificultades y errores de los alumnos en su desarrollo del pensamiento lógico-matemático

Los alumnos no están acostumbrados a que se les haga pensar de forma conscientemente lógica. La falta de costumbre implica una baja disposición hacia este tipo de ejercicio del pensamiento, que requiere de esfuerzo, y un bajo desarrollo de las habilidades necesarias para su desempeño. La educación no está enfocada en fomentar el pensamiento *propio* (pensamiento consciente, pensamiento crítico); está centrada en desarrollar el pensamiento mecánico (automático) y las capacidades memorísticas de los estudiantes.

Es desatacable el hecho de que en ningún momento se enseñe *lógica* como parte de la matemática. ¿Se asume que la lógica del pensamiento matemático se adquiere de forma indirecta? Me parece un tremendo error partir de este supuesto.[5] De hecho, durante la educación secundaria no se imparte oficialmente ningún contenido que referencie específicamente a la lógica. A lo largo de la etapa educativa de nivel medio (secundaria y bachillerato) el único momento en que *se imparte lógica* es en la materia de filosofía de 1º de Bachillerato. Resalto intencionadamente "se imparte lógica" porque son dos las referencias a aspectos específicamente lógicos, tanto en el currículo de ESO como en el de Bachillerato.[6]

La lógica es más compleja de lo que pudiera parecer, incluso en niveles básicos; no es *tan* evidente, y mucho menos para quienes no están acostumbrados a trabajar con ella. Actualmente se asume casi de forma inmediata que la lógica proposicional es *elemental* y que sería *absurdo* contradecirla. Hay quien podría decir que, por el mero hecho de considerarnos seres racionales, la lógica proposicional forma parte de nosotros; en este supuesto, se estaría estableciendo la correspondencia entre nuestra racionalidad, es decir, la capacidad de *pensar de forma lógica*, con los procesos de inferencias proposicionales.[7]

Sin embargo, todo proceso de inferencias, por aparentemente sencillo que sea, puede ge-

[5] La crítica a esta postura podría ir perfectamente dirigida a cualquier nivel de la educación pública oficial; ni siquiera en el grado de matemáticas entra la lógica como contenido obligatorio.

[6] Orden ECD/494/2016. Filosofía. 1º de Bachillerato. Bloque 6: *La racionalidad práctica*. Contenidos: Retórica, argumentación y lógica: la comunicación desde la filosofía; La lógica proposicional.

[7] Me refiero específicamente a la *lógica proposicional* por constituir ésta el sistema lógico completo más simple (lógica de orden cero).

nerar cantidad de problemas y dificultades; sobretodo en personas que no hayan desarrollado este tipo de *lenguaje* −todo sistema lógico formal se conforma en términos de un lenguaje, con una serie de símbolos y reglas de cálculo que lo definen− y de habilidades del pensamiento.

Es evidencia de ello la cantidad de *errores y dificultades lógicas* que presentan alumnos de los primeros cursos de secundaria (también alumnos de cursos más avanzados, pero en edades más tempranas resulta más notorio). En estas edades, en que se produce el despertar del razonamiento lógico, es vital educar a nuestro pensamiento para que entienda y conozca procedimientos lógicos correctos y se familiarice también con los errores que por defecto somos más susceptibles de cometer. En este sentido, a continuación haremos una enumeración de falacias en las que incurrimos con facilidad.

Históricamente, ningún sistema lógico se ha dado por sentado; todo sistema lógico ha sido cuestionado y estudiado hasta poder considerarlo formalmente estable, correcto, *válido*. De esta manera se han construido sistemas lógicos que parecerían absurdos, pero que se sostienen (lógicamente).[8] La lógica es *lógica, no evidente*.

A continuación señalamos una serie de posibles dificultades y errores de los alumnos que pueden darse, en parte, debido al estado de la enseñanza descrito en el apartado anterior.

1. Dificultades cognitivas. No tienen desarrollados los procedimientos lógicos del pensamiento necesarios para responder tareas lógicas. Tampoco tienen dominio de la definición de los procedimientos ni de las acciones lógicas y, por tanto, no son capaces de proponer acciones concretas para su desarrollo.
2. Dificultades comunicativas. Tienen dificultades al explicar un hecho o fenómeno expresando sus ideas correctamente, de forma directa y precisa; no tienen un buen manejo del lenguaje.
3. Dificultades creativas. Utilizan estrategias o acciones aprendidas de memoria para resolver problemas, lo que no funciona en el caso del análisis de situaciones donde tienen que llegar a una solución de forma creativa e independiente.

Los errores más claros y comunes del pensamiento racional pueden englobarse en lo que conocemos por *falacia*. Una falacia es un argumento aparentemente correcto, pero que en realidad no lo es. Hemos hecho una recopilación de las que nos parecen más relevantes.

1. Tautología: la veracidad del argumento ya se incluye entre sus premisas.
2. Sin sentido: los argumentos son irrelevantes; la conclusión no tiene conexión con el argu-

[8] Podríamos hablar de cualquiera de las denominadas *lógicas no clásicas*, por ejemplo, de lógicas polivalentes, de la lógica difusa, de la lógica cuántica...

mento.
3. Razonamiento circular: las conclusiones del razonamiento coinciden con las premisas.
4. Hipótesis falsa: se parte de una premisa que no es verdad, pero se toma como cierta.
5. Causa falsa: se confunde *correlación* con *causalidad*; se asume que *algo* es consecuencia de *otro algo* debido a una coincidencia de acontecimientos, cuando en realidad pueden estar en juego otros factores.
6. Falsa dicotomía: de todas las opciones posibles, se tienen en cuenta sólo dos; así se acota el argumento y se ocultan las demás posibilidades consiguiendo que no se tengan en cuenta todas las opciones.
7. Falsa analogía: se equiparan dos elementos basándose en la coincidencia entre uno o varios aspectos de los mismos.
8. Contra el hombre: se argumenta contra la persona en lugar de dirigir el argumento hacia la proposición misma.
9. Por la ignorancia: se toma el argumento por cierto debido a que no se puede demostrar que sea falso.
10. Apelación a la autoridad: la veracidad del argumento se basa en la autoridad o prestigio de la persona que lo defiende y no en la evidencia.
11. Apelación a la multitud: un argumento se toma por válido porque "todo el mundo lo piensa".

2.2.2. Posibles dificultades de los alumnos debido al uso de la matemática recreativa en el aula

Obstáculos de origen afectivo

Dado el estado de la enseñanza respecto de la matemática recreativa, que fomenta asociar la matemática divertida con el entretenimiento, mantener el interés por las actividades de forma que se consigan los objetivos de aprendizaje puede resultar costoso. Uno de los principales argumentos a favor de la matemática recreativa es su componente motivacional (desarrollamos este aspecto en *3.3*). Actualmente, la velocidad de transmisión de información y la enorme cantidad de estímulos que nos rodea de forma constante nos acostumbra a redirigir la atención de un objetivo a otro en intervalos de tiempo muy breves, fomentando la distracción y el cambio constante de ocupación (Ballesteros (2011) habla de la atención y el "ecosistema de la distracción" de la sociedad actual). Mantener la atención de los estudiantes no es tarea fácil. En este aspecto, puede surgir la dificultad de mantener la motivación de los alumnos cuando las actividades planteadas requieran "demasiado" esfuerzo o, simplemente, no sean suficiente atractivas.

Obstáculos didácticos

Los juegos, dado su carácter de contexto abierto, proporcionan un amplio margen para que el alumno desempeñe sus habilidades y explote sus conocimientos; también proporcionan margen para la imaginación y la creatividad. No obstante, los estudiantes no están acostumbrados a estas *libertades*. La educación tradicional enseña, por defecto, que para resolver un problema hay que recurrir a una técnica recién aprendida. En este sentido, los alumnos están condicionados a restringir su creatividad en contextos matemáticos: la imaginación no les es útil, pues lo que tienen que hacer es repetir técnicas de forma mecánica.

Teniendo esto en cuenta, es evidente pensar que el planteamiento de juegos presentará situaciones ante las que los alumnos no sepan cómo actuar, pues su forma de operar ante los problemas matemáticos no es la adecuada. A través de las actividades **pretendemos que nuestros alumnos piensen, no que repliquen mecánicamente**. Así, tendrán que aprender a *descontextualizar las técnicas* y a abordar los problemas desde un punto de vista nuevo, esto es, desde su análisis lógico imparcial en que **el objetivo es pensar y razonar** qué hacer y cómo hacerlo, en lugar de asumir que para resolverlo deben usar x procedimiento.

3. Sobre sus razones de ser

Las *razones de ser* del pensamiento lógico-matemático y de la matemática recreativa no se constituyen como necesidades específicas que nazcan de problemas o contextos concretos. La razón de ser del desarrollo del **pensamiento lógico** es el propio acto de pensar; la razón de ser del desarrollo del **pensamiento matemático** es la propia práctica matemática (que incluye el uso del pensamiento lógico); y la razón de ser de la **matemática recreativa** reside en la motivación misma de la matemática y la naturaleza del ser humano. En otras palabras, podríamos decir que nuestro objeto de estudio está compuesto por elementos cuyas razones de ser son intrínsecas a ellos mismos y a sus interrelaciones.

Así pues, en esta sección nos centramos en presentar razones de ser de la relación entre estos componentes. En decir, presentamos desde distintas perspectivas la relación que existe entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y las actividades lúdicas y, de esta forma, justificamos su sentido tanto dentro como fuera del aula.

Introducción

Se tiende a clasificar como incompatibles la *matemática seria* y académica, la que se estudia de manera oficial en nuestras instituciones, y la *matemática recreativa*, relacionada con juegos y acertijos (Olarrea *et al.*, s.f.). Está tan interiorizada la visión de la enseñanza como algo serio y aburrido, que el planteamiento de una *matemática lúdica* como elemento esencial de la enseñanza puede resultar falto de sentido y de rigor, y sin duda abocado fracaso. Estamos de acuerdo en que la enseñanza es algo *serio*: "serio" en el sentido de importante y significativo, no como sinónimo de aburrido.

Por defecto, tal y como hemos visto en la sección anterior, relacionamos la componente *divertida* de las matemáticas con una actividad enfocada fundamentalmente al pasatiempo, a la divulgación, y en ningún caso con una actividad esencialmente formativa. Sin embargo, el carácter lúdico de la matemática y su desarrollo más riguroso y formal han ido históricamente de la mano. La relación más evidente y directa es el grado de influencia de problemas de matemática recreativa en el desarrollo de algunas ramas de la matemática actual tales como la teoría de números, la teoría de grafos, la teoría de la probabilidad, la combinatoria o la criptografía. En *3.4* profundizamos en estas conexiones. Desatacamos otra relación entre pensamiento lógico y juegos en *3.5*, donde contextualizamos distintas "categorías del pensamiento lógico" en el ámbito de los juegos.

No obstante, la conexión entre juegos y matemáticas abarca mucho más que la relación directa entre una rama de las matemáticas y un contexto lúdico que la motivó o fue fundamental para su desarrollo. Como explica de Guzmán (1989), muchos **modos de pensar innovadores** en matemáticas se han dado como consecuencia del planteamiento de una pregunta en un contexto lúdico o de una observación en un contexto falto de todo rigor o seriedad y en muchas ocasiones, estas ideas han permanecido durante largos periodos de tiempo **faltas de utilidad**, sin más aplicación que su propio desarrollo.

En general, no se presta demasiada atención a las componentes creativa e inventiva de la práctica matemática, pero la historia es evidencia del absurdo de esta línea de pensamiento. Desarrollamos este aspecto del quehacer matemático y de la actividad lúdica en *3.1*. También hablamos sobre el concepto de inutilidad en *3.2*.

3.1. La componente creativa de la matemática y los juegos

Poincaré (2018) expone su visión de cómo se da la invención matemática, y lo hace apelando a dos procesos, necesarios entre sí, sin los cuales este *acto inventivo* no podría darse. Por un lado, se refiere al proceso lógico de los "cálculos estrictos, que exigen de disciplina, atención y voluntad –y, por tanto, consciencia–". Por otro lado, manifiesta la importancia (generalmente ignorada) de procesos *subliminales* del pensamiento en los que "reina la ausencia de disciplina y el desorden nacido del azar" que forman parte del trabajo inconsciente del pensamiento. Esta *libertad* del pensamiento –él mismo lo denota como tal– proporciona un cierto *margen de acción* al pensamiento que, en nuestra práctica consciente, racional y rigurosa, queda limitado y restringido.

La importancia de esta funcionalidad del pensamiento *fuera de los márgenes de la racionalidad estricta* en los procesos inventivos queda patente en el siguiente fragmento del texto de Poincaré:

> «No se trata sólo de aplicar reglas, de fabricar el mayor número posible de combinaciones según algunas leyes fijas [esto se correspondería con las funcionalidades estrictamente lógicas racionales rigurosas del pensamiento (comentario añadido)].
>
> »(...) El verdadero trabajo del inventor [en este caso, el matemático que *inventa*, crea, construye ideas] consiste en elegir entre dichas combinaciones, eliminando aquellas que son inútiles o más bien ahorrándose la molestia de realizarlas [en este proceso de filtrado reside la importancia de la libertad creativa del pensamiento (comentario añadido)]»

Apoyándonos en una reflexión de Guzmán (1989), relacionamos ahora este grado de libertad del pensamiento, fundamental en la práctica matemática según Poincaré, con el componente lúdico contextual que proporcionan los juegos. En este texto, Guzmán, por su parte, destaca la importancia de la *libertad imaginativa* como fuente de creatividad en el desarrollo de la matemática, y propone los juegos y los puzzles como actividades ideales donde dar lugar a la imaginación "sin necesidad de encasillarla en las estructuras conceptuales o metodológicas de una teoría tradicional ya constituida".

En otras palabras, se plantea la *libertad* propia de los contextos lúdicos −libertad imaginativa, libertad de pensamiento− como componente esencial en la ruptura con los métodos y estructuras tradicionales y como medio para crear "nuevos modos de pensamiento" −aspecto clave en el desarrollo de la matemática−.

3.2. La componente de *inutilidad* de la matemática y los juegos

La relación entre los aspectos formal y lúdico de la matemática nos lleva a hablar también del concepto de *utilidad*. La matemática recreativa ha originado ideas aparentemente *faltas de utilidad* cuya aplicación práctica se ha hecho patente tiempo después. Un ejemplo es la búsqueda de números primos, que se originó como un pasatiempo en la Grecia Clásica y es ahora el pilar de la criptografía. Hablamos de ello en *3.4*.

Queremos aprovechar este apartado para hacer una crítica a la (aparente) obsesión de la instrucción formal por la utilidad directa e instantánea de los saberes. Al igual que consideramos errónea la extendida clasificación dicotómica entre matemática formal y matemática recreativa, también juzgamos como falto de sentido el asociar lo *digno de ser enseñado (y aprendido)* con lo *útil*. En la sociedad actual se hace *apología de la utilidad* y se rechaza aquello que, en principio, no puede usarse y aplicarse de forma que proporcione algún tipo de beneficio (a ser posible inmediato).

La propia historia de la matemática refuta esta postura. *Inutilidad* es uno de los principales calificativos asignables a gran parte del universo matemático (sobre todo cuando una teoría está aún en proceso de desarrollo). Sin embargo, esta aparente inutilidad se ha convertido en numerosas ocasiones en aplicación necesaria para fundamentar o desarrollar otras ramas de otras ciencias.[9]

Creemos que el rechazo generalizado hacia la matemática recreativa como recurso didáctico se asocia, no sólo a la incompatibilidad pretendida entre el formalismo y los aspectos lúdicos, sino también a este carácter de "inútil". El carácter lúdico representativo de este formato, *inútil* en un contexto de productividad y aplicación inmediatas, se aleja del aspecto puramente formalista de la matemática tradicionalmente académica; y se aleja también de la enseñanza y aprendizaje de conceptos concretos y procedimientos algorítmicos que tan asentados están en las enseñanzas oficiales institucionales.

Para concluir, queremos hacer patente esta razón de ser de la matemática recreativa: el propio juego y manejo de las habilidades del pensamiento y la *inutilidad inmediata* de su práctica más allá de la propia motivación. Hablamos a continuación de la componente motivacional de la matemática recreativa.

3.3. El papel de la motivación

Por un lado, hablamos de la condición de *voluntariedad* que Amestoy (2002) especifica como necesaria en el proceso de aprendizaje de las habilidades del pensamiento. Podemos definir *motivación* como una fuerza (interna) que induce a una persona a realizar una acción de forma **voluntaria y consciente** y que le lleva a mantenerse en ella. Contextualizando esta *voluntad de acción* en el marco de la enseñanza y del aprendizaje, definimos *motivación del alumno* como el interés y ganas que tiene por progresar en su aprendizaje o por las actividades que le llevan a él (Olarrea *et al.*, s.f.).

[9]Por ejemplo, cantidad de aplicaciones prácticas de la teoría cuántica como pueden ser el desarrollo del láser de los reproductores de DVD, los rayos X o las células fotoeléctricas de dispositivos automatizados, así como el desarrollo de la *Teoría de la Relatividad General* de Einstein y su fundamento matemático en el desarrollo de las geometrías no euclídeas.

Uno de los fundamentos (si no el principal) con el que se defiende la matemática recreativa como recurso didáctico es cómo afecta a la motivación de los estudiantes. El carácter lúdico de los juegos genera en los estudiantes una disposición positiva ante su aprendizaje. Dice Guzmán (2007) que “gran parte de los fracasos matemáticos de muchos estudiantes tiene origen en su *posicionamiento afectivo destructivo* de sus propias potencialidades” y propone el carácter lúdico de los juegos como el mejor método para despertar interés y actitud positiva por parte de los estudiantes.

En esta búsqueda de la motivación del alumno más allá del posible interés intrínseco por la matemática y sus aplicaciones directas, en *Tendencias innovadoras en educación matemática*, Guzmán resalta la importancia de *los elementos afectivos* que envuelven todo proceso personal del individuo −incluyendo los procesos de aprendizaje−. En este sentido, se defiende el intentar transmitir a los alumnos el *sentimiento estético* y el *placer lúdico* de la matemática como medio para involucrarlos de forma más personal y humana (de Guzmán, 1993).

Fernández (2001) defiende en *Aprender a hacer y conocer: el pensamiento lógico* que el juego es “el material más adecuado para posibilitar al alumno el pasar de la manipulación concreta a la generalización de la idea que ha sido él mismo de generar a través de su proceso de manipulación”, describiendo al docente como una persona que *guía* el aprendizaje de un alumno que *manipula, observa, descubre y elabora su propio pensamiento*.

Por su parte, Bilbao (2021) hace referencia también a los efectos de los retos matemáticos recreativos en la **creatividad y curiosidad** del estudiante y, de hecho, toda su investigación gira en torno a este fundamento. También Guzmán en *Juegos y matemáticas* defiende un acercamiento a las matemáticas desde la perspectiva del componente lúdico: “las preguntas y situaciones que son capaces de *los bloqueos intelectuales* (...) surgen muy a menudo cuando somos capaces de colocarnos en una *actitud distendida y juguetona*, fuera del contexto serio y severo con que reviste normalmente la ciencia oficial”. Añade: “el juego matemático bien escogido puede conducir al estudiante a la mejor atalaya de *observación y aproximación inicial* a cualquiera de los temas de estudio, (...) los beneficios son innumerables: apertura, desbloqueo, motivación, interés, diversión, entusiasmo...” (de Guzmán, 1989).

En conclusión, presentamos como razón de ser de la matemática recreativa la diversión, que hace de motor motivacional hacia el aprendizaje, y cuyo carácter flexible permite a los estudiantes desarrollar no sólo el pensamiento lógico sino también la creatividad (matemática).

3.4. Influencia (directa) de la matemática recreativa en el desarrollo de la matemática formal

Con los apartados anteriores hemos querido dejar constancia de una conexión profunda entre el pensamiento matemático y la actividad lúdica. Ahora, tal y como adelantábamos al comienzo de esta sección, queremos evidenciar también la clara correspondencia que se da entre varias ramas de la matemática actual −formal, rigurosa, exacta, *lógica*− y la motivación lúdica que las originó o motivó a su desarrollo. El objetivo de este apartado es hacer explícita la relación, describiendo de forma general en qué consiste la rama o teoría y el planteamiento del contexto lúdico, sin entrar en detalles del contenido matemático específico de resolución de los problemas, acertijos o retos matemáticos.

