Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Un modelo de duopolio verticalmente diferenciado con delegación estratégica: análisis estático y dinámico

Duopoly vertical product differentiation model with strategic delegation: static and dynamic analysis

Autor:

José Antonio Pérez Mínguez

Directores:

Joaquín Andaluz Funcia y Gloria Jarne Jarne

Facultad de Economía y Empresa

2022

Un modelo de duopolio verticalmente diferenciado con delegación estratégica: análisis estático y dinámico

Autor: José Antonio Pérez Mínguez

Directores: Joaquín Andaluz Funcia y Gloria Jarne Jarne

Resumen:

En este trabajo se estudia la competencia en precios en un modelo de duopolio verticalmente diferenciado y en presencia de delegación estratégica, tanto desde una perspectiva estática como dinámica.

El análisis estático, permite demostrar que la decisión óptima de los propietarios de las empresas consiste en fijar una remuneración a sus gestores basada en la combinación de beneficios y ventas que les incentive a comportarse de forma poco agresiva.

La incorporación de la perspectiva temporal en el estudio de la competencia en precios se realiza mediante la adopción de distintos esquemas de expectativas en la toma de decisiones de los gerentes, en un contexto de racionalidad limitada. Ello permite demostrar que, si ambas empresas adoptan expectativas adaptativas, el equilibrio de Bertrand-Nash será siempre localmente asintóticamente estable. Si al menos una de las empresas sigue la regla del gradiente, existe la posibilidad de que el equilibrio pierda su carácter atractor a medida que aumenta su velocidad de ajuste, surgiendo dinámicas cada vez más complejas. También se demuestra que la existencia de delegación estratégica y diferenciación vertical del producto puede afectar a la estabilidad dinámica del equilibrio.

Abstract

In this paper, price competition is studied in a vertically differentiated duopoly model and in the presence of strategic delegation, from both a static and dynamic perspective.

Static analysis allows us to prove that the optimal decision of the firm owners consists of setting a remuneration for their managers based on the combination of profits and sales that leads them to behave in a non-aggressive way.

Incorporation of temporary perspective when studying price competition is carried out by adopting different expectations schemes in decision making by managers, in a bounded rationality context. This allows us to show that, if both firms adopt adaptive expectation rules, Bertrand-Nash equilibrium is found to be locally asymptotically stable. If at least one firm follows the gradient rule, there is a possibility that the equilibrium will lose its attractiveness as its speed of adjustment increases, giving rise to increasingly complex dynamics. It is also shown that the presence of strategic delegation and vertical product differentiation can affect the dynamic stability of the equilibrium.

Índice

1. Introducción

El campo de la economía industrial ha crecido mucho en las últimas décadas. La incorporación de la teoría de juegos a lo largo de la década de los 80 y la posterior implementación de técnicas econométricas de datos de panel han permitido ampliar lo que se conocía hasta ahora sobre el comportamiento de los mercados.

Sin embargo, existen cuestiones en las que profundizar. Entre los retos más destacados a los que se enfrentan los estudiosos de la economía industrial destacan preguntas como: (i) cómo afecta la organización interna de las empresas a su toma de decisiones; (ii) de qué manera se puede conjugar la existencia de decisiones estratégicas con la presencia de agentes con racionalidad limitada y (iii) cómo incorporar la dinámica al análisis de mercado.

A fin de profundizar en estas cuestiones, en este trabajo se ha desarrollado un modelo de duopolio en el que se pone el foco sobre tres aspectos: (i) la existencia de delegación estratégica dentro de las empresas; (ii) la presencia de productos diferenciados en el mercado y (iii) la introducción de la perspectiva temporal que permitirá estudiar el comportamiento dinámico de las variables de decisión.

En línea con este tercer aspecto, además de estudiar la existencia de los equilibrios, se quiere profundizar en la estabilidad dinámica de los mismos. Esto permite analizar qué dinámicas temporales pueden seguir las variables de decisión y qué condiciones se deben cumplir para que surjan dinámicas complejas. Además, en este trabajo se conjuga la diferenciación de producto con la existencia de delegación estratégica dentro de las empresas. De esta forma, se busca relajar el supuesto de que la estructura interna de las firmas no afecta a cómo estas se comportan en el mercado.

El trabajo se estructura de la siguiente forma: el apartado 2 ofrece una revisión de la literatura existente acerca de los aspectos antes mencionados: *delegación estratégica*, *diferenciación de producto* y *análisis dinámico*; en el apartado 3 se presenta los supuestos y fundamentos del modelo de duopolio que se ha desarrollado y se hace un análisis del mismo en un contexto estático; mientras que en el apartado 4 se introduce la perspectiva temporal mediante distintos sistemas de expectativas y se estudian las condiciones de estabilidad dinámicas de los equilibrios; por último, el apartado 5 refleja las principales conclusiones obtenidas.

2. Revisión de la literatura

2.1. Delegación estratégica

Tradicionalmente se consideraba que el objetivo fundamental de las empresas era maximizar su beneficio, entendiendo este como la diferencia entre ingresos y costes. Sin embargo, autores como Adolf Berle y Gardiner Means (1932) y, más adelante, Baumol (1959) pondrán en duda este supuesto.

Para Adolf Berle y Gardiner Means el capitalismo había evolucionado desde un *capitalismo competitivo* a una nueva forma de mercado que denominan *capitalismo gerencial*. La primera de las etapas se correspondería con las primeras fases de la industrialización y estaría caracterizada por pequeñas empresas donde el dueño realiza a su vez funciones de gerencia. Por el contrario, desde finales del siglo XIX se habría producido un aumento del tamaño de las empresas y una reducción de la competencia dentro de los mercados, desembocando esto en una separación entre la propiedad de la empresa y la gestión. Los propietarios de las grandes empresas serían inversores, que compran y venden acciones en mercados de valores; mientras que los gestores serían trabajadores profesionales que son contratados por parte de las empresas.

En línea con estos autores, William Baumol estudió las diferencias que existían entre las empresas gestionadas por gerentes profesionales y aquellas donde el dueño realiza la función de gerencia. Según afirma este autor, el objetivo de maximización del beneficio se circunscribe únicamente al ámbito competitivo; a diferencia de lo que sucede en el capitalismo gerencial, donde primaría maximizar las ventas.

Posteriormente, destacan las aportaciones de Robin Marris (1964), quien profundizó en los fundamentos del capitalismo gerencial, y Chandler (1990), que realizó un estudio empírico de los procesos de decisión de las principales empresas manufactureras de Gran Bretaña, USA y Alemania entre finales del XIX y mitad del XX.

Todos estos trabajos han permitido desarrollar una vasta literatura acerca de cuál es la relación existente entre los gerentes y los dueños de las empresas y cómo esto puede afectar a las decisiones que estas toman dentro de un mercado monopolístico u oligopolístico (Vickers, 1985; Fershtman y Judd, 1987; Sklivas, 1987; Gibbons y Murphy, 1990; Basu, 1995; Miller y Pazgal, 2002; Jansen et al., 2009; etc.).

A continuación, se abordará cómo se ha estudiado este fenómeno dentro de la literatura de economía industrial, qué se entiende concretamente por delegación estratégica, cómo puede afectar esto a las decisiones tomadas por parte de las empresas y, entre las diversas modelizaciones que existen para este fenómeno, cuáles se ha considerado para este trabajo.

En primer lugar, cabe definir qué conlleva esta bicefalia entre dueño del capital y gestión de la empresa. Atendiendo a autores como Fershtman y Judd (1987), el gerente sería aquel trabajador que se encuentra en el día a día de la empresa: observa la demanda, toma decisiones habituales acerca de costes, fija precios, tiene relación con los clientes … Es decir, sería aquella persona o conjunto de personas que toman decisiones rutinarias para el desenvolvimiento de la empresa. Dentro de una gran empresa, podemos pensar que se trataría de los jefes de sección de cada uno de los departamentos o de los comités sobre los que se ha delegado una responsabilidad. Es importante apreciar que no se está hablando de cualquier tipo de trabajador, sino de aquellos que tengan capacidad de decisión acerca de precios, cantidades, costes o calidad del producto.

Por otro lado, los dueños del capital se pueden entender bien como los accionistas de una empresa que no están en el día a día de esta o bien como un consejo de dirección o director ejecutivo. La diferencia respecto a los gerentes está en que su rango de acción se ciñe a las decisiones estratégicas de medio y largo plazo – como puede ser acometer una fuerte inversión o fijar una política de empresa- y que por un tema de funcionalidad e información no pueden participar en todas las decisiones habituales de una empresa.

Dada la diferencia que existe entre gerencia y propiedad, la relación contractual entre gerentes y dueños va a ser un aspecto clave en cómo se comportan las empresas en los mercados. Incluso, como indican Fershtman y Judd (1987) y Miller y Pazgal (2002) no hay por qué pensar únicamente en las cláusulas que se pueden fijar en un contrato, sino que se puede tomar un enfoque más abstracto. Por ejemplo, en ocasiones los gerentes tienen diferentes perfiles y puede ser más adecuado contratar a uno u otro en función del tipo de mercado al que se enfrenten.

Por lo tanto, merece la pena profundizar sobre los tipos de contrato que tienen los gerentes y cómo eso afecta al equilibrio de mercado. Así se puede dar el caso de que fijándose objetivos no basados en maximizar beneficios se alcancen situaciones más ventajosas para los dueños del capital (Jansen et al., 2009).

La modelización que se ha dado en la literatura para este fenómeno ha sido diversa, aunque generalmente se ha asumido que los incentivos fijados sobre los gerentes se basarían en una combinación lineal de beneficios y alguna otra variable. Si solo se tuvieran en cuenta los beneficios, se trataría de la visión tradicional neoclásica del objetivo de las empresas.

Como variables complementarias a la remuneración sobre beneficios se pueden tomar varias opciones: cantidades vendidas, ingresos, cuota de mercado, etc. En este trabajo se han tenido en cuenta tres de los cuatro casos que presentan Jansen et al. (2008):

Remuneración en base a beneficios: $U_i = \pi_i$

Remuneración basada en beneficios y ventas: $U_i = \pi_i + \gamma_i q_i$ donde $\gamma_i \in [-1,1]$ (1)

Remuneración basada en beneficios relativos: $U_i = \pi_i - \beta_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \pi_j$ [1] donde $\beta_i \in [0,1]$

donde U_i es la utilidad de los gerentes de la empresa i.

Al asumir que el parámetro γ_i puede tomar tanto valores positivos como negativos, se entiende que los gerentes pueden ser remunerados tanto por incrementar sus ventas como por reducirlas. Esto significa que los dueños tienen la posibilidad de influir en el comportamiento más o menos agresivo de los gerentes.

Sklivas (1987) demuestra que, si la competencia es a través precios, la fijación de $\gamma_i < 0$ permite reducir la competencia de mercado. En cambio, en el caso de competir en cantidades, autores como Jansen et al. (2009), Fershtman y Judd (1987) o el propio Sklivas (1987) demuestran que sería más ventajoso para las empresas fijar una estrategia opuesta ($\gamma_i > 0$), ya que así sus gerentes tendrían un comportamiento más agresivo.

De igual forma, la explicación que se le da en la literatura a fijar $\gamma_i < 0$ no sería fijar unos incentivos implícitos, sino que se trataría de la existencia de incentivos por parte de las empresas para contratar gerentes con un perfil menos agresivo o más prudente y así reducir la competencia del mercado de forma artificial.

En contraposición al caso de γ_i, se ha fijado que β_i no puede tomar valores negativos. La razón de este supuesto sería que, para el modelo aquí planteado de competencia en precios, existen fuertes incentivos por parte de las empresas de fijar β_i lo más negativo posible y así llegar de forma natural a la situación de colusión. Situación que sería sancionada por los organismos en defensa de la competencia.

Respecto a la remuneración basada en beneficios relativos, dentro de la literatura existen diversos enfoques. Por un lado, Fershtman y Judd (1987) asumen que la fijación de este tipo de esquemas de beneficios no sería posible, ya que irían en contra de las leyes vigentes antimonopolios y en defensa de la competencia. Desde otro punto de vista, existe diversa

[1] La remuneración basada en beneficios relativos viene determinada por: $U_i = (1-\beta_i)\pi_i + \beta_i \left(\pi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \pi_j \right)$

literatura que refrenda que esta sería la forma más adecuada de modelizar el comportamiento por parte de las empresas (Miller y Pazgal ,2002; Jansen et al., 2009; Chirco et al.,2011; etc.). En especial, Miller y Pazgal (2002) hacen énfasis en que es posible que β_j sea menor que cero, ya que existen diversos sectores donde es típico contratar gerentes que tengan en cuenta la salud del sector y no solo de la empresa: *"la salud de la industria es esencial para el futuro de la firma"*.

En este trabajo se asume que este tipo de remuneración es posible, ya que reflejaría adecuadamente cómo interpretan los inversores la rentabilidad de una empresa -en función de los rendimientos respecto a la competencia-. No obstante, se establece que β_i debe ser mayor o igual que cero, porque si no, al producirse situaciones de colusión, los organismos en defensa de la competencia sancionarían esta conducta.

2.2. Diferenciación de producto

Las economías de mercado modernas se caracterizan por la existencia de mercados con múltiples marcas y productos diferenciados. De este modo, las empresas buscan incrementar su poder de mercado ofertando productos que satisfagan las necesidades heterogéneas de los consumidores; generando relaciones de fidelidad e interrelación a largo plazo entre clientes y oferentes.

