Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Una propuesta didáctica: introducción a la derivada en 1º de Bachillerato

A didactic proposal: an introduction of the derivative for Mathematics I

Autora:

Bárbara Zapater Zarroca

Director:

José Miguel Rubio Chueca

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2021-2022

ÍNDICE

A. Definición del objeto matemático a enseñar. **3**

A.1 Objeto matemático a enseñar 3

A.2 Curso y asignatura en la que está situado el objeto matemático 4

A.3. Campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático 5

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje de la derivada **6**

B.1. Justificación habitual en la introducción escolar de la derivada 6

B.2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente 12

B.3. Efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumnado 14

C. Conocimientos previos del alumno **15**

C.1. Conocimientos previos para afrontar el aprendizaje de la derivada 15

C.2. Conocimientos previos propuesto en la enseñanza: análisis curricular. 16

C.3. Actividad para asegurar que los alumnos poseen los conocimientos previos 18

D. Razones de ser de la derivada **19**

D.1. Razones de ser para la introducción escolar de la derivada 19

D.2. Razones de ser históricas de la derivada 20

D.3. Problemas que se constituyen en razones de ser de la derivada 23

D.4. Metodología a seguir en su implementación en el aula 25

E. Campos de problemas **25**

E.1. Problemas para presentar en el aula 25

E.2. Modificaciones de la técnica que exigen la resolución de los problemas 33

E.3. Metodología a seguir en su implementación en el aula 35

F. Técnicas **36**

F.1. Ejercicios para presentar en el aula 36

F.2. Técnicas que se ejercitan con la resolución de los ejercicios 41

F.3. Adecuación de las técnicas a los campos de problemas 42

F.4. Metodología a seguir en su implementación en el aula 43

G. Tecnologías **44**

G.1. Razonamientos para justificar las técnicas 44

G.2. Justificación de las técnicas en el aula 44

G.3. Proceso de institucionalización de los distintos aspectos de las derivadas 45

G.4. Metodología a seguir en su implementación en el aula 45

H. Secuencia didáctica y cronograma **45**

I. Evaluación **48**

I.1. Prueba escrita de evaluación 48

I.2. Aspectos evaluables con cada una de las preguntas de la prueba escrita 51

I.3. Respuestas esperadas de los alumnos 52

I.4. Criterios de calificación que se van a emplear 53

J. Bibliografía **55**

Anexos **59**

Introducción

En el presente documento se muestra una secuencia didáctica la cual trata de explicar las derivadas, particularizando en cómo explicar su introducción. Está enfocada hacia 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias. Este documento está elaborado como Trabajo de Fin de Máster de la especialidad de Matemáticas del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas.

Se comienza definiendo en la Sección A el objeto matemático a enseñar proporcionando en la Sección B información sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático en la actualidad. También se razona en la Sección C sobre los conocimientos previos necesarios que debería tener el alumnado para comprender el objeto matemático y sobre la razón de ser del objeto en la Sección D. Seguidamente se exponen los tipos de actividades sobre el campo de problemas, en la Sección E, y a continuación las técnicas, en la Sección F y tecnologías, en la Sección G. necesarias. En la Sección H se realiza una propuesta didáctica recopilando la secuencia completa y se muestra la evaluación correspondiente en la Sección I. Finalmente, en la Sección J, se puede consultar la bibliografía utilizada para la elaboración de esta propuesta didáctica.

A. Definición del objeto matemático a enseñar.

A.1 Objeto matemático a enseñar

En este Trabajo Fin de Máster se va a exponer una secuencia didáctica en la que el objeto matemático a enseñar son las derivadas. Se hará especial hincapié en cómo enseñar la introducción a este objeto matemático.

La derivada ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva y también las cuestiones instruccionales, tal y como se muestra en el artículo de Artigue et al. (2007) o en el de Sánchez-Matamoros et al. (2008).

Las diferentes investigaciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre las derivadas, verifican las dificultades que se presentan a la hora de enseñar los conceptos, para lo cual es necesario analizar la práctica docente. Gavilán (2006) destaca que existe una clara dependencia entre las prácticas docentes y las concepciones que poseen los profesores sobre las matemáticas escolares, ya que esto influye a la hora de que los alumnos sean capaces de aprender y entender dichos conceptos. Azcárate (1992) analiza los perfiles cognitivos de los alumnos y su evolución a lo largo de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para intentar solventar estas brechas de conocimiento, ciertas investigaciones han dado lugar a algunas propuestas innovadoras. Por ejemplo, Cantoral (1991) propone rediseñar el discurso matemático escolar desde el fondo, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de límite y poniendo en su lugar la variación. Otra propuesta innovadora es la presentada en el artículo de Camargo y Guzmán (2005) donde se diseña una propuesta didáctica que pretende acercar a los estudiantes a entender las relaciones entre la pendiente de una recta y la razón de cambio y se asegura que se debería enseñar esta relación desde que se comienza con el estudio de funciones los primeros años de educación secundaria.

Este es el punto de partida de este trabajo: ofrecer una propuesta innovadora que tiene como objetivo principal que los alumnos comprendan el concepto de derivada mediante itinerarios didácticos que faciliten los procesos de construcción de su propio conocimiento. Así, explicando la función derivada en un punto desde un marco realista, se pretende que los alumnos comprendan mejor el objeto matemático. También se relacionarán, por un lado la expresión analítica de la derivada con su expresión gráfica, y por otro lado, la gráfica de una función con la gráfica de su función derivada (y viceversa).

A.2 Curso y asignatura en la que está situado el objeto matemático

Este objeto matemático aparece por primera vez en el currículo de 1º de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas I y en la asignatura de Matemáticas II. Concretamente, este trabajo está centrado en la asignatura de Matemáticas I.

Actualmente, la normativa vigente se rige según la Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Mencionar que, realmente, esta Orden ha estado sometida a cambios ya que era necesaria una redefinición de los elementos que la componen. Por ahora, solo tenemos acceso a un borrador de una nueva Orden curricular en la cual, como principal novedad, se establecen principios metodológicos generales junto con diferentes orientaciones didácticas de carácter no prescriptivo en cada materia para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Según el calendario de implantación contemplado, su contenido se implantará en el curso 1º a partir del curso académico 2022-2023 y en el curso 2º, a partir del curso académico 2023-2024.

En el actual currículo, podemos localizar que las derivadas se encuentran dentro del bloque 3 de análisis, dado que pertenecen al campo de estudio de las funciones.

Los contenidos del currículo que se van a trabajar en este documento son los siguientes:

- Derivada de una función en un punto.
- Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto.
- Recta tangente.
- Función derivada.
- Cálculo de derivadas.
- Representación gráfica de funciones.

A.3. Campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático

Consideramos que los campos de problemas son todas las actividades que se pueden plantear y realizar desde un punto de vista matemático. Estas actividades pueden abarcar aquellas más teóricas y también aquellas más aplicadas. El estudio de los campos de problemas requiere la existencia de desarrollos teóricos y tecnológicos cuya principal función es la de explicar, justificar y relacionar entre sí las técnicas manipuladas y los campos de problemas abordados, para asegurar tanto el control de los resultados de la actividad como su presentación y legibilidad (Bosch y Gascón, 1994).

Existen otros Trabajos Fin de Máster (Jarauta, 2020; Pereira, 2021 y Ribas, 2021) que plantean una propuesta didáctica para la enseñanza a la introducción a las derivadas. En este documento se intentan abarcar los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se consideran más importantes de entre los sugeridos en los trabajos citados anteriormente para así hacer una propuesta didáctica más completa y más interesante.

De este modo, los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se pretende enseñar a lo largo de esta unidad didáctica son los siguientes:

Campos de problemas:

- CP1. Tasa de variación media.
- CP2. Cálculo de pendientes de una función y recta tangente.
- CP3. Tasa de variación instantánea.
- CP4. Interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto.
- CP5. Cálculo algebraico de la función derivada.
- CP6. Crecimiento y decrecimiento y puntos singulares.
- CP7. Relación entre la gráfica de una función y su función derivada.

Técnicas:

- T1. Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo.
- T2. Calcular la recta tangente a una función en un punto.
- T3. Calcular la tasa de variación instantánea.
- T4. Calcular la derivada de una función en un punto.
    - T4.1. Gráficamente.
    - T4.2. Analíticamente.
- T5. Calcular la derivada de una función.
- T6. Representación gráfica de funciones.

Tecnologías:

- TEC1. Definición de tasa de variación media.
- TEC2. Ecuación de la recta tangente a una función en un punto.
- TEC3. Definición de tasa de variación instantánea.
- TEC4. Propiedades de los límites y resolución de indeterminaciones.
- TEC5. Definición de derivada en un punto.
- TEC6. Reglas y propiedades de derivación.
- TEC7. Definición de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.
- TEC8. Definición de función creciente y función decreciente.
- TEC9. Definición puntos singulares.
- TEC10. Representación de funciones.

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje de la derivada

B.1. Justificación habitual en la introducción escolar de la derivada

A continuación se aborda un análisis sobre cómo se justifica habitualmente y sobre cómo se presentan las derivadas en algunos de los libros de texto que habitualmente se utilizan en la asignatura de Matemáticas I de 1º de Bachillerato. Para el análisis, se ha seleccionado la siguiente muestra:

- Editorial ANAYA. (Colera Jiménez et al., 2017).
- Editorial SM. (Almansa et al., 2015).
- Editorial Santillana. (Alcaide et al., 2015).
- Editorial Edelvives. (Monteagudo Martínez y Paz Fernández, 2008). Este libro, a diferencia de los tres anteriores que pertenecen a la normativa LOMCE[1], fue redactado y utilizado cuando estaba vigente la normativa LOE[2].

Es interesante analizar los cambios didácticos relativos a otra normativa, para comprender la evolución que ha sufrido la enseñanza de este elemento matemático.

[1] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial del Estado, nº 295, 10 de diciembre de 2013, Madrid, pp. 97858-97921.

[2] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, nº 106, 4 de mayo de 2006, Madrid, pp. 17158-17207.

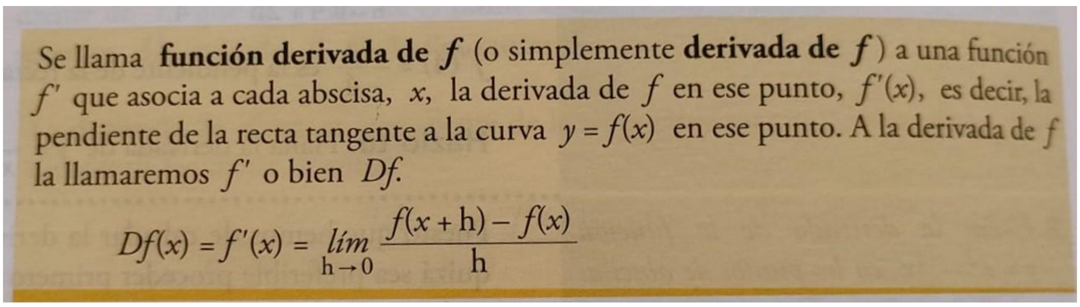
1) Editorial ANAYA

El tema dedicado a las derivadas ocupa el tercero dentro del bloque IV. Análisis, siendo ésta la duodécima unidad del libro. Se presenta después de haber estudiado las funciones elementales, los límites de funciones y la continuidad de funciones.

El tema introduce la historia de este objeto matemático y afirma que el concepto de derivada fue necesario para resolver dos problemas (relacionados con hallar la recta tangente y con las velocidades instantáneas) tras muchos siglos de esfuerzo. Habla de las aportaciones que hicieron Newton, Leibniz y Euler. También se propone un ejercicio introductorio que trata sobre el movimiento y la velocidad media e instantánea de una partícula.

La unidad comienza definiendo la tasa de variación media, T.V.M, de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ como la pendiente del segmento que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. Además, explica el concepto de derivada de una manera geométrica, ya que dice que la derivada de f en a es el crecimiento de una función en un punto, el cual se mide mediante la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Una vez introducido el objeto matemático, el libro de texto ofrece una fórmula para obtener la derivada de una función en un punto a partir de la expresión analítica.

Posteriormente, tal y como se observa en la Figura 1, este libro ofrece la definición de función derivada de una manera más algebraica:



Se llama **función derivada de** f (o simplemente **derivada de** f) a una función f' que asocia a cada abscisa, x, la derivada de f en ese punto, $f'(x)$, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en ese punto. A la derivada de f la llamaremos f' o bien Df.

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Figura 1. Definición de función derivada. Editorial SM

Me llama la atención que este libro dedica una página a explicar la notación correcta y algunos errores que se suelen cometer al respecto.

Las siguientes cuatro páginas están dedicadas a mostrar las reglas de derivación. Tan solo aparece la demostración de la regla de derivación para las funciones potenciales, aunque para las funciones constantes e identidad sí que se da un razonamiento.

Se da una "receta" para aplicar las derivadas a algunos problemas como son: la obtención del valor de la derivada en un punto, obtención de los puntos en los que la derivada tiene un cierto valor, obtención de los puntos singulares de una función, la optimización de funciones y la regla de L'Hôpital.

Finalmente, hace hincapié en calcular los puntos singulares de algunas funciones para la representación de funciones polinómicas y racionales.

Hay dos secciones llamadas “Ejercicios y problemas resueltos” y “Ejercicios y problemas guiados” en los que se dan algunas pautas para resolver los problemas planteados.Considero que ambas secciones están bastante completas y están muy acertadas a nivel cognitivo. Finalmente se proponen una serie de ejercicios y problemas para que resuelva el alumno.

2) Editorial SM

Este libro dedica el noveno tema al estudio de las derivadas. Es el tercer tema que se estudia dentro del bloque de funciones, después de funciones, límites y continuidad y previo al estudio de las funciones elementales e integración.

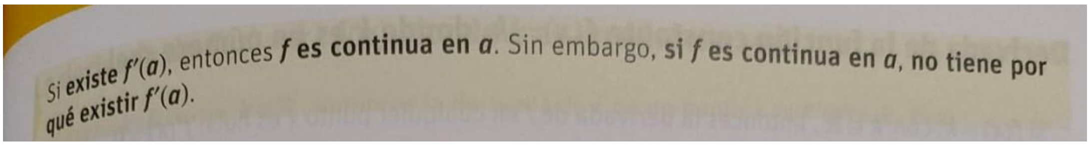
Al principio de la unidad, este libro empieza contando alguna de las aplicaciones de las derivadas, para así justificar la importancia de este nuevo concepto ya que, según los autores del libro, al finalizar el tema el alumnado será capaz de resolver los problemas mencionados.

Las dos primeras páginas hacen referencia a la definición de la tasa de variación media y su interpretación geométrica, al igual que se define la derivada de una función en un punto. A diferencia del resto de libros, en este, cuando se explica la interpretación geométrica de $f'(a)$, se explicita que la ecuación de la recta tangente, de la cual calculamos la pendiente, es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

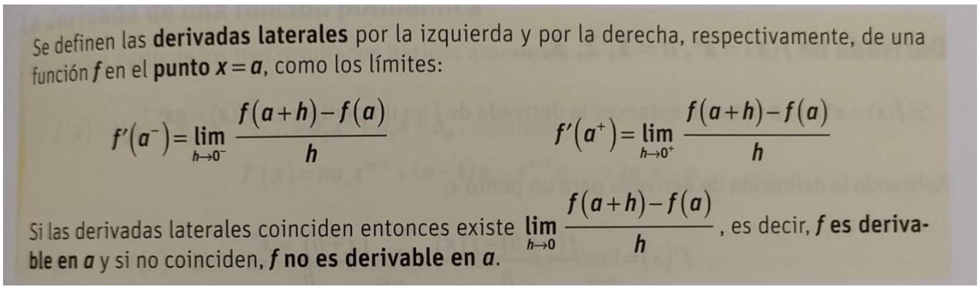
A continuación se desarrolla una sección en la cual se afirman tres hechos. El primero es que observando la gráfica de la función $y = f(x)$, se puede saber qué signo tendrá la derivada en cada punto. El segundo es que si se conoce el valor de la derivada de una función en cada punto, se puede saber la forma de la gráfica de la función. Y el tercer hecho especifica que si el límite (con el cual se calcula la pendiente de la tangente a la curva en un punto) no existe, no quiere decir que no haya recta tangente en ese punto. Todos ellos relacionados con aplicaciones de la interpretación geométrica de la derivada.

La tercera sección del tema habla de la relación entre la continuidad y la función derivada. Es el único libro de los cuatro analizados en este apartado, que relaciona la continuidad de la función en relación con la derivada, tal y como se muestra en la Figura 2, y que además habla de límites laterales (Figura 3). Además, se puede observar en la Figura 4 la definición de función derivada que enseña este libro.



Si existe $f'(a)$, entonces **f es continua en a**. Sin embargo, **si f es continua en a, no tiene por qué existir $f'(a)$**.

Figura 2. Relación de la continuidad y de la derivada de una función.

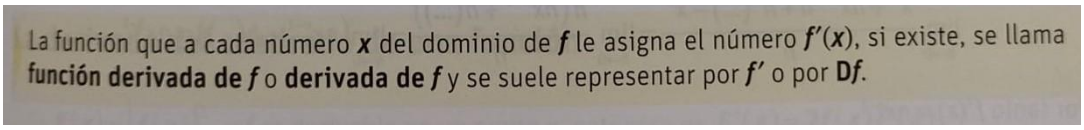


Se definen las **derivadas laterales** por la izquierda y por la derecha, respectivamente, de una función f en el **punto $x = a$**, como los límites:

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si las derivadas laterales coinciden entonces existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, es decir, **$f$ es derivable en a** y si no coinciden, **f no es derivable en a**.

Figura 3. Definición de derivadas laterales



La función que a cada número x del dominio de f le asigna el número $f'(x)$, si existe, se llama **función derivada de f** o **derivada de f** y se suele representar por f' o por **Df**.

Figura 4. Definición de función derivada. Editorial SM.

En las cuatro siguientes páginas se enumeran, demuestran y ejemplifican todas y cada una de las diferentes derivadas de las operaciones con funciones. Las dos siguientes páginas están dedicadas a explicar la regla de la cadena.

Posteriormente se explican las reglas de derivación de algunas funciones concretas, como son: función inversa, función potencial, función logarítimica, funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas. Todas ellas con su correspondiente demostración de la fórmula y justificación, además de mostrar en cada parte una serie de ejercicios resueltos.

Llegados a este punto, esta editorial expone algunas de las utilidades de la primera derivada: crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y absolutos y problemas de optimización.

A diferencia de alguno de los otros libros analizados en este trabajo, en este se muestran algunas aplicaciones para la derivada segunda (curvatura y puntos de inflexión) y un resumen de los conceptos y fórmulas introducidas y explicadas en el tema. Después hay una serie de ejercicios resueltos, los cuales abarcan todas las secciones tratadas y unos ejercicios finales para la puesta en práctica de los nuevos conocimientos adquiridos por el alumnado. Finalmente hay una sección titulada "Entorno matemático" en la cual se proponen dos problemas en un contexto real para que el alumno lo relacione con lo aprendido sobre derivadas, y también una autoevaluación más procedimental para el alumno.