Combinatoria y los cuadrados mágicos de la antigua China

La *teoría combinatoria* es la rama de las matemáticas que estudia cuestiones de enumeración, ordenación y agrupación de un número determinado de elementos. El estudio de la existencia de configuraciones de números que satisfacen una serie de requisitos, y también el estudio de las propiedades de estas configuraciones, forma parte de la teoría combinatoria.

El famoso libro de las mutaciones, más conocido como *I Ching*, está repleto de simbología relacionada con los números y sus posibles configuraciones. Una de las principales escuelas del *feng shui*, un antiguo sistema filosófico chino de organización del espacio, usa simbología del *I Ching* y basa sus teorías en el *cuadrado mágico de Lo-Shu*.

Un *cuadrado mágico* de orden n es una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ de números naturales dispuestos de forma que la suma de sus filas, columnas y diagonales mayores es la misma. El valor de esta suma se llama *densidad* del cuadrado mágico. Normalmente, los números que conforman el cuadrado son consecutivos y empiezan en el 1, en cuyo el cuadrado se dice *normal*.

El *cuadrado mágico de Lo-Shu* es un cuadrado mágico normal de orden 3, es decir, dispone de una forma determinada los números del 1 al 9 (ver Figura 1). En sus orígenes, estos números estaban representados con puntos blancos o negros según se refieren a números impares o pares, respectivamente.

Teoría de números y la escuela pitagórica

La *teoría de números* es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los números (especialmente las propiedades de los enteros).

En el siglo VI a.C. Pitágoras fundó una escuela filosófico-matemática de carácter místico que consideraba el número como la esencia de todas las cosas (Ferrero, 2010). Así, los pitagóricos estudiaron los números y sus formas.

Clasificaron los números en pares e impares. El número 2 significaba *opinión*, el número 4 significaba *justicia*, el número 1 ni siquiera era considerado un "número" como tal sino que era considerado *el divino generador de todos los números*. También los principios geométricos se expresaban en términos numéricos: el 1 era el punto, el 2 la línea, el 3 la superficie y el 4 el sólido.

El 10 era considerado *el* número perfecto y se convirtió en objeto de culto, siendo éste la suma de los primeros cuatro números. Su representación geométrica en forma de triángulo equilátero (ver Figura 2), llamada *tetractys*, adquirió naturaleza divina en el juramento pitagórico. El número 10, por su disposición geométrica, se clasificó como *número triangular*.

El desarrollo de la lógica y las falacias y paradojas enunciadas en la Antigua Grecia

Cuando nos expresamos y defendemos o refutamos una afirmación, elaboramos un argumento. Para argumentar hacemos uso de la lógica: partimos de una situación x, con una serie de premisas, y a través de un proceso de razonamiento (lógico) llegamos a una situación y con una serie de conclusiones. Los razonamientos pueden ser correctos o no serlo. En muchas ocasiones los errores del razonamiento no son evidentes y quedan camuflados en el cuerpo del razonamiento. Una *falacia* es un razonamiento aparentemente correcto pero que en realidad no lo es; una *paradoja* es una afirmación que alberga algún tipo de contradicción.[10]

Las paradojas de Zenón y las falacias de Euclides son dos ejemplos claros de *juegos de lógica*. La motivación de las paradojas de Zenón fue hacer una denuncia burlona ante la forma de pensar de sus matemáticos contemporáneos, y Euclides, por su parte, usaba las falacias como recurso motivador para llamar la atención a sus alumnos sobre "los procesos correctos del pensamiento" −no obstante, el primer estudio elaborado sobre falacias queda recogido en *Refutaciones sofísticas*, obra de Aristóteles donde se identifican y clasifican trece falacias−.

Teoría de la probabilidad y los juegos de azar

La *teoría de la probabilidad* es la rama de las matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios, y constituye la base teórica de la estadística. La estadística es la rama de las ma-

[10] La palabra "paradoja" viene del griego *para* («contra») y *doxa* («opinión»), del que deriva el término latino *paradoxun*, que se refiere a algo carente de sentido, increíble o absurdo.

temáticas que estudia el “comportamiento” de conjuntos de datos, esto es, su organización, interpretación y variabilidad, así como sus formas de representación y los procesos que los generan; las leyes de la probabilidad proporcionan un modo de estructurar el comportamiento de estos procesos (Sofio, 1989).

Los primeros planteamientos de la teoría de la probabilidad nacen como estudio de los juegos de azar: conocer qué jugadas son más o menos posibles da ventaja en el juego. En el siglo XVII, el caballero de Mére mostró interés por el análisis de un juego de dados. Este análisis fue llevado a cabo por Pascal y Fermat, quienes desarrollaron la técnica para obtener la *probabilidad de éxito* de una jugada de dicho juego.

Teoría de grafos y el problema de los siete puentes de Königsberg

El planteamiento del *problema de los siete puentes de Königsberg* es el siguiente: un río atraviesa la ciudad de Königsberg y la divide en cuatro partes, que quedan conectadas entre sí por siete puentes tal y como muestra la Figura 3. La pregunta es: ¿se puede dar una vuelta por toda la ciudad saliendo de cualquiera de las cuatro regiones y pasando por todos los puentes una sola vez?

En este caso fue Euler quien presentó una solución generalizada al problema y sentó las bases de la teoría de grafos actual. Un *grafo* es un conjunto de elementos que pertenecen a una de dos categorías: están los *vértices* o *nodos*, y las *aristas* que los conectan. Gráficamente, un grafo es un conjunto de puntos y líneas o flechas, representando cada punto un nodo y cada línea o flecha una arista. Si las conexiones entre nodos son flechas, entonces hablamos de un *grafo orientado*.

El problema de los puentes de Königsberg es fácilmente traducible a lenguaje de grafos. Simplemente tenemos que identificar cada región del mapa con un nodo y cada puente con una arista. Vemos la representación gráfica en la Figura 4. De esta manera, el problema queda reducido a averiguar si es posible partir de cualquier punto del grafo y volver al mismo punto habiendo recorrido todas las líneas.

El desarrollo de la criptografía y los *desafíos* con números primos

En 1979, Shamir y Adleman crearon un sistema criptográfico de clave pública (RSA) basado factorización de números enteros. Hasta ese momento, la factorización en primos de números enteros o la búsqueda de primos “grandes” había sido fundamentalmente un pasatiempo *inútil*.

3.5. Categorías del pensamiento lógico-matemático y su relación con los juegos

Según Fernández (2001) el pensamiento lógico-matemático se compone y debe entenderse desde tres categorías. En este apartado, contextualizamos dichas categorías en el ámbito de los juegos.

Capacidad para generar ideas cuya expresión e interpretación sea *juzgable*

Una expresión es *juzgable* cuando se puede determinar su veracidad, esto es, cuando se puede determinar si es verdadera o falsa.

En una primera fase de enfrentamiento a un juego, el jugador parte de una situación y debe interpretar la información con la que cuenta para generar ideas y considerar distintas posibilidades de acción. A medida que el juego avanza y el jugador toma decisiones, éste desarrollará su capacidad para generar ideas cuya interpretación sea juzgable, pues a cada jugada deberá *juzgar* si sus predicciones eran acertadas o no lo eran.

Cada decisión es una prueba y puede verse como un *juicio* que verificará, o no, cuán buena es esa decisión. En este caso, equiparamos el *juicio de verdad* propio de la lógica con la *comprobación* de las decisiones de los juegos.

Utilización de la representación con la que *el lenguaje* hace referencia a tales ideas

Para analizar un juego y tratar de averiguar cuál es la mejor jugada, necesitamos referirnos a los distintos elementos que forman parte del juego: piezas, dados, jugadores, tablero, turnos, rondas, normas... Evaluar y valorar posibilidades a tener cuenta durante el desarrollo del juego implica *pensar* en estas componentes y, para pensar, usamos un *lenguaje*: si no contamos con una colección de términos que denoten los objetos a los que queremos referirnos y sobre los que queremos reflexionar, no podemos llevar a cabo ningún tipo de reflexión.

Una de las grandes dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de matemáticas es el lenguaje; los símbolos, el uso de letras en lugar de números. En la educación primaria se aprende que *matemáticas es números*, y al introducir en secundaria las letras como incógnitas, variables, constantes, etc. esta idea se desmorona sin proporcionar una idea clara de la complejidad y sentido del lenguaje matemático. Es esencial familiarizar a los alumnos en el uso de lenguajes *no cotidianos* como herramienta del pensamiento lógico-matemático, y los juegos proporcionan contextos ideales para ello.

En contextos habituales, el lenguaje que utilizamos es el lenguaje cotidiano; en contextos matemáticos, el lenguaje utilizado es el propio de la matemática formal que se ha ido desarrollando a lo largo de la historia. En el contexto de un juego o planteamiento de situación sobre la que reflexionar con suficiente complejidad, tendremos que *construir* el lenguaje que vayamos a utilizar.

El uso de matemática recreativa propicia la familiarización con el uso de lenguajes *personalizados*: colecciones de términos que denotan objetos a los que necesitamos referirnos para llevar a cabo nuestros procesos de razonamiento. Este aspecto es esencial en la práctica matemática, cuyo fundamento es un lenguaje propio que denota ideas y concepciones abstractas a las que no se puede "acceder" si no es por medio del lenguaje matemático.

Comprender el entorno mediante la aplicación de los conceptos aprendidos

Por último, cuando jugamos, comprendemos las situaciones que analizamos y sobre las que trabajamos el pensamiento en términos de las ideas que hemos ido generando y expresando en nuestro proceso de análisis. A través del desarrollo de ideas, y de los términos y expresiones que las denotan y describen, llegamos a comprender el contexto que se nos plantea. La capacidad para analizar y describir que se desarrolla a través del juego, es la misma que se necesita para analizar, describir y, por tanto, comprender contextos no necesariamente lúdicos ni académicos. Estas capacidades, se desarrollen en un contexto o en otro, son aplicables a todo tipo de situaciones.

3.6. Etapas de resolución de un problema y los juegos

El proceso de enfrentarse a un juego, estudiar sus reglas y buscar estrategias, *jugar*, aprender de los resultados obtenidos, buscar estrategias mejores, *jugar* y comprobar la mejora de la nueva estrategia y seguir aprendiendo de la experiencia es comparable al proceso que se sigue en la resolución de un problema. Tanto en el proceso de resolución de un problema como en el de enfrentarse a un juego, se preserva la sensación de desafío y desconocimiento del *cómo resolver* y, con ello, el placer de explotar y descubrir (de Guzmán, 1993).

Hay diferentes modelos que nos facilitan el camino a seguir cuando nos enfrentamos a un problema, pero la formulación de Polya (1989) de las etapas fundamentales del proceso suponen la base de las propuestas posteriores. Mostramos a continuación un esquema del proceso de resolución de problemas y lo adaptamos al contexto de los juegos:

Etapa 1 Comprender el problema [Familiarizarse con el juego]

Leer el enunciado despacio, saber cuáles son los *datos*, saber cuáles son las *incógnitas* y tratar de encontrar la relación entre unos y otras. [Familiarizarse con las *normas* del juego e interiorizar el *propósito* que tiene]

Etapa 2 Trazar un plan para resolverlo [Buscar una idea útil para formular una estrategia]

Mirar el problema [juego] desde distintas perspectivas, de manera flexible y alejada del mecanicismo, tratando de relacionarlo con conocimientos ya adquiridos o problemas [juegos] ya conocidos. ¿Se puede platear de otra forma? También es útil imaginar una versión más sencilla. El objetivo en esta etapa es dar con una idea que nos sea útil para avanzar en la resolución [jugada] y con suerte decisiva para llegar a la solución [ganar el juego].

Etapa 3 Poner en práctica el plan [Llevar a cabo la estrategia]

Llevar a cabo la idea que hemos pensado, de manera flexible y alejada del mecanicismo, para comprobar cómo se da el proceso. Hay que tener en cuenta que *el pensamiento no es lineal* y que hay saltos entre el diseño del plan y su puesta en práctica, así que nuestras ideas irán modificándose en función del desarrollo del proceso.

Hay que comprobar los pasos del plan, ¿son correctos? [¿me ha salido bien la jugada?]. Antes de hacer algo hay que pensar qué se consigue con ese paso, y cuando se hace hay que fijarse en si las cosas han salido como esperábamos: ¿he conseguido lo que buscaba?

Cuando se llega a una dificultad bloqueante [a un punto de la partida donde el plan ya no sirve y no sabemos qué hacer] hay que volver al principio, reordenar las ideas −¿qué puedo hacer?, ¿a dónde quiero llegar?, ¿cómo puedo hacerlo?− y probar de nuevo.

Etapa 4 Retrospectiva

Leer de nuevo el enunciado y comprobar que hemos averiguado lo que se pedía [analizar la partida para comprobar si hemos cumplido las reglas, qué estrategia hemos seguido y qué resultados hemos obtenido]. ¿Tiene sentido la solución?, ¿cómo podemos comprobarlo?, ¿hay otras formas de resolver el problema? [¿podría seguir otra estrategia para conseguir mejores resultados en la partida?]

4. Propuesta didáctica

Los conocimientos previos necesarios para llevar a cabo las actividades de esta propuesta se limitan a las operaciones básicas, lo demás lo aportarán las propias actividades. En cada actividad se explicará todo lo necesario para poder realizarla. El alumno no necesita conocer ningún contenido específico, simplemente debe deshacerse de la idea tradicional de la "clase de matemáticas" y percibir las actividades como desafíos que quiere resolver (más allá de la perspectiva de memorizar y ejecutar mecánicamente las técnicas que explica el profesor).

4.1. Principios metodológicos

Motivación

El sistema educativo español se ha desarrollado de tal forma que los alumnos han perdido el interés por la materia de matemáticas.

Queremos destacar la importancia de la motivación y la actitud en el proceso de aprendizaje de las habilidades del pensamiento lógico: "el alumno juega un papel muy importante en el proceso de aprendizaje (...) su participación además de **activa**, debe ser **voluntaria**; la persona debe poseer el deseo de desarrollar su mente y la actitud positiva hacia el aprendizaje" (Amestoy, 2002). En este artículo se enumera una serie de requisitos relativos al *ambiente instruccional* que deben facilitar las metodologías orientadas al desarrollo de las habilidades del pensamiento para que su desarrollo sea efectivo. Damos especial importancia a las condiciones de **flexibilidad y apertura**, que estimulan la interacción, la participación, la expresión libre, la discusión de ideas y la **posibilidad de aprender tanto de los errores como de los aciertos**.

Ya hemos hablado de la motivación como una de las razones de ser de la matemática recreativa, proporcionando las actividades lúdicas que la caracterizan estas condiciones ideales para el desarrollo del pensamiento lógico. Así, uno de los fundamentos de nuestra propuesta didáctica es el aspecto motivacional de la matemática recreativa como motor de los procesos de aprendizaje.

Intuición *versus* abstracción como punto de partida

Actualmente, la matemática se enseña en unos niveles de abstracción y formalismo innecesarios y, desde luego, inadecuados para el desarrollo matemático inicial de los estudiantes.

La abstracción es una componente fundamental de la matemática, pero no está justificado el formato en que se presenta: “a cada fase de desarrollo mental, como a cada etapa histórica o a cada nivel científico, le corresponde su propio rigor, (...) la formalización rigurosa de las experiencias iniciales corresponde a un estadio posterior” (de Guzmán, 2007). Un exceso de rigor en edades tempranas dará a lugar a un truncamiento de la intuición que paralizará el aprendizaje (de Guzmán, 1984).

Creemos que es imprescindible que los alumnos trabajen la **intuición** y la **manipulación del espacio y de los símbolos**. La enseñanza tradicional se ha alejado tanto de la componente intuitiva y experimental de la matemática −especialmente en sus estadios iniciales de descubrimiento y construcción− que, en su instrucción formal, ha perdido el carácter de ciencia que *se hace*. A tenor de la enseñanza tradicional, pareciera que la matemática es una “ciencia hecha” que, de alguna forma, *viene dada*.

Si perdemos la componente constructiva del quehacer matemático, nos desprendemos al mismo tiempo de sus componentes creativa e inventiva y, como ya hemos desarrollado en apartados anteriores, las consideramos características esenciales de la práctica matemática. Una persona que aprende técnicas propias del desarrollo matemático pero que no entiende el fundamento ni razón de ser de lo que está haciendo y opera mecánicamente, será, a lo sumo, un *técnico matemático* capaz de ejecutar una serie de procedimientos pero incapaz de *hacer matemáticas*.

Aprendizaje basado en la resolución de problemas

La actividad matemática se ejercita mediante el enfrentamiento con problemas adecuados al estadio del desarrollo del individuo que la practica (de Guzmán, 1984). La situación básica de las matemáticas es siempre la misma: hay un problema que queremos resolver, es decir, se da una situación que supone un *verdadero problema* para la que queremos encontrar una solución (Guerrero, 1999). Lo más importante es, por tanto, *hacer*; hacer de tal modo que el individuo adquiera autonomía (de Guzmán, 1984). Por tanto, será necesario que quien aprende, *entienda*, que sea consciente de lo que hace y de por qué lo hace, y que de esta manera sea él mismo quien construya su propio aprendizaje.

> En la “ciencia hecha”, el estudiante se limita a repetir lo que otros hacen y así el aburrimiento y la falta de motivación provocan un empobrecimiento mental que atrofia todo ansia por conocer. **La matemática exige un proceso personal de construcción, y no una instalación previa en el modelo** (Guerrero, 1999).

Tomamos como referencia a de Guzmán (1993) para hacer una síntesis y destacar los principales objetivos de la enseñanza por resolución de problemas: que el alumno manipule los objetos matemáticos, que active su propia capacidad mental, que ejercite su creatividad, que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente, que adquiera confianza en sí mismo, que se divierta con su propia actividad mental, y que se prepare para otros problemas de la ciencia y de *su* vida cotidiana.

Los procesos de enseñanza tradicional, centrada en contenidos específicos, pueden esquematizarse en las siguientes fases: exposición de contenidos, ejemplos, ejercicios sencillos, ejercicios más complicados, y “problemas” −ya hemos hablado anteriormente de los “problemas” que suelen trabajarse en el aula tradicional−.

La enseñanza *a través de* problemas, por contraposición, pone el énfasis en los procesos de pensamiento y toma los contenidos matemáticos como instrumentos útiles con los que desarrollar formas de pensamiento eficaces. La forma de presentación de un tema matemático basada en la resolución de problemas debería proceder más o menos del siguiente modo: **propuesta** de la situación problema, **manipulación** autónoma, familiarización con la situación y sus dificultades, elaboración de estrategias, **experimentación** mediante ensayo-error, **contenidos motivados**, elección de estrategias, ataque y **resolución** de los problemas, proceso de **reflexión** y afianzamiento formalizado (si conviene), generalización, planteamiento de nuevos problemas y posibles transferencias de resultados, métodos e ideas.

Con este planteamiento, **el eje principal del proceso de aprendizaje es la propia actividad**, dirigida por el profesor de forma que el alumno se posicione como **participante activo que descubre y construye** su propio aprendizaje.

Las actividades de nuestra propuesta no pretenden abarcar el total del proceso de presentación de un tema, aunque sí proporcionan una estructura sobre la que podría llevarse a cabo. Desarrollamos actividades que podrían perfectamente encajar con este planteamiento de principio a fin, pero nos centramos en una primera fase que abarca desde la propuesta de una situación-problema hasta la introducción de los contenidos motivados por la actividad. Sin duda también incluyen una componente de reflexión y formalización (no estricta), pero dejamos esta parte del proceso abierta a un futuro desarrollo. El motivo es el siguiente: nuestro objetivo principal es presentar una propuesta que evidencie la posibilidad de introducir la matemática recreativa y el desarrollo del pensamiento lógico-matemático como fundamento de la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas. En esta línea, y adaptándonos a los contenidos marcados por el currículo, buscamos ofrecer recursos con los que fundamentar la introducción de contenidos y, a partir de ahí, poder desarrollarlos para explotar todo lo posible su potencial.

El potencial de las actividades que proponemos es inagotable, sobretodo teniendo en cuenta que a partir de cualquiera de ellas podemos hacer adaptaciones y diseñar nuevas actividades generalizadas que incidan en uno u otro aspecto que pueda resultar de interés. Es por ello que preferimos ofrecer una variedad de actividades que facilitan un posterior desarrollo de todo tipo de contenidos.