La inversión en publicidad y el establecimiento de marcas reconocibles aminora los problemas de información asimétrica entre consumidores y productores (ver, entre otros, Grossman y Shapiro, 1984, Soberman, 2004 y Hamilton, 2009). Por otra parte, la existencia de preferencias heterogéneas entre los consumidores es la base de la diferenciación de producto. En términos generales, se distingue entre diferenciación horizontal –en características- y diferenciación vertical –en calidad-.

La diferenciación horizontal de producto conlleva que cada bien ofertado tiene unas características determinadas diferentes a las del resto y que no existe una clasificación objetiva unánime de los bienes de un mercado por parte de los consumidores. En términos formales, la literatura sobre diferenciación horizontal ha seguido principalmente dos líneas: por un lado, están los modelos *non-address*, fundamentados en el modelo de competencia monopolística de Chamberlin (1933), que suponen que el bienestar de los consumidores depende del número de variedades disponibles para el consumo; a mayor variedad de productos ofertados, mayor es el bienestar. Entre los trabajos más relevantes dentro de este campo se encuentra el modelo de competencia monopolística de Dixit y Stiglitz (1977) o el modelo de competencia en precios y cantidades de Singh y Vives (1984). Por otro lado, los modelos *address*, desarrollados a raíz de los trabajos de Hotelling (1929) y Lancaster (1966), asumen que cada consumidor tiene unos gustos específicos; de manera que elegirá aquel bien que más se adapte a su variedad ideal. Un ejemplo de este tipo de diferenciación son las diferentes variedades de yogures o de champú.

La diferenciación vertical de producto hace referencia a aquellos bienes donde sí existe una ordenación unánime de los productos de un mercado por parte de los consumidores; generalmente asociada a la calidad. En esta aproximación, si todos los bienes se ofertaran al mismo precio, todos los consumidores elegirían el bien de mayor calidad. Desde esta perspectiva destacan los trabajos seminales de Shaked y Sutton (1982), Gabszwicz y Thisse (1986), Choi y Shin (1992), Motta (1992, 1993), Wauthy (1996); además de aportaciones más modernas como los trabajos de Liu y Zhang (2013), dedicado a la introducción de la dinámica dentro de los modelos de oligopolio y Gabszewicz y Wauthy (2014), sobre competencia en el caso de la existencia de externalidades.

2.3. Introducción de la perspectiva temporal. Análisis dinámico

Los estudios actuales sobre oligopolio tienen su origen en los trabajos de Cournot (1838) y Bertrand (1883). Estos autores plantean una primera modelización de un duopolio donde las empresas toman decisiones de forma simultánea dado un contexto de información completa y perfecta. En el caso del modelo planteado por Cournot la variable de decisión sería la cantidad ofertada, mientras que en el modelo de Bertrand se competiría a través del precio.

Según estos modelos, dentro de los mercados existe una situación de equilibrio de Nash único donde, una vez se alcanza la situación de equilibrio, ninguno de los agentes tiene incentivos para desviarse unilateralmente del mismo, ya que cualquier mínimo cambio le llevaría a una situación peor que la de partida.

Este equilibrio de Nash podría interpretarse como el resultado de un proceso de ajuste basado en el supuesto de que cada empresa espera que su rival no modifique su decisión del periodo anterior (*Conjetura de Cournot o expectativas naïve*). De esta manera, si el mercado se encuentra fuera del equilibrio, aparecen incentivos que permitirían a las empresas incrementar sus beneficios a través de un cambio unilateral en alguna de sus variables de decisión. Dado que las empresas son optimizadoras del beneficio, el ajuste de un periodo a otro está determinado por las funciones de mejor respuesta. De esta manera, se desencadena un proceso de ajuste donde cada una de las empresas modificaría su variable de decisión de forma óptima dada la decisión de su competencia.

En general, este proceso de ajuste se puede interpretar como un proceso dinámico que dependerá de la escala de tiempo considerada y del esquema de expectativas adoptado por los agentes. Respecto a la escala de tiempo, en este trabajo se considera ‘tiempo discreto’ en la línea con la literatura sobre análisis dinámico de oligopolio.

Respecto a los esquemas de expectativas, en la literatura sobre racionalidad limitada se encuentran varios mecanismos de ajuste que se pueden agrupar principalmente en dos categorías. En primer lugar, están aquellos basados en la función de mejor respuesta: *expectativas naïve* y *expectativas adaptativas*.

En segundo lugar, se encuentran los esquemas de expectativas no basados en la función de mejor respuesta: entre los que destacan la *regla del gradiente* y la *aproximación local monopolista*. En este trabajo se opta por tomar dos de los cuatro sistemas de expectativas aquí nombrados: las expectativas adaptativas y la regla del gradiente. Para ver una explicación de la aproximación local monopolista se pueden revisar el trabajo de Bischi et al. (2007) o las aportaciones de Andaluz y Jarne (2019), Andaluz et al. (2020) y Andaluz et al. (2021).

A continuación, se realiza un breve repaso teórico de los fundamentos metodológicos de los sistemas de expectativas tratados en este trabajo. No obstante, en el apartado 4.1. se presenta una formulación analítica de estos procesos de ajuste para el modelo aquí desarrollado.

El sistema de expectativas adaptativas sigue la misma filosofía que las expectativas naïve, ya que los agentes económicos son conocedores de toda la estructura de mercado y no esperan que su rival modifique su decisión respecto a la que ha tomado en el periodo anterior. Sin embargo, este sistema de expectativas incorpora un proceso de aprendizaje dinámico donde las empresas tienen en cuenta lo que ha pasado en periodos anteriores e incorporan esta información a la hora de formular sus expectativas. De esta manera, en cada periodo las empresas eligen su variable de decisión en función de una corrección del error entre la decisión que tomaron en el periodo anterior y su función de mejor respuesta; formulándose por tanto un sistema de expectativas asimilable a un proceso de aprendizaje dinámico, aunque con algún tipo de rigidez, ya que se incorpora un error permanente.

La conocida como ‘regla del gradiente’ es un sistema de expectativas que intenta dar lugar a una concepción del agente económico más realista, que tenga en cuenta aspectos como la falta de información sobre diversos componentes del mercado o la dificultad que tienen los agentes económicos para procesar y seleccionar toda la información a su disposición. Esta regla de ajuste plantea que los agentes económicos a la hora de tomar decisiones no tendrían en cuenta cómo afecta su comportamiento sobre sus competidores, sino que lo que buscarían saber es cómo van a afectar estas decisiones a la evolución de su función objetivo.

Se trata por tanto de una regla de fijación de expectativas muy ligada a las ideas de agente económico planteadas por el premio Nobel en Economía Herbert Simon. Según este autor, los agentes económicos tienen como objetivo fundamental alcanzar su propio interés; no significando esto que estos actúen como un agente maximizador; ya que existirían costes de adquisición y procesamiento de la información. Por este motivo, Simon propone la idea de que los agentes lo que buscan es establecer rutinas que les permitan desenvolverse de una forma satisfactoria con el fin último de alcanzar unos objetivos previamente fijados. Esto significa que el ajuste de un periodo a otro vendría estimulado por una insatisfacción ante los resultados conseguidos (ver Simon en Crespo et al., 2005; Roncaglia, 2019). Para una revisión en profundidad de estos y otros sistemas de expectativas y sus connotaciones metodológicas ver Bischi et al. (2010).

Una vez se adopta un esquema de expectativas concreto se obtendrá un modelo dinámico que habrá que analizar con las técnicas de análisis dinámico cualitativo especificadas brevemente en el apartado 4 de este trabajo. De forma resumida, el análisis dinámico de cada uno de los modelos constará de dos partes. Por un lado, para cada modelo se determina el (o los) *estados de equilibrio* – o *estados estacionarios*-, entendiendo estos como aquella situación que una vez alcanzada, ante la ausencia de perturbaciones externas, se mantiene en el tiempo. Por otro lado, una vez se ha determinado un punto de equilibrio, se plantea si dicha situación es asintóticamente estable. A estas alturas de la explicación merece la pena detenerse en la pregunta ¿Qué significa el concepto de estabilidad?

Una posible explicación del concepto de estabilidad viene dada por Gandolfo (1976):

> *"El análisis de la estabilidad tiene como objeto el siguiente problema genérico: averiguar si, y bajo qué condiciones, las variables de un modelo económico dado, en un cierto momento, convergerán en el tiempo hacia sus respectivos valores de equilibrio, es decir, hacia el punto de equilibrio del modelo. Por lo tanto es indiferente, para esta finalidad, que se piense, bien que el modelo nunca ha estado en equilibrio con anterioridad, bien que llegó a un punto de equilibrio, del cual fuese desplazado por una perturbación ocasional"*

Entre los trabajos más destacados dentro de esta literatura destacan los trabajos seminales de Puu (1991 y 1998), Kopel (1996) y Agiza (1998 y 1999) sobre dinámicas complejas en modelos de oligopolio bajo competencia en cantidades. Asimismo, cabe destacar los estudios con sistemas de expectativas de racionalidad limitada de Bischi y Naimzada (2000), Agiza y Elsadany (2004) y Spiegles (2014).

Otra línea de investigación dentro de este campo es aquella destinada a analizar cómo afecta el número de firmas a la estabilidad del mercado. Matouk et al. (2018) desarrolla el análisis para cuatro empresas. Cerboni y Naimzada (2018) y Andaluz et al. (2020) lo extienden para el caso de n firmas. Cerboni y Naimzada encuentran que para un sistema de expectativas heterogéneas el número de empresas tiene un efecto ambiguo; mientras que Andaluz et al. lo que observan es que la influencia del número de empresas sobre la estabilidad depende del sistema de expectativas que sigan estas. Si las firmas siguen la regla del gradiente, el equilibrio es más estable cuando las empresas tienen poco poder de mercado. Al contrario, si lo que prima es la regla del monopolista local, entonces el equilibrio es más estable ante la presencia de poder de mercado elevado.

Además de lo hasta ahora mencionado, en esta literatura también se estudia cómo afecta la diferenciación de producto a la estabilidad del equilibrio; así como qué diferencias existen entre asumir expectativas homogéneas o heterogéneas.

Zhang et al. (2007) y Tramontana (2010) demuestran que, si una de las empresas sigue la regla del gradiente y otra expectativas naïve, entonces una mayor velocidad de ajuste de la empresa con racionalidad limitada aumentará la probabilidad de que el equilibrio sea inestable. Fanti y Gori (2012) prueban que, bajo el mismo sistema de expectativas heterogéneas, la introducción de un alto grado de diferenciación horizontal de producto reduce la estabilidad. Estos autores plantean un modelo de diferenciación vertical a través del cual muestran que, un incremento en la heterogeneidad de los consumidores aumenta la probabilidad de que aparezcan dinámicas caóticas (Fanti y Gori, 2013). Ahondando en el concepto de diferenciación de producto, Andaluz y Jarne (2015) analizan cómo este afecta a la estabilidad del equilibrio. Además, estos mismos autores presentan un artículo sobre estabilidad desde la perspectiva de diferenciación horizontal y vertical; tanto con expectativas homogéneas como heterogéneas (Andaluz y Jarne, 2018). Por último, Tramontana y Elsadany (2012) y Andaluz et al. (2017) profundizan en el concepto de estabilidad para el caso de un oligopolio con tres firmas y expectativas heterogéneas.

Una aportación diferente a las anteriores es el trabajo de Askar (2014). Este autor plantea un modelo Cournot-Bertrand con diferenciación horizontal de producto y un sistema de expectativas homogéneo, de manera que la probabilidad de que surjan dinámicas complejas se incrementa a medida que se reduce la racionalidad de los agentes económicos.

En el trabajo presentado en esta memoria se busca analizar las condiciones que garantizan la estabilidad asintótica local del equilibrio en un mercado donde la competencia es a través de precios, existe delegación estratégica dentro de las empresas y los productos se encuentran verticalmente diferenciados.

Para alcanzar este objetivo, se ha planteado un juego secuencial en tres etapas y, una vez resuelto, se ha dinamizado la última etapa; estudiando la estabilidad asintótica local del equilibrio bajo un contexto de tiempo discreto. Tal y como plantean Andaluz y Jarne (2019), se ha considerado la estabilidad bajo un sistema de expectativas homogéneas y heterogéneas, asumiendo como mecanismos de ajuste la regla de expectativas adaptativas y la regla del gradiente basada en la utilidad marginal de los gerentes.

3. Modelo estático

A continuación, se presentan los diferentes supuestos que dan lugar al modelo estático, los desarrollos analíticos llevados a cabo y las conclusiones obtenidas. Para facilitar la compresión del lector la explicación se estructura de la siguiente forma: el apartado 3.1. está destinado a la explicación de los supuestos que se asumen acerca del comportamiento de los consumidores. Los puntos 3.2. y 3.3. explican la estructura de oferta y de demanda. La sección 3.4. define las funciones de utilidad de los gerentes cuando existe delegación estratégica. El apartado 3.5. resume las etapas del juego secuencial y, finalmente, el apartado 3.6. resuelve el juego.