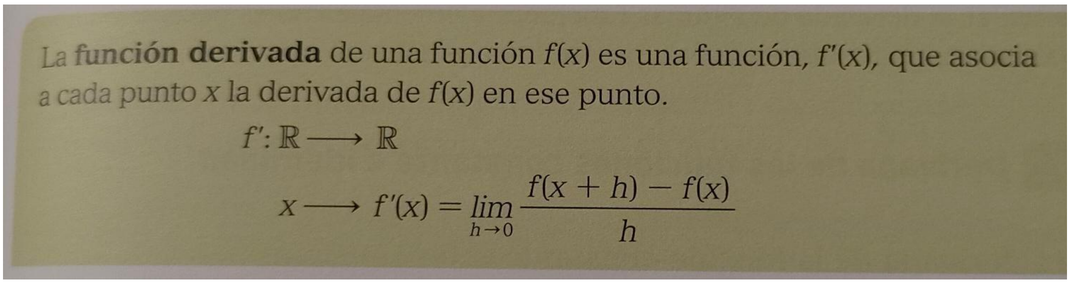
3) **Editorial Santillana**

Este libro tiene como novedad con respecto a los dos anteriores, que se dedican dos temas al estudio de las derivadas. Esto es debido a que se hace más hincapié en las aplicaciones propias de la derivada. El tema de "derivada de una función" ocupa el décimo lugar y el de "Aplicaciones de la derivada. Representación de funciones" el undécimo. Ambos temas forman parte del bloque de funciones y se explican después de haber estudiado los límites y continuidad de funciones.

En la introducción del primer tema relacionado con las derivadas no se habla de su contexto histórico, sino de una de sus aplicaciones: los procesos de optimización. Esto puede ser una buena forma para llamar la curiosidad de los alumnos, ya que ven una utilidad en la vida real de un concepto a primera vista muy matemático y teórico.

Al igual que los otros dos libros, esta editorial comienza explicando la tasa de variación media y la derivada de una función en un punto utilizando la definición proporcionada. A diferencia del primer libro, no relaciona ambos conceptos con su parte geométrica. Sin embargo, posteriormente, dedica una página entera a la interpretación geométrica de la derivada.

A continuación, como se muestra en la Figura 5, en este libro se da una definición de función derivada de una manera más formal:



La **función derivada** de una función $f(x)$ es una función, $f'(x)$, que asocia a cada punto x la derivada de $f(x)$ en ese punto.

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Figura 5. *Definición de función derivada. Editorial Santillana.*

Llegados a este punto, este libro comenta que existen derivadas sucesivas de una función y cuál es la notación para la derivada segunda, aunque no entra en más detalles.

Dedica cinco páginas a mostrar cuáles son las reglas de derivación junto con diferentes ejemplos en los que se aplican dichas reglas. Para la derivada de la función constante y para la derivada de la función identidad, se comprueban las fórmulas proporcionadas con la definición de función derivada. Del mismo modo se comprueban las reglas de alguna de las operaciones con derivadas, pero únicamente la derivada de la suma de funciones y la derivada del producto de un número por una función. Además, se explica la regla de la cadena.

Al igual que los dos libros previos analizados, este libro cuenta con una sección llamada "Saber hacer" en la que aparecen diferentes ejercicios resueltos paso a paso con los conceptos estudiados de derivadas. Al igual que en los dos libros anteriores, al final del tema se proponen varios ejercicios para que el alumnado practique lo estudiado en el tema.

Finalmente, hay una sección llamada “Matemáticas en tu vida” en la que muestran que las derivadas sirven, por ejemplo, para comprender el concepto de costo marginal en economía.

El segundo tema dedicado al estudio de nuestro objeto matemático, en concreto, a sus aplicaciones está introducido por una pregunta de la vida cotidiana: “¿Cómo se diseña el recorrido de una montaña rusa?”.

Sin entrar en demasiado detalle, ya que este análisis se centra en la introducción del concepto matemático de la derivada, en esta unidad se tratan los siguientes contenidos para los cuales es necesario aplicar los conocimientos adquiridos en la unidad anterior: crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, representación gráfica de funciones polinómicas y racionales. Al igual que el tema anterior, éste termina con la sección “Matemáticas en tu vida” en la que se trata cómo aplicar las derivadas para diseñar una montaña rusa, dando así una respuesta a la pregunta introductoria de la unidad.

4) Editorial Edelvives

Este libro, como ya he comentado al principio de la sección, corresponde a una ley anterior a la LOMCE, que es la LOE. Por este motivo, este libro tiene más temas que los anteriores y es por eso que el tema dedicado a las derivadas es el décimo cuarto, por detrás de las funciones (las reales de variable real y las elementales) y los límites de funciones y continuidad, y por delante de la introducción a la integral.

En este libro apenas hay una introducción al tema, únicamente se comenta que las derivadas son muy útiles ya que en el campo de las matemáticas, permite resolver problemas relacionados con rectas tangentes y con hallar máximos y mínimos de funciones, y también son muy utilizadas en otros campos científicos. Pero no entra en más detalle.

Para empezar, comienza definiendo la tasa de variación media y da una interpretación geométrica de la misma. También define la tasa de variación instantánea, siendo esta editorial la única que le pone nombre al límite de las tasas de variación media cuando los intervalos considerados son cada vez más pequeños. Explica que la tasa de variación instantánea, T.V.I, de una función en un punto es lo que, matemáticamente entendemos por derivada de esa función en dicho punto ofreciendo también una interpretación geométrica. Además, al igual que en el libro de la Editorial SM, también se ofrece la forma que tiene la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.

A continuación, se habla de la derivada de una función. Se puede observar en la Figura 6 que la definición proporcionada es menos algebraica.

Si f es una función derivable en el intervalo $(a, b) \subset R$, la **función derivada** de f es la que a cada $x \in (a, b)$ le hace corresponder la derivada de f en dicho punto. Esta función se designa por $f'(x)$.

Figura 6. Definición de función derivada. Editorial Edelvives.

Además, se habla de que una función es derivable en un intervalo si lo es en cada punto del intervalo y se explican qué son las derivadas de orden mayor que uno y se muestra la notación utilizada.

A continuación se presenta una tabla con las diferentes derivadas de funciones elementales. Tan solo se muestra una justificación de la fórmula a aplicar para la función constante, la función identidad y la función logarítmica. También aparece cómo calcular derivadas de funciones que son resultado de operaciones entre otras funciones (derivada de la suma, de la diferencia, del producto, de la inversa y del cociente) con su correspondiente justificación y ejemplificación.

Al igual que alguna otra editorial, Edelvives explica la regla de la cadena con la diferencia de que previamente recuerda qué es la composición de funciones.

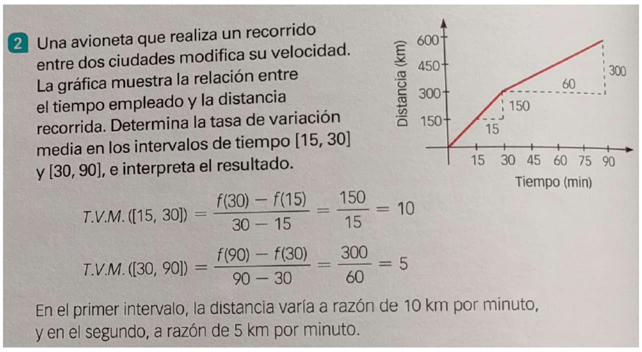
Dedica una página entera a hablar sobre funciones no derivables, siendo ésta la única editorial en prestar atención a este contenido.

Para terminar los contenidos teóricos que se pretende que los alumnos aprendan en este tema, se aplican las derivadas al estudio de la monotonía y extremos relativos de funciones. Al final del tema se presentan una serie de actividades resueltas y otra serie de actividades propuestas. La última página del tema tiene que ver con las nuevas tecnologías y explica cómo calcular la derivada de una función y cómo representar una función y su tangente, con el programa Derive.

B.2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente

Los libros de texto analizados en el apartado anterior presentan a lo largo de la unidad (o unidades, en el caso de la Editorial Santillana) dedicada a las derivadas una serie de explicaciones, ejemplos resueltos y ejercicios en los que se tratan algunos campos de problemas, técnicas y tecnologías. A continuación, se va haciendo un breve análisis de las características comunes y no comunes relacionadas con los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se tratan en los diferentes libros de texto.

Solamente los libros de Santillana (Figura 7) y SM (Figura 8) introducen el concepto de derivada mediante la T.V.M a través de problemas contextualizados relacionados con algunas magnitudes que varían.



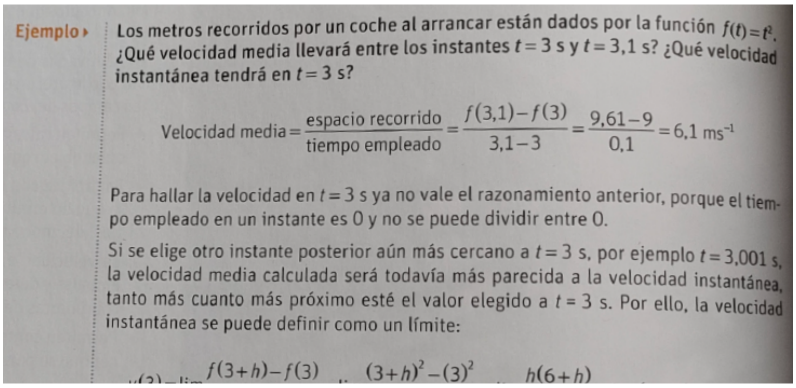
2 Una avioneta que realiza un recorrido entre dos ciudades modifica su velocidad. La gráfica muestra la relación entre el tiempo empleado y la distancia recorrida. Determina la tasa de variación media en los intervalos de tiempo [15, 30] y [30, 90], e interpreta el resultado.

$$T.V.M.([15,30]) = \frac{f(30)-f(15)}{30-15} = \frac{150}{15} = 10$$

$$T.V.M.([30,90]) = \frac{f(90)-f(30)}{90-30} = \frac{300}{60} = 5$$

En el primer intervalo, la distancia varía a razón de 10 km por minuto, y en el segundo, a razón de 5 km por minuto.

Figura 7. Problema contextualizado resuelto para introducir el concepto de derivada. Editorial Santillana.



Ejemplo **Los metros recorridos por un coche al arrancar están dados por la función $f(t)=t^2$. ¿Qué velocidad media llevará entre los instantes $t=3$ s y $t=3{,}1$ s? ¿Qué velocidad instantánea tendrá en $t=3$ s?**

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{f(3{,}1)-f(3)}{3{,}1-3} = \frac{9{,}61-9}{0{,}1} = 6{,}1\ \text{ms}^{-1}$$

Para hallar la velocidad en $t=3$ s ya no vale el razonamiento anterior, porque el tiempo empleado en un instante es 0 y no se puede dividir entre 0.

Si se elige otro instante posterior aún más cercano a $t=3$ s, por ejemplo $t=3{,}001$ s, la velocidad media calculada será todavía más parecida a la velocidad instantánea, tanto más cuanto más próximo esté el valor elegido a $t=3$ s. Por ello, la velocidad instantánea se puede definir como un límite:

Figura 8. Ejemplo contextualizado resuelto para introducir el concepto de derivada. Editorial SM.

Por el contrario, las otras dos editoriales solamente proponen ejercicios en los que los alumnos tienen que aplicar la fórmula para calcular la T.V.M.

A diferencia del resto de editoriales, en la editorial Santilla se presentan algunos ejercicios con contexto real ya que estos tienen que ver con los problemas de optimización. Además en cada editorial, al final de la unidad didáctica dedicada a las derivadas se muestran unos ejercicios descontextualizados para que los alumnos únicamente tengan que realizar los cálculos pedidos.

Finalmente, solamente las editoriales de SM y Santillana presentan actividades para estudiar la curvatura de una función (concavidad y convexidad) y sus puntos críticos.

Todas las características comentadas hasta el momento, hacen referencia a los diferentes campos de problemas que enseñan los libros de texto, los cuales se pueden ver en una tabla comparativa, Tabla 1, en el Anexo I.

Además, las técnicas y tecnologías que utilizan todos los libros para explicar y resolver los diferentes campos de problemas, poseen rasgos comunes y son bastante similares. La mayoría de los libros coinciden en las técnicas y tecnologías relacionadas con: la T.V.M gráfica y analíticamente, la derivada de una función en un punto gráfica (excepto la Editorial SM) y analíticamente, la definición de derivada, las reglas de derivación (derivadas de funciones básicas y reglas de derivación para operaciones) y la regla de cadena. Sin embargo, hay excepciones ya que, como hay alguna editorial que trata un campo de problemas a diferencia del resto (por ejemplo, únicamente en el libro de la Editorial Santillana se explica la derivada de una función inversa y los problemas de optimización y solamente el libro de la Editorial Edelvives dedica una sección a la T.V.I), entonces existen técnicas y tecnologías que son utilizadas solo en alguna editorial. Además, existe una diferencia bastante importante y que yo considero un punto débil para la Editorial Edelvives y es que en ningún momento se proporciona una definición genérica ni se explica qué es la pendiente de una recta; únicamente se nombra que $m = f'(a)$ sin justificación alguna. Todas estas características se pueden observar de manera más visual en la Tabla 2 (se analizan las diferentes técnicas enseñadas) y en la Tabla 3 (se analizan las diversas tecnologías que se utilizan en los libros de texto) situadas en el Anexo I de este documento.

Este análisis coincide con las investigaciones realizadas en Vargas et al. (2020), López-Esteban (2019) y Conejo et al. (2014) ya que, para dichos autores en los libros de texto predominan las tareas algorítmicas en lugar de presentar ejercicios que ayuden a comprender los conceptos.

B.3. Efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumnado

Comprender el objeto matemático de la derivada no resulta tarea fácil para el alumnado (Sánchez-Matamoros et al., 2008), y necesita de un gran esfuerzo cognitivo por su parte.

Para conocer más concretamente los obstáculos que dificultan el aprendizaje de las derivadas a los alumnos de 1º de Bachillerato, a continuación, se presenta una serie de síntesis de artículos relacionados con la investigación en educación y en particular, sobre los obstáculos, dificultades y errores de los estudiantes.

González-García et al. (2018) realizan un estudio exploratorio que les permite clasificar los errores que cometen los alumnos en el estudio de la derivada en tres categorías:

1. Errores debidos a dificultades del lenguaje.
2. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
3. Errores debidos a asociaciones incorrectas y estrategias irrelevantes.

De este estudio podemos concluir que a los alumnos les falta una base a la hora de resolver operaciones matemáticas y es por eso por lo que tienen fallos con las expresiones algebraicas. Tampoco comprenden que exista relación entre algunos bloques de matemáticas, como en este caso álgebra, funciones y geometría – ya que no identifican conexión entre las derivadas y la geometría – y los consideran excluyentes. La mayoría tiene un buen control de los procedimientos sistemáticos, aunque debido a que no comprenden el lenguaje se producen algunos errores. Además, el estudio confirma que todo esto viene estrechamente influido por cómo están organizados los contenidos en los libros de texto.

En la misma línea, López-Esteban (2019) afirman que los libros de texto se centran en que los alumnos desarrollen destrezas algorítmicas o procedimientos, en lugar de comprender los conceptos. También autores como Conejo et al. (2014) deducen de su investigación que la falta de justificación de las reglas es la que causa, por lo general, las dificultades del proceso de aprendizaje

Además, según el artículo de Artigue (1995), los alumnos son capaces de aplicar correctamente las reglas de derivación pero sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan conocer y utilizar el significado de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente. Los alumnos también cometen errores ya que suelen confundir la velocidad media con la instantánea en un punto (Azcárate, 1992) lo cual afecta a la comprensión de la T.V.M y en consecuencia, al concepto de derivada.

Sánchez-Matamoros et al. (2008) exponen que "las definiciones matemáticas son tradicionalmente analíticas y no gráficas, lo que puede crear un obstáculo en las mentes de los estudiantes". Este obstáculo es de tipo didáctico, ya que lo podemos encontrar en los libros de texto o incluso en las explicaciones por parte del docente.

Concluir que, cuando un docente explique el concepto de derivada, ha de tener en cuenta todas las dificultades que puedan surgir debido a no tener claros algunos conceptos previos, ya que éstas podrían manifestarse en errores que influyan directamente en la comprensión del concepto de derivada.

C. Conocimientos previos del alumno

C.1. Conocimientos previos para afrontar el aprendizaje de la derivada

En cuanto a los conocimientos previos, vamos a distinguir los hechos y conceptos y los procedimientos (Bernini López-Lara et al., 1997):

- Hechos y conceptos.
    - Dependencia entre dos variables: función. Variables independientes y dependientes; dominio e imagen, gráfica; fórmula; crecimiento y decrecimiento; variación entre dos valores del dominio; tasa media de variación; extremos relativos y absolutos.
    - Funciones lineales y afines.
    - Pendiente de una recta.
    - Velocidad media.

- Tangente y secante a la gráfica de una función.

- Procedimientos:
    - Lectura e interpretación de gráficas (en particular espacio-tiempo). Intervalos de crecimiento; extremos.
    - Cálculo de variaciones y de tasas medias de variación a partir de la fórmula o de la gráfica (en particular espacios recorridos y velocidades medias).
    - Cálculo e interpretación de la pendiente de una recta a partir de su ecuación o de su gráfica.
    - Operaciones con expresiones algebraicas sencillas: suma, producto y cociente de polinomios.
    - Uso de la calculadora y ordenador. Ya que puede tener una gran incidencia en el aprendizaje del cálculo, porque, por un lado, facilita los cálculos numéricos y simbólicos y, por otro, permite visualizar los conceptos y los procesos.

C.2. Conocimientos previos propuesto en la enseñanza: análisis curricular.

Actualmente, la normativa vigente se rige según la Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

A continuación se muestran los elementos curriculares que afectan directamente al objeto matemático de la derivada en 1º de Bachillerato (curso en el que se trata por primera vez). Concretamente, se analiza la asignatura de Matemáticas I, ya que es en la que se centra este trabajo.

➔ Actualmente - 1º de Bachillerato

Contenidos:

Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.
Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.

Criterios de evaluación:

Crit.MA.3.3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.