Exploración, descubrimiento y construcción: interiorización de la práctica matemática

Queremos hacer especial hincapié en este punto. La propuesta metodológica que presentamos implica una participación activa de los alumnos, promoviendo el pensamiento reflexivo, analítico y deductivo propio, y haciendo énfasis en la importancia de desarrollo de la capacidad individual de *creación (construcción)* de ideas y propuestas. A través de esta propuesta se pretende mostrar que las matemáticas *no son* algo externo a los individuos, sino que somos nosotros los que *hacemos* matemáticas por medio de nuestros procesos de pensamiento.

El enfoque propuesto trata de enmarcar la utilidad de las matemáticas en el contexto personal (interno) del alumno más que en contextos esencialmente externos con lo que éste no se identifica[11]. En otras palabras, pretendemos transmitir la idea de que las matemáticas forman parte de cada individuo, y que todos somos capaces de manejarlas y de trabajar con ellas; no es que las matemáticas sean algo ajeno, al contrario, se construyen cuando observamos una situación y tratamos de analizar qué sucede en términos lógicos.

Aprendizaje diálogico

El *aprendizaje dialógico* es "una concepción del aprendizaje que parte del diálogo y de las interacciones como fuentes generadoras del aprendizaje" y que "considera que la construcción del aprendizaje se produce a través del diálogo igualitario [sin relaciones de poder] (...) como resultado de un proceso de interacción en el que las personas que están en el aula comparten sus diferentes formas de resolver las actividades" (Díez-Palomar *et al.*, 2010). Así, el docente formaría parte de ese diálogo como *uno más*, cuyo papel incluye no sólo compartir sus conocimientos sino también validar los argumentos de los estudiantes.

Creemos que compartir impresiones y reflexiones a través del diálogo fomenta buenas prácticas y actitudes de aprendizaje, en particular, la confianza en las propias capacidades para afrontar las dificultades propias del trabajo científico (contenido del Bloque 1 del currículo). Por ello, basamos esta propuesta didáctica también en el factor del diálogo: proponemos una serie de actividades que se fundamentarán en esta metodología (módulo *4.2.1* de

[11] Aunque para ello, claro está, hacemos uso de contextos *externos* que los alumnos tendrán que analizar y explorar. Con "contexto personal (interno)" me refiero a la capacidad creativa y reflexiva propia de cada alumno.

actividades) y, en general, trataremos de generar una dinámica de comunicación abierta en el aula.

Atención a la diversidad

Los planes de atención a la diversidad aspiran a que el estudiante logre no sólo los objetivos de las materias y la adquisición de competencias sino que estas metas se alcancen atendiendo y aprovechando al máximo las capacidades individuales de los alumnos. Una misma actuación educativa produce efectos diferentes en función de los conocimientos y experiencias previos de cada alumno, así como de sus capacidades intelectuales, intereses y motivaciones personales.

En este sentido, con nuestra propuesta trataremos de plantear un abanico de dificultad para que todos los estudiantes sean capaces de desarrollar sus capacidades lógico-matemáticas. Entendemos que el proceso de aprendizaje y desarrollo de las habilidades del pensamiento es personal y único. Por tanto, nuestra propuesta pretende respetar los ritmos individuales de aprendizaje sin minar el autoestima ni la autoconfianza de quienes presenten más dificultades, ni tampoco bloquear el progreso y la evolución de quienes demuestran mayor facilidad.

Así, por un lado, las actividades que proponemos cuentan con una primera fase (si no la actividad completa) que todo alumno logrará entender y llevar a cabo. Empezamos siempre con actividades muy asequibles por tres motivos: primero, fomentar la motivación y la autoconfianza de nuestros alumnos; segundo, activar su actividad mental; y tercero, conseguir la participación activa de **todos** los alumnos, sin dejar a un lado a aquellos que presenten más dificultades. Por otro lado, para los alumnos que presenten mayor facilidad en la adquisición de los contenidos y muestren mayor interés, proponemos algunas actividades complementarias con dos objetivos: uno, explotar dicha facilidad y estimular su talento lógico-matemático; y dos, mantener su interés y motivación por la materia, evitando que caigan en el aburrimiento y en comportamientos pasivos (como es habitual que suceda tanto en la materia de matemáticas como en el resto).

Alumnos con altas capacidades[12]

Podemos distinguir dos tiempos en el aprendizaje general (de Mirandés, 2004): uno, *comprender*, que puede suponer un instante; y otro, *aprender*, que implica introducir este nuevo

[12]"Se habla de Altas Capacidades Intelectuales cuando una persona destaca de forma sobresaliente sobre la media de la población. Este término se encuentra en la legislación española para definir a los niños que por su alto nivel intelectual necesitan educación especial, pero no se define explícitamente por lo que da lugar a muy diferentes interpretaciones en función de las normativas de las diferentes administraciones educativas" (Chacón, a).

conocimiento en la mente y que requiere de un cierto tiempo. Para el alumno con altas capacidades estos procesos pueden superponerse en el tiempo: *una vez entendido, aprendido*. Destacamos algunas de las consecuencias de este ritmo de aprendizaje −asíncrono al ritmo general−: las repeticiones de contenidos, que para muchos alumnos son requisito de aprendizaje, para ellos son innecesarias e incluso contraproducentes, y el aburrimiento que produce genera rechazo hacia la escuela y al aprendizaje como tal, pues se asocia a algo *negativo* y falto de estímulo.

Así, es fundamental que el alumno superdotado pueda asumir ciertos contenidos de aprendizaje, y es importante que sienta que es él el "protagonista de su propio proceso educativo, al máximo posible, y completamente libre de la rigidez que le supone los programas curriculares generales no diseñados para estos alumnos" (de Mirandés, 2004). El profesor tiene una "función de tutoría, de estimulación, de orientación y de acompañamiento"; el profesor es el que facilita los medios de investigación de su aprendizaje, muy lejos del rol de mero transmisor de conocimientos tradicional.

El estilo de aprendizaje de los alumnos con altas capacidades está centrado en el *aprendizaje autorregulado*, un proceso activo en que los estudiantes establecen los objetivos que guían su aprendizaje. "Este proceso de construcción del propio aprendizaje implica la **autorregulación** del propio proceso de construcción del aprendizaje, orientado a aprender a aprender, y a alcanzar el aprendizaje autónomo en un proceso permanente, a lo largo de la vida" (Diccionario de las altas capacidades y de la educación inclusiva, s.f.); es un tipo de aprendizaje por **descubrimiento personal** opuesto a cualquier formato basado en la repetición y ejecución mecánicas.

4.2. Desarrollo de la propuesta

El objetivo de esta propuesta es proporcionar una serie de actividades lúdicas que, por un lado, fomenten el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y, por otro, sirvan de motivación para introducir los distintos bloques de contenidos. Con el desarrollo de las actividades propuestas pretendemos que los alumnos sean conscientes de su capacidad constructiva de contenidos matemáticos, que interioricen sus capacidades creativas y de razonamiento lógico al tiempo que encuentran el sentido de los objetos matemáticos que el currículo marca como requisitos de aprendizaje. También buscamos transmitir la idea de que **equivocarse forma parte del proceso de aprendizaje**. Es importante aprender a aprender de los errores, especialmente en matemáticas; no queremos que nuestros alumnos tengan *miedo al error*, al contrario, buscamos que vean los fallos como elementos de aprendizaje.

Las actividades que planteamos se implementarán a lo largo de todo un curso académico.

Nuestra perspectiva acerca de la enseñanza de matemáticas en secundaria no se basa en los contenidos específicos, pero a través de las actividades cubrimos gran parte de los contenidos que marca la ley. La Orden ECD/489/2016 marca cuatro bloques de contenidos específicos además de un primer bloque relativo a procesos, métodos y actitudes en matemáticas al que ya nos referimos en *1.2.1*. Esta propuesta toma este primer bloque como guía, por lo que consideramos por defecto que sus contenidos se trabajan en todas las actividades (aunque no se especifique). En alguna ocasión, sin embargo, sí concretaremos alguno de estos contenidos debido a que lo consideremos objetivo específico de la actividad.

En esta línea, presentamos varias actividades con el objetivo específico de **despertar el pensamiento lógico** y trabajar el manejo del lenguaje (sección *4.2.1*); otras se proponen con el objetivo de **introducir y familiarizar** a los alumnos con determinados conceptos u objetos (*HUNDIR LA FLOTA [Bloque 4. Funciones]* y *Graphing Stories CON DESMOS [Bloque 4. Funciones]*); otras actividades están específicamente diseñadas para **trabajar gran parte de los contenidos** de algún bloque (*TANGRAM [Bloque 3. Geometría]* y *CRUZAR EL RÍO [Bloque 5. Estadística y probabilidad]*); y, por último, presentamos actividades complementarias (de carácter voluntario) pensadas para aquellos alumnos que presenten especial interés por la materia y sus contenidos, no sólo para fomentar el desarrollo de su pensamiento matemático sino también para que se diviertan, que no se aburran y disfruten y aprecien un poco más la riqueza de la matemática (*Material complementario: teoría de grafos*).

En cualquier caso, los objetivos específicos de cada actividad se concretan en su apartado correspondiente. Los enunciados completos se pueden encontrar en el Apéndice *4.3.2. Apéndice*; en esta sección indicamos la metodología, objetivos y contenidos de las actividades, así como una síntesis de en qué consisten y cómo las secuenciamos y organizamos a lo largo del curso.

4.2.1. Activación y desarrollo del pensamiento lógico-matemático

Para activar el pensamiento lógico proponemos una serie de actividades que consisten en paradojas lógicas y paradojas visuales, acertijos, retos y alguna actividad referente a objetos interesantes propios de la matemática como, por ejemplo, la banda de Möebius. Adicionalmente, proporcionamos varios repositorios abiertos a consulta de donde se pueden obtener actividades similares así como una propuesta de actividades de cálculo mental con la que se podría completar tantas sesiones como se deseen.

A través de ellas pretendemos activar el pensamiento lógico y el interés por la materia, y en algunos casos específicos fomentar la concentración. Con estas actividades trabajamos también contenidos del Bloque 2. Números y álgebra.

Metodología y planificación temporal de la(s) actividad(es)

La metodología general será de trabajo en grupo, concretamente, del aula en conjunto; no obstante, se repartirá siempre material individual puesto que queremos que cada alumno lleve a cabo su propio registro de actividades en un portafolio personal y, en el caso de las actividades manipulativas, todo alumno tendrá que hacer la actividad. Si bien el planteamiento y desarrollo de las actividades en clase es conjunta, será cada alumno quien refleje en su portafolio sus propias reflexiones y conclusiones al respecto de lo comentado y debatido entre todos en clase.

Clasificamos las actividades en varios módulos: las actividades de *fractales* (casi todas) se llevarán a cabo cuando se imparta el bloque de geometría; las de *paradojas lógicas y el infinito* así como la *banda de Möebius*, la *paradoja de la herencia de los camellos*, el truco para adivinar la edad y el *acertijo del pastel*, al tiempo del bloque de números y álgebra; y la *paradoja del chocolate infinito* con el bloque 4; el resto de actividades pueden distribuirse indistintamente.

Estas actividades pueden desarrollarse al inicio de las clases y distribuirse a lo largo de todo el curso; son de duración breve y sirven como actividad de apertura de la sesión (salvo especificación). El planteamiento es el siguiente: al menos dos días a la semana, aunque preferiblemente más −cuantos más mejor−, se realizará alguna de las actividades; si se trabaja una actividad que planteamos en 6 sesiones, se sugiere utilizar sesiones seguidas (como mucho dejando un día entre medias; queremos que los alumnos tengan recientes los contenidos y no pierdan el interés ni la curiosidad).

La propuesta incluye 22 actividades planificadas para 60 sesiones −en caso de utilizarlas como recurso iniciador de la sesión−, pero se ofrecen recursos e ideas suficientes para desarrollar actividades similares a lo largo de todo el curso. Presentamos las actividades de forma que puedan utilizarse con este objetivo, particionadas en "sesiones" de duración breve (entre 5 y 10 minutos).

No obstante, en el caso específico de esta propuesta incluimos alguna de las actividades como complemente de otras actividades concretas (queda reflejado en los cronogramas *1* y *3*−), por lo que unificaremos alguna de las "sesiones particionadas" que proponemos por defecto.

Objetivos didácticos

Un objetivo es que los alumnos sientan los acertijos como retos y se esfuercen por dar con las soluciones; algunas soluciones les resultarán muy sencillas y otras demasiado complicadas; el objetivo no es que *resuelvan* las actividades por completo y lleguen a la solución, lo principal es que lo intenten y que el desafío que suponen los retos les motive a seguir intentando dar con las soluciones da los siguientes retos que se propongan. También se pretende activar el pensamiento lógico y fomentar la concentración en el aula y el interés general por la materia.

Específicamente, se trabaja la competencia lingüística: cada alumno debe redactar un registro del desarrollo de las actividades, incluyendo el planteamiento de la actividad, su proceso de pensamiento personal, las resoluciones proporcionadas y la reflexión comparativa entre la solución dada y su desarrollo previo.

ACTIVIDADES MANIPULATIVAS [Manipulación de materiales y aprendizaje dialógico]

Objetivos didácticos
Competencia de sentido de la iniciativa; Obj.MA.1; Obj.MA.6; manipulación, predicción, generalización, desarrollo de la intuición matemática, motivar enfrentarse a desafíos lógicos.

Banda de Möebius (8 sesiones)

[Sesión 1] Construcción de una banda de Möebius y de una banda cilíndrica; comparar su característica de *orientabilidad*.

[Sesión 2] Ver https://www.youtube.com/watch?v=KLZMU0oyer8[13] (2min). Introducción de *la botella de Klein*, otra figura no orientable.

[Sesión 3] Manipulación de la banda cilíndrica y la banda de Möebius; predicción de posibles resultados.

[Sesión 4] Ver https://www.youtube.com/watch?v=4mdEsouIXGM[14] (7min) con pausas para hacer comentarios (15min en total). Vídeo en inglés con subtítulos en castellano.

[Sesión 5] Manipulación de la banda de Möebius.

[Sesión 6] Construcción de nuevas *bandas retorcidas*; predicción de posibles resultados.

[Sesión 7] Generalización de la construcción de la sesión anterior.

[Sesión 8] Puesta en común de las respuestas a la pregunta del día anterior y resolución; debate sobre el desarrollo general de la actividad de la banda de Möebius.

El truco del chocolate infinito: paradoja del cuadrado perdido (4 sesiones)

[Sesión 1] Ver https://www.youtube.com/watch?v=RsouXvrWK4U [15] (1min). Introduc-

[13] Ignacio de Haro. (2016). *La cinta de Möbius y la botella de Klein por fin explicadas fácilmente* [vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=KLZMU0oyer8

[14] Vihart. (2011). *Wind and Mr. Ug* [vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=4mdEsouIXGM

[15] jose julinho. (2018). *chocolate infinito* [vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=RsouXvrWK4U

ción a la paradoja; reflexión conjunta.

[Sesión 2] Construcción manual de la paradoja con cuadrículas proporcionadas a los alumnos y con instrucciones definidas; reflexión.

[Sesión 3] Explicación de la paradoja: primero, matemáticamente; después con la visualización de una imagen animada[16] y con la Figura 9 que se proporcionará a los alumnos.

[Sesión 4] Uso de la herramienta *GeoGebra* para representar las figuras y analizar las pendientes implicadas en la "reconstrucción" que da lugar a la paradoja; reflexión conjunta.

Metodología específica de la sesión
Esta sesión se contextualizará en el bloque de funciones y ocupará el tiempo total de la clase. Utilizamos la paradoja del chocolate para trabajar el concepto de *pendiente*. Se llevará a cabo el análisis matemático de las pendientes de las rectas de las partes que forman los "triángulos mitad" del rectángulo de 65 cuadritos. Proponemos aprovechar la actividad para aprovechar la capacidad gráfica y funcional de la aplicación *GeoGebra*.

Contenidos específicos de la sesión
Bloque 1. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: la elaboración y creación de representaciones gráficas; facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales.
Bloque 3. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad.
Bloque 4. Funciones lineales. Cálculo e identificación de la pendiente de la recta.

[FRACTALES]

Contenidos específicos del submódulo de actividades
Bloque 2. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
Bloque 3. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.

Polvo de Cantor (3 sesiones)

[Sesión 1] Construcción de las primeras iteraciones del Polvo de Cantor y reflexión sobre la medida de la figura a cada iteración.

[Sesión 2] Plantear un escenario generalizado.

[Sesión 3] Llevar al límite (introducción del concepto de *infinito*).

[16] Jusdado, G. (s.f.) Paradoja del chocolate infinito o del cuadrado perdido. *Paradojas*. https://sites.google.com/site/paradojadezenonsolucion/home/paradoja-del-chocolate-infinito

Copo de Koch (3 sesiones)

[Sesión 1] Construcción de las primeras iteraciones del Copo de Koch y reflexión sobre el perímetros de la figura a cada iteración.

[Sesión 2] Plantear un escenario generalizado.

[Sesión 3] Llevar al límite (introducción del concepto de *infinito*).

Triángulo de Sierpinski (3 sesiones)

[Sesión 1] Construcción de las primeras iteraciones del triángulo y reflexión sobre las áreas de la figura a cada iteración.

[Sesión 2] Plantear un escenario generalizado.

[Sesión 3] Llevar al límite (introducción del concepto de *infinito*).

Alfombra de Sierpinski (6 sesiones)

[Sesión 1] Construcción de las primeras iteraciones de la *alfombra de Sierpinski* y reflexión sobre las medidas de "sus partes".

[Sesión 2] Plantear un escenario generalizado y reflexionar sobre la medida de los lados de "sus partes".

[Sesión 3] Reflexión sobre la evolución del perímetro a lo largo de las iteraciones hasta generalizar.

[Sesión 4] Reflexión sobre la evolución del área a lo largo de las iteraciones hasta generalizar.

[Sesión 5] Hacer patente la "paradoja" de la relación entre perímetro y área de la figura llevada al límite. Hablar del conflicto histórico que se dio en el mundo de la matemática cuando "aparecieron" los fractales y sus aparentes incongruencias lógicas.

[Sesión 6] Ver https://www.youtube.com/watch?v=02Dvm6v06v8[17] (3min) con pausas para hacer comentarios (10min en total). Explicación de la relación entre el perímetro y el área de los fractales la *alfombra de Sierpinski* y el *copo de Koch*.

Conjunto de Julia (1 sesión)

Ver https://www.youtube.com/watch?v=FFftmWSzgmk[18] (16min). Presentación de *el conjunto de Julia*.

[17] RuidoCosmico. (2021). *Alfombra de Sierpiński* [vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=02Dvm6v06v8

[18] Sparks, B. (2019). *What's so special about the Mandelbrot Set? - Numberphile* [vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=FFftmWSzgmk

PARADOJAS LÓGICAS [Aprendizaje dialógico]

Objetivos didácticos
Competencia lingüística; Obj.MA.1.

Metodología específica del módulo
Se planteará una paradoja repartiendo una ficha a cada alumno y expresándola de forma clara oralmente; se continuará la actividad con un debate del total del grupo −dejando participar a quienes más iniciativa presente pero también fomentando la participación de los alumnos más pasivos−; por último, cada alumno deberá redactar una reflexión sobre lo debatido y reflexionado para que forme parte de su portafolio personal. En la sesión siguiente se dará una explicación "formal" de la paradoja, y los alumnos tendrán que registrar tanto la formalización como una reflexión en relación con sus pensamientos previos respecto de la actividad. Por tanto, cada actividad ocupará dos sesiones.

(Enumero una selección de paradojas que propongo trabajar, pero el espacio queda abierto a introducir más material. De nuevo, los enunciados completos quedan recogidos en el Apéndice *4.3.2. Apéndice*).

La paradoja del barbero (2 sesiones)

La paradoja del mentiroso (2 sesiones)

La paradoja del condenado (2 sesiones)

[PARADOJAS LÓGICAS Y EL INFINITO]

Contenidos específicos del submódulo de actividades
Números naturales y ordenación. Números racionales. Números reales. Concepto de infinito.

Aquiles y la tortuga (2 sesiones)

El hotel infinito de Hilbert (3 sesiones) *Contenidos específicos*: propiedades de los números primos.