3.1. Consumidores

La existencia de diferenciación de producto precisa la fijación de una serie de supuestos acerca de cómo es el comportamiento de los consumidores. Para ello, se sigue el planteamiento desarrollado originalmente por Musa y Rosen (1978) y continuado por autores como Motta (1993) o Andaluz y Jarne (2015).

Para comenzar, se asume que en esta economía existen únicamente dos sectores. Un sector oligopolista, donde dos empresas producen un bien diferenciado en términos de calidad, y un sector competitivo en el cual se produce un bien homogéneo numerario. Como explican Musa y Rosen, el bien producido de forma competitiva representa todos aquellos bienes que no son el del mercado objeto de estudio.

Bajo este planteamiento, cada consumidor tendrá una función de utilidad hedonista diferente que dependerá de la cantidad consumida del bien homogéneo, la cantidad consumida del bien diferenciado, la calidad del bien diferenciado y sus propias preferencias por la calidad.

En este trabajo se asume que cada consumidor solo puede consumir una unidad del bien diferenciado y que no existe la posibilidad de discriminar precios entre consumidores. En concreto, cada consumidor tendrá una función de utilidad $u = u(x, s, v)$, donde x es la cantidad consumida del bien homogéneo, s es la calidad del bien diferenciado consumido y v es la valoración que el consumidor tiene por la calidad. La preferencia por la calidad queda restringida a una dimensión y se normaliza entre 0 y 1, $v \in [0,1]$; de manera que cada uno de los infinitos consumidores ocuparía un punto de esa línea según su preferencia por la calidad.

A su vez, cada consumidor debe tomar su decisión de consumo acogiéndose a una restricción presupuestaria $1 \cdot x + p \cdot 1 \leq y$, donde y es la renta disponible y p es el precio del bien verticalmente diferenciado. Si se toma un enfoque de equilibrio parcial donde el bien diferenciado representa una pequeña parte del total del gasto y el efecto renta es nulo, la función de utilidad de un individuo i-ésimo puede especificarse como:

$$u_i = u_i\left(v_i, s_j, p_j\right) = v_i s_j - p_j \qquad (2)$$

donde s_j y p_j representan la calidad y el precio del bien verticalmente diferenciado.

3.2. Oferta

El mercado oligopolista se compondrá de dos empresas, una que producirá un bien de calidad alta, que denotaremos como bien H - High-, y otra que producirá un bien de calidad baja, denotado por L -Low-. Por lo tanto, s_H representa la calidad del bien de calidad alta y s_L la calidad del bien de calidad baja, siendo siempre $s_H > s_L \geq 0$ y 0 el nivel de calidad mínimo exigido por los estándares que marca la legislación.

La elección de calidad por parte de las empresas se ha realizado en una etapa previa al desarrollo de este modelo; de manera que un parámetro δ indica la diferencia en calidad entre el bien de calidad alta y calidad baja.

$$\delta = s_H - s_L \qquad (3)$$

La diferenciación en calidad conlleva una serie de costes para las empresas que, en base al enfoque de Motta (1993), se supone que puede afectar por dos vías. Por un lado, se puede asumir que la diferenciación en calidad lleva aparejados unos costes fijos, consecuencia de realizar una inversión inicial en I+D+i, en publicidad o en inversión en capital, mientras que los costes variables son iguales entre las dos empresas.

Por otro lado, Motta (1993) también plantea el caso en el que no existe diferenciación por costes fijos y la diferencia en calidad se manifiesta a través de costes variables diferentes. Esto se corresponde con aquellos casos donde, para incrementar la calidad del producto, es necesario utilizar inputs de mayor calidad -contratar mano de obra más cualificada, materiales más caros o dar una atención personalizada al cliente-.

En este trabajo, se ha optado por plantear un modelo donde los costes fijos actúan como costes hundidos y, por tanto, no afectan a la fijación de precios; manteniéndose los costes marginales iguales para ambas empresas.

Dado este planteamiento, la función de beneficios para cada una de las empresas será la siguiente:

$$\begin{aligned} \pi_L &= \left(p_L - c \right) q_L \\ \pi_H &= \left(p_H - c \right) q_H \end{aligned} \quad (4)$$

donde q_L y q_H son las cantidades capturadas por cada una de las empresas.

3.3. Demanda

La demanda se compone de un conjunto de infinitos consumidores normalizados entre 0 y 1 que actúan de acuerdo con unas preferencias hedonistas definidas en (2). La competencia es a través de precios y, a diferencia de autores como Motta (1993) y Andaluz y Jarne (2015), se asume que el mercado se vacía completamente. Por consiguiente, cada consumidor debe de elegir entre consumir una unidad del bien de calidad alta o de calidad baja.

El supuesto de demanda completamente cubierta se puede interpretar como que estamos ante un bien de primera necesidad ineludible para el consumidor. A nivel analítico, asumir este supuesto permite obtener las funciones de demanda directas para cada una de las empresas.

Otra posible interpretación la dan Gabszwicz y Thisse (1986). Según estos autores, el supuesto de demanda completamente cubierta se relaciona con una disposición a pagar muy grande, consecuencia directa de una valoración por la calidad v muy alta y por tanto de un nivel de renta también alto.

Otra pregunta que puede surgir es por qué únicamente existen dos empresas para cubrir toda la demanda. Este supuesto es meramente formal y se basaría en la existencia de algún tipo de barrera a la entrada que impide la entrada de más empresas. No obstante, se podría ampliar el análisis a más firmas, como realizan Jansen et al. (2009), o incluso pensar en términos poblacionales en lugar de empresas, en línea con estudios evolutivos como los de Nelson y Winter (1982).

Teniendo en cuenta la función de utilidad de un consumidor i-ésimo (2), se denota v_{HL} como el consumidor indiferente entre elegir el bien de calidad alta y el de calidad baja. En términos formales, v_{HL} es igual a:

$$v_{HL} = \frac{p_H - p_L}{s_H - s_L} = \frac{p_H - p_L}{\delta} \quad (5)$$

La demanda capturada por la empresa de calidad alta es la diferencia entre el extremo superior -1- y el consumidor indiferente; mientras que la demanda ante la que se enfrenta la empresa de calidad baja es igual a la diferencia entre el consumidor indiferente y el extremo inferior, en este caso 0.

$$\begin{aligned} q_H &= 1 - v_{HL} = \frac{p_L - p_H + \delta}{\delta} \\ q_L &= v_{HL} - 0 = \frac{p_H - p_L}{\delta} \end{aligned} \quad (6)$$

3.4. Delegación estratégica

Los sistemas de incentivos planteados en (1) deben de incorporar las funciones de beneficio de (4). Consecuentemente, las funciones de utilidad de los gerentes quedarán determinadas por:

Remuneración en base a beneficios: $U_i = (p_i - c)q_i$ (7)

Remuneración basada en beneficios y ventas: $U_i = (p_i - c + \gamma_i)q_i$ (8)

Remuneración basada en beneficios relativos: $U_i = (p_i - c)q_i - \beta_i(p_j - c)q_j$ (9)

donde $\gamma_i \in [-1,1]$, $\beta_i \in [0,1]$, $i, j = L, H$, $i \neq j$,

3.5. Etapas del juego

Se plantea un juego secuencial en tres etapas con la siguiente estructura:

Etapa 1: los propietarios del capital deciden simultáneamente el esquema de incentivos entre (7), (8) y (9).

Etapa 2: suponiendo que han elegido los esquemas de incentivos (8) o (9), los propietarios del capital deciden de forma simultánea la remuneración de sus gerentes. Es decir, eligen el valor óptimo de γ_i o β_i.

Etapa 3: dadas la elección de las etapas anteriores, los gerentes compiten simultáneamente en precios.

La resolución del juego se lleva a cabo a través de la metodología de inducción hacia atrás (ver Cerdá et al., 2004). En la etapa 2 y 3 se resuelve un juego simultáneo continuo; mientras que, por el contrario, la etapa 1 se representa como un juego simultáneo discreto cuya forma normal viene dada por una matriz 3x3. La representación de esta primera etapa permite hallar un equilibrio de Nash en estrategias puras, que a su vez, será equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

En términos metodológicos, cabe destacar que en la primera etapa se asume que son los dueños los que fijan el sistema de bonus y los gerentes actúan como precio-aceptantes. No obstante, como indican Fershtman y Judd (1987), la remuneración de los gerentes podría llevarse a cabo a través de un proceso de negociación, donde el resultado final dependería del poder de negociación de cada una de las partes. En este trabajo, se opta por obviar esta alternativa, ya que de esta forma es posible formular un juego en tres etapas en lugar de dos juegos separados.

Otro aspecto por mencionar es que en este trabajo se supone que las empresas tienen completa flexibilidad a la hora de determinar el esquema de incentivo para sus gerentes. Sin embargo, tal y como explican Jansen et al. (2009), existe la posibilidad de que los sistemas de remuneración sean exógenos para las empresas o el mercado y la existencia de uno u otro sean consecuencia de un factor institucional difícilmente modificable a lo largo del tiempo. Incluso, si se piensa que los sistemas de remuneración corresponden a diferentes perfiles de trabajadores, esto podría significar que sólo existe un perfil determinado dentro del mercado de trabajo. Sea como fuere, aquí no se tiene en cuenta esta situación y, por tanto, se asume flexibilidad de elección por parte de los dueños de las empresas.

3.6. Resolución del juego

En esta sección se presenta la resolución del juego secuencial para los supuestos antes planteados. Como el lector puede considerar útil conocer de antemano los resultados del estudio, primero se anticipa cuál es el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del juego y después se plantea la resolución por inducción hacia atrás.

Proposición 1. Bajo los supuestos establecidos, en el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos ambas empresas remuneran a sus gerentes en base a beneficios y ventas; de manera que las empresas elegirán fijar una remuneración negativa sobre las ventas igual a $\gamma_L^* = -\frac{2\delta}{5}$ y $\gamma_H^* = -\frac{3\delta}{5}$. Además, en la situación de equilibrio, los precios, las cantidades y los beneficios serán iguales a $p_L^* = \frac{5c+4\delta}{5}$, $p_H^* = \frac{5c+6\delta}{5}$, $q_L^* = \frac{2}{5}$, $q_H^* = \frac{3}{5}$, $\pi_L^* = \frac{8\delta}{25}$ y $\pi_H^* = \frac{18\delta}{25}$.

Demostración

Para comenzar la resolución del juego secuencial por inducción hacia atrás se considera el caso en que en la 1ª etapa los dueños del capital han elegido una combinación de esquema de incentivos $(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H + \gamma_H q_H)$; es decir, la situación en que ambas empresas eligen remunerar a sus gerentes en base a una combinación de beneficios y ventas.

Resolución por inducción hacia atrás de $(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H + \gamma_H q_H)$

3ª Etapa: el gerente de cada empresa decide su nivel de precios dado el precio del rival. Esta etapa exige la resolución de un juego simultáneo equivalente al siguiente problema de optimización.

$$\begin{aligned} \underset{p_L}{Max} U_L &= U_L(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H) = p_L q_L - c q_L + \gamma_L q_L \\ \underset{p_H}{Max} U_H &= U_H(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H) = p_H q_H - c q_H + \gamma_H q_H \end{aligned} \tag{10}$$

Introduciendo (6) en (10), los problemas a resolver serán:

$$\begin{aligned} \underset{p_L}{Max} U_L &= U_L(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H) = (p_L - c + \gamma_L)\frac{p_H - p_L}{\delta} \\ \underset{p_H}{Max} U_H &= U_H(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H) = (p_H - c + \gamma_H)\frac{\delta + p_L - p_H}{\delta} \end{aligned} \tag{11}$$

La condición de primer orden permite obtener las funciones de mejor respuesta para cada una de las empresas:

$$\frac{\partial U_L(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H)}{\partial p_L} = 0 \rightarrow p_L = FMR_{L3}(p_H, \gamma_L, \gamma_H)$$
$$\frac{\partial U_H(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H)}{\partial p_H} = 0 \rightarrow p_H = FMR_{H3}(p_L, \gamma_L, \gamma_H)$$

donde FMR_{i3} representa la función de mejor respuesta de la empresa i en la etapa 3 del juego.