Estándares de aprendizaje:

Est.MA.3.3.1. Calcula la derivada de una función, usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
Est.MA.3.3.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.
Est.MA.3.3.3. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

Para poder estudiar y comprender la derivada, es necesario analizar qué conocimientos previos de este curso son necesarios. Es bien sabido que los conceptos de límite y derivada están estrechamente relacionados, principalmente porque la derivada es el cociente de un límite incremental. Para poder comprender la regla de cadena, es importante la composición de funciones. Es por ello por lo que, también en el bloque de funciones, es necesario haber tratado los siguientes contenidos: operaciones y composición de funciones, concepto de límite de una función en un punto y en el infinito, cálculo de límites, indeterminaciones, continuidad de una función y la representación gráfica de funciones. Por ello, es fundamental estudiar también los elementos curriculares del curso anterior.

➔ Previamente - 4º de ESO

Como ya he comentado anteriormente, la primera vez que aparece el concepto de derivada en el currículo de Matemáticas I es en 1º de Bachillerato. Sin embargo, en cursos anteriores ya se ha trabajado el concepto de derivada explicando sus distintos significados, aunque sin darle un nombre propio. La primera idea que aparece tanto en el currículo de Matemáticas Académicas como en el de Matemáticas Aplicadas de 4º de ESO en relación con uno de los significados de la derivada, es la tasa de variación media situada en el bloque de funciones.

Contenidos:

La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.

Criterios de evaluación:

Crit.MAAC.4.1. y Crit.MAAP.4.1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica

Estándares de aprendizaje:

Est.MAAC.4.1.5. y Est.MAAP.4.1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.

Además, también es interesante analizar el currículo de 4º de ESO para estudiar qué conocimientos previos son necesarios para la comprensión de la derivada y para la correcta resolución de ejercicios y aplicación de técnicas. Estos contenidos previos son aquellos trabajados en los bloques de números y álgebra y geometría. En el bloque de números y álgebra destacan las potencias de exponente entero, fraccionario o racional, la jerarquía de operaciones, la manipulación de expresiones algebraicas, la factorización de polinomios y la simplificación de fracciones algebraicas. En el bloque de geometría destaca la geometría analítica, en concreto las ecuaciones de la recta y el paralelismo.

➔ Conclusiones

En cuanto a la legislación y a los currículos consultados para realizar este análisis, se puede observar que en general, los conocimientos que se espera que el alumno alcance son bastante completos. En los distintos criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, se busca que los alumnos trabajen las derivadas bajo diferentes puntos de vista y sistemas de representación: algebraico y gráfico. Aunque es cierto, que en general, estos elementos curriculares se encuentran más enfocados en la aplicación de técnicas que en la comprensión de la derivada.

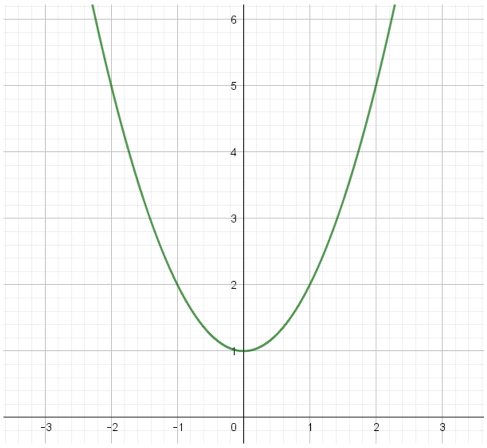
Puede llamar la atención pensar por qué no se introducen las derivadas en cursos obligatorios anteriores a 1º de Bachillerato. Ante este análisis del currículo actual, se puede percibir uno de los principales motivos. Se necesita un desarrollo cognitivo previo por parte del alumno, así como la comprensión de otros contenidos relacionados con el álgebra, con la geometría o con las funciones. Es por ello por lo que los diferentes conceptos de la derivada se explican todos juntos bajo un mismo objeto matemático al llegar a 1º de Bachillerato.

C.3. Actividad para asegurar que los alumnos poseen los conocimientos previos

Para asegurarnos de que los conocimientos previos están adquiridos, se planteará un ejercicio con el cual se tratará de comprobar principalmente los conocimientos relativos a la tasa de variación media (ya que hemos visto que en 4º de la ESO ya se ha introducido este concepto), al cálculo de límites, a la recta tangente y a la representación de funciones.

A continuación se muestra el ejercicio relativo a la evaluación inicial.

Ejercicio Inicial 1. Observa la siguiente función



a) Obtén los valores de y para los puntos de abscisas $x =- 1, x = 0, x = 1,\ x = 2.$

b) Calcula la tasa de variación media entre los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 2$. ¿Cómo interpretas la tasa de variación media de una función en un intervalo?

c) Visualmente, ¿cuál es el límite de esta función cuando $x \rightarrow \infty$? ¿Y el límite cuando $x \rightarrow -\ \infty$?

d) Visualmente y de manera aproximada, ¿cuál es el límite de esta función cuando $x \rightarrow 0$? ¿Y el límite cuando $x \rightarrow \frac{3}{2}$?

e) Dibuja la recta tangente a la función en el punto (1,2). ¿Cuál será su pendiente? ¿Cuál es la ecuación que la describe?

f) Dibuja la recta tangente a la función en el punto (0,1). ¿Cuál será su pendiente? ¿Cuál es la ecuación que la describe?

g) ¿En qué intervalos crece la función? ¿En qué intervalos decrece la función? ¿Crees que esta función posee algún máximo o mínimo en su dominio?

Con este ejercicio, no solo nos aseguramos de comprobar si poseen o no todos los contenidos necesarios, sino que también podemos observar si ven relaciones entre algunos contenidos y también dónde y porqué poseen ciertas dificultades las cuales posteriormente dificultarán la comprensión de la derivada.

D. Razones de ser de la derivada

D.1. Razones de ser para la introducción escolar de la derivada

Según Pereira (2021), las razones de ser que se van a tener en cuenta para introducir el concepto de derivada son, por un lado, sus distintos significados: la tasa de variación media, la tasa de variación instantánea y la pendiente de la recta tangente. Por otro lado, se explicarán alguna de sus aplicaciones por lo que también serán razones de ser la búsqueda de máximos y mínimos para la representación gráfica de funciones.

Esto es así ya que para introducir el tema se busca atraer la atención del alumnado hacia las derivadas e intentar que sean los alumnos los que construyan su propio conocimiento. Por ello, se mostrará su utilidad práctica desde el inicio y se propondrán actividades que fomenten el aprendizaje significativo. Uno de los motivos para adoptar esta forma de actuación es que, como apuntan Pochulu y Font (2011) “(...) la clase mecanicista es una de las causas de la generación de determinados problemas; sin embargo, cabe resaltar que el mecanismo causal es su estructura y funcionamiento”.

D.2. Razones de ser históricas de la derivada

La definición que habitualmente aparece en los libros para explicar qué es y cómo calcular una derivada está basada esencialmente en el concepto de límite, tal y como se puede apreciar en la siguiente definición:

> La función $f(x)$ es diferenciable en el punto $x = a$, si existe el siguiente límite:
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> A este límite, cuando existe, se le denota por $f'(a)$.

Pero, ¿cómo surgió esta definición?, ¿a qué se debe su origen y quiénes la establecieron? Ponce (2015, p.30) sintetiza lo siguiente:

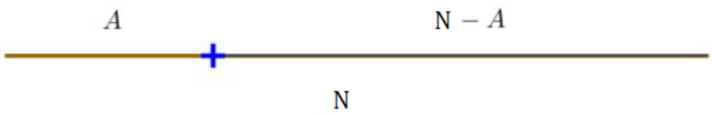
> Históricamente, podemos describir cuatro etapas en el desarrollo del concepto actual de derivada. Primero, la derivada Fermat *utilizó* la derivada de forma implícita, después Newton y Leibniz la *descubrieron*, posteriormente Taylor la *exploró y desarrolló*. Finalmente, Lagrange la *nombró* y *caracterizó*. Solo hasta el final de este largo periodo de desarrollo, Cauchy y Weierstrass la *definieron* de manera sistemática.

- Primera etapa: Cálculo de máximos, mínimos y tangentes.

Ponce (2015, p.11) explica en qué consiste esta primera etapa y la causa por la cual Fermat tuvo que utilizar la derivada implícitamente:

> Fermat conocía los escritos del matemático griego Pappus de Alejandría y sabía que un problema que tiene, en general, dos soluciones deberá tener una sola solución en el caso de un máximo. Con este resultado Fermat fue capaz de desarrollar su método para calcular máximos y mínimos.

Aplicando el método de Fermat al problema de dividir un número positivo en dos partes de manera que el producto sea máximo, se llega a la conclusión de que f alcanza su máximo cuando $A = \frac{N}{2}$ siendo N el número conocido y A la cantidad desconocida. (Sánchez Castro, 1996).



Tal y como se afirma en Sánchez Castro (1996) “Es importante señalar que este método algorítmico es equivalente a calcular el siguiente cociente e igualarlo a cero

$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}$$

Aquí está en esencia el proceso que ahora llamamos derivación.”

El cálculo de rectas tangentes fue también un problema interesante durante el siglo XVII. Aunque no se llegó a explicar qué significaba que una secante “se convirtiera” en una tangente, la recta tangente sí que se consideraba como una recta secante en la cual dos puntos distintos se acercaban hasta llegar a coincidir. En esta época surgió un nuevo método para poder calcular rectas tangentes el cual se difundió con rapidez (Ponce, 2015).

Aunque todavía el concepto de función derivada no existía, sí que existía un método general para resolver los dos problemas mencionados previamente. Es decir, las derivadas se originaron para resolver problemas en contextos geométricos.

- <u>Segunda etapa: Tangentes, áreas y razones de cambio</u>.

Ponce (2015, p.16) explica en qué consiste esta segunda etapa y a continuación se puede leer un resumen de la misma:

> Newton y Leibniz retomaron los métodos existentes para el cálculo de tangentes, extremos y áreas, incorporándolos dentro de dos conceptos más generales, conceptos que actualmente conocemos como integral y derivada.
>
> Por su parte, Newton llamó fluxión a su “derivada”, la cual consideraba como la razón de un flujo o cambio. Mientras que Leibniz consideró a la “derivada” como una razón de diferencias infinitesimales y le llamó cociente diferencial.
>
> A pesar de que las contribuciones de Newton y Leibniz fueron atacadas por el uso de los infinitesimales, se admitía el hecho de que sus descubrimientos y procedimientos conducían a resultados correctos.

- <u>Tercera etapa: Ecuaciones diferenciales y series de Taylor.</u>

Ponce (2015, p.20) explica en qué consiste esta tercera etapa y a continuación se puede leer un resumen de la misma:

> En 1715, Brook Taylor, utilizando las propiedades de diferencias finitas, escribió una ecuación expresando lo que nosotros actualmente consideramos como $f(x+h)$ en términos de $f(x)$ y de sus cocientes de diferencias de varios órdenes. Después, considerando las diferencias más pequeñas, junto con un paso a límite, estableció la fórmula que todavía lleva su nombre: *Series de Taylor*. (...)

Más aún, el estudio de las series de Taylor permitió comprender algunos elementos de la naturaleza de la derivada.

- Cuarta etapa: Definición y rigor.

Ponce (2015, p.23-24) explica en qué consiste esta cuarta etapa y a continuación se puede leer un resumen de la misma:

> En 1797, Lagrange estableció, y de hecho creyó que había probado, que toda función (esto es, toda expresión analítica, finita o infinita) tenía una expansión en series de potencias:
>
> $$f(x + h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + r(x)h^3 + ...$$
>
> excepto, posiblemente, para un número finito de valores aislados de x. Lagrange entonces definió una nueva función, el coeficiente del término lineal en h el cual es $p(x)$ en la expansión de $f(x + h)$ mostrada anteriormente y la denominó primera función derivada de $f(x)$.
>
> El término "función derivada" (en francés: *fontion dérivée*) que Lagrange utilizó es el origen de nuestro término actual "derivada". Asimismo, introdujo una nueva notación, $f'(x)$, para esa función y definió $f''(x)$ como la primera derivada de la función $f'(x)$, y así sucesivamente de manera recursiva.
>
> (...) No podemos aceptar totalmente la definición de derivada de Lagrange dado que tendríamos que asumir que cada función derivable es la suma de una serie de Taylor y como consecuencia debería tener infinitas derivadas. Sin embargo, con esta definición Lagrange logró establecer propiedades importantes de la derivada.

Cauchy tenía sus motivos para rechazar la definición que Lagrange ofreció del término derivada de modo que decidió establecer su propia definición. A pesar del gran avance que supuso esto, la definición de derivada de Cauchy no era del todo correcta ya que él asumió que el cociente de diferencias convergía uniformemente a su límite. (Ponce, 2015).

Entre otros matemáticos, Karl Weierstrass estudió la distinción entre convergencia puntual y uniforme y de su trabajo proviene nuestra definición moderna de derivada usando épsilon y delta (Ponce, 2015).

Se puede concluir que el concepto actual de derivada no ha sido algo inmediato sino que ha sido desarrollado a lo largo del tiempo tal y como apuntan Vrancken y Engler (2013) "Para llegar a lo que actualmente se conoce como derivada, tuvieron que transcurrir varios siglos de desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, la variación y los infinitesimales.". También es importante destacar que, en contraposición a lo que se suele pensar debido a cómo se enseñan las derivadas en los libros de texto, el orden histórico de la definición y desarrollo de la derivada es inverso al que estamos acostumbrados a estudiar. Es decir, como bien apunta Grabiner (1983)

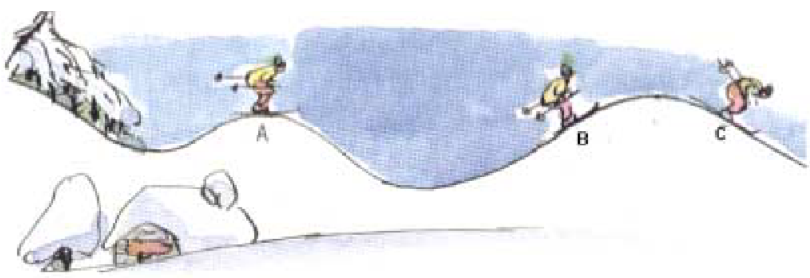
"El orden histórico del desarrollo de la derivada es inverso al orden usual expuesto en los libros de texto".

D.3. Problemas que se constituyen en razones de ser de la derivada

A continuación, se van a presentar una serie de actividades que constituyen la razón de ser de las derivadas e intentan que los alumnos vean que el concepto de derivada tiene diferentes representaciones. Las dos primeras actividades planteadas, son originales de Font (2000), tal y como se indica en cada ejercicio. Considero que ambas actividades son adecuadas para trabajar la razón de ser ya que se trabajan de manera conjunta los distintos significados de la derivada, mencionados en la sección D.1. La tercera actividad es original de la autora de este documento en la cual se trabaja la razón de ser relacionada con la representación gráfica de funciones. La idea de las actividades es que los alumnos puedan deducir y consigan la asimilación del concepto de derivada de una manera contextualizada a la vez que entiendan que las derivadas no es algo puramente algebraico sino que también se puede visualizar gráficamente.

- ➔ El primer ejercicio relaciona la gráfica de $f(x)$ con la descripción verbal en términos de $f'(x)$.

Ejercicio 1 RS. (Font, 2000). Observa la siguiente imagen y responde las cuestiones



a) ¿En cuál de estos tres momentos le cuesta más esquiar? ¿Por qué?

b) Utiliza una regla y prolonga los esquíes en los puntos A, B, C. ¿Qué clase de recta se obtiene?

c) Si consideramos que el perfil de la montaña es la gráfica de una función, ¿cuál es el valor de la derivada de la función en A? ¿Qué signo tiene la derivada de la función en los puntos B y C?

Solución esperada.

Lo que esperamos con este ejercicio es que el alumnado trabaje el concepto de pendiente en la vida real y también que identifiquen gráficamente qué es una recta tangente. También esperamos que recuerden el concepto de pendiente de una recta. Lo que queremos conseguir con esto es que, al explicar la derivada como la pendiente de la recta tangente, entiendan el concepto.

➔ Al hilo del anterior, el segundo ejercicio propuesto tiene como objetivo introducir el concepto de derivada de una función en diferentes puntos utilizando una tabla de valores de modo que busca relacionar la expresión simbólica de $f(x)$ con la tabla de $f'(x)$.

<u>Ejercicio 2 RS.</u> (Font, 2000). La tabla siguiente recoge valores de la derivada de la función $f(x) = x^2$ en diferentes puntos, utilizando la expresión

$$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Calcula $f'(1)$ y $f'(3)$ y completa la tabla.

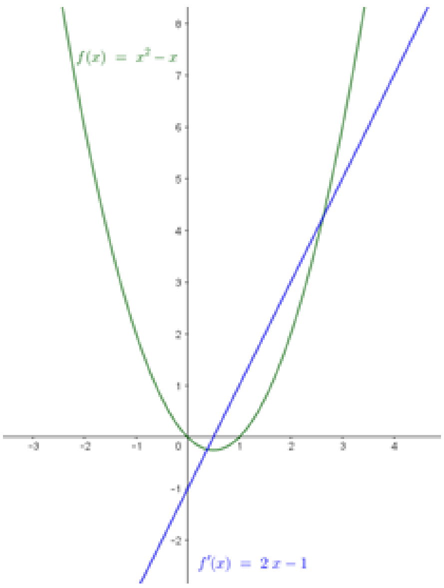
abscisa	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
derivada	*-2*	*0*		*4*		*8*

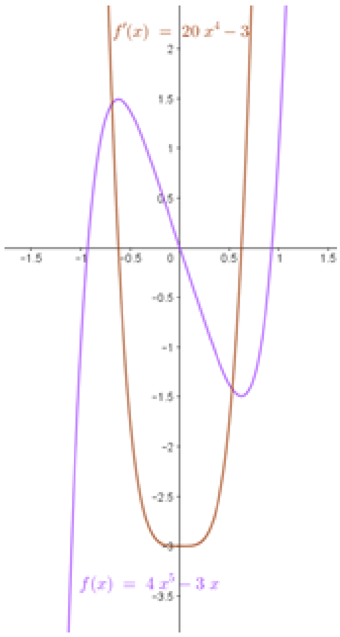
<u>Solución esperada.</u>

Seguramente habrá alumnos que responden a la actividad calculando y utilizando la definición de derivada en un punto, pero se espera que algún alumno observe que los valores de la derivada siempre son el doble de los valores de la abscisa de modo que respondan que f '(1) = 2 y f '(3) = 6 sin necesidad de hacer ningún cálculo.

➔ Por último, el tercer ejercicio está planteado para relacionar la gráfica de $f(x)$ con la gráfica de $f'(x)$.

<u>Ejercicio 3 RS</u>. A continuación se muestran dos gráficas en las que se superponen la gráfica de $f(x)$ con la gráfica de $f'(x)$.





a) Comprueba con la definición de límite ofrecida en la actividad anterior, el valor de $f'(x)$ en los puntos $x = -0'5$, $x = 0$, $x = 0'5$.

b) Evalúa ambas funciones derivadas ($f'(x) = 2x - 1$, $f'(x) = 20x^4 - 3$) en los puntos $x = - 0'5$, $x = 0$, $x = 0'5$.

c) Gráficamente, ¿crees que tiene relación el crecimiento/decrecimiento de la función, o los máximos/mínimos de la función $f(x)$ con la gráfica de su función derivada?

d) Dibuja una función y haz un esbozo de cómo crees que es su función derivada.