¿Hay más números naturales o enteros? (2 sesiones) *Contenidos específicos*: los números naturales y el *orden*.

¿Hay más números naturales o racionales? (2 sesiones) *Contenidos específicos*: los números naturales y el *orden*.

¿Hay más números naturales o reales? (2 sesiones) *Contenidos específicos*: demostración por reducción al absurdo; Bloque 1. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico; Bloque 2. Iniciación al lenguaje algebraico.

ACERTIJOS Y TRUCOS [Aprendizaje individual; enfrentamiento a desafíos lógicos]

Metodología específica del módulo
Se repartirá a cada alumno una ficha con el enunciado correspondiente y se expresará oralmente de forma clara; se continuará dejando unos minutos de trabajo individual; finalmente, se pedirá que redacten una reflexión sobre lo que han conseguido o no han conseguido avanzar en el reto. Se les pedirá que lo sigan pensando y que lo intenten resolver para el día siguiente −todos los avances que hagan deberán quedar reflejados en el portafolio−. En la sesión siguiente se resolverá el acertijo y los alumnos tendrán que registrar tanto la solución como una reflexión en relación con su progreso en la resolución del acertijo. Por tanto, cada actividad ocupará dos sesiones (si no se especifica lo contrario).

¿Cómo cortar el pastel? (2 sesiones)

Reto: unir puntos (2 sesiones)

Reto: transformar un triángulo en otro (2 sesiones)

Un "truco" para adivinar la edad de *cualquiera*[19] (3 sesiones)

Contenidos específicos de la actividad
Bloque 1. Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (algebraico). Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Iniciación al lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.

[Sesión 1] Plateamiento y familiarización con el procedimiento; búsqueda de ideas.

[Sesión 2] Introducción de lenguaje algebraico como herramienta de resolución.

[Sesión 3] Formalización y explicación del proceso; reflexión dialógica.

La herencia de los camellos[20] (2 sesiones)

Contenidos específicos de la actividad

[19] Adaptación de una actividad propuesta en (Bilbao, 2021).
[20] Adaptación de una actividad propuesta en (Bilbao, 2021).

Bloque 1. Planificación del proceso de resolución de problemas.
Bloque 2. Divisibilidad de los números naturales. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales. Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones.

[Sesión 1] Plateamiento y familiarización con el problema; primeras aproximaciones (hacer los cálculos oportunos) y obtener conclusiones paradójicas.

[Sesión 2] Explicación de la "paradoja"; reflexión dialógica.

PARADOJAS VISUALES [Aprendizaje dialógico]

Objetivos didácticos
Obj.MA.1; Obj.MA.6; Obj.MA.11

Metodología específica del módulo
Se proporcionará una ficha a cada alumno con las imágenes correspondientes a la actividad; se dejarán un par de minutos de reflexión tanto individual como de forma libre entre los compañeros −flexibilidad interactiva−; a continuación se comentarás las intuiciones de forma conjunta. En la sesión siguiente "se resolverá" la paradoja y los alumnos tendrán que registrar tanto la explicación como una reflexión en relación con sus intuiciones previas. Por tanto, cada actividad ocupará dos sesiones (si no se especifica lo contrario).

Alicia y los gatos[21] (2 sesiones) Material: figuras 19 y 20.

Escaleras de Escher (2 sesiones) Material: figuras 21 y 22.

RECURSOS ADICIONALES

Proponemos trabajar siguiendo una metodología similar −en una sesión plantear un reto y dar un tiempo para desarrollar la intuición de los alumnos y el debate en el aula; en una segunda, resolver o formalizar la cuestión− con multitud de recursos complementarios. A continuación damos algunas ideas, y concluimos con una propuesta de actividades de cálculo mental que también pueden encajar como actividades de iniciación de las sesiones y que fomentan la concentración de los alumnos.

Juegos de lógica con números, figuras o contenidos matemáticos en general
Dar una colección (o varias) de números y pedir continuar la serie; encontrar patrones en representaciones visuales; WODB; trabajar con *cuadrados mágicos* sencillos; utilizar el *triángulo de Pascal* para encontrar regularidades; introducir los números poligonales.

Juegos de criptografía
Introducir un método básico de cifrado y proponer *encriptar* o *desencriptar* un mensaje.

[21] Adaptación de una actividad propuesta en (Arnal, 2022)

Proponer acertijos

Proporcionamos aquí dos enlaces que llevan a un repositorio de juegos[22] y acertijos[23] como posible fuente de recursos.

Cálculo mental

Enlazamos una página web[24] donde se presenta una propuesta de cálculo mental con la que se pueden trabajar números, geometría, álgebra y funciones, y que encaja a la perfección como recurso en este módulo de actividades. En la web se facilitan tanto las instrucciones de la actividad como todos los materiales necesarios tanto para los alumnos como para el docente.

4.2.2. TANGRAM [Bloque 3. Geometría]

Contenidos específicos

Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Triángulos rectángulos.

Objetivos didácticos generales

Desarrollar el sentido espacial a través de la manipulación de objetos. Enriquecer la imaginación y la creatividad de los alumnos. Potenciar la intuición (matemática): explorar, manipular, predecir, desarrollar la percepción geométrica y la intuición espacial. Fomentar la *diversión* en el aula, la *construcción* de contenidos matemáticos por parte de los alumnos y el reconocimiento de patrones, despertar inquietud y curiosidad por la asignatura y por la geometría, dar sentido a las matemáticas.

Además, tanto con el registro de construcciones como con las propias piezas podremos recurrir al tangram para explicar algún concepto en cualquier momento en lo que reste del curso. En concreto, podremos utilizar las piezas para ofrecer una muestra del teorema de Pitágoras (ver Figura 24).

También podremos utilizar las piezas para fomentar la concentración de los alumnos con actividades breves al inicio de la clase, por ejemplo, pidiéndoles que construyan una figura.

[22]Fernández, J. (s.f.). *Juegos de matemáticas para secundaria (I) (con soluciones)*. Soy matemáticas. Consultado el 9 de junio de 2022. https://soymatematicas.com/acertijos-matematicos/

[23]Fernández, J. (s.f.). *Acertijos matemáticos para secundaria (I) Soluciones*. Soy matemáticas. Consultado el 9 de junio de 2022. https://soymatematicas.com/acertijos-matematicos/

[24]Jiménez, J.J. (2009, 18 de noviembre). *Tablas de cálculo mental*. http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei/index.html

Metodología y planificación temporal de la actividad

Proporcionamos a los alumnos una cartulina con las piezas de un TANGRAM marcadas tal y como muestra la Figura 23. También les daremos fichas con las tablas que tendrán que rellenar a lo largo de la actividad.

Esta actividad se desarrolla en el contexto del *Bloque 3. Geometría* del currículo. Abarcará un total de 8 sesiones, que se completarán con algunas actividades descritas en *4.2.1*. Más detalle en *Cronograma TANGRAM*.

Sesión 1 – Introducción al bloque de geometría
(1)(2) 20min. Actividad *Polvo de Cantor* en 4.2.1: 30min.
Sesión 2 – Ángulos y semejanza
(3) 15min. (4) 25min. Usar *polvo de Cantor* para hablar de (auto)semejanza
Sesiones 3 y 4 – Clasificación de polígonos
(5) 10min. (6) resto de tiempo de las sesiones
Sesiones 5 y 6 – Área
(7) 15min. (8) 35min. (9) 10min. Actividad *Triángulo de Sierpinski* en 4.2.1: 40min.
Sesión 7 – Perímetro (y área)
(10)(11) 15min. Actividad *Alfombra de Sierpinski* en 4.2.1: 35min.
Sesión 8 – Repaso, autoevaluación y cierre
(12)(13) 30min. Actividad *Conjunto de Julia* en 4.2.1: 20min.

Cuadro 1: Cronograma TANGRAM

Diseño de la actividad

El tangram es un rompecabezas de origen chino que consta de siete piezas –dos triángulos grandes, un triángulo mediano, dos triángulos pequeños, un cuadrado y un romboide– que pueden organizarse tal y como muestra la Figura 23.

El juego consiste en componer figuras utilizando las siete piezas, ¡no puede sobrar ninguna!

Vamos a construir nuestro propio tangram y ¡a jugar!

Construcción y clasificación de las piezas

(1) Construye tu propio TANGRAM. Recorta las piezas marcadas en la cartulina y píntalas de colores cumpliendo las siguientes dos condiciones:

- ○ Dos piezas iguales tienen que tener el mismo color (si no son iguales, sus colores tienen que ser distintos)

- Inventa un “código” que indique que dos piezas tienen la misma forma pero son de distinto tamaño. Por ejemplo: si tienes un cuadrado grande y un cuadrado pequeño, uno puede ser azul y el otro naranja, pero los dos deben tener dibujadas rayas, o espirales, o una carita sonriente, ¡lo que más te apetezca! Lo importante es que *marques* esas piezas de alguna forma que te indique que, aunque sean de distinto tamaño, tienen la misma forma.

Ahora puedes completar la tabla del Cuadro 4.

Objetivo

Familiarización con el manejo de símbolos; interiorización de que los símbolos *representan* algo y que nosotros, como seres pensantes que los utilizan, decidimos qué significan (creemos que esto será positivo a la hora de entender y manejar el lenguaje formal matemático pues fomenta la comprensión general del uso de símbolos); introducción a semejanza de figuras.

(2) Vamos a enumerar las piezas. ¿Cómo lo hacemos?, ¿a alguien se le ocurre algún criterio para hacerlo? Para registrar qué pieza es cada una, además de numerarlas, rellenamos la tabla del Cuadro 5.

Objetivo

Buscamos que los alumnos *piensen* distintas formas de *ordenar* las piezas. Esperamos recibir alguna respuesta del tipo: tener el cuenta el número de lados, el tamaño, el número de ángulos rectos, el número de ángulos iguales... toda propuesta será bien recibida. Queremos que los alumnos, por sí mismos, descubran elementos y propiedades características de las figuras planas elementales.

Ángulos y semejanza

(3) Sabes que un ángulo recto mide 90°, ¿puedes averiguar los ángulos de cada pieza del tangram? Puedes jugar con ellas y poner unas encima de otras para intentar descubrirlo. Te aconsejo que cuando sepas cuánto mide un ángulo, lo marques en la propia pieza. Además puedes rellenar la tabla del Cuadro 6.

(4) Ahora puedes comparar esta última tabla con la primera que has rellenado (Cuadro 4). ¿Hay algo que te llame la atención? Prueba a colocar tus piezas por colores y símbolos encima de la mesa y fíjate en sus ángulos. ¿Qué observas?

Puedes rellenar la tabla del Cuadro 7 para verlo más claro.

Además, puedes sumar todos los ángulos de cada pieza para ver cuánto suman en total. ¿Te llama algo la atención?

Clasificación de polígonos

(5) Ahora vamos a construir un cuadrado como el que hemos recortado para conseguir las piezas. Para que no se te olvide cómo conseguirlo, cuando lo tengas, haz un dibujo marcando la posición de las piezas. ¿Seréis capaces de conseguirlo?

(6) Vamos a construir algunas figuras y vamos a registrar cada construcción como hemos hecho con el cuadrado: con un dibujo. Además, según hagamos las figuras rellenaremos la tabla del Cuadro 8.

Construye un cuadrado.
Construye un triángulo que tenga un ángulo recto. ¿Sabes cómo se llama este tipo de triángulos?
Construye un triángulo con dos lados que midan lo mismo. ¿Sabes cómo se llama este tipo de triángulos?
Construye un rectángulo. ¿Sabes definir *qué es* un rectángulo? ¿Y un cuadrado? Entonces, ¿todos los rectángulos son cuadrados? ¿Y al revés?
Construye una figura con los lados paralelos dos a dos y sin ángulos rectos. ¿Sabes cómo se llaman estas figuras?
Construye un polígono de seis lados.
¿Conocéis otro tipo de triángulos que no hayamos construido? Intenta construir un triángulo con los tres lados iguales (vamos a hacer una excepción y esta vez no tienes por qué usar todas las piezas). ¿Lo has conseguido?, ¿se te ocurre algún motivo por el que no puedas hacerlo?

Ahora que sabemos construir todas estas figuras y además conocemos cuánto miden los ángulos de cada pieza, ¡podemos calcular cuánto miden los ángulos de las figuras que hemos construido! Completa también esa columna de la tabla.

Objetivo

Identificación de elementos de geometría básica: número de lados, paralelismo, perpendicularidad (ángulos rectos), medida de ángulos (sabiendo que un ángulo recto son 90° pueden intentar averiguar otros ángulos y calcular cuánto suman los ángulos de las figuras). Clasificación de polígonos.

Áreas

(7) [Aprendizaje dialógico] Os propongo un reto: si os pidiera ordenar las piezas de más grande a más pequeña, ¿cómo lo haríais?

Además, quiero que utilicéis los números de las piezas para registrar esta ordenación. Vamos a usar el símbolo $>$ para indicar que la pieza que se coloca a su izquierda es más grande que la pieza que se coloca a su derecha; y el símbolo $<$ para indicar que la pieza que se coloca a su izquierda es más pequeña que la pieza que se coloca a su derecha. Tiene sentido, ¿verdad? Ponemos "lo grande" con la parte abierta del símbolo, y ponemos "lo pequeño" al lado del pico.

Por ejemplo: si la pieza 3 es más pequeña que la pieza 1, entonces podéis escribir $3 < 1$; si la pieza 7 es más grande que la pieza 1, entonces podéis escribir $7 > 1$. Y si la pieza 3 es más pequeña que la pieza 1, y la pieza 1 es más pequeña que la pieza 7, ¿tendría sentido escribir $1 < 7 < 3$?, ¿y $3 < 1 < 7$?

¿Podríamos continuar esta cadena hasta tener ordenadas todas las fichas usando sólo los números que las etiquetan y el símbolo $<$? ¿y utilizando sólo los números que las etiquetan y el símbolo $>$?

Objetivo

Comparación de áreas siguiendo métodos pensados por los propios alumnos: comparar piezas, superponer unas piezas sobre otras, dividir el cuadrado inicial en partes y hacer deducciones...

También buscamos que, al haber figuras iguales, sean conscientes de que no pueden ordenarlas de forma *estricta*: habrá piezas intercambiables. ¿Se darán cuenta de que no les hemos dicho cómo registrar estos casos? Sólo les hemos proporcionado símbolos para indicar que una pieza es más grande (o más pequeña) que otra, pero no un símbolo para indicar que dos piezas son iguales. ¿Se les ocurrirá utilizar el símbolo "$=$"?

Con esto conseguimos que adquieran manejo con el uso de símbolos y que entiendan este *tipo de lenguaje* como una herramienta propia de la matemática. Además, fomentamos el uso de los números como *etiquetas* que representan algo, sacándolos del carácter estrictamente aritmético: los números pueden representar cantidades, orden, piezas de tangram... Lo importante es saber siempre qué significa cada símbolo y cómo lo estamos utilizando en un contexto concreto.

(8) Ahora que ya sabes qué figuras son más grandes que otras, vamos a *medir* cuánto más grandes o cuánto más pequeñas son unas respecto de otras. ¿Cómo lo hacemos?, ¿a alguien se le ocurre? (Esperamos que a alguien se le haya ocurrido superponer unas piezas sobre otras; utilizaremos esta idea).

Vamos a usar la figura más pequeña para ver cuántas veces cabe en el resto de piezas. Entonces, tomamos como *unidad de medida* el triángulo pequeño y podemos rellenar la tabla del Cuadro 9.

Como hemos numerado nuestras piezas y a cada una le corresponde un número del 1 al

7, también podemos registrar el número de triángulo en una tabla del tipo Cuadro 10.

(9) Ahora construye un cuadrado con todas las piezas del tangram e intenta averiguar cuántos triángulos pequeños caben. ¿Estos triángulos cubren *todo* el cuadrado?

Pregúntate lo mismo para los triángulos medianos, los grandes, el cuadrado y el romboide y rellena la tabla del Cuadro 11.

Perímetros

(10) Igual que hemos hecho para medir áreas tomando el triángulo pequeño como unidad para contar, podemos tomar sus lados para calcular cuánto miden los lados del resto de figuras. Veamos: el triángulo pequeño tiene dos lados de un tamaño y un lado de otro, más grande. Para poder referirnos a ellos, les vamos a poner nombre: a los lados pequeños los llamamos *catetos* y vamos a etiquetarlos con la letra C; y al lado grande lo llamamos *hipotenusa* y lo etiquetamos con la letra H.

Entonces, usando estos nombres que acabamos de ver, ¿cuánto suman todos lo lados del triángulo pequeño?, ¿se os ocurre cómo podemos escribirlo? Intentad expresarlo con palabras (por ejemplo: “la suma de los lados del triángulo pequeño es dos catetos C y una hipotenusa H) y también usando *símbolos*. ¿Se os ocurre cómo? Podéis usar, por ejemplo, el símbolo $+$.

(11) Igual que hemos medido la suma de lados del triángulo pequeño, podemos hacerlo con el resto de piezas. Intenta hacerlo y rellenar la tabla del Cuadro 12.

Recopilación

(12) Ahora podemos juntar todos los datos y tenerlos todos juntos.

Intenta completar la tabla del Cuadro 13 con toda la información posible Añade todas las columnas que consideres conveniente.

(13) Utilizando la tabla anterior, quizás puedas contestar a las siguientes preguntas.

¿Qué tienen que cumplir dos figuras para ser iguales?
¿Qué tienen que cumplir dos figuras que tienen la misma forma pero no son iguales?
¿Cuánto suman los ángulos de un triángulo isósceles? ¿y de un triángulo rectángulo?
¿Cuánto suman los ángulos de un paralelogramo?
A partir de una figura, ¿cómo puedes medir el tamaño de otras?
¿Se te ocurre alguna forma de medir los lados de una figura cualquiera? Pista: te dejo utilizar un hilo.

4.2.3. HUNDIR LA FLOTA [Bloque 4. Funciones]

Contenidos específicos

Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica).

Objetivos didácticos generales

Interiorizar que la numeración y "etiquetado" de los ejes no es algo invariable, que lo importante es tener claro el sistema de coordenadas cuando lo usamos pero que *no tiene que ser uno específico* por defecto sino que podemos ajustarlo a nuestras necesidades. Familiarizarse con el uso del lenguaje matemático. Darse cuenta de la flexibilidad de las propuestas, de que ellos mismos también podrían introducir cambios en las actividades para hacer los juegos más divertidos, o más fáciles, o más difíciles.

Metodología y planificación temporal de la actividad

Proporcionamos a cada alumno dos cuadrículas de 10×10 (Figura 25) con un eje numerado y otro con letras de la A a la J donde se colocará *la flota*.

La actividad se desarrolla a lo largo de 1 sesión, la primera dedicada al *Bloque 4. Funciones*. Más detalle en *Cronograma HUNDIR LA FLOTA*.

Sesión 1 − Introducción al bloque de funciones
(1) 10min. (2) 20min. (3) 20min.

Cuadro 2: Cronograma HUNDIR LA FLOTA

Diseño de la actividad

Cada jugador tiene una flota compuesta por un portaaviones, dos buques, tres submarinos, un yate y una lancha. Un portaaviones ocupa cinco casillas; un buque, cuatro; un submarino, tres; un yate, dos; y una lancha, una casilla.

Primero tienes que colocar tu flota en la plantilla de forma que ningún barco quede pegado a otro. ¡Tampoco en diagonal! Tienes una plantilla para eso; tienes otra plantilla para marcar los aciertos y los fallos de los disparos que haces. (Ahora te explico cómo se dispara).

Una vez hayáis colocado todas las naves puede empezar la partida. El primer turno será para quien resuelva antes el siguiente acertijo:

Pablo tiene el doble de años que Isabel. Si hace dos años Isabel tenía siete años

> *menos que Pablo, ¿cuántos años tiene cada uno?*
>
> Pista: hemos resuelto acertijos parecidos ya en clase, ¿os acordáis del truco para adivinar la edad de personas con menos de 100 años? Aquí podéis usar una técnica parecida, ¡hemos resuelto acertijos similares en el bloque de álgebra! Tenéis que usar lenguaje matemático...