Derivando U_L y U_H respecto de p_L y p_H respectivamente se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_L(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H)}{\partial p_L} &= \frac{1}{\delta}(p_H - 2p_L + c - \gamma_L) \\ \frac{\partial U_H(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H)}{\partial p_H} &= \frac{1}{\delta}(-2p_H + \delta + p_L + c - \gamma_H) \end{aligned} \tag{12}$$

Igualando las expresiones de (12) a 0 se consiguen las funciones de mejor respuesta (FMR) de cada empresa

$$FMR_{L3} = p_L = \frac{1}{2}(-\gamma_L + c + p_H)$$
$$FMR_{H3} = p_H = \frac{1}{2}(-\gamma_H + c + p_L + \delta) \qquad (13)$$

A continuación, se comprueba mediante las condiciones de segundo orden que efectivamente las funciones de mejor respuesta maximizan la función objetivo de los gerentes de cada una de las empresas.

$$\frac{\partial^2 U_L(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H)}{\partial p_L{}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0$$
$$\frac{\partial^2 U_H(p_L, p_H, \gamma_L, \gamma_H)}{\partial p_H{}^2} = -\frac{2}{\delta} < 0 \qquad (14)$$

La intersección de las FMR define el equilibrio de Nash del subjuego de la 3ª etapa.

$$p_L(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{1}{3}(-2\gamma_L + 3c - \gamma_H + \delta)$$
$$p_H(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{1}{3}(-2\gamma_H + 3c - \gamma_L + 2\delta) \qquad (15)$$

Sustituyendo (15) en las funciones de demanda (6) se obtiene:

$$q_L = q_L(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{1}{3\delta}(\gamma_L - \gamma_H) + \frac{1}{3}$$
$$q_H = q_H(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{1}{3\delta}(\gamma_H - \gamma_L) + \frac{2}{3} \qquad (16)$$

De igual forma, sustituyendo (15) y (16) en la función de beneficios (4) se alcanzan los beneficios de equilibrio:

$$\pi_L = \pi_L(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{1}{9\delta}(-\gamma_H - 2\gamma_L + \delta)(-\gamma_H + \gamma_L + \delta)$$
$$\pi_H = \pi_H(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{1}{9\delta}(2\gamma_H + \gamma_L - 2\delta)(\gamma_H - \gamma_L + 2\delta) \qquad (17)$$

2ª Etapa: en la segunda etapa se resuelve un juego simultáneo en el cada propietario decide la remuneración de sus gerentes. Analíticamente, el problema de maximización de cada propietario es:

$$\underset{\gamma_L}{Max}\, \pi_L = \pi_L(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{1}{9\delta}(-\gamma_H - 2\gamma_L + \delta)(-\gamma_H + \gamma_L + \delta)$$
$$\underset{\gamma_H}{Max}\, \pi_H = \pi_H(\gamma_L, \gamma_H) = \frac{1}{9\delta}(2\gamma_H + \gamma_L - 2\delta)(\gamma_H - \gamma_L + 2\delta) \qquad (18)$$

El procedimiento de resolución es similar a la 3ª etapa. Primero se plantea las condiciones de primer orden para ambas empresas y se obtiene las funciones de mejor respuesta del subjuego; después, se comprueba a través de la condición de 2º orden que esas FMR maximizan el beneficio de las empresas y, por último, la intersección de las FMR permite alcanzar el equilibrio de Nash del subjuego de la 2ª etapa.

Las condiciones de primer orden para ambas empresas y las funciones de mejor respuesta del subjuego de la 2ª etapa son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_L(\gamma_L,\gamma_H)}{\partial \gamma_L} &= \frac{1}{9\delta}\left(\gamma_H - 4\gamma_L - \delta\right) = 0 \\ \frac{\partial \pi_H(\gamma_L,\gamma_H)}{\partial \gamma_H} &= \frac{1}{9\delta}\left(-4\gamma_H + \gamma_L - 2\delta\right) = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} FMR_{L2} &= \gamma_L = \frac{1}{4}(\gamma_H - \delta) \\ FMR_{H2} &= \gamma_H = \frac{1}{4}(\gamma_L - 2\delta) \end{aligned} \qquad (19)$$

Las condiciones que garantizan la existencia de máximo en esta 2ª etapa vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi_L(\gamma_L,\gamma_H)}{\partial {\gamma_L}^2} &= -\frac{4}{9\delta} < 0 \\ \frac{\partial^2 \pi_H(\gamma_L,\gamma_H)}{\partial {\gamma_H}^2} &= -\frac{4}{9\delta} < 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

Una vez está garantizada la existencia de máximo, la intersección de las FMR arroja la solución equilibrio de Nash del subjuego.

$$\begin{aligned} \gamma_L^* &= -\frac{2\delta}{5} \\ \gamma_H^* &= -\frac{3\delta}{5} \end{aligned} \qquad (21)$$

Sustituyendo (25) en las funciones de precios, cantidades y beneficios se obtienen los resultados equilibrio de Nash de la segunda etapa.

$$\begin{aligned} p_L^* &= c + \frac{4\delta}{5} \\ p_H^* &= c + \frac{6\delta}{5} \end{aligned} \qquad (22)$$

$$\begin{aligned} q_L^* &= \frac{2}{5} \\ q_H^* &= \frac{3}{5} \end{aligned} \qquad (23)$$

$$\pi_L^* = \frac{8\delta}{25}$$
$$\pi_H^* = \frac{18\delta}{25} \tag{24}$$

Las combinaciones de incentivos (π_L, π_H), $(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H)$ y $(\pi_L, \pi_H + \gamma_H q_H)$ son casos particulares de la remuneración $(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H + \gamma_H q_H)$ donde o bien $\gamma_L = 0$ o bien $\gamma_H = 0$ o ambas.

Por otro lado, los esquemas de incentivos donde una de las empresas -o ambas- fijan un sistema de remuneración de sus gerentes basado en beneficios relativos están condicionados porque β_i sólo puede tomar valores positivos entre 0 y 1. Independientemente de la combinación de esquemas de incentivos, la mejor respuesta para las empresas es elegir un valor de β_i lo más pequeño posible; es decir, la elección óptima es fijar $\beta_i = 0$.

De esta manera, el sistema de remuneración bajo beneficios relativos sería equivalente a fijar la remuneración de los gerentes únicamente en base a beneficios y los resultados que alcanzan las variables de interés son equivalentes a los alcanzados en las alternativas ya planteados. Los resultados que presenta las alternativas $(\pi_L - \beta_L \pi_H, \pi_H - \beta_H \pi_L)$, $(\pi_L - \beta_L \pi_H, \pi_H)$, $(\pi_L, \pi_H - \beta_H \pi_L)$ son equivalentes a los de (π_L, π_H). Mientras que para las opciones $(\pi_L - \beta_L \pi_H, \pi_H + \gamma_H q_H)$ y $(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H - \beta_H \pi_L)$, los resultados equivalentes son respectivamente los que arrojan: $(\pi_L, \pi_H + \gamma_H q_H)$ y $(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H)$.

En el siguiente enlace **https://github.com/Josean1997/TFM** se pueden encontrar tres documentos dedicados a la resolución de las posibles combinaciones de esquemas de incentivos no presentes en esta memoria.

Una vez resueltas la segunda y tercera etapa de las nueve posibles combinaciones de esquemas de incentivos se procede a representar en forma normal el juego simultáneo discreto de la primera etapa.

Tabla 1. Beneficios para cada una de las combinaciones de remuneración de los gerentes

L \ H	π_H	$\pi_H + \gamma_H q_H$	$\pi_H - \beta_H \pi_L$
π_L	$\frac{\delta}{9}, \frac{4\delta}{9}$	$\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{9}, \frac{4\delta}{9}$
$\pi_L + \gamma_L q_L$	$\frac{\delta}{8}, \frac{9\delta}{16}$	$\frac{8\delta}{25}, \frac{18\delta}{25}$	$\frac{\delta}{8}, \frac{9\delta}{16}$
$\pi_L - \beta_L \pi_H$	$\frac{\delta}{9}, \frac{4\delta}{9}$	$\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{9}, \frac{4\delta}{9}$

De la tabla 1 se puede concluir que la remuneración basada en beneficios y ventas es estrictamente preferida a todas las demás, tanto para la empresa de calidad alta como para la empresa de calidad baja. Consiguientemente, la alternativa $\left(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H + \gamma_H q_H\right)$ es el único equilibrio de Nash del subjuego de la primera etapa.

Dado este resultado, queda demostrado que el juego secuencial tiene un único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en el que la primera etapa del juego las empresas deciden remunerar a sus gerentes en base a la combinación de esquema de incentivos $\left(\pi_L + \gamma_L q_L, \pi_H + \gamma_H q_H\right)$; en la segunda etapa ambas empresas fijan una ponderación negativa sobre las ventas igual a $\gamma_L^* = -\frac{2\delta}{5}$ y $\gamma_H^* = -\frac{3\delta}{5}$ y, por último, en la tercera etapa los gerentes compiten simultáneamente en precios fijando respectivamente un nivel de precios igual a $p_L^* = c + \frac{4\delta}{5}$ y $p_H^* = c + \frac{6\delta}{5}$.

De la proposición 1 se obtienen principalmente dos conclusiones: en primer lugar, la posibilidad de elegir el sistema de remuneración de los gerentes permite reducir el grado de agresividad del mercado. Este resultado viene a reafirmar los resultados de Sklivas (1987) y Fershtman y Judd (1987). Tal y como demuestran estos autores, en los mercados donde la competencia es a través de precios, las empresas tienen incentivos para contratar gerentes poco agresivos y así reducir la competencia general del mercado y estimular los precios al alza.

En segundo lugar, la situación de equilibrio refleja que cuanto mayor es la diferenciación de producto entre las empresas, mayor es la capacidad que estas tienen de segmentar el mercado y mayores serán los beneficios del sector. Esta segmentación es una forma a través de la cual las empresas pueden aumentar su poder de mercado y plantea la duda de qué es un mercado ¿Es el mercado del automóvil un mercado único? ¿Se puede considerar que en el caso de existir diferenciación vertical de producto las marcas comparten el mismo mercado?

De forma complementaría, también se presentan dos tablas con los resultados en términos de precios y demandas que se arrojarían con cada uno de los resultados.

Tabla 2. Precio para cada una de las combinaciones de remuneración de los gerentes

L \ H	π_H	$\pi_H + \gamma_H q_H$	$\pi_H - \beta_H \pi_L$
π_L	$\frac{3c+\delta}{3}, \frac{3c+2\delta}{3}$	$c+\delta, \frac{2c+\delta}{2}$	$\frac{3c+\delta}{3}, \frac{3c+2\delta}{3}$
$\pi_L + \gamma_L q_L$	$\frac{2c+\delta}{2}, \frac{4c+3\delta}{4}$	$\frac{5c+4\delta}{5}, \frac{5c+6\delta}{5}$	$\frac{2c+\delta}{2}, \frac{4c+3\delta}{4}$
$\pi_L - \beta_L \pi_H$	$\frac{3c+\delta}{3}, \frac{3c+2\delta}{3}$	$c+\delta, \frac{2c+\delta}{2}$	$\frac{3c+\delta}{3}, \frac{3c+2\delta}{3}$

Tabla 3. Demandas de las empresas para cada una de las combinaciones de remuneración de los gerentes.

L \ H	π_H	$\pi_H + \gamma_H q_H$	$\pi_H - \beta_H \pi_L$
π_L	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$
$\pi_L + \gamma_L q_L$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$
$\pi_L - \beta_L \pi_H$	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

Las tablas 2 y 3 permiten llegar a una serie de conclusiones complementarias a las planteadas a través del estudio de la tabla 1. Para empezar, como era de esperar, al cubrirse toda la demanda, la única manera de que se produzca un aumento de los beneficios de las empresas sería a través de un aumento del precio de los productos. En consecuencia, si un bien es consumido por una gran de la parte de la población y la demanda no tiene capacidad para sufrir aumentos significativos, las empresas tendrán mayores incentivos para reducir su agresividad e incrementar precios.

Por último, bajo los supuestos sobre costes, estructura de demanda y tipo de mercado, se puede afirmar que los precios dependen de: el coste marginal de la empresa, el grado de diferenciación del producto y el sistema de delegación elegido por parte de las empresas. En consecuencia, la existencia de delegación estratégica sería un aspecto fundamental a la hora de determinar los precios de un mercado.

4. Modelo dinámico. Análisis de la estabilidad del equilibrio

En este capítulo se dinamiza la última etapa del juego -Los gerentes compiten simultáneamente en precios- considerando la variable tiempo discreta e introduciendo distintos esquemas de expectativas.

4.1. Análisis de la estabilidad en tiempo discreto

A continuación, se hace una breve exposición de las técnicas que se van a utilizar para realizar un análisis cualitativo de un sistema dinámico bidimensional en tiempo discreto. Para una revisión en profundidad véase Gandolfo (2010).

Se considera un sistema dinámico discreto de dos dimensiones:

$$f:\begin{cases} x_{1,t+1} = f_1(x_{1,t}, x_{2,t}) \\ x_{2,t+1} = f_2(x_{1,t}, x_{2,t}) \end{cases} \tag{25}$$

en el que al menos existe un punto de equilibrio $\overline{x}^e = \left(x_1^e, x_2^e\right)$ que es solución del siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$x_{i,t+1} = x_{i,t} = x_i, \forall i = 1,2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Si se asume que la función vectorial $f = \left(f_1, f_2\right)$ es diferenciable en un entorno del equilibrio $\overline{x}^e$, se puede llevar a cabo una aproximación lineal de la función a través del polinomio de Taylor de orden 1:

$$f\left(\overline{x}\right) \approx f\left(\overline{x}^e\right) + Jf\left(\overline{x}^e\right)\left(\overline{x} - \overline{x}^e\right)$$

siendo $Jf(\overline{x}^e)$ la matriz jacobiana de f evaluada en el punto de equilibrio $\overline{x}^e$. En el caso en que los valores propios de esta matriz sean distintos de la unidad, se puede afirmar que el comportamiento dinámico del sistema (25) en un entorno del punto de equilibrio es el mismo que el del sistema lineal:

$$\overline{x}_{t+1} = \overline{x}^e + Jf(\overline{x}^e)(\overline{x}_t - \overline{x}^e) \tag{26}$$

La estabilidad del equilibrio $\overline{x}^e$ en el sistema lineal (26) viene determinado por los valores propios de la matriz jacobiana $Jf(\overline{x}^e)$, que son la solución de la ecuación

$Det\left(Jf\left(\overline{x}^{e}\right)-\lambda I_2\right)=0$ (equivalentemente, $\lambda^2-Tr\left(Jf\left(\overline{x}^{e}\right)\right)\lambda-Det\left(Jf\left(\overline{x}^{e}\right)\right)=0$). Así se verifica:

- $|\lambda_i|<1 \ \ \forall i=1,2 \Rightarrow \overline{x}^{e}$ es un equilibrio localmente asintóticamente estable ($\overline{x}^{e}$ es un atractor).
- $|\lambda_i|>1$ para algún $i \Rightarrow \overline{x}^{e}$ es un equilibrio inestable (pueden surgir dinámicas complejas).