Solución esperada.

Esta actividad tiene dos objetivos principalmente. El primero es que los alumnos vean que además de calcular derivadas con la definición de límite, también existe una "fórmula" (ya se explicará cómo obtenerla) con la que se obtiene lo mismo. Además, el segundo objetivo de esta actividad y lo que se espera es que los alumnos sean capaces de intuir la relación que existe entre la función derivada y algunas de las propiedades gráficas que poseen las funciones. De este modo, se explicará en clase que las derivadas tienen, entre otras, esta aplicación. Así que los alumnos se verán motivados a estudiar este objeto matemático porque verán que tiene alguna utilidad.

D.4. Metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología que se considera más oportuna para llevar a cabo los problemas del anterior apartado es la que se explica a continuación:

Tanto el primer como el segundo ejercicio se realizarán una vez explicado ya el concepto de derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Estos dos ejercicios los resolverán los alumnos en parejas o tríos. Cuando toda la clase los haya terminado, se corregirán en voz alta mediante una puesta en común.

El tercer ejercicio está planteado para realizarlo hacia el final de la unidad didáctica cuando se haya explicado en clase la relación entre las derivadas y la representación gráfica de funciones. Este ejercicio lo realizarán en un folio de manera individual y después a cada alumno se le asignará para corregir el ejercicio de alguno de sus compañeros. El docente al final de la actividad pondrá en común la solución correcta y se debatirán los errores cometidos.

E. Campos de problemas

E.1. Problemas para presentar en el aula

A continuación se presenta una serie de problemas que se han pensado y planteado, mayormente contextualizados, cuyo principal objetivo es trabajar los diferentes campos de problemas mencionados en la sección A.3.

Está indicada la referencia en aquellos ejercicios que han sido basados u obtenidos de algún libro o apunte, aunque la mayoría son originales de la autora del documento.

CP1. Tasa de variación media.

Ejercicio 1 CP1. Estamos viendo la primera carrera de Fórmula 1 del año. La siguiente gráfica representa la velocidad que lleva cada corredor en cada instante de tiempo:

a) ¿Cuál sería la velocidad media de cada corredor?

b) Completa la siguiente tabla para cada corredor. Si algún valor no lo conoces, márcalo en otro color y haz una estimación del mismo.

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6
Velocidad (km/h)							

c) ¿Qué significan los puntos de corte entre algunas funciones de velocidad?

d) ¿Qué corredor terminará en primera posición ? Justifica tu respuesta.

e) ¿Adelantará F.Alonso a alguno de los otros corredores en algún momento? En caso afirmativo, indica a quién y justifícalo.

f) ¿Cuál será la velocidad de Vettel en el instante $t = 3$? ¿Y en $t = 1$? Calcula la diferencia y dividela entre la variación de segundos transcurridos.

g) ¿Cuál será la velocidad de Hamilton en el instante $t = 3$? ¿Y en $t = 1$? Calcula la diferencia y dividela entre la variación de segundos transcurridos.

h) ¿Qué puedes concluir de los cálculos realizados en los apartados f) y g)?

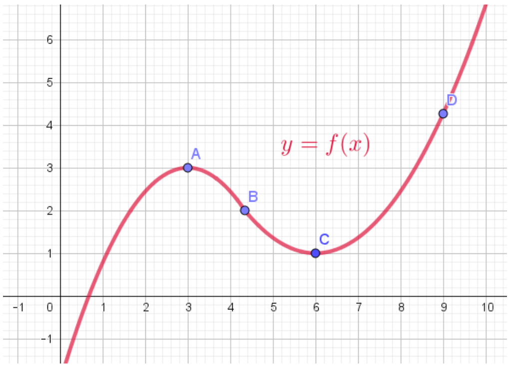
i) Abre el archivo de geogebra llamado "Ejercicio-CP1.ggb" en el que está la gráfica del enunciado y aumentando o disminuyendo con el zoom, comprueba tus resultados.

Ejercicio 2 CP1. Responde las siguientes cuestiones considerando la gráfica y los puntos A, B, C y D.

a) ¿En qué puntos la T.V.M es negativa?

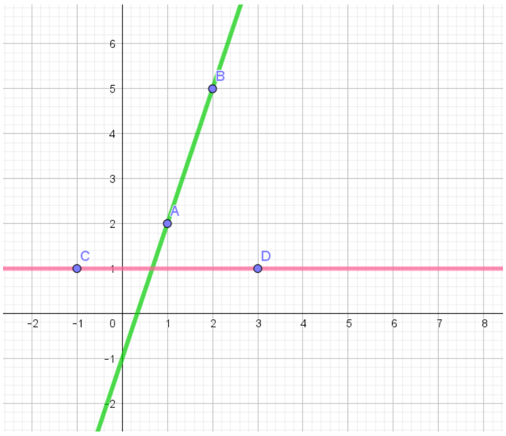
b) ¿En qué puntos la T.V.M es máxima?

c) ¿En qué puntos la T.V.M es próxima a 0?



CP2. Cálculo de pendientes de una función y recta tangente

Ejercicio 1 CP2. Observa la siguiente gráfica en la que se han representado dos rectas.



a) Escribe las coordenadas de los puntos A, B, C y D.

b) Calcula la pendiente de la recta verde.

c) Calcula la pendiente de la recta rosa.

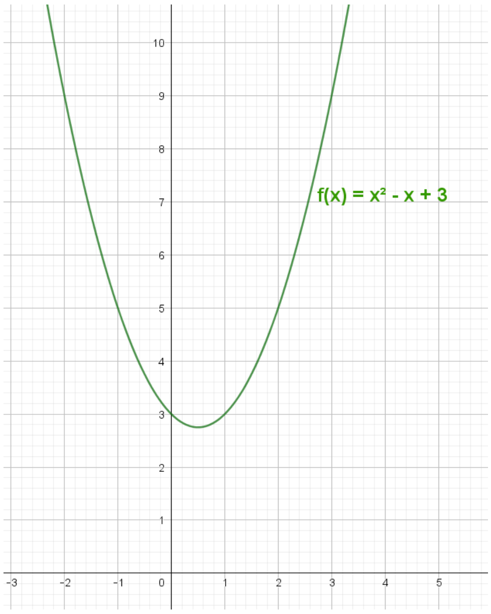
d) Visualmente, ¿qué nos indica la pendiente de una recta? Justifícalo con las pendientes obtenidas en los apartados b) y c).

e) Calcula T.V.M [A, B] y T.V.M [C, D]

f) ¿Está relacionada la pendiente de una recta con la tasa de variación media en un intervalo?

g) Escribe la ecuación de la recta verde y también la ecuación de la recta rosa.

Ejercicio 2 CP2. Consideremos la siguiente función:



a) ¿Crees que puede tener algo que ver la función $f(x)$ con la recta verde del Ejercicio 1 CP2?

b) Queremos calcular la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - x + 3$ en el punto de abscisa $x = 2$. Para ello:

   i) Dibuja la gráfica de la función en papel milimétrico y fíjate en el intervalo [1.5, 3.5].

   ii) Traza aproximadamente la recta tangente en el punto $x = 2$.

   iii) ¿Es posible calcular el valor exacto de la pendiente de la recta tangente que acabas de dibujar?

   iv) ¿Conoces dos puntos de la recta tangente con total precisión? Escríbelos.

   v) ¿Cuántos puntos son necesarios para determinar la dirección, y por lo tanto, la pendiente de una recta?

   vi) Calcula la pendiente de la recta tangente.

c) Escribe el punto de la función $f(x)$ cuyo punto de abscisa es $x = 2$.

d) Escribe la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = 2$.

e) Ahora, ¿Qué relación ves entre la función $f(x)$ y la recta verde del Ejercicio 1 CP2?

CP3. Tasa de variación instantánea.

Ejercicio 1 CP3. Según una estimación, cada t años, el periódico del Heraldo de Aragón publica $E(t) = 20t^2 + 40t + 800$ ejemplares.

a) Completa la siguiente tabla:

t	4,5	4,1	4,05	4,01	4,001
$E(t)$					
$E(t) - E(4)$					
$t - 4$					
$\frac{E(t)-E(4)}{t-4}$					

b) ¿A qué término introducido en otras sesiones hace referencia el cociente de la última fila?

c) Los valores de la última fila corresponden a los ejemplares medios que se publican en los instantes de tiempo correspondientes. ¿A qué valor se van aproximando?

d) Cuando hablamos de aproximación, ¿qué operación matemática es en la que estamos pensando?

e) Calcula la T.V.M $[4, 4 + h]$, siendo h un valor cualquiera.

f) ¿Qué interpretación le puedes dar a la tasa de variación media calculada? Justifica tu respuesta.

g) Notar que los tiempos se van aproximando cada vez más hacia el número 4. Es decir, $t = 4 + h$, siendo h un incremento de tiempo cada vez más pequeño. Por ejemplo, en la primera columna a rellenar $h = 0.5$, en la segunda $h = 0.1$, en la tercera $h = 0.05$, en la cuarta $h = 0.01$ y en la quinta $h = 0.001$. ¿Qué aproximación de h estamos realizando?

h) ¿Qué resultado obtenemos si calculamos la misma tasa de variación media que en e), pero ahora hacemos que la h se aproxime al valor obtenido en g)?

Ejercicio 2 CP3. Sea la función $f(x) = x^2 + 4x$.

a) Halla la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto $x =- 3$ teniendo en cuenta que:

$$T.V.I\,(a) \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

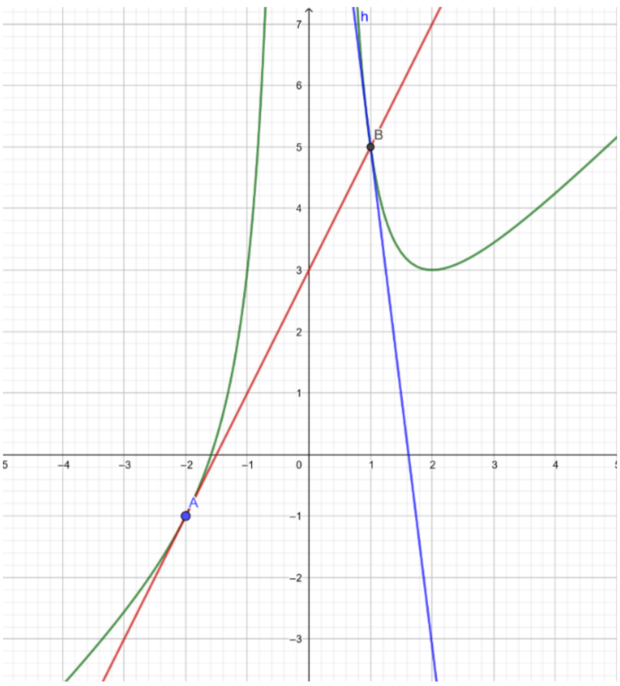
b) Dibuja la función con Geogebra y traza la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x =- 3$.

c) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x =- 3$?

d) ¿Puedes deducir cuál es el significado geométrico de la tasa de variación instantánea?

CP4. Interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto.

Ejercicio CP4. Dada la función coloreada en verde, haya su derivada en el punto A y en el punto B. Ten en cuenta las rectas tangentes que se muestran en esos puntos (roja y azul respectivamente). ¿Existe algún punto de la función verde donde la derivada sea 0?



CP5. Cálculo algebraico de la función derivada

Ejercicio 1 CP5. Para la realización de este ejercicio, necesitas utilizar Geogebra.

a) Introduce la función $f(x) = x^3$. Calcula la derivada de $f(x)$ haciendo uso de la entrada y escribiendo 'Derivada $(f(x))$'.

b) Introduce la función $g(x) = x^4$. Calcula la derivada de $g(x)$ haciendo uso de la entrada y escribiendo 'Derivada $(g(x))$'.

c) Introduce la función $h(x) = x^5$. Calcula la derivada de $h(x)$ haciendo uso de la entrada y escribiendo 'Derivada $(h(x))$'.

d) ¿Qué observas? ¿Puedes deducir cómo obtener la función derivada de un monomio?

e) Una vez resuelto d), ¿Podrías calcular la derivada de x? ¿Y cuál sería la derivada de 7?

Ejercicio 2 CP5. Dada la función $f(x) = 5x - 3$, calcula mediante la definición la derivada en los puntos de abscisas $x =- 1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. ¿Por qué se obtiene el mismo resultado en todos los casos?

Ejercicio 3 CP5. La velocidad instantánea de una moto viene dada por la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

a) Calcula la tasa de variación instantánea en el punto de abscisa 2. Es decir, calcula el valor de la derivada $f'(2)$ mediante la definición de derivada como el límite incremental.

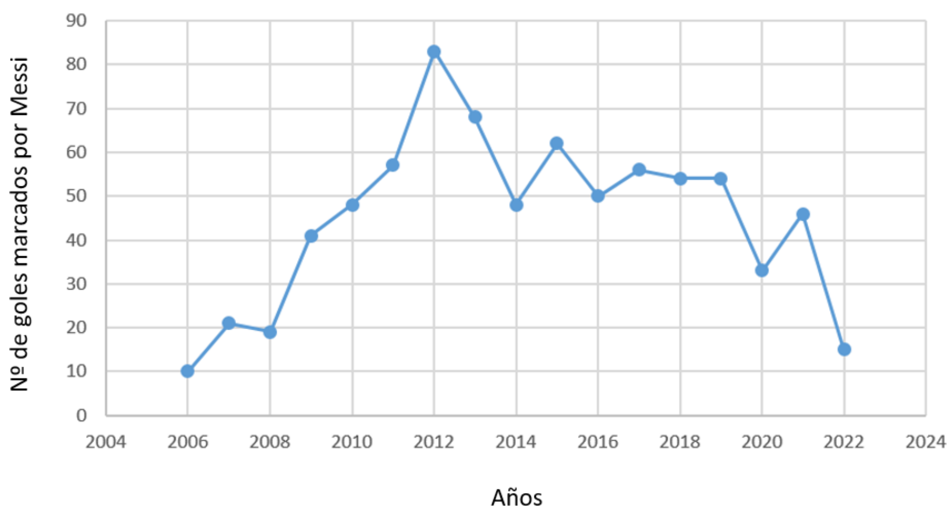
b) ¿Podrías hallar una fórmula general para calcular en cualquier punto de $f(x)$ su función derivada?

c) Calcula la tasa de variación instantánea siendo $a = x$, para así calcular la derivada en cualquier punto de la función.

Ejercicio 4 CP5. Dada la función $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + 7$, calcula la tasa de variación instantánea de la función de forma genérica para cualquier punto x de la función. ¿Qué nombre matemático recibe el procedimiento que acabas de realizar?

<u>CP6. Crecimiento y decrecimiento y puntos singulares.</u>

Ejercicio 1 CP6. En la siguiente gráfica se muestran los goles totales marcados por Messi en cada año que ha jugado a fútbol.



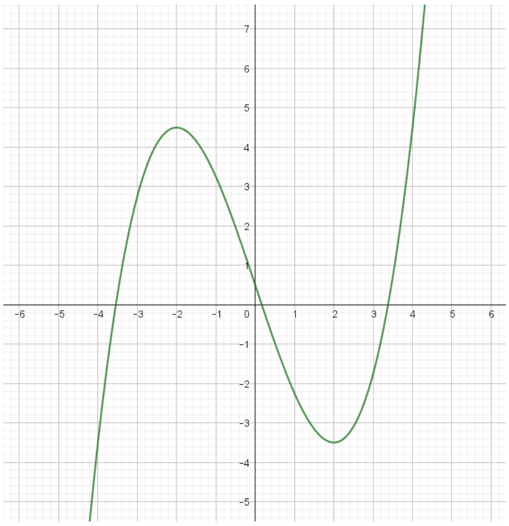
a) ¿En qué mes o meses ha marcado Messi más goles?

b) ¿En qué mes o meses ha marcado Messi menos goles?

c) ¿En qué años está marcando más goles que en el año anterior?

d) ¿En qué años está marcando menos goles que en el año anterior?

Ejercicio 2 CP6. Considera la siguiente gráfica de una función $f(x)$. Indica cuáles de las afirmaciones que se muestran a continuación son verdaderas y cuáles falsas, justificando todas las respuestas.



i. La gráfica de $f(x)$ posee un punto de inflexión en $x = 0$ porque pasa de ser cóncava a convexa.

ii. $f'(0) =- 3$

iii. $f(x)$ posee un mínimo local en el punto $(2, \frac{9}{2})$

iv. La recta tangente de $f(x)$ en $x = 0$ es $y =- 3x + 0.5$

v. $f'(x) > 0$, cuando $0 < x < \infty$

vi. $f'(x)$ es decreciente en $- 2 < x < 2$

vii. $f'(2) = 0$

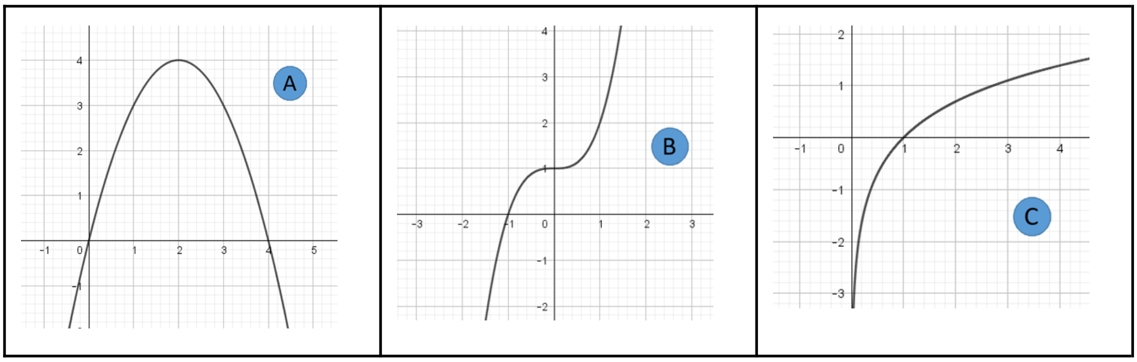
viii. $f'(x)$ posee un mínimo local en el punto $(0, - 3)$

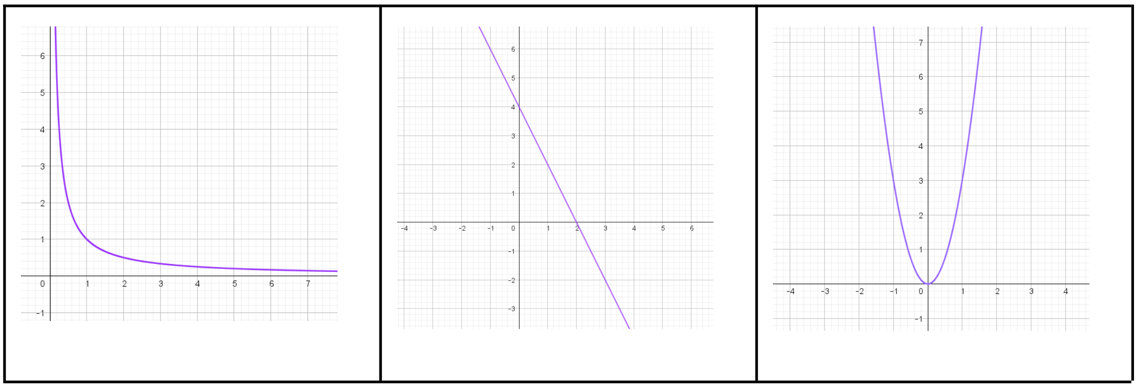
Ejercicio 3 CP6. Representa de manera aproximada la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ a partir de calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y también sus máximos y sus mínimos relativos. Comprueba la representación gráfica con Geogebra.