Cuando sea tu turno es el momento de atacar la flota enemiga. Gana el jugador que antes “dispare” a todos los barcos del otro jugador. Para disparar tienes que decir un número del 1 al 10 y una letra de la A a la J. Si, por ejemplo, dices: “número 1, letra F” entonces estás disparando al cuadrito de la columna 1 y la fila F, es decir, al sexto cuadrito de la primera columna. Si aciertas, el otro jugador tiene que decir “tocado” y continuas con tu turno hasta que falles, en cuyo caso el otro jugador dirá “agua”. Cuando disparas al agua, cambia el turno del jugador. En caso de que aciertes y con ese disparo acabes con un barco, entonces el otro jugador dirá “hundido”. Así sabrás cuántos barcos has hundido y cuántos te quedan aun por encontrar.

Antes de que decidas cómo indicarlo, una pregunta rápida: ¿cuántos símbolos distintos necesitas?

¿Ya sabes cómo vas a marcar en la plantilla los aciertos y los fallos? Puedes usar distintos colores, distintas figuras, símbolos, letras... ¡lo que quieras mientras tú lo entiendas!

¿Todo listo? ¡A jugar!

(1) Jugar una partida uno contra uno con las plantillas en papel.

(2) Ahora vamos a jugar otra partida... ¡en el ordenador! Enlace: *Hundir la flota*.

Si te fijas, ahora han cambiado dos cosas esenciales en el juego. ¿Sabrías decir cuáles? (Respuesta: la numeración de los ejes y la flota con la que jugamos).

Esta vez vamos a hacer una cosa más aparte de jugar: queremos tener un “registro” de los disparos que hacemos. No sólo nos vale con tener un símbolo para cuando damos en el blanco y otro para cuando fallamos, también queremos registrar el orden de los lanzamientos. ¿Se te ocurre cómo hacerlo?

Si no sabes cómo, te doy una idea: puedes hacer una tabla con una columna que indique el número de turno (si es tu primer turno, entonces deberás poner un 1: ¿qué pasa cuando aciertas en el blanco y sigues disparando?, ¿cambia el turno o es el mismo?); una segunda columna que indique la casilla a la que disparas; y otra columna que indique si has acertado o si has fallado.

Una pregunta: ¿cómo vas a indicar la casilla a la que disparas? Si sabes decirlo de palabra,

¡seguro que también saber escribirlo!

(3) Ahora vamos a hacer lo mismo pero con unas plantillas un poco distintas. No te preocupes, se juega exactamente igual.

Fijaos que ahora no hay letras, sólo números. ¿Os habéis fijado en los *ejes*? Si ahora quieres disparar a la casilla en la tercera columna a la derecha del eje vertical y en la segunda fila por encima del eje horizontal, dirías: "(3,2)". Si quieres disparar a la casilla en la segunda columna a la derecha del eje vertical y en la tercera fila por encima del eje horizontal, dirías: "(2,3)". ¿Ves la diferencia?

Antes teníamos letras para saber en qué dirección contábamos los cuadritos pero ahora sólo tenemos números, así que para no liarnos y no perder tiempo diciendo si nos referimos a una dirección o a la otra, directamente llegamos a un acuerdo: para identificar un cuadrito necesito dos números (que indican las casillas), el primer número indica cuántas casillas avanzo en el eje horizontal y el segundo indica las casillas del eje vertical (lo que en la otra plantilla eran letras).

¿Has visto? Si llegamos al acuerdo de que *siempre* el primer número marca el avance horizontal y *siempre* el segundo marca el avance vertical, si te digo "casilla (3,2)" ya sabes a cuál estoy disparando. ¿Cuál será la casilla (-4,-1)?

Ahora coloca tu flota en la plantilla y registra la colocación de tus barcos. ¿Cómo puedes hacerlo? Usa la numeración de los ejes y rellena una tabla que tenga dos columnas: la primera que indique con un dibujo el barco que estás colocando; la segunda, las casillas donde lo estás colocando. Por ejemplo, el barco de la Figura 27 está colocado en las casillas: (3,1)(3,-1)(3,-2). ¿Se te ocurre alguna otra forma de indicar su posición?

4.2.4. *Graphing Stories* CON DESMOS [Bloque 4. Funciones]

Contenidos específicos

El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Continuidad y extremos relativos. Bloque 1: Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos; Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos funcionales; facilitar la comprensión de propiedades funcionales; comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Metodología y planificación temporal de la actividad

Nos ayudaremos de la guía del maestro que proporciona la propia actividad (que hemos obtenido de *Desmos*). Creemos que la guía ofrece una buena referencia, ya que remarca los puntos que consideramos más importantes para captar la esencia de los conceptos.

En principio, queremos que todos los alumnos sean capaces de realizar las actividades pensando por sí mismos. El trabajo grupal puede ser muy positivo para fomentar valores como la colaboración, la confianza, las habilidades comunicativas y otras habilidades sociales, etc. pero también buscamos que *todos* los estudiantes piensen, se esfuercen y activen sus procesos de razonamiento. Por ello, la propuesta inicial es que se trabaje individualmente. No obstante, según el aula específica consideraremos hacer alguna pareja de forma que cada cual deba rellenar sus propias respuestas (aunque la discusión sobre resolución de las tareas se haga de forma conjunta); creemos que hay alumnos para los que será más positivo y desafiante trabajar en equipo y discutir sus ideas.

La actividad tendrá lugar en el contexto del *Bloque 4. Funciones*. Abarcará 2 sesiones, que se completarán con una actividad propuesta en *4.2.1*. Más detalle en *Cronograma Graphing Stories*.

Sesión 1
Actividad *paradoja del chocolate infinito* en 4.2.1 [Sesiones 1, 2, 3]: 20min. (1) 10min. (2) 10min. (3) 10min.
Sesión 2
Terminar (3) 20min. Terminar *paradoja del chocolate infinito*: 30min.

Cuadro 3: Cronograma *Graphing Stories*

Diseño de la actividad

Recurso: *Graphing Stories*. Acceso a la actividad: haz click en este enlace e introduce el código $V4RFYS$. (Si tienes algún problema con ese enlace o con el código, prueba con este otro enlace). Esperar a que todos los compañeros estén dentro y explicar la actividad.

(1) Contestar a la primera diapositiva. Utilizar el *panel del maestro* para comprobar cuándo han respondido **todos** y proyectar el conjunto de respuestas para comentarlo de forma conjunta. Debe realizarse individualmente, pero mientras se espera a que todos lo completen podrán compartir las respuestas.

(2) Contestar a la segunda diapositiva. Utilizar el *panel del maestro* para comprobar cuándo han respondido **todos** y proyectar el conjunto de respuestas para hacer comparaciones. ¿Qué elementos comparten?, ¿en qué se diferencian?

Mostrar la diapositiva tres, que ofrece *una* posible respuesta. ¿Cómo cambiaría la gráfica si el eje *y* representase la "altura de los pies desde el suelo (en metros)" en vez de la "altura de la cintura"?

(3) Intentar completar las siguientes cuatro situaciones.

Utilizar el *panel del maestro* para comprobar cuándo han respondido **todos** y proyectar el conjunto de respuestas para hacer comparaciones. ¿Qué elementos comparten?, ¿en qué se diferencian? Concluir con un tiempo de diálogo conjunto sobre los contenidos y el aprendizaje.

4.2.5. CRUZAR EL RÍO [Bloque 5. Estadística y probabilidad]

Contenidos específicos

Frecuencias absolutas y relativas. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

Objetivos didácticos generales

Introducir el bloque de probabilidad y estadística. Construir material (los registros de resultados) para trabajar más contenidos del bloque. Aprender a aprender de la experiencia, activar el razonamiento lógico, fomentar que ellos mismos vean la necesidad (o conveniencia) de llevar un registro de los resultados.

Metodología y planificación temporal de la actividad

Se jugará por parejas, que irán rotando en las sucesivas partidas. La actividad se desarrollará en el total de la primera sesión del *Bloque 5*.

Diseño de la actividad

Dos jugadores, doce fichas por jugador, dos dados y un tablero (Figura 28).

La franja central que se observa en el tablero representa un río; el objetivo es cruzarlo.

A cada lado del río hay doce casillas, numeradas del 1 al 12, donde los jugadores colocarán sus fichas.

El primer jugador lanzará dos dados, y pasará al otro lado del río la ficha que esté situada en la casilla que tenga el número resultado de la suma de los valores obtenidos. Ahora el turno es del segundo jugador, quien hará lo mismo: lanzará los dos dados, sumará los valores obtenidos y moverá al otro lado del río la ficha de la casilla cuyo valor coincida con el resultado de esa suma.

Para escoger quién comienza la partida, cada jugador lanzará un dado: empezará la partida quien obtenga un número más bajo.

(1) Los jugadores deben colocar una ficha en cada casilla y comenzar una partida. ¿Quién gana?

Objetivo específico
Darse cuenta de que ningún jugador puede ganar porque lanzando dos dados es imposible mover la ficha de la casilla 1.

(2) Volver a jugar buscando el mismo objetivo pero ahora situando las fichas donde ellos quieran (desde situarlas cada una en un lugar hasta ponerlas todas en la misma casilla).

¿Por qué escoges unas casillas u otras?, ¿has tenido en cuenta la partida anterior?, ¿crees que deberías haberlo hecho?

(3) Por último, se propone jugar varias veces.

Se les proporcionará el esquema de una tabla (Cuadro 14) que deberán rellenar y continuar para registrar los resultados de las distintas partidas. Cada jugador debe registrar *sus* tiradas, y se le permite añadir alguna columna si cree conveniente registrar más información. La tabla que se les proporciona es una idea, pero ellos pueden construir a partir de ella.

Cuando hayan cambiado dos veces de pareja, se les sugerirá hacerse las siguientes preguntas: ¿es útil registrar los resultados?, ¿cambias tu estrategia de juego en función de las partidas anteriores?, ¿utilizas sólo la tabla de tu registro o tienes en cuenta también los datos de tu compañero?

Además, se les dará la idea de hacer un recuento de los resultados registrados y compararlos con los del compañero. ¿Se parecen los registros?

4.2.6. Material complementario: teoría de grafos

Entendemos este apartado de la propuesta como específico de **atención a la diversidad** en el aula. Creemos que este es un punto al que se dedica poco tiempo y esfuerzo por trabajar y mejorar en la enseñanza tradicional, especialmente cuando pensamos en la diversidad de aquellos alumnos que “van sobrados”. Se entiende, por defecto, que no hay que dedicar esfuerzo para atender a estos alumnos porque tienen *capacidad suficiente* como para superar los contenidos que se exigen. Sin embargo, pocas veces nos damos cuenta de que una alta capacidad también puede ser causa de muchos problemas en los procesos de aprendizaje de nuestros estudiantes: la falta de motivación, el aburrimiento, las continuas distracciones, el adquirir hábitos de no-esfuerzo porque no les es necesario, etc. (Chacón, b).

Dentro de nuestro alcance, queremos combatir la falta de atención a las **necesidades** −no *caprichos de entretenimiento* sino necesidades reales− de personas con unas características intelectuales que actualmente quedan desatendidas por el sistema educativo y que provocan serios problemas tanto académicos como personales (Chacón, c). Las consecuencias de esta falta de atención se ven reflejadas en los jóvenes y adultos en que se convierten nuestros alumnos en forma de fracaso escolar, insatisfacción con el sistema educativo e insatisfacción con el propio desarrollo personal y, por último pero no menos importante, desaprovechamiento de unas capacidades con enorme potencial de desarrollo.

Contenidos específicos

Módulo 1: representación de un grafo: aristas y vértices; modelización de distintas situaciones mediante grafos; grado de un vértice; Teorema de Euler. Módulo 2: concepto de región de Voronoi; construcción del diagrama de Voronoi; aplicaciones del diagrama de Voronoi. Módulo 3: Teorema de los Cuatro Colores.

Objetivos específicos

Módulo 1: identificar los elementos que componen un grafo: aristas (conexiones) y vértices (nodos); representar problemas sencillos mediante distintos tipos de grafos: conexos, no conexos; relacionar el grado de un vértice con los caminos eulerianos: cerrados y abiertos. Módulo 2: introducir conceptos de la teoría de grafos a través del Diagrama de Voronoi; utilizar el Diagrama de Voronoi para resolver situaciones de la vida cotidiana; emplear el software GeoGebra para la creación del Diagrama de Voronoi; reforzar contenido referente a la geometría en el plano. Módulo 3: introducir conceptos de la teoría de grafos a través del Teorema de los Cuatro Colores; utilizar el coloreo de grafos para resolver problemas sencillos; emplear una secuencia para el coloreo de grafos.

Planificación de las actividades

La primera sesión de la asignatura la dedicaremos a exponer cómo vamos a trabajar durante el curso, qué esperamos de los alumnos (participar activamente, aprovechar los errores para aprender, tener confianza para preguntar y ayudar abiertamente, etc.), cómo vamos a organizar las sesiones y en qué consistirá la evaluación.

Más allá de unas directrices generales, hablaremos del valor que damos al componente lúdico y a la creatividad en los procesos de aprendizaje de matemáticas. Haremos una breve exposición del punto *3.4* con el objetivo de que los estudiantes sean conscientes de esta conexión directa. A raíz del problema de los puentes de Königsberg introduciremos la teoría de grafos.

Tomamos como referencia y guía la propuesta didáctica de Gutiérrez (2020), que está dirigida a alumnos de tercero de secundaria. Sin embargo, creemos que se ajusta al nivel de los alumnos a los que la dirigimos nosotros ya que éstos presentan un desarrollo del pensamiento lógico-matemático más avanzado de lo habitual para su curso.

El enfoque original no forma parte de un proyecto de atención a la diversidad sino que se enfoca al total de un aula, implicando esto la realización de actividades grupales y, con ello, falta de autonomía y autogestión por parte de los alumnos −uno de los objetivos de esta propuesta−. Por tanto, de la propuesta extraemos las actividades como tal −recursos de vídeo, fichas que se entregan al alumnado y resoluciones de las actividades− sin tener en cuenta la secuenciación ni metodologías específicas.

Le presentación original se estructura en tres módulos de actividades que comienzan con la visualización de un vídeo que introduce los contenidos que posteriormente van a trabajarse. En la primera sesión de la asignatura, al hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, proyectaremos el vídeo que introduce el primer módulo de actividades para que todos los alumnos conozcan esta rama de las matemáticas. En este momento, proporcionaremos una guía con las actividades propuestas a todos los alumnos −aunque nuestra propuesta esté motiva específicamente por alumnos con unas características determinadas, damos la posibilidad de participar a todo el que quiera− y expondremos la propuesta.

Las actividades serán de carácter voluntario, pero pueden darse casos de alumnos a los que se lo "recomendemos" especialmente; será el caso de aquellos alumnos que requieran de atención individual personalizada por ser *altas capacidades* −sea el caso diagnosticado oficialmente o no serlo, en cualquier caso nos deberemos guiar por los informes previos proporcionados por el departamento de orientación y por el claustro en general− o presenten *alta capacidad en matemáticas* −que detectaremos atendiendo a la facilidad y ritmo que demuestre en la clase y a consultas con profesores del curso anterior y padres−.

Metodología de la actividad

Los alumnos a los que particularmente recomendaremos realizar las actividades podrán hacerlo aprovechando sesiones que sientan "innecesarias": esas sesiones en que sientan que no necesitan invertir su tiempo en repasar o aclarar cuestiones que ya tienen aprendidas, o en esperar a que otros compañeros terminen lo que se ha propuesto. Por ejemplo: si se manda una actividad que alguien termina en dos minutos y al conjunto de la clase le lleva diez minutos más, podrá aprovechar ese rato para enfocarse en estas actividades; si se dedica una sesión de repaso de contenidos de una unidad o un bloque, o a resolver dudas, podrá también aprovechar para enfocarse al desarrollo de estas actividades. Se permitirá, por supuesto, avanzar en el desarrollo de las actividades fuera del aula si el alumno quisiera.

La metodología que seguiremos se basará en el *aprendizaje autorregulado*. Recomendaremos y motivaremos el **trabajo autónomo autorregulado**, facilitando siempre la realización de las actividades y sirviendo siempre de guía y apoyo para desarrollar dicho trabajo. Ofrecemos una propuesta de actividades pero motivaremos la búsqueda de intereses y curiosidades a raíz de los contenidos para así mejorar la motivación y desarrollar la componente creativa del pensamiento matemático. Así, este material complementario supone un punto de partida del total de la actividad, que **será el alumno quien termine de definirla** y concretarla a lo largo del curso.

4.3. Evaluación

Como hemos mencionado en multitud de ocasiones a lo largo de la memoria, el objetivo principal de esta propuesta es doble: por un lado, fomentar el desarrollo de las habilidades lógico-matemáticas; por otro lado (pero simultáneo), despertar en los alumnos interés, curiosidad y motivación por las matemáticas. Este desarrollo y despertar del pensamiento lógico irá acompañado de la sensación de *entender y construir* el propio conocimiento de forma activa.

Podemos concretar estos objetivos señalando algunos objetivos específicos.

I **Desarrollo del pensamiento lógico-matemático**

Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e intuitivo para la elaboración de estrategias de resolución de problemas.
Mejorar la habilidad descriptiva y analítica de situaciones para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas. Valorar la capacidad predictiva que supone.
Transmitir el valor de la matemática como recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana.
Fomentar la reflexión sobre las decisiones que se toman y aprender de ello para situaciones similares futuras.
Familiarizar a los alumnos en el uso de *lenguajes no cotidianos* como herramienta del pensamiento lógico-matemático (en particular, el lenguaje matemático formal).

II **Actitudinales**

Desarrollar y cultivar actitudes propias del quehacer matemático como pueden ser la perseverancia ante los retos y el aprendizaje tanto de los aciertos como de los errores.
Ayudar a superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
Despertar una actitud positiva hacia el quehacer matemático.

Para evaluar estos objetivos, y también la propia propuesta[25], tendremos en cuenta: un portafolio individual que cada alumno realizará a lo largo del curso y que contendrá el desarrollo de las actividades, las respuestas al cuestionario que hemos diseñado y una reflexión escrita (desarrollamos este punto en *4.3.1 Portafolio*); y la observación en el aula por parte del profesor, que quedará reflejada en su cuaderno.

I **Registro individual del desarrollo de las actividades**

Indicadores: mejora en la eficiencia en los procesos de resolución de problemas (análisis y comprensión de las situaciones, generación de ideas, ejecución de estrategias, reflexión); mejora en el reconocimiento de patrones y regularidades; mejora en el manejo de lenguaje simbólico.

II **Cuestionario**

Indicadores: muestra motivación e interés por la asignatura y sus contenidos; se siente satisfecho con la propuesta didáctica; reconoce la utilidad e importancia de las matemáticas y del razonamiento lógico a lo largo de la historia y en la vida diaria.

III **Observación en el aula: cuaderno del profesor**

Indicadores: se muestra más dispuesto a resolver problemas y afrontar retos; demuestra más confianza en sí mismo a la hora de abordar tareas; participa más durante las clases, hace preguntas, propone ideas y discute activamente con sus compañeros cuando se realizan las actividades.

4.3.1. Portafolio

Los alumnos tendrán que desarrollar un portafolio que constará de tres partes.

I **Primera parte**

- Una **redacción inicial** contestando a las siguientes preguntas: ¿qué entiendes por "matemáticas"?, ¿qué crees que estudia "la ciencia de la matemática"?, ¿qué significa el símbolo "1"?, ¿qué significa la letra "x"?
- Las respuestas al Cuestionario de la sección 4.3.2, además de cualquier observación o aclaración sobre alguna de las respuestas o algún comentario general sobre la asignatura o sobre las matemáticas.

[25] Sería interesante hacer un estudio sobre el impacto de esta metodología si se llevara a cabo durante varios años, o en distintos centros, comparando los resultados y actitudes de los alumnos cuando aprenden a través de este tipo de metodologías y cuando se sigue un método más tradicional.

II **Segunda parte**

- **Desarollo de las actividades**

  Los alumnos tendrán que registrar todas las actividades de la propuesta, incluyendo siempre los enunciados proporcionados por el profesor, la fecha en que se realiza y los procesos de resolución de las mismas.