Existen condiciones necesarias y suficientes para que los valores propios de $Jf(\overline{x}^{e})$ tengan módulo menor que la unidad. Son las llamadas *Condiciones de Schur*:

$$\begin{cases} (i)1-T+D>0 \\ (ii)1+T+D>0 \\ (iii)1-D>0 \end{cases} \tag{27}$$

Donde T , D son la traza y el determinante de la matriz $Jf(\overline{x}^{e})$ respectivamente.

4.2. Sistemas de formación de expectativas

Como se ha comentado anteriormente, la introducción de la perspectiva temporal en la tercera etapa del juego implica definir el tipo de expectativas adoptado por los gerentes. En este sentido, hay que establecer qué información tienen a su disposición los agentes decisores y cómo eso puede afectar a la estabilidad del equilibrio y a la dinámica a largo plazo del mercado.

De entre todos los esquemas de expectativas propuestos en la literatura, un primer bloque lo componen los esquemas naïve y de expectativas adaptativas. Estos dos sistemas parten de la función de mejor respuesta y, por tanto, asumen un alto grado de racionalidad por parte de las empresas. Es decir, estos sistemas suponen que las empresas son conocedoras tanto de la demanda de mercado como de la estructura de producción de la competencia.

El sistema de expectativas Naïve, o de Cournot, parte del supuesto de que cada una de las empresas espera que la otra no varie el precio fijado de un periodo al siguiente, $p^{e}_{j,t+1}=p_{j,t}$, donde $p^{e}_{j,t+1}$ denota la expectativa de la empresa i sobre el precio fijado por la empresa j en el periodo $t+1$.

de manera que:

$$p_{i,t+1}=FMR_i\left(p_{j,t}\right),\ i\neq j,\ \forall i,j=L,H \tag{28}$$

Las expectativas adaptivas se asemejan a un proceso de aprendizaje dinámico donde lo sucedido en periodos anteriores- $t-1, t-2, \ldots$ - afecta a cómo se formulan las expectativas en el momento t. Según este enfoque, en cada periodo el incremento en el precio es una proporción de la diferencia entre su función de mejor respuesta y el precio fijado en el periodo anterior:

$$p_{i,t+1} - p_{i,t} = \vartheta_i \left(FMR\left(p_{j,t} \right) - p_{i,t} \right),\ i \neq j,\ \forall i, j = L, H,\ 0 < \vartheta_i \leq 1 \qquad (29)$$

De esta expresión se puede obtener la siguiente regla de fijación de precios:

$$p_{i,t+1} = \left(1 - \vartheta_i\right) p_{i,t} + \vartheta_i FMR_i \left(p_{j,t} \right),\ i \neq j,\ \forall i, j = L, H,\ 0 < \vartheta_i \leq 1 \qquad (30)$$

donde ϑ_i mide el grado de reticencia a modificar precios que tienen las empresas. Si el parámetro $\vartheta_i = 1$, entonces el precio fijado sería equivalente al obtenido bajo expectativas naïve; mientras que si ese valor se aproxima a cero, entonces el precio del siguiente periodo se aproximará al del periodo anterior, $p_{i,t+1} \to p_{i,t}$. En definitiva, cuanto más pequeño sea el parámetro ϑ_i mayor será la reticencia de la empresa a modificar el precio.

A diferencia del enfoque anterior, en la literatura se han explorado varias alternativas donde las empresas no tienen pleno conocimiento sobre la estructura de mercado. Dentro de esta línea se puede destacar la regla del gradiente, presente en el trabajo Bischi y Naimzada (2000).

El esquema de expectativas denominado regla del gradiente asume que para fijar el precio de $t+1$ las empresas estiman cuánto varia su función objetivo ante una variación en el precio en t. Dado que en este caso el precio es fijado por los gerentes, la función objetivo es el sistema de bonus de estos. Por lo tanto, si la remuneración marginal de los gerentes, $\frac{\partial U_i}{\partial p_{i,t}}$, aumenta- disminuye- ante un incremento del precio, entonces las empresas aumentarán -disminuirán- el precio en el periodo $t+1$. Formalmente la regla dinámica de ajuste es:

$$p_{i,t+1} = p_{i,t} + \alpha_i(p_{i,t}) \frac{\partial U_i}{\partial p_{i,t}}, \quad \forall i = L, H \qquad (31)$$

siendo $\alpha_i(p_{i,t})$ una función positiva que denota la velocidad de ajuste de la empresa i .Por simplicidad, en la literatura se supone que esta función toma una forma lineal $\alpha_i(p_{i,t}) = \alpha_i p_{i,t}$ con $\alpha_i > 0\ \forall i = L, H$ (ver Fanti y Gori, 2012; Fanti et al., 2013; Askar, 2014 y Yu Yu, 2022). Asimismo, por simplicidad también se asume que $\alpha_L = \alpha_H = \alpha$. Es decir, que la velocidad de ajuste no varía entre empresas.

4.3. Expectativas homogéneas

4.3.1. Expectativas adaptativas

Asumiendo que ambas empresas adoptan un sistema de expectativas adaptativas como las indicadas en (30) y considerando la función de mejor respuesta dada en (15), se obtiene el sistema dinámico lineal:

$$f_A : \begin{cases} p_{L,t+1} = (1-\vartheta_L)\, p_{L,t} + \vartheta_L \left(\frac{1}{2}\right)(-\gamma_L + c + p_{H,t}) \\ p_{H,t+1} = (1-\vartheta_H)\, p_{H,t} + \vartheta_H \left(\frac{1}{2}\right)(-\gamma_H + c + p_{L,t} + \delta) \end{cases} \tag{32}$$

Imponiendo la condición de equilibrio $p_{i,t+1} = p_{i,t} = p_i$, $\forall i = L, H$, se obtiene un único punto de equilibrio que coincidirá con el equilibrio de Bertrand-Nash de (17): $E^* = (p_L^*, p_H^*) = \left(\left(\frac{1}{3}\right)(-2\gamma_L + 3c - \gamma_H + \delta), \left(\frac{1}{3}\right)(-2\gamma_H + 3c - \gamma_L + 2\delta)\right)$.

Para determinar la estabilidad local del punto de equilibrio se calcula la matriz Jacobiana de la función vectorial f_A:

$$Jf_A\left(p_L, p_H\right) = \begin{pmatrix} 1-\vartheta_L & \frac{\vartheta_L}{2} \\ \frac{\vartheta_H}{2} & 1-\vartheta_H \end{pmatrix} \tag{33}$$

Proposición 2:

Si se asumen expectativas adaptativas, el equilibrio Bertrand-Nash es localmente asintóticamente estable para todo ϑ_i tal que $0 < \vartheta_i \leq 1$, $\forall i = L, H$.

Demostración:

Los valores propios de esta matriz Jacobiana (33) son:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{2-\vartheta_L-\vartheta_H-\sqrt{\vartheta_L^2+\vartheta_H^2-\vartheta_L\vartheta_H}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{2-\vartheta_L-\vartheta_H+\sqrt{\vartheta_L^2+\vartheta_H^2-\vartheta_L\vartheta_H}}{2} \end{cases} \tag{34}$$

De donde se puede deducir que: $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, $\forall$ $0 < \vartheta_i \leq 1$,. $\forall i = L, H$

Para una demostración con más detallada véase el enlace **https://github.com/Josean1997/TFM** .

De la proposición 2 se puede concluir que: si se produce un shock que desvía temporalmente los precios de su valor de equilibrio, la existencia de expectativas adaptativas por parte de los gerentes de ambas empresas permitirá asegurar que los precios convergerán asintóticamente hacia el equilibrio Bertrand-Nash; independientemente del par de valores que tomen los parámetros ϑ_L y ϑ_H.

4.3.2. Regla del gradiente

A diferencia del apartado anterior, ahora ambas empresas fijan precios según la regla de la gradiente dada en (31). Si se introduce (14) en (31) se obtiene el siguiente sistema dinámico no lineal en dos dimensiones:

$$f_B : \begin{cases} p_{L,t+1} = p_{L,t} + \alpha p_{L,t} \dfrac{1}{\delta}\left(p_H - 2p_L + c - \gamma_L\right) \\ p_{H,t+1} = p_{H,t} + \alpha p_{H,t} \dfrac{1}{\delta}\left(-2p_H + \delta + p_L + c - \gamma_H\right) \end{cases} \tag{35}$$

Este sistema tiene tres equilibrios frontera: $(0,0)$, $\left(0, \dfrac{\delta + c - \gamma_H}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{c-\gamma_L}{2}, 0\right)$[2] y un punto de equilibrio interior que coincide con el equilibrio Bertrand- Nash alcanzado en el modelo estático: $E^* = \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)(-2\gamma_L + 3c - \gamma_H + \delta), \left(\dfrac{1}{3}\right)(-2\gamma_H + 3c - \gamma_L + 2\delta)\right)$.

La matriz Jacobiana de la función no lineal f_B, evaluada en E^* es:

$$Jf_B\left(E^*\right) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha p_L^* \left(\dfrac{2}{\delta}\right) & \alpha p_L^* \left(\dfrac{1}{\delta}\right) \\ \alpha p_H^* \left(\dfrac{1}{\delta}\right) & 1 - \alpha p_H^* \left(\dfrac{2}{\delta}\right) \end{pmatrix} \tag{36}$$

cuya traza y determinante son respectivamente:

$$\begin{cases} T = 2 - \left(\dfrac{2}{\delta}\right)\alpha\left(p_L^* + p_H^*\right) \\ D = T - 1 + M \end{cases} \quad \text{con } M = \left(\dfrac{3}{\delta^2}\right)\alpha^2\left(p_L^* p_H^*\right) > 0 \tag{37}$$

[2] Se puede demostrar que estos tres equilibrios frontera son inestables.

donde a su vez:

$$\begin{cases} \left(p_L^* + p_H^*\right) = 2c + \delta - \left(\gamma_H + \gamma_L\right) \\ \left(p_L^* p_H^*\right) = \dfrac{1}{9}\left(-\gamma_H - 2\gamma_L + 3c + \delta\right)\left(-2\gamma_H + \gamma_L + 3c + 2\delta\right) \end{cases} \quad (38)$$

Proposición 3:

Asumiendo que las empresas ajustan su precio de acuerdo con la regla del gradiente, una condición suficiente para que el equilibrio Bertrand-Nash del modelo sea localmente asintóticamente estable es: $\alpha < \alpha_B = \left(\dfrac{2}{3}\right)\delta\left(\dfrac{\left(p_H^* + p_L^*\right) - \sqrt{p_H^{*\,2} + p_L^{*2} - p_H^* p_L^*}}{p_H^* p_L^*}\right)$.

Demostración

Si se introduce la traza y el determinante de (37) en las condiciones de estabilidad de Schur, que vienen dadas por (27), se puede ver que:

- La condición (i) está siempre garantizada, ya que $1 - T + D = M = \left(\dfrac{3}{\delta^2}\right)\alpha^2\left(p_L^* p_H^*\right) > 0$
- La condición (iii): $1 - D = 2 - \left(T + M\right) = \alpha\left(\dfrac{2\left(p_L^* + p_H^*\right)}{\delta} - \dfrac{3\alpha\left(p_L^* p_H^*\right)}{\delta^2}\right) > 0$ se cumplirá siempre y cuando el parámetro que representa la velocidad de ajuste- α -sea inferior a un determinado valor. Concretamente, la condición se cumple si $\alpha < \alpha_1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)\delta\left(\dfrac{p_L^* + p_H^*}{p_L^* p_H^*}\right)$.
- Operando la condición (ii) se obtiene la condición $1 + T + D = 2T + M = A\alpha^2 + B\alpha + 4 > 0$. El cumplimiento de esta condición se analiza a través de la parábola:

  $$y = f(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + 4 \text{ , con } A = 3\left(\frac{p_L^* p_H^*}{\delta^2}\right) > 0 \text{ y } B = -4\left(\frac{p_L^* + p_H^*}{\delta}\right) < 0 \quad (39)$$

  La abscisa del vértice de esta parábola es:

  $$\alpha_V = \frac{-B}{2A} = \left(\frac{2}{3}\right)\delta\left(\frac{p_L^* + p_H^*}{p_L^* p_H^*}\right) > 0 \quad (40)$$

  que coincide con el umbral α_1 obtenido en la condición (iii).