Ejercicio 4 CP6. Elabora un enunciado con contexto realista en el que la variable dependiente y la independiente estén relacionadas mediante una función polinómica de grado dos y tenga un mínimo en (0,2).

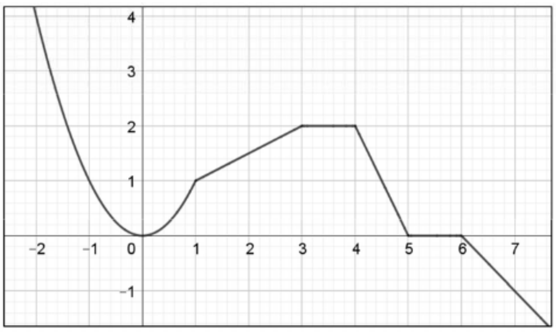
CP7. Relación entre la gráfica de una función y su función derivada.

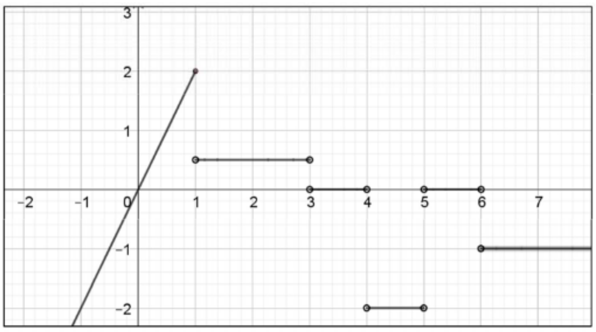
Ejercicio 1 CP7. Relaciona las gráficas A, B y C con sus correspondientes gráficas de las funciones derivadas, situadas en la segunda tabla. Justifica tu respuesta.





Ejercicio 2 CP7. Dadas estas dos representaciones gráficas de dos funciones, explica si existen algunas relaciones entre ambas.





E.2. Modificaciones de la técnica que exigen la resolución de los problemas

Aunque entender el concepto de derivada para los alumnos suponga intelectualmente un esfuerzo que no están acostumbrados, cuando hablamos de la resolución de problemas, no es necesario un gran cambio de las técnicas utilizadas. Seguidamente, se comentan brevemente las técnicas y sus modificaciones para cada campo de problemas.

CP1. Tasa de variación media. Se trabajará el sentido físico de la tasa de variación media como velocidad media entre dos instantes de tiempo. Se espera que los alumnos apliquen la fórmula ya conocida de "velocidad es igual a espacio recorrido partido por el tiempo transcurrido".

CP2. Cálculo de pendientes de una función y recta tangente. Trabajaremos principalmente de manera gráfica. Como técnicas aprendidas que tendrán que recordar son el cálculo de la pendiente de una recta dados dos puntos que pertenecen a ella, escribir la ecuación de una recta y cómo se visualiza una recta tangente. Para que los alumnos comprendan visualmente qué es la pendiente de una recta, relacionamos este concepto con el CP1 y les vamos guiando hasta que aprendan la técnica de obtener la ecuación de la recta tangente a una función en un punto.

CP3. Tasa de variación instantánea. La técnica evoluciona ya que ahora en vez de hallar solamente cocientes incrementales, partimos de una expresión que depende un parámetro h el cual es un valor que se va aproximando a 0. Aunque la técnica de calcular límites y resolver indeterminaciones es una técnica ya conocida (porque la han estudiado en la unidad didáctica previa), los alumnos poseen muchas dificultades por lo que la consideramos una técnica que hay que modificar y afianzar en esta unidad centrada en el estudio de las derivadas.

CP4. Interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto. Se plantea un acercamiento de manera visual para que relacionen y perfeccionen la técnica de que la derivada de una función nos indica cuál es la inclinación de la función en cada punto.

CP5. Cálculo algebraico de la función derivada. Los ejercicios planteados para trabajar este campo de problemas están pensados para que los alumnos sean capaces de generalizar la expresión de la función derivada en un punto. Aparecen también las técnicas de derivación de funciones elementales y de operaciones entre funciones. Se propone un ejercicio más repetitivo en vez de cognitivo para afianzar las técnicas.

CP6. Crecimiento y decrecimiento y puntos singulares. La técnica habitual que se suele enseñar para representar funciones es: calcular la derivada de la función e igualarla a 0 y así obtener los máximos y los mínimos. Los problemas diseñados para trabajar este campo de problemas, distan un poco de los que se suelen presentar en la mayoría de libros de texto, a pesar de que uno de los ejercicios planteados sigue la técnica explicada. Sin embargo ahora el objetivo principal es que los alumnos sepan interpretar el comportamiento de las funciones gráficamente.

CP7. Relación entre la gráfica de una función y su función derivada. Los problemas englobados dentro de este campo de problemas solamente necesitan que los alumnos entiendan la relación que existe entre la gráfica de una función y la gráfica de su función derivada, por lo que no es necesaria ninguna técnica específica de cálculo.

De este modo, la técnica utilizada en este tipo de problemas es muy similar a la utilizada en CP6.

E.3. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Como ya se ha comentado anteriormente, la metodología tradicional ha sido objetivo de análisis de varios estudios de investigación. Se ha identificado el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como una de las metodologías utilizadas para superar las dificultades que posean los alumnos. Por ejemplo, la investigación de Hidalgo et al. (2015) muestra cómo mejoran los resultados en algunas pruebas en el área de las matemáticas.

A través del ABP los estudiantes pueden desarrollar habilidades comunicativas y expositivas, capacidades de análisis y cooperativas para trabajar en grupo. Además, aprenden a aprender pensando (Vázquez Buenfíl, 2008), y así se puede identificar su propio ritmo de aprendizaje desde sus conocimientos previos y la contextualización. La autoevaluación y la coevaluación son parte fundamental del proceso metodológico basado en el ABP.

Además, para trabajar los problemas también aplicaremos la metodología basada en la enseñanza a través de la resolución de problemas. Se trabajan problemas que ayudan a afianzar las técnicas asociadas a cada campo de problemas.

En el aula los alumnos trabajarán los problemas guiados de manera conjunta, en grupos de 3 o 4 personas. El papel del docente, idealmente, debería ser el de un mero observador aunque en caso de necesidad, puede ayudar a alguno de los grupos. Además, mediante esta observación, el docente irá anotando las ideas que se vayan proponiendo y las dificultades que han ido surgiendo las cuales se tendrán en cuenta para la posterior puesta en común e institucionalización de conceptos. Al trabajar en equipo, los alumnos intercambian ideas y conocimientos para así formar un concepto novedoso entre todos. También habrá algún ejercicio (Ejercicio 3 CP5, Ejercicio 4 CP5, Ejercicio 3 CP6, Ejercicio 4 CP6) que se trabajará de manera individual, e incluso podría mandarse alguno como tarea para casa si no diese tiempo de realizarlos en el aula. Cuando todos los alumnos hayan terminado su Ejercicio 4 CP6, se lo intercambiarán con otro compañero para que sea éste el que detecte aciertos o errores en el planteamiento del ejercicio. Como este ejercicio será la última actividad de una de las sesiones, el docente seleccionará para el día siguiente los que más interesantes le hayan parecido para comentarlos en el aula. Todos los ejercicios se pondrán en común en clase y el docente elegirá a aquellos alumnos cuyas resoluciones le hayan parecido más interesantes (pueden ser tanto las estrategias correctas como las erróneas, ya que ambas influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje) de modo que serán ellos mismos los que corregirán los ejercicios en la pizarra.

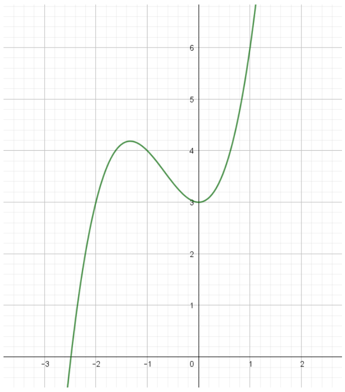
F. Técnicas

F.1. Ejercicios para presentar en el aula

A continuación, se presenta una serie de ejercicios que los alumnos deberán realizar para practicar las diferentes técnicas vistas en clase, las cuales les habrán guiado hasta descubrir nuevos conocimientos. De este modo, al realizar los siguientes ejercicios, los alumnos podrán afianzar dichos conocimientos.

T1. Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo.

Ejercicio 1 T1. Dada la siguiente representación gráfica de una función:



a) ¿Cuál es la tasa de variación media de esta función en el intervalo [-1,0]?

b) ¿Cuál es la tasa de variación media de esta función en el intervalo [0,1]?

c) ¿Observas alguna relación entre las soluciones obtenidas y la forma que tiene la gráfica en esos intervalos?

Ejercicio 2 T1. (Adaptado de Gómez, 2013) Un coche rádar situado en una posición P, que tiene un ángulo de visión amplio, analiza la posición de un coche cada 5 segundos respecto de P para conocer si en algún momento sobrepasa el límite de velocidad en ese tramo. De este modo, se puede conocer si en algún momento el coche sobrepasa la velocidad máxima autorizada, que es de 80 km/h. Los datos obtenidos considerando que en el instante 0 segundos pasa por el punto P, son:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia a P (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Dibuja en papel cuadriculado la gráfica espacio-tiempo del coche.

b) Calcula la velocidad media que lleva el coche cada 5 segundos. Recordar que la velocidad media coincide con la tasa de variación media.

c) Calcula la velocidad media que lleva el coche a lo largo de todo el intervalo de tiempo.

d) ¿Ha superado en algún momento la velocidad máxima permitida?

e) Calcula a qué distancia estará el coche a los 45 segundos, sabiendo que la velocidad media entre 45 y 40 es de 64.8 km/h. Ten en cuenta los cambios de unidades.

Ejercicio 3 T1. Yo quiero ser accionista del equipo de fútbol S.D.Huesca. La función dada por $f(x) = (0'02x^2 + 1) \cdot 1000$ nos indica el precio de una acción a lo largo de la semana. El lunes corresponde a $x = 0$, el martes corresponde a $x = 1$, el miércoles corresponde a $x = 2$, y así hasta el domingo. ¿Me sale más barato comprar la acción entre semana o el fin de semana? Ayúdate calculando lo que varía entre esos días, es decir, utiliza la tasa de variación media.

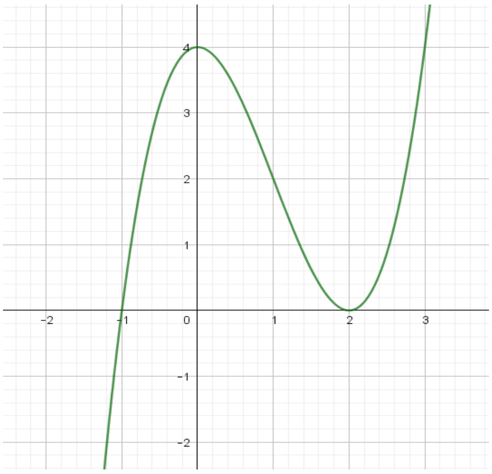
<u>T2. Calcular la recta tangente a una función en un punto.</u>

Ejercicio 1 T2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, responde a las siguientes preguntas.

a) Completa la siguiente tabla, señalando los puntos $(x, f(x))$ de la función.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

b) Halla las expresiones de las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 2$. Dibújalas sobre la gráfica.



<u>Ejercicio 2 T2.</u> (Adaptado de Colera Jiménez et al., 2017) Halla los parámetros b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ pase por el punto (0,1) y además la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el puto de abscisa $x = 1$ es 5.

<u>Ejercicio 3 T2.</u> (Adaptado de Colera Jiménez et al., 2017) Dada la función $y = x^2 - 2x - 2$, se traza la cuerda que une los puntos de la parábola de abscisas $x = 1$ y $x = 3$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.

T3. Calcular la tasa de variación instantánea.

Ejercicio 1 T3. (Buitrago et al., 2013) Una barra de hierro se calienta durante un periodo determinado, de modo que su temperatura, $c(t)$, en grados Celsius, se ha incrementado como una función del tiempo t en minutos, de acuerdo con la función $c(t) = t^3$. Calcular la tasa de variación instantánea de la temperatura en relación con el tiempo el $t = 5$.

T4. Calcular la derivada de una función en un punto.

- **T4.1. Gráficamente**

Ejercicio 1 T4.1. ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto y la función derivada en ese punto? Para responder a esta pregunta, utiliza Geogebra y sigue los siguientes pasos:

a) Dibuja la función $f(x) = 2x^3 + 3x$ y elige un punto cualquiera de la curva $A = (a, f(a))$, por ejemplo $A = (1, 5)$.

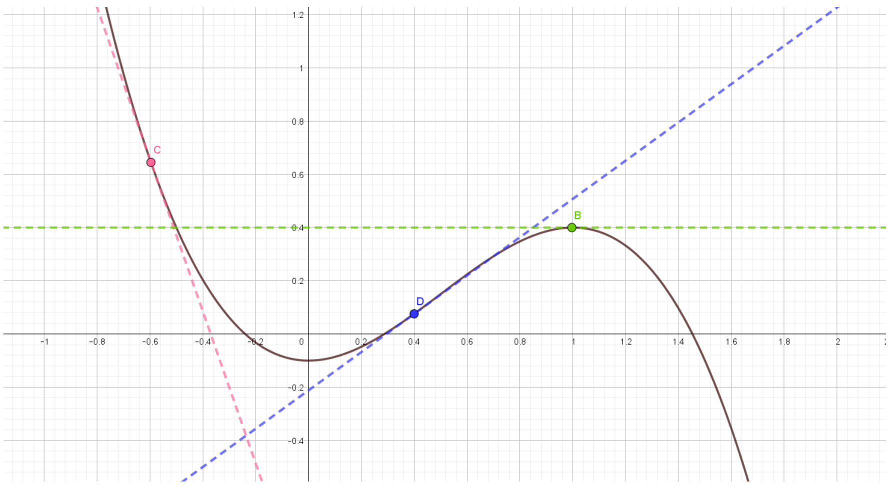
b) Dibuja la recta tangente, con la herramienta proporcionada por Geogebra llamada *Tangente*, al punto A y a nuestra curva.

c) ¿Cuál es la pendiente de la recta obtenida?

d) Calcula la derivada de $f(x)$ haciendo uso de la entrada y escribiendo 'Derivada $(f(x))$'.

e) Observando la gráfica de la función derivada, ¿cuánto vale $f'(x)$ en el punto $x = a$?

Ejercicio 2 T4.1. Observa la gráfica de $f(x) =- x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{10}$ en la que se han trazado las rectas tangentes en los puntos $x =- 0.6$, $x = 0.4$ y $x = 1$. Responde a las siguientes preguntas:



a) ¿Cuál es el valor de $f'(-\ 0.6)$, $f'(0.4)$ y $f'(1)$?

b) ¿En alguno de los puntos anteriores la derivada se anula? ¿Cómo explicarías esto gráficamente?

c) En el punto $(-\ 0.24, 0)$, la derivada es positiva o negativa? ¿Y en el punto $(0.29, 0)$?

- **T4.2 Analíticamente**

Ejercicio 1 T4.2. Halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = x^3$ en $x = 2$.

b) $g(x) = 2x^2 - 3x$ en $x = 1$.

c) $h(x) = 1 - x^2$ en $x = 0$.

T5. Calcular la derivada de una función.