  Aunque algunas actividades se realicen por parejas o grupos, cada alumno debe llevar un registro de su propio progreso. Es importante que consten los procesos de análisis y de ensayo y error, sin borrar o eliminar partes. Buscamos que los alumnos recojan no sólo las soluciones sino también y, casi más importante, los caminos que llevan a la solución. Por ejemplo: se valorará más positivamente un portafolio que contenga hojas con tachones y borrones pero que a continuación presente las conclusiones de esas "equivocaciones" de forma clara, explicando cómo ha llegado a ellas y de qué le han hecho darse cuenta, que un portafolio con una presentación perfecta, limpio y ordenado, pero al que le falten las explicaciones que llevan a las soluciones que plasma.

III **Tercera parte**

(Esta parte se llevará a cabo a final de curso; salvo el tercer punto que se introducirá a los alumnos con cierto tiempo de antelación).

- Una lista con las tres actividades que más le han gustado y por qué.
- Una lista con las tres actividades que menos le han gustado y por qué.
- Una lista con las tres juegos o actividades que tengan relación con las matemáticas (y que no se hayan hecho en clase) y que crea que pueden llevarse al aula para aprender matemáticas. Los alumnos deben justificar sus propuestas explicando cuál es la relación.
- Una reflexión final sobre sus impresiones de la asignatura y la metodología utilizada.
- Una **redacción final** contestando a las siguientes preguntas: ¿qué entiendes por "matemáticas"?, ¿qué crees que estudia "la ciencia de la matemática"?, ¿qué significa el símbolo "1"?, ¿qué significa la letra "x"?
- Las respuestas al Cuestionario de la sección 4.3.2, además de cualquier observación o aclaración sobre alguna de las respuestas o algún comentario general sobre la asignatura o sobre las matemáticas. (En esta última parte añadimos dos preguntas).

4.3.2. Cuestionario

Con este cuestionario no sólo evaluamos a los alumnos sino también la propuesta que presentamos. Podremos utilizar las respuestas para adaptar o modificar las actividades en función de las necesidades o sugerencias que manifiesten los alumnos.

Deberán contestar a las siguientes preguntas con una escala graduada en cinco niveles: 1 “Muy poco”, 2 “Poco”, 3 “Neutro”, 4 “Bastante” y 5 “Mucho”.

a) ¿Te gustan las matemáticas?

(Nombra tres cosas relacionadas con las matemáticas que te gusten y tres cosas que *no* te gusten).

b) ¿Crees que se te dan bien las matemáticas?

c) ¿Crees que las matemáticas pueden ser divertidas o entretenidas?

d) ¿Te lo pasas bien en clase de matemáticas?

e) ¿Te gusta trabajar en grupo?

f) ¿Te gusta trabajar por parejas?

g) ¿Te gusta trabajar individualmente?

h) ¿Dirías que aprendes cosas de matemáticas?

i) ¿Dirías que *entiendes* lo que aprendes?

j) ¿Crees que las matemáticas son difíciles?

k) ¿Crees que a lo largo del año has aprendido a buscar estrategias?

l) ¿Crees que a lo largo del año has aprendido a usar *símbolos*? (El lenguaje matemático también está formado por símbolos, ¡no lo olvides!)

m) ¿Crees que las matemáticas han influido en cómo es la sociedad actualmente?

(Nombra cinco cosas (objetos, ideas, formas de pensar, resolución de problemas de la vida cotidiana...) para las que las matemáticas hayan contribuido).

n) Responde también a la siguiente pregunta (sin escala graduada): ¿aprendes mejor cuando *memorizas* lo que hay que hacer o cuando *entiendes* lo que estás haciendo?, ¿cuál de los dos métodos prefieres?

ñ) (Sólo para la tercera parte del portafolio). Una última pregunta a responder con la escala graduada: ¿te ha gustado este año la asignatura de matemáticas?

o) (Sólo para la tercera parte del portafolio). Ahora sí que sí, última pregunta: ¿te gustaría que la clase de matemáticas se pareciera más a las clases de este año?

Referencias

Amestoy, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 4*(1).

Arnal, A. (2022). *Paradojas visuales* [presentación de diapositivas no publicada]. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Ballesteros, A. (2021). Hacia una ecología de la atención: necesitamos espacios libres de estímulos. *The Conversation*. Consultado el 25 de junio de 2022. https://theconversation.com/hacia-una-ecologia-de-la-atencion-necesitamos-espacios-libres- de-estimulos-161229

Bilbao, A. (2021). *La matemática recreativa como recurso motivador en el aula de matemáticas* [tesis de posgrado, Universidad de Valladolid]

Chacón, C. (s.f.). Altas capacidades. *El Mundo del Superdotado*. Consultado el 8 de junio de 2022. https://www.elmundodelsuperdotado.com/altas-capacidades/

Chacón, C. (s.f.). Personalizar la educación de las altas capacidades no es segregar. *El Mundo del Superdotado*. Consultado el 8 de junio de 2022. https://www.elmundodelsuperdotado.com/ personalizar-educacion-altas-capacidades-no-es- segregar/

Chacón, C. (s.f.). Los superdotados y el fracaso escolar. *El Mundo del Superdotado*. Consultado el 8 de junio de 2022. https://www.elmundodelsuperdotado.com/superdotados-fracaso-escolar/

Cid, M. & Muñoz, J.M. (s.f.). *Apuntes de diseño instruccional en matemáticas. Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico*. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Consejo General de los Colegios Oficiales de Médicos de España, Organización Médica Colegial, Consejo Superior de Expertos en Altas Capacidades y Fundación para la Formación de la OMC. (2014). Aprendizaje autorregulado. En *Diccionario de las altas capacidades y de la educación inclusiva* [Anexo de la Guía Científica de las Altas Capacidades]. Recuperado de https://altascapacidadescse.org/cse/diccionario.pdf

de Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Suma. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 4*, 61-64.

de Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Olimpiada Matemática Argentina.

de Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamerica de Educación, 43*, 19-58.

de Mirandés, J. (2004, 5-7 de julio). Los estilos de aprendizaje específicos de los superdotas. En *Los Estilos de Aprendizaje de los Alumnos Superdotados* [ponencia]. Primer Congreso Internacional de Estilos de Aprendizaje, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

Díez-Palomar, J., García, P., Molina, S. & Rué, L. (2010). Aprendizaje dialógico en las matemáticas y en las ciencias. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 67*(24,1), 75-88.

Fernández, J.A. (2001). *Aprender a hacer y conocer: el pensamiento lógico*. Congreso Europeo: Aprender a ser, aprender a vivir juntos. Santiago de Compostela (Ponencias)

Ferrero, L. (2010). *Jaque a las matemáticas*. La Muralla, S.A.

Gutiérrez, E. (2020). *Actividades introductorias de los grafos en las matemáticas de secundaria* [tesis de maestría, Universidad de Burgos].

Fromm, E. (2020). Libertad y democracia. En *El miedo a la libertad* (pp. 341-388). Paidós.

Gobierno de Aragón. (2016). Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, núm. 105. Ref.: BOA20160602001

Gobierno de Aragón. (2016). Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, núm. 106. Ref.: BOA20160603001

Guerrero, S. (1999). Los alumnos deben aprender ¡Matemáticas!. En A. Ubieto, *Aspecto didácticos de matemáticas. 7* (pp. 143-157). Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza.

Huizinga, J. (1954). *Homo ludens*. Editorial digital German25.

Miguel de Guzmán Ozámiz. (s.f.). EsTalMat. Consultado 26 de abril de 2022. https://www.estalmat.org/miguel-de-guzman/

Olarrea, J., Nuño, J.C. & Blasco, F. (s.f.). *La matemática recreativa como herramienta para el aprendizaje*. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

Poincaré, H. (2018). *La invención matemática. Cómo se inventa: el trabajo del inconsciente*. KRK Ediciones.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (s.f.). *Mathematical talent of young children*. Recuperado el 26 de abril de 2022 de https://www.estalmat.org/articulos-sobre-estalmat/

Travieso, D. & Hernández, A. (2017). El desarrollo del pensamiento lógico a través del proceso enseñanza-aprendizaje. *Revista Cubana de Educación Superior, 1*, 53-68.

Apéndice

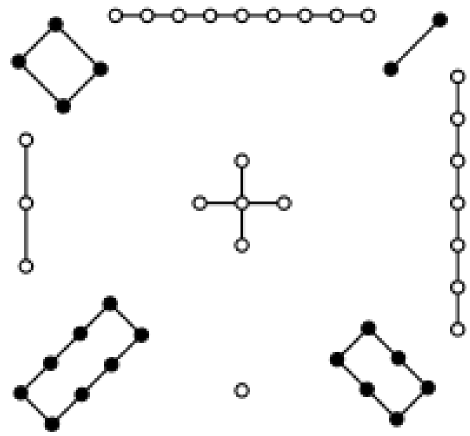

Figura 1: Cuadrado mágico *Lo-Shu*

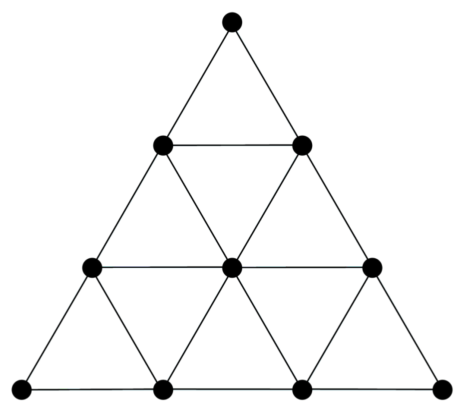

Figura 2: Tetraktys

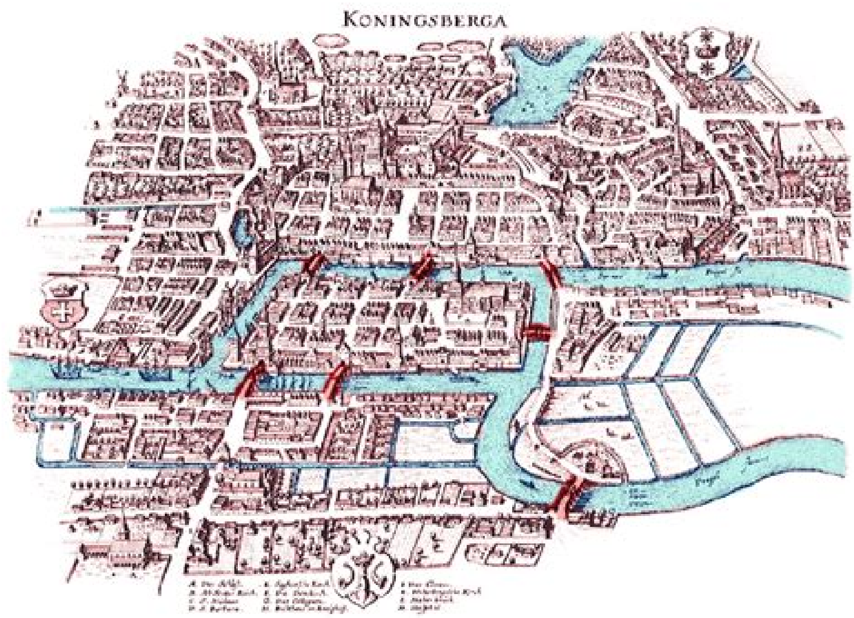

Figura 3: Los siete puentes de Königsberg

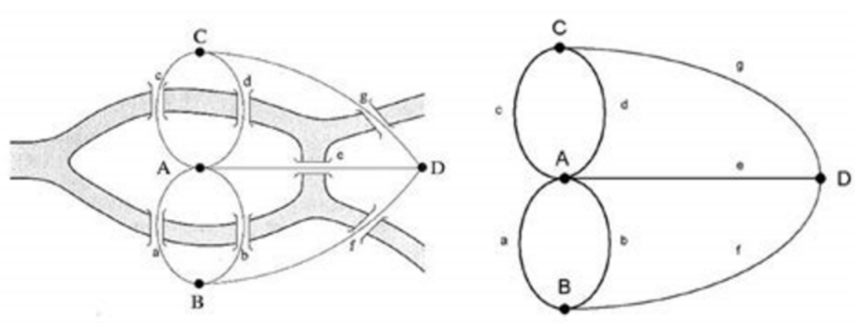

Figura 4: Representación *gráfica* de los siete puentes de Königsberg

La banda de Möebius

[Sesión 1] Construcción de una banda de Möebius y de una banda cilíndrica; comparar su característica de *orientabilidad*.

Necesitamos un folio, un lápiz, boli o rotulador y unas tijeras. Vamos a recortar dos tiras de 3cm de ancho a lo largo del ancho del folio y a marcar una cruz de un color en una cara y una cruz de otro color en la otra cara. Cuando hayáis hecho esto, debéis tener dos tiras de folio iguales (o muy parecidas).

Ahora vamos a “cerrar” estas tiras uniendo sus extremos, cada una de una forma: una de ellas tal y como indica la Figura 5; la otra, como la Figura 6.

Intenta unir las cruces sin levantar el lápiz de la superficie de la tira. ¿Puedes?

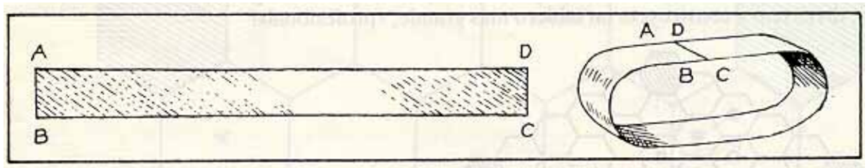

Figura 5: Cómo conseguir un cilindro

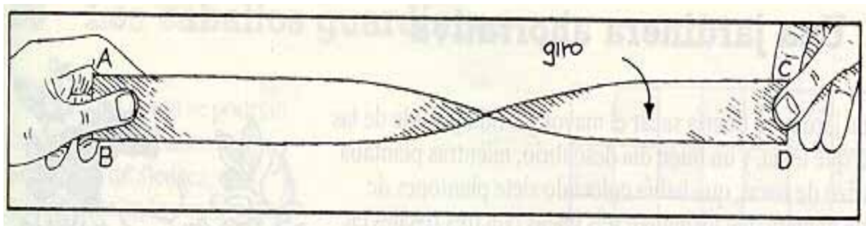

Figura 6: Cómo conseguir una banda de Möebius

Ahora vamos a recortar otras dos tiras de 3cm de ancho. En cada tira, vamos a pintar en una de sus caras una línea continua y en la otra una línea discontinua; cuando hayas hecho esto tienes que tener dos tiras iguales. Vuelve a cerrar las tiras como antes, una como la Figura 5 y otra como la Figura 6).

¿Te das cuenta de que en una cinta las caras quedan separadas y que en la otra las caras "se unen"? Podemos decir que una figura tiene dos caras y la otra tiene sólo una; con la primera podemos distinguir una parte a la que podemos llamar "dentro" y otra parte a la que podemos llamar "fuera", ¡pero con la figura de una sola cara no hay "dentro" y "fuera"! En matemáticas decimos que la primera figura es *orientable*, mientras que la segunda es *no orientable*.

[Sesión 2] Introducción de otra figura no orientable: *la botella de Klein*.

¿Sabéis que hay otras figuras no orientables que parecen imposibles? Os voy a enseñar una que se llama la *botella de Klein* (https://www.youtube.com/watch?v=KLZMU0oyer8).

[Sesión 3] Manipulación de la banda cilíndrica y la banda de Möebius; predicción de posibles resultados.

Vamos a coger las cintas que tenemos hechas y que tienen pintadas las rayas. Primero cogemos el cilindro y lo recortamos siguiendo la línea. ¿Qué hemos obtenido?

Ahora vamos a recortar la banda de Möebius. ¿Qué creéis que vamos a conseguir?, ¿cuántas caras tiene la nueva figura?

[Sesión 4] Ver https://www.youtube.com/watch?v=4mdEsouIXGM

[Sesión 5] Manipulación de la banda de Möebius.

Hoy vamos a construir una nueva banda de Möebius, pero en vez de dibujar una línea por la mitad, vamos a dividir la cinta en tres partes (a lo largo). Después vamos a recortar por la línea. ¿Qué crees que vamos a conseguir? ¡Comprueba cuántas caras tiene el resultado!

[Sesión 6] Construcción de nuevas *bandas retorcidas*; predicción de posibles resultados.

Esta vez vamos a construir más bandas. Cortamos tiras de 3cm de ancho y vamos a unirlas haciendo más giros al papel. Obtenemos la banda de Möebius si giramos 180° la cinta, ¿qué conseguimos si lo giramos otros 180°?

¿Y si lo giramos 180° más?, ¿cuántas caras tienen estas bandas?

[Sesión 7] Generalización de la construcción de la sesión anterior.

Teniendo en cuenta el experimento de la última vez, ¿serías capaz de decir cuántas caras tiene una banda a la que has dado 7 vueltas? (Por cada 180° damos una vuelta a la tira). Y si le damos 1024 vueltas, ¿cuántas caras tendrá?

[Sesión 8] Puesta en común de las respuestas a la pregunta del día anterior y resolución; debate sobre el desarrollo general de la actividad de la banda de Möebius.

La paradoja del chocolate infinito

[Sesión 1] Introducción a la paradoja (https://www.youtube.com/watch?v=RsouXvrWK4U).

Se planteará la pregunta: ¿cómo puede ser que *desaparezca* una parte? Os propongo que lo hagáis con una hoja de papel y ver qué pasa.

[Sesión 2] Construcción manual de la paradoja con cuadrículas proporcionadas a los alumnos y con instrucciones definidas; reflexión.

¿Habéis pensado en qué pasaba con el chocolate?, ¿habéis probado a hacerlo con papel?

Se repartirá a cada alumno una ficha con una cuadrícula de 5×13 marcada como indica la Figura 8, con 65 cuadritos en total, y se les pedirá que la recorten y recoloquen en forma de cuadrado de dimensiones 8×8 (como indica la Figura 7), con 64 cuadritos.

De nuevo: ¿cómo es posible que *desaparezca* un cuadradito?

[Sesión 3]

[Sesión 3] Explicación de la paradoja: primero, matemáticamente; después con la visualización de una imagen animada y con la Figura 9 que se proporcionará a los alumnos.

Matemáticamente: los "triángulos" que forman el rectángulo no son triángulos perfectos pues la pendiente de las partes que lo conforman son distintas; ahí es donde se pierde el cuadradito.

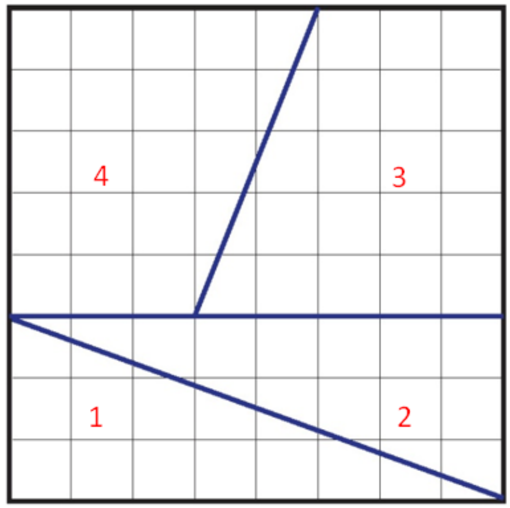

Figura 7: Plantilla 8×8 para recortar

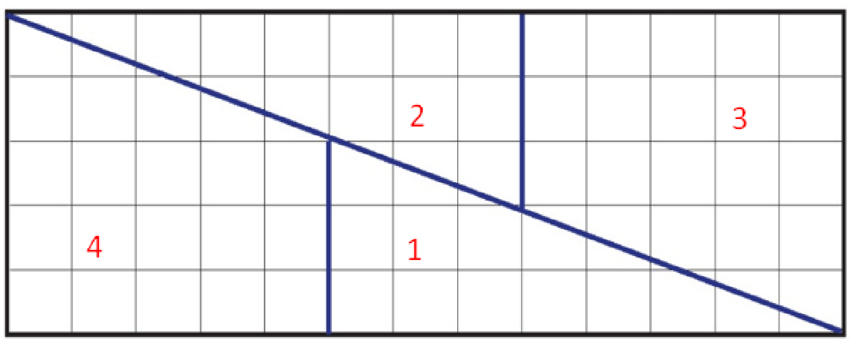

Figura 8: Plantilla 5×13 para recolar las partes

En el caso concreto de la tableta de chocolate, la superficie que “desaparece” se puede ver en la imagen de la Figura 9.

[Sesión 4] Uso de la herramienta *GeoGebra* para representar las figuras y analizar las pendientes implicadas en la “reconstrucción” que da lugar a la paradoja; reflexión.