Al ser $A>0$ en el vértice se alcanza un mínimo. Se comprueba que $f\left(\alpha_V=-\frac{B}{2A}\right)=-\frac{B^2}{4A}+4=\frac{16A-B^2}{4A}<0$ y, por lo tanto, la parábola cortará en dos valores positivos al eje de abscisas.

$$f(\alpha)=0\rightarrow\begin{cases}\alpha_2=\left(\frac{2}{3}\right)\delta\left(\frac{\left(p_H^*+p_L^*\right)-\sqrt{p_H^{*\,2}+p_L^{*2}-p_H^*p_L^*}}{p_H^*p_L^*}\right)\\ \alpha_3=\left(\frac{2}{3}\right)\delta\left(\frac{\left(p_H^*+p_L^*\right)+\sqrt{p_H^{*\,2}+p_L^{*2}-p_H^*p_L^*}}{p_H^*p_L^*}\right)\end{cases}$$

Por tanto, se puede afirmar que la condición $1+T+D>0$ se cumple siempre y cuando α se encuentra comprendido dentro del intervalo $(0,\alpha_2)\cup(\alpha_3,\infty)$.

De la comparación de α_1,α_2 y α_3 se puede deducir que $0<\alpha_2<\alpha_1<\alpha_3$, de manera que las tres condiciones de Schur se cumplirán simultáneamente únicamente en el intervalo $0<\alpha<\alpha_2$. Y, por consiguiente, el equilibrio de Bertrand-Nash será localmente asintóticamente estable siempre y cuando la velocidad de ajuste será inferior a $\alpha_B=\alpha_2$.

A continuación, se presentan diversas simulaciones del sistema dinámico llevadas a cabo a través del software *Mathematica*; considerando los siguientes valores paramétricos:

$$c=1,\delta=2,\gamma_L=-\frac{2\delta}{5}=-\frac{4}{5},\gamma_H=-\frac{3\delta}{5}=-\frac{6}{5}\tag{41}$$

dando lugar a:

$$p_L^*=\frac{13}{5},\ p_H^*=\frac{17}{5}\ \text{y}\ \alpha_B=0,440579...\tag{42}$$

Las figuras 1, 2, 3 y 4 muestran como un aumento en la velocidad de ajuste de los gerentes provoca que el equilibrio deje de ser estable y puedan aparecer conjuntos *atractores* cada vez más complejos. En la figura 1, la velocidad de ajuste -α- es inferior al umbral α_B y el equilibrio de Bertrand-Nash es localmente asintóticamente estable; mostrándose una trayectoria convergente al equilibrio. Por el contrario, las figuras 2, 3 y 4 muestran situaciones donde el equilibrio de Bertrand-Nash es inestable y las trayectorias fluctúan alrededor del equilibrio siguiendo diferentes patrones. A largo plazo, en la figura 2, se observa un 2-ciclo, en la 3 un 2^3 -ciclo y en la 4 se observan observa una trayectoria más compleja.

Figura 1.

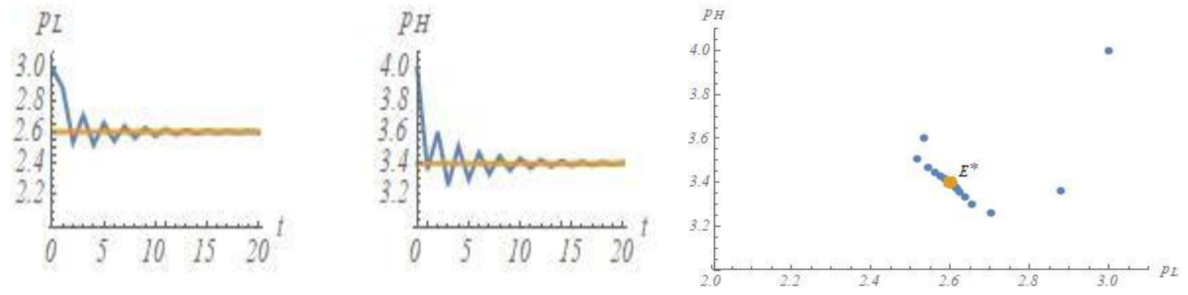


Figura 2.

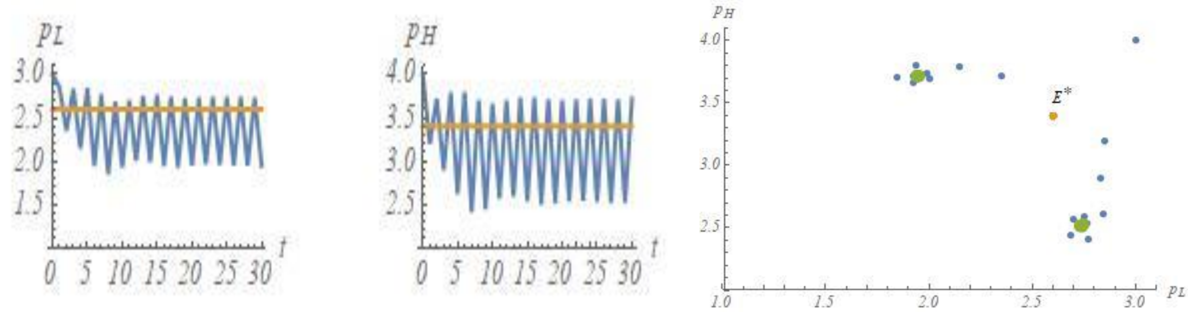


Figura 3.

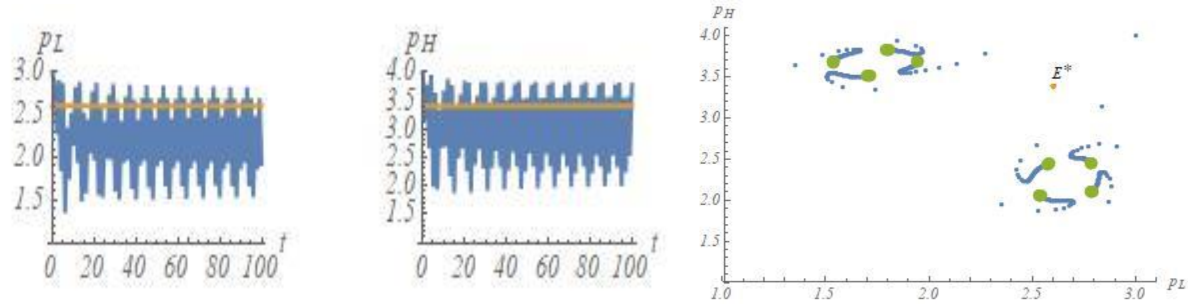
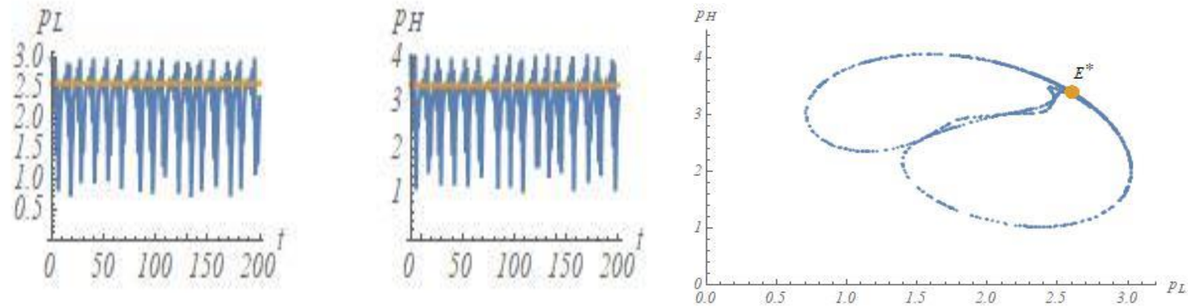


Figura 4.



Si se introduce (38) en el valor genérico del umbral α_B se obtiene:

$$\alpha_B(c,\delta,\gamma_L,\gamma_H)=\frac{6\delta}{6c+3\delta-(\gamma_L+\gamma_H)+\sqrt{3}\sqrt{3c^2+(\delta-\gamma_H)^2+3c(\delta-\gamma_L-\gamma_H)+(\gamma_H-\delta)\gamma_L+\gamma_L^2}} \quad (43)$$

Para evaluar qué impacto que tienen $c, \delta, \gamma_L, \gamma_H$ sobre la estabilidad asintótica del equilibrio se calculan las derivadas parciales del umbral α_B (43). En el enlace **https://github.com/Josean1997/TFM** se presentan los desarrollos de las derivadas correspondientes.

Con el objetivo de facilitar la interpretación se introduce el supuesto simplificador de que los parámetros $\gamma_i, \forall i = L, H$ tienen siempre el mismo signo; es decir, se asume que: $\gamma_i \leq 0 \rightarrow \gamma_j \leq 0$ o $\gamma_i \geq 0 \rightarrow \gamma_j \geq 0, \forall i, j = L, H$.

Dado este supuesto, y el hecho de que los parámetros c y δ solo pueden tomar valores dentro de un entorno económicamente factible, se obtiene que $\frac{\partial \alpha_2}{\partial c} < 0$ y, por tanto, cuanto mayor sea el coste marginal de las empresas menos estable el equilibrio de Nash, en el sentido de que menor longitud tiene el intervalo de valores del parámetro de velocidad de ajuste que garantizan la estabilidad.

Este resultado se encuentra presente en la mayoría de los estudios realizados acerca de la estabilidad del equilibrio, independientemente de los supuestos que se asuman acerca de la estructura de mercado (ver, entre otros, Fanti et al., 2015 y Andaluz et al., 2020).

La derivada de α_B respecto a δ no presenta resultados tan concluyentes, ya que dependerá de que valores tomen las variables γ_L y γ_H. Si las empresas fijan $\gamma_i > 0, \forall i = L, H$ el efecto dependerá del valor que tomen los parámetros del modelo; mientras que si ambas empresas fijan $\gamma_i < 0, \forall i = L, H$ el efecto será siempre positivo $\frac{\partial \alpha_B}{\partial \delta} > 0$ y, en consecuencia, un aumento en la diferenciación de producto incrementará la estabilidad del equilibrio de Betrand-Nash.

Si se asume que ambas empresas fijan incentivos para que sus gerentes sean prudentes; es decir, fijan $\gamma_i < 0, \forall i = L, H$, los resultados están en línea con los trabajos de Andaluz y Jarne (2015) y Fanti y Gori (2013) sobre la estabilidad de un duopolio de diferenciación vertical y competencia en precios. El trabajo de Andaluz y Jarne demuestra que la diferenciación aumenta la estabilidad bajo sistemas de expectativas homogéneas y Fanti y Gori lo prueban en un sistema de expectativas heterogéneas, siguiendo una de las empresas expectativas naïve y la otra, la regla del gradiente.

Por otro lado, la derivada de α_2 respecto de γ_H y γ_L es siempre positiva, $\frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma_L} > 0$ y $\frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma_H} > 0$, de manera una mayor remuneración basada en ventas tiene un efecto estabilizador sobre el equilibrio.

4.4. Expectativas heterogéneas

En este apartado se analiza la estabilidad del equilibrio en el caso en que las empresas no presentan el mismo sistema de expectativas. De igual forma que plantean Andaluz y Jarne (2019), se asume que una de las empresas fija precios según la regla de expectativa adaptativas y la otra según la regla del gradiente.

En primer lugar, se considera la situación en que la firma de calidad baja- Low- sigue la regla de expectativas adaptativas y la empresa de calidad alta- High- determina su precio en base a la regla del gradiente. Inmediatamente después se estudia el caso inverso; es decir, el caso en que la empresa de calidad baja elige sus precios según la regla del gradiente y la de calidad alta bajo un sistema de expectativas adaptativas. Si se toman las ecuaciones (30) y (31), ambos sistemas dinámicos se enunciarán como:

$$f_C : \begin{cases} p_{L,t+1} = (1-\vartheta_L)\, p_{L,t} + \vartheta_L \left(\frac{1}{2}\right)(-\gamma_L + c + p_{H,t}) \\ p_{H,t+1} = p_{H,t} + \alpha_H\, p_{H,t} \frac{1}{\delta}\left(-2p_H + \delta + p_L + c - \gamma_H\right) \end{cases} \tag{44}$$

$$f_D : \begin{cases} p_{L,t+1} = p_{L,t} + \alpha_L\, p_{L,t} \frac{1}{\delta}\left(p_H - 2p_L + c - \gamma_L\right) \\ p_{H,t+1} = (1-\vartheta_H)\, p_{H,t} + \vartheta_H \left(\frac{1}{2}\right)(-\gamma_H + c + p_{L,t} + \delta) \end{cases} \tag{45}$$

Para ambos sistemas dinámicos existen dos equilibrios: uno interior, que coincide con el equilibrio Bertrand-Nash del modelo estático E^* y, otro frontera, que difiere entre ambos sistemas. Los equilibrios frontera de los sistemas f_C y f_D son respectivamente $\left(\frac{\gamma_L + c}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{-\gamma_H + c + \delta}{2}\right)$[3].

[3] Se puede demostrar que los equilibrios frontera de estos sistemas son siempre inestables, independientemente del valor que tomen cualquiera de los parámetros del modelo.