Ejercicio 1 T5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones aplicando la definición de función derivada y también aplicando las reglas de derivación.

a) $f(x) = \ -5x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$

c) $f(x) = \frac{3}{x}$

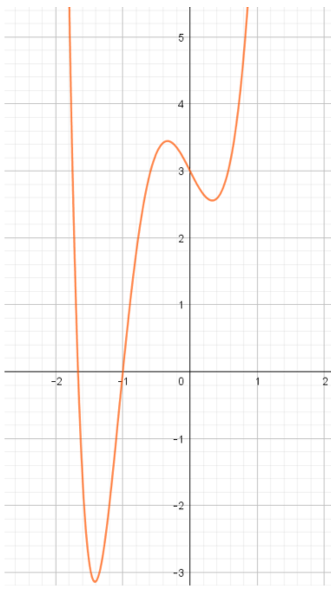
d) $f(x) = 2\sqrt{x^6}$

e) $f(x) = (x - 7)(x + 1)$

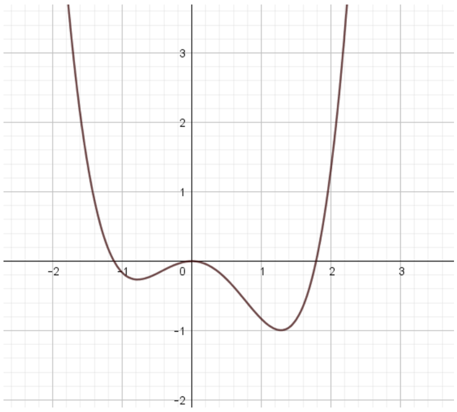
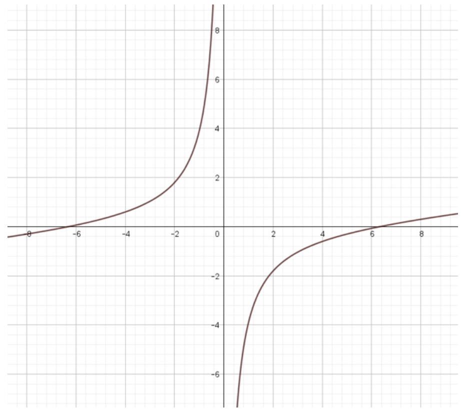
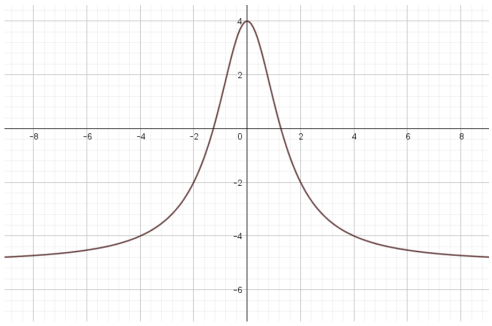
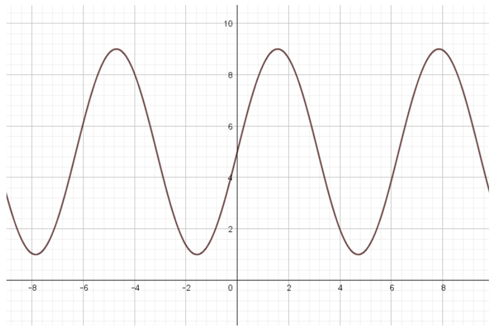
f) $f(x) = \frac{5x-3}{2x}$

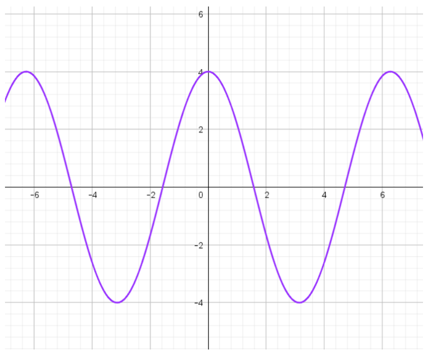
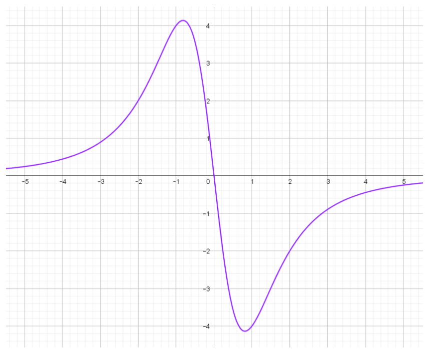
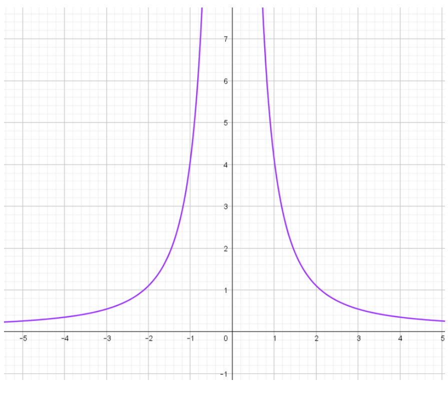
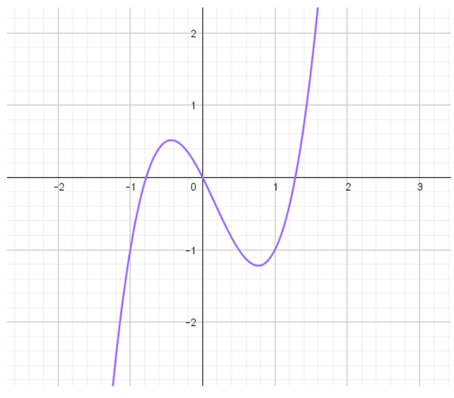
T6. Representación gráfica de funciones.

Ejercicio 1 T6. Dada la siguiente gráfica de la función $f(x) = x^6 + 6x^3 - 2x + 3$ Indica cuáles son sus intervalos de crecimiento, sus intervalos de decrecimiento, y sus puntos críticos.

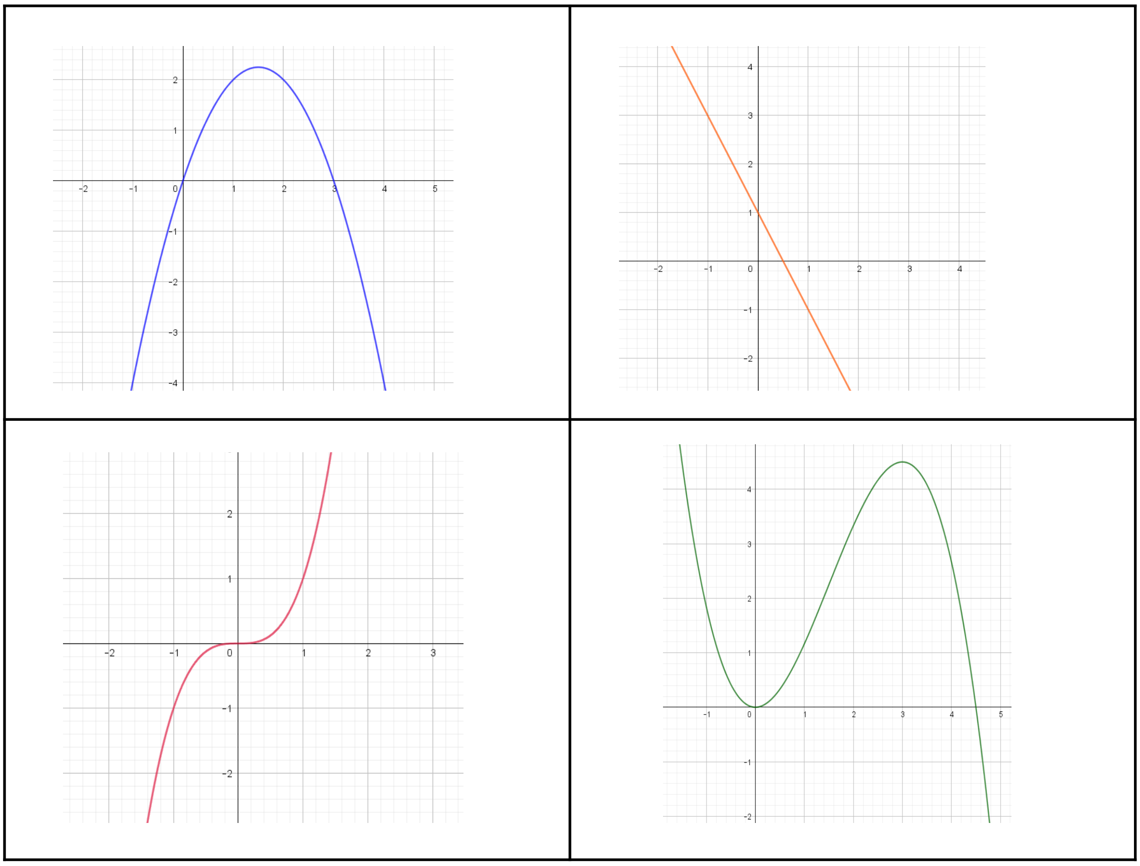


Ejercicio 2 T6. Relaciona cada una de las gráficas de f, mostradas en la primera tabla con su correspondiente f' de la segunda tabla.

Ejercicio 3 T6. Si $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$, ¿Cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f'(x)$? Justifica tu respuesta.



Ejercicio 4 T6. Si $f'(x) = x(3 - x)$, ¿Cuál de las siguientes gráficas del Ejercicio 3 T6 podría ser la de $f(x)$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 5 T6. Esboza la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

a) f es continua en su dominio

b) $f(2) = 0$.

c) $f'(3) = f'(5) = 0$.

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$.

e) $\lim_{x \to 8^-} f(x) = -\infty$.

f) $f'(x) < 0, 5 < x < 8$.

g) $f'(x) \geq 0, x < 5$.

F.2. Técnicas que se ejercitan con la resolución de los ejercicios

A continuación, se comentan brevemente las técnicas que se ejercitan con los ejercicios planteados en la sección anterior F.1.

T1. Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo. Se proponen ejercicios que permitan afianzar la técnica de cálculo de la tasa de variación media de funciones a partir de diferentes representaciones: representación gráfica, representación tabular y representación algebraica.

T2. Calcular la recta tangente a una función en un punto. Se propone un ejercicio que permite trabajar de una manera más guiada el sentido geométrico de la derivada como la pendiente de la recta tangente. Este ejercicio se hará tanto de manera manual (con la ayuda de un papel milimetrado) como de manera digital (utilizando Geogebra. También se proponen dos ejercicios los cuales están pensados para que los alumnos apliquen los procedimientos estudiados.

T3. Calcular la tasa de variación instantánea. Una vez entendido el concepto de tasa de variación instantánea, se propone un ejercicio para afianzar la técnica de calcularla algebraicamente.

T4. Calcular la derivada de una función en un punto. Los ejercicios asociados a esta técnica están planteados para que los alumnos consoliden los conocimientos referidos a la definición de derivada de una función en un punto y puedan utilizar esta técnica tanto de manera gráfica como de forma analítica.

T5. Calcular la derivada de una función. Se plantea ampliar la técnica anterior y generalizar el concepto para considerar la derivada de una función en todos los puntos de su dominio. La mayoría de estos ejercicios están pensados para aplicar mayoritariamente procedimientos y técnicas de derivación por lo que no están planteados para trabajarlos con contextos realistas.

T6. Representación gráfica de funciones. La técnica que se va a trabajar consiste en identificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y también los puntos críticos. Este trabajo se hará principalmente mediante la relación entre las gráficas de funciones y las gráficas de sus funciones derivadas, donde deberán justificarse adecuadamente dichas relaciones.

F.3. Adecuación de las técnicas a los campos de problemas

Las técnicas consideradas para esta propuesta didáctica son las que aparecen en la Sección A.3. En la Tabla 4 se muestran las técnicas que se necesitan para resolver los problemas planteados en F.1, los cuales están relacionados con los campos de problemas que aparecen también en la Sección A.3.

Campos de problemas	Ejercicio	Técnicas
CP1	**Ejercicio 1 T1**	Técnica 1
CP1	**Ejercicio 2 T1**	Técnica 1
CP1	**Ejercicio 3 T1**	Técnica 1

CP2	**Ejercicio 1 T2**	Técnica 2
CP2	**Ejercicio 2 T2**	Técnica 2
CP2	**Ejercicio 3 T2**	Técnica 2
CP3	**Ejercicio 1 T3**	Técnica 3
CP4	**Ejercicio 1 T4.1**	Técnica 4
CP4	**Ejercicio 2 T4.1**	Técnica 4
CP5	**Ejercicio 1 T4.2**	Técnica 4
CP5	**Ejercicio 1 T5**	Técnica 5
CP6	**Ejercicio 1 T6**	Técnica 6
CP7	**Ejercicio 2 T6**	Técnica 6
CP7	**Ejercicio 3 T6**	Técnica 6
CP7	**Ejercicio 4 T6**	Técnica 6
CP4, CP6	**Ejercicio 5 T6**	Técnica 6

Tabla 4. Relación entre los campos de problemas, los ejercicios y las técnicas

F.4. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Después de haber introducido cada uno de los campos de problemas, se institucionalizarán dichos contenidos con la realización de los ejercicios propuestos en la Sección F.1, ya que como se muestra en la Sección F.3, con los ejercicios planteados se trabajan todos los campos de problemas.

De todos los ejercicios propuestos, hay algunos que se trabajarán de manera individual (Ejercicio 1 T2, Ejercicio 1 T3, Ejercicio 1 T4.1, Ejercicio 1 T4.2, Ejercicio 1 T5, Ejercicio 1 T6, Ejercicio 5 T6) y el resto se realizarán por parejas. Podría mandarse alguno como tarea para casa si no diese tiempo de realizarlos en el aula, como por ejemplo el Ejercicio 1 T2 o el Ejercicio 1 T3.

Al igual que se comentó en la sección E.3, todos los ejercicios se pondrán en común en clase y el docente elegirá a aquellos alumnos cuyas resoluciones le hayan parecido más interesantes de modo que serán ellos mismos los que corregirán los ejercicios en la pizarra. El único ejercicio que posee un tipo de corrección diferente, es el Ejercicio 5 T6, ya que se lo intercambiarán con otro compañero para que sea éste el que detecte aciertos o errores en la resolución del ejercicio y posteriormente el docente en el aula seleccionará los planteamientos más interesantes para comentarlos también.

G. Tecnologías

G.1. Razonamientos para justificar las técnicas

El razonamiento a seguir será el guiado por los ejercicios propuestos. La idea es introducir el concepto de derivada de una función a través de una serie de ejercicios contextualizados y guiados.

El razonamiento comienza definiendo la tasa de variación media (TEC1), ya que su cálculo es conocido por los alumnos puesto que lo han estudiado en 4º de ESO. Para facilitar la comprensión, el ejercicio planteado para tratar este campo de problemas utiliza la relación que existe entre la tasa de variación media y la velocidad media. De este modo, se puede argumentar que la tasa de variación media de un intervalo, desde un punto de vista geométrico, coincide con la pendiente de la recta tangente (para lo cual tenemos que hacer uso de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto, TEC2) a la función en un punto. Posteriormente se plantea algún ejercicio para ir haciendo cada más pequeños los intervalos, y así introducir la tasa de variación instantánea (TEC3). Es en este punto de la unidad didáctica en el que tenemos que prestar especial atención a superar los obstáculos causados por el aprendizaje de los límites y hacer uso de las propiedades de los límites y resolución de indeterminaciones (TEC4) para que los alumnos sean capaces de obtener correctamente la tasa de variación instantánea.

Debido a todos los campos de problemas, técnicas y tecnologías anteriores, la derivada aparece como límite de las tasas medias de variación y de este modo se realiza la justificación formal de definición de derivada en un punto (TEC5).

La técnica formal de cálculo de la función derivada se justificará mediante una generalización a cualquier punto del dominio donde la función sea continua y derivable (TEC7), al considerar la abscisa del punto como una variable independiente. Será entonces cuando se requiera el uso de las reglas y propiedades de derivación (TEC6), para agilizar los cálculos y no necesitar estar calculando límites cada vez que queramos calcular la derivada de una función.

También se hará especial hincapié en comprender las relaciones que existen entre una función y su derivada (y viceversa). Para ello, será necesario utilizar la definición de función creciente y función decreciente (TEC8) y también la definición de puntos singulares (TEC9). Todo esto nos servirá para representar funciones (TEC10).

De este modo, todas las técnicas quedan justificadas por algunas tecnologías.

G.2. Justificación de las técnicas en el aula

Las técnicas se irán justificando por sí solas en el desarrollo de las sesiones a través de su aparición y aplicación en los diferentes ejercicios. Serán los propios estudiantes los que lleguen a ellas a través de unos ejercicios guiados, ya que los distintos ejercicios están diseñados de manera que cada apartado justifique y facilite la resolución del siguiente. Aun así, el docente debe intervenir en caso necesario para asegurarse de que todos los alumnos lleguen a entender las técnicas. Además, será el encargado de realizar el proceso de institucionalización.

G.3. Proceso de institucionalización de los distintos aspectos de las derivadas

El proceso de institucionalización es clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje del alumnado ya que, como se apunta en el artículo de Godino et al. (2007) "un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1998) tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes".

Tal y como ya se ha comentado en la sección G.2, el docente es quien realiza el proceso de institucionalizar los conceptos e incorporar las técnicas a la cultura de la clase para que puedan ser utilizadas. Esto resulta útil para que posteriormente, en otras asignaturas (como por ejemplo Física y Química) o en cursos posteriores (2º de Bachillerato, cursos de Universidad o Grados Superiores), puedan ser trabajadas con otro formato de problemas basados en otros métodos menos contextualizados y más procedimentales.

G.4. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Siempre se animará a que todos los alumnos participen e intenten la resolución de todos los ejercicios.. El docente debe tomar el papel de guía del aprendizaje y apoyar a todos los alumnos. Se intentará, por medio de las puestas en común de los ejercicios, que los alumnos obtengan sus propias conclusiones y den una justificación de las mismas para que posteriormente el docente formalice las técnicas y resalte los aspectos más importantes.

Como ya se ha argumentado anteriormente, la metodología que se va a utilizar en el aula es bastante guiada y progresiva debido a cómo están planteados los ejercicios propuestos. La trayectoria y secuenciación de los contenidos tiene en cuenta los conocimientos previos de los alumnos, la complejidad semiótica y los conflictos semióticos potenciales (Font, 2005). Para facilitar el aprendizaje y superar los obstáculos, se tratarán todas las justificaciones de las técnicas a través de las relaciones entre ellas, comenzando por las más sencillas y conocidas por los alumnos y terminando por las más complejas y exactas.

H. Secuencia didáctica y cronograma

En esta sección se indica la distribución de los ejercicios planteados a lo largo de las secciones anteriores. Está previsto dedicar 13 sesiones (de 50 minutos cada una) cuya distribución es la mostrada en la Tabla 5.