Se pedirá a los alumnos que sitúen un rectángulo de las dimensiones adecuadas con vértice inferior izquierdo en el origen y con los lados paralelos a los ejes. A partir del rectángulo, dibujar la Figura 8, dibujando todos los polígonos como objetos completos (no sirve con marcar los puntos, queremos tener las figuras “construidas” para poder acceder a la información que nos proporcionará GeoGebra sobre las funciones que determinan los lados de cada polígono). Calcular manualmente (contando casillas) las pendientes de los lados de los polígonos que caen en la diagonal; calcular manualmente la pendiente de la diagonal. Después, mirar la ventana de *Álgebra* de GeoGebra para extraer las funciones que representan cada lado y de

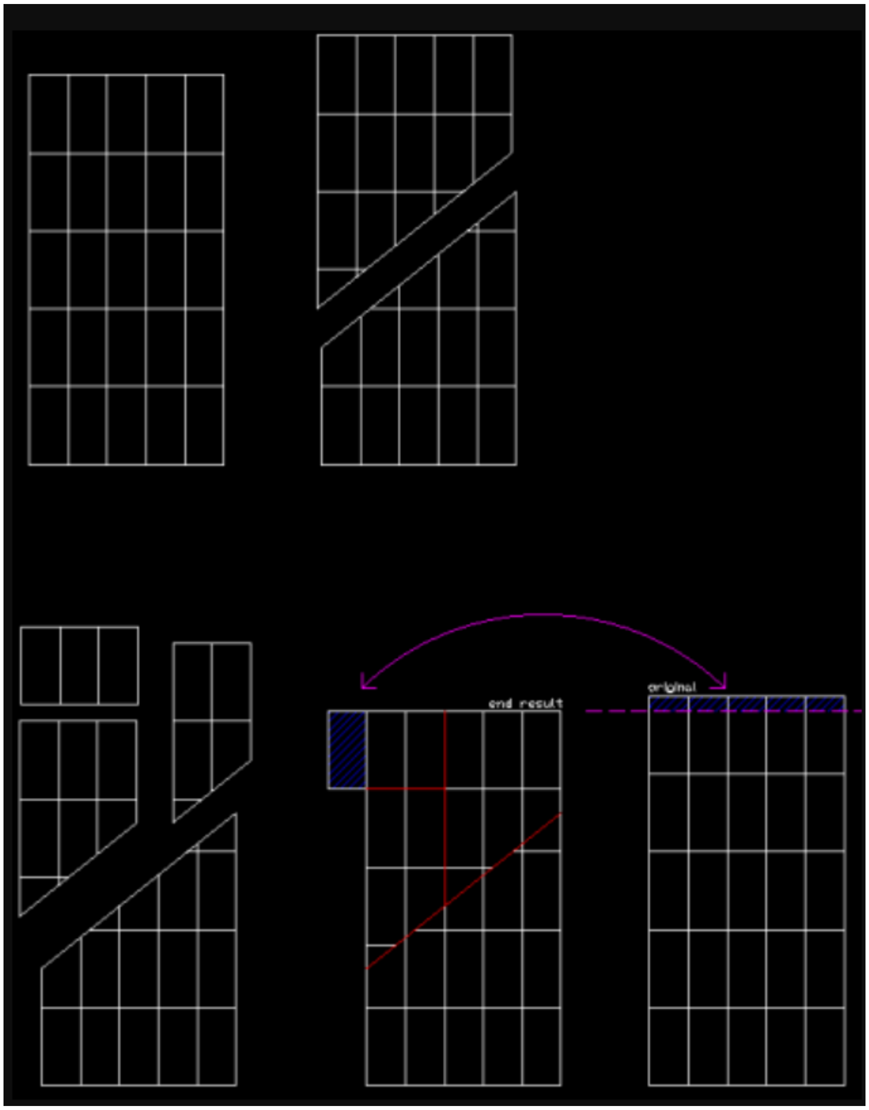

Figura 9: El cuadradito que “desaparece” de la tableta de chocolate

ahí obtener las pendientes. ¿Coinciden?

Hacer lo mismo con la Figura 7: construir el cuadrado y los triángulos y trapecios que lo conforman; calcular las pendientes de los lados correspondientes manualmente y después extraerlas de la construcción en GeoGebra. ¿Coinciden?

Manualmente, también es inmediato contar casillas para calcular una de las pendientes como $\frac{2}{5}$ y la otra como $\frac{3}{8}$ que, evidentemente, no coincide con la otra.

Fractales

Polvo de Cantor

Figura 10: Primeras iteraciones del polvo de Cantor

[Sesión 1] Se proporciona una ficha de algún color (para poder pegar sobre folio y que se aprecie la figura) para recortar distintas bandas de medio centímetro de grosor siguiendo las iteraciones del polvo de Cantor. Recortar y construir las primeras tres iteraciones del fractal. ¿Cuánto mide la primera banda?, ¿y las bandas de la segunda iteración?, ¿y las de la tercera?

[Sesión 2] Si lo siguieras haciendo, ¿cuánto medirían las bandas de la décima iteración?. ¿Y las de una iteración cualquiera?

[Sesión 3] Si pudieras hacer este proceso indefinidamente, ¿cuánto mediría cada banda de la figura que obtendrías?

Copo de Koch

[Sesión 1] Se proporciona una ficha de algún color (para poder pegar sobre folio y que se aprecie la figura) para recortar triángulos de distintos tamaños: un triángulo inicial con lado L, tres con el lado $L/3$, seis con lado $(L/3)/3 = L/9$. Recortar y construir las primeras tres iteraciones del fractal. ¿De que tamaño el lado de los triángulos de cada iteración?, ¿de qué tamaño tendría que ser el lado de la siguiente ronda de triángulos?

[Sesión 2] ¿De que tamaño tendría que ser el lado de la quinta ronda de triángulos? ¿y de la siguiente?, ¿y de la ronda 10?, ¿y de la 27?, ¿y de una ronda cualquiera?

[Sesión 3] Si pudieras hacer este proceso indefinidamente, ¿cuánto mediría el perímetro de la figura?

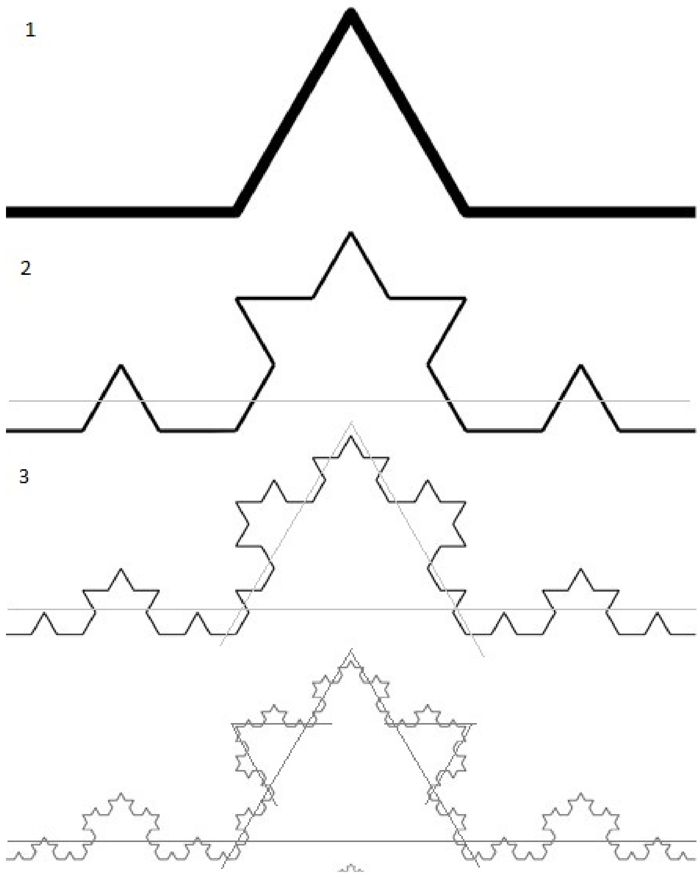

Figura 11: Primeras iteraciones del copo de Koch

Triángulo de Sierpinski

[Sesión 1] Se proporciona una ficha de algún color (para poder pegar sobre folio y que se aprecie la figura) para recortar triángulos de distintos tamaños: un triángulo inicial con lado Ly tres con lado $L/2$ Recortar y construir las primeras iteraciones del fractal. ¿De que tamaño el lado de los triángulos de cada iteración?, ¿de qué tamaño tendría que ser el lado de la siguiente ronda de triángulos?

¿Podrías decir cuánto es el área de la figura en la primera y segunda iteración?

[Sesión 2] ¿De que tamaño tendría que ser el lado de la quinta ronda de triángulos? ¿y de la siguiente?, ¿y de la ronda 10?, ¿y de una ronda cualquiera?

¿Podrías decir cuánto es el área de la figura en la tercera iteración?

[Sesión 3] Si pudieras hacer este proceso indefinidamente, ¿cuánto mediría el área de la figura?

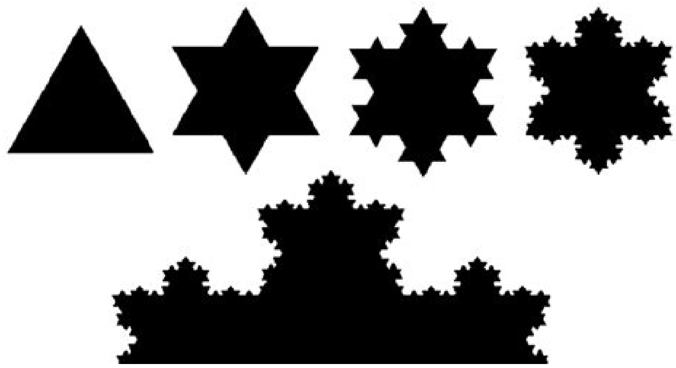

Figura 12: Primeras iteraciones del copo de Koch

Figura 13: Primeras iteraciones del triángulo de Sierpinski

Alfombra de Sierpinski

[Sesión 1] Construir la alfombra a partir de una ficha con un cuadrado (de un color) y sucesivos cuadrados de menores dimensiones (de un color común el conjunto de cuadrados de una misma iteración): se parte del cuadrado inicial y se superponen sobre él los cuadraditos relativos a las siguientes iteraciones. ¿Cuánto miden los lados en cada iteración?

[Sesión 2] ¿De que tamaño tendría que ser el lado de la quinta ronda de triángulos? ¿y de la siguiente?, ¿y de la ronda 10?, ¿y de la 27?, ¿y de una ronda cualquiera?

[Sesión 3] Con la medida de los lados, ¡podemos calcular el perímetro de la figura! ¿Cuánto mide el perímetro del cuadrado inicial?, ¿y de la figura resultante en la iteración 2?, ¿y en la 3?, ¿y en una iteración cualquiera? Dar la solución general.

[Sesión 4] ¡Otra cosa que podemos medir es el área! ¿Cuánto mide el área del cuadrado inicial?, ¿y de la figura resultante en la iteración 2?, ¿y en la 3?, ¿y en una iteración cualquiera? Dar la solución general.

[Sesión 5] ¿Qué sucede con el perímetro de la figura?, ¿y con el área? ¿No es paradójico que el perímetro se haga cada vez más grande y el área cada vez más pequeño? Procederemos aquí a hablar del conflicto histórico que se dio en el mundo de la matemática cuando "aparecieron" los fractales y sus "incongruencias" lógicas.

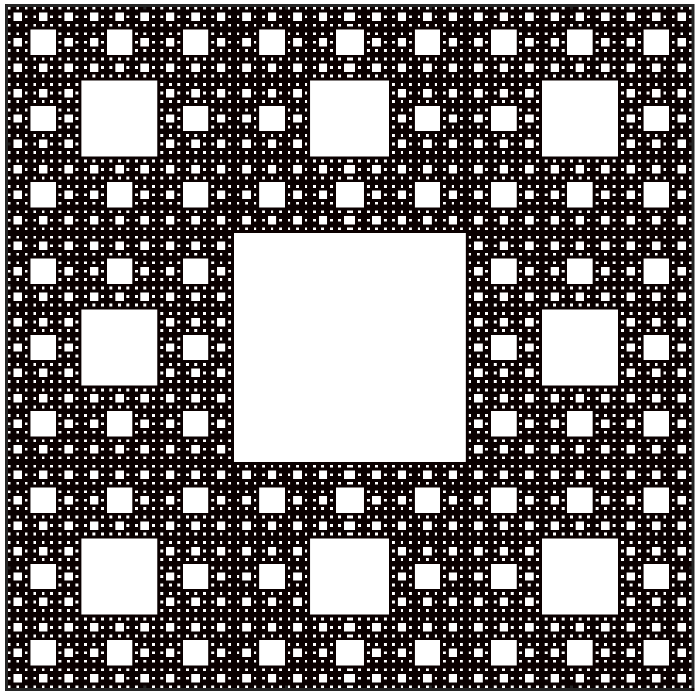

Figura 14: Primeras iteraciones de la alfombra de Sierpinski

[Sesión 6] Ver vídeo explicativo de la relación entre perímetro y área de los fractales la *alfombra de Sierpinski* y el *copo de Koch* (enlace).

Conjunto de Julia

Presentación de *el conjunto de Julia* (https://www.youtube.com/watch?v=FFftmWSzgmk).

Paradojas

La paradoja del barbero

Hace muchos años, en un lejano reino, había pocas personas que su oficio fuera ser barbero. Para solucionar el problema, el rey dictaminó que los barberos solo podían afeitar a las personas que no podían afeitarse por sí mismas.

Uno de esos barberos, era el único en su comarca y le entró la siguiente duda: "Como barbero no puedo afeitar al barbero de mi comarca, que soy yo, porque entonces podría afeitarme a mí mismo. Pero entonces, algún barbero debe de afeitarme, pero como soy el único que hay, entonces no me puedo afeitar".

¿Quién afeita al barbero?

La paradoja del mentiroso

La versión clásica de la paradoja del mentiroso se puede expresar con la siguiente oración: “Esta oración es falsa”.

Si suponemos que es verdadera, entonces es falsa y, por tanto, no puede ser verdadera; pero esto va en contra de nuestra suposición inicial, a saber, que es verdadera. Supongamos ahora el otro caso, supongamos que es falsa: si es falsa, entonces es verdadera, y por tanto no es falsa.

La paradoja del condenado

Un juez de sinceridad y honestidad reconocida, pronuncia su fallo ante un condenado:

“Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última de vida”.

En ese momento el reo capta una contradicción fundamental. Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podrá ser jamás ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche tendría la certeza de que la mañana siguiente habría de morir, lo que se contrapone con los propios términos de la sentencia. Esto es irrefutable. De modo que el día 30 queda absolutamente eliminado como posible. Entender esto cabalmente es, ya, vislumbrar la paradoja. Descartado el treinta, el condenado arguye:

> El 30 está vedado para el verdugo, porque violaría la letra y el espíritu del fallo condenatorio -el 29 por la noche ya no tendría yo duda alguna-, así que el último día posible es el 29. Pero entonces, el día 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado, lo que también contradice la sentencia. Deberé descartar igualmente el 29.

Si seguimos repitiendo el razonamiento para el resto de los días, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de ejecución imposible, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad.

Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera -digamos el 13 del mes- el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... La sentencia se cumplió literalmente.

El planteo paradójico nos lleva a esta pregunta: ¿dónde falló el razonamiento del prisionero?

Paradojas y el infinito

Aquiles y la tortuga

Si para la carrera Aquiles le deja a la tortuga 100 metros de ventaja, por muy lenta que ande ésta, cuando Aquiles ha recorrido los 100 metros, la tortuga ya ha avanzado una distancia. Posteriormente Aquiles recorre esa distancia, pero la tortuga nuevamente habrá avanzado. Ahora la distancia que las separa será menor, pero seguirá existiendo.

Este proceso se repetiría tantas veces como fuera necesario, y aun siendo cada vez la distancia que los separa más pequeña, la tortuga siempre estaría delante porque Aquiles tiene que recorrer primero la distancia que acaba de hacer el animal, que aun pequeña, es siempre positiva.

Figura 15: Aquiles y la tortuga

El hotel infinito

Material: *El hotel infinito* de Hilbert[26]

[Sesión 1] Visualización hasta 2:10. Si llega un cliente, bien; ¿si llegan dos?, ¿y si llegan tres?, ¿y si llegan un millón de clientes? Hasta aquí todo bien, pero ¿qué pasa si llegan *infinitos* clientes más?

[Sesión 2] Visualización hasta el 3 minutos y 15 segundos. Ya sabemos que no hay problema si llegan infinitos clientes más, pero ¿qué pasa si llegan *dos infinitos* más?, ¿y *tres infinitos* más? Esto podemos hacerlo cuadrar, pero... ¿qué pasa si llegan *infinitos infinitos* clientes nuevos?

[Sesión 3] Visualización y reflexión del resto del resto del vídeo.

[26]QuantumFracture. (2013). *El Hotel Infinito* [vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=iAF37vVeV-Y

¿Cuántos números hay?

Contenido específico. Números naturales y *ordenación*. Concepto de infinito (y sus paradojas).

[Sesión 1] ¿Hay más números naturales o enteros?

Utilizar la paradoja del hotel infinito para “ordenar” los enteros. Por ejemplo: 0, 1, -1, 2, -2, ... Hacer corresponden un entero a cada natural.

[Sesión 2] ¿Cuántos números racionales hay? ¿Hay más racionales o enteros?, ¿hay más racionales o naturales?

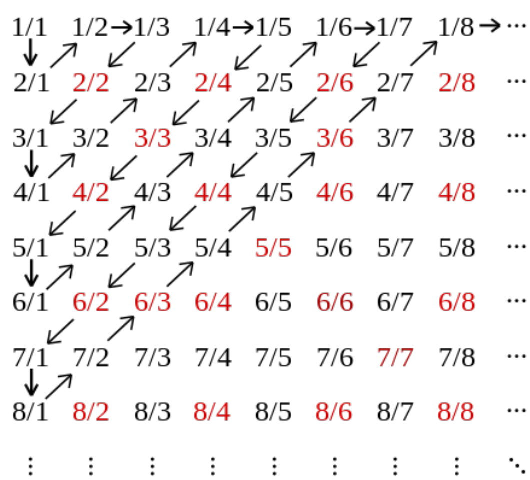

Figura 16: Contando y ordenando números racionales

[Sesión 3] ¿Cuántos números reales hay?, ¿hay más números reales o naturales?

Demostrar que dados dos números reales cualesquiera, siempre podemos encontrar otro que se encuentre entre ellos. El procedimiento es muy sencillo, y podemos tomar como referencia esta entrada.[27]

¿Cómo cortar el pastel?

Raquel va a celebrar su cumpleaños esta tarde y su padre ha hecho un pastel para repartir entre todos en trozos iguales. Al cumpleaños acudirán dos compañeras de su equipo de patinaje, cuatro amigos del barrio, siete compañeros de clase, ella, su hermano Juan y su padre David.

[27] Pérez, M.T., Martín, M.A., Barbero, A., Farran, J.I. & Arratia, O. (2009). *R no es numerable*. Invitación a las matemáticas. http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Reales/R_no_numerable.html

¿Cómo puede partir el pastel si quiere hacer sólo 5 cortes?

Pista: lo primero que tienes que saber es cuántos trozos iguales quieres hacer.

Reto: unir puntos

El objetivo de este reto es (aparentemente) sencillo: unir todos los puntos de la Figura 17 con cuatro líneas como máximo y sin levantar el lápiz del papel.

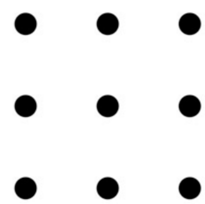

Figura 17: Unir los puntos con cuatro líneas

¿Puedes hacerlo?

Reto: transformar un triángulo en otro

¿Podrías transformar el primer triángulo de la Figura 18 en el segundo con tan sólo tres movimientos?

Figura 18: Transformar un triángulo en otro en tres movimientos

Un "truco" para adivinar la edad de *cualquiera*

¿Queréis saber un truco para adivinar la edad de *cualquiera*? Os cuento cómo hacerlo:

1° Elige un número del 1 al 50

2° Añade 50 a ese número

3° Multiplica el resultado por 20

4° Añade 17 más

5° Si no has cumplido años en 2022, añade 1003; si ya has cumplido, añade 1003 y 1 más

6° Quítale tu año de nacimiento y dime el número que te queda

7° ¡¿Es esa tu edad?!