La matriz Jacobiana de estos sistemas evaluadas en E^* con su traza y determinante son respectivamente:

$$Jf_C\left(E^*\right)=\begin{pmatrix} 1-\vartheta_L & \left(\frac{1}{2}\right)\vartheta_L \\ \alpha_H\, p_H^*\left(\frac{1}{\delta}\right) & 1-\alpha_H\, p_H^*\left(\frac{2}{\delta}\right) \end{pmatrix} \tag{46}$$

donde $p_H^* = \left(\frac{1}{3}\right)(-2\gamma_H - \gamma_L + 3c + \delta)$ y la traza (T) y el determinante (D) son iguales a:

$$\begin{cases} T = 2-\vartheta_L - 2\alpha_H\, p_H^*\left(\frac{1}{\delta}\right) \\ D = T - 1 + M \end{cases} \quad \text{con } M = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\vartheta_L\alpha_H\, p_H^*\,\frac{1}{\delta}\right) > 0 \tag{47}$$

Y, de igual forma:

$$Jf_D\left(E^*\right)=\begin{pmatrix} 1-\alpha_L\, p_L^*\left(\frac{2}{\delta}\right) & \alpha_L\, p_L^*\left(\frac{1}{\delta}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\right)\vartheta_H & 1-\vartheta_H \end{pmatrix} \tag{48}$$

con $p_L^* = \left(\frac{1}{3}\right)(-2\gamma_L - \gamma_H + 3c + 2\delta)$ y su traza (T) y determinante (D) iguales a:

$$\begin{cases} T = 2-\vartheta_H - 2\alpha_L\, p_L^*\left(\frac{1}{\delta}\right) \\ D = T - 1 + M \end{cases} \quad \text{con } M = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\vartheta_H\alpha_L\, p_L^*\,\frac{1}{\delta}\right) > 0 \tag{49}$$

Proposición 4:

I. Si la empresa de calidad baja fija precios bajo expectativas adaptativas y la de calidad alta según la regla del gradiente, una condición suficiente para que el equilibrio de Bertrand-Nash sea localmente asintóticamente estable es: $0 < \alpha_H < \alpha_H = \dfrac{4\delta(2-\vartheta_L)}{p_H^*(8-3\vartheta_L)}$ (50)

II. Si la empresa de calidad baja fija precios según la regla del gradiente y la de calidad alta bajo expectativas adaptativas una condición suficiente para que el equilibrio de Bertrand-Nash sea localmente asintóticamente estable es $0 < \alpha_L < \alpha_L = \dfrac{4\delta(2-\vartheta_H)}{p_L^*(8-3\vartheta_H)}$ (51)

con $\left(p_L^*, p_H^*\right) = \left(\left(\frac{1}{3}\right)(-2\gamma_L - \gamma_H + 3c + \delta), \left(\frac{1}{3}\right)(-2\gamma_H - \gamma_L + 3c + 2\delta)\right)$

Demostración:

I. Al introducir la expresión de la traza y el determinante de la matriz Jacobiana $Jf_C\left(E^*\right)$ en las condiciones de Schur (27) queda:

(i) $1 - T + D = M > 0$

(iii) $1 - D = 2 - \left(T + M\right) = \vartheta_L + \frac{\alpha_H p_H^*}{\delta}\left(2 - \frac{3\vartheta_L}{2}\right) > 0$

(ii) $1 + T + D = 2T + M = 2\left(2 - \vartheta_L\right) - \frac{\alpha_H p_H}{\delta}\left(4 - \frac{3\vartheta_L}{2}\right) > 0 \Rightarrow \alpha_H < \frac{4\delta(2 - \vartheta_L)}{p_H^*(8 - 3\vartheta_L)}$

Por tanto, las condiciones de Schur se cumplirán siempre que $0 < \alpha_H < \alpha_H = \frac{4\delta(2 - \vartheta_L)}{p_H^*(8 - 3\vartheta_L)}$

II. Realizando el mismo procedimiento que en el caso anterior se llega a la conclusión de que las condiciones de Schur se verificarán para un α inferior a un determinado umbral α_L . En concreto, siempre que $0 < \alpha_L < \alpha_L = \frac{4\delta(2 - \vartheta_H)}{p_L^*(8 - 3\vartheta_H)}$

La primera conclusión que se puede obtener de esta proposición es que: bajo los supuestos de este modelo, el tipo de expectativas que tengan los agentes afecta a la estabilidad del equilibrio. En especial, en este apartado se observa que, bajo expectativas heterogéneas, es especialmente relevante qué agente sigue la regla del gradiente a la hora de fijar precios.

Bajo el supuesto de $\vartheta_L = \vartheta_H = \vartheta$, el equilibrio tendrá menos probabilidad de ser estable siempre que la empresa de calidad alta siga la regla del gradiente.

$$\alpha_H = \frac{4\delta(2 - \vartheta)}{p_H^*(8 - 3\vartheta)} < \frac{4\delta(2 - \vartheta)}{p_L^*(8 - 3\vartheta)} = \alpha_L \text{ porque } p_H^* > p_L^*$$

Una posible explicación a este resultado sería la existencia de poder de mercado. Tal y como muestran Andaluz et al. (2020), bajo un sistema de competencia en cantidades de *n* empresas, si se sigue la regla del gradiente, el equilibrio será más estable cuanto más bajo sea el poder de mercado.

Esto se puede explicar en la medida en que, si el mercado se encuentra fuera de su situación de equilibrio, un mayor poder de mercado conlleva mayores oportunidades de incrementar el beneficio a través de un desvió unilateral por parte de la empresa. En este caso, como la empresa de calidad alta tiene más poder de mercado que la empresa de calidad baja, este poder de mercado estaría influyendo sobre la estabilidad del equilibrio.

Por otro lado, igual que pasaba para el caso de expectativas homogéneas, se observa que un aumento de la velocidad de ajuste puede llevar a que el equilibrio pierda su carácter atractor y que el sistema emprenda trayectorias complejas.

De la derivada de (50) y (51) respecto a c, δ, γ_i y ϑ_i con $i = L, H$ se puede deducir cómo afectan estas variables a la probabilidad de que el equilibrio se más o menos estable. Tal y como se demuestra a continuación, los resultados de estas derivadas tienen el mismo signo que en el caso de expectativas homogéneas. En primer lugar, la derivada de estos umbrales respecto al coste marginal muestra que cuanto mayor es el coste marginal de las empresas menos estable es el equilibrio.

$$\frac{\partial \alpha_H}{\partial c} = -\frac{4\delta\left(2-\vartheta_L\right)}{p_H^{*2}\left(8-3\vartheta_L\right)} < 0 \text{ y } \frac{\partial \alpha_L}{\partial c} = -\frac{4\delta\left(2-\vartheta_H\right)}{p_L^{*2}\left(8-3\vartheta_H\right)} < 0 \tag{52}$$

En segundo lugar, igual que pasaba para el caso de expectativas homogéneas, la derivada de ambos umbrales respecto al parámetro δ muestra resultados inciertos. Si uno se fija en (53) puede observar que, para ambas derivadas, el primer término es siempre positivo y el efecto final dependerá de que valores tomen previamente las variables γ_L, γ_H y el parámetro c.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_H}{\partial \delta} = \left(\dfrac{4\left(2-\vartheta_L\right)}{p_H^{*2}\left(8-3\vartheta_L\right)}\right)\left(\dfrac{-2\gamma_H-\gamma_L+3c}{3}\right) \\ \dfrac{\partial \alpha_L}{\partial \delta} = \left(\dfrac{4\left(2-\vartheta_H\right)}{p_L^{*2}\left(8-3\vartheta_H\right)}\right)\left(\dfrac{-2\gamma_L-\gamma_H+3c}{3}\right) \end{cases} \tag{53}$$

No obstante, sí que se puede afirmar que, si ambas empresas fijan $\gamma_i < 0, \forall i = L, H$, el efecto será siempre positivo $\frac{\partial \alpha_H}{\partial \delta} > 0, \frac{\partial \alpha_L}{\partial \delta} > 0$ y que, cuanto mayor sea el coste marginal, más factible es que un aumento en la diferenciación tenga efectos positivos sobre la estabilidad.

En lo que respecta a la derivada de los umbrales (50) y (51) respecto de γ_H y γ_L, el valor es siempre positivo. Es decir, a mayor peso de la remuneración de los gerentes en base a la variable ventas, mayor es la estabilidad del equilibrio.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_H}{\partial \gamma_H} = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{4\delta(2-\vartheta_L)}{p_H^{*\,2}(8-3\vartheta_L)}\right) > 0 \\ \dfrac{\partial \alpha_H}{\partial \gamma_L} = \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{4\delta(2-\vartheta_L)}{p_H^{*\,2}(8-3\vartheta_L)}\right) > 0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_L}{\partial \gamma_H} = \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{4\delta(2-\vartheta_H)}{p_L^{*2}(8-3\vartheta_H)}\right) > 0 \\ \dfrac{\partial \alpha_L}{\partial \gamma_L} = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{4\delta(2-\vartheta_H)}{p_L^{*2}(8-3\vartheta_H)}\right) > 0 \end{cases} \qquad (54)$$

Por otro lado, la derivada de los umbrales respecto a $\vartheta_i \ \forall i = H, L$ refleja el efecto que la empresa con expectativas adaptativas tiene sobre la estabilidad del equilibrio. Como se puede observar en (55), independientemente de qué empresa siga este sistema, un aumento de ϑ_i reduce la probabilidad de que el equilibrio sea estable ya que:

$$\frac{\partial \alpha_H}{\partial \vartheta_L} = -\frac{8\delta}{p_H^*(8-3\vartheta_L)^2} < 0 \text{ y } \frac{\partial \alpha_L}{\partial \vartheta_H} = -\frac{8\delta}{p_L^*(8-3\vartheta_H)^2} < 0 \qquad (55)$$

Por consiguiente, cuanto más predispuesta este la empresa con expectativas adaptativas a modificar los precios, menos probable es que el equilibrio sea estable. En este sentido, desde el punto de vista de la estabilidad, una menor sensibilidad a la función de mejor respuesta sería algo deseable.

Este resultado también se encontraría ampliamente demostrado dentro de la literatura, tanto para modelos con diferenciación vertical de producto como para modelos de diferenciación horizontal o sin diferenciación del producto (ver Elsadany et al., 2013; Liu y Zhang, 2013; Andaluz et al., 2017; Andaluz y Jarne, 2016).

Respecto a las razones que justifican una mayor o menor disposición a modificar precios, en la literatura existen diversos enfoques. Por un lado, como ya se ha comentado, una posible explicación sería la ausencia de información completa por parte de las empresas. Por otro lado, otra razón estaría en la presencia de rigideces intrínsecas a la hora de modificar precios, consecuencia de fenómenos como los costes de menú.

Incluso, tal y como refleja el trabajo de David M. Kotz (2015) sobre los tipos de capitalismo en USA. El nivel de liberalización de una economía puede llegar a afectar a la cooperación tácita entre las empresas, alcanzándose situaciones más o menos estables según la confianza que tengan los agentes en lo que hará su competencia.

5. Conclusiones

Este trabajo tiene como objetivo plantear un modelo teórico que permita estudiar conjuntamente tres fenómenos: la delegación estratégica, la diferenciación de producto y la evolución temporal de las variables de decisión. De esta manera, se busca estudiar qué efectos tiene sobre el equilibrio de Nash la separación entre propiedad y gestión y la existencia de productos verticalmente diferenciados. Además, se quiere determinar cómo afectan estos aspectos a la estabilidad dinámica del equilibrio de Nash, analizando qué dinámicas temporales pueden seguir las variables de decisión y qué condiciones se deben cumplir para que aparezcan dinámicas complejas.

Para alcanzar estos objetivos, en primer lugar, se ha planteado un juego secuencial en tres etapas. En la primera etapa los propietarios del capital eligen simultáneamente el esquema de incentivos para sus gerentes -su esquema de bonus- y, una vez elegido este, en la segunda etapa escogen simultáneamente cómo se remunera cada aspecto de su contrato. Es decir, deciden qué peso se da a cada una de las variables elegidas en el esquema de incentivos. Por último, en la última etapa los gerentes compiten simultáneamente vía precios.

Una vez se ha resuelto este juego, se ha dinamizado la última de las etapas, y se ha estudiado la estabilidad del equilibrio, asumiendo un contexto de racionalidad limitada por parte de los gerentes y un sistema de expectativas homogéneas y heterogéneas.

Respecto al modelo estático, las principales conclusiones obtenidas en este trabajo son dos:

En primer lugar, bajo los supuestos de producto verticalmente diferenciado y competencia a través de precios, se demuestra que la existencia de delegación estratégica permite reducir la agresividad del mercado. Como se ha reiterado en varias ocasiones, la forma en que los dueños del capital influirían sobre la agresividad del mercado no sería la fijación de unos incentivos explícitos. Más bien, la existencia de interdependencia entre las empresas y la libre disposición de información llevaría a un acuerdo tácito de contratación de gerentes más prudentes. Y, a lo sumo, si los objetivos fueran explícitos, se basarían en la idea de "vender sí, pero a buen precio".

En segundo lugar, la fijación de la primera etapa del juego como una elección discreta expresada en forma normal permite concluir que: cuanto mayor es la diferenciación de producto entre las empresas, mayor es el beneficio; independientemente del esquema de incentivos elegido por los dueños del capital. Este resultado plantea la existencia incentivos por parte de las firmas para adoptar una estrategia de "perrito faldero". Por tanto, la empresa que oferta el producto de calidad baja fijaría la calidad mínima determinada por ley, mientras que la empresa que ofrece el producto de calidad alta fijaría la mayor calidad posible, dados los recursos a su disposición.