Sesión	Campos de problemas	Actividades	Duración
1	Evaluación inicial	**Ejercicio Inicial 1**	50 minutos
2	CP1	**Ejercicio 1 CP1**	25 minutos
	CP1	**Ejercicio 2 T1**	20 minutos
	CP1	**Ejercicio 1 T1**	5 minutos
3	CP1	**Ejercicio 2 CP1**	10 minutos
	CP1	**Ejercicio 3 T1**	15 minutos
	CP1	Institucionalización de la T.V.M	10 minutos
	CP2	**Ejercicio 1 CP2**	15 minutos
4	CP2	**Ejercicio 2 CP2**	20 minutos
	CP2	**Ejercicio 2 T2**	15 minutos
	CP2	**Ejercicio 3 T2**	25 minutos
	CP2	Institucionalización de la pendiente y recta tangente	10 minutos
	CP2	**Ejercicio 1 T2**	En casa
5	CP3	**Ejercicio 1 CP3**	30 minutos
	CP3	**Ejercicio 2 CP3**	10 minutos
	CP3	Institucionalización de la T.V.I	10 minutos
	CP3	**Ejercicio 1 T3**	En casa
6	CP4	**Ejercicio 1 T4.1**	20 minutos
	CP4	**Ejercicio 2 T4.1**	20 minutos
	CP4	**Ejercicio CP4**	10 minutos
7	CP4	**Ejercicio 1 RS**	10 minutos
	CP4	**Ejercicio 1 T4.2**	15 minutos
	CP4	Institucionalización función derivada en	10 minutos

		un punto	
	CP5	**Ejercicio 2 RS**	15 minutos
8	CP5	**Ejercicio 1 CP5**	10 minutos
	CP5	**Ejercicio 2 CP5**	15 minutos
	CP5	**Ejercicio 3 CP5**	20 minutos
	CP5	**Ejercicio 4 CP5**	10 minutos
9	CP5	Institucionalización y explicación de la función derivada y técnicas de derivación	30 minutos
	CP5	**Ejercicio 3 RS**	20 minutos
	CP6	**Ejercicio 1 T5**	En casa
10	CP6	**Ejercicio 1 CP6**	5 minutos
	CP6	**Ejercicio 2 CP6**	10 minutos
	CP6	**Ejercicio 1 T6**	5 minutos
	CP6	**Ejercicio 4 CP6**	5 minutos
	CP6	Puesta en común del Ejercicio 4 CP6	10 minutos
	CP6	Institucionalización de los intervalos de crecimiento/decrecimiento, máximos/mínimos.	5 minutos
	CP7	**Ejercicio 1 CP7**	10 minutos
	CP6	**Ejercicio 3 CP6**	En casa
11	CP7	**Ejercicio 2 T6**	15 minutos
	CP7	**Ejercicio 3 T6**	10 minutos
	CP7	**Ejercicio 4 T6**	10 minutos
	CP7	**Ejercicio 5 T6**	10 minutos

	CP7	Institucionalización de la relación entre la gráfica de una función y su función derivada	5 minutos
12	Consolidación y repaso	Ejercicios que no hayan quedado claros en el resto de sesiones. Resolución de dudas puntuales.	50 minutos
13	Prueba escrita	**Ejercicio 1 EV, Ejercicio 2 EV, Ejercicio 3 EV, Ejercicio 4 EV, Ejercicio 5 EV**	50 minutos

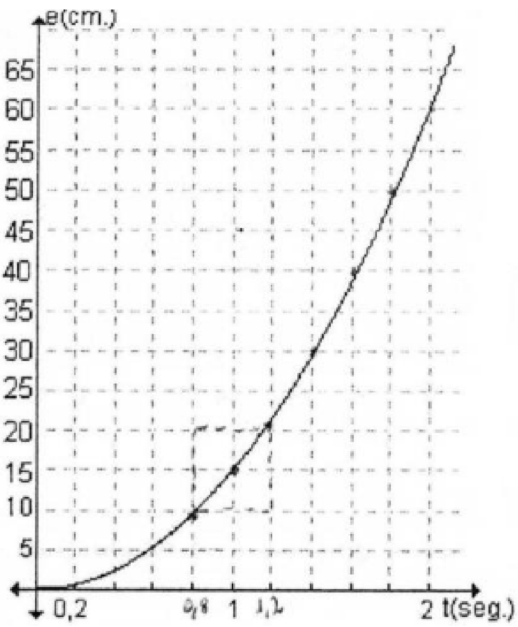
Tabla 5. Cronograma de la unidad didáctica

I. Evaluación

I.1. Prueba escrita de evaluación

A continuación se presentan los enunciados de los ejercicios que se han diseñado para tratar la mayoría de los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se han considerado oportunos en la presente propuesta didáctica (en la sección A.3) y así poder evaluar el aprendizaje de los alumnos. La puntuación de cada ejercicio son 2 puntos, pudiendo obtener como máximo una nota de 10 puntos en la prueba escrita de evaluación.

Ejercicio 1 EV. (Guzmán, 2017) En un experimento de laboratorio se estudió la caída libre de una bola de hierro pequeña. La gráfica muestra el espacio recorrido por la bola (en centímetros) en función del tiempo t (en segundos).



a) Determina la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.

b) Observa la gráfica y completa la tabla considerando los intervalos (1, 1 + Δt), teniendo en cuenta los valores de Δt que aparecen en la primera fila de la tabla.

Δt	0,8 seg	0,6 seg	0,4 seg	0,2 seg
Intervalo (1, 1 + Δt)				
Espacio recorrido				
Velocidad promedio				

c) ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t = 1 segundo? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2 EV. Calcula las derivadas de las funciones siguientes con el método que se indica en cada caso (si no se indica nada, puedes elegir el método que quieras):

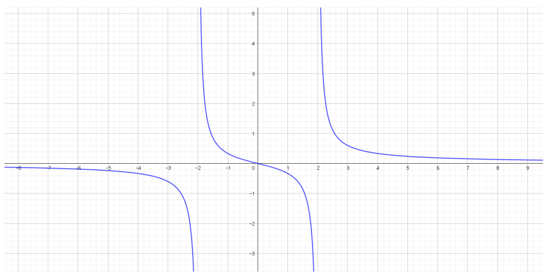
a) $f(x) = x^2 - 1$ utilizando la definición de función derivada.

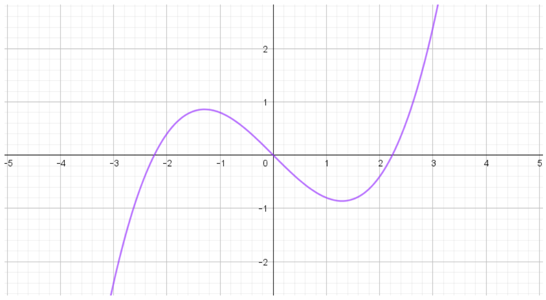
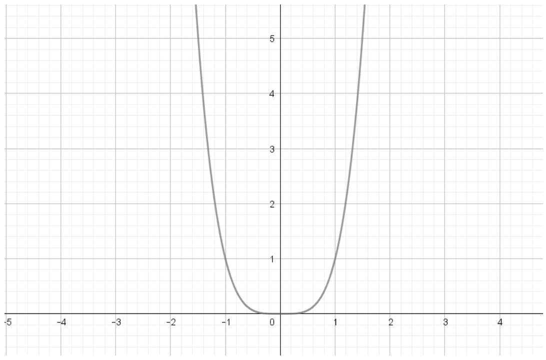
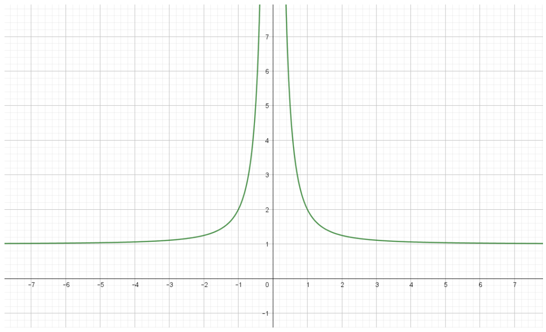
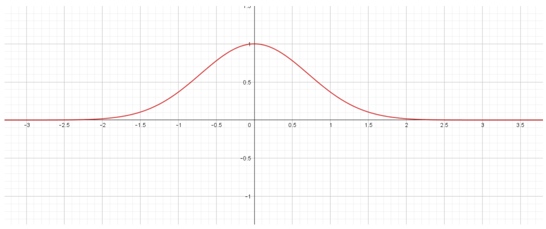
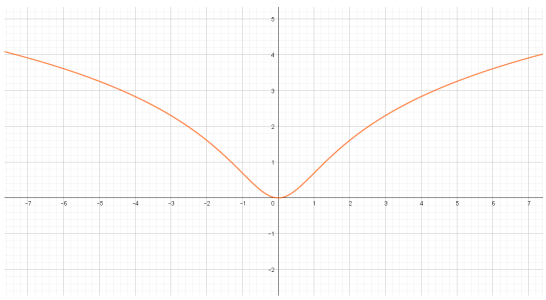
b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - \sqrt{x}$ utilizando las reglas de derivación.

c) $f(x) = \frac{3(x^2-4)}{x-2}$.

d) $f(x) = ln(x + 1) \cdot 10^x$ utilizando las reglas de derivación.

Ejercicio 3 EV. (Adaptado de Almansa et al., 2015) Asocia cada función de la izquierda con la correspondiente representación gráfica de la derecha.

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$	

$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$	
$f(x) = ln\,(x^2 + 1)$	
$f(x) = \frac{x^3}{5} - x$	
$f(x) = x^4$	

Ejercicio 4 EV. Se lanza una pelota desde cierta altura, de modo que si graficamos su recorrido, se dibuja una función de segundo grado. Sabemos que en el instante 0 de tiempo, la pelota se lanza desde 1 metro de altura. Además, sabemos que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, -1)$ vale 0. ¿Cuál es la ecuación que describe el movimiento?

Ejercicio 5 EV. ¿Verdadero o falso? Justifica todas tus respuestas y pon algún ejemplo si fuese necesario.

a) La tasa de variación media de la función $f(x) = 4x - 7$ en cualquier intervalo es siempre 7.

b) Si una función polinómica es creciente en un intervalo, entonces la tasa de variación media es positiva en ese intervalo.

c) La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

d) La recta tangente a una función en un punto no puede cortar a dicha curva en otro punto cualquiera.

e) Si $f'(3) > 0$, entonces f es creciente en el punto de abscisa 3.

f) Toda función continua es derivable.

g) La T.V.I en el punto a es la derivada de la función en ese punto: $f'(a)$.

h) Existe alguna función que cumple $f(x) = f'(x)$.

I.2. Aspectos evaluables con cada una de las preguntas de la prueba escrita

A continuación, en la Tabla 6 se muestra una relación entre los ejercicios propuestos y los diferentes aspectos evaluables. Estos aspectos son:

- Los campos de problemas, técnicas y tecnologías que queremos evaluar.
- Los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje pertenecientes a la Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. La descripción de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje utilizados para evaluar las preguntas de la prueba escrita, se pueden encontrar en el Anexo II.

Ejercicio	Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías	Estándares de aprendizaje
Ejercicio 1 EV.	CP1, CP2	T1, T3	TEC1, TEC3, TEC4	Est.MA.1.2.1.
Ejercicio 2 EV.	CP5	T5	TEC4, TEC6	Est.MA.3.3.1.

Ejercicio 3 EV.	CP6	T6	TEC7, TEC8, TEC9, TEC10	Est.MA.3.4.1.
Ejercicio 4 EV.	CP2	T2	TEC2	Est.MA.1.2.1.
Ejercicio 5 EV.	CP1, CP2, CP3, CP4, CP6, CP7	T1, T2, T3, T4.1, T6	TEC1, TEC2, TEC3, TEC5, TEC7, TEC8, TEC9, TEC10	Est.MA.1.2.4.

Tabla 6. Aspectos evaluables en cada ejercicio de la prueba escrita.

I.3. Respuestas esperadas de los alumnos

En esta sección se van a comentar algunas de las respuestas (correctas o incorrectas) que se puede esperar que contesten y piensen los alumnos durante la prueba escrita de evaluación. En el Anexo III se pueden consultar las respuestas correctas a dicha prueba.

Ejercicio 1 EV. Se espera que los alumnos en el apartado a) sean capaces de identificar que justamente lo que se les está pidiendo es la $T.V.M\ [1,2]$ y a pesar de que resuelvan bien el apartado, seguramente no todos identifiquen el concepto. Los alumnos también pueden cometer errores al escribir las medidas de la solución, ya que en este problema son centímetros/segundos pero ellos están habituados a hablar de velocidades en metros/segundos o kilómetros/hora. Se espera que todos los alumnos entiendan cómo relacionar la representación gráfica y la representación tabular para rellenar la tabla del apartado b). Para responder sobre la velocidad en el instante $t = 1$, puede que algún alumno realice su propia aproximación considerando un intervalo pequeño alrededor del punto en cuestión y también puede ser que algún alumno no sepa contestar esta cuestión si no ha entendido durante las sesiones en el aula lo que es el incremento.

Ejercicio 2 EV. En el apartado a) el primer error que pueden cometer es no acordarse de la definición de función derivada. Además, también es posible que algún alumno no sepa cómo resolver la indeterminación 0/0. En el apartado b) los alumnos no deberían tener dificultades. En el apartado c) es en el que más abiertas están las opciones de resolución. Habrá alumnos que decidan resolverlo mediante la definición (es probable que algún alumno cometa errores en los cálculos algebraicos) y habrá otros alumnos que decidan resolverlo aplicando la derivada de un cociente. La idea es que algún alumno, previamente a ponerse a derivar la función, factorice el numerador para así simplificar un factor con el denominador para así tener que derivar una función mucho más sencilla. En el apartado d) es en el que posiblemente los alumnos encontrarán más complicado por el simple hecho de que son funciones menos trabajadas. Esto será debido a que a lo mejor no se acuerdan de cómo se deriva un logaritmo neperiano o una función potencial.

Ejercicio 3 EV. En las sesiones de clase se han trabajado ejercicios en los que se han relacionado la expresión algebraica de una función con la expresión gráfica de su derivada. Esto puede conllevar un obstáculo si algún alumno no lee bien el enunciado y presupone que las gráficas corresponden a las derivadas en lugar de a la propia función, aunque se espera que no sea así. El ejercicio está pensado para que los alumnos realicen un estudio de cada función y analicen sus máximos y mínimos y también sus intervalos de crecimiento y decrecimiento para luego poder representarlas e identificar con cuál se corresponde.

Ejercicio 4 EV. Este ejercicio requiere de una alta comprensión por parte de los alumnos. Lo primero que tienen que saber es qué forma tiene una función de segundo grado genérica y saber derivarla correctamente, lo cual se espera que todos los alumnos sepan. Una de las cosas que tienen que tener claras es que las coordenadas de un punto son en realidad $(a, f(a))$. También tienen que comprender el significado geométrico de la pendiente de la recta tangente en un punto e identificar que coincide con la función derivada en ese punto para así poder expresar algebraicamente dicha condición. Se espera que todos los alumnos que hayan conseguido plantear correctamente el ejercicio, resuelvan los sistemas de ecuaciones correctamente y sin equivocaciones en el cálculo.

Ejercicio 5 EV. Este último ejercicio de la evaluación escrita está pensado para hacer un breve repaso de los conceptos más importantes de la unidad didáctica. De modo que se espera que los alumnos reflexionen y así el docente pueda analizar los puntos fuertes y débiles. Los alumnos tienen que conocer y entender las relaciones que existen entre la tasa de variación media, la tasa de variación instantánea, la pendiente de la recta tangente y la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. También se pretende hacer hincapié en la relación que existe entre la gráfica de función y su expresión algebraica.

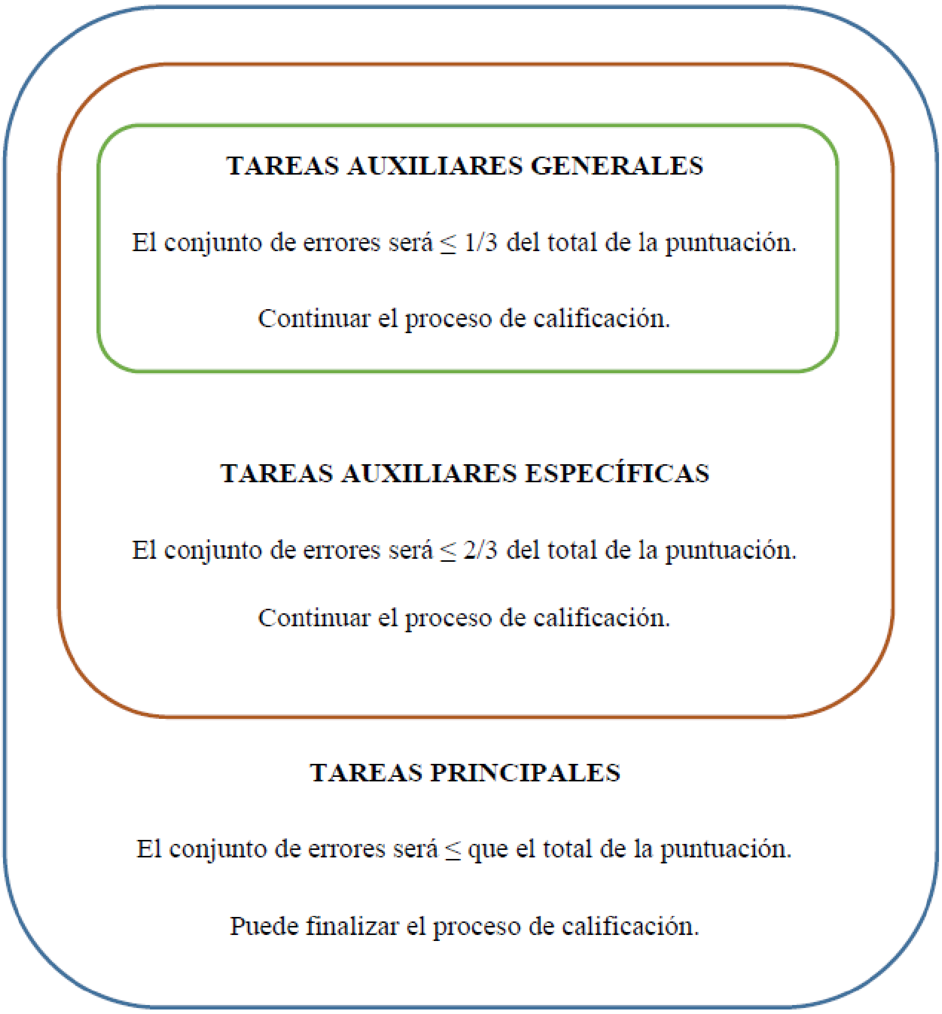
I.4. Criterios de calificación que se van a emplear

La evaluación es importante a la hora de valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta evaluación será de carácter formativo y deberá ser continuada. Es decir, a la hora de realizar la evaluación, no solamente se tendrá en cuenta la calificación de la prueba escrita sino que también se calificará: el seguimiento y la observación realizada por el docente a lo largo de toda la unidad didáctica, la participación y el comportamiento de los alumnos, la revisión del cuaderno, las tareas y trabajos realizados tanto en el aula como en casa. La ponderación que se va a seguir para calificar la unidad didáctica es la siguiente:

- ➔ Prueba escrita: 65%
- ➔ Trabajos en grupo y tareas: 25%
- ➔ Cuaderno: 5%
- ➔ Comportamiento y participación: 5%

Se presenta a continuación una propuesta de calificación para la prueba escrita (mostrada en la Sección I.1) basada en un modelo de penalización de errores sustentado en la teoría curricular interpretativa (Sierra y Pérez, 2007).

En primer lugar, se muestra una representación gráfica del modelo:



En segundo lugar, se muestra una breve descripción de la tipología y jerarquización de las tareas. Los ejercicios y problemas propuestos en las pruebas de matemáticas, exigen al alumnado la realización de tareas de distinta naturaleza (Gairín, Muñoz y Oller, 2012).

a) TAREAS PRINCIPALES: Las tareas principales establecen cuál es el objetivo principal de la calificación.

b) TAREAS AUXILIARES: Las tareas auxiliares son aquellas de las que se pueden obtener informaciones para resolver el problema.

b.1) TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS: Este tipo de tareas instrumentales sirven para conseguir resolver un problema en cual existen tareas principales pero asociadas a unos contenidos más específicos.

b.2) TAREAS AUXILIARES GENERALES: Son todas aquellas tareas (algebraicas, aritméticas, geométricas, etc) que el alumno ha aprendido a resolver en cursos anteriores.

En tercer lugar, se muestra una descripción del sentido y alcance del modelo (Gairín, Muñoz y Oller, 2012).