[Sesión 1] Plateamiento y familiarización con el procedimiento; búsqueda de ideas.

Ahora os toca intentar adivinar cómo lo he hecho... ¿dónde está el truco? Podéis hacérselo a algún amigo, compañero, padres o hermanos para ver si funciona.

¿Se os ocurre alguna forma de adivinar por qué siempre funciona? Os daré una pista: ¡tenéis que usar las matemáticas!

[Sesión 2] Introducción de lenguaje algebraico como herramienta de resolución.

Os voy a dar una pista para intentar sacar el truco para adivinar la edad de alguien: en matemáticas, cuando no sabemos qué es o cuánto vale algo, muchas veces lo etiquetamos con una letra o una palabra para poder referirnos a ello y "utilizarlo" (aunque no sepamos cuánto vale). Por ejemplo, en este caso, ¿qué es lo que no conocemos pero utilizamos desde el primer paso del truco? Exacto, *un número* que alguien ha escogido, así que podemos llamarlo NUM para poder utilizarlo (matemáticamente).

Llamando NUM a esa cantidad, ¿sabrías expresar los siguientes pasos del truco?

[Sesión 3] Formalización y explicación del proceso; reflexión *dialógica*.

¿Creéis que este truco sirve realmente para adivinar la edad de *cualquiera*?, ¿se os ocurre algún requisito que tenga que cumplirse para que funcione?

La herencia de los camellos

[Sesión 1] Plateamiento y familiarización con el problema; primeras aproximaciones (hacer los cálculos oportunos) y obtener conclusiones paradójicas.

Cerca de un albergue de caravanas, Beremiz y su acompañante observaron cómo unos hombres que estaban rodeados por 35 camellos discutían. Beremiz se acercó para intentar comprender su problema y ayudarlos. Uno de ellos explicó que eran tres hermanos y que habían recibido como herencia esos 35 camellos. Según la voluntad de su padre, la mitad corresponden al hermano mayor, la tercera parte al hermano mediano y la novena parte al pequeño. Les resulta imposible llegar a un acuerdo ya que la mitad de 35 es 17,5 al igual que un tercio de 35 también es un número decimal y la novena parte tampoco es exacta.

Beremiz se ofreció a hacer justicia con dicho reparto y unió el camello de su acompañante a esos 35 para realizar el reparto, sumando un total de 36 camellos a repartir.

¿Creéis que así se resuelve el problema? Venga, ¡haced un par de cuentas y me lo decís! ¿Qué sucede?, ¿salen ganando los hermanos?

Y Beremiz, ¿pierde su camello? Ahora sobra el camello añadido... ¡y otro más! ¿Cómo es esto posible?

[Sesión 2] Explicación de la “paradoja”; reflexión dialógica.

Explicamos el truco usando el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 9 (las partes en que se divide la herencia) y vemos que entre todas las partes no se consigue sumar el total.

Alicia y los gatos

Material: figuras 19 y 20.

Figura 19: Alicia y los **cinco** gatos

Las escaleras de Escher

Material: figuras 21 y 22.

Figura 20: Alicia y los **cuatro** gatos

Tangram. Hundir la flota. Cruzar el río

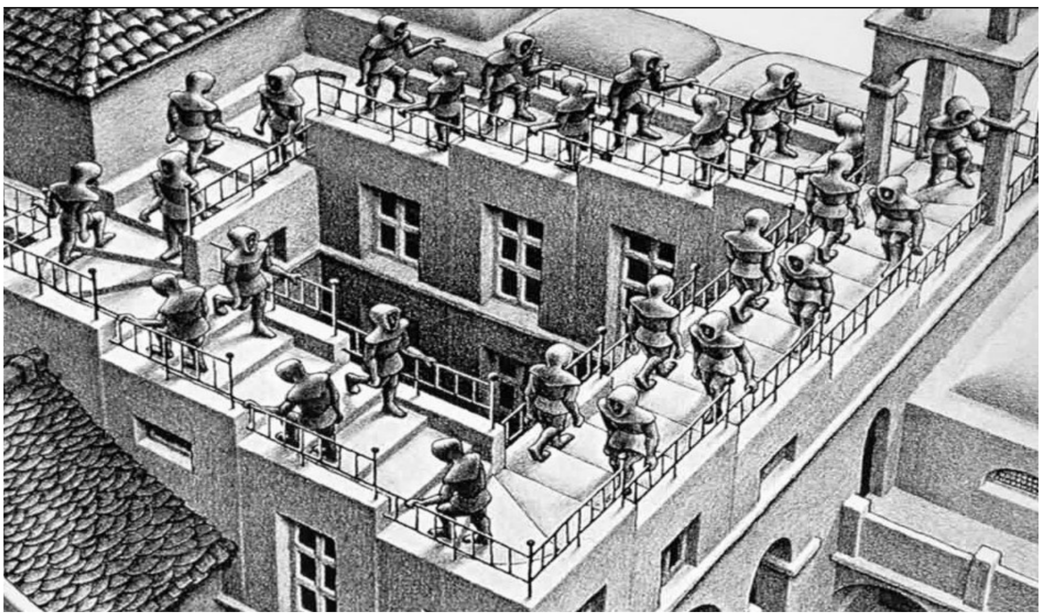

Figura 21: Las escaleras infinitas de Escher

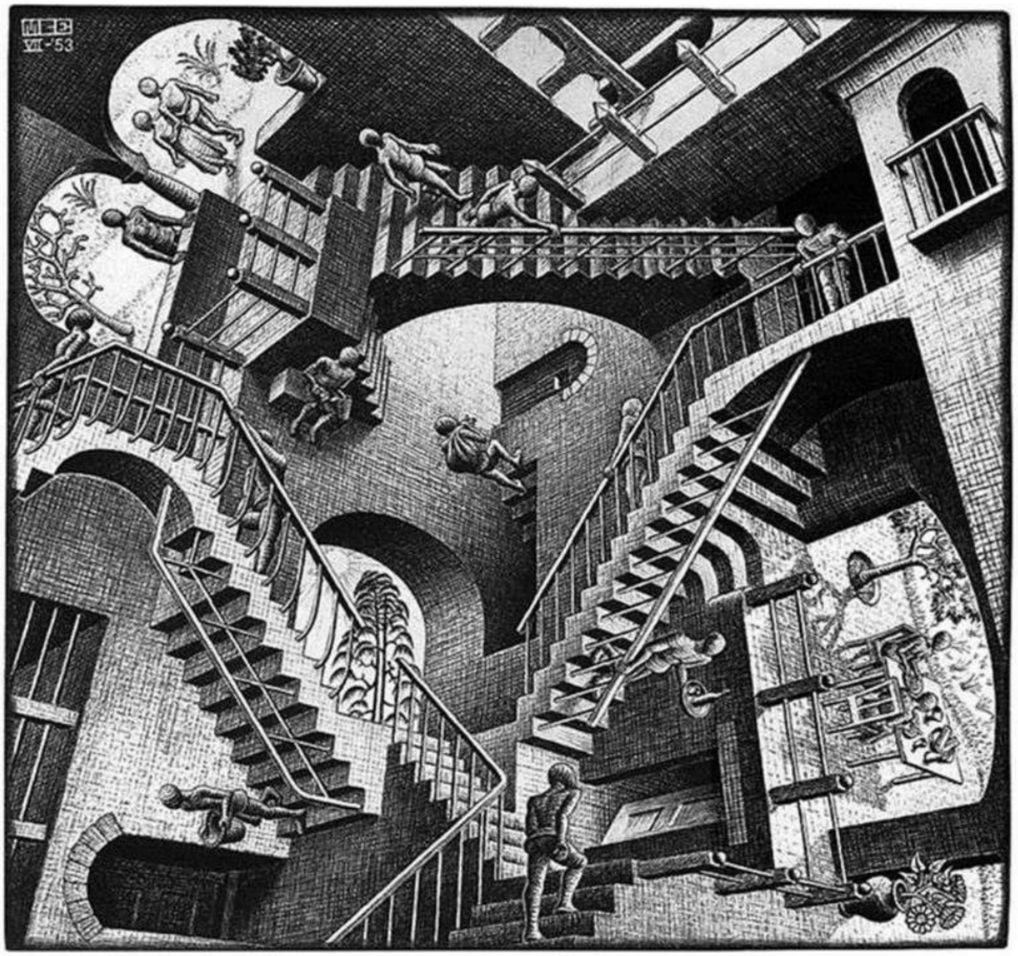

Figura 22: Otras escaleras infinitas de Escher

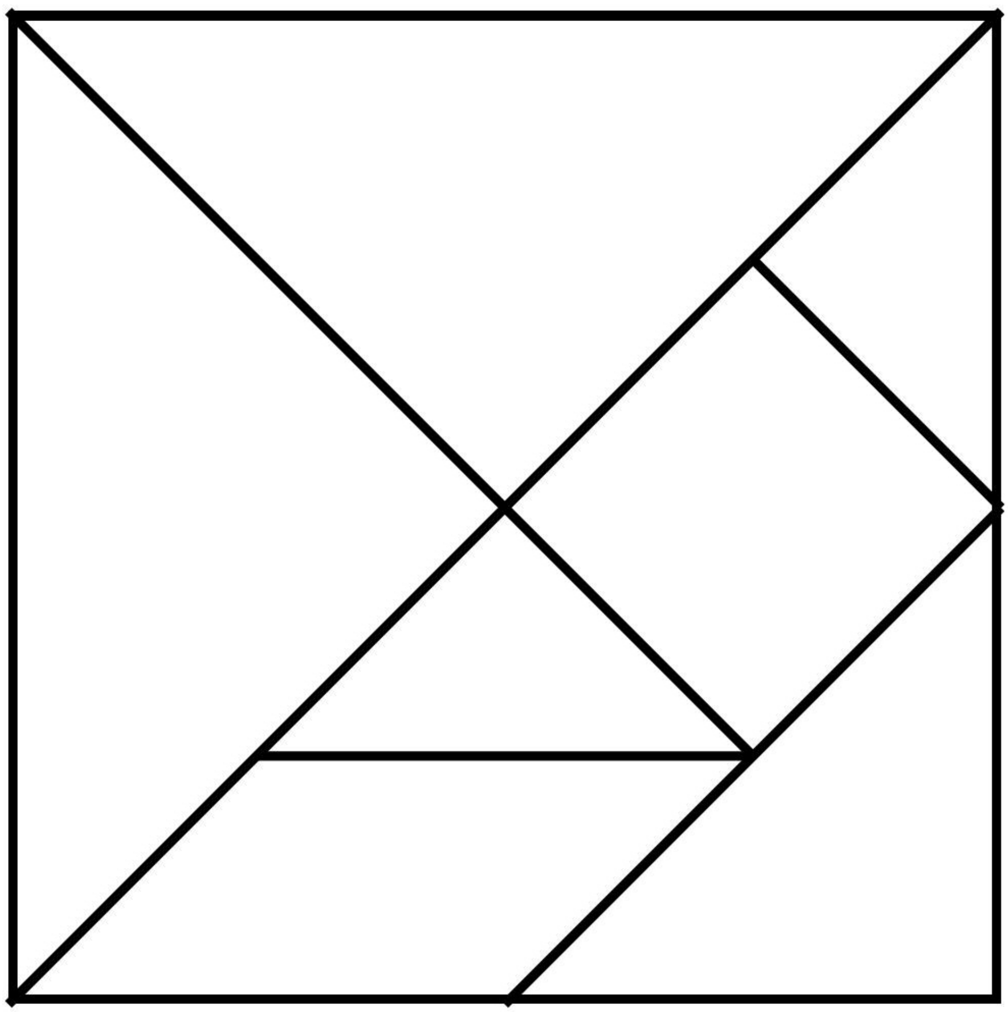

Figura 23: Piezas TANGRAM

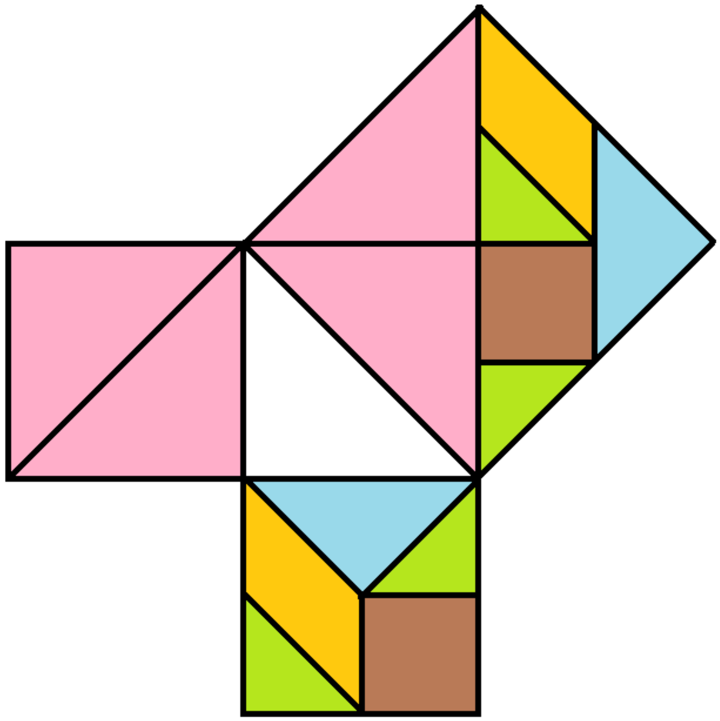

Figura 24: El tangram y el teorema de Pitágoras

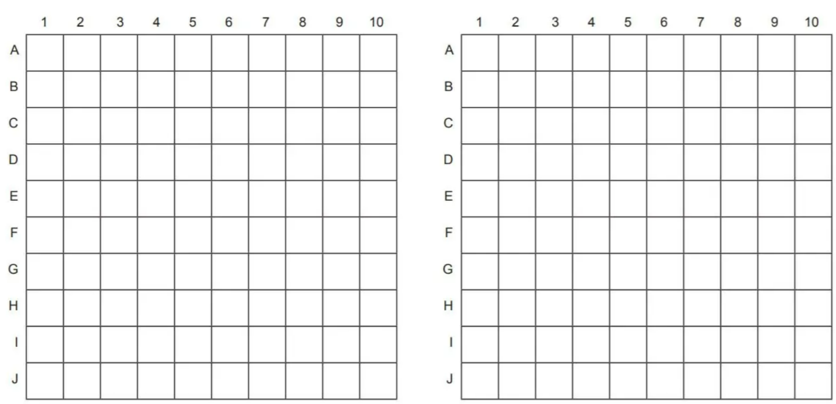

Figura 25: Plantillas para el juego *Hundir la flota*

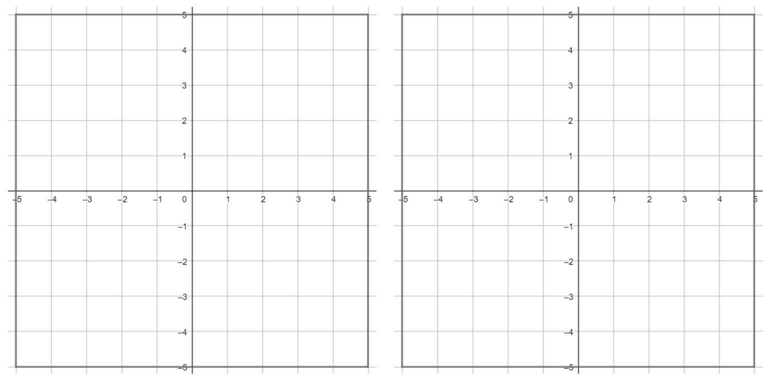

Figura 26: Plantillas con ejes para el juego *Hundir la flota*

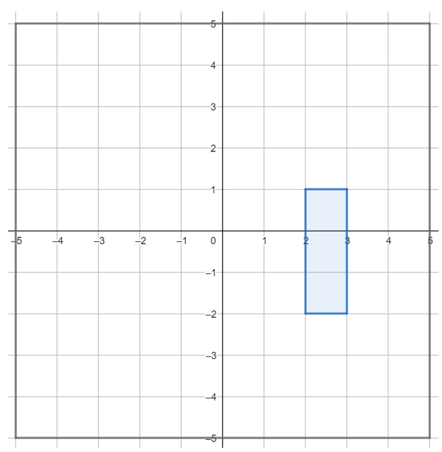

Figura 27: Ejemplo de barco colocado en (3,1)(3,-1)(3,-2)

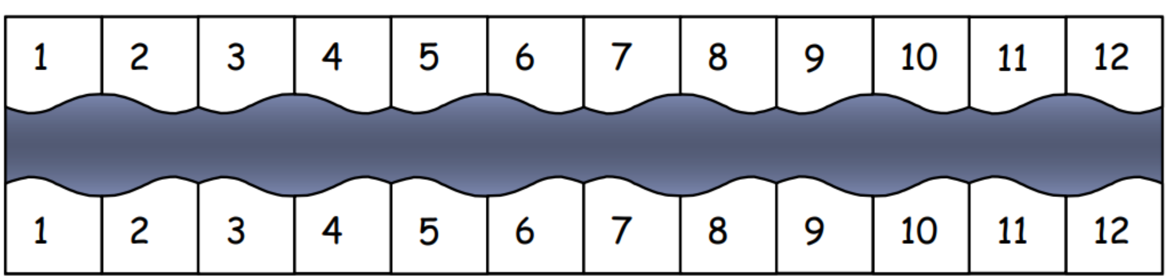

Figura 28: Tablero del juego *Cruzar el río*

Pieza	**Color**	**Símbolo**
Triángulo grande		
Triángulo grande		
Triángulo mediano		
Triángulo pequeño		
Triángulo pequeño		
Cuadrado		
Romboide		

Cuadro 4: Registro de piezas: tamaño y forma

Pieza	**Etiqueta**
Triángulo grande	
Triángulo grande	
Triángulo mediano	
Triángulo pequeño	
Triángulo pequeño	
Cuadrado	
Romboide	

Cuadro 5: Registro de piezas: etiquetas

Pieza	**Nº de ángulos**	**Medida de ángulos**
Triángulo grande		
Triángulo mediano		
Triángulo pequeño		
Cuadrado	4	Todos los ángulos miden 90°
Romboide		

Cuadro 6: Ángulos de las piezas

Pieza	**Color**	**Símbolo**	**Nº ángulos**	**Medida ángulos**	**Suma ángulos**
Triángulo grande					
Triángulo mediano					
Triángulo pequeño					
Cuadrado			4	Todos miden 90°	360°
Romboide					

Cuadro 7: Relación de ángulos y colores de las piezas

Polígono	**Nº de lados**	**Lados paralelos**	**Ángulos rectos**	**Suma de ángulos**
Cuadrado				
Triángulo rectángulo				
Triángulo isósceles				
Rectángulo				
Paralelogramo				
Hexágono				

Cuadro 8: Clasificación de polígonos

Pieza	**Nº de triángulos pequeños**
Triángulo grande	
Triángulo grande	
Triángulo mediano	
Triángulo pequeño	1
Triángulo pequeño	1
Cuadrado	
Romboide	

Cuadro 9: Registro de la relación de áreas de las piezas

Etiqueta	Nº de triángulos pequeños
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Cuadro 10: Registro de la relación de áreas de las piezas (versión 2)

Pieza	Nº de piezas que caben	¿lo cubren entero?
Triángulo pequeño		
Triángulo mediano		
Triángulo grande		
Cuadrado		
Romboide		

Cuadro 11: Relación del área total de las piezas

Pieza	Nº de C	Nº de H	Total
Triángulo pequeño	2	1	C + C + H = 2C + H
Triángulo mediano			
Triángulo grande			
Cuadrado			
Romboide			

Cuadro 12: Relación del perímetro de las piezas

Pieza	**Etiqueta**	**Color**	**Símbolo**	**Nº de lados**	**Nº de ángulos**	...
Triángulo grande						
Triángulo grande						
Triángulo mediano						
Triángulo pequeño						
Triángulo pequeño						
Cuadrado						
Romboide						

Cuadro 13: Registro total

Partida	**Tirada**	**Dado 1**	**Dado 2**	**FICHA**
1	1			
1	2			
1	$\vdots$			

Cuadro 14: Tabla para registrar los resultados