Una continuación del análisis estático realizado podría ser estudiar si se alcanzan los mismos resultados bajo diferentes formas funcionales para las preferencias de los consumidores o bajo diferentes estructuras de costes. Concretamente, tendría especial interés relajar el supuesto de demanda perfectamente cubierta o plantear una estructura de costes donde la diferenciación vertical de producto se viera reflejada en diferentes costes marginales, en lugar de verse manifestada a través de costes fijos hundidos como se hace en el presente trabajo.

Respecto al análisis dinámico, se asumen dos posibles sistemas de formación de expectativas con racionalidad limitada: expectativas adaptativas y regla del gradiente. El primero de estos esquemas, expectativas adaptativas, tiene como punto de partida la función de mejor respuesta de las empresas y, en términos metodológicos, asume que los agentes económicos tienen en cuenta el pasado a la hora de formular sus expectativas. Por otro lado, la regla del gradiente parte del supuesto de que los agentes económicos son desconocedores de alguna parte de la estructura del mercado -demanda, costes, …-.

En términos de resultados, si se asume que ambos jugadores siguen expectativas adaptativas homogéneas, se puede deducir que el equilibrio de Bertrand-Nash del modelo estático es asintóticamente estable; independientemente del valor que tomen los parámetros y las variables del modelo.

En línea con otros trabajos presentes en la literatura, la adopción por parte de al menos una empresa del esquema de expectativas conocido como la regla del gradiente abre la posibilidad de que el equilibrio de Bertrand-Nash pierda su carácter atractor; siempre y cuando la velocidad de ajuste de los gerentes - α - sea superior a un determinado umbral. Tal y como se observa en las simulaciones presentes en el apartado 4.3.2., si α es superior al umbral de estabilidad, el equilibrio de Nash pierde su carácter atractor; y cuanto más aumenta α más complejo es el comportamiento dinámico del sistema. Un aspecto pendiente sería estudiar analíticamente qué sucede una vez se supera el umbral de estabilidad.

En lo que se refiere a los factores económicos que determinan el umbral de estabilidad, tanto para expectativas homogéneos como heterogéneas, se observa que un aumento del coste marginal reduce la posibilidad de que el equilibrio sea estable, en el sentido de que el intervalo de valores del parámetro de velocidad de ajuste que garantiza la estabilidad tendrá menor longitud.

En términos opuestos, un aumento de las variables γ_L y γ_H, que reflejan el peso que se le da en la remuneración de los gerentes a la variable ventas, conlleva que el equilibrio de Bertrand-Nash sea más estable.

Respecto al grado de diferenciación de producto, determinado por δ, el efecto sobre la estabilidad del equilibrio no está tan claro. No obstante, si se asume que $-1 \leq \gamma_i \leq 0$, $\forall i = L, H$

, entonces un incremento de la diferenciación de producto sería algo deseable en términos de estabilidad del equilibrio.

En relación con las conclusiones de formación de expectativas heterogéneas entre empresas, en el presente trabajo también se demuestra que el equilibrio de Bertrand-Nash será más estable si la empresa con expectativas adaptativas está menos dispuesta a modificar el precio de un periodo al siguiente. Además, la estabilidad del equilibrio también es sensible a qué empresa sigue la regla del gradiente. Si la empresa que oferta el producto de calidad alta sigue la regla del gradiente y la empresa de calidad baja adopta expectativas adaptativas, el equilibrio será menos estable que si sucede el caso contrario.

En conclusión, la existencia de delegación estratégica y la diferenciación de producto son aspectos relevantes a la hora de determinar la situación de equilibrio y, siempre que exista racionalidad limitada, también pueden llegar a influir en la estabilidad del equilibrio. Concretamente, estos dos aspectos adquirirán especial relevancia cuando alguna de las empresas tenga expectativas basadas en la regla del gradiente.

6. Bibliografía

Agiza, H. N. (1998). Explicit stability zones for Cournot game with 3 and 4 competitors. *Chaos, Solitons & Fractals*, *9*(12), 1955-1966.

Agiza, H. N. (1999). On the analysis of stability, bifurcation, chaos and chaos control of Kopel map. *Chaos, Solitons & Fractals*, *10*(11), 1909-1916.

Agiza, H. N., & Elsadany, A. A. (2004). Chaotic dynamics in nonlinear duopoly game with heterogeneous players. *Applied Mathematics and Computation*, *149*(3), 843-860.

Andaluz, J., & Jarne, G. (2015). On the dynamics of economic games based on product differentiation. *Mathematics and Computers in Simulation*, *113*, 16-27.

Andaluz, J., & Jarne, G. (2016). Stability of vertically differentiated Cournot and Bertrand-type models when firms are boundedly rational. *Annals of Operations Research, 238(1-2),* 1-25.

Andaluz, J., & Jarne, G. (2019). On price stability and the nature of product differentiation. *Journal of Evolutionary Economics*, *29(2),* 741-762.

Andaluz, J., Elsadany, A. A., & Jarne, G. (2017). Nonlinear Cournot and Bertrand-type dynamic triopoly with differentiated products and heterogeneous expectations. *Mathematics and Computers in Simulation*, *132*, 86-99.

Andaluz, J., Elsadany, A. A., & Jarne, G. (2020). Dynamic Cournot oligopoly game based on general isoelastic demand. *Nonlinear Dynamics*, *99(2),* 1053-1063.

Askar, S. S. (2014). On Cournot–Bertrand competition with differentiated products. *Annals of Operations Research*, *223*(1), 81-93.

Baumol, W.J. (1959). Business Behavior, Value and Growth. Nueva York: Harcourt & C.

Berle, A.A., y G. Means (1932). The Modern Corporation and Private Property. Nueva York: The Commerce Clearing House.

Bertrand, J. (1883). Théorie mathématique de la richesse sociale. *Journal des savants*, *67(1883),* 499-508.

Bischi, G. I., & Naimzada, A. (2000). Global analysis of a dynamic duopoly game with bounded rationality. *In Advances in dynamic games and applications* (pp. 361-385). Birkhäuser, Boston, MA.

Bischi, G. I., Chiarella, C., Kopel, M., & Szidarovszky, F. (2010). Nonlinear oligopolies. Berlin: Springer.

Bischi, G. I., Naimzada, A. K., & Sbragia, L. (2007). Oligopoly games with local monopolistic approximation. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 62(3), 371-388.

Cerboni Baiardi, L., & Naimzada, A. K. (2018). Imitative and best response behaviors in a nonlinear Cournotian setting. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *28*(5), 055913.

Cerdá, E., Jimeno, J. L., & Pérez, J. (2004). Teoría de juegos (Vol. 53). Madrid, Spain: Pearson Educación.

Chamberlin, E. (1933). The Theory of monopolistic competition. Harvard University press. Cambridge (MA).

Chandler, A.D. (1990). Scale and Scope. The Dynamics of Industrial Capitalism. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Choi, C. J., & Shin, H. S. (1992). A comment on a model of vertical product differentiation. *The Journal of Industrial Economics*, 229-231.

Gibbons, R., & Murphy, K. J. (1990). Relative performance evaluation for chief executive officers. *ILR Review*, *43(3),* 30-S.

Basu, K. (1995). Stackelberg equilibrium in oligopoly: an explanation based on managerial incentives. *Economics Letters, 49(4),* 459-464.

Cournot, A. A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot*. chez L. Hachette.

Crespo, Ó. V., Arnal, J. T., & García-Brazales, Á. R. (2005). Las raíces intelectuales de la economía evolutiva. *Revista de Historia Economica-Journal of Iberian and Latin American Economic History*, *23*(1), 177-186.

Dixit, A. K., & Stiglitz, J. E. (1977). Monopolistic competition and optimum product diversity. *The American economic review*, *67(3),* 297-308.

Elsadany, A. A., Agiza, H. N., & Elabbasy, E. M. (2013). Complex dynamics and chaos control of heterogeneous quadropoly game. *Applied Mathematics and Computation*, *219*(24), 11110-11118.

Fanti, L., & Gori, L. (2012). The dynamics of a differentiated duopoly with quantity competition. *Economic Modelling*, *29*(2), 421-427.

Fanti, L., & Gori, L. (2013). Stability analysis in a Bertrand duopoly with different product quality and heterogeneous expectations. *Journal of Industry, Competition and Trade*, *13*(4), 481-501.

Fanti, L., Gori, L., & Sodini, M. (2015). Nonlinear dynamics in a Cournot duopoly with isoelastic demand. *Mathematics and Computers in Simulation*, *108,* 129-143.

Fershtman C, Judd K. (1987). Equilibrium incentives in oligopoly. *American Economic Review 77*: 927–940.

Funcia, J. A., Avilés, J. C., & Jarne, G. J. (2021). On the dynamic stability of the Cournot duopoly solution under bounded rationality. *Rect@: Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, *22(1),* 51-62.

Gabszewicz, J. J., & Wauthy, X. Y. (2014). Vertical product differentiation and two-sided markets. *Economics Letters*, *123(1)*, 58-61.

Gabszwicz, J. J., & Thisse, J. F. (1986). On the nature of competition with differentiated products. *The Economic Journal*, 160-172.

Gandolfo, G. (1976). Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica (No. 04; HB135, G3.).

Gandolfo, G. (2010). Economic dynamics: study edition. Springer.

Gibbons R, Murphy KJ. (1990). Relative performance evaluation for Chief Executive Officers. *Industrial and Labor Relations Review 43*: 30–51.

Grossman, G. M., & Shapiro, C. (1984). Informative advertising with differentiated products. *The Review of Economic Studies*, *51(1)*, 63-81.

Hamilton, S. F. (2009). Informative advertising in differentiated oligopoly markets. *International Journal of Industrial Organization, 27(1),* 60-69.

Hotelling, H. (1929). Stability in competition. *Econon J 29*, 41-57

Jansen T, Van Lier A, Van Witterloostuijn A. (2009). On the Impact of Managerial Bonus Systems on Firm Profit and Market Competition: The Cases of Pure Profit, Sales, Market Share and Realative Profits Compared. *Managerial and Decision Economics, vol 30,* pp. 141-152.

Kopel, M. (1996). Simple and complex adjustment dynamics in Cournot duopoly models. *Chaos, Solitons & Fractals*, *7*(12), 2031-2048.

Kotz, D. M. (2015). Neoliberalism, globalization, financialization: Understanding post-1980 capitalism. *The restructuring of capitalism in our time*.

Lancaster, K. J. (1966). A new approach to consumer theory. *Journal of political economy, 74(2)*, 132-157.

Liu, Q., & Zhang, D. (2013). Dynamic pricing competition with strategic customers under vertical product differentiation. *Management Science*, *59*(1), 84-101.

Marris, R. (1964). The Economic Theory of <<Managerial>> capitalism. Londres: Macmillan.

Matouk, A. E., Elsadany, A. A., & Xin, B. (2017). Neimark–Sacker bifurcation analysis and complex nonlinear dynamics in a heterogeneous quadropoly game with an isoelastic demand function. *Nonlinear Dynamics*, *89*(4), 2533-2552.

Miller N, Pazgal A. (2002). Relative performance as a strategic commitment mechanism. *Managerial and Decision Economics 23*: 51–68.

Motta, M. (1992). Cooperative R&D and vertical product differentiation. *International Journal of Industrial Organization, 10(4)*, 643-661.

Motta, M. (1993). Endogenous quality choice: Price versus quantity competition. *The Journal of Industrial Economics, 49*, 113-131.

Mussa, M., & Rosen, S. (1978). Monopoly and product quality. *Journal of Economic theory, 18(2)*, 301-317.

Puu, T. (1991). Chaos in duopoly pricing. Chaos, Solitons & Fractals, 1(6), 573-581.

Puu, T. (1998). The chaotic duopolists revisited. *Journal of Economic Behavior & Organization*, *33*(3-4), 385-394.

Roncaglia, A. (2019). La era de la disgregación: historia del pensamiento económico contemporáneo (Vol. 139). Prensas de la Universidad de Zaragoza.

Shaked, A., & Sutton, J. (1982). Relaxing price competition through product differentiation. *The review of economic studies*, 3-13.

Singh N, Vives, X. (1984). Price and quantity competition in a differentiated duopoly. *Rand Journal of Economics 15*: 546– 554.

Sklivas SD. (1987). The strategic choice of managerial incentives. *Rand Journal of Economics 18*: 452–458.

Soberman, D. A. (2004). Research note: Additional learning and implications on the role of informative advertising. *Management Science, 50(12)*, 1744-1750.

Tramontana, F., & Elsadany, A. E. A. (2012). Heterogeneous triopoly game with isoelastic demand function. *Nonlinear Dynamics*, *68*(1), 187-193.

Vickers, J. (1985). Delegation and the Theory of the Firm. *The Economic Journal, 95*, 138-147.

Wauthy, X. (1996). Quality choice in models of vertical differentiation. *The Journal of Industrial Economics,* 345-353.

Winter, S. G., & Nelson, R. R. (1982). An evolutionary theory of economic change. *University of Illinois at Urbana-Champaign's Academy for Entrepreneurial Leadership Historical Research Reference in Entrepreneurship*.

Yu, Y. (2022). The stability of a dynamic duopoly Cournot–Bertrand game model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *413*, 114399.