- El conjunto de todos los errores cometidos por un alumno al realizar tareas auxiliares generales, no puede suponer una bajada superior al 1/3 del total de la puntuación, ya que se entiende que el conjunto de estas tareas no es el principal objetivo del problema o ejercicio, ni son tareas determinantes para valorar la comprensión de los contenidos específicos del temario a evaluar. Como todavía quedan 2/3 de puntuación, el proceso de calificación debe continuar.
- El conjunto de todos los errores cometidos por un alumno al realizar tareas auxiliares específicas, no puede suponer una bajada superior al 2/3 del total de la puntuación, ya que el objetivo fundamental es que se realicen correctamente los contenidos específicos. El corrector debe continuar calificando el ejercicio tomando como punto de partida los resultados producidos al calcular erróneamente.
- El conjunto de todos los errores cometidos por un alumno al realizar las tareas principales, pueden suponer hasta un 100% menos de la calificación total del ejercicio, ya que se entiende que este tipo de contenidos constituye el objetivo principal de la calificación. El corrector puede decidir si continúa el proceso de calificación o si la da por concluido, dependiendo de cómo de importantes considere él estos errores.

Por último, comentar que este modelo deja un amplio margen de actuación a los correctores en cuanto a penalizar cada error, aunque como la penalización de errores está acotada por intervalos de amplitud 1/3, las correcciones son más justas porque se da mayor importancia a los contenidos específicos.

J. Bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97–140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M., Batanero, C. & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. Lester K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 1011-1049). Charlotte, NC: Information Age.

Azcárate, C. (1992). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Bernini López-Lara, M., Azcárate Giménez, C., Muriel Durán, F. J., Ramírez Martínez, Á., Usón Villalba, C. L., y Pérez Bernal, L. (1997). Aspectos didácticos de Matemáticas. 6. Zaragoza: Universidad de Zaragoza, ICE.

Buitrago García, L., Benavides Velásquez, O. O., Perdomo Pedraza, A.C., Castaño León, J. O., Morales Jaime, D. J., & Gamboa Sulvara, J. G. (2013). Los Caminos del Saber Matemáticas 11. Bogotá: Santillana.

Bosch, M. y Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. Enseñanza de las ciencias, 12 (3).

Camargo, L. y Guzmán, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón*. Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Cantoral, R. (1991). Proyecto de investigación: formación de la noción de función analítica. *Mathesis* 7 (2), 223-239.

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2014). *Justificación de las reglas de derivación en libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE*. Universidad de Valladolid.

Font, V. (2000) Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x): el caso de la función seno. *Uno: revista de didáctica de las matemática*s. 25, 21-40.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática 16* (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

Gavilán, J. M. (2006). El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva. *Educación Matemática*, 18(2), 167-170.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007) *The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Gómez López, M. (2013). *Introducción de la derivada (1º Bachillerato).* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Zaragoza.

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula abierta*, 47(4), 449-462.

Grabiner, J. V. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*. Vol. 56. No. 4. pp. 195-206.

Guzmán Sancho, I. (2017). *Introducción a la derivada en el primer curso de Bachillerato.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Zaragoza.

Hidalgo Paredes, H. D., Mera Gutiérrez, E. A., López, J. & Patiño Giraldo, L. E. (2015). *Aprendizaje basado en problemas como potencializador del pensamiento matemático*. Universidad de Manizales, 15(1), 299-312.

López-Esteban, C. (2019). La institucionalización del análisis matemático en el siglo XVIII a través de libros históricos y su reflejo en la enseñanza para Educación Secundaria e*n España a través del análisis de manuales*. Universidad de Salamanca.

Jarauta Baigorri, M. (2020). *Derivadas: una propuesta didáctica para Matemáticas I.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Zaragoza.

Pereira Sáinz, L. (2021). *Diseño de una propuesta didáctica sobre derivadas en 1° de Bachillerato.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Zaragoza.

Pochulu, M., & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *14*(3), 361-394.

Ponce Campuzano, J. C. (2015). *Breve historia del concepto de derivada*. University of Queensland [https://www.researchgate.net/publication/270684035_Breve_historia_del_concepto_de_derivada]

Ribas Corvinos, M. (2021). *Introducción a la enseñanza de la derivada: una propuesta didáctica.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Zaragoza.

Sánchez Castro, H. E. (1996) Método de máximos y mínimos de Fermat. *EUREKA, 7.* [https://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eure-uaq/n07/en0705.html]

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la Matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 11(2), 267-296.

Sierra, B. y Pérez, M. (2007). La relación teoría-práctica: una clave epistemológica de la didáctica. *Revista de Educación*, 342, pp. 553-576.

Vargas, M.F., Fernández-Plaza, J.A y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2020) La derivada en los libros de texto de 1º de bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. AIEM – Avances de Inve*stigación en Educación Matemática*, 18, 87.102.

Vázquez Buenfíl, A. (2008). Consideraciones sobre el aprendizaje basado en problemas (ABP) en matemáticas. *Facultad de educación de la universidad Autónoma de Yucatán*, 11(35), 73-83.

Vrancken, S., y Engler, A., (2013) Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *UNIÓN. Revista iberoamericana de educación matemática*. 33, pp. 53-70.

Anexos

Anexo I.

A continuación, se pueden observar tres tablas comparativas en las que el 'tick' indica si el campo de problema, técnica o tecnología aparece en el libro y se deja la casilla vacía en caso contrario. En la Tabla 1 se muestra una comparativa entre los campos de problemas que se proponen y se enseñan en los diferentes libros de texto. En la Tabla 2 y en la Tabla 3 se analizan las técnicas y tecnologías respectivamente.

	ANAYA	SM	Santillana	Edelvives
Tasa de variación media	✔	✔	✔	✔
Tasa de variación instantánea				✔
Definición de derivada en un punto	✔	✔	✔	✔
Definición de función derivada	✔	✔	✔	✔
Reglas de derivación y regla de la cadena	✔	✔	✔	✔
Recta tangente	✔	✔	✔	✔
Funciones no derivables				✔
Crecimiento/decrecimiento, máximos/mínimos	✔	✔	✔	✔
Problemas de optimización			✔	
Representación gráfica de funciones	✔	✔		
Aplicaciones de la derivada segunda		✔	✔	

Tabla 1. Campos de problemas analizados en las diferentes editoriales.

	ANAYA	SM	Santillana	Edelvives
Calcular la T.V.M de una función en un intervalo gráficamente	✔	✔	✔	✔
Calcular la T.V.M de una función analíticamente	✔	✔	✔	✔
Calcular la T.V.I				✔
Calcular la derivada de una función en un punto gráficamente	✔		✔	✔
Calcular la derivada de una función en un punto analíticamente	✔	✔	✔	✔
Calcular la derivada de una función con la definición	✔	✔	✔	✔
Calcular derivadas de funciones básicas	✔	✔	✔	✔
Reglas de derivación para operaciones	✔	✔	✔	✔
Derivada de funciones inversas			✔	
Regla de la cadena	✔	✔	✔	✔
Definición de pendiente	✔	✔	✔	
Recta tangente	✔	✔	✔	✔
Estudiar la continuidad (y derivabilidad) de una función			✔	✔
Optimización			✔	
Representación gráfica de funciones	✔	✔		

Tabla 2. Técnicas analizadas en las diferentes editoriales.

	ANAYA	SM	Santillana	Edelvives
Definición de T.V.M	✓	✓	✓	✓
Definición de T.V.I				✓
Ecuación de la recta tangente a una función en un punto	✓	✓	✓	✓
Propiedades de los límites y resolución de indeterminaciones	✓	✓	✓	✓
Definición de derivada en un punto	✓	✓	✓	✓
Reglas y propiedades de derivación	✓	✓	✓	✓
Definición de continuidad de una función en un punto			✓	
Definición de máx/mín, creciente/decreciente	✓		✓	
Representación de funciones	✓	✓		

Tabla 3. Tecnologías analizadas en las diferentes editoriales.

Anexo II.

A continuación se muestran los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje (nombrados en la Sección I.2) que se utilizan para evaluar las preguntas de la prueba escrita, la cual se puede ver en la Sección I.1.

BLOQUE 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Criterios de evaluación:

Crit.MA.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

Estándares de aprendizaje:

Est.MA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).
Est.MA.1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.

BLOQUE 3: Análisis.

Criterios de evaluación:

Crit.MA.3.3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.
Crit.MA. 3.4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.

Estándares de aprendizaje:

Est.MA.3.3.1. Calcula la derivada de una función, usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
Est.MA.3.4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.

Anexo III.

A continuación se muestran las soluciones de los diferentes ejercicios de la prueba escrita de evaluación.

Solución: Ejercicio 1 EV.

a) Para determinar la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos, tenemos que calcular:

$$T.V.M\,[1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{60-15}{1} = 45 \text{ cm/segundos.}$$

b) Rellenamos la siguiente tabla:

Δt	0’8 seg	0’6 seg
Intervalo (1, 1 + Δt)	(1, 1’8)	(1, 1’6)
Espacio recorrido	$f(1'8) - f(1) = 35$	$f(1'6) - f(1) = 25$
Velocidad promedio	$\frac{35}{0'8} = 43'75$	$\frac{25}{0'6} = 41'6$

Δt	0’4 seg	0’2 seg
Intervalo (1, 1 + Δt)	(1, 1’4)	(1, 1’2)
Espacio recorrido	$f(1'4) - f(1) = 15$	$f(1'2) - f(1) = 5$
Velocidad promedio	$\frac{15}{0'4} = 37'5$	$\frac{5}{0'2} = 25$

c) La velocidad de la bola en el segundo 1 se aproximará a 25 cm/segundos, ya que lo que tenemos que hacer es que Δt sea próximo a 0 para así tener el intervalo (1, 1 + Δt) con Δt → 0. Si tuviéramos la expresión analítica de la función $f(x)$ de la gráfica, podríamos calcular $T.V.I\,(1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1+\Delta t)-f(1)}{1+\Delta t}$ para saber la velocidad exacta en el segundo 1.

Solución: Ejercicio 2 EV.

a) Calculo la derivada de $f(x) = x^2 - 1$ utilizando la definición de función derivada.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2-1]-(x^2-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2+h^2+2xh-1-x^2+1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2+2xh}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h \to 0} h + 2x = 2x.$$

b) Calculo la derivada de $f(x) = x^4 + 3x^3 - \sqrt{x}$ utilizando las reglas de derivación.

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) Calculo la derivada de $f(x) = \frac{3(x^2-4)}{x-2}$ y elijo hacerlo utilizando las reglas de derivación. Pero primero, voy a simplificar la función:

$$f(x) = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 3(x+2) = 3x + 6$$

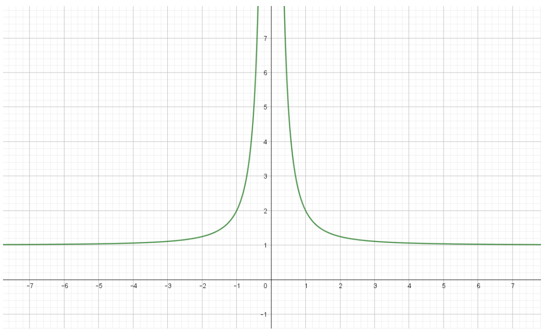
$$f'(x) = 3$$

d) Calculo la derivada de $f(x) = ln\,(x+1) \cdot 10^x$ utilizando las reglas de derivación.

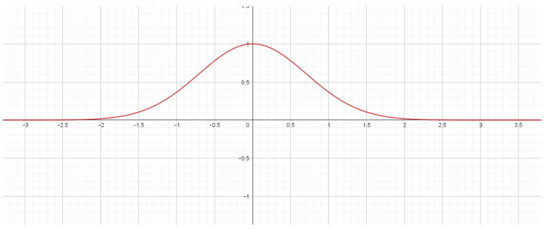
$$f'(x) = (\frac{1}{x+1} \cdot 10^x) + ln(x+1) \cdot x \cdot 10^{x-1} \cdot 0 = \frac{10^x}{x+1}$$

<u>Solución: Ejercicio 3 EV.</u>

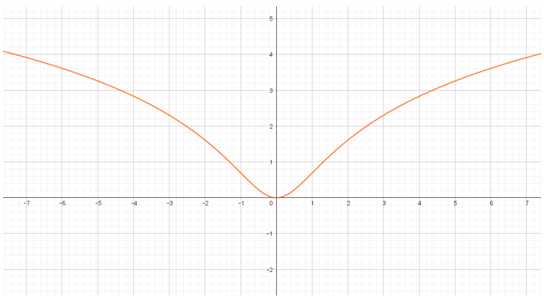
$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ →



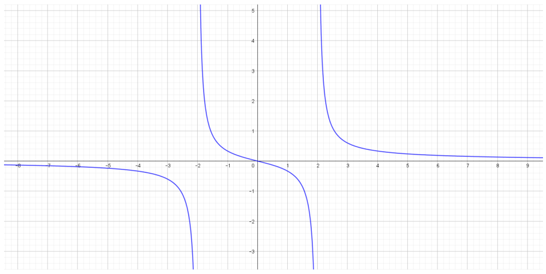
$f(x) = e^{-x^2}$ →



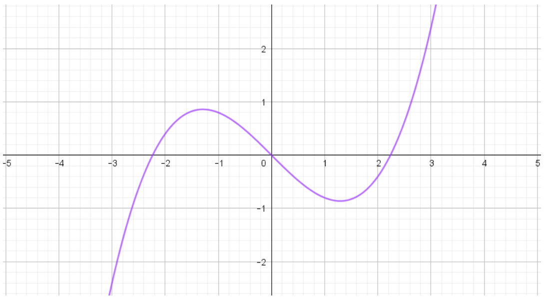
$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ →



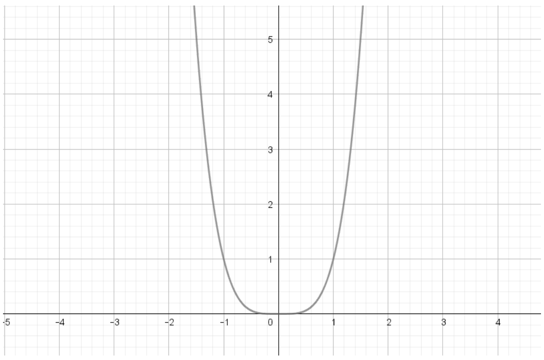
$f(x) = ln\,(x^2 + 1)$ $\rightarrow$



$f(x) = \frac{x^3}{5} - x$ $\rightarrow$



$f(x) = x^4$ $\rightarrow$



<u>Solución: Ejercicio 4 EV.</u>

Tenemos que hallar una función de segundo grado, la cual será de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, por lo que su derivada será $f'(x) = 2ax + b$.

* Sabemos que la función pasa por el punto $(0, 1)$.

$f(0) = 1.$

$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$

De donde se obtiene que $c = 1$.

*Sabemos que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, -1)$ vale 0.

Es decir, $f'(2) = 0$.

Como además, $f'(2) = 2a \cdot 2 + b = 4a + b$.

De donde se obtiene que $4a + b = 0$, o equivalentemente $b =- 4a$.

*De la condición anterior se deduce que la función pasa por $(2, - 1)$.

$f(2) =- 1.$

$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c.$

De donde se obtiene que $4a + 2b + c =- 1$. Sustituimos $c = 1$ y $b =- 4a$ y obtenemos $4a + 2(- 4a) + 1 =- 1$, y resolviendo la ecuación se obtiene $a = \frac{1}{2}$. Luego $b =- 4 \cdot \frac{1}{2} =- 2$.

Por lo tanto, la función de segundo grado que cumple las condiciones pedidas es: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

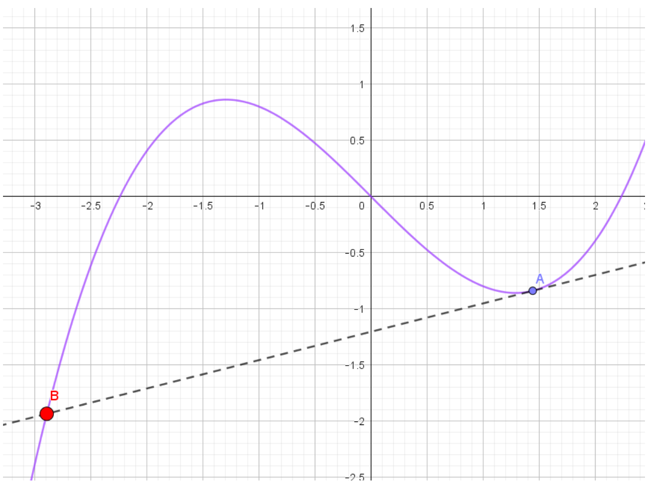
<u>**Solución: Ejercicio 5 EV.**</u>

a) Falso. La función $f(x) = 4x - 7$ es una función lineal de la forma $f(x) = mx + n$, siendo $m = 4$ y $n =- 7$. De modo que la T.V.M de $f(x)$ en cualquier intervalo es siempre 4 porque por definición la T.V.M de $f(x)$ en $[a, b]$ es la pendiente del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b,f(b))$.

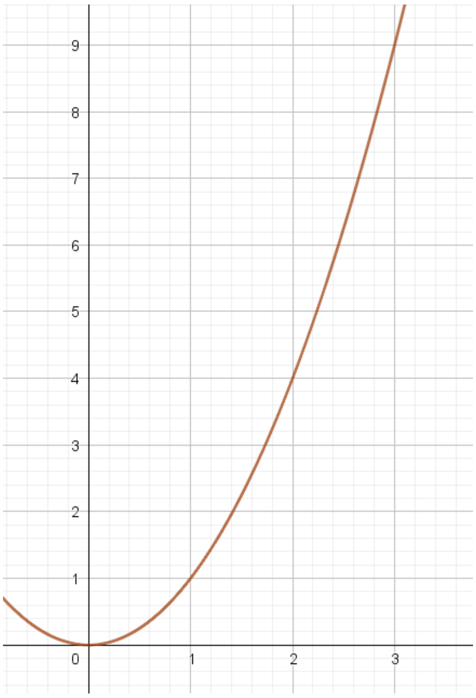
b) Verdadero. Una función creciente tiene pendiente positiva, y como ya se ha explicado en el apartado a), la T.V.M de $f(x)$ en $[a, b]$ es la pendiente del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b,f(b))$.

c) Verdadero, por definición.

d) Falso. Pongamos un ejemplo para ver que la recta tangente a función en un punto sí puede cortar a dicha curva en otro punto cualquiera. Por ejemplo en la siguiente gráfica se ha trazado la recta tangente a la función por el punto A y se puede ver que sí que corta a la función en el punto B.



e) Verdadero. Por ejemplo, tomamos la función $f(x) = x^2$ cuya derivada es $f'(x) = 2x$. Entonces, $f'(3) = 2\cdot3 = 6 > 0$ y efectivamente f es creciente en el punto de abscisa 3 tal y como se puede ver en la gráfica de la función.



f) Falso. Por ejemplo la función $f(x) = |x - 1|$ es continua pero no es derivable.

g) Verdadero. La T.V.I. se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, lo cual coincide con la interpretación geométrica de la función derivada en un punto.

h) Verdadero. La función $f(x) = e^x$ tiene como derivada $f'(x) = e^x